И. А. Каплан

# Практические занятия по высшей математике

$$df = f'(x)\,dx$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$-\frac{z^2}{c^2} = 0$$

И. А. КАПЛАН

# ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть III

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Издание 3-е, стереотипное)*

Часть IV

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

*(Издание 2-е, стереотипное)*



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1971

Книга содержит разбор и подробное решение типовых задач по интегральному исчислению и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, кратным и криволинейным интегралам.

Большое количество задач для упражнений снабжено указаниями, промежуточными результатами и ответами.

Книга соответствует новой программе по высшей математике. Она рассчитана на студентов высших технических учебных заведений, а также может быть полезна преподавателям, ведущим практические занятия.

Ответственный редактор
кандидат физико-математических
наук доцент *Р. В. Солодовников*

$\frac{2-2-3}{22-71}$

*ХАРЬКОВСКАЯ ТИПООФСЕТНАЯ ФАБРИКА «КОММУНИСТ»*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Часть III

## Часть IV

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга содержит практические занятия по интегральному исчислению функций одной независимой переменной и интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, кратным и криволинейным интегралам.

Как и первые две части, вышедшие ранее, книга рассчитана прежде всего на студентов, обучающихся заочно и по вечерней системе.

Она написана в полном соответствии с новой программой по высшей математике для высших технических учебных заведений.

Весь материал книги разделен на отдельные практические занятия. В каждое из них включены основные положения теории, формулы, теоремы, определения и подробное решение типовых задач различной степени трудности с их полным анализом, а также предлагаются задачи для самостоятельного решения с методическими указаниями, промежуточными результатами и ответами. Многие задачи решаются различными способами, и целесообразность этих способов сравнивается.

Такое построение книги предоставляет студенту широкие возможности для активной самостоятельной работы.

Студент, пользующийся этим пособием, должен перед каждым практическим занятием выучить относящийся к нему раздел теории, внимательно, с выполнением всех действий на бумаге, разобрать решенные задачи и только после этого приступить к решению задач, предложенных для самостоятельного решения.

Книга может быть полезна и студентам, обучающимся в стационарных высших технических учебных заведениях, а также преподавателям, ведущим практические занятия.

Автор приносит глубокую благодарность рецензенту этой книги доктору физико-математических наук профессору Г. М. Баженову и её ответственному редактору кандидату физико-математических наук доценту Р. В. Солодовникову, ценные советы и замечания которых способствовали значительному улучшению книги.

Автор признателен сотрудникам кафедры высшей математики Харьковского инженерно-строительного института В. Г. Александрову, Э. Б. Александровой, И. М. Каневской, З. Ф. Паскаловой, В. М. Аветисовой и Л. В. Олейник, проверившим ответы к задачам, а также Р. А. Ежовой за помощь в оформлении рукописи.

# Часть III

# Практические занятия по интегральному исчислению и интегрированию дифференциальных уравнений

## ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Первообразная функция и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Основной задачей дифференциального исчисления является определение для заданной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или ее дифференциала $F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Обратная задача, состоящая в определении функции $F(x)$ по ее известным производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)\,dx$, представляет собой основную задачу интегрального исчисления.

Операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

***Определение.*** *Первообразной функцией* (короче: первообразной) *функции* $f(x)$, *определенной на отрезке* $[a, b]$, *называется функция* $F(x)$, *определенная на том же отрезке и удовлетворяющая условию*

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)\,dx. \tag{1,1}$$

Процесс нахождения первообразной функции для заданной функции называется интегрированием.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функция $F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная величина, также является первообразной функции $f(x)$. Таким образом, если функция $f(x)$ имеет первообразную, то она имеет их и бесчисленное множество, причем все они отличаются одна от другой только постоянным слагаемым.

***Определение.*** *При соблюдении равенств (1,1) выражение* $F(x) + C$, *где* $C$ — *произвольная постоянная величина, называется* ***неопределенным интегралом*** *функции* $f(x)$ *и обозначается символом:*

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx. \tag{1,2}$$

**Здесь знак $\int$ называется интегралом, $f(x)$ — подынтегральной функцией, а произведение $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением.**

Наличие в этой формуле произвольной постоянной величины $C$ объясняет, почему интеграл $\int f(x)\,dx$ называется неопределенным.

Равенство (1,2) дает самый общий вид первообразной функции.

Вопрос о том, имеет ли заданная функция $f(x)$ первообразную, решается основной теоремой интегрального исчисления:

***Теорема.*** *Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то во всех точках этого отрезка она имеет первообразную, которая на этом отрезке также непрерывна.*

## СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Если $a$ — постоянная величина, то

$$\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \tag{1,3}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx. \tag{1,4}$$

3. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$ (1,5)

т. е. знак дифференциала $d$ и знак интеграла $\int$, когда первый помещен перед вторым, взаимно погашаются (иногда говорят взаимно сокращаются или взаимно уничтожаются).

4. $\int dF(x) = F(x) + C,$ (1,6),

т. е. знаки $d$ и $\int$ взаимно погашаются также и тогда, когда знак интеграла стоит перед знаком дифференциала, но в этом случае к $F(x)$ нужно прибавить произвольную постоянную.

Формулу (1,6) можно переписать так: $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$.

5. $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$ (1,6а)

## ОСНОВНАЯ ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

Во всех формулах под $u$ понимается или независимая переменная, или произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке.

Каждая из формул этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подынтегральной функции.

Интегралы, помещенные в таблице, называются табличными.

1. $\int 0 \cdot dx = C.$ (1,7)

2. $\int du = u + C.$ (1,8)

3. $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$ (1,9)

($n$ — постоянная величина).

Частными случаями этой формулы являются следующие две:

4. $\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}} + C$ (1,10)

($n$ — постоянная величина; $n \neq 1$).

5. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$ (1,11)

6. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$ (1,12)

7. $\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C\,(a > 0,\ a \neq 1).$ (1,13)

8. $\int e^u\, du = e^u + C.$ (1,14)

9. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ (1,15)

10. $\int \cos u du = \sin u + C.$ (1,16)

11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$ (1,17)

12. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$ (1,18)

13. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$ (1,19)

14. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$ (1,20)

15. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$ (1,21)

16. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$ (1,22)

17. $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C.$ (1,23)

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$ (1,24)

19. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$ (1,25)

20. $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C.$ (1,26)

21. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$ (1,27)

22. $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$ (1,28)

Таблицу формул читатель должен выучить наизусть. Это и следующие два практические занятия отводятся для непосредственного интегрирования, под которым понимается вычисление интегралов с помощью таблицы основных интегралов. Навыки интегрирования приобретаются опытом, а потому рекомендуется решить как можно больше задач.

### 1. Упражнения в применении формул (1,9) — (1,12)

Перепишем формулу (1,9) в виде, который более удобен для ее практического применения.

Если $u$ есть функция независимой переменной $x$, то $du = u'\,dx$, и формула (1,9) перепишется так:

$$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1). \tag{1,29}$$

Следует обратить внимание на подынтегральную функцию $u^n u'$. Здесь $n$-я степень функции $u$ умножается на $u'$ — на производную основания степени $u$. Эта формула верна только при наличии множителя $u'$. В правой части формулы функция $u$ находится в степени $n+1$, т. е. в степени, на единицу большей, чем под знаком интеграла, и $u^{n+1}$ делится на ее показатель степени $n+1$. Оговорка $n \neq -1$ существенна, так как если $n = -1$, то $n+1=0$, и тогда в правой части формулы знаменатель равен нулю. Когда $n=-1$, следует пользоваться формулой (1,12). В случае, когда $u$ — независимая переменная (например, $x$), $u'=1$ и формула (1,29) переписывается в виде

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C. \tag{1,30}$$

Первые упражнения связаны именно с этой формулой.

**Задача 1,1.** Вычислить интегралы: 1) $\int x\,dx$; 2) $\int x^3\,dx$; 3) $\int x^5\,dx$; 4) $\int \sqrt{x}\,dx$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ и самостоятельно проверить дифференцированием полученные результаты.

**Решение.** По формуле (1,30) находим:

1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$; 2) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$; 3) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$;

4) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; 5) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx =$

$= \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

В пятом примере проверка дает

$$\left(\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}.$$

Как и следовало ожидать, мы получили подынтегральную функцию.

**Задача 1,2.** Вычислить интегралы: 1) $\int 7x^5dx$; 2) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx$; 3) $\int \frac{6}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{4}{x^n}dx$; 5) $\int 5dx$, и проверить дифференцированием полученные результаты.

**Решение.** 1) Вынося за знак интеграла постоянный множитель 7, получаем: $\int 7x^5dx = 7\int x^5dx = 7\cdot\frac{x^6}{6} + C$;

2) $\int 3\sqrt[4]{x^3}dx = 3\int x^{\frac{3}{4}}dx = 3\,\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$;

3) $\int \frac{6}{x^2}dx = 6\int x^{-2}dx = 6\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{6}{x} + C.$

**Замечание.** Можно было сразу применить формулу (1,10), положив в ней $u = x$, $du = dx$, $n = 2$.

4) $\int \frac{4}{x^n}dx = 4\int x^{-n}dx = 4\,\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{4}{1-n}x^{1-n} + C$

(см. замечание к предыдущей задаче);

5) $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

(применена формула (1,8), в которой взято $u = x$).

**Задача 1,3.** Вычислить интегралы: 1) $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4)\,dx$; 2) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx.$

**Указание.** При решении этих примеров следует применить формулу (1,4), выражающую правило интегрирования алгебраической суммы, и формулу (1,30).

При вычислении интеграла от суммы нескольких функций сумму произвольных постоянных, которая при этом получается, заменяют одной произвольной постоянной, обозначаемой обычно буквой $C$.

**Ответ:** 1) $\frac{x^4}{4} - x^3 + 5\frac{x^2}{2} - 4x + C$;

2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - 8\sqrt{x} - \frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2} + C.$

**Замечание.** В этом примере при вычислении каждого интеграла можно сразу воспользоваться формулой (1,10), заменив в ней $u$ на $x$.

**Задача 1,4** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \sqrt[n]{x}\,dx$; 2) $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx$; 3) $\int (ax^2 + bx + c)\,dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{n}{n+1} x \sqrt[n]{x} + C$; 2) $\frac{n}{m+n} x \sqrt[n]{x^m} + C$; 3) $\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + $ $+ cx + C$.

**Задача 1,5** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}\right) dx$; 2) $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3}\right) dx$.

**Ответ.** 1) $15\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + 14\sqrt[7]{x^2} + C$;

$$2)\ -\frac{3}{4}\frac{1}{x^4} + \frac{2}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + C.$$

**Задача 1,6.** Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

**Решение.** Для вычисления интеграла следует разделить многочлен, стоящий в числителе, на знаменатель. Если это выполнить, то получится, что

$$I_1 = \int \left(x^{\frac{11}{3}} - 3x^{\frac{5}{3}} + 5 - 7x^{\frac{2}{3}} + 6x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \frac{3}{14} x^{\frac{14}{3}} - \frac{9}{8} x^{\frac{8}{3}} + 5x -$$

$$- \frac{21}{5} x^{\frac{5}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}} + C = \sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14} x^4 - \frac{9}{8} x^2 + 5\sqrt[3]{x} - \frac{21}{5} x + 9\right) + C.$$

**Задача 1,7** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int (3x^2 - 5)^3\,dx$; 2) $\int \frac{x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{27}{7} x^7 - 27x^5 + 75x^3 - 125x + C$;

$$2)\ 4\sqrt[4]{x}\left(\frac{x^6}{25} + \frac{x^5}{7} - \frac{7}{17} x^4\right) + \frac{60}{7}\sqrt[12]{x^7} + C.$$

**Задача 1,8.** Какая функция имеет производную $5x^2 - 7x + 4$ и принимает значение, равное 3, при $x = 1$?

**Решение.** В задаче требуется найти функцию, для которой известна ее производная, т. е. требуется найти первообразную функцию для функции $5x^2 - 7x + 4$.

Из бесчисленного множества первообразных, которые имеет эта функция, следует отобрать ту, которая равна 3 при $x = 1$.

Если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функция, то в самом общем виде она на основании формулы (1,2) запишется так:

$$F(x)+C=\int(5x^2-7x+4)\,dx;$$

$$F(x)+C=\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x.$$

В условии задачи дано, что $F(1)=3$, для того чтобы определить произвольную постоянную. Полагая в последнем равенстве $x=1$, а $F(1)=3$, получаем

$$3+C=\frac{5}{3}-\frac{7}{2}+4,$$

отсюда $C=-\frac{5}{6}$. Тогда $F(x)-\frac{5}{6}=\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x$, а искомая функция $F(x)=\frac{5}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x+\frac{5}{6}$.

Таким образом, мы нашли функцию $F(x)$, производная которой равна $5x^2-7x+4$, и кроме того $F(1)=3$.

**Задача 1,9** (для самостоятельного решения). Какая функция имеет производную $3x^2+2x+1$ и принимает значение, равное 2, при $x=0$?

**Ответ.** Искомая функция $F(x)=x^3+x^2+x+2$ $(C=2)$.

**Задача 1,10** (для самостоятельного решения). Какая функция имеет производную $5-9x+4x^2$, если известно, что при $x=2$ эта функция равна 50?

**Ответ.** Искомая функция $F(x)=5x-\frac{9}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{142}{3}$.

**Задача 1,11** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx;\quad 2)\ \int\frac{(4+2\sqrt{x})(x^3+5)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

Указание. В первом интеграле числитель сначала возвести в куб, полученный многочлен разделить на $\sqrt{x}$ и после этого проинтегрировать. Во втором интеграле в числителе перемножить многочлены, произведение разделить на $\sqrt[3]{x^2}$, после чего выполнить интегрирование.

**Ответ.** 1) $2\sqrt{x}+3x+2x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}+C$;

2) $\frac{6}{5}x^3\sqrt[3]{x}+\frac{12}{23}x^3\sqrt[6]{x^5}+60\sqrt[3]{x}+12\sqrt[6]{x^5}+C$.

**Задача 1,12.** Вычислить интегралы: 1) $\int(x^2+5)^7\,2x\,dx$;

2) $\int(3x^3+5x^2-8)(9x^2+10x)\,dx$; 3) $\int\sqrt{x^2+6}\cdot 2x\,dx$;

4) $\int(2x^2+7)^3x\,dx$; 5) $\int\sqrt[3]{x^3+8}\,x^2\,dx$; 6) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx$.

**Решение.** Все эти примеры решаются с помощью формулы (1,29). Прежде чем применять ее, надо выяснить: 1) какую из функций, стоящих под интегралом, следует принять равной $u$ и 2) есть ли под интегралом множитель, равный $u'$.

1) В первом примере следует взять $u = x^2 + 5$. Множитель $2x$ является производной функции $u$, так как $(x^2+5)' = 2x$. Поэтому на основании (1,29) при $n = 7$ имеем

$$\int \underbrace{(x^2+5)^7}_{u^7} \cdot \underbrace{2x}_{u'}\, dx = \frac{(x^2+5)^8}{8} + C.$$

Если бы подынтегральная функция не содержала множитель $2x$, то применить формулу (1,29) было бы нельзя. В этом случае следовало бы вычислить по формуле Ньютона $(x^2+5)^7$ и интегрировать полученную сумму функций.

2) Пример второй решается аналогично. Считая, что $u = 3x^3 + 5x^2 - 8$, и замечая, что множитель $9x^2 + 10x$ есть производная функции $u$, а $n = 3$, по формуле (1,29) находим

$$\int \underbrace{(3x^3+5x^2-8)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{(9x^2+10x)}_{u'}\, dx = \frac{(3x^3+5x^2-8)^4}{4} + C.$$

Здесь опять-таки отметим, что наличие множителя $9x^2 + 10x$, который на первый взгляд осложнил подынтегральную функцию, на самом деле облегчило интегрирование, так как если бы множитель $9x^2 + 10x$ отсутствовал, то для вычисления интеграла следовало бы возвести $3x^3 + 5x^2 - 8$ в куб, что потребовало бы значительно больших выкладок.

3) Этот пример также легко решается, так как подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$. Действительно, полагая $u = x^2 + 6$, мы замечаем, что множитель $2x$ равен $u'$, $n = \frac{1}{2}$, а потому

$$\int \sqrt{x^2+6} \cdot 2x\, dx = \int \underbrace{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{2x}_{u'}\, dx = \frac{(x^2+6)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x^2+6)\sqrt{x^2+6} + C.$$

Если бы подынтегральная функция не содержала множитель $2x$, то вычисление интеграла $\int \sqrt{x^2+6}\, dx$ потребовало бы значительно большей работы. Еще раз напоминаем читателю, что формула (1,29) применима только тогда, когда подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$ или может быть преобразована к этому виду.

4) В этом примере подынтегральная функция равна $(2x^2+7)^3 x$. Если принять, что $u=2x^2+7$, то $u'=4x$. Множитель $4x$ отсутствует под знаком интеграла, а потому подынтегральная функция не имеет вида $u^n u'$.

К такому виду мы легко придем, если запишем подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{4}(2x^2+7)^3 4x$, т. е. если умножим и разделим подынтегральную функцию на 4, отчего ее значение не изменится. При интегрировании постоянный множитель $\frac{1}{4}$ вынесем за знак интеграла и применим формулу (1,29). Имеем

$$\int (2x^2+7)^3 x\,dx = \frac{1}{4}\int \underbrace{(2x^2+7)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{4x}_{u'}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{(2x^2+7)^4}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{16}(2x^2+7)^4 + C.$$

В этом примере подынтегральная функция не имела вид $u^n u'$, но умножением на постоянную величину легко была к нему приведена.

5) Подынтегральная функция в этом примере может быть записана так: $(x^3+8)^{\frac{1}{3}} x^2$. Если принять $u=x^3+8$, то $u'=3x^2$. У нас же вместо множителя $3x^2$ есть множитель $x^2$.

Умножим на 3 подынтегральную функцию. Чтобы она не изменила своего значения, разделим ее на 3 и получим $\frac{1}{3}(x^3+8)^{\frac{1}{3}} 3x^2$. При интегрировании множитель $\frac{1}{3}$ вынесем за знак интеграла, а под интегралом окажется выражение вида $u^n u'$ $\left(n=\frac{1}{3}\right)$. Применяя формулу (1,29), получаем

$$\int \sqrt[3]{x^3+8}\, x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(x^3+8)^{\frac{1}{3}}}_{u^{\frac{1}{3}}} \cdot \underbrace{3x^2}_{u'}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3+8)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{(x^3+8)\sqrt[3]{x^3+8}}{4} + C.$$

6) В этом примере опять-таки придется преобразовать подынтегральную функцию так, чтобы она приобрела вид $u^n u'$. Представим ее в виде $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x$. Если принять, что $u=a^2-x^2$, то $u'=-2x$. Значит, чтобы под знаком интеграла был множитель $-2x$, подынтегральную функцию надо умножить на $-2$.

Выполняя это умножение и деля одновременно на —2, получаем: $(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}x = -\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)$. При интегрировании множитель $-\frac{1}{2}$ вынесем за знак интеграла, тогда под интегралом окажется выражение вида $u^n u'$ и формула (1,29) может быть применена. Записи расположатся так:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\cdot dx = -\frac{1}{2}\int \underbrace{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{(-2x)}_{u^1}\,dx = -\frac{1}{2}\,\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= -\frac{1}{3}(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

**Задача 1,13** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int (5x+4)^4\,dx$; 2) $\int (9+7x^2)^5 x\,dx$; 3) $\int (8ax^2+9bx^3)^{\frac{4}{3}}\times$ $\times(16ax+27bx^2)\,dx$; 4) $\int \sqrt{4x^2+8x}\,(2x+2)\,dx$;
5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{7+x^3}}$; 6) $\int \sqrt{1-x}\,dx$.

Указания. В пятом интеграле: $\frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}} = (7+x^3)^{-\frac{1}{2}}x^2 =$ $= \frac{1}{3}\underbrace{(7+x^3)}_{u}{}^{-\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{3x^2}_{u'}$.

В шестом интеграле: $\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = -\underbrace{(1-x)}_{u}{}^{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{(-1)}_{u'}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{25}(5x+4)^5+C$; 2) $\frac{1}{84}(9+7x^2)^6+C$;
3) $\frac{3}{7}(8ax^2+9bx^3)^{\frac{7}{3}}+C$; 4) $\frac{1}{6}(4x^2+8x)\sqrt{4x^2+8x}+C$;
5) $\frac{2}{3}\sqrt{7+x^3}+C$; 6) $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$.

**Задача 1,14.** Вычислить интегралы: 1) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$;
2) $\int \cos^5 4x\sin 4x\,dx$; 3) $\int \frac{x^2\,dx}{(4x^3+9)^4}$; 4) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}\,dx$; 5) $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx$;
6) $\int \operatorname{tg}^2 x\sec^2 x\,dx$; 7) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\,dx$.

**Решение.** 1) Подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$. Действительно, если $u=\sin x$, то $u'=\cos x$, $n=3$. Поэтому, применяя формулу (1,29), имеем

$$\int \underbrace{\sin^3 x}_{u^3}\cdot\underbrace{\cos x}_{u'}\,dx = \frac{\sin^4 x}{4}+C.$$

2) В этом примере подынтегральная функция $\cos^5 4x \sin 4x$ не имеет вид $u^n u'$, так как если $u = \cos 4x$, то $u' = -4 \sin 4x$ ($n=5$). Значит, недостает множителя $-4$. Умножая и деля на $-4$ и вынося $-\frac{1}{4}$ за знак интеграла, получим:

$$\int \cos^5 4x \sin 4x \, dx = -\frac{1}{4} \int \underbrace{\cos^5 4x}_{u^5} \cdot \underbrace{(-4 \sin 4x)}_{u'} dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{\cos^6 4x}{6} + C = -\frac{1}{24} \cos^6 4x + C.$$

3) Представим подынтегральную функцию в виде $(4x^3+9)^{-4} x^2$. Возьмем $u = 4x^3 + 9$, тогда $u' = 12x^2$ ($n = -4$). Чтобы подынтегральная функция приобрела вид $u^n u'$, её надо умножить на 12. Умножив и разделив полученное выражение на 12, вынесем множитель $\frac{1}{12}$ за знак интеграла. Тогда получим

$$\int \frac{x^2 \, dx}{(4x^3+9)^4} = \frac{1}{12} \int \underbrace{(4x^3+9)^{-4}}_{u^{-4}} \cdot \underbrace{12x^2}_{u'} dx = \frac{1}{12} \frac{(4x^3+9)^{-4+1}}{-4+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{36} \frac{1}{(4x^3+9)^3} + C.$$

4) Представим подынтегральную функцию в виде $\operatorname{arctg}^3 x \times \times \frac{1}{1+x^2}$. Положив $u = \operatorname{arctg} x$, получим $u' = \frac{1}{1+x^2}$, и подынтегральная функция будет иметь вид $u^n u'$ ($n = 3$). Поэтому без дополнительных преобразований можем применить формулу (1,29). Найдем

$$\int \operatorname{arctg}^3 x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$$

5) Запишем подынтегральную функцию в виде $\sin^{-5} x \cos x$. Возьмем $u = \sin x$, тогда, $u' = \cos x$. В таком случае без всяких преобразований подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$, а потому на основании формулы (1,29) получаем

$$\int \underbrace{\sin^{-5} x}_{u^{-5}} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'} dx = \frac{\sin^{-4} x}{-4} + C = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x} + C.$$

6) Положим, что $u = \operatorname{tg} x$, тогда $u' = \sec^2 x$ и подынтегральная функция имеет вид $u^n u'$ ($n = 2$), никаких дополнительных преобразований делать не требуется. На основании (1,29) сразу получаем

$$\int \underbrace{\operatorname{tg}^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{u'} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

7) Представим подынтегральную функцию в виде $\cos^{\frac{2}{3}} x \sin x$. Возьмем $u = \cos x$, тогда $u' = -\sin x$, $n = \frac{2}{3}$. Чтобы получить

под знаком интеграла выражение вида $u^n u'$, но не изменить величину подынтегральной функции, умножим и разделим ее на $-1$. По формуле (1,29) получаем

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin x\,dx = -\int \underbrace{\cos^{\frac{2}{3}} x}_{u^{\frac{2}{3}}} \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{u'}\,dx = -\frac{\cos^{\frac{5}{3}} x}{\frac{5}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{5}\cos x\sqrt[3]{\cos^2 x} + C.$$

Решим еще одну аналогичную задачу.

**Задача 1,15.** Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

2) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$; 3) $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}$; 4) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$;

5) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,dx$; 6) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}\,dx$.

Решение. 1) Представим $\frac{\ln x}{x}$ в виде $(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$. Полагая $u = \ln x$, получим $u' = \frac{1}{x}$. Подынтегральная функция $\frac{\ln x}{x}$ приобретает вид $u^n u'$ $(n = 1)$, и тогда $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$

2) $\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} = (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Считая, что $u = \arcsin x$, имеем $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, а потому по формуле (1,29)

$$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx = \int (\arcsin x)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{(\arcsin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + C.$$

3) Выражение $\frac{1}{x\ln^4 x} = (\ln x)^{-4}\cdot\frac{1}{x}$. Если положить $u = \ln x$, то $u' = \frac{1}{x}$, и подынтегральная функция $(\ln x)^{-4}\cdot\frac{1}{x}$ приобретет вид $u^n u'$ $(n = -4)$, а потому по формуле (1,29)

$$\int \frac{dx}{x\ln^4 x} = \int \underbrace{(\ln x)^{-4}}_{u^{-4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\,dx = \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$$

4) Подынтегральную функцию можно преобразовать так: $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x$. Положим, что $u=1+x^2$, тогда $u'=$ $=2x$. Если $\frac{1}{2}$ вынести за знак интеграла, то подынтегральная функция примет вид $u^n u'$ и формулу (1,29) применить можно:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\underbrace{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{u^{-\frac{1}{2}}}\cdot\underbrace{2x\,dx}_{u'}=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

При решении этого примера можно было сразу воспользоваться формулой (1,11), переписав подынтегральную функцию в виде $\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{u'\,dx}{\sqrt{u}}$.

Тогда

$$\int\frac{u'\,dx}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C. \tag{1,31}$$

Заметьте, что числитель дроби под знаком интеграла равен производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем. Если положить $u=1+x^2$, числитель дроби переписать в виде $x=\frac{1}{2}\cdot 2x$ и вынести $\frac{1}{2}$ за знак интеграла, то окажется, что числитель дроби равен производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем. На основании формулы (1,31)

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+x^2}+C=\sqrt{1+x^2}+C.$$

5) Подынтегральную функцию перепишем так: $\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}=$ $=-\frac{-\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}$. Теперь числитель дроби равен производной функции, стоящей под корнем в знаменателе. Поэтому на основании формулы (1,31) имеем

$$\int\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx=-\int\frac{-\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}dx=-2\sqrt{5+\cos x}+C.$$

6) Принимая $u=3-\sin^2 x$, получаем, что $u'=-2\sin x\cos x$. Переписываем подынтегральную функцию в виде $\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}=$ $=-\frac{1}{2}\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}$. Теперь мы можем применить формулу (1,31), так как числитель второй дроби является производной функции, стоящей в знаменателе под квадратным корнем:

$$\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{-2\sin x\cos x}{\sqrt{3-\sin^2 x}}dx=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3-\sin^2 x}+$$
$$+C=-\sqrt{3-\sin^2 x}+C.$$

Ниже предлагаются для самостоятельного решения десять примеров на применение формул (1,29) и (1,31).

**Задача 1,16** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$; 3) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 4) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; 5) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; 6) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$; 7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}} dx$; 8) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-3x^2}}$; 9) $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\, dx$; 10) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} dx$.

**Ответ.** 1) $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}^6 x + C$; 2) $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x} + C$;

3) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$; 4) $\frac{1}{4}\arcsin^4 x + C$;

5) $\frac{3}{4}\operatorname{arctg} x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} + C$; 6) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C$;

7) $2\sqrt{7-\cos^2 x} + C$; 8) $-\frac{2}{3}\sqrt{1-3x^2} + C$;

9) $\frac{1}{4}\operatorname{sh}^4 x + C$; 10) $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + C$.

Чтобы закончить это практическое занятие, нам остается выполнить упражнения на применение формулы (1,12). Полагая, что $u$ есть функция независимой переменной $x$: $u = u(x)$, а $du = u'\,dx$, эту формулу можно переписать в виде, более удобном для применения:

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C. \tag{1,32}$$

Следует обратить внимание на подынтегральную функцию $\frac{u'}{u}$: числитель дроби является производной ее знаменателя, а первообразная функция равна натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя. Если $u = x$, то $u' = 1$, и формула (1,32) запишется так:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{1,33}$$

**Задача 1,17.** Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x+a}$;

2) $\int \frac{2x}{x^2+5} dx$; 3) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$; 4) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$;

5) $\int \frac{dx}{a-x}$; 6) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 7) $\int \frac{x^2}{4+3x^3} dx$;

8) $\int \frac{x}{1+x} dx$; 9) $\int \frac{e^x}{5+e^x} dx$; 10) $\int \frac{x^3}{x+2} dx$.

**Решение.** 1) Подынтегральная функция $\frac{1}{x+a}$ — дробь, числитель которой является производной знаменателя $(x+a)$. Дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, а потому на основании формулы (1,32) интеграл равен натуральному логарифму абсолютной величины знаменателя

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

2) И в этом примере подынтегральная функция — дробь, числитель которой есть производная знаменателя: $u = x^2 + 5$, $u' = 2x$, дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, формула (1,32) может быть применена:

$$\int \frac{2x}{x^2+5} dx = \ln(x^2+5) + C.$$

Здесь $x^2+5$ не следует писать под знаком абсолютной величины, так как $x^2 + 5 > 0$ при любом действительном значении $x$.

3) Стоящую под знаком интеграла дробь $\frac{\sin x}{1+\cos x}$ можно преобразовать так, чтобы ее числитель стал равным производной знаменателя.

Действительно, $\frac{\sin x}{1+\cos x} = -\frac{-\sin x}{1+\cos x}$. Если $u = 1+\cos x$, то $u' = -\sin x$, дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, формула (1,32) применима и

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x} dx = -\ln|1+\cos x| + C.$$

4) Дробь $\frac{x}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1-x^2}$. Если $u = 1-x^2$, то $u' = -2x$, и числитель второй дроби равен производной знаменателя. Эта дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$. Поэтому по формуле (1,32)

$$\int \frac{x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C.$$

5) Чтобы преобразовать дробь $\frac{1}{a-x}$ к виду $\frac{u'}{u}$, перепишем ее так: $\frac{1}{a-x} = -\frac{-1}{a-x}$. Если знаменатель дроби $a - x = u$, то $u' = -1$, числитель дроби равен производной знаменателя, и по формуле (1,32) получаем

$$\int \frac{dx}{a-x} = -\int \frac{-1}{a-x} dx = -\ln|a-x| + C.$$

6) Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x\ln x}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$. Если взять $u=\ln x$, то $u'=\frac{1}{x}$, и числитель дроби равен производной ее знаменателя. Поэтому на основании (1,32) имеем

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}dx=\ln|\ln x|+C.$$

7) Подынтегральную функцию можно преобразовать так, чтобы ее числитель был равен производной знаменателя: $\frac{x^2}{4+3x^3}=$ $=\frac{1}{9}\frac{9x^2}{4+3x^3}$. Принимаем, что $u=4+3x^3$, тогда $u'=9x^2$. Вторая дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, и по формуле (1,32) получаем

$$\int\frac{x^2}{4+3x^3}dx=\frac{1}{9}\int\frac{9x^2}{4+3x^3}dx=\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+C.$$

8) Дробь $\frac{x}{1+x}$ — рациональная, неправильная: степень ее числителя равна степени знаменателя. С помощью деления можно из этой дроби выделить целую часть. Действительно, если разделить $x$ на $x+1$, то получится $1-\frac{1}{x+1}$. Таким образом,

$$\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\int dx-\int\frac{1}{x+1}dx=x-\ln|x+1|+C$$

(применены формулы (1,8) и (1,32), при вычислении второго интеграла учтено, что числитель дроби 1 равен производной знаменателя дроби).

9) Если $u=5+e^x$, то $u'=e^x$. Дробь имеет вид $\frac{u'}{u}$, и по формуле (1,32) получаем

$$\int\frac{e^x}{5+e^x}dx=\ln(5+e^x)+C$$

(так как при любом значении $x$ имеет место неравенство: $5+$ $+e^x>0$, то выражение $5+e^x$ мы не поставили под знак абсолютной величины).

10) Дробь $\frac{x^3}{x+2}$ — неправильная, так как степень числителя больше степени знаменателя. Чтобы выделить целую часть, разделим $x^3$ на $x+2$ и получим $\frac{x^3}{x+2}=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}$, а потому

$$\int\frac{x^3}{x+2}dx=\int\left(x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}\right)dx=\int x^2\,dx-2\int x\,dx+$$
$$+4\int dx-8\int\frac{dx}{x+2}=\frac{x^3}{3}-x^2+4x-8\ln|x+2|+C.$$

В этом примере вместо деления $x^3$ на $x+2$ можно было представить дробь в таком виде:

$$\frac{x^3}{x+2}=\frac{x^3+8-8}{x+2}=\frac{x^3+8}{x+2}-\frac{8}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}-\frac{8}{x+2}=$$
$$=x^2-2x+4-\frac{8}{x+2}.$$

Аналогично в восьмом примере дробь $\frac{x}{1+x}=\frac{x+1-1}{1+x}=1-$ $-\frac{1}{1+x}$.

**Задача 1,18** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{a+bx}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{a^2-b^2x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$;

4) $\int\frac{dx}{\cos^2 x\operatorname{tg}x}$; 5) $\int\frac{\sin x}{5+7\cos x}dx$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

7) $\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}$; 8) $\int\frac{\sin 2x}{b^2\cos^2 x+a^2}dx$; 9) $\int\frac{x^4}{x-1}dx$;

10) $\int\frac{3x-2}{2x+3}dx$; 11) $\int\operatorname{tg}x\,dx$; 12) $\int\operatorname{ctg}x\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$ $\left(x\neq-\frac{a}{b}\right)$;

2) $-\frac{1}{2b^2}\ln|a^2-b^2x^2|+C$; 3) $\ln|\operatorname{arctg}x|+C$;

4) $\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 5) $-\frac{1}{7}\ln|5+7\cos x|+C$;

6) $\ln|\arcsin x|+C$ $(x\neq 0)$; 7) $-\ln|1-\ln x|+\ln C=\ln\left|\frac{C}{1-\ln x}\right|$;

8) $-\frac{1}{b^2}\ln|b^2\cos^2 x+a^2|+C$; 9) $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C$;

10) $\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}\ln|2x+3|+C$; 11) $-\ln|\cos x|+C$;

12) $\ln|\sin x|+C$.

## ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: **Интегрирование показательной и тригонометрических функций.**

На этом практическом занятии мы проведем упражнения в непосредственном интегрировании по формулам (1,13) — (1,20).

**1. Интегрирование показательной функции** (упражнения в применении формул (1,13) и (1,14)).

Придадим этим формулам вид, который более удобен для применения их на практике: считая $u$ функцией независимой переменной $x$: $u = u(x)$, запишем, что $du = u'\,dx$, а потому формулы (1,13) и (1,14) перепишутся в виде:

$$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2,1}$$

$$\int e^u u'\,dx = e^u + C. \tag{2,2}$$

Здесь следует обратить внимание на то, что подынтегральная функция в этих формулах содержит множитель $u'$, являющийся производной функции $u$, стоящей в показателе степени. Без этого множителя формулы (2,1) и (2,2) не верны. Если $x$ — независимая переменная, т. е. $u = x$, то $u' = 1$, формулы (2,1) и (2,2) перепишутся так:

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2,3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C. \tag{2,4}$$

**Задача 2,1.** Вычислить интегралы: 1) $\int 3^x\,dx$; 2) $\int (\sqrt{2})^x\,dx$; 3) $\int 4^{-x}\,dx$; 4) $\int e^{-x}\,dx$; 5) $\int 2^{3x}\,dx$; 6) $\int e^{5x}\,dx$.

**Решение.** 1) Этот пример не требует пояснений. Он решается непосредственным применением формулы (2,3). Полагая в ней $a = 3$, получаем $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

2) Точно так же полагая в (2,3) $a = \sqrt{2}$, получаем, что

$$\int (\sqrt{2})^x\,dx = \frac{(\sqrt{2})^x}{\ln \sqrt{2}} + C = \frac{2(\sqrt{2})^x}{\ln 2} + C.$$

3) Этот интеграл не может быть вычислен по формуле (2,3), так как в показателе степени стоит не $x$, а $-x$. Поэтому обратимся к формуле (2,1). Перепишем подынтегральную функцию в виде $4^{-x} = -4^{-x} \cdot (-1)$. Такое преобразование нам понадобилось для того, чтобы ввести множитель $-1$, который является производной от показателя степени $-x$. Теперь уже подынтегральная функция содержит производную от показателя степени, и мы получаем при $a = 4$, полагая, что $u = -x$:

$$\int 4^{-x}\,dx = \int -4^{-x}(-1)\,dx = -\int \underbrace{4^{-x}}_{4^u} \cdot \underbrace{(-1)}_{u'}\,dx = -\frac{4^{-x}}{\ln 4} + C.$$

4) Запишем, что $e^{-x} = -e^{-x}(-1)$ и применим формулу (2,2). Полагая в ней $u = -x$, имеем

$$\int e^{-x}\,dx = -\int \underbrace{e^{-x}}_{e^u} \cdot \underbrace{(-1)}_{u'}\,dx = -e^{-x} + C.$$

5) При решении этого примера формула (2,1) не может быть применена, так как подынтегральная функция не содержит множителя $u'$, являющегося производной от показателя степени $u = 3x$. Но так как $u' = 3$, введем такой множитель, умножив и разделив подынтегральную функцию на 3. Тогда можно будет применить формулу (2,1): $2^{3x} = \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3$. Поэтому

$$\int 2^{3x}\,dx = \int \frac{1}{3} \cdot 2^{3x} \cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{2^{3x}}_{2^u} \cdot \underbrace{3\,dx}_{u'} = \frac{1}{3}\frac{2^{3x}}{\ln 2} + C.$$

6) Поступая так же, как в предыдущем примере, получаем по формуле (2,2)

$$\int e^{5x}\,dx = \int \frac{1}{5} e^{5x} 5\,dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{e^{5x}}_{e^u} \cdot \underbrace{5\,dx}_{u'} = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

**Задача 2,2.** Вычислить интегралы: 1) $\int a^{kx}\,dx$; 2) $\int e^{kx}\,dx$;

3) $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$; 5) $\int 7^{x^2} x\,dx$; 6) $\int e^{x^3} x^2\,dx$;

7) $\int 2^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,dx$; 8) $\int e^{-(x^3+x+3)} (3x^2 + 1)\,dx$; 9) $\int e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}\,dx$;

10) $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx$.

**Решение.** 1) При вычислении этого интеграла следует иметь в виду, что $k$ — любое действительное число. Подынтегральная функция $a^{kx}$ не содержит множителя $u'$. Если $u = kx$, то $u' = k$. Чтобы ввести этот множитель, перепишем подынтегральную функцию так: $a^{kx} = \frac{1}{k} a^{kx} k$. Поэтому

$$\int a^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{a^{kx}}_{a^u} \cdot \underbrace{k\,dx}_{u'} = \frac{1}{k}\frac{a^{kx}}{\ln a} + C.$$

2) Применим рассуждения, проведенные в предыдущем примере: $e^{kx} = \frac{1}{k} e^{kx} k$, а потому

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}\int \underbrace{e^{kx}}_{e^u} \cdot \underbrace{k\,dx}_{u'} = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

Этот результат полезно запомнить. Зная его, сразу получаем, что например, $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$; $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2e^{\frac{x}{2}} + C$ $\left(\text{здесь } k = \frac{1}{2}, \frac{1}{k} = 2\right)$; $\int e^{-\frac{x}{3}}\,dx = -3e^{-\frac{x}{3}} + C$ $\left(\text{здесь } k = -\frac{1}{3}, \frac{1}{k} = -3\right)$, и т. д.

3) Здесь показатель степени $u=\sqrt{x}$, $u'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подынтегральная функция вместо этого множителя содержит множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Умножая и деля на $\frac{1}{2}$, получим $5^{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}}=2\cdot 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$, а поэтому по формуле (2,1) при $a=5$

$$\int 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int\underbrace{5^{\sqrt{x}}}_{5^u}\cdot\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'}dx=2\cdot\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}+C.$$

4) В примере $u=\cos x$; $u'=-\sin x$. Значит, недостает множителя $-1$. Подынтегральную функцию представим в виде $e^{\cos x}\sin x=$ $=-e^{\cos x}(-\sin x)$, поэтому по формуле (2,2)

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int\underbrace{e^{\cos x}}_{e^u}\underbrace{(-\sin x)}_{u'}dx=-e^{\cos x}+C.$$

5) Здесь $u=x^2$; $u'=2x$.

Подынтегральная же функция содержит множитель $x$. Умножая и деля ее на 2, запишем, что $7^{x^2}x=\frac{1}{2}\cdot 7^{x^2}\cdot 2x$, а $\int 7^{x^2}x\,dx=$ $=\frac{1}{2}\int\underbrace{7^{x^2}}_{7^u}\cdot\underbrace{2x}_{u'}dx=\frac{1}{2}\frac{7^{x^2}}{\ln 7}+C.$

6) В этом примере функция $u=x^3$, ее производная $u'=3x^2$. Подынтегральная же функция содержит множитель $x^2$. Умножая и деля ее на три, получим $e^{x^3}x^2=\frac{1}{3}e^{x^3}3x^2$. По формуле (2,2) находим

$$\int e^{x^3}x^2\,dx=\frac{1}{3}\int\underbrace{e^{x^3}}_{e^u}\cdot\underbrace{3x^2}_{u'}dx=\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$$

7) Этот пример решается без предварительных преобразований, так как множитель $\sec^2 x$ — производная от функции $u=\operatorname{tg} x$ — входит в подынтегральную функцию. По формуле (2,1) при $a=2$ получаем

$$\int\underbrace{2^{\operatorname{tg} x}}_{2^u}\cdot\underbrace{\sec^2 x}_{u'}dx=\frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2}+C.$$

8) Полагая здесь $u=-(x^3+x+3)$, имеем $u'=-(3x^2+1)$. Вместо этого множителя подынтегральная функция содержит множитель $3x^2+1$. Чтобы получить требуемый множитель $u'$, подынтегральную функцию представим в виде $e^{-(x^3+x+3)}(3x^2+1)=$ $=-e^{-(x^3+x+3)}[-(3x^2+1)]$ и на основании (2,2) получим

$$\int e^{-(x^3+x+1)}(3x^2+1)\,dx=-\int\underbrace{e^{-(x^3+x+1)}}_{e^u}[\underbrace{-(3x^2+1)}_{u'}]dx=$$
$$=-e^{-(x^3+x+1)}+C.$$

9) Здесь функция $u=\frac{1}{x}$, ее производная $u'=-\frac{1}{x^2}$. Подынтегральную функцию перепишем в виде $e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}=-e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, и по формуле (2,2) найдем

$$\int e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}\,dx=-\int \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{e^u}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{u'}dx=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

10) $(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2+e^{-2x}$. Учитывая решение второго примера, получаем

$$\int(e^x+e^{-x})^2\,dx=\int(e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx=\int e^{2x}\,dx+\int 2\,dx+$$

$$+\int e^{-2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x}+C.$$

**Задача 2,3** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int(e^{ks}-e^{-ks})\,ds$; 2) $\int\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

3) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$; 4) $\int\left(e^{\frac{x}{3}}+2\right)^3e^{-\frac{x}{4}}\,dx$; 5) $\int 9^{x^3+6x^2+3x}(x^2+4x+1)\,dx$;

6) $\int\frac{(a^x-b^x)^2}{a^xb^x}\,dx$; 7) $\int(e^{ay}+e^{-ay})^3\,dy$; 8) $\int\frac{e^{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}\,dx$;

9) $\int e^{5+\sin^2 2x}\sin 4x\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{k}(e^{ks}+e^{-ks})+C$; 2) $e^{\arcsin x}+C$; 3) $e^{\sin x}+C$;

4) $\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}x}+\frac{72}{5}e^{\frac{5}{12}x}+144e^{\frac{1}{12}x}-32e^{-\frac{x}{4}}+C$; 5) $\frac{1}{3\ln 9}\cdot 9^{x^3+6x^2+3x}+C$;

6) $\frac{1}{\ln a-\ln b}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x\right]-2x+C$; 7) $\frac{1}{3a}(e^{3ay}-e^{-3ay})+\frac{3}{a}(e^{ay}-$

$-e^{-ay})+C$; 8) $\frac{1}{2}e^{\operatorname{arctg}2x}+C$; 9) $\frac{1}{2}e^{5+\sin^2 2x}+C$.

**2. Интегрирование тригонометрических функций** (упражнения в применении формул (1,15) — (1,20).

Полагая, что функция $u$, входящая в эти формулы, есть функция независимой переменной $x$: $u=u(x)$, и заменяя дифференциал этой функции $du$ по формуле $du = u'\,dx$, формулы (1,15) — (1,20) можно переписать в виде более удобном для практики:

$$\int \sin u \cdot u'\,dx = -\cos u + C; \qquad (2,5)$$

$$\int \cos u \cdot u'\,dx = \sin u + C; \qquad (2,6)$$

$$\int \operatorname{tg} u \cdot u'\,dx = -\ln|\cos u| + C; \qquad (2,7)$$

$$\int \operatorname{ctg} u \cdot u'\,dx = \ln|\sin u| + C; \qquad (2,8)$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u}\,dx = \operatorname{tg} u + C; \qquad (2,9)$$

$$\int \frac{u'}{\sin^2 u}\,dx = -\operatorname{ctg} u + C. \qquad (2,10)$$

Следует обратить внимание на то, что множитель $u'$, входящий в подынтегральную функцию во всех этих формулах, есть производная от той функции $u$, которая находится под знаком тригонометрической функции. Если $u$ — независимая переменная, $u = x$, то $u' = 1$, и эти формулы перепишутся так:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C; \qquad (2,11)$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C; \qquad (2,12)$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C; \qquad (2,13)$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C; \qquad (2,14)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C; \qquad (2,15)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C. \qquad (2,16)$$

**Задача 2,4.** Вычислить интегралы: 1) $\int \sin mx\,dx$; 2) $\int \cos nx\,dx$; 3) $\int \operatorname{tg} kx\,dx$; 4) $\int \operatorname{ctg} lx\,dx$; 5) $\int \frac{1}{\cos^2 px}\,dx$; 6) $\int \frac{1}{\sin^2 qx}\,dx$.

Во всех примерах буквы $m$, $n$, $p$, $q$, $k$ и $l$ — величины постоянные, не равные нулю.

**Решение.** 1) Формулу (2,5) можно применить в том случае, если подынтегральная функция имеет множитель $u'$, являющийся производной от функции, стоящей под знаком синуса.

В нашем случае функция $u = mx$, а ее производная $u' = m$. Множитель $m$ в подынтегральной функции не содержится. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $m$, т. е. представим ее в виде $\sin mx = \frac{1}{m} \sin mx \cdot m$; тогда, вынося постоянный множитель $\frac{1}{m}$ за знак интеграла, по формуле (2,5) получим

$$\int \sin mx\,dx = \frac{1}{m} \int \sin \underbrace{mx}_{u} \cdot \underbrace{m}_{u'}\,dx = -\frac{1}{m} \cos mx + C.$$

2) Повторяя те же рассуждения, что и при решении первого примера, получим по формуле (2,6)

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos \underbrace{nx}_{u} \cdot \underbrace{n}_{u'}\,dx = \frac{1}{n}\sin nx + C.$$

На основании этих результатов легко вычисляются, например, такие интегралы: $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C;$ $\int \sin\frac{x}{3}\,dx =$
$= -\frac{1}{\frac{1}{3}}\cos\frac{x}{3} + C = -3\cos\frac{x}{3} + C$ $\left(\text{здесь } u = \frac{x}{3};\quad u' = \frac{1}{3}\right);$

$\int \cos\sqrt{2}x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + C;$ $\qquad$ $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\sin 4x + C;$

$\int \cos\frac{x}{m}\,dx = m\sin\frac{x}{m} + C$ $\left(\text{здесь } u = \frac{x}{m};\ u' = \frac{1}{m}\right).$

3) Здесь $u = kx$; $u' = k$. Подынтегральная функция не содержит множителя $k$. Чтобы можно было применить формулу (2,7), преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало множитель $k$: умножим и разделим его на $k$ и представим в виде $\operatorname{tg} kx = \frac{1}{k}\operatorname{tg} kx \cdot k$. Теперь на основании (2,7) получаем

$$\int \operatorname{tg} kx\,dx = \frac{1}{k}\int \operatorname{tg}\underbrace{kx}_{u} \cdot \underbrace{k}_{u'}\,dx = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| + C.$$

4) Повторяя рассуждения, проведенные в предыдущем примере, получаем по формуле (2,8)

$$\int \operatorname{ctg} lx\,dx = \frac{1}{l}\int \operatorname{ctg} lx\cdot dx = \frac{1}{l}\ln|\sin lx| + C.$$

Используя результаты, полученные при решении этого и предыдущего примера, легко вычислим такие интегралы:

$$\int \operatorname{tg} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C;\quad \int \operatorname{tg}\frac{x}{5}\,dx = -5\ln\left|\cos\frac{x}{5}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg} 3x\,dx = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C;\quad \int \operatorname{ctg}\frac{x}{a}\,dx = a\ln\left|\sin\frac{x}{a}\right| + C;$$

$$\int \operatorname{ctg}\frac{x}{7}\,dx = 7\ln\left|\sin\frac{x}{7}\right| + C.$$

5) По формуле (2,9) получаем

$$\int \frac{1}{\cos^2 px}\,dx = \frac{1}{p}\int \frac{1}{\cos^2 \underbrace{px}_{u}}\underbrace{p}_{u'}\,dx = \frac{1}{p}\operatorname{tg} px + C$$

(подынтегральную функцию мы умножили и разделили на $p$, а постоянный множитель $\frac{1}{p}$ вынесли за знак интеграла), поэтому, например, $\int \frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{6}} = 6\operatorname{tg}\frac{x}{6} + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.

6) На основании формулы (2,10), повторяя рассуждения, проведенные при решении предыдущих примеров, получаем

$$\int \frac{1}{\sin^2 qx}\,dx = \frac{1}{q}\int \frac{1}{\sin^2 \underbrace{qx}_{u}}\underbrace{q\,dx}_{u'} = -\frac{1}{q}\operatorname{ctg} qx + C$$

(подынтегральную функцию мы умножили и разделили на $q$, а постоянный множитель $\frac{1}{q}$ вынесли за знак интеграла). Полученный результат позволяет легко вычислить, например, такие интегралы: $\int \frac{1}{\sin^2 5x}\,dx = -\frac{1}{5}\operatorname{ctg} 5x + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{4}} = -4\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + C$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{b}} = -b\operatorname{ctg}\frac{x}{b} + C$.

**Задача 2,5** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

Указания. 1) $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$; 2) $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$.

**Ответ.** 1) $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + C$; 2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$.

**Задача 2,6** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \sin(x^2)\,x\,dx$; 2) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;

3) $\int \operatorname{tg}(2x-3)\,dx$; 4) $\int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$;

6) $\int \cos(e^x)\,e^x\,dx$; 7) $\int \cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$; 8) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$; 9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

10) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

Указания. В восьмом примере: $\frac{1}{1+\sin x} = \frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

В девятом примере: $\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$.

**Ответ.**

1) $-\frac{1}{2}\cos x^2+C$; 2) $2\sin\sqrt{x}+C$; 3) $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x-3)|+C$;

4) $-\cos\ln|x|+C$; 5) $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)+C$; 6) $\sin(e^x)+C$;

7) $\sin\ln|x|+C$; 8) $\operatorname{tg}x-\sec x+C$; 9) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$;

10) $-\operatorname{cosec}x+C$.

**Задача 2,7** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

1) $\int\sin(2x+5)\,dx$; 2) $\int\frac{dx}{\left(x\cos\frac{1}{x}\right)^2}$; 3) $\int\frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}dx$; 4) $\int\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}dx$;

5) $\int\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}dx$; 6) $\int\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}dx$; 7) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$; 8) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx$;

9) $\int\cos(ax+b)\,dx$; 10) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 11) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$;

12) $\int\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}dx$.

Указания. В седьмом примере: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, после деления на $\sin^2 x$ заменить $\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1$. В восьмом примере: после деления на $\cos^2 x$ заменить $\operatorname{tg}^2 x=\sec^2 x-1$. В примере 10 заменить $\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{cosec}^2 x-1$. В примере 11 числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^2 x$. Подынтегральная функция примет вид $\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}x}$.

**Ответ.**

1) $-\frac{1}{2}\cos(2x+5)\ C$; 2) $-\operatorname{tg}\frac{1}{x}+C$; 3) $-\ln|\cos(\ln x)|+C$;

4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$; 5) $2\ln|\sin x|+C$; 6) $-2\ln|\cos x|+C$;

7) $-\operatorname{ctg}x-2x+C$; 8) $2x-\operatorname{tg}x+C$; 9) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$;

10) $-\operatorname{ctg}x-x+C$; 11) $\ln|\operatorname{tg}x|+C$; 12) $-\ln\left|\sin\frac{1}{x}\right|+C$.

**Задача 2,8** (для повторения материала первого практического занятия). Вычислить интегралы: 1) $\int\sqrt[3]{\operatorname{tg}2x}\sec^2 2x\,dx$ (воспользоваться формулой (1,29)); 2) $\int\frac{x^2}{7+3x^3}dx$ (воспользоваться формулой (1,32)); 3) $\int\frac{\operatorname{ctg}ax}{\sin^2 ax}dx$ (формула (1,29)); 4) $\int(ax^2+b)^n x\,dx$ $(n\neq-1)$ (формула (1,29)); 5) $\int\frac{dx}{x\ln^2 x}$ (формула (1,29)); 6) $\int\frac{e^{ax}}{e^{ax}+5}dx$ (формула (1,32)); 7) $\int\frac{\sin 2x}{\sin^n x}dx$ $(n\neq-2)$ $(\sin 2x=2\sin x\cos x$, сократить дробь и воспользоваться формулой (1,29)); 8) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}dx$ (воспользоваться формулой (1,31)); 9) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}}$; 10) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}dx$; 11) $\int \frac{\sin x\cos x}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}dx$ (воспользоваться формулой (1,32)); 12) $\int \frac{b\cos x-c\sin x}{\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}}dx$; 13) $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2}$; 14) $\int \frac{3x\,dx}{4+7x^2}$; 15) $\int \frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}}dx$; 16) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2}dx$; 17) $\int \frac{dx}{a+bx}$; 18) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$; 19) $\int \frac{\operatorname{arctg} x+x}{1+x^2}dx$; 20) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{9-7x^2}}$.

Указание. В примере 16 разделить $e^{3x}$ на $e^x+2$, получится $e^{2x}-2e^x+\frac{4e^x}{e^x+2}$.

**Ответ.**

1) $\frac{3}{8}\operatorname{tg} 2x\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}+C$; 2) $\frac{1}{9}\ln|7+3x^3|+C$;

3) $-\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}^2 ax+C$; 4) $\frac{1}{2a(n+1)}(ax^2+b)^{n+1}$;

5) $-\frac{1}{\ln x}+C$; 6) $\frac{1}{a}\ln(e^{ax}+5)+C$;

7) $-\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2}x}+C$; 8) $\sqrt{7+\ln^2 x}+C$;

9) $\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}+C$; 10) $\frac{1}{b^2}\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}+C$;

11) $\frac{1}{2(b-a)}\ln(a\cos^2 x+b\sin^2 x)+C$; 12) $2\sqrt{a+b\sin x+c\cos x}+C$;

13) $-\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)+C$; 14) $\frac{3}{14}\ln(4+7x^2)+C$;

15) $\frac{1}{8}\sqrt{5+4x^4}+C$; 16) $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4\ln(e^x+2)+C$;

17) $\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$; 18) $-\frac{1}{3\ln^3 x}+C$;

19) $\frac{1}{2}[\operatorname{arctg}^2 x+\ln(1+x^2)]+C$; 20) $-\frac{3}{7}\sqrt{9-7x^2}+C$.

## ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Продолжение упражнений в непосредственном интегрировании.

### 1. Упражнения в применении формул (1,21) и (1,22)

Эти формулы перепишем в виде, более удобном для практики. Полагая, как и раньше, что функция $u$, входящая в эти формулы, есть функция независимой переменной $x$: $u=u(x)$, заменим ее дифференциал $du$ по формуле $du = u'\,dx$ и перепишем эти формулы так:

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \operatorname{arctg} u + C; \tag{3,1}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin u + C. \tag{3,2}$$

Следует обратить внимание на то, что в этих формулах числитель дроби $u'$ есть производная *первой степени* функции $u$, которая в (3,1) находится в квадрате в знаменателе, а в (3,2) — в знаменателе под квадратным корнем.

Прежде чем начать упражнения, выведем более общие формулы, чем (3,1) и (3,2), а именно: вычислим интегралы

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\,dx. \tag{3,3}$$

В первом интеграле преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы можно было применить формулу (3,1):

$$\frac{u'}{a^2+u^2} = \frac{u'}{a^2\left(1+\frac{u^2}{a^2}\right)} = \frac{u'}{a^2\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]} = \underbrace{\frac{\frac{1}{a}u'}{a^2\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}}_{\text{Числитель и знаменатель дроби умножен на } \frac{1}{a}} = \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{a\left[1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}.$$

Теперь числитель дроби $\left(\frac{u}{a}\right)'$ есть производная от первой степени функции $\left(\frac{u}{a}\right)^2$, которая находится в знаменателе, и формулу (3,1) можно применить.

Поэтому, вынося за знак интеграла постоянный множитель $\frac{1}{a}$, получаем

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C. \tag{3,4}$$

Если $u = x$, то $u' = 1$, и эта формула запишется так:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C. \tag{3,5}$$

Подынтегральную функцию второго интеграла (3,3) преобразуем так, чтобы можно было воспользоваться формулой (3,2).

$$\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}=\frac{u'}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}}=\underbrace{\frac{\frac{u'}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}}_{\text{Из-под корня вынесен множитель } a}=\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}.$$

Теперь числитель дроби $\left(\frac{u}{a}\right)'$ есть производная от первой степени функции $\left(\frac{u}{a}\right)^2$, которая находится под корнем в знаменателе.

На основании формулы (3,2)

$$\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\int\frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C.$$

Итак,

$$\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C. \qquad (3,6)$$

Если $u=x$, то $u'=1$, и эта формула запишется так:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (3,7)$$

**Задача 3,1.** Вычислить интегралы:

1) $I=\int\frac{dx}{7+x^2}$; 2) $I=\int\frac{dx}{10+x^2}$; 3) $I=\int\frac{dx}{8+5x^2}$;

4) $I=\int\frac{dx}{11+9x^2}$; 5) $I=\int\frac{3dx}{6+13x^2}$.

**Решение.** 1) Здесь $a^2=7$; $a=\sqrt{7}$, по формуле (3,5) получаем $I=\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}}+C$.

2) В этом примере $a^2=10$; $a=\sqrt{10}$, по формуле (3,5) получаем $I=\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

3) В знаменателе дроби находится не $x^2$, а $5x^2$. Поэтому формула (3,5) непригодна. Здесь должна быть применена формула (3,4). Для этого надо в числителе иметь производную функции $u$, квадрат которой $u^2=5x^2$; $u=\sqrt{5}x$. Производная $u'=\sqrt{5}$.

Формулу (3,4) можно применить в том случае, если числитель подынтегральной функции будет равен $u'$. Мы этого достигнем, умножив его на $\sqrt{5}$, а чтобы не изменилась величина подынтегральной функции, разделим ее на $\sqrt{5}$ и представим в виде

$$\frac{1}{8+5x^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{8+(\sqrt{5}x)^2}.$$

Учитывая, что $a^2=8$, $a=2\sqrt{2}$, по формуле (3,4) получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}}{8+(\underbrace{\sqrt{5}x}_{u})^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{2\sqrt{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{4}+C.$$

4) Этот пример ничем не отличается от предыдущего. Здесь $u^2=9x^2$; $u=3x$; $u'=3$. Чтобы можно было применить формулу (3,4), надо образовать в числителе $u'$. Умножим подынтегральную функцию на 3, а чтобы не изменилась ее величина, разделим ее на 3 и представим в виде $\frac{1}{11+9x^2}=\frac{1}{3}\frac{3}{11+(3x)^2}$. Теперь формулу (3,4) можно применить с учетом, что $a^2=11$; $a=\sqrt{11}$; $I=$ $=\frac{1}{3}\int\frac{3}{11+(\underbrace{3x}_{u})^2}dx=\frac{1}{3\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x}{\sqrt{11}}+C.$

5) Этот пример решим без подробных объяснений: $a^2=6$; $u^2=13x^2$; $u=\sqrt{13}x$; $a^2=6$; $a=\sqrt{6}$; $u'=\sqrt{13}$.

Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{3}{6+13x^2}=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{\sqrt{13}}{6+(\sqrt{13}x)^2},$$

а

$$I=\frac{3}{\sqrt{13}}\int\frac{\sqrt{13}}{6+(\sqrt{13}x)^2}dx=\frac{3}{\sqrt{13}}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}x}{\sqrt{6}}+C.$$

**Задача 3,2** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{5+16x^2}$; 2) $\int\frac{dx}{12+7x^2}$; 3) $\int\frac{dx}{14+15x^2}$; 4) $\int\frac{7dx}{15+19x^2}$; 5) $\int\frac{9dx}{5+21x^2}$.

**Ответ.**

1) $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{4x}{\sqrt{5}}+C$; 2) $\frac{1}{2\sqrt{21}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}x}{2\sqrt{3}}+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{210}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}x+C$; 4) $\frac{7}{\sqrt{285}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{15}}+C$; 5) $\frac{9}{\sqrt{105}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}x}{\sqrt{5}}+C$.

**Задача 3,3.** Вычислить интегралы: 1) $I=\int \frac{x+3}{x^2+2}dx$; 2) $I=$ $=\int \frac{(3x+2)\,dx}{5x^2+7}$; 3) $I=\int \frac{9t+5}{8t^2+9}dt$.

**Решение.** 1) Подынтегральную функцию запишем в виде

$$\frac{x+3}{x^2+2}=\frac{x}{x^2+2}+\frac{3}{x^2+2};$$

каждую из этих дробей проинтегрируем и интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$I=\int \frac{x}{x^2+2}\,dx+3\int \frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

| Умножая числитель на 2, получим в нем производную знаменателя | Применить формулу (3,5) $a=\sqrt{2}$ |
|---|---|

2) Подынтегральную функцию представим как сумму двух дробей:

$$\frac{3x+2}{5x^2+7}=\frac{3x}{5x^2+7}+\frac{2}{5x^2+7}.$$

Каждую из этих дробей мы умеем интегрировать. Интеграл представим как сумму двух интегралов (постоянные множители вынесены за знак интеграла):

$$I=3\int \frac{x}{5x^2+7}\,dx+2\int \frac{dx}{5x^2+7}=\frac{3}{10}\ln(5x^2+7)+$$

| Здесь в числителе получится производная знаменателя, если числитель умножить на 10 | Применить (3,4) при $u^2=(\sqrt{5x})^2$; $u=\sqrt{5x}$; $u'=\sqrt{5}$; $a=\sqrt{7}$ |
|---|---|

$$+\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$ Окончательно $$I=\frac{3}{10}\ln(5x^2+7)+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C.$$

3) Этот пример следует решить самостоятельно.

**Ответ.** $\frac{9}{16}\ln(8t^2+9)+\frac{5}{6\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}t}{3}+C.$

**Задача 3,4** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{7x+3}{10x^2+11}dx$; 2) $\int \frac{3x+8}{12x^2+23}dx$; 3) $\int \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$ и проверить вычисления, проведенные в примерах 1 и 2, по формуле, полученной при решении примера 3.

**Ответ.** 1) $\frac{7}{20}\ln(10x^2+11)+\frac{3}{\sqrt{110}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}x}{\sqrt{11}}+C$;

2) $\frac{1}{8}\ln(12x^2+23)+\frac{4}{\sqrt{69}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}}x+C$;

3) $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\frac{bx}{a}+C$.

**Задача 3,5.** Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx$; 2) $I=\int\frac{x\,dx}{7+x^4}$; 3) $I=\int\frac{e^{2x}\,dx}{4+e^{4x}}$; 4) $I=\int\frac{dx}{x(5+\ln^2 x)}$; 5) $I=\int\frac{\sec^2 x}{9+\operatorname{tg}^2 x}dx$; 6) $I=\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

**Решение.** 1) Если $u^2=\sin^2 x$, то $u=\sin x$; $u'=\cos x$; $a^2=5$, $a=\sqrt{5}$, а потому сразу без дополнительных преобразований получаем по формуле (3,4)

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{\sqrt{5}}+C.$$

2) Возьмем $u^2=x^4$, тогда $u=x^2$, а $u'=2x$.

Чтобы получить в числителе $2x$, умножим его на 2, а чтобы величина подынтегральной функции не изменилась, разделим ее на 2 и запишем в виде $\frac{x}{7+x^4}=\frac{1}{2}\frac{2x}{7+(x^2)^2}$;

$$I=\underbrace{\frac{1}{2}\int\frac{2x}{7+(x^2)^2}dx}_{\text{Применяем формулу (3,4)}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{7}}+C.$$

3) Примем $u^2=e^{4x}$; $u=e^{2x}$. Тогда $u'=2e^{2x}$. Формулу (3,4) можно применить, если в числителе находится функция $u'$ — производная функции $u$. Чтобы этого достигнуть, умножим и разделим подынтегральную функцию на 2, тогда она запишется так: $\frac{e^{2x}}{4+e^{4x}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2e^{2x}}{4+(e^{2x})^2}$;

$$I=\underbrace{\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{4+(e^{2x})^2}dx}_{a^2=4;\ a=2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}+C.$$

4) Полагаем, что $u^2=\ln^2 x=(\ln x)^2$; $u=\ln x$; $u'=\frac{1}{x}$.

Если мы представим подынтегральную функцию в виде $\frac{1}{x(5+\ln^2 x)}=\frac{\frac{1}{x}}{5+(\ln x)^2}$, то заметим, что в числителе имеется $u'$, а потому формулу (3,4) применить можно ($a^2=5$; $a=\sqrt{5}$):

$$I=\int\frac{\frac{1}{x}}{5+(\ln x)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\ln x}{\sqrt{5}}+C.$$

5) Здесь $u^2 = \operatorname{tg}^2 x$; $u = \operatorname{tg} x$; $u' = \sec^2 x$, поэтому без дополнительных преобразований получаем ($a^2 = 9$; $a = 3$):

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{9 + (\operatorname{tg} x)^2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{3} + C.$$

6) Вычисление этого интеграла связано с некоторыми трудностями.

Здесь надо догадаться, что интеграл может быть приведен к виду (3,4), если числитель и знаменатель дроби умножить на $\sec^2 x$. Выполняя это, получим

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 1} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1 + 1} = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2}.$$

Если теперь положить $u^2 = \operatorname{tg}^2 x$; $u = \operatorname{tg} x$; $u' = \sec^2 x$, формулу (3,4) можно применить, так как числитель содержит производную функции $u$. Тогда

$$I = \int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

**Задача 3, 6** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{(5x + 7)\sqrt{x}}$.

Указание. Представить $x = (\sqrt{x})^2$, взять $u = \sqrt{x}$; $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) $\int \frac{\cos x \, dx}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$. Указание: $u^2 = b^2 \sin^2 x$; $u = b \sin x$; $u' = b \cos x$. Умножить и разделить подынтегральную функцию на $b$.

3) $\int \frac{dx}{4 + \cos^2 x}$. Указание: числитель и знаменатель дроби умножить на $\sec^2 x$. Подынтегральная функция примет вид $\frac{\sec^2 x}{4 \operatorname{tg}^2 x + 5}$ (учтено, что $\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$).

4) $\int \frac{dx}{5 + \sin^2 x}$. Указание: числитель и знаменатель умножить на $\operatorname{cosec}^2 x$. В знаменателе заменить $\operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

**Ответ.** 1) $\frac{2}{\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{5x}{7}} + C$; 2) $\frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \sin x\right) + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + C$; 4) $-\frac{1}{\sqrt{30}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{5} \operatorname{ctg} x}{\sqrt{6}}\right) + C$.

Теперь выполним упражнения, связанные с формулами (3, 6) и (3, 7).

Напомним еще раз построение этих формул: числитель дроби есть производная от первой степени той функции, которая в квадрате стоит под корнем в знаменателе.

**Задача 3, 7.** Вычислить интегралы: 1) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;
2) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}$; 3) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$; 4) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{7-8x^2}}$.

**Решение.** 1) Здесь сразу можно применить формулу (3, 7), полагая, что $a^2=5$; $a=\sqrt{5}$ Получаем $I=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C$.

2) Здесь также формула (3,7) может быть применена сразу: $a^2=10$; $a=\sqrt{10}$, а $I=\arcsin\frac{x}{\sqrt{10}}+C$.

3) Применить формулу (3, 7) здесь нельзя, так как $u^2$ равно не $x^2$, как в двух предыдущих примерах, а $2x^2$. Поэтому надо применить формулу (3, 6), полагая $u^2=2x^2=(\sqrt{2}x)^2$; $u=\sqrt{2}x$. Числитель дроби подынтегральной функции должен быть равен $u'=\sqrt{2}$. Но так как $\sqrt{2}$ в числителе не содержится, то мы умножим числитель на $\sqrt{2}$, а чтобы выражение не изменило своей величины, и разделим его на $\sqrt{2}$. Подынтегральная функция перепишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-(\sqrt{2}x)^2}},\text{ а }\quad I=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C.$$

4) Здесь $u^2=8x^2$; $u^2=(2\sqrt{2}x)^2$; $u=2\sqrt{2}x$; $u'=2\sqrt{2}$. Для того чтобы можно было применить формулу (3, 6), надо, чтобы числитель дроби в этой формуле был равен производной функции $u$, т. е. $2\sqrt{2}$. Умножим и разделим подынтегральную функцию на это число и получим

$$\frac{1}{\sqrt{7-8x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7-(2\sqrt{2}x)^2}}.$$

Теперь уже формулу (3, 6) можно применить. Постоянный множитель $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ вынесем за знак интеграла, получим

$$I=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7-(2\sqrt{2}x)^2}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{7}}+C.$$

$$\boxed{a^2=7;\quad a=\sqrt{7};\quad u=2\sqrt{2}x}$$

**Задача 3, 8.** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{80-11x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}$;
3) $\int\frac{dx}{\sqrt{19-17x^2}}$.

**Ответ:** 1) $\frac{1}{\sqrt{11}} \arcsin \frac{\sqrt{11}x}{4\sqrt{5}} + C$; 2) $\frac{1}{7} \arcsin \frac{7}{6}x + C$;
3) $\frac{1}{\sqrt{17}} \arcsin \frac{\sqrt{17}x}{\sqrt{19}} + C$.

**Задача 3, 9.** Вычислить интегралы:

1) $I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{7 - 3\sin^2 x}} dx$; 2) $I = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{11 - 5\operatorname{tg}^2 x}} dx$;

3) $I = \int \frac{dx}{(1 + x^2)\sqrt{6 - 5\operatorname{arctg}^2 x}}$; 4) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{15 - 7\ln^2 x}}$;

5) $I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

**Решение.** 1) Здесь функция $u^2 = 3\sin^2 x$, $u = \sqrt{3}\sin x$, ее производная $u' = \sqrt{3}\cos x$.

Для того, чтобы числитель дроби в подынтегральной функции был равен $u'$, умножим его на $\sqrt{3}$, а чтобы дробь не изменила своей величины, ее надо и разделить на $\sqrt{3}$. Представим подынтегральную функцию в виде $\frac{\cos x}{\sqrt{7 - 3\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{7 - 3\sin^2 x}}$. Теперь числитель второй дроби содержит производную функции $u = \sqrt{3}\sin x$, и формула (3,6) может быть применена

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{7 - (\sqrt{3}\sin x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

$$\left| a^2 = 7;\quad a = \sqrt{7};\quad u = \sqrt{3}\sin x \right|$$

2) Этот пример решается так же, как и предыдущий:

$$u^2 = 5\operatorname{tg}^2 x;\quad u = \sqrt{5}\operatorname{tg} x;\quad u' = \sqrt{5}\sec^2 x.$$

Числитель подынтегральной функции надо умножить на $\sqrt{5}$, чтобы он стал равен $u'$. Деля одновременно на $\sqrt{5}$, для того, чтобы не изменить величину подынтегральной функции, преобразуем ее к виду

$$\frac{\sec^2 x}{\sqrt{11 - 5\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}\sec^2 x}{\sqrt{11 - (\sqrt{5}\operatorname{tg} x)^2}}.$$

Применяя теперь формулу (3,6), получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}\sec^2 x}{\sqrt{11 - (\sqrt{5}\operatorname{tg} x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}\operatorname{tg} x}{\sqrt{11}} + C.$$

$$\left| a^2 = 11;\quad a = \sqrt{11};\quad u = \sqrt{5}\operatorname{tg} x \right|$$

3) Представим подынтегральную функцию в виде

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{6-5\operatorname{arctg}^2 x}}=\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sqrt{6-(\sqrt{5}\operatorname{arctg} x)^2}}.$$

Здесь $u^2=5\operatorname{arctg}^2 x$; $u=\sqrt{5}\operatorname{arctg} x$; $u'=\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}$.

Для того, чтобы числитель подынтегральной функции стал равен $u'$, его надо домножить на $\sqrt{5}$. Если это сделать и одновременно разделить на $\sqrt{5}$, то подынтегральная функция не изменит своего значения и запишется так:

$$\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{6-5\operatorname{arctg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}}{\sqrt{6-(\sqrt{5}\operatorname{arctg} x)^2}}.$$

Теперь на основании (3,6)

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{1+x^2}dx}{\sqrt{\underset{a^2}{6}-\underbrace{(\sqrt{5}\operatorname{arctg} x)^2}_{u}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}\operatorname{arctg} x}{\sqrt{6}}\right)+C.$$

4) Перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{15-7\ln^2 x}}$.

Полагаем $u^2=7\ln^2 x$, тогда $u=\sqrt{7}\ln x$, $u'=\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}$. Чтобы получить в числителе $u'$, умножим его на $\sqrt{7}$, одновременно разделим на $\sqrt{7}$, и подынтегральную функцию представим в виде

$$\frac{1}{x\sqrt{15-7\ln^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{15-(\sqrt{7}\ln x)^2}}.$$

Теперь по формуле (3,6) находим

$$I=\frac{1}{\sqrt{7}}\int\frac{\sqrt{7}\cdot\frac{1}{x}}{\sqrt{15-(\sqrt{7}\ln x)^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}\ln x}{\sqrt{15}}\right)+C.$$

$$\left|a^2=15;\ a=\sqrt{15};\ u=\sqrt{7}\ln x\right|$$

5) Умножим и разделим на $1-x$ числитель и знаменатель дроби, стоящей под корнем в подынтегральной функции, и получим

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=\sqrt{\frac{(1-x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}}=\sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

($\sqrt{(1-x)^2}=1-x$, так как предполагается, что $-1<x<1$).

Теперь $I=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$ | Применяем формулу (1,31) |

**Задача 3,10** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{7-2x^2}}dx$; 2) $\int \frac{9-3x}{\sqrt{6-5x^2}}dx$ (см. указание к предыдущему примеру);

3) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{8-5\cos^2 x}}dx$; 4) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{5-3e^{4x}}}dx$; 5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-11x^6}}dx$;

6) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{5-3\sin^4 x}}dx$; 7) $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1-15\operatorname{ch}^2 x}}dx$.

**Указания.** В первом примере: $\frac{5x-3}{\sqrt{7-2x^2}} = \frac{5x}{\sqrt{7-2x^2}} - \frac{3}{\sqrt{7-2x^2}}$.

Каждая из этих дробей может быть легко проинтегрирована: первая — по формуле (1,31), вторая — по формуле (3,6).

В шестом примере: $u^2 = 3\sin^4 x$; $u = \sqrt{3}\sin^2 x$; $u' = \sqrt{3}\sin 2x$.

**Ответ:** 1) $-\frac{5}{2}\sqrt{7-2x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} + C$;

2) $\frac{9}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{6}} + \frac{3}{5}\sqrt{6-5x^2} + C$;

3) $-\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}\cos x}{2\sqrt{2}} + C$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}e^{2x}}{\sqrt{5}} + C$;

5) $\frac{1}{3\sqrt{11}}\arcsin\frac{\sqrt{11}x^3}{2} + C$; 6) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\sin^2 x}{\sqrt{5}} + C$;

7) $\frac{1}{\sqrt{15}}\arcsin\sqrt{15}\operatorname{ch} x$.

## 2. Упражнения в применении формул (1,23) и (1,24)

Как и раньше, преобразуем эти формулы к виду, который более удобен для их применения в практике. Получим формулу (1,23) в более общем виде. Если функция $u$ есть функция независимой переменной $x$: $u = u(x)$, то $du = u'dx$. Тогда вместо формулы (1,23) получим

$$\int \frac{u'}{1-u^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C, \tag{3,8}$$

а формулу (1,24) преобразуем к виду

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C. \tag{3,9}$$

Отметим построение этих формул: числитель подынтегральной функции есть производная функции $u$, квадрат которой находится в (3,8) в знаменателе, а в (3,9) — в знаменателе под квадратным корнем.

Обобщение формулы (1,23) состоит в том, что знаменатель дроби $1-u^2$ заменен на $a^2-u^2$.

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \int \frac{u'}{a^2\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{u'}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{1}{a}u'}{\frac{1}{a}\left[1-\left(\frac{u}{a}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{a}\int \frac{\left(\frac{u}{a}\right)'}{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{1+\frac{u}{a}}{1-\frac{u}{a}}\right| + C$$

Теперь можно применить формулу (1,23), так как числитель содержит производную функции, квадрат которой находится в знаменателе

и окончательно

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C. \tag{3,10}$$

Так как под знаком логарифма стоит абсолютная величина дроби $\left|\frac{a+u}{a-u}\right|$, то, не изменяя величины этого выражения, его можно записать и в таком виде: $\left|\frac{u+a}{u-a}\right|$, и тогда формула (3,10) перепишется в виде

$$\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C. \tag{3,11}$$

Укажем также формулу для вычисления интеграла $\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx$:

$$\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx = -\int \frac{u'}{a^2-u^2}dx = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|^{-1} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

Итак, окончательно

$$\int \frac{u'}{u^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \tag{3,12}$$

Теперь приступим к упражнениям.

**Задача 3,11.** Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{dx}{5-x^2}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{7-9x^2}$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{5x^2-7}$; 4) $I_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+17}}$; 5) $I_5 = \int \frac{dx}{\sqrt{19x^2-14}}$.

**Решение.** 1) Здесь $u^2 = x^2$, $u = x$, $u' = 1$. Числитель содержит $u'$ — производную функции $u$, значит, формула (3,10) может быть применена. Учитывая, что $a^2 = 5$, $a = \sqrt{5}$, получаем

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + x}{\sqrt{5} - x} \right| + C.$$

2) При решении этого примера следует учесть, что $u^2 = 9x^2$; $u = 3x$; $u' = 3$.

Числитель подынтегральной функции не содержит $u'$. Умножим и разделим подынтегральную функцию на 3 и запишем, что $I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{3}{7 - (3x)^2} dx$, $u = 3x$. Теперь применим формулу (3,10) и, учитывая, что $a^2 = 7$, $a = \sqrt{7}$, найдем

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + 3x}{\sqrt{7} - 3x} \right| + C = \frac{1}{6\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + 3x}{\sqrt{7} - 3x} \right| + C.$$

3) Этот пример отличается от предыдущего тем, что здесь на первом месте стоит в знаменателе не квадрат постоянной величины, а квадрат функции $u$. Поэтому должна быть применена формула (3,12): $u^2 = 5x^2$; $u = \sqrt{5}x$. Ее можно применить в том случае, если числитель будет содержать множитель $u' = \sqrt{5}$. Этот множитель получим, умножив подынтегральную функцию на $\sqrt{5}$ и одновременно, чтобы не изменилась ее величина, разделив на $\sqrt{5}$. Делая это и применяя формулу (3,12) с учетом, что $a^2 = 7$; $a = \sqrt{7}$, найдем

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}x)^2 - 7} dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{35}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}x - \sqrt{7}}{\sqrt{5}x + \sqrt{7}} \right| + C.$$

4) Этот пример решается сразу по формуле (3,9): $u = x$, а множитель $u' = 1$ в числителе есть.

Поэтому $I_4 = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 17} \right| + C$.

5) Здесь $u^2 = 19x^2$; $u = \sqrt{19}x$, $u' = \sqrt{19}$.

Для применения формулы (3,9), надо, чтобы в числителе был множитель $u' = \sqrt{19}$.

Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{19}$.

Тогда $I_5 = \frac{1}{\sqrt{19}} \int \frac{\sqrt{19}}{(\sqrt{19}x)^2 - 14} dx$. По формуле (3,9), учитывая, что $u' = \sqrt{19}$, найдем

$$I_5 = \frac{1}{\sqrt{19}} \ln \left| \sqrt{19}x + \sqrt{19x^2 - 14} \right| + C.$$

**Задача 3,12** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{5\,dx}{8-3x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{11-6x^2}$; 3) $\int \frac{dx}{10x^2-7}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-11}}$; 5) $\int \frac{9\,dx}{\sqrt{7+5x^2}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-12}}$.

**Ответ.** 1) $\frac{5}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}x}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}x} \right| + C$;

| Применена формула (3,10): $u = \sqrt{3}\,x$; $a^2 = 8$; $a = 2\sqrt{2}$ |

2) $\frac{1}{2\sqrt{66}} \ln \left| \frac{\sqrt{11}+\sqrt{6}\,x}{\sqrt{11}-\sqrt{6}\,x} \right| + C$; 3) $\frac{1}{2\sqrt{70}} \ln \left| \frac{\sqrt{10}\,x-\sqrt{7}}{\sqrt{10}\,x+\sqrt{7}} \right| + C$;

| Применена формула (3,12): $u = \sqrt{10}x$; $u' = \sqrt{10}$; $a = \sqrt{7}$. |

4) $\frac{1}{2} \ln \left| 2x + \sqrt{4x^2-11} \right| + C$; 5) $\frac{9}{\sqrt{5}} \ln \left| \sqrt{5}x + \sqrt{7+5x^2} \right| + C$;

| Применена формула (3,9) |

6) $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \sqrt{7}x + \sqrt{7x^2-12} \right| + C$.

**Задача 3,13** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$; 2) $\int \frac{x^2\,dx}{12-3x^6}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{10+7x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{5+3\,\mathrm{arctg}^2\,x}}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{2ac} \ln \left| \frac{ax-c}{ax+c} \right| + C$; 2) $\frac{1}{36} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x^3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}x^3-2\sqrt{3}} \right| + C$;

3) $\frac{1}{\sqrt{7}} \ln \left| \sqrt{7}x + \sqrt{10+7x^2} \right| + C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \Big| \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,x +$
$+ \sqrt{5+3\mathrm{arctg}^2 x} \Big| + C$.

Проведенные упражнения позволяют предложить для самостоятельного решения задачи на применение формул (1,25) — (1,28). Перепишем эти формулы в виде, который более удобен для их практического применения. Полагая в них, что $u = u(x)$, $du = u'\,dx$, получим вместо формул (1,25) — (1,28) соответственно:

$$\int \mathrm{sh}\,u \cdot u'\,dx = \mathrm{ch}\,u + C; \tag{3,13}$$

$$\int \mathrm{ch}\,u \cdot u'\,dx = \mathrm{sh}\,u + C; \tag{3,14}$$

$$\int \frac{u'}{\mathrm{ch}^2\,u}\,dx = \mathrm{th}\,u + C; \tag{3,15}$$

$$\int \frac{u'}{\mathrm{sh}^2\,u}\,dx = -\mathrm{cth}\,u + C. \tag{3,16}$$

**Задача 3,14** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $\int \operatorname{sh} 2x\,dx$; 2) $\int \operatorname{ch} \frac{x}{3}\,dx$; 3) $\int (10x + 7)\operatorname{sh}(5x^2 + 7x + 9)\,dx$; 4) $\int \operatorname{ch}(8x + 7)\,dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{sh}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; 6) $\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}^2(3x^2+5)}$; 7) $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x\,dx$; 8) $\int \operatorname{cth} x\,dx$; 9) $\int \operatorname{th} x\,dx$, 10) $\int x \operatorname{th} x^2\,dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + C$; 2) $3\operatorname{sh}\frac{x}{3} + C$; 3) $\operatorname{ch}(5x^2 + 7x + 9) + C$; 4) $\frac{1}{8}\operatorname{sh}(8x + 7) + C$; 5) $2\operatorname{ch}\sqrt{x} + C$; 6) $-\frac{1}{6}\operatorname{cth}(3x^2 + 5) + C$; 7) $\frac{1}{5}\operatorname{sh}^5 x + C$; 8) $\ln|\operatorname{sh} x| + C$; 9) $\ln|\operatorname{ch} x| + C$; 10) $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{ch} x^2| + C$.

Этим заканчиваются упражнения, связанные с непосредственным применением таблицы основных интегралов.

## ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в неопределенном интеграле (метод подстановки). Интегрирование по частям.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### Метод подстановки. (Два правила)

Если интеграл $I = \int f(x)\,dx$ не может быть вычислен непосредственно по основным формулам (1,7) — (1,28), то введением новой независимой переменной во многих случаях удается преобразовать подынтегральное выражение $f(x)\,dx$. При этом интеграл приводится к табличному или к такому, прием вычисления которого уже известен. Замена переменной интегрирования и составляет существо метода, называемого методом подстановки. Укажем два правила подстановки.

1) Независимую переменную заменяют по формуле.

$$x = \varphi(z), \tag{4,1}$$

где $\varphi(z)$ — дифференцируемая функция.

После этого определяют $dx = \varphi'(z)\,dz$, а интеграл $\int f(x)\,dx$ приводят к виду $I = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$. Цель подстановки будет достигнута, если окажется, что вычисление этого интеграла проще, чем исходного. В результате интегрирования получится функция независимой переменной $z$. Чтобы возвратиться к переменной $x$, надо из уравнения (4,1) определить $z$ через $x$ и подставить это значение вместо $z$ в найденную функцию.

Общего правила, которое указывало бы, как выбрать функцию $\varphi(z)$ в (4,1), не существует. Умение выбрать эту функцию достигается опытом. Однако для многих типов интегралов подстановка (4,1) известна и нами будет в соответствующих местах указана. Обратим внимание читателя на то, что, пользуясь подстановкой (4,1), надо найти множитель $dx$.

Заметим также, что функция $\varphi(z)$ в (4,1) должна иметь обратную. Это необходимо для того, чтобы из подстановки (4,1) можно было определить $z$ как функцию $x$.

2) Полагают, что

$$\psi(x) = z. \tag{4,2}$$

Эта подстановка отличается от предыдущей тем, что в (4,1) сама независимая переменная $x$ заменялась новой функцией $\varphi(z)$, а здесь не независимая переменная $x$, а ее функция $\psi(x)$ заменяется новой переменной $z$. Из уравнения (4,2) находят $dx$. В результате этой подстановки подынтегральная функция заменится другой:

$$f(x)\,dx = \omega(z)\,dz.$$

Подстановка (4,2) достигнет цели, если вычисление интеграла $I = \int \omega(z)\,dz$ может быть выполнено проще, чем исходного. После интегрирования получится функция переменной $z$. Для того, чтобы возвратиться к переменной $x$, надо подставить в полученную функцию из (4,2) $\psi(x)$ вместо $z$.

И здесь умение выбрать функцию $\psi(x)$ так, чтобы вычисление интеграла упростилось, достигается большим числом упражнений. Для определенного класса интегралов целесообразные подстановки вида (4,2) будут указаны.

Упражнения этого практического занятия не имеют целью указать подстановки для вычисления определенного класса интегралов, а предназначены только для приобретения навыков в применении указанных двух правил подстановки.

### Упражнения в применении первого правила подстановки

**Задача 4,1.** Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$ при помощи подстановки $x = \frac{a}{t}$.

**Решение.** Здесь применяется правило первое. Подстановка имеет вид (4,1). Сразу находим, что $dx = -\frac{a}{t^2}\,dt$ и преобразуем подынтегральную функцию

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\frac{a}{t}\sqrt{\frac{a^2}{t^2} - a^2}} = \frac{t^2}{a^2\sqrt{1 - t^2}}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{t^2}{a^2\sqrt{1-t^2}}\left(-\frac{a}{t^2}dt\right)=-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\frac{1}{a}\arcsin t+C.$$

Чтобы перейти к переменной $x$, надо из подстановки $x=\frac{a}{t}$ выразить $t$ через $x: t=\frac{a}{x}$, и тогда

$$I=-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.$$

Мы здесь заменили $-\arcsin\frac{a}{x}$ на $\arccos\frac{a}{x}$ не потому, что они равны между собой, а на основании следующих соображений: из тригонометрии известно, что

$$\arcsin\alpha+\arccos\alpha=\frac{\pi}{2};\quad \frac{\pi}{2}-\arcsin\alpha=\arccos\alpha. \tag{4,3}$$

Считая, что $C=\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}+C_1$, получим

$$-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C=\frac{1}{a}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{a}\arcsin\frac{a}{x}+C_1=$$
$$=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{a}{x}\right)+C_1=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C,$$

а $C_1$ мы снова обозначим через $C$, отбросив у $C_1$ индекс.

Ответ был преобразован путем выделения слагаемого $\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$ из произвольной постоянной. Следует иметь в виду, что за счет тождественного преобразования ответа, а также в связи с возможностью представить произвольную постоянную интегрирования в разных видах ответы при вычислении неопределенных интегралов могут получаться различные.

**Замечание.** Следует иметь в виду, что можно было сразу написать: $-\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{a}\arccos t+C$, так как $(\arccos t)'=$ $=-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

**Задача 4,2.** Вычислить интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ при помощи подстановки $x=a(1-t)$.

**Решение.** Здесь опять-таки применяется правило первое. Подстановка имеет вид (4,1).

Находим, что $dx=-adt$; подставляя под корень $x=a(1-t)$, имеем

$$\sqrt{2ax-x^2}=\sqrt{2a\cdot a(1-t)-a^2(1-t)^2}=$$
$$=\sqrt{a^2(1-t^2)}=|a|\sqrt{1-t^2},$$

и тогда

$$I=\int \frac{-adt}{|a|\sqrt{1-t^2}}=-\frac{a}{|a|}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{a}{|a|}\arccos t+C=$$
$$=\pm\arccos t+C.$$

Верхний знак надо взять при $a>0$, а нижний — при $a<0$, так как $|a|=a$, если $a>0$, и $|a|=-a$, если $a<0$.

Чтобы возвратиться к старой переменной, надо выразить $t$ через $x$. Из $x=a(1-t)$ следует, что $t=1-\frac{x}{a}=\frac{a-x}{a}$, а потому $I=\pm\arccos\frac{a-x}{a}+C.$

Вычислим два интеграла, которые нам часто будут встречаться в дальнейшем: 1) $\int \sin^2 u\,du$ и 2) $\int \cos^2 u\,du$.

Из тригонометрии известно, что $\sin^2 u=\frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cos^2 u=$ $=\frac{1+\cos 2u}{2}$, поэтому

$$1)\quad \int \sin^2 u\,du=\int \frac{1-\cos 2u}{2}\,du=\frac{1}{2}\int (1-\cos 2u)\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C=\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C;$$
$$2)\quad \int \cos^2 u\,du=\int \frac{1+\cos 2u}{2}\,du=\frac{1}{2}\int (1+\cos 2u)\,du=$$
$$=\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C.$$

Выпишем для ссылок полученные результаты:

$$\int \sin^2 u\,du=\frac{1}{2}(u-\sin u\cos u)+C; \tag{4,4}$$
$$\int \cos^2 u\,du=\frac{1}{2}(u+\sin u\cos u)+C. \tag{4,5}$$

**Задача 4,3.** С помощью подстановки $x=a\sin t$ (так называемая тригонометрическая подстановка) вычислить интегралы:

$$I_1=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx;\quad I_2=\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx.$$

**Решение.** 1) Из подстановки

$$x=a\sin t \tag{4,6}$$

следует, что $dx=a\cos t\,dt$; $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=$ $=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2\cos^2 t}=a\cos t$, а потому

$$I_1=\int a\cos t\,(a\cos t\,dt)=a^2\int \cos^2 t\,dt=a^2\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C.$$

| Применить формулу (4,5) |
|---|

Чтобы возвратиться к переменной $x$, надо из (4,6) определить $t$, $\sin t$, $\cos t$: $\sin t = \frac{x}{a}$; $t = \arcsin\frac{x}{a}$; $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$; $I_1 = a^2\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C$.

Окончательно

$$I_1 = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C. \tag{4,7}$$

2) Из (4,6) следует, что в $I_2$ подынтегральная функция $\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}$ (выше было вычислено, что $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$), а потому

$$I_2 = \int\frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}a\cos t\,dt = a^2\underbrace{\int\sin^2 t\,dt}_{\boxed{\text{Применить формулу (4,4)}}} = a^2\frac{1}{2}(t-\sin t\cos t) + C.$$

Возвратимся теперь к переменной $x$.

Подставляя значения $t$, $\sin t$ и $\cos t$, найденные при вычислении $I_1$, получим

$$I_2 = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) + C,$$

или

$$I_2 = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

**Задача 4,4** (для самостоятельного решения).

При помощи подстановки $x=\sin t$ вычислить $I = \int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

**Ответ.** $I = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

**Задача 4,5** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ при помощи подстановки $x = \operatorname{ctg} t$.

**Указание.** $dx = -\frac{1}{\sin^2 t}dt$; $\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sin t}$;

$$I = -\int\frac{dt}{\sin t} = -\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + C = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)^{-1} + C = \ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + C,$$

Но

$$\operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1+\cos t}{\sin t} = \frac{1}{\sin t} + \operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{1}{\sin t} = \sqrt{1+x^2}, \quad \operatorname{ctg} t = x,$$

значит,

$$I=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

**Задача 4,6** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1=\int\frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}}$ (подстановка $x=z^2$); 2) $I_2=\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ $\left(\text{подстановка } x=\frac{1}{z}\right)$.

**Ответ.** 1) $\frac{2}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5x}{7}}+C$; 2) $-\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$.

Указание. Во втором примере после подстановки

$$I_2=-\int\frac{dz}{\sqrt{a^2z^2-1}}=-\int\frac{dz}{\sqrt{(az)^2-1}}=-\frac{1}{a}\ln(az+\sqrt{a^2z^2-1})+C.$$

**Задача 4,7** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{e^{\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{e^x-1}}$ с помощью подстановки $x=2\ln z$.

Указание. $e^x=e^{2\ln z}=e^{\ln z^2}=z^2$; $dx=\frac{2dz}{z}$.

**Ответ.** $2\ln(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{e^x-1})+C$.

**Упражнения в применении второго правила подстановки.**

**Задача 4,8.** Интеграл $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ вычислить подстановкой

$$\sqrt{x^2-a^2}=z. \qquad (4,8)$$

**Решение.** Этот интеграл был уже вычислен нами в задаче 4,1. Указанная новая подстановка имеет вид (4,2): $\psi(x)=z$. Подынтегральное выражение $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ должно быть выражено через новую переменную $z$. Из (4,8) следует, что

$$x^2-a^2=z^2;\quad x^2=a^2+z^2;\quad 2x\,dx=2z\,dz;\quad xdx=zdz.$$

Деля обе части этого равенства на $x^2$ и заменяя в правой части равенства $x^2$ на $a^2+z^2$, получим

$$\frac{dx}{x}=\frac{z\,dz}{a^2+z^2};\quad \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{z\,dz}{(a^2+z^2)z}=\frac{dz}{a^2+z^2}.$$

Теперь

$$I=\int\frac{dz}{a^2+z^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}+C.$$

Переходим к переменной $x$: с помощью (4,8) получим окончательно

$$I = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} + C.$$

Этот ответ отличается от полученного в задаче 4,1. Однако это только кажущееся различие. Фактически же ответы тождественны: легко показать, что $\arccos\frac{a}{x} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$. Здесь мы еще раз обращаем внимание читателя на возможность различных ответов при вычислении одного и того же интеграла.

**Задача 4,9** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$ подстановкой $\sqrt{x+2} = t$.

**Решение.** Из подстановки $\sqrt{x+2} = t$ следует, что $x+2 = t^2$; $x = t^2 - 2$; $dx = 2t\,dt$, а потому подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{2t\,dt}{t+3};$$

$$I = \int \frac{2t\,dt}{t+3} = 2\int \frac{t+3-3}{t+3}\,dt = 2\int\left(1 - \frac{3}{t+3}\right)dt =$$
$$= 2\,[t - 3\ln(t+3)] + C.$$

Подставляя сюда $t = \sqrt{x+2}$, окончательно получим

$$I = 2\,[\sqrt{x+2} - 3\ln|\sqrt{x+2}+3|] + C.$$

**Задача 4,10** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ подстановкой $1+\sqrt{x} = v$.

Указание. $\sqrt{x} = v - 1$; $x = (v-1)^2$; $dx = 2(v-1)\,dv$; $I = 2\int \frac{v-1}{v}\,dv$.

**Ответ.** $I = 2\,[1 + \sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|] + C = 2 + 2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln|1+\sqrt{x}|) + C_1$, где $C_1 = 2 + C$.

**Задача 4,11.** Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ при помощи подстановки

$$\sqrt{a^2-x^2} = t\,(a-x). \tag{4,9}$$

**Решение.** Этот интеграл нам уже хорошо известен: $I = \arcsin\frac{x}{a} + C$. Мы предложили этот пример для упражнения, а также для того, чтобы показать еще раз, что вычисление интеграла может приводить к различным по форме ответам, в зависимости от того, какой метод применен при его вычислении. Из указанной подстановки получаем $a^2 - x^2 = t^2 (a - x)^2$. Сокращая теперь на $a - x$, имеем $a + x = t^2 (a - x)$, отсюда

$$x = a\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}; \quad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}; \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2+1}$$

$$I = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$

Так как $\arcsin\frac{x}{a} + \frac{\pi}{2} = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, то следует считать, что полученный ответ только формой отличается от уже известного, указанного выше.

**Задача 4,12.** Вычислить интеграл $I = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{6 - \sin^2 x}}$ (подстановка $\sin x = z$).

**Ответ.** $I = \arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{6}}\right) + C.$

**Задача 4,13** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int \frac{dx}{3 + 4\sin^2 x}$ (подстановка $\mathrm{ctg}\,x = u$).

Указание. $-\mathrm{cosec}^2 x\,dx = du$; $\mathrm{cosec}^2 x = 1 + u^2$; $\sin^2 x = \frac{1}{1+u^2}$. Подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{3 + 4\sin^2 x} = -\frac{du}{7 + 3u^2}.$$

**Ответ.** $I = \frac{1}{\sqrt{21}}\,\mathrm{arcctg}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\,\mathrm{ctg}\,x\right) + C.$

**Задача 4,14** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$ (подстановка $\mathrm{tg}\,x = z$);

2) $I_2 = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$ (подстановка $\mathrm{tg}\,x = z$);

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin x \sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}}$ (подстановка $\mathrm{ctg}\,x = z$).

Указания. Во втором примере: $\frac{dx}{\cos^2 x} = dz$; $\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{1}{(1 - \cos^2 x)^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+z^2}$; $\frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+z^2)^2}{z^4} = \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} + 1$.

Подынтегральное выражение

$$\frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left(\frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^2} + 1\right) dz.$$

В третьем примере: $\frac{dx}{\sin x\sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}} = \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4 - 9\,\mathrm{ctg}^2 x}} = -\frac{dz}{\sqrt{4 - 9z^2}}$.

**Ответ.** 1) $I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C$;

2) $I_2 = \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C$;

3) $I_3 = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3}{2} \operatorname{ctg} x\right) + C$.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод, так же как и метод подстановки, который мы только что разобрали, принадлежит к числу основных методов интегрирования.

Формула интегрирования по частям записывается так:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{4,10}$$

Применение этой формулы предполагает, что в правой части интеграл $\int v\, du$ может быть вычислен легче, чем исходный интеграл.

**Задача 4,15.** Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int xe^x dx$; 2) $I_2 = \int x \sin x\, dx$; 3) $I_3 = \int \ln x\, dx$; 4) $I_4 = \int \operatorname{arctg} x\, dx$; 5) $I_5 = \int \arcsin x\, dx$.

**Решение.** Для вычисления всех предложенных интегралов применим формулу (4,10) интегрирования по частям. При использовании этой формулы надо прежде всего установить, какая функция принимается равной $u$ и что относится к $dv$. Затем по установленному выражению $u$ надо дифференцированием найти $du$, а по известному $dv$ определить интегрированием функцию $v$. Таким образом, для применения формулы (4,10) потребуется выполнить одно дифференцирование для определения $du$ и одно интегрирование для определения $v$. Следует помнить, что в состав $dv$ должен обязательно входить дифференциал независимой переменной.

После этих общих указаний приступим к вычислению предложенных интегралов:

$$1)\ I_1 = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + C = e^x (x-1) + C.$$

| | |
|---|---|
| $u = x$ | $du = dx$ |
| $dv = e^x dx$ | $v = e^x$ |

**Замечание.** При вычислении этого интеграла нецелесообразно брать $u = e^x$; $dv = x\,dx$, так как в этом случае было бы $du = e^x dx$; $v = \frac{x^2}{2}$. Применяя формулу (4,10), мы получили бы

$$I_1 = \int xe^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x dx.$$

Совершенно очевидно, что интеграл в правой части сложнее исходного. Из этого читатель должен сделать вывод, что выбор $u$ и $dv$ не может быть произвольным. Он определяется требованием, чтобы интеграл, к которому приводит формула (4,10), был проще заданного.

2) $I_2 = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin x\,dx}_{dv} = \underbrace{-x\cos x}_{uv} + \int \underbrace{\cos x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = -x\cos x + \sin x + C.$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \sin x\,dx & v = -\cos x \end{array}\right|$$

Здесь также надо иметь в виду, что если взять $u = \sin x$; $dv = x\,dx$, то мы придем к интегралу более сложному, чем данный.

3) $I_3 = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x -$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array}\right|$$

$$-x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

4) $\int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x\operatorname{arctg} x}_{uv} - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx =$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{array}\right|$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

5) $\int \underbrace{\arcsin x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x\arcsin x}_{uv} - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array}\right|$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

**Задача 4,16** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегрированием по частям интегралы:

1) $I_1 = \int x\cos x\,dx$; 2) $I_2 = \int x^3 \ln x\,dx$;

3) $I_3 = \int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; 4) $I_4 = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$.

Указание. В третьем примере взять $u = \arcsin x$; $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

**Ответ.** 1) $I_1 = x\sin x + \cos x + C$; 2) $I_2 = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$; 3) $I_3 = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$; 4) $I_4 = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$.

**Задача 4,17.** Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$;

2) $I_2 = \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$; 3) $I_3 = \int \sin x \ln \cos x\, dx$;

4) $I_4 = \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)\, dx}{1+x^2}$; 5) $I_5 = \int e^x \ln(e^x + 1)\, dx$.

**Решение.** 1) $I_1 = \int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \underbrace{x \operatorname{tg} x}_{uv} - \int \underbrace{\operatorname{tg} x}_{v} \underbrace{dx}_{du} = x \operatorname{tg} x +$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array}\right| \qquad \left|\text{Применить формулу (1,17)}\right|$$

$+ \ln|\cos x| + C.$

2) $I_2 = \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - \int \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x\, dx =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln \sin x & du = \operatorname{ctg} x\, dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & v = \operatorname{tg} x \end{array}\right|$$

$= \operatorname{tg} x \cdot \ln \sin x - \int dx = \operatorname{tg} x \ln \sin x - x + C.$

3) $I_3 = \int \sin x \cdot \ln \cos x\, dx = -\cos x \ln \cos x -$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln \cos x & du = -\operatorname{tg} x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array}\right|$$

$- \int \underbrace{(-\cos x)}_{v} \underbrace{(-\operatorname{tg} x\, dx)}_{du} = -\cos x \ln \cos x - \int \sin x\, dx =$

$= -\cos x \ln \cos x + \cos x + C = \cos x (1 - \ln|\cos x|) + C.$

4) $I_4 = \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x -$

$- \int \operatorname{arctg} x \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \ln \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{1+x^2} =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} dx \\ dv = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \operatorname{arctg} x \end{array}\right|$$

$= \operatorname{arctg} x \cdot \ln \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x (\ln \operatorname{arctg} x - 1) + C.$

5) $I_5 = \int e^x \ln(e^x+1)\,dx = e^x \ln(e^x+1) - \int e^x \frac{e^x}{e^x+1}\,dx =$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = \ln(e^x+1) & du = \dfrac{e^x}{e^x+1}\,dx \\ dv = e^x\,dx & v = e^x \end{array} \right|$$

$= e^x \ln(e^x+1) - \int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = e^x \ln(e^x+1) - \int \left(e^x - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx =$
$= e^x \ln(e^x+1) - e^x + \ln(e^x+1) + C = (e^x+1)\ln(e^x+1) - e^x + C.$

**Задача 4, 18** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы: 1) $I_1 = \int \cos x \cdot \ln\sin x\,dx$;
2) $I_2 = \int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$; 3) $I_3 = \int \sec^2 x \cdot \ln \operatorname{tg} x\,dx$; 4) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}\,dx$;
5) $\int x e^{nx}\,dx$.

**Ответ.** 1) $\sin x(\ln\sin x - 1) + C$; 2) $-x - \operatorname{ctg} x \ln\cos x + C$;
3) $\operatorname{tg} x(\ln\operatorname{tg} x - 1) + C$; 4) $-\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} x \ln \operatorname{tg} x + C$;
5) $\frac{1}{n} e^{nx}\left(x - \frac{1}{n}\right) + C$.

### Интегралы, для вычисления которых интегрирование по частям применяется несколько раз

**Задача 4, 19.** Вычислить интеграл $\int (\ln x)^2\,dx$.

**Решение.** Интегрирование по частям применим дважды:

$\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right) =$

$$\left| \begin{array}{l|l} u = (\ln x)^2 & du = 2\ln x \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| \qquad \left| \begin{array}{l|l} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx & v = x \end{array} \right|$$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C = x\ln x(\ln x - 2) + 2x + C.$

**Задача 4, 20** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int \sqrt[3]{x}(\ln x)^2\,dx$.

Указание. $u = (\ln x)^2$; $dv = \sqrt[3]{x}\,dx$; $du = \frac{2\ln x}{x}\,dx$;
$v = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}$.

Интегрирование по частям и здесь придется применить дважды.

**Ответ.** $\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x}\left[(\ln x)^2 - \frac{3}{2}\ln x + \frac{9}{8}\right] + C.$

**Задача 4, 21.** Вычислить интеграл $\int (\arcsin x)^2\,dx$.

**Ответ.** $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$

## Упражнения, в которых двукратное интегрирование по частям приводит к исходному интегралу

**Задача 4, 22.** Вычислить интеграл $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$.

**Решение.** В этом примере двукратное применение интегрирования по частям приведет к исходному интегралу.

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx=$$

| | |
|---|---|
| $u=e^{ax}$ | $du=ae^{ax}\,dx$ |
| $dv=\cos bx\,dx$ | $v=\frac{1}{b}\sin bx$ |

Вторично применяем интегрирование по частям:

| | |
|---|---|
| $u=e^{ax}$ | $du=ae^{ax}\,dx$ |
| $dv=\sin bx\,dx$ | $v=-\frac{1}{b}\cos bx$ |

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx\right].$$

Таким образом, двукратное применение формулы интегрирования по частям привело нас к исходному интегралу, который нами вычисляется.

Раскроем скобки в правой части:

$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Это вычисляемый интеграл, который мы обозначили буквой $I$

Таким образом,

$$I=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}I,$$

Мы получили уравнение с неизвестной величиной $I$.

Перенося последнее слагаемое в левую часть уравнения, найдем

$$I+\frac{a^2}{b^2}I=\frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right).$$

Вынесем в левой части этого уравнения $I$ за скобку:

$$I\,\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{1}{b}e^{ax}\left(\sin bx+\frac{a}{b}\cos bx\right).$$

Отсюда следует, что искомый интеграл равен

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)+C. \qquad (4,11)$$

Аналогичную задачу предлагаем для самостоятельного решения.

**Задача 4,23** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I = \int e^{ax} \sin bx\, dx$.

**Ответ.** $I = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C.$ **(4,12)**

**Задача 4,24** (для самостоятельного решения).

Применить формулы (4,11) и (4,12) к вычислению интегралов:

$$1)\ I_1 = \int e^{2x} \cos 3x\, dx;\ 2)\ I_2 = \int \frac{\cos 2x}{e^{3x}} dx;\ 3)\ I_3 = \int \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}} dx.$$

**Ответ.** 1) $\frac{e^{2x}}{13}(2 \cos 3x + 3 \sin 3x) + C$; 2) $\frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{13e^{3x}}$;

3) $\frac{6}{13} \frac{\sin \frac{x}{2} - 5 \cos \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{e^x}} + C.$

**Задача 4,25** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \sin (\ln x)\, dx$ и 2) $I_2 = \int \cos (\ln x)\, dx.$

Указание. Применение дважды к каждому интегралу формулы интегрирования по частям приводит к исходному интегралу. Например,

$$I_1 = x \sin (\ln x) - \underbrace{\int \cos (\ln x)\, dx}_{\text{Снова применить интегрирование по частям}} = x \sin (\ln x) - [x \cos (\ln x) + \underbrace{\int \sin (\ln x)\, dx}_{\text{Исходный интеграл}}].$$

**Ответ.** $I_1 = \frac{x}{2}[\sin (\ln x) - \cos (\ln x)] + C$; $I_2 = \frac{x}{2}[\sin (\ln x) + \cos (\ln x)] + C.$

## ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Простейшие дроби. Разложение рациональной дроби на простейшие.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

**Простейшие дроби.** Простейшими (иначе элементарными) дробями называются дроби вида:

1) $\frac{A}{x - a}$; 2) $\frac{A}{(x - a)^n}$, ($n > 0$ и целое);

3) $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$; 4) $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}$, ($n > 0$ и целое),

где $A$, $B$, $a$, $p$ и $q$ — действительные числа, а трехчлен $x^2 + px + q$ имеет комплексные корни, т. е. не раскладывается на действительные множители первой степени.

**Рациональные дроби.** Дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{5,1}$$

называется *рациональной*, если ее числитель и знаменатель — многочлены (предполагается, что коэффициенты многочленов действительные числа).

Дробь (5,1) называется *правильной*, если степень многочлена $P(x)$, находящегося в числителе, меньше, чем степень многочлена $Q(x)$, находящегося в знаменателе.

Если же степень числителя равна степени знаменателя или больше ее, то рациональная дробь (5,1) называется *неправильной*.

**Примеры.** 1) Дробь $\frac{x^2+5x-3}{x^3+3x-1}$ — правильная (степень числителя меньше степени знаменателя).

2) Дроби $\frac{x^3+x^2-9}{2x^3+3x^2-x+7}$ и $\frac{x^5-3x^2+x-8}{x^2+x+3}$ — неправильные: в первой степень числителя равна степени знаменателя, а во второй степень числителя больше степени знаменателя.

Из неправильной рациональной дроби всегда можно выделить целую часть (многочлен). Это достигается делением числителя на знаменатель по правилу деления многочленов.

Например, неправильная дробь $\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}$ может быть представлена так:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4-3x^2+5x+4 & x^2-8x+5 \\ \cline{2-2}
x^4-8x^3+5x^2 & x^2+8x+56 \\ \cline{1-1}
-\;8x^3-8x^2+5x+4 & \\
8x^3-64x^2+40x & \\ \cline{1-1}
56x^2-35x+4 & \\
56x^2-448x+280 & \\ \cline{1-1}
413x-276 &
\end{array}$$

и, таким образом,

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5} = \underbrace{x^2+8x+56}_{\text{Целая часть (многочлен)}} + \underbrace{\frac{413x-276}{x^2-8x+5}}_{\text{Правильная дробь}}.$$

*Всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной дроби.*

Поэтому интегрирование рациональной дроби (5,1) всегда может быть приведено к интегрированию многочлена и правильной дроби.

**Корни многочлена.** Если при $x = x_1$ многочлен

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \qquad (5,2)$$

обращается в нуль, т. е. $Q(x_1) = 0$, то число $x_1$ называется корнем многочлена.

**Разложение многочлена на множители.** 1. Если числа $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_n$ являются корнями многочлена (5,2), то этот многочлен может быть разложен на множители по формуле

$$Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n). \qquad (5,3)$$

2. Многочлен степени $n$ не может иметь больше, чем $n$ различных корней.

3. Корень многочлена $x_1$ называется простым, если в разложение (5,3) множитель $x - x_1$ входит один раз. Если же этот множитель в формулу (5,3) входит $\alpha_1$ раз, то корень $x_1$ называется корнем кратности $\alpha_1$ многочлена (5,2).

Если корень $x_1$ имеет кратность $\alpha_1$, корень $x_2$ — кратность $\alpha_2$, а корень $x_p$ — кратность $\alpha_p$, то формулу (5,3) можно заменить такой:

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_p)^{\alpha_p}, \qquad (5,4)$$

причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$.

4. Если коэффициенты многочлена (5,2) — действительные числа, а его корнем является комплексное число $a + bi$, то его корнем будет также и комплексное число $a - bi$, сопряженное с $a + bi$.

Если в формуле (5,3) перемножить множители $x - (a + bi)$ и $x - (a - bi)$, соответствующие этим корням, то получится квадратичный множитель вида $x^2 + px + q$, где $p$ и $q$ — действительные числа.

В случае, когда $a + bi$ — простой корень многочлена (5,2), то и $a - bi$ — также простой корень этого многочлена.

Если же $a + bi$ — корень кратности $k$ многочлена (5,2), то и корень $a - bi$ имеет такую же кратность. В этом случае паре этих комплексных сопряженных корней в (5,3) будет соответствовать множитель $(x^2 + px + q)^k$.

Если многочлен (5,2) имеет не только действительные, но и комплексные корни, то вместо формулы (5,4) имеет место формула

$$Q(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{k_l}, \qquad (5,5)$$

причем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + 2k_1 + 2k_2 + \dots + 2k_l = n.$$

Квадратичные множители, входящие в эту формулу, не имеют действительных корней и на множители первой степени с действительными коэффициентами не разлагаются.

***Теорема*** (о разложении рациональной дроби на простейшие). Пусть $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная, несократимая рациональная дробь, а ее знаменатель после разложения на множители имеет вид

$$Q(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+ \\ +q_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_lx+q_l)^{k_l},$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — действительные числа, а квадратичные множители не имеют действительных корней.

Тогда дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде суммы простейших дробей. В этой сумме каждому множителю вида $(x-x_1)^p$ в знаменателе, где $x_1$ — любой из действительных корней, а $p$ — его кратность, соответствует выражение вида

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^p}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{p-1}}+\frac{A_3}{(x-x_1)^{p-2}}+\ldots+\frac{A_p}{x-x_1}, \quad (5{,}6)$$

а каждому множителю $(x^2+px+q)^r$ знаменателя — выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^r}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{r-1}}+\frac{B_3x+C_3}{(x^2+px+q)^{r-2}}+\ldots+\frac{B_rx+C_r}{x^2+px+q}, \quad (5{,}7)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_r, C_1, C_2 \ldots, C_r$ — действительные числа, подлежащие определению.

Теперь мы на нескольких примерах укажем два наиболее распространенных способа определения коэффициентов, стоящих в числителях тех простейших дробей, на которые разлагается данная рациональная дробь. Это способ неопределенных коэффициентов и способ задания частных значений.

**Задача 5,1.** Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$.

**Решение.** Применим способ неопределенных коэффициентов. Общий вид разложения будет таким:

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+3}+\frac{A_4}{x-4}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^2+2x-4=A_1(x-2)(x+3)(x-4)+A_2(x-1)(x+3)(x-4)+ \\ +A_3(x-1)(x-2)(x-4)+A_4(x-1)(x-2)(x+3). \quad (5{,}8)$$

Левая часть равенства должна быть тождественно равна правой, т. е. равенство (5,8) должно выполняться при любом значении $x$. Это будет иметь место только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в обеих частях равенства будут между собою равны.

В правой части (5,8) произведем умножение двучленов и получим

$$x^2+2x-4=A_1(x^3-3x^2-10x+24)+A_2(x^3-2x^2-11x+12)+$$
$$+A_3(x^3-7x^2+14x-8)+A_4(x^3-7x+6).$$

Это равенство можно переписать иначе, расположив многочлен в правой части по убывающим степеням $x$:

$$x^2+2x-4=(A_1+A_2+A_3+A_4)x^3+(-3A_1-2A_2-7A_3)x^2+$$
$$+(-10A_1-11A_2+14A_3-7A_4)x+(24A_1+12A_2-8A_3+6A_4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему четырех уравнений первой степени с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & A_1+A_2+A_3+A_4=0 \\
x^2 & -3A_1-2A_2-7A_3=1 \\
x & -10A_1-11A_2+14A_3-7A_4=2 \\
x^0 & 24A_1+12A_2-8A_3+6A_4=-4 \\
\text{(свободный член)} &
\end{array}\Bigg\}$$

Решив эту систему, получим:

$$A_1=-\frac{1}{12};\quad A_2=-\frac{2}{5};\quad A_3=\frac{1}{140};\quad A_4=\frac{10}{21}.$$

Теперь определим числа $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ вторым способом — способом задания частных значений.

Так как равенство (5,8) — тождество, то оно сохраняется при любом значении $x$. Будем давать $x$ такие значения, чтобы в правой части все члены, кроме одного, обращались в нуль. Такими «выгодными» значениями являются, очевидно, корни знаменателя, т. е. значения $x=1$; $x=2$; $x=-3$; $x=4$.

При $x=1$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, левая часть равенства $x^2+2x-4$ при $x=1$ будет равна $-1$, и мы получим

$$-1=A_1(1-2)(1+3)(1-4);\quad -1=12A_1;\quad A_1=-\frac{1}{12}.$$

При $x=2$ левая часть равна 4, а в правой части (5,8) все слагаемые, кроме второго, будут равны нулю:

$$4=A_2(2-1)(2+3)(2-4);\quad 4=-10A_2;\quad A_2=-\frac{2}{5}.$$

При $x=-3$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме третьего, равны нулю:

$$-1=A_3(-3-1)(-3-2)(-3-4);\ -1=-140A_3;\ A_3=\frac{1}{140}.$$

При $x=4$ в правой части (5,8) все слагаемые, кроме четвертого, обратятся в нуль, и мы будем иметь:

$$20=A_4(4-1)(4-2)(4+3);\quad 20=42A_4;\quad A_4=\frac{10}{21}.$$

Заметим, что каким бы способом ни вычислялись неизвестные коэффициенты, мы всегда получим для них одни и те же значения, так как разложение рациональной дроби на простейшие может быть осуществлено единственным образом.

Итак, заданная дробь

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=-\frac{1}{12(x-1)}-\frac{2}{5(x-2)}+\frac{1}{140(x+3)}+\frac{10}{21(x-4)}.$$

Укажем, что способ задания частных значений $x$ для определения неизвестных коэффициентов особенно удобен в том случае, когда знаменатель дроби содержит только действительные множители первой степени, среди которых нет равных.

В других случаях способ задания частных значений также дает сокращение вычислений, так как позволяет избежать решения системы уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных.

Однако мы рекомендуем учащемуся овладеть этими двумя способами.

**Задача 5,2** (для самостоятельного решения).

Рациональную дробь $\frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)}$ разложить на элементарные. Решение провести двумя способами.

**Ответ.** $\frac{3}{4(x-1)}-\frac{10}{3(x-2)}+\frac{29}{8(x-3)}-\frac{1}{24(x+1)}$.

**Задача 5,3** (для самостоятельного решения).

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби (применить два способа):

1) $\frac{11x-4}{x^2+2x-8}$.

Указание: знаменатель разложить на множители.

2) $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$; 3) $\frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)}$;

4) $\frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; 5) $\frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)}$;

6) $\frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)}$.

**Ответ.** 1) $\frac{3}{x-2}+\frac{8}{x+4}$; 2) $\frac{4}{x-1}-\frac{7}{x+3}+\frac{5}{x-4}$;

3) $\frac{17}{6(x+1)}+\frac{9}{10(x+2)}-\frac{119}{10(x-3)}+\frac{67}{6(x-2)}$;

4) $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x-3}$; 5) $\frac{7}{2(x-4)}-\frac{3}{4(x+2)}$;

6) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+3}+\frac{4}{x-4}$.

**Задача 5,4** (для самостоятельного решения).

Представить в виде суммы многочлена и простейших дробей рациональные дроби:

1) $\dfrac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}$; 2) $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-10x-14}{x^2-2x-8}$;

3) $\dfrac{30x^5+90x^4+165x^3+341x^2+271x+30}{x^3+3x^2+2x}$.

Указание. Выделить целую часть, согласно объяснению на стр. 60; знаменатели разложить на множители.

**Ответ.** 1) $3x+5-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-4}$;

2) $x^2+x+1+\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-4}$;

3) $30x^2+105+\dfrac{15}{x}+\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{6}{x+2}$.

**Задача 5,5.** Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\dfrac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}$.

**Решение.** Разлагая дробь на простейшие, получаем согласно формуле (5,6):

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}=\frac{A_1}{(x-2)^3}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\frac{A_3}{x-2}+\frac{A_4}{x-5}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^3-6x^2+9x+7=A_1(x-5)+A_2(x-2)(x-5)+ \\ +A_3(x-2)^2(x-5)+A_4(x-2)^3. \qquad (5,9)$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ применим второй способ — способ задания частных значений в сочетании со способом неопределенных коэффициентов. Напоминаем, что написанное равенство является тождеством: оно остается верным при любом значении $x$. Принимая $x=5$ и $x=2$, мы сможем просто определить два коэффициента. При $x=5$ имеем в левой части 27, тогда $27=A_4(5-2)^3$; $27=27A_4$; $A_4=1$.

При $x=2$ получаем в левой части 9.

$$9=A_1(2-5);\quad 9=-3A_1;\quad A_1=-3.$$

Теперь сравним коэффициенты при $x^3$ в левой и правой части тождества (5,9). В левой части коэффициент при $x^3$ равен 1, а в правой, если выполнить в ней возведение в степень и умножение, коэффициент при $x^3$ равен $A_3+A_4$. Таким образом, $A_3+$ $+A_4=1$. Но так как $A_4=1$, то $A_3=0$.

Сравним теперь свободные члены в левой и правой части (5,9). В правой части свободный член равен $-5A_1+10A_2-20A_3-8A_4$, а в левой 7, т. е. имеет место уравнение

$$-5A_1+10A_2-20A_3-8A_4=7.$$

Подставляя найденные значения $A_1$, $A_4$ и $A_3$, получим для определения $A_2$ уравнение

$$15 + 10A_2 - 8 = 7; \quad 10A_2 = 0; \quad A_2 = 0.$$

Итак, данная дробь

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3 (x-5)} = -\frac{3}{(x-2)^3} + \frac{1}{x-5}.$$

Определение $A_2$ и $A_3$ можно было провести способом задания частных значений. Например, при $x = 1$ и $x = 0$ получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= -4A_1 + 4A_2 - 4A_3 - A_4 \\ 7 &= -5A_1 + 10A_2 - 20A_3 - 8A_4 \end{aligned}\right\}.$$

Подставляя найденные значения $A_1 = -3$, $A_4 = 1$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} 11 &= 12 + 4A_2 - 4A_3 - 1 \\ 7 &= 15 + 10A_2 - 20A_3 - 8 \end{aligned}\right\}, \text{ или } \left.\begin{aligned} 4A_2 - 4A_3 &= 0 \\ A_2 - 2A_3 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда следует, что $A_2 = A_3 = 0$.

**Задача 5,6** (для самостоятельного решения).

Разложить на простейшие дроби:

1) $\dfrac{x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 8x + 5}{(x-2)^3 (x+3)^2}$;

2) $\dfrac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2}$;

3) $\dfrac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3 (x-2)}$;

4) $\dfrac{x^3 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2}$;

5) $\dfrac{-69x^3 - 12x^2 + 475x + 646}{(x+2)^2 (x-3)^2}$;

6) $\dfrac{3x^2 + 13x + 11}{(x+1)^2 (x+2)}$;

7) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2 (x-2)^2}$.

Указания. В четвертом примере $x^2 - 3x - 10$ разложить на множители; в седьмом примере представить дробь в виде $\dfrac{A_1}{x^2} + \dfrac{A_2}{x} + \dfrac{A_3}{(x-2)^2} + \dfrac{A_4}{x-2}$.

Ответ. 1) $\dfrac{1}{5(x-2)^3} + \dfrac{42}{25(x-2)^2} + \dfrac{27}{25(x-2)} + \dfrac{23}{25(x+3)^2} - \dfrac{2}{25(x+3)}$; 2) $\dfrac{9}{2(x-3)^2} + \dfrac{1}{2(x+1)^2}$;

3) $\dfrac{13}{(x-4)^3} - \dfrac{3}{(x-4)^2} + \dfrac{2}{x-4} - \dfrac{2}{x-2}$;

4) $-\dfrac{8}{49(x-5)^2} + \dfrac{30}{343(x-5)} + \dfrac{27}{49(x+2)^2} - \dfrac{30}{343(x+2)}$;

5) $\dfrac{8}{(x+2)^2} - \dfrac{9}{x+2} + \dfrac{4}{(x-3)^2} - \dfrac{60}{x-3}$;

6) $\dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{6}{x+1} - \dfrac{3}{x+2}$;

7) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{2(x-2)^2} + \dfrac{3}{4(x-2)}$.

**Задача 5,7.** Дробь $\frac{1}{x^3+1}$ разложить на простейшие.

**Решение.** Разложим знаменатель $x^3+1$ на множители: $x^3+1=$ $=(x+1)(x^2-x+1)$. Квадратичный множитель $x^2-x+1$ действительных корней не имеет, а потому на основании формул (5,6) и (5,7) имеет место разложение

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2-x+1}.$$

Умножая обе части равенства на $x^3+1$, получаем

$$1=A_1(x^2-x+1)+(B_1x+C_1)(x+1).$$

Для определения неизвестных $A_1, B_1$ и $C_1$ воспользуемся способом неопределенных коэффициентов. Выполняя умножение, имеем

$$1=(A_1+B_1)x^2+(-A_1+C_1+B_1)x+A_1+C_1.$$

Это равенство является тождеством и может сохраняться только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях равенства равны между собой:

$$\begin{array}{c|ll} x^2 & A_1+B_1=0 & (1)\\ x & -A_1+C_1+B_1=0 & (2)\\ x^0 & A_1+C_1=1 & (3)\\ \text{(свободный член)} & & \end{array}$$

Складывая первое уравнение с третьим и вычитая из полученного уравнения второе, получаем

$$3A_1=1;\quad A_1=\frac{1}{3}.$$

Тогда из уравнения (1) $B_1=-\frac{1}{3}$, а из уравнения (3) $C_1=\frac{2}{3}$ и, окончательно

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

**Задача 5,8.** Дробь $\frac{x^2}{1-x^4}$ разложить на простейшие.

**Решение.** Знаменатель дроби $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+$ $+x^2)$. Поэтому данная дробь может быть представлена в виде

$$\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{A_1}{1-x}+\frac{A_2}{1+x}+\frac{A_3x+A_4}{1+x^2}.$$

После умножения обеих частей равенства на $1-x^4$ получим тождество

$$x^2=A_1(1+x)(1+x^2)+A_2(1-x)(1+x^2)+(A_3x+A_4)(1-x^2). \tag{5,10}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ применим сначала способ задания частных значений. При $x=1$

получаем в левой части 1, а в правой все слагаемые, кроме первого, обратятся в нуль, а первое слагаемое станет равным $4A_1$. $A_1$ найдем из полученного уравнения: $1 = 4A_1$, $A_1 = \frac{1}{4}$. При $x = -1$ получаем в левой части равенства 1, а в правой $4A_2$, и тогда $1 = 4A_2$, а $A_2 = \frac{1}{4}$.

Теперь сравним коэффициенты при $x^3$ в левой и правой части равенства (5,10). В левую часть этого равенства $x^3$ не входит. Это означает, что коэффициент при $x^3$ равен 0, а в правой части коэффициент при $x^3$ равен $A_1 - A_2 - A_3$. Таким образом,

$$0 = A_1 - A_2 - A_3.$$

Учитывая, что $A_1$ и $A_2$ уже определены, имеем

$$0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - A_3,$$

а отсюда следует, что $A_3 = 0$.

Нам осталось определить $A_4$.

Дадим $x$ значение 0. В левой части получим 0, а в правой $A_1 + A_2 + A_4$, и тогда

$$0 = A_1 + A_2 + A_4.$$

Так как $A_1 = A_2 = \frac{1}{4}$, то $0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + A_4$, отсюда $A_4 = -\frac{1}{2}$.

Итак, предложенная дробь

$$\frac{x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

**Задача 5,9** (для самостоятельного решения). Разложить на простейшие дроби:

$$1)\ \frac{1}{(a+bx)(1+x^2)};\quad 2)\ \frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1)};$$

$$3)\ \frac{1}{x^4+1}.$$

Указание. $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

Дробь представить в виде

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Ответ. 1) $\frac{a-bx}{(a^2+b^2)(1+x^2)} + \frac{b^2}{(a^2+b^2)(a+bx)}$;

2) $-\frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{2}{5(x-2)} + \frac{x+2}{10(x^2+1)}$;

3) $A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $B = \frac{1}{2}$; $C = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $D = \frac{1}{2}$.

**Задача 5,10** (для самостоятельного решения).

Рациональные дроби: 1) $\frac{x^2+1}{x^3+1}$ и 2) $\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}$ разложить на простейшие.

Указание. $x^3+x^2+4x+4=x^2(x+1)+4(x+1)=(x+1)(x^2+4)$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)$; 2) $-\frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+4}$.

**Задача 5,11** (для самостоятельного решения). Разложить на простейшие дроби: 1) $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$; 2) $\frac{1}{1-x^6}$.

Указание. 1) Знаменатель разложить на множители. Для этого решить биквадратное уравнение $x^4+x^2-2=0$. Его корни $x_1=1$; $x_2=-1$; $x_3=\sqrt{2}i$ и $x_4=-\sqrt{2}i$, а потому $x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$. Перемножая множители, соответствующие мнимым корням $(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$, получим окончательно

$$x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x^2+2).$$

$$2)\ 1-x^6=(1-x^3)(1+x^3)=(1-x)(1+x+x^2)(1+x)(1-x+x^2).$$

**Ответ.** 1) $\frac{1}{6}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+1}+\frac{2}{3}\frac{1}{2+x^2}$;

2) $\frac{1}{6}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{6(x^2+x+1)}+\frac{x-2}{6(x^2-x+1)}$.

## ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование простейших рациональных дробей.

Интегрирование рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ приводится к интегрированию простейших дробей вида:

1) $\boxed{\frac{A}{x-a}}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ ($n>0$ и целое); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$;

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n>0$ и целое).

**1.** $\int\frac{A}{x-a}=dx=A\ln|x-a|+C.$ (6,1)

**Задача 6,1.** Найти интегралы:

1) $\int\frac{dx}{x-3}$; 2) $\int\frac{dx}{5-x}$; 3) $\int\frac{dx}{2x-1}$.

**Решение.** 1) По формуле (6,1) $\int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C$;

$$2)\ \int \frac{dx}{5-x} = -\int \frac{-1dx}{5-x} = -\ln|5-x| + C;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C.$$

$$\boxed{\text{Числитель равен производной знаменателя}}$$

Задача 6,2 (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{x-13}$; 2) $\int \frac{dx}{15-3x}$; 3) $\int \frac{dx}{4-7x}$; 4) $\int \frac{dx}{3-8x}$; 5) $\int \frac{3dx}{4x-9}$.

**Ответ.** 1) $\ln|x-13| + C$;

2) $-\frac{1}{3}\ln|15-3x| + C$; 3) $-\frac{1}{7}\ln|4-7x| + C$;

4) $-\frac{1}{8}\ln|3-8x| + C$; 5) $\frac{3}{4}\ln|4x-9| + C$.

2. $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C.$

Окончательно:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{n-1}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C. \qquad (6,2)$$

Задача 6,3. Вычислить интегралы:

$$1)\ I = \int \frac{dx}{(x-2)^3};\quad 2)\ I = \int \frac{dx}{(x+3)^5};$$

$$3)\ I = \int \frac{dx}{(2x-1)^4};\quad 4)\ I = \int \frac{dx}{(4-3x)^3}.$$

**Решение.** Для вычисления первых двух интегралов непосредственно применяется формула (6,2):

1) $n = 3$; $I = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-2)^2} + C.$

2) $n = 5$; $I = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+3)^4} + C.$

3) Чтобы можно было применить формулу (6,2), числитель дроби $\frac{1}{(2x-1)^4}$, стоящей под интегралом, должен быть равен производной от основания степени знаменателя. Преобразуем дробь к виду

$$\frac{1}{(2x-1)^4} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{(2x-1)^4},$$

и тогда

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{2}{(2x-1)^4}\,dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2x-1)^3}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{6}\,\frac{1}{(2x-1)^3}+C.$$

4) Этот интеграл вычисляется как и предыдущий

$$I=-\frac{1}{3}\int\frac{-3}{(4-3x)^3}\,dx=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(4-3x)^2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{6}\,\frac{1}{(4-3x)^2}+C.$$

3. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx.$

Для вычисления этого интеграла поступают так:

а) в числителе дроби, стоящей под интегралом, записывается производная знаменателя, т. е. $(2x+p)$. Тождественными преобразованиями из $2x+p$ получают заданный числитель $Ax+B$. Для этого следует $2x+p$ умножить на $\frac{A}{2}$ и к полученному произведению прибавить $B-\frac{Ap}{2}$. Очевидно, что

$$(2x+p)\frac{A}{2}+B-\frac{Ap}{2}=Ax+B.$$

б) Преобразованная дробь $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ имеет вид

$$\frac{(2x+p)\frac{A}{2}+B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}$$

и может быть представлена как сумма двух дробей:

$$\frac{A}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q}+\frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}.$$

Первая дробь интегрируется просто: в числителе находится производная знаменателя — интегрирование приводит к натуральному логарифму модуля знаменателя. Для интегрирования второй дроби в знаменателе выделяют полный квадрат:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Интеграл от второй дроби приводится к табличному интегралу (1,23), если $4q - p^2 < 0$, и к табличному интегралу (1,21), если $4q - p^2 > 0$.

**Замечание.** Если в знаменателе дроби вместо квадратичного трехчлена $x^2 + px + q$ находится трехчлен $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, то коэффициент $a$ следует вынести за скобку и тем самым свести этот случай к предыдущему.

В задачах 6,4 и 6,5 даны примеры вычисления интегралов этого типа.

**Задача 6,4.** Найти интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 14}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$; 3) $I_3 = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + 6}$;

4) $I_4 = \int \frac{dx}{x^2 - 9x + 25}$; 5) $I_5 = \int \frac{dx}{x^2 - 7x + 14}$; 6) $I_6 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 14}$.

**Решение.** В этом практическом занятии нам часто придется пользоваться формулой (3,4). Напомним, что она имеет такой вид:

$$\int \frac{u'}{u^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

1) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2 + 4x + 14 = (x + 2)^2 - 4 + 14 = (x + 2)^2 + 10.$$

Применим формулу (3,4)

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 10} = \frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x + 2}{\sqrt{10}} + C.$$

$$\left|\begin{matrix} u = x + 2; \ u' = 1 \\ a^2 = 10; \ a = \sqrt{10} \end{matrix}\right|$$

2) Выделяем полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4};$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$

$$\left|\begin{matrix} u = x + \frac{1}{2}; \ u' = 1 \\ a^2 = \frac{3}{4}; \ a = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

3) Выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2+3x+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+6=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4};$$

$$I_3=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}+C=$$

Формулу (3,4) можно применить: $u=x+\frac{3}{2}$; $u'=1$; $a^2=\frac{15}{4}$;

$$=\frac{2}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C.$$

4) В знаменателе выделяем полный квадрат:

$$x^2-9x+25=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+25=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{19}{4};$$

$$I_4=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+C=$$

Формулу (3,4) можно применить: $u=x-\frac{9}{2}$; $u'=1$; $a^2=\frac{19}{4}$

$$=\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{19}}+C.$$

5) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2-7x+14=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4};$$

$$I_5=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{7}}+C.$$

6) $x^2-x-14=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+14=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4};$

$$I_6=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{55}{4}}=\frac{2}{\sqrt{55}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{55}}+C.$$

**Задача 6,5** (для самостоятельного решения).
Найти интегралы:

$$1)\ \int\frac{dx}{x^2+x+5};\quad 2)\ \int\frac{dx}{x^2+2x+6};\ 3)\ \int\frac{dx}{x^2+6x+19};$$

$$4)\ \int\frac{dx}{x^2+5x+12};\ 5)\ \int\frac{dx}{x^2-7x+20}.$$

**Ответ.** 1) $\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C$;

2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C$; 3) $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{10}}+C$;

4) $\frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{23}}+C$; 5) $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{31}}+C$.

**Задача 6,6.** Найти интегралы:

$$1)\ I_1=\int\frac{dx}{5x^2+7x+11};\quad 2)\ I_2=\int\frac{dx}{4x^2+x+5};$$

$$3)\ I_3=\int\frac{dx}{3x^2-8x+9}.$$

**Решение.** Эта задача отличается от предыдущих тем, что коэффициент при $x^2$ в знаменателе не равен единице. Для того чтобы свести этот случай к предыдущему, будем этот коэффициент выносить за скобку (см. замечание на стр. 72).

$$1)\ 5x^2+7x+11=5\left(x^2+\frac{7}{5}x+\frac{11}{5}\right)=5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{49}{100}+\frac{11}{5}\right]=5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right];$$

$$I_1=\int\frac{dx}{5\left[\left(x+\frac{7}{10}\right)^2+\frac{171}{100}\right]}=\frac{1}{5}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{171}}{10}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{10}}{\frac{\sqrt{171}}{100}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{171}}\operatorname{arctg}\frac{10x+7}{\sqrt{171}}+C.$$

$$2)\ 4x^2+x+5=4\left(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}\right)=4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{64}+\frac{5}{4}\right]=$$

$$=4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{79}{64}\right];$$

$$I_2=\int\frac{dx}{4\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2+\frac{79}{64}\right]}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{79}}{8}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{79}}{8}}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{79}}\operatorname{arctg}\frac{8x+1}{\sqrt{79}}+C.$$

3) $3x^2-8x+9=3\left(x^2-\frac{8}{3}x+3\right)=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}+3\right]=$
$=3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]$;

$$I_3=\int\frac{dx}{3\left[\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{9}\right]}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{4}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-4}{\sqrt{11}}+C.$$

**Задача 6,7** (для самостоятельного решения).
Найти интегралы:

$$1)\ \int\frac{dx}{5x^2+9x+10};\qquad 2)\ \int\frac{dx}{7x^2-3x+5};$$

$$3)\ \int\frac{dx}{9x^2+x+12};\qquad 4)\ \int\frac{dx}{6x^2+7x+15};$$

$$5)\ \int\frac{dx}{3x^2-11x+17}.$$

**Ответ.** 1) $\frac{2}{\sqrt{119}}\operatorname{arctg}\frac{10x+9}{\sqrt{119}}+C$;

2) $\frac{2}{\sqrt{131}}\operatorname{arctg}\frac{14x-3}{\sqrt{131}}+C$;

3) $\frac{2}{\sqrt{431}}\operatorname{arctg}\frac{18x+1}{\sqrt{431}}+C$;

4) $\frac{2}{\sqrt{311}}\operatorname{arctg}\frac{12x+7}{\sqrt{311}}+C$;

5) $\frac{2}{\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x-11}{\sqrt{83}}+C$.

Теперь выполним упражнения в интегрировании дробей вида $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$.

**Задача 6,8.** Найти интегралы:

$$1)\ I_1=\int\frac{3x+4}{x^2+7x+14}\,dx;\quad 2)\ I_2=\int\frac{2x-3}{x^2+x+5}\,dx;$$

$$3)\ I_3=\int\frac{7x-8}{x^2+5x+17}\,dx.$$

**Решение.** На стр. 71 дано указание, как вычислять эти интегралы. Рекомендуется еще раз ознакомиться с ним.

1) Преобразуем дробь $\frac{3x+4}{x^2+7x+14}$, стоящую под интегралом: выделим в числителе из $3x+4$ производную знаменателя, равную $2x+7$, но чтобы величина числителя при этом не изменилась:

$$3x+4=(2x+7)\frac{3}{2}+4-\frac{21}{2}=(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}.$$

Поэтому

$$I_1=\int\frac{(2x+7)\frac{3}{2}-\frac{13}{2}}{x^2+7x+14}\,dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+7}{x^2+7x+14}\,dx-$$

| Преобразовываем в разность двух интегралов, причем во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат | Числитель является производной знаменателя. Применима формула (1,32) |
|---|---|

$$-\frac{13}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+14}=\frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14)-$$

$$-\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C.$$

**Ответ.** $I_1=\frac{3}{2}\ln(x^2+7x+14)-\frac{13}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C.$

**Замечание.** Под знаком логарифма трехчлен $x^2+7x+14$ не взят по абсолютной величине, так как корни его комплексны, коэффициент при $x^2$ положителен, а поэтому при любом значении $x$ этот трехчлен положителен.

Это замечание следует иметь в виду и в дальнейшем.

2) Из числителя дроби $2x-3$ выделим производную знаменателя, равную $2x+1$, и получим $2x-3=(2x+1)-4$. Поэтому

$$I_2=\int\frac{(2x+1)-4}{x^2+x+5}\,dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx-$$

| Представляем как разность двух интегралов, а во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат | В числителе производная знаменателя. Применить формулу (1,32) |
|---|---|

$$-4\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+5}=\ln(x^2+x+5)-4\frac{1}{\frac{\sqrt{19}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{19}}{2}}+C=$$

$$=\ln(x^2+x+5)-\frac{8}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{19}}+C.$$

3) Поступаем так же. Из числителя дроби $7x-8$ выделяем производную знаменателя, равную $2x+5$:

$$7x-8=(2x+5)\frac{7}{2}-8-\frac{35}{2}=(2x+5)\frac{7}{2}-\frac{51}{2};$$

$$I_3=\frac{7}{2}\ln(x^2+5x+17)-\frac{51}{\sqrt{43}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{43}}+C.$$

**Задача 6,9** (для самостоятельного решения). Найти интегралы:

1) $\int\frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx$; 2) $\int\frac{x+7}{x^2+11x+42}dx$; 3) $\int\frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$;

4) $\int\frac{7x+4}{x^2+x+9}dx$; 5) $\int\frac{5x-7}{x^2+3x+8}dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{3}{2}\ln(x^2+8x+18)-\frac{23}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{\sqrt{2}}+C$;

2) $\frac{1}{2}\ln(x^2+11x+42)+\frac{3}{\sqrt{47}}\operatorname{arctg}\frac{2x+11}{\sqrt{47}}+C$;

3) $\frac{1}{2}\ln(x^2-9x+23)+\frac{3}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-9}{\sqrt{11}}+C$;

4) $\frac{7}{2}\ln(x^2+x+9)+\frac{1}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{35}}+C$;

5) $\frac{5}{2}\ln(x^2+3x+8)-\frac{29}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{23}}+C$.

4. Интеграл вида $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$, где $n>1$ и целое, а корни знаменателя комплексны, сводится к вычислению двух интегралов. Это достигается так: в числителе записывается производная основания степени знаменателя, т. е. производная от $x^2+px+q$, и так же, как было указано в п. 3, (стр. 71 ), эта производная преобразовывается в выражение $Ax+B$, стоящее в числителе. Дробь

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}=\frac{(2x+p)\frac{A}{2}+B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^n}=\frac{A}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}+$$
$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^n}. \qquad (6,3)$$

Интеграл первой дроби вычисляется по формуле (1,29). Вторая дробь

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}.$$

Если обозначить

$$q-\frac{p^2}{4}=\beta^2,\quad x+\frac{p}{2}=\beta z \qquad (6,4)$$

(обозначить $q-\frac{p^2}{4}$ через $\beta^2$ мы имеем право, так как по предположению корни трехчлена $x^2+px+q$ — комплексны, а потому $q-\frac{p^2}{4}$ — величина положительная), то

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^n}=\frac{1}{(\beta^2z^2+\beta^2)^n}=\frac{1}{[\beta^2(1+z^2)]^n}=\frac{1}{\beta^{2n}(1+z^2)^n},$$

и таким образом интегрирование второй дроби в правой части (6,3) сводится к интегрированию дроби $\frac{1}{(1+z^2)^n}$.

Интеграл

$$I_n=\int\frac{1}{(1+z^2)^n}dz \tag{6,5}$$

вычисляется по формуле

$$I_n=\frac{1}{2(n-1)}\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}, \tag{6,6}$$

где

$$I_{n-1}=\int\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}}dz$$

(индекс у буквы $I$ равен показателю степени выражения $1+z^2$). Вывод формулы (6,6) можно найти, например, в учебнике Н. С. Пискунова «Дифференциальное и интегральное исчисления».

Формула (6,6) называется рекуррентной, или формулой приведения. Она позволяет вычисление интеграла $I_n$ свести к вычислению интеграла $I_{n-1}$ с меньшим на единицу индексом.

## Упражнения, связанные с применением рекуррентной формулы (6,6)

**Задача 6,10.** Вычислить интегралы:

$$1)\ I_3=\int\frac{dz}{(1-z^2)^3};\quad 2)\ I_4=\int\frac{dx}{(1+x^2)^4};\quad 3)\ I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}.$$

(Значок при $I$ равен показателю степени выражения, стоящего в знаменателе).

**Решение.** 1) Применим последовательно формулу (6,6). Подставляя в (6,6) $n=3$, получим:

$$I_3=\frac{1}{2(3-1)}\frac{z}{(1+z^2)^{3-1}}+\frac{2\cdot3-3}{2\cdot3-2}I_2;$$

$$I_3=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{4}I_2.$$

Теперь применим (6,6) к вычислению $I_2$ (положим в (6,6) $n=2$). Тогда

$$I_3=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2(2-1)}\frac{z}{(1+z^2)}+\frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}I_1\right)=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+$$
$$+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{z}{1+z^2}+\frac{1}{2}I_1\right)=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2}+\frac{3}{8}I_1.$$

Но $I_1=\int\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arctg} z+C$, а поэтому окончательно

$$I_3=\int\frac{dz}{(1+z^2)^3}=\frac{1}{4}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{z}{1+z^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} z+C. \quad (6,7)$$

2) Здесь также последовательно применяем формулу (6,6) начиная с $n=4$:

$$I_4=\frac{1}{2(4-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{4-1}}+\frac{2\cdot 4-3}{2\cdot 4-2}I_3;$$
$$I_4=\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}I_3. \quad (6,8)$$

Но $I_3$ нами было найдено в предыдущем примере, только там вместо $x$ стояла буква $z$. Заменяя в (6,7) $z$ на $x$ и подставляя в (6,8), получим

$$I_4=\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{6}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x\right]+C.$$

Окончательно

$$I_4=\frac{1}{6}\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{5}{24}\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{5}{16}\frac{x}{1+x^2}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg} x+C. \quad (6,9)$$

3) Формулу (6,6) можно применить, если в знаменателе будет выражение вида $(1+x^2)^n$. У нас же в степень $n=5$ возводится не $1+x^2$, а $4+x^2$. Полагая $x=2z$, получим $dx=2dz$; $x^2=4z^2$, а $(4+x^2)^5=(4+4z^2)^5=[4(1+z^2)]^5=1024(1+z^2)^5$.

Поэтому искомый интеграл

$$I=\int\frac{dx}{(4+x^2)^5}=\int\frac{2dz}{1024(1+z^2)^5}=\frac{1}{512}\int\frac{dz}{(1+z^2)^5}=\frac{1}{512}I_5.$$

Итак, $I=\frac{1}{512}I_5$ и, применяя формулу (6,6) при $n=5$,

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{2(5-1)}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{2\cdot 5-3}{2\cdot 5-2}I_4\right],$$

т. е. $I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{8}I_4\right]$.

Подставляя сюда найденное в предыдущем примере $I_4$ (только в (6,9) надо $x$ заменить буквой $z$), получаем

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{8}\left(\frac{1}{6}\frac{z}{(1+z^2)^3}+\frac{5}{24}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5}{16}\frac{z}{1+z^2}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg} z\right)\right]+C.$$

Раскрывая скобки, будем иметь

$$I=\frac{1}{512}\left[\frac{1}{8}\frac{z}{(1+z^2)^4}+\frac{7}{48}\frac{z}{(1+z^2)^3}+\frac{35}{192}\frac{z}{(1+z^2)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{35}{128}\frac{z}{1+z^2}+\frac{35}{128}\operatorname{arctg} z\right]+C.$$

Возвратимся к старой переменной $x$. Мы полагали, что $x=2z$. Отсюда $z=\frac{x}{2}$. Подставляя в последнее равенство $z=\frac{x}{2}$, получим окончательно

$$I=\frac{1}{32}\frac{x}{(4+x^2)^4}+\frac{7}{768}\frac{x}{(4+x^2)^3}+\frac{35}{12288}\frac{x}{(4+x^2)^2}+$$
$$+\frac{35}{32768}\frac{x}{4+x^2}+\frac{35}{65536}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

**Задача 6,11** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы (указания даны на стр. 77 и 78).

1) $I=\int\frac{dx}{(3x^2+x+7)^2}$; 2) $I=\int\frac{dx}{(5x^2+2x+4)^3}$;

3) $I=\int\frac{3x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx$; 4) $I=\int\frac{2x-1}{(4x^2+3x+5)^3}dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{6x+1}{83(3x^2+x+7)}+\frac{12}{83\sqrt{83}}\operatorname{arctg}\frac{6x+1}{\sqrt{83}}+C$;

2) $\frac{5x+1}{38}\left[\frac{1}{2(5x^2+2x+4)^2}+\frac{15}{76(5x^2+2x+4)}\right]+$
$+\frac{75}{2888\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{5x+1}{\sqrt{19}}+C$;

3) $\frac{x-5}{4(x^2+2x+5)}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$;

4) $-\frac{14x+23}{142(4x^2+3x+5)^2}-\frac{21}{5041}\frac{8x+3}{4x^2+3x+5}-$
$-\frac{336}{5041\sqrt{71}}\operatorname{arctg}\frac{8x+3}{\sqrt{71}}+C$.

## СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Интегрирование рациональных дробей.

На пятом практическом занятии учащийся на большом числе упражнений ознакомился со способами разложения рациональной дроби на простейшие, а на шестом занятии он приобрел навыки интегрирования простейших рациональных дробей.

Поэтому интегрирование рациональных дробей не должно вызывать трудностей. Ограничимся только несколькими подробно разобранными примерами, а остальные предложим для самостоятельного решения.

Мы рассмотрим такие четыре случая:

1. Корни знаменателя — только действительные числа, среди которых нет равных.

2. Корни знаменателя — только действительные числа, но среди них есть равные (знаменатель имеет действительные кратные корни).

3. Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные корни, но среди них нет равных.

4. Знаменатель дроби наряду с действительными имеет и кратные комплексные корни.

*Первый случай.*

**Задача 7,1.** Вычислить $I=\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)}dx$.

**Решение.** *Прежде чем приступить к интегрированию рациональной дроби, следует убедиться в том, что дробь — правильная и несократимая.* В нашем случае дробь, стоящая под интегралом,— неправильная, так как степень ее числителя (третья) выше степени знаменателя (второй).

Поэтому прежде всего исключаем целую часть.

Для этого делим числитель $x^3+x+2$ на знаменатель $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+x+2 & x^2-7x+12 \\ \mp x^3\pm 7x^2\mp 12x & \overline{x+7+\frac{38x-82}{x^2-7x+12}} \\ \hline -\,7x^2-11x+2 & \\ \mp 7x^2\pm 49x\mp 84 & \\ \hline 38x-82 & \end{array}$$

Поэтому

$$I=\int\left(x+7+\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x+\int\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}dx.$$

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$.

Умножая обе части этого равенства на $(x-3)(x-4)$, получаем

$$38x-82=A(x-4)+B(x-3).$$

Здесь коэффициенты проще всего определить способом задания частных значений: $A=-32$; $B=70$.

Дробь $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}=-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}$, а $I=\frac{1}{2}x^2+7x+$
$+\int\left(-\frac{32}{x-3}+\frac{70}{x-4}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+7x-32\ln|x-3|+70\ln|x-4|+C.$

**Задача 7,2.** Вычислить $I=\int\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}dx$.

**Решение.** Дробь, стоящая под интегралом,— правильная. Разлагаем ее на простейшие:

$$\frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}.$$

Умножая левую и правую часть этого равенства на знаменатель левой части, имеем

$$x^2+x+5=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3).$$

И здесь при определении коэффициентов $A$, $B$ и $C$ наиболее быстро к цели ведет способ задания частных значений.

(Вообще, если корни знаменателя — числа только действительные и разные, этот способ является наиболее целесообразным). $A=-\frac{5}{6}$; $B=\frac{11}{15}$; $C=\frac{11}{10}$.

$$I=\int\left(-\frac{5}{6}\frac{1}{x}+\frac{11}{15}\frac{1}{x+3}+\frac{11}{10}\frac{1}{x-2}\right)dx=-\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{11}{15}\ln|x+3|+$$
$$+\frac{11}{10}\ln|x-2|+C=\ln\frac{(x-2)\sqrt[15]{(x+3)^{11}}\sqrt[10]{x-2}}{\sqrt[6]{x^5}}+C.$$

**Задача 7,3** (для самостоятельного решения).

Вычислить: 1) $\int\frac{dx}{(a+bx)(c+dx)}$; 2) $\int\frac{x\,dx}{(a+bx)(c+dx)}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{bc-ad}\ln\left|\frac{a+bx}{c+dx}\right|+C$; 2) $\frac{1}{ad-bc}\left[\frac{a}{b}\ln|a+bx|-\right.$ $\left.-\frac{c}{d}\ln|c+dx|\right]+C$.

**Задача 7,4** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

**Ответ.** $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

**Задача 7,5.** Вычислить:

1) $I=\int\frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$; 2) $I=\int\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$;

3) $I=\int\frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}dx$; 4) $I=\int\frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$.

**Решение.** 1) Разлагаем прежде всего знаменатель на множители: $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Дробь

$$\frac{2x+3}{x^2-7x+12}=\frac{2x+3}{(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4};\ A=-9;\ B=11;$$

$$I=\ln\frac{(x-4)^{11}}{(x-3)^9}+C.$$

2) Знаменатель дроби разлагаем на множители:

$$x^3-9x^2+20x=x(x^2-9x+20)=x(x-4)(x-5).$$

Дробь

$$\frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x-5}.$$

Для определения коэффициентов $A$, $B$ и $C$ с целью упражнений примените способ задания частных значений и способ неопределенных коэффициентов. Окажется, что

$$A=\frac{3}{20};\ B=-\frac{27}{4};\ C=\frac{38}{5};$$

$$I=\frac{3}{20}\ln|x|-\frac{27}{4}\ln|x-4|+\frac{38}{5}\ln|x-5|+C,$$

или $I=\ln\dfrac{\sqrt[20]{x^3}\,(x-5)^7\sqrt[4]{(x-5)^3}}{(x-4)^6\sqrt[4]{(x-4)^3}}+C.$

3) Знаменатель дроби разлагаем на множители: приравниваем знаменатель нулю и находим его корни:

$x^4-10x^2+9=0;$ $x_1=1;$ $x_2=-1;$ $x_3=3;$ $x_4=-3,$ поэтому $x^4-10x^2+9=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3),$ а дробь

$$\frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3};$$

$$A=-\frac{3}{16};\ B=\frac{17}{16};\ C=\frac{5}{48};\ D=-\frac{47}{48};$$

$$I=\ln(x+1)\sqrt[48]{\frac{(x+1)^3(x-3)^5}{(x-1)^9(x+3)^{47}}}+C.$$

4) Здесь мы прежде всего обращаем внимание на то, что дробь, стоящая под интегралом,— неправильная. Исключаем целую часть:

$$I=\int\left(2x-1+\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}\right)dx;$$

$$\frac{18x^2-9x+5}{x(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+3}.$$

Определяя коэффициенты любым из указанных способов, получим:

$$A=-\frac{5}{9};\ B=\frac{70}{9};\ C=\frac{97}{9};$$

$$I=x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C;$$

$$I=x^2-x+\ln(x-3)^7(x+3)^{10}\sqrt[9]{\frac{(x-3)^7(x+3)^7}{x^5}}+C.$$

**Задача 7,6** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3-11x^2+4x+15}{x^3-5x^2-x+5}dx$;

2) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^4-5x^2+1}$;

4) $\displaystyle\int\frac{dz}{z^3+7z^2+2z-40}$.

Указания. В первом примере после исключения целой части получится дробь $\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}$; знаменатель после разложения его на множители равен $(x+1)(x-1)(x-5)$. Дробь $\frac{x+5}{x^3-5x^2-x+5}=$
$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-5}$;

$$A=\frac{1}{3};\quad B=-\frac{3}{4};\quad C=\frac{5}{12}.$$

В четвертом примере один корень знаменателя $z_1=2$.

Ответ. 1) $\frac{(x+2)^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{3}{4}\ln|x-1|+\frac{5}{12}\ln|x-5|+C$;

2) $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}+C$; 3) $\ln\sqrt[6]{\frac{(x-1)(2x+1)^2}{(x+1)(2x-1)^2}}+C$;

4) $\frac{1}{42}\ln\frac{(z+5)^6(z-2)}{(z+4)^7}+C$.

*Второй случай*. Корни знаменателя — только действительные числа, но среди них есть кратные.

Задача 7,7. Вычислить

$$I=\int\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx.$$

Решение. Заданная дробь — правильная и несократимая. (На это прежде всего следует обратить внимание).

Представим дробь в виде

$$\frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{(x+2)^2}+\frac{E}{x+2}. \quad (7,1)$$

Определение $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ проведем способом неопределенных коэффициентов и способом задания частных значений, которые целесообразно комбинировать.

Умножая обе части написанного равенства на знаменатель левой части, получим

$$2x^2+5x-8=A(x+2)^2+B(x-1)(x+2)^2+C(x-1)^2(x+2)^2+$$
$$+D(x-1)^3+E(x-1)^3(x+2).$$

Напоминаем, что написанное выражение является тождеством, а потому равенство должно сохраняться при любом значении $x$. При $x=-2$ получаем

$$2(-2)^2+5(-2)-8=D(-2-1)^3,$$

отсюда определяем коэффициент $D$:

$$-10=-27D;\quad D=\frac{10}{27}.$$

При $x=1$

$$2\cdot 1^2+5\cdot 1-8=A(1+2)^2;\qquad -1=9A;\quad A=-\frac{1}{9}.$$

Нам осталось определить еще три коэффициента: $B$, $C$ и $E$. Теперь будем сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой части равенства.

Коэффициент при $x^4$ в левой части равен нулю ($x^4$ в левой части отсутствует), а в правой $C+E$. Поэтому $C+E=0$.

Свободный член в левой части равен $-8$, а в правой $4A-4B+4C-D-2E$. На основании этого получаем второе уравнение: $4A-4B+4C-D-2E=-8$, в котором $A$ и $D$ уже известны, а поэтому $2B-2C+E=\frac{97}{27}$.

Мы сравнивали именно свободные члены, потому что это можно сделать, не выполняя умножения и возведения в степень в правой части равенства.

Для того, чтобы получить третье уравнение для определения $B$, $C$ и $E$, снова возвратимся к способу задания частных значений. При $x=2$ получим

$$8+10-8=16A+16B+16C+D+4E.$$

С учетом, что $A=-\frac{1}{9}$, а $D=\frac{10}{27}$ это уравнение примет вид $4B+4C+E=\frac{77}{27}$.

Таким образом, для определения $B$, $C$ и $E$ имеем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} C+E&=0\\ 2B-2C+E&=\frac{97}{27}\\ 4B+4C+E&=\frac{77}{27}\end{aligned}\right\};$$

$$B=\frac{29}{27};\quad C=-\frac{13}{27};\quad E=\frac{13}{27}.$$

Таким образом,

$$A=-\frac{1}{9};\quad B=\frac{29}{27};\quad C=-\frac{13}{27};\quad D=\frac{10}{27};\quad E=\frac{13}{27}.$$

Очень полезно сделать проверку найденных значений коэффициентов. Для этого дадим $x$ произвольное значение, например, $x=-3$, получим равенство

$$-5=A-4B+16C-64D+64E.$$

При найденных значениях коэффициентов оно выполняется. Отсюда мы заключаем, что коэффициенты определены верно.

$$\int \frac{2x^2+5x-8}{(x-1)^3(x+2)^2}dx=\int\left[\frac{-\frac{1}{9}}{(x-1)^3}+\frac{\frac{29}{27}}{(x-1)^2}+\frac{-\frac{13}{27}}{x-1}+\frac{\frac{10}{27}}{(x+2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{13}{27}}{x+2}\right]dx=\frac{1}{9}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{29}{27}\,\frac{1}{x-1}-\frac{13}{27}\ln|x-1|-\frac{10}{27}\,\frac{1}{x+2}+$$

$$+\frac{13}{27}\ln|x+2|+C=-\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)}+\frac{13}{27}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+C.$$

**Задача 7,8** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{x^4+5x^3-10x^2-8x+5}{(x-2)^3(x+3)^2}dx$ способами, которые были применены в предыдущей задаче.

Ответ. $-\frac{23}{25(x+3)}-\frac{1}{10(x-2)^2}-\frac{42}{25(x-2)}+\frac{27}{25}\ln|x-2|-$ $-\frac{2}{25}\ln|x+3|+C.$

**Задача 7,9** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\frac{x^2+x-1}{x^3(x-2)^2}\cdot dx$

Ответ. $\frac{-5x^2+x-2}{8x^2(x-2)}+\ln\sqrt[16]{\left(\frac{x}{x-2}\right)^5}+C.$

**Задача 7,10** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $I=\int\frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx.$

Указание. $x^2-3x-10=(x-5)(x+2).$

Ответ. $\frac{8}{49}\,\frac{1}{x-5}-\frac{27}{49}\,\frac{1}{x+2}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C.$

*Третий случай.* Знаменатель дроби, кроме действительных корней, имеет и комплексные, но среди комплексных корней нет равных.

**Задача 7,11.** Вычислить интеграл $I=\int\frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx.$

Решение. Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-x^2+5x-5=x^2(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x^2+5).$$

Дробь, стоящая под интегралом, — неправильная. Поэтому, прежде чем разлагать ее на простейшие, исключим целую часть, Окажется, что она равна

$$x+6-\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}. \qquad (A)$$

Теперь дробь $\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}$ разложим на простейшие. Учитывая, что знаменатель дроби равен $(x-1)(x^2+5)$, получим

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Умножая обе части этого равенства на знаменатель левой части, получим

$$6x^2+25x-35=A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1).$$

Применим сначала способ задания частных значений. Возьмем $x=1$:

$$6\cdot 1^2+25\cdot 1-35=A(1^2+5);\quad -4=6A;\quad A=-\frac{2}{3}.$$

Теперь сравним коэффициенты при одинаковых степенях $x$. В левой части равенства коэффициент при $x^2$ равен 6, а в правой $A+B$.

Поэтому $A+B=6$, а так как $A=-\frac{2}{3}$, то $B=\frac{20}{3}$.

Свободный член в левой части равенства $-35$, а в правой $5A-C$. Поэтому $5A-C=-35$; $C=\frac{95}{3}$.

Итак, дробь

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}.$$

Учитывая это, а также выражение ($A$), получаем

$$I=\int\left[x+6+\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{20}{3}\int\frac{x}{x^2+5}dx+\frac{95}{3}\int\frac{dx}{x^2+5}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x+\frac{1}{3}\ln\frac{(x^2+5)^{10}}{(x-1)^2}+\frac{95}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

**Задача 7,12** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{1-x^4}$.

Указание. $1-x^4=(1-x)(1+x)(1+x^2)$. Дробь запишется в виде

$$\frac{1}{1-x^4}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1+x}+\frac{Cx+D}{1+x^2}.$$

**Ответ.** $\ln\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$

**Задача 7,13.** Вычислить

$$\int\frac{x\,dx}{1+x^3}.$$

Решение. Так как $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$, а корни трехчлена $1-x+x^2$ комплексны, то дробь запишем в виде

$$\frac{x}{1+x^3}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}.$$

**Ответ.** $-\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

**Задача 7,14** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{1-x^3}$.

Указание. $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$.

**Ответ.** $\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

**Задача 7,15.** Вычислить $I=\int\frac{x^3}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}dx.$

Указание. Учитывая, что корни каждого из трехчленов, находящихся в знаменателе,— комплексны, подынтегральную дробь запишем в виде

$$\frac{x^3}{(x^2+x+2)(x^2-2x+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+2}+\frac{Cx+D}{x^2-2x+3};$$

$$A=\frac{5}{22};\quad B=\frac{7}{11};\quad C=\frac{17}{22};\quad D=-\frac{21}{22}.$$

**Ответ.** $\ln\sqrt[44]{(x^2+x+2)^5(x^2-2x+3)^{17}}+\frac{23}{22\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-$

$$-\frac{\sqrt{2}}{11}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C.$$

**Задача 7,16** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

**Ответ.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

*Четвертый случай.* Знаменатель дроби имеет действительные и кратные комплексные корни.

**Задача 7,17.** Вычислить $\int\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}dx.$

Указание. Знаменатель дроби имеет кратные комплексные корни. Если $(x^2+4)^2=0$, то $x_1=2i$; $x_2=-2i$; $x_3=2i$; $x_4=-2i$. Дробь

$$\frac{1}{(x-1)^2(x^2+4)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+4};$$

$$A=\frac{1}{25};\quad B=-\frac{4}{125};\quad C=\frac{18}{125};\quad D=-\frac{31}{125};\quad E=\frac{4}{125};$$

$$F=\frac{3}{125}.$$

**Ответ.** $\frac{2}{125}\ln\frac{x^2+4}{(x-1)^2}-\frac{71x^2+41x+88}{1000(x-1)(x^2+4)}-\frac{7}{2000}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

**Задача 7,18** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}dx;\qquad 2)\ \int\frac{x^5}{(3+2x^2)^3}dx.$$

**Ответ.** 1) $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C;$

2) $\frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{3(9+8x^2)}{2(3+2x^2)^2}\right]+C.$

Указание. При вычислении второго интеграла можно избежать обычного пути, если ввести подстановку $3+2x^2=z$. Тогда $4x\,dx=dz$; $x\,dx=\frac{dz}{4}$; $x^2=\frac{z-3}{2}$; $x^4=\frac{(z-3)^2}{4}$ и

$$\int\frac{x^5\,dx}{(3+2x^2)^3}=\int\frac{x^4x\,dx}{(3+2x^2)^3}=\int\frac{(z-3)^2\,dz}{4\cdot4\cdot z^3}=\frac{1}{16}\int\frac{z^2-6z+9}{z^3}dz=$$
$$=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{z}-\frac{6}{z^2}+\frac{9}{z^3}\right)dz=\frac{1}{16}\left[\ln z+\frac{6}{z}-\frac{9}{2z^2}\right]+C=$$
$$=\frac{1}{16}\left[\ln(3+2x^2)+\frac{6}{3+2x^2}-\frac{9}{2(3+2x^2)^2}\right]+C.$$

Отсюда легко получается и предыдущий ответ.

Замечание. Следует вообще иметь в виду, что интегралы вида $\int\frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^n}dx$, где $m$ — целое и положительное число, легко вычисляются с помощью подстановки $a+bx^2=z$. Эта подстановка приводит к интегралу $\frac{1}{2b^{m+1}}\int\frac{(z-a)^m}{z^n}dz$, а вычисление его сводится к вычислению интегралов от одночленов.

**Задача 7,19** (для самостоятельного решения). Вычислить

$$I=\int\frac{x^7}{(5+4x^2)^4}dx.$$

Указание. Подстановка $5+4x^2=z$;

$$I=\frac{1}{512}\int\frac{(z-5)^3}{z^4}dz.$$

**Ответ.** $\frac{1}{512}\left[\ln(5+4x^2)+\frac{1375+2700x^2+1440x^4}{6(5+4x^2)^3}\right]+C.$

## ВОСЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.

### I. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sin kx \cos lx\, dx; \quad \int \cos kx \cos lx\, dx; \quad \int \sin kx \sin lx\, dx;$$

где $k$ и $l$ — действительные числа.

Из тригонометрии известно, что произведения тригонометрических функций, находящихся под знаками этих интегралов, преобразуются в суммы по следующим формулам:

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}[\sin(k-l)x + \sin(k+l)x]; \tag{8,1}$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x + \cos(k+l)x]; \tag{8,2}$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x]. \tag{8,3}$$

Заменив в рассматриваемых интегралах подынтегральные функции по этим формулам, легко выполним интегрирование.

Следует также иметь в виду уже известные нам формулы, которыми часто придется пользоваться. Для удобства мы запишем их здесь:

$$\int \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx + C; \tag{8,4}$$

$$\int \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx + C; \tag{8,5}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \tag{8,6}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \tag{8,7}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C; \tag{8,8}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \tag{8,9}$$

**Задача 8,1.** Вычислить интегралы:

1) $I_1 = \int \sin 6x \cos 7x\, dx$; 2) $I_2 = \int \cos 3x \cos 9x\, dx$;

3) $I_3 = \int \sin 2x \sin 5x\, dx$.

**Решение.** 1) Заменяя произведение $\sin 6x \cos 7x$ по формуле (8,1), получим

$$I_1 = \frac{1}{2}\int [\sin(-x) + \sin 13x]\,dx = \frac{1}{2}\int(-\sin x + \sin 13x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right) + C.$$

2) Заменим $\cos 3x \cos 9x$ суммой косинусов по формуле (8,2), найдем

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \underbrace{[\cos(-6x) + \cos 12x]}_{\cos(-6x) = \cos 6x}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int(\cos 6x + \cos 12x)\,dx}_{\text{Применить формулу (8,5)}} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{12}\sin 12x\right) + C.$$

3) Заменяя произведение $\sin 2x \sin 5x$ по формуле (8,3), получим

$$I_3 = \frac{1}{2}\int [\cos(-3x) - \cos 7x]\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{7}\sin 7x\right) + C.$$

**Задача 8,2** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \cos 3x \cos x\,dx$; 2) $\int \sin 5x \sin\frac{x}{2}\,dx$;

3) $\int \sin\frac{3}{4}x \cos\frac{x}{4}\,dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$;

2) $\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{11}\sin\frac{11x}{2} + \frac{2}{9}\sin\frac{9x}{2}\right) + C$;

3) $-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + \cos x\right) + C$.

**Задача 8,3.** Найти $I = \int \sin 2x \cos 5x \sin 9x\,dx$.

**Решение.**

$$\sin 2x \cos 5x \sin 9x = \frac{1}{2}[\sin(-3x) + \sin 7x]\sin 9x =$$
$$= \frac{1}{2}(-\sin 3x \sin 9x + \sin 7x \sin 9x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 12x) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 16x)\right];\quad I = \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 12x}{12} - \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 16x}{16}\right) + C.$$

**Задача 8,4** (для самостоятельного решения). Найти:

1) $\int \sin x \cos 2x \cos 3x\,dx$; 2) $\int \cos x \cos 2x \cos 5x\,dx$.

**Ответ.** 1) $-\frac{\cos 2x}{8} + \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 6x}{24} + C$;

2) $\frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{\sin 6x}{24} + \frac{\sin 8x}{32} + C$.

## II. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx. \tag{8,10}$$

(Во всем дальнейшем $m$ — показатель степени синуса, $n$ — показатель степени косинуса).

Интегралы этого вида вычисляются особенно просто в четырех случаях: 1) $m$ — нечетное положительное число; 2) $n$ — положительное нечетное число; 3) $m+n=-2k$ — четное отрицательное число; 4) $m+n=0$ (в четвертом случае предполагается, что $m$ и $n$ — целые числа).

*Первый случай.* Показатель степени синуса $m$ — нечетное положительное число: $m=2k+1$. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем так: из $\sin^m x = \sin^{2k+1}x$, выделяем первую степень синуса и получаем

$$\sin^{2k+1}x = \sin^{2k} x \sin x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x,$$

а подынтегральное выражение

$$\sin^m x \cos^n x \, dx = (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx.$$

Теперь применим подстановку

$$\cos x = z. \tag{8,11}$$

Тогда $-\sin x \, dx = dz$;

$$(1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x \, dx = -(1-z^2)^k z^n \, dz,$$

и вопрос сведется к интегрированию суммы степенных функций.

*Второй случай.* Показатель степени косинуса $n$ — нечетное положительное число:

$$n = 2k+1.$$

Из $\cos^n x = \cos^{2k+1} x$ выделяем первую степень косинуса и получаем

$$\cos^{2k+1} x = \cos^{2k} x \cos x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1-\sin^2 x)^k \cos x.$$

Подынтегральное же выражение запишется так:

$$\sin^m x \cos^n x \, dx = \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x \, dx.$$

Применим подстановку

$$\sin x = z, \tag{8,12}$$

$\cos x \, dx = dz$, подынтегральное выражение примет вид

$$z^m (1-z^2)^k \, dz,$$

и вопрос опять-таки сведется к интегрированию суммы степенных функций.

Итак, вычисление интеграла (8,10) при указанных значениях $m$ и $n$ сводится к интегрированию степенных функций.

Приступим к решению задач.

**Задача 8,5.** Вычислить интегралы:

$$1)\ I_1 = \int \sin^3 x\,dx; \quad 2)\ I_2 = \int \cos^5 x\,dx;$$

$$3)\ I_3 = \int \sin^7 x\,dx; \quad 4)\ I_4 = \int \cos^9 x\,dx.$$

**Решение.** 1) Запишем, что $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x$. Тогда

$$I_1 = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx. \qquad (8,13)$$

Применяя подстановку (8,11) $\cos x = z$, получим

$$I_1 = -\int (1 - z^2)\,dz = -z + \frac{z^3}{3} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим окончательно

$$I_1 = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Собственно говоря, для вычисления интеграла (8,13) никакой подстановки не требуется, так как формула (1,29)

$$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

позволяет сразу написать ответ. Из (8,13) следует, что

$$I_1 = \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \sin x\,dx = -\cos x +$$

$$+ \int \underbrace{\cos^2 x}_{u^2}\underbrace{(-\sin x)}_{u'}\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Это замечание относится и к следующим примерам этого номера. Однако мы все же для упражнений будем прибегать к подстановкам.

2) В подынтегральной функции $\cos^5 x$ выделим первую степень косинуса, тогда

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x =$$

$$= (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x,$$

а

$$I_2 = \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x\,dx.$$

Применяя подстановку (8,12): $\sin x = z$; $\cos x\,dx = dz$, получим

$$I_2 = \int (1 - 2z^2 + z^4)\,dz = z - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, т. е. заменяя $z$ на $\sin x$, получим окончательно

$$I_2 = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

И здесь, конечно, можно было обойтись без подстановки, а вести интегрирование непосредственно при помощи формулы (1,29).

3) Из $\sin^7 x$ выделяем первую степень синуса и получим

$$\sin^7 x = \sin^6 x \sin x = (\sin^2 x)^3 \sin x = (1 - \cos^2 x)^3 \sin x;$$

$$I_3 = \int (1 - \cos^2 x)^3 \sin x\, dx.$$

Подстановка (8,11): $\cos x = z$; $-\sin x\, dx = dz$

$$I_3 = -\int (1 - z^2)^3\, dz = -\int (1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6)\, dz =$$

$$= -\left(z - z^3 + \frac{3}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7\right) + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, т. е. заменяя $z$ на $\cos x$, получим окончательно

$$I_3 = -\left(\cos x - \cos^3 x + \frac{3}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x\right) + C.$$

4) Решение проведем без подробных объяснений:

$$\cos^9 x = \cos^8 x \cos x = (\cos^2 x)^4 \cos x = (1 - \sin^2 x)^4 \cos x;$$

$$I_4 = \int (1 - \sin^2 x)^4 \cos x\, dx = \int (1 - z^2)^4\, dz =$$

| Подстановка: $\sin x = z$; $\cos x\, dx = dz$ |

$$= \int (1 - 4z^2 + 6z^4 - 4z^6 + z^8)\, dz = z - \frac{4}{3} z^3 + \frac{6}{5} z^5 -$$

$$- \frac{4}{7} z^7 + \frac{1}{9} z^9 + C = \sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x + \frac{6}{5}\sin^5 x -$$

$$- \frac{4}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

**Задача 8,6.** Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$;
2) $I_2 = \int \cos^2 x \sin^5 x\, dx$; 3) $I_3 = \int \sin^4 x \cos^7 x\, dx$.

**Решение.** Эти примеры решаются так же, как и примеры предыдущей задачи. У функции, которая под интегралом находится в нечетной степени, выделяем первую степень и применяем указанный выше прием.

1) $\sin^4 x \cos^3 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x =$
$= (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x,$

поэтому

$$I_1 = \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x\, dx = \int (z^4 - z^6)\, dz =$$

| Подстановка: $\sin x = z$; $\cos x\, dx = dz$ |

$$= \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

| Заменяем $z$ на $\sin x$ |

2) Подынтегральную функцию преобразуем так:

$$\cos^2 x \sin^5 x = \cos^2 x \sin^4 x \sin x = \cos^2 x (\sin^2 x)^2 \sin x =$$
$$= \cos^2 x (1 - \cos^2 x)^2 \sin x = \cos^2 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x =$$
$$= (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x;$$

$$I_2 = \int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x\, dx =$$

| Подстановка: $\cos x = z$; $-\sin x\, dx = dz$ |

$$= -\int (z^2 - 2z^4 + z^6)\, dz = -\left(\frac{z^3}{3} - \frac{2z^5}{5} + \frac{z^7}{7}\right) + C =$$

| Заменяем $z$ на $\cos x$ |

$$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}\right) + C.$$

3) Подынтегральную функцию запишем так:

$$\sin^4 x \cos^7 x = \sin^4 x \cos^6 x \cos x = \sin^4 x (\cos^2 x)^3 \cos x =$$
$$= \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^3 \cos x = \sin^4 x (1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x =$$
$$= (\sin^4 x - 3\sin^6 x + 3\sin^8 x - \sin^{10} x) \cos x;$$

$$I_3 = \int (\sin^4 x - 3\sin^6 x + 3\sin^8 x - \sin^{10} x) \cos x\, dx =$$

| Подстановка: $\sin x = z$; $\cos x\, dx = dz$ |

$$= \int (z^4 - 3z^6 + 3z^8 - z^{10})\, dz = \frac{z^5}{5} - \frac{3z^7}{7} + \frac{z^9}{3} - \frac{z^{11}}{11} + C =$$

| Заменяем $z$ на $\sin x$ |

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{3\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{3} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

**Задача 8,7** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \sin^7 x \cos^6 x\, dx$; 2) $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$;

3) $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$; 4) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

**Ответ.** 1) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{3}\cos^9 x - \frac{3}{11}\cos^{11} x + \frac{1}{13}\cos^{13} x + C$;

2) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$;

3) $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$;

4) $\frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

**Задача 8,8.** Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$;

2) $I_2 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$.

**Решение.** 1) $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (\sin^2 x)^2 \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x$;

$$I_1 = \underbrace{\int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} \sin x\, dx}_{\substack{\text{Подстановка: } \cos x = z;\\ -\sin x\, dx = dz}} = \underbrace{-\int \frac{1 - 2z^2 + z^4}{z^4}\, dz}_{\text{Выполним почленное деление}} =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} + 1\right) dz = \underbrace{-\left(-\frac{1}{3z^3} + \frac{2}{z} + z\right) + C}_{\text{Заменяем } z \text{ на } \cos x} =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C = \frac{1}{3}\sec^3 x - 2\sec x - \cos x + C.$$

2) $\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x)\cos x$;

$$I_2 = \underbrace{\int \frac{(1 - \sin^2 x)\cos x\, dx}{\sin^6 x}}_{\substack{\text{Подстановка: } \sin x = z;\\ \cos x\, dx = dz}} = \int \frac{1 - z^2}{z^6}\, dz = \int \left(\frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^4}\right) dz =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{5}\frac{1}{z^5} + \frac{1}{3}\frac{1}{z^3}}_{\text{Заменяем } z \text{ на } \sin x} + C = -\frac{1}{5}\frac{1}{\sin^5 x} + \frac{1}{3}\frac{1}{\sin^3 x} + C =$$

$$= -\frac{1}{5}\operatorname{cosec}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x + C.$$

3) Числитель $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)\sin x$;

$$I_3 = \underbrace{\int \frac{(1 - \cos^2 x)\sin x}{\cos^2 x}\, dx}_{\substack{\text{Подстановка: } \cos x = z;\\ \sin x\, dx = dz}} = -\int \frac{1 - z^2}{z^2}\, dz =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) dz = \underbrace{-\left(-\frac{1}{z} - z\right) + C}_{\text{Заменяем } z \text{ на } \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C = \sec x + \cos x + C.$$

**Задача** 8,9 (для самостоятельного решения).

**Найти интегралы:** 1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\, dx$; 2) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$; 3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\, dx$;

4) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\, dx$; 5) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}\, dx$; 6) $\int \frac{\sin^{11} x}{\cos x}\, dx$; 7) $\int \frac{\cos^5 x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\, dx$;

8) $\int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}}\, dx$; 9) $\int \cos^5 x \sqrt[3]{\sin^2 x}\, dx$; 10) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$.

**Ответ.** 1) $-\frac{\cos^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C$; 2) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$;

3) $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\cos x|+C$; 4) $\frac{\cos^2 x}{2}+\ln|\sin x|+C$;

5) $-\frac{1}{2\sin^2 x}-\ln|\sin x|+C$;

6) $\frac{5}{2}\cos^2 x-\frac{5}{2}\cos^4 x+\frac{5}{3}\cos^6 x-\frac{5}{8}\cos^8 x+\frac{1}{10}\cos^{10} x-\ln|\cos x|$;

7) $3\sqrt[3]{\sin x}\left(1-\frac{2}{7}\sin^2 x+\frac{1}{13}\sin^4 x\right)+C$;

8) $-2\sqrt{\cos x}\left(1-\frac{3}{5}\cos^2 x+\frac{1}{3}\cos^4 x-\frac{1}{13}\cos^6 x\right)+C$;

9) $3\sqrt[3]{\sin^2 x}\left(\frac{1}{5}\sin x-\frac{2}{11}\sin^3 x+\frac{1}{17}\sin^5 x\right)+C$;

10) $2\sqrt{\sin x}\left(1-\frac{1}{5}\sin^2 x\right)+C$.

**Задача 8,10** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$; 2) $\int\frac{\cos^7 x}{\sin^4 x}dx$.

**Ответ.** 1) $-\cos x-\frac{2}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+C$;

2) $-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

*Третий случай.* Сумма $m+n$ показателей степени синуса и косинуса в интеграле (8,10) — четное отрицательное число:

$$m+n=-2k \quad (k>0 \text{ и целое}).$$

В этом случае подынтегральная функция может иметь два вида:

1) Подынтегральная функция — дробь, в числителе которой находится степень синуса, а в знаменателе — степень косинуса (или наоборот), причем показатели степени или оба четные, или оба нечетные. В этом случае говорят, что они одинаковой четности.

Так как $m+n$ — отрицательное число, то отсюда следует, что степень знаменателя больше степени числителя.

2) Подынтегральная функция — дробь, числитель которой постоянная величина, а знаменатель — произведение степеней синуса и косинуса одинаковой четности.

В рассматриваемом случае ($m+n=-2k$) любая из подстановок

$$\operatorname{tg} x=z \tag{8,14}$$

или

$$\operatorname{ctg} x=z \tag{8,15}$$

преобразует подынтегральную функцию в многочлен или в многочлен, сложенный с целыми отрицательными степенями новой независимой переменной $z$.

Если подынтегральная функция имеет первый из разобранных видов, а в числителе находится степень $\sin x$, более удобной из этих подстановок является (8,14), если же в числителе находится степень $\cos x$, рациональнее применить подстановку (8,15).

Дроби второго вида с помощью подстановок (8,14) и (8,15) можно привести к интегрированию степенных функций.

Применяя подстановку (8,14), надо учесть, что из $\operatorname{tg} x = z$ следует:

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{dz}{1+z^2} \\ \sin x &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \\ \cos x &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \end{aligned}\right\} \tag{8,16}$$

$$\left(\sec^2 x\,dx = dz;\ dx = \frac{dz}{\sec^2 x} = \frac{dz}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{dz}{1+z^2}\right).$$

Если применяется подстановка (8,15), то

$$\left.\begin{aligned} dx &= -\frac{dz}{1+z^2} \\ \sin x &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \\ \cos x &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \end{aligned}\right\}. \tag{8,17}$$

**Задача 8,11.** Найти интеграл $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}\,dx$.

**Решение.** Здесь $m = 4$; $n = -8$; $m + n = -4$ — четное отрицательное число. Подынтегральная функция относится к рассматриваемому случаю.

Так как в числителе находится степень синуса, то на основании сделанного указания удобно применить подстановку (8,14): $\operatorname{tg} x = z$. По формулам (8,16) получаем

$$I = \int \frac{\frac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^8}} \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{\frac{z^4}{(1+z^2)^2}}{\frac{1}{(1+z^2)^4}} \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \int \frac{z^4(1+z^2)^4}{(1+z^2)^2} \frac{1}{1+z^2}\,dz = \int z^4(1+z^2)\,dz =$$

$$= \int (z^4 + z^6)\,dz = \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C.$$

Переходим к старой переменной (заменяем $z$ на $\operatorname{tg} x$)

$$I = \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{7} + C.$$

**Задача 8,12.** Найти интеграл $I = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$.

Решение. Здесь $n=4$; $m = -6$; $m + n = -2$ — четное отрицательное число, и мы имеем рассматриваемый случай. Так как в числителе находится степень косинуса, удобна подстановка (8,15): $\operatorname{ctg} x = z$.

Используя формулы (8,17), получаем

$$I = -\int \frac{\frac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^6}}} \frac{dz}{1+z^2} = -\int z^4 dz = -\frac{z^5}{5} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + C.$$

Заменяем $z$ на $\operatorname{ctg} x$

**Задача 8,13.** Найти интегралы:

$$1)\ I_1 = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx; \quad 2)\ I_2 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx.$$

Решение. 1) Здесь $m = 3$; $n = -7$; $m + n = -4$ — четное отрицательное число, т. е. рассматриваемый случай. В числителе — степень синуса, а потому удобна подстановка (8,14): $\operatorname{tg} x = z$. Используя формулы (8,16), относящиеся к этой подстановке, получим

$$I_1 = \int \frac{\frac{z^3}{\sqrt{(1+z^2)^3}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^7}}} \frac{dz}{1+z^2} = \int z^3 \sqrt{(1+z^2)^4} \frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= \int z^3 (1+z^2)^2 \frac{dz}{1+z^2} = \int z^3 (1+z^2)\, dz = \int (z^3 + z^5)\, dz = \frac{z^4}{4} + \frac{z^6}{6} + C =$$

Заменяем $z$ на $\operatorname{tg} x$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + C.$$

2) Здесь $m = -9$; $n = 3$; $m + n = -6$ — четное отрицательное число, т. е. рассматриваемый случай. В числителе — степень

косинуса, удобно применить подстановку (8,15): $\operatorname{ctg} x = z$. Используя формулы (8,17), относящиеся к этой подстановке, получаем

$$I_2 = -\int \frac{\dfrac{z^3}{\sqrt{(1+z^2)^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{(1+z^2)^9}}} \frac{dz}{1+z^2} = -\int z^3 (1+z^2)^2\, dz =$$

$$= -\int z^3 (1 + 2z^2 + z^4)\, dz = -\int (z^3 + 2z^5 + z^7)\, dz =$$

$$= -\left(\frac{z^4}{4} + \frac{z^6}{3} + \frac{z^8}{8}\right) + C = \boxed{\text{Заменяем } z \text{ на } \operatorname{ctg} x}$$

$$= -\left(\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{3} + \frac{\operatorname{ctg}^8 x}{8}\right) + C.$$

Для упражнения к первому интегралу примените подстановку (8,15); а ко второму — (8,14). Ответы совпадут, но в каждом — случае придется интегрировать отрицательные степени $z$, поэтому интегрирование осложнится.

**Задача 8,14** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ [подстановка (8,15)];

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ [подстановка (8,14)];

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^6 x}$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x}$; 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^8 x}$.

**Ответ.** 1) $-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C$; 2) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$; 3) $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C$; 4) $-\left(\operatorname{ctg} x + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x\right) + C$; 5) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x + \frac{3}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C$.

**Задача 8,15** (для самостоятельного решения).

**Найти интегралы:** 1) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$ [подстановка (8,15)];

2) $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x} dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{\sin^7 x}{\cos^{13} x} dx$.

**Ответ.** 1) $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C$; 2) $-\left(\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x\right) + C$;

3) $\frac{\operatorname{tg}^8 x}{8} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^{10} x + \frac{1}{12}\operatorname{tg}^{12} x + C$.

В предыдущих задачах $m$ и $n$ были целыми числами. Это требование не является обязательным. В рассматриваемом случае необходимо только, чтобы $m+n$ было отрицательным четным числом. Мы предложим несколько задач, в которых соблюдается условие $m+n=-2k$, но $m$ и $n$ — числа не целые.

**Задача 8,16.** Найти интегралы:

1) $I_1=\int\sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}}\,dx$; 2) $I_2=\int\sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}}\,dx$; 3) $I_3=\int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^6 x\,dx$.

**Решение.** 1) В подынтегральную функцию $\sin x$ входит в степени $m=\frac{1}{2}$, а $\cos x$ — в степени $n=-\frac{9}{2}$. Поэтому $m+n=$ $=\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-\frac{8}{2}=-4$ — четному отрицательному числу. Здесь наиболее удобной будет подстановка (8,14): $\operatorname{tg} x=z$. Используя формулы (8,16), получим

$$I_1=\int\frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{9}{2}} x}\,dx=\int\frac{\dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{9}{2}}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=\int z^{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+z^2})^4\,\frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\int z^{\frac{1}{2}}(1+z^2)^2\,\frac{dz}{1+z^2}=\int z^{\frac{1}{2}}(1+z^2)\,dz=\int\left(z^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{5}{2}}\right)dz=\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{z^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}+$$

$$+C=\frac{2}{3}\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x+\frac{2}{7}\operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x+C=2\sqrt{\operatorname{tg} x}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tg} x+\frac{1}{7}\operatorname{tg}^3 x\right)+C.$$

2) В этом примере показатель степени синуса $m=-\frac{8}{3}$, а показатель степени косинуса $n=\frac{2}{3}$, а потому $m+n=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=$ $=-2$ — четному отрицательному числу. Здесь уместна подстановка (8,15) : $\operatorname{ctg} x=z$. Учитывая связанные с ней формулы (8,17), получим

$$I_2=\int\frac{\cos^{\frac{2}{3}} x}{\sin^{\frac{8}{3}} x}\,dx=-\int\frac{\dfrac{z^{\frac{2}{3}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{2}{3}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{8}{3}}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=-\int z^{\frac{2}{3}}\frac{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{8}{3}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{2}{3}}}\,\frac{dz}{1+z^2}=$$

| Применяем формулы (8,17) |

$$=-\int z^{\frac{2}{3}}\,dz=-\frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}+C=-\frac{3}{5}\operatorname{ctg} x\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+C.$$

3) Преобразуем подынтегральную функцию к виду, который соответствует рассматриваемому случаю:

$$\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^6 x = \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{1}{2}} x} \frac{1}{\cos^6 x} = \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{13}{2}} x}.$$

Здесь $m = \frac{1}{2}$; $n = -\frac{13}{2}$; $m + n = -6$ — отрицательному нечетному числу. Применяя подстановку (8,14) и учитывая связанные с ней формулы (8,16), получим

$$I_3 = \int \frac{\sin^{\frac{1}{2}} x}{\cos^{\frac{13}{2}} x} dx = \int \frac{\dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{1}{2}}}}{\dfrac{1}{(\sqrt{1+z^2})^{\frac{13}{2}}}} \frac{dz}{1+z^2} = \int z^{\frac{1}{2}} (1+z^2)^2 \, dz =$$

| Применяем формулы (8,16) |

$$= \int z^{\frac{1}{2}} (1 + 2z^2 + z^4) \, dz = \int \left(z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{5}{2}} + z^{\frac{9}{2}}\right) dz = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{7} z^{\frac{7}{2}} +$$

| Возвращаемся к старой переменной, заменяя $z$ на $\operatorname{tg} x$ |

$$+ \frac{2}{11} z^{\frac{11}{2}} + C = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x + \frac{4}{7} \operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11} \operatorname{tg}^{\frac{11}{2}} x + C =$$

$$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{11} \operatorname{tg}^5 x\right) + C.$$

**Задача 8,17** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$; 2) $\int \sqrt[3]{\frac{\sin x}{\cos^7 x}} dx$;

3) $\int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x \, dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x} + C$; 2) $\frac{3}{4} \operatorname{tg} x \sqrt[3]{\operatorname{tg} x} + C$;

3) $2\sqrt{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{5} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 x\right) + C$.

Теперь рассмотрим примеры, относящиеся ко второму виду дробей (см. стр. 665).

**Задача 8,18.** Найти: 1) $I_1 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^6 x}$;

3) $I_3 = \int \frac{dx}{\sin^7 x \cos x}$.

**Решение.** 1) Здесь $m=-3$; $n=-5$; $m+n=-8$ — отрицательному четному числу, а потому подынтегральная функция относится к рассматриваемому случаю. Для вычисления интеграла можно применить любую из подстановок: (8,14) или (8,15). Остановимся, например, на подстановке (8,14): $\operatorname{tg} x = z$ и используем связанные с ней формулы (8,16)

$$I_1 = \int \frac{1}{\frac{z^3}{(\sqrt{1+z^2})^3}\frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^5}}\frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{(1+z^2)^3}{z^3}\,dz =$$

$$= \int \frac{1+3z^2+3z^4+z^6}{z^3}\,dz = \int\left(\frac{1}{z^3}+3\frac{1}{z}+3z+z^3\right)dz =$$

$$= -\frac{1}{2z^2}+3\ln|z|+\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{4}z^4+C =$$

$$\boxed{\text{Заменяем } z \text{ на } \operatorname{tg} x}$$

$$= -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x}+3\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+C.$$

Для упражнения при вычислении этого интеграла применить подстановку (8,15) и связанные с ней формулы (8,17).

2) В этом примере $m=-4$; $n=-6$; $m+n=-10$ — отрицательному четному числу. Подынтегральная функция относится к рассматриваемому случаю. Для вычисления интеграла, как это было указано и при решении предыдущего примера, можно применить любую из подстановок: (8,14) или (8,15). Чтобы разнообразить решение, применим подстановку (8,15): $\operatorname{ctg} x = z$ и используем связанные с ней формулы (8,17)

$$I_2 = -\int \frac{1}{\frac{1}{(\sqrt{1+z^2})^4}\frac{z^6}{(\sqrt{1+z^2})^6}}\frac{dz}{1+z^2} =$$

$$= -\int \frac{(1+z^2)^4}{z^6}\,dz = -\int \frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^6}\,dz =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Вычисляем } (1+z^2)^4\\ \text{по формуле бинома}\\ \text{Ньютона}\end{array}}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{z^5}+\frac{4}{3}\frac{1}{z^3}+\frac{6}{z}-4z-\frac{z^3}{3}+C =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Возвращаемся к старой переменной,}\\ \text{заменяя } z \text{ на } \operatorname{ctg} x\end{array}}$$

$$= \frac{1}{5}\frac{1}{\operatorname{ctg}^5 x}+\frac{4}{3}\frac{1}{\operatorname{ctg}^3 x}+\frac{6}{\operatorname{ctg} x}-4\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C =$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{4}{3}\operatorname{tg}^3 x+6\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+C.$$

3) Здесь $m=-7$; $n=-1$; $m+n=-8$. Применим подстановку (8,14): $\operatorname{tg} x = z$. Учитывая связанные с ней формулы (8,16), получим

$$I_3=\int \frac{1}{\frac{z^7}{(\sqrt{1+z^2})^7}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}\cdot\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{(1+z^2)^3}{z^7}dz=$$

$$=\int\frac{1+3z^2+3z^4+z^6}{z^7}dz=\int\left(\frac{1}{z^7}+\frac{3}{z^5}+\frac{3}{z^3}+\frac{1}{z}\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{1}{z^6}-\frac{3}{4}\frac{1}{z^4}-\frac{3}{2}\frac{1}{z^2}+\ln|z|+C=$$

| Заменяем $z$ на $\operatorname{tg} x$ и учитываем, что $\frac{1}{\operatorname{tg} x}=\operatorname{ctg} x$ |
|---|

$$=-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6 x-\frac{3}{4}\operatorname{ctg}^4 x-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\operatorname{tg} x|+C.$$

**Задача 8,19** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sin^6 x\cos^6 x}$; 2) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$; 3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$; 4) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^9 x}$; 5) $\int\frac{dx}{\sin^5 x\cos^5 x}$.

**Ответ.** 1) $10(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)+\frac{5}{3}(\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg}^3 x)+\frac{1}{5}(\operatorname{tg}^5 x-\operatorname{ctg}^5 x)+C$; 2) $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 3) $-\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}+2\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 4) $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^8 x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^6 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^4 x+2\operatorname{tg}^2 x+\ln|\operatorname{tg} x|+C$; 5) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x-2\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+6\ln|\operatorname{tg} x|+C$.

*Четвертый случай.* Сумма показателей степени синуса и косинуса равна нулю: $m+n=0$, причем предполагается, что $m$ и $n$ — целые числа.

Таким образом, показатели степени синуса и косинуса равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, а подынтегральное выражение имеет один из видов:

$$1)\ \frac{\sin^m x}{\cos^m x}\ \text{или}\ 2)\ \frac{\cos^n x}{\sin^n x}.$$

В рассматриваемом случае интеграл (8,10), если $m>0$, приводится к интегралу вида

$$\int \operatorname{tg}^m x\,dx, \tag{8,18}$$

а если $n>0$ — к интегралу

$$\int \operatorname{ctg}^n x\,dx. \tag{8,19}$$

К интегралу (8,18) следует применить подстановку (8,14):

$$\operatorname{tg} x = z;\ dx = \frac{dz}{1+z^2}. \tag{8,20}$$

Эта подстановка приведет к интегралу

$$\int \frac{z^m\,dz}{1+z^2}.$$

К интегралу (8,19) удобно применить подстановку (8,15):

$$\operatorname{ctg} x = z;\ dx = -\frac{dz}{1+z^2}, \tag{8,21}$$

которая приведет его к виду

$$-\int \frac{z^n}{1+z^2}\,dz.$$

Выполняя деление (в первом случае $z^m$ делим на $1+z^2$, а во втором $z^n$ на $1+z^2$), придем к выражению, которое непосредственно интегрируется.

**Задача 8,20.** Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; 2) $I_2 = \int \operatorname{ctg}^5 x\,dx$; 3) $I_3 = \int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$; 4) $I_4 = \int \operatorname{tg}^8 x\,dx$.

**Решение.** 1) Применяя подстановку (8,20), получаем

$$I_1 = \int \frac{z^4}{1+z^2}\,dz = \int\left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right)dz = \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z + C =$$

$$\boxed{z^4 : (z^2+1) = z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}} \qquad \boxed{\text{Заменяем } z \text{ на } \operatorname{tg} x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2) В этом случае применяем подстановку (8,21):

$$I_2 = -\int \frac{z^5}{1+z^2}\,dz = -\int\left(z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}\right)dz =$$

$$\boxed{z^5 : (z^2+1) = z^3 - z + \frac{z}{z^2+1}}$$

$$= -\frac{z^4}{4} + \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} -$$

$$\boxed{\text{Возвращаемся к старой переменной: } z = \operatorname{ctg} x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ctg}^2 x + 1) + C = -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\sin^2 x} + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \frac{1}{2}(\ln 1 - 2\ln|\sin x|) + C =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln|\sin x| + C.$$

3) Подстановка (8,21) дает

$$I_3 = -\int \frac{z^6}{1+z^2}\,dz = -\int \left(z^4 - z^2 + 1 - \frac{1}{z^2+1}\right) dz =$$
$$= -\left(\frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{3}z^3 + z - \operatorname{arctg} z\right) + C.$$

Учитывая, что $\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arc\,ctg}\alpha = \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{arctg}\alpha = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg}\alpha$, получаем

$$I_3 = -\frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{arctg} z + C =$$
$$= -\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C$$

(слагаемое $\frac{\pi}{2}$ отнесено в произвольную постоянную).

4) Подстановка (8,20) дает

$$I_4 = \int \frac{z^8}{1+z^2}\,dz = \int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz =$$
$$= \frac{1}{7}z^7 - \frac{1}{5}z^5 + \frac{1}{3}z^3 - z + \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x -$$
$$- \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C =$$
$$= \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

**Задача 8,21** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \operatorname{tg}^6 x\,dx$; 2) $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$; 3) $\int \operatorname{ctg}^3 x\,dx$; 4) $\int \operatorname{tg}^3 x\,dx$; 5) $\int \operatorname{tg}^7 x\,dx$.

Ответ. 1) $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C$;

2) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\sec x| + C$;

3) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x| + C$;

4) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$;

5) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$.

## III. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЧЕТНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА

$$\int \sin^{2n} x\,dx, \quad \int \cos^{2n} x\,dx, \quad n \text{ — целое и } > 0.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x); \qquad (8,22)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x). \qquad (8,23)$$

Применение этих формул позволит снизить степень подынтегральной функции в рассматриваемых интегралах.

Задача 8,22. Найти: 1) $I_1 = \int \cos^2 x\,dx$; 2) $I_2 = \int \sin^2 x\,dx$.

**Решение.** 1) Заменяя $\cos^2 x$ по формуле (8,23), получим

$$I = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$$

Итак,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C. \qquad (8,24)$$

2) Поступая так же, найдем

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C. \qquad (8,25)$$

Задача 8,23. Найти $I = \int \cos^4 x\,dx$.

**Решение.**

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

| К $\cos^2 2x$ применяем формулу (8,23) |

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right].$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C.$$

Задача 8,24 (для самостоятельного решения).

Найти $\int \sin^4 x\,dx$.

Указание. $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2$.

**Ответ.** $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C$.

**Задача 8,25.** Найти $I = \int \cos^6 x\,dx$.

**Решение.**

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^3 =$$

$$\underline{|\text{ Применить (8,23) }|}$$

$$= \frac{1}{8}(1 + 3\cos 2x + 3\cos^2 2x + \cos^3 2x) =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + 3\cos 2x + 3\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x) + \cos^2 2x \cdot \cos 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 + 3\cos 2x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 4x + (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{5}{2} + 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x - \sin^2 2x\cos 2x\right].$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{8}\int\left(\frac{5}{2} + 4\cos 2x + \frac{3}{2}\cos 4x - \sin^2 2x\cos 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x + 2\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C.$$

**Задача 8,26** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int \sin^6 x\,dx$; 2) $\int \sin^8 x\,dx$.

**Указание.** Учесть, что $\cos^3 2x = \cos^2 2x\cos 2x =$
$= (1 - \sin^2 2x)\cos 2x = \cos 2x - \sin^2 2x\cos 2x$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - 2\sin 2x + \frac{3}{8}\sin 4x + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$;

2) $\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\sin 8x - \frac{4}{3}\sin 6x + 7\sin 4x - 28\sin 2x\right) + \frac{35}{128}x + C$.

**Замечание.** Интеграл $\int \sin^6 x\,dx$ получается из рассмотренного в предыдущей задаче $\int \cos^6 x\,dx$ заменой $x$ на $x + \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x;\quad \cos^6\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (-\sin x)^6 = \sin^6 x;$$

$$\int \sin^6 x\,dx = \int \cos^6\left(x + \frac{\pi}{2}\right)dx.$$

Проверьте, что ответ этой задачи получается из предыдущего, если в нем заменить $x$ на $x + \frac{\pi}{2}$.

## IV. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЧЕТНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СТЕПЕНЕЙ СИНУСА И КОСИНУСА (ИНТЕГРАЛЫ ВИДА:

$$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx,\ \text{где } m \text{ и } n \text{ — целые и } > 0).$$

При вычислении интегралов этого вида нам придется применять формулы (8,22) и (8,23).

**Задача 8,27.** Найти интегралы: 1) $I_1 = \int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$; 2) $I_2 = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$; 3) $I_3 = \int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$.

**Решение.** 1) Запишем подынтегральную функцию так:

$$\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x).$$

| Применить (8,22) |

Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

2) Преобразуем подынтегральное выражение так:

$$\sin^4 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x \sin^2 x = (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \sin^2 x =$$

| К каждому сомножителю применяем формулу (8,22) |

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{16}(1-\cos 4x-\cos 2x + \cos 4x \cos 2x) = \frac{1}{16}\left[1-\cos 4x-\cos 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right] =$$

| Применяем формулу (8,2) |

$$= \frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right).$$

Поэтому

$$I_2 = \frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx = \frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C.$$

3) Подынтегральное выражение преобразуем так:

$$\sin^4 x\cos^4 x=(\sin x\cos x)^4=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4=\frac{1}{16}(\sin^2 2x)^2=$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2=\underbrace{\frac{1}{64}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x)}_{\text{Применить (8,23)}}=$$

$$=\frac{1}{64}\left[1-2\cos 4x+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)\right]=\frac{1}{64}\left(1-2\cos 4x+\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\cos 8x\right)=\frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right).$$

$$I_3=\frac{1}{64}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 8x\right)dx=\frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 4x+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{16}\sin 8x\right)+C=\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$$

**Задача 8,28** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$; 2) $\int\sin^4 x\cos^6 x\,dx$.

Указание.

$$\sin^4 x\cos^6 x=\sin^4 x\cos^4 x\cos^2 x=(\sin x\cos x)^4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)=\frac{1}{32}\sin^4 2x\,\frac{1+\cos 2x}{2}=$$

$$=\frac{1}{32}(\sin^4 2x+\sin^4 2x\cos 2x).$$

$\int\sin^4 2x\,dx$ вычисляют как и $\int\sin^4 x\,dx$, а $\int\sin^4 2x\cos 2x\,dx$ легко находят по формуле (1,29).

Ответ. 1) $\frac{1}{64}\left(4x-\sin 4x+\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 6x\right)+C$;

2) $\frac{1}{16}\left(\frac{3}{16}x-\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{128}\sin 8x+\frac{1}{20}\sin^5 2x\right)+C.$

**Задача 8,29.** Найти интегралы:

1) $\int\sin^6 x\cos^4 x\,dx$; 2) $\int\sin^8 x\cos^6 x\,dx$.

Указание. $\sin^8 x\cos^6 x=\frac{1}{128}(\sin^6 2x-\sin^6 2x\cos 2x)$.

Вычисление $\int\sin^6 2x\,dx$ см. задачу 8,26.

Ответ. 1) $\frac{1}{256}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x-\frac{4}{5}\sin^5 2x\right)+C$;

2) $\frac{1}{1024}\left(\frac{5}{2}x-\sin 4x+\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{12}\sin^3 4x\right)-$

$-\frac{1}{1792}\sin^7 2x+C.$

## V. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx. \tag{8,26}$$

Запись $R(\sin x, \cos x)$ означает, что над синусом и косинусом производятся только рациональные операции: сложение и вычитание, умножение на постоянные величины, возведение в целые степени как положительные, так и отрицательные, деление. Другими словами, под символом $R(\sin x, \cos x)$ следует понимать рациональную функцию синуса и косинуса.

Интегралы вида (8,26) приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \quad (-\pi < x < \pi), \tag{8,27}$$

которая называется универсальной тригонометрической подстановкой. Это название подстановка (8,27) получила потому, что она во всех случаях приводит функцию $R(\sin x, \cos x)$ к рациональному виду.

В тригонометрии доказывается, что все тригонометрические функции выражаются рационально через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

поэтому универсальная тригонометрическая подстановка (8,27) приводит к формулам, по которым $\sin x$, $\cos x$ и $dx$ выражаются рационально через новую переменную $z$:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}; \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2} \tag{8,28}$$

$\left(\text{из } \operatorname{tg}\frac{x}{2} = z \text{ следует, что } \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z\ (-\pi < x < \pi),\quad x = 2\operatorname{arctg} z;\right.$ $\left. dx = \frac{2dz}{1+z^2}\right)$.

Применяя подстановку (8,27), **мы могли бы вычислить** все интегралы этого практического занятия. Однако это привело бы к значительному усложнению вычислений. В случаях, разобранных выше, мы обошлись без этой подстановки.

Укажем еще три случая, в которых легко можно избежать универсальную тригонометрическую подстановку (8,27).

1. Если $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\sin x$ на $-\sin x$, т. е. если $R(\sin x, \cos x)$ — нечетная функция от $\sin x$, то подынтегральное выражение в (8,26) приводится к рациональной функции подстановкой

$$\cos x = z. \tag{8,29}$$

2. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$, т. е. если она нечетная функция $\cos x$, то подынтегральное выражение в (8,26) приводится к рациональной функции подстановкой

$$\sin x = z. \tag{8,30}$$

3. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ не изменяется при одновременной замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$, то подынтегральное выражение в (8,26) приводится к рациональному виду подстановкой

$$\operatorname{tg} x = z. \tag{8,31}$$

**Задача 8,30.** Найти $I = \int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Применим универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z; \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

(см. формулы (8,27) и (8,28)).

Поэтому

$$I = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{(1+z^2)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+z^2)^2}{z^3}\,dz = \frac{1}{4}\int \frac{1+2z^2+z^4}{z^3}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + z\right)dz = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + 2\ln|z| + \frac{z^2}{2}\right) + C =$$

| Возвращаемся к старой переменной: заменяем $z$ на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ |
|---|

$$= -\frac{1}{8}\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$$

**Задача 8,31** (для самостоятельного решения).

Найти $I = \int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи, заменив $x$ на $x + \frac{\pi}{2}$. Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$, и в ответе предыдущей задачи всюду вместо $x$ подставить $x + \frac{\pi}{2}$.

**Ответ.** $I=-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+$

$+\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

Преобразуйте этот ответ к виду

$$I=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

**Задача 8,32.** Найти $I=\int\frac{dx}{\sin^5 x}$.

**Решение.** 1) Здесь опять-таки применим универсальную тригонометрическую подстановку: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$; $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$; $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$

$$I=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{32z^5}{(1+z^2)^5}}=\frac{1}{16}\int\frac{(1+z^2)^4}{z^5}dz=\frac{1}{16}\int\frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5}dz=$$

$$=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{z^5}+\frac{4}{z^3}+\frac{6}{z}+4z+z^3\right)dz=$$

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^4}-2\cdot\frac{1}{z^2}+6\ln|z|+2z^2+\frac{z^4}{4}\right)+C=$$

| Возвращаемся к старой переменной: заменяем $z$ на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ |
|---|

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}-2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+6\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\right)+C.$$

**Задача 8,33** (для самостоятельного решения).

Найти $\int\frac{dx}{\cos^5 x}$.

**Указание.** Воспользоваться результатом предыдущей задачи, заменив в нем $x$ на $x+\frac{\pi}{2}$.

**Ответ.** $\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+6\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\right.\right.\right.$

$\left.\left.\left.+\frac{\pi}{4}\right)\right|+2\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C.$

**Задача 8,34** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int\frac{dx}{\sin^7 x}$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^7 x}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{64}\left(\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}+\frac{15}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+20\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\right.$
$\left.-\frac{5}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6\frac{x}{2}\right)+C;$

2) $\frac{1}{64}\left[\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^4\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{15}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\right.\right.$
$\left.+\frac{\pi}{4}\right)+20\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{15}{2}\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-$
$\left.-\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}^6\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]+C.$

**Задача 8,35.** Найти $I=\int\frac{5+6\sin x}{\sin x\,(4+3\cos x)}\,dx.$

**Решение.** Применяем универсальную тригонометрическую подстановку: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$. Используя формулы (8,27) и (8,28), имеем

$$I=\int\frac{5+\frac{12z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(4+\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}\right)}\frac{2dz}{1+z^2}=\int\frac{5z^2+12z+5}{z(7+z^2)}\,dz.$$

Разложим на простейшие дробь, стоящую под интегралом:

$$\frac{5z^2+12z+5}{z(7+z^2)}=\frac{A}{z}+\frac{Bz+C}{7+z^2},$$

отсюда

$$5z^2+12z+5=A(7+z^2)+z(Bz+C);$$

$$A=\frac{5}{7};\quad B=\frac{30}{7};\quad C=12.$$

Поэтому

$$I=\int\left(\frac{\frac{5}{7}}{z}+\frac{\frac{30}{7}z+12}{7+z^2}\right)dz=\frac{5}{7}\ln|z|+\frac{15}{7}\ln(7+z^2)+$$
$$+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{7}}+C=$$

| Переходим к старой переменной: заменяем $z$ на $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ |
|---|

$$=\frac{5}{7}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+3\ln\left(7+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\right]+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

**Задача 8,36** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{5+9\sin x}{\cos x\,(2+3\sin x)}\,dx;$

2) $\int\frac{4+5\cos x}{\sin x\,(7+3\sin x)}\,dx.$

**Ответ.** 1) $\frac{1}{5}\left[17\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-3\ln\frac{2+3\sin x}{\cos x}\right]+C;$

2) $\frac{4}{7}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{5}{7}\ln\left|\frac{7+3\sin x}{\sin x}\right|-$

$$-\frac{12}{7\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{7\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}{2\sqrt{10}}\right).$$

**Задача 8,37** (для самостоятельного решения).

Найти $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ $\left(\text{подстановка: } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=z\right)$.

**Ответ.** $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$

**Задача 8,38** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$; 2) $\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+\cos x)}$.

Указание. Подстановка: $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z.$

**Ответ.** 1) $\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}+\ln\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)}+C;$

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}x+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$

В заключение выполним несколько упражнений на применение упрощающих подстановок, указанных на стр. 111.

**Задача 8,39.** Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

**Решение.** Так как синус и косинус находятся в четных степенях, то изменение знака у каждого из них не изменяет подынтегральной функции (3-й случай, стр. 112). Подстановка (8,31):

$$\operatorname{tg}x=z;\quad \sec^2 x\,dx=dz;\quad (1+z^2)\,dx=dz;\quad dx=\frac{dz}{1+z^2}.$$

Если $\operatorname{tg}x=z$, то $\sin x=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$; $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$; $\sin^2 x=$ $=\frac{z^2}{1+z^2}$; $\cos^2 x=\frac{1}{1+z^2}$. Поэтому

$$I=\int\frac{\frac{dz}{1+z^2}}{a^2\frac{1}{1+z^2}+\frac{b^2z^2}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{a^2+b^2z^2}=\frac{1}{b}\int\frac{b\,dz}{a^2+(bz)^2}=$$

$$=\frac{1}{b}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{bz}{a}+C;$$

$$\underline{\left|\text{ Заменяем } z \text{ на } \operatorname{tg}x\ \right|}$$

$$I=\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}x\right)+C.$$

Пользуясь этой формулой, можно легко вычислить интегралы:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \quad \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Выполним это так: $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, а потому

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\underset{\boxed{a^2=1;\quad b^2=2}}{\cos^2 x+2\sin^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.$$

Аналогично легко найдем, что

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} x\right) + C.$$

Рекомендуем вычислить эти два интеграла не по готовой формуле, а при помощи подстановки $\operatorname{tg} x = z$.

**Задача 8,40** (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x+\cos x} dx.$

Указание. Перемена знака у синуса и косинуса не изменяет подынтегральную функцию, а потому и здесь мы имеем третий случай, и наиболее удобной будет подстановка: $\operatorname{tg} x = z$.

Подынтегральная функция после подстановки примет вид $\frac{z^2}{(1+z)(1+z^2)^2}$.

**Ответ.** $\frac{1}{4} \ln|\sin x+\cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x+\cos x) + C.$

**Задача 8,41.** Найти интегралы:

1) $I_1 = \int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} dx$; 2) $I_2 = \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$.

**Решение.** 1) При замене $\cos x$ на $-\cos x$ подынтегральное выражение меняет знак.

Здесь уместна подстановка: $\sin x = z$ (см. стр. 112);

$$\cos x\, dx = dz; \quad \cos x = \sqrt{1-z^2};$$

$$I_1 = \int \frac{\cos^4 x \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\sqrt{(1-z^2)^4}}{z^4} dz = \int \frac{(1-z^2)^2 dz}{z^4} =$$

$$= \int \frac{1-2z^2+z^4}{z^4} dz = \int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} + 1\right) dz =$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + z + C = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C.$$

| Возвращаемся к старой переменной: $z=\sin x$ |
|---|

2) При замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция меняет знак. Подстановка: $\cos x = z$; см. стр. 111; $\sin x = \sqrt{1-z^2}$; $-\sin x\,dx = dz$; $dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

$$I_2 = -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{(1-z^2)^3 z^2}} = -\int \frac{dz}{(1-z^2)^2 z^2}.$$

Указание. Дробь $\frac{1}{(1-z^2)^2 z^2}$ разложить на элементарные.

**Ответ.** $\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2}\left|\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

**Задача 8,42** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$ (подстановка: $\cos x = z$);

2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;

2) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

## ДЕВЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегрирование алгебраических иррациональностей.

### I. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(x^\alpha,\ x^\beta,\ x^\gamma)\,dx, \tag{9,1}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — дробные рациональные числа;

$R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)$ — рациональная функция от аргументов $x^\alpha$, $x^\beta$, $x^\gamma$. Это означает, что над этими аргументами производятся только четыре арифметических действия и действие возведения в целую степень, как положительную, так и отрицательную. Вообще же под интегралом находится иррациональная функция.

Интегралы этого вида приводятся к интегралу от рациональной функции подстановкой

$$x = y^n, \quad dx = ny^{n-1}dy, \tag{9,2}$$

где $n$ — наименьшее кратное знаменателей дробей $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Интеграл (9,1) преобразуется к виду

$$\int (y^{n\alpha},\ y^{n\beta},\ y^{n\gamma})\,ny^{n-1}\,dy,$$

но теперь $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$ — целые числа, и тем самым интеграл (9,1) от иррациональной функции сведен к интегралу от рациональной функции.

**Задача 9,1.** Найти $I=\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx.$

**Решение.** Представим интеграл в виде $\int\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}}\,dx$. Наименьшим кратным знаменателей дробей $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ является 6.

Под интегралом находится рациональная функция от $x^{\frac{1}{6}}$, т. е. от $\sqrt[6]{x}$. Интеграл относится к рассматриваемому типу (9,1), а так как наименьшее кратное знаменателей дробей равно 6, то подстановка (9,2) запишется в виде

$$x=y^6;\ dx=6y^5\,dy; \tag{9,3}$$

$$x^{\frac{1}{3}}=(y^6)^{\frac{1}{3}}=y^2;\ x^{\frac{2}{3}}=(y^6)^{\frac{2}{3}}=y^4;\ x^{\frac{1}{2}}=(y^6)^{\frac{1}{2}}=y^3,$$

а интеграл

$$I=\int\frac{y^2}{y^4-y^3}6y^5\,dy=6\int\frac{y^7}{y^3(y-1)}\,dy=6\int\frac{y^4}{y-1}\,dy=$$

Выделяем целую часть

$$=6\int\left(y^3+y^2+y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=$$

$$=6\left[\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|\right]+C=$$

Возвращаемся к старой переменной: из (9,3) следует, что $y=\sqrt[6]{x}$

$$=6\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4}+\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right]+C.$$

**Задача 9,2** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$; 2) $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,dx$;

3) $\int\frac{\sqrt[6]{x}\,dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

Указания. 1) Первый интеграл приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $x=y^6$. После этой подстановки интеграл переходит в $6\int\frac{y^5}{y-1}\,dy$.

2) Ко второму интегралу применяем такую же подстановку: $x=y^6$

$$6\int\frac{dy}{y^2+y}=6\int\frac{y+1-y}{y(y+1)}dy=6\left[\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y+1}\right].$$

3) К третьему интегралу применяем подстановку $x=y^{12}$, которая приводит интеграл к такому виду:

$$12\int\frac{dy}{y^2(y+1)}=-12\int\frac{y^2-1-y^2}{y^2(y+1)}dy=-12\left[\int\frac{y-1}{y^2}dy-\int\frac{dy}{y+1}\right]=$$

$$=-12\left[\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dy}{y^2}-\int\frac{dy}{y+1}\right].$$

**Ответ.** 1) $6\left[\frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{3}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+\right.$ $\left.+\ln|\sqrt[6]{x}-1|\right]+C$; 2) $\ln\frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6}+C$; 3) $\ln\frac{(\sqrt[12]{x}+1)^{12}}{x}-\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+C$.

**Задача 9,3** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x^5}}dx$.

Указание. Подстановка $x=y^{12}$ приводит к $12\int\frac{y^9+y^7+y^6}{1+y^2}dy$ (выделить целую часть).

**Ответ.** 1) $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C$;

2) $12\left(\frac{1}{8}\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{5}\sqrt[12]{x^5}-\frac{1}{3}\sqrt[4]{x}+\sqrt[12]{x}-\operatorname{arctg}(\sqrt[12]{x}+1)+C.\right.$

**Задача 9,4** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$;

3) $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{18}{5}\sqrt[6]{x^5}+3x-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C$;

2) $4\left[\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}+\ln|\sqrt[4]{x}+1|\right]+C$;

3) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-\ln\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x^3}+1)^4}+C$.

## II. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}\right]dx, \tag{9,4}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — рациональные дробные числа, а $R$ — рациональная функция своих аргументов.

После подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d}=y^n, \tag{9,5}$$

где $n$ — общее наименьшее кратное знаменателей дробей $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, интеграл (9,4) переходит в интеграл от рациональной функции.

Из (9,5) следует определить $x$, а по найденному значению $x$ определить его дифференциал $dx$.

Отметим, что частный случай интеграла (9,4) получается тогда, когда вместо дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ подынтегральная функция содержит дробные степени линейной функции от $x$.

В этом случае рационализация достигается подстановкой

$$ax+b=y^n, \tag{9,5a}$$

где $n$ имеет указанное выше значение.

**Задача 9,5.** Найти $I=\int\frac{x^4}{\sqrt{x-1}}dx$.

**Решение.** Этот интеграл может быть переписан так: $I=\int\frac{x^4}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}dx$, и поэтому он относится к рассматриваемому типу

Подстановка: $x-1=y^2$; $x=y^2+1$; $dx=2y\,dy$.

Осуществляя эти замены, получаем интеграл от рациональной функции:

$$I=\int\frac{(y^2+1)^4}{y}2y\,dy=2\int(y^2+1)^4\,dy=2\int(y^8+4y^6+6y^4+4y^2+$$
$$+1)\,dx=2\left(\frac{1}{9}y^9+\frac{4}{7}y^7+\frac{6}{5}y^5+\frac{4}{3}y^3+y\right)+C=$$

| К старой переменной переходим, полагая $y=\sqrt{x-1}$ |
|---|

$$=2\left[\frac{1}{9}(x-1)^4\sqrt{x-1}+\frac{4}{7}(x-1)^3\sqrt{x-1}+\frac{6}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}\right]+C=2\sqrt{x-1}\left[\frac{1}{9}(x-1)^4+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{7}(x-1)^3+\frac{6}{5}(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)+1\right]+C.$$

**Задача 9,6.** Найти $I = \int \frac{x^2\,dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$.

**Решение.** Интеграл представим в виде $I = \int \frac{x^2}{(5x+2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$. Он относится к рассматриваемому типу. Сделаем подстановку $5x+2 = y^2$.

Тогда $5dx = 2y\,dy$; $dx = \frac{2y\,dy}{5}$; $x = \frac{y^2-2}{5}$.

Подставляя эти значения, получаем интеграл от рациональной функции:

$$I = \int \frac{(y^2-2)^2}{25y^3}\frac{2y\,dy}{5} = \frac{2}{125}\int \frac{(y^2-2)^2}{y^2}\,dy = \frac{2}{125}\int \frac{y^4-4y^2+4}{y^2}\,dy =$$

$$= \frac{2}{125}\int\left(y^2 - 4 + \frac{4}{y^2}\right)dy = \frac{2}{125}\left(\frac{y^3}{3} - 4y - \frac{4}{y}\right) + C =$$

$$\boxed{y = \sqrt{5x+2}}$$

$$= \frac{2}{125}\left[\frac{1}{3}(5x+2)\sqrt{5x+2} - 4\sqrt{5x+2} - \frac{4}{\sqrt{5x+2}}\right] + C;$$

$$I = \frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left[\frac{1}{3}(5x+2) - 4 - \frac{4}{5x+2}\right] + C.$$

**Задача 9,7.** Найти $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$ (рассмотреть случаи $b > 0$ и $b < 0$).

**Решение.** Подстановка: $ax + b = y^2$; $a\,dx = 2y\,dy$; $dx = \frac{2}{a}y\,dy$; $x = \frac{1}{a}(y^2 - b)$.

Подставляя эти значения в $I$, получим под интегралом рациональную функцию:

$$I = \int \frac{2y\,dy}{a\cdot\frac{1}{a}(y^2-b)\,y}; \quad I = 2\int\frac{dy}{y^2-b}.$$

Если $b > 0$, то $b = k^2$, и тогда

$$I = 2\int\frac{dy}{y^2-k^2} = \frac{2}{2k}\ln\frac{y-k}{y+k};$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Заменяем } k \text{ на } \sqrt{b},\\ \text{а } y \text{ на } \sqrt{ax+b}\end{array}}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{y-\sqrt{b}}{y+\sqrt{b}} + C \quad (b > 0).$$

Окончательно, возвращаясь к старой переменной, имеем

$$I = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} + C. \tag{9,6}$$

Если $b<0$, то $b=-p^2$:

$$I=2\int\frac{dy}{y^2+p^2}=\frac{2}{p}\operatorname{arctg}\frac{y}{p}+C;$$

$$\left| p=\sqrt{-b};\ y=\sqrt{ax+b} \right|$$

$$I=\frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{-b}}+C. \qquad (9,7)$$

**Задача 9,8.** Найти $I=\int\frac{\sqrt{3x+4}}{x^2}\,dx$.

**Решение.** $I=\int\frac{(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx$.

Интеграл относится к рассматриваемому типу.

Полагаем, что $3x+4=y^2$. Тогда $x=\frac{y^2-4}{3}$; $dx=\frac{2y\,dy}{3}$, а интеграл преобразуется к интегралу от рациональной функции:

$$I=\int\frac{y}{\left(\frac{y^2-4}{3}\right)^2}\frac{2y\,dy}{3}=6\int\frac{y^2}{(y^2-4)^2}\,dy.$$

$$\left|\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{c}{\text{Интегрируем по частям}} \\ u=y; & du=dy; \\ dv=\frac{y}{(y^2-4)^2}\,dy & v=-\frac{1}{2(y^2-4)} \end{array}\right|$$

**Ответ.** $I=-\frac{\sqrt{3x+4}}{x}+\frac{3}{4}\ln\frac{\sqrt{3x+4}-2}{\sqrt{3x+4}+2}+C$.

**Задача 9,9.** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int\frac{\sqrt{2x-3}}{x}\,dx$; 2) $\int\frac{\sqrt{x-5}}{x^3}\,dx$.

Указание. Во втором примере после подстановки удобно применить интегрирование по частям.

**Ответ.** 1) $2\sqrt{2x-3}-\frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{3}}+C$;

2) $\frac{1}{10}\frac{(x-5)\sqrt{x-5}}{x^2}-\frac{1}{20}\frac{\sqrt{x-5}}{x}+\frac{1}{20\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{5}}+C$.

**Задача 9,10.** Найти $I=\int\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4}\,dx$.

**Решение.** Положим $x+2=y^2$; $x=y^2-2$; $dx=2y\,dy$. Тогда

$$I=\int\frac{y+3}{y-4}2y\,dy=2\int\frac{y^2+3y}{y-4}\,dy=2\int\left(y+7+\frac{28}{y-4}\right)dy.$$

| Выделить целую часть |

**Ответ.** $I=x+14\sqrt{x+2}+56\ln|\sqrt{x+2}-4|+C$.

**Задача 9,11** (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x-8}}$.

Указание. Подстановка $x-8=y^3$.

Интеграл после подстановки примет вид: $3\int \frac{y\,dy}{y^3+8}$.

Разложить дробь $\frac{y}{y^3+8}$ на простейшие.

**Ответ.** $\frac{1}{4}\ln\frac{y^2-2y+4}{(y+2)^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{y-1}{\sqrt{3}}$, где $y=\sqrt[3]{x-8}$.

**Задача 9,12.** Найти $I=\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3+2x)^2}-\sqrt{3+2x}}$.

**Решение.** Здесь подынтегральная функция отличается от предыдущих тем, что она содержит корни разных степеней (третьей и второй).

Перепишем интеграл, заменяя корни дробными показателями:

$$I=\int \frac{dx}{(3+2x)^{\frac{2}{3}}-(3+2x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Общий наименьший знаменатель дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$ равен 6. Подстановка (9,5а) будет такой:

$$3+2x=y^6;\quad x=\frac{y^6-3}{2};$$

$$dx=\frac{6y^5\,dy}{2}=3y^5\,dy.$$

Подставляя эти значения, получим

$$I=3\int\frac{y^5\,dy}{y^4-y^3}=3\int\frac{y^2}{y-1}\,dy=3\int\frac{y^2-1+1}{y-1}dy=3\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)dy=$$

$$=3\left(\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|\right)+C=3\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{3+2x}+\sqrt[6]{3+2x}+\right.$$

| Возвращаемся к старой переменной $y=\sqrt[6]{3+x}$ |
|---|

$$\left.+\ln|\sqrt[6]{3+2x}-1|\right)+C.$$

**Задача 9,13** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt{1+x}}$, 2) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}\,dx$.

**Ответ.** 1) $3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}+6\ln\left|\sqrt[6]{1+x}-1\right|+C$;

2) $$6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^7}}{7}+\frac{\sqrt[6]{(x+1)^5}}{5}+\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{4}+\frac{\sqrt{x+1}}{3}+\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt[6]{x+1}+\ln\left|\sqrt[6]{x+1}-1\right|\right)+C.$$

Теперь найдем несколько интегралов вида (9,1), в которых подынтегральная функция — дробно-линейная функция в дробной степени.

**Задача 9,14.** Найти $I=\int\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\,dx$.

**Решение.** Подстановка $\frac{5-3x}{4+7x}=y^2$ приведет к интегрированию рациональной функции. Из указанной подстановки определим $x$, а потом $dx$:

$$5-3x=4y^2+7xy^2;\quad 5-4y^2=7xy^2+3x;$$
$$5-4y^2=x(7y^2+3);\quad x=\frac{5-4y^2}{7y^2+3};$$
$$dx=\frac{-8y(7y^2+3)-14y(5-4y^2)}{(7y^2+3)^2}\,dy;$$
$$dx=\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\,dy.$$

Поэтому

$$I=\int y\frac{-94y}{(7y^2+3)^2}\,dy=-94\int\frac{y^2}{(7y^2+3)^2}\,dy=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{y}{7y^2+3}+\right.$$

Здесь удобно вместо разложения на элементарные дроби применить интегрирование по частям:

| | |
|---|---|
| $u=y$ | $du=dy$ |
| $dv=\frac{y}{(7y^2+3)^2}\,dy$ | $v=-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{7y^2+3}$ |

$$\left.+\frac{1}{14}\int\frac{dy}{7y^2+3}\right)=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{y}{7y^2+3}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}y}{\sqrt{3}}\right)+C=$$
$$=\frac{47}{7}\cdot\frac{y}{7y^2+3}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{3}}\,y+C=$$

Возвращаемся к старой переменной: $y=\sqrt{\frac{5-3x}{4-7x}}$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}-\frac{47\sqrt{21}}{147}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}\right)+C.$$

**Задача 9,15** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $I_1 = \int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$; 2) $I_2 = \int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}\,dx$.

**Ответ.** 1) $-\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$. (Этот пример можно легко решить и не пользуясь подстановкой (9,5), если переписать подынтегральную функцию, умножив ее числитель и знаменатель на $\sqrt{2+x}$. Тогда

$$I_1 = \int \frac{2+x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

2) $$-\frac{\sqrt{(3-4x)(9-5x)}}{5} + \frac{21}{20\sqrt{5}}\ln|51-40x+$$
$$+4\sqrt{5(3-4x)(9-5x)}| + C.$$

**Задача 9,16.** Найти интеграл $I = \int \frac{x+3}{x-3}\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx$.

**Решение.** Применим подстановку

$$\frac{x+3}{x-3} = y^2.$$

Отсюда определим $x$ и $dx$:

$$x+3 = xy^2 - 3y^2; \quad 3+3y^2 = xy^2 - x;$$
$$3(1+y^2) = x(y^2-1); \quad x = \frac{3(1+y^2)}{y^2-1};$$
$$dx = \frac{-12y}{(y^2-1)^2}\,dy;$$
$$I = \int y^2\cdot y\,\frac{-12y}{(y^2-1)^2}\,dy = -12\int \frac{y^4}{(y^2-1)^2}\,dy.$$

| Интегрировать по частям: | |
|---|---|
| $u = y^3$ | $du = 3y^2\,dy$ |
| $dv = \frac{y}{(y^2-1)^2}\,dy$ | $v = -\frac{1}{2}\frac{1}{y^2-1}$ |

**Ответ.** $I = (x-15)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} - 9\ln\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}} + C.$

**Задача 9,17** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3}\,dx$; 2) $\int \sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}\,dx$;
3) $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

**Указание.** В первых двух интегралах после подстановки интегрировать по частям.

**Ответ.** 1) $-(5+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+6\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C;$

2) $(5-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C;$

3) $\left(1-\frac{1}{2}x\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin x+C.$

**Задача 9,18.** Найти интеграл $I=\int\frac{\sqrt{x+4}+3}{(x+4)^2-\sqrt{x+4}}\,dx.$

**Решение.** Подстановка: $x+4=y^2$; $dx=2y\,dy$

$$I=\int\frac{y+3}{y^4-y}\,2y\,dy=2\int\frac{y+3}{y^3-1}\,dy.$$

Разлагаем на простейшие дробь

$$\frac{y+3}{y^3-1}=\frac{y+3}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{By+C}{y^2+y+1}.$$

Отсюда следует, что $A=\frac{4}{3}$; $B=-\frac{4}{3}$; $C=-\frac{5}{3}$;

$$I=\frac{8}{3}\ln|y-1|-\frac{4}{3}\ln(y^2+y+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C.$$

Переходя к старой переменной, с помощью равенства $y=\sqrt{x+4}$ окончательно получаем

$$I=\frac{4}{3}\ln\frac{(\sqrt{x+4}-1)^2}{x+5+\sqrt{x+4}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{x+4}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

**Задача 9,19** (для самостоятельного решения).

Найти: 1) $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$; 2) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}.$

**Ответ.** 1) $\ln\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C;$

2) $\ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

**Указание.** После подстановки $\frac{1-x}{1+x}=y^2$ окажется, что

$$x=\frac{1-y^2}{1+y^2};\quad dx=-4\cdot\frac{y\,dy}{(1+y^2)^2};$$

$$I=4\int\frac{y^2\,dy}{(y^2-1)(y^2+1)}.$$

Дробь

$$\frac{y^2}{(y^2-1)(y^2+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{y+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2+1}.$$

Рассмотрим еще несколько интегралов, сводящихся к виду (9,4).

**Задача 9,20.** Найти $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$.

**Решение.** Этот интеграл легко приводится к рассматриваемому типу:

$\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+2)^2}(x+2)^3}=(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}$, (можно и иначе

$$\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}=\sqrt[3]{(x-1)^3\frac{x+2}{x-1}}=(x-1)\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}).$$

Поэтому

$$I=\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2}}. \tag{A}$$

Подстановка нам хорошо известна:

$$\frac{x-1}{x+2}=y^3. \tag{B}$$

Отсюда $x-1=xy^3+2y^3$; $2y^3+1=x(1-y^3)$;

$$x=\frac{2y^3+1}{1-y^3};\quad x+2=\frac{2y^3+1}{1-y^3}+2=\frac{3}{1-y^3};$$

$$dx=\frac{9y^2\,dy}{(1-y^3)^2}.$$

Производя замены в $(A)$, получаем $I=3\int\frac{dy}{1-y^3}$. Разлагаем на простейшие дробь

$$\frac{1}{1-y^3}=\frac{1}{(1-y)(1+y+y^2)}=\frac{A}{1-y}+\frac{By+C}{1+y+y^2}.$$

Отсюда

$$A=B=\frac{1}{3};\quad C=\frac{2}{3};$$

$$I=-\ln|1-y|+\frac{1}{2}\ln(1+y+y^2)+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2y+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Из подстановки $(B)$ следует, что $y=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}}$, а поэтому получаем

$$I=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}}{3}\right)^3+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}+C.$$

Ответ можно несколько упростить, если постоянную величину $\frac{1}{2}\ln 3$ присоединить к произвольной постоянной.

Окончательно

$$I = -\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-1}\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x+2}}.$$

**Задача 9,21** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-3)^3(x+1)^5}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)}}$.

Указания. 1) $\sqrt[4]{(x-3)^3(x+1)^5} = \sqrt[4]{(x-3)^3\frac{(x+1)^8}{(x+1)^3}} =$
$= \sqrt[4]{(x+1)^8\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3} = (x+1)^2\sqrt[4]{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3}$.

Применить подстановку: $\frac{x-3}{x+1}=y^4$; $x+1=\frac{4}{1-y^4}$; $dx=\frac{16y^3\,dy}{(1-y^4)^2}$;

2) $\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^4} = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}(x-2)^6} = (x-2)^2\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2}$.

Подстановка: $\frac{x+1}{x-2}=y^3$; $x=\frac{1+2y^3}{y^3-1}$;
$x-2=\frac{3}{y^3-1}$; $dx=\frac{-9y^2\,dy}{(y^3-1)^2}$.

3) $\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)} = \sqrt[4]{\frac{(1+x)^3}{(1-x)^3}(1-x)^4} = (1-x)\sqrt[4]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3}$.

Подстановка: $\frac{1+x}{1-x}=y^4$; $x=\frac{y^4-1}{y^4+1}$; $1-x=\frac{2}{y^4+1}$;
$dx=\frac{8y^3\,dy}{(y^4+1)^2}$.

**Ответ.** 1) $\sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}}+C$; 2) $-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}}+C$;

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[4]{4(1-x^2)}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{4(1-x^2)}+\sqrt{1-x}}+\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{4(1-x^2)}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}+C.$

## III. ИНТЕГРАЛЫ ОТ БИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Так называются интегралы вида

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \qquad (9,8)$$

где $m$, $n$ и $p$ — любые рациональные числа;

$a$ и $b$ — какие угодно постоянные, не равные нулю[1]. Подынтегральное выражение называется биномиальным дифференциалом.

[1] Конечно, предполагается, что числа $m$, $n$ и $p$ не все целые. Если бы все они были целыми, то вопрос свелся бы к интегрированию суммы степенных функций.

П. Л. Чебышев доказал, что **только** в трех случаях этот интеграл может быть выражен в конечном виде через алгебраические, логарифмические и обратные круговые функции:

1) $p$ — целое число, которое может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В этом случае применяется подстановка

$$x = y^s, \tag{9,9}$$

где $s$ — общее наименьшее кратное знаменателей дробей $m$ и $n$. Это простейший случай: дело сводится к интегрированию суммы степенных функций. Нами он рассматриваться не будет.

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Здесь следует применить подстановку

$$a + bx^n = y^s, \tag{9,10}$$

где $s$ — знаменатель дроби $p$.

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число. В этом случае применяют подстановку

$$ax^{-n} + b = y^s, \tag{9,11}$$

где $s$ — знаменатель дроби $p$.

Других случаев интегрируемости биномиальных дифференциалов, кроме перечисленных, нет. Интересно отметить, что они были известны еще Ньютону, а Эйлер указал приведенные выше подстановки. Однако только П. Л. Чебышев доказал, что эти случаи интегрируемости являются единственными и что в других случаях интеграл (9,8) не может быть выражен при помощи элементарных функций.

**Задача 9,22.** Найти $I = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

**Решение.** Перепишем интеграл в виде

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$$

и, сравнивая его с (9,8), получим

$$m = -\frac{1}{2};\ n = \frac{1}{4};\ p = \frac{1}{3}.$$

Составим выражение: $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ — целое число.

Следовательно, здесь мы имеем второй случай интегрируемости. Подстановка (9,10) запишется так:

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = y^3;\ \left(\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = y.\right) \tag{9,12}$$

$$x^{\frac{1}{4}} = y^3 - 1;\ \ x = (y^3-1)^4;\ \ x^{-\frac{1}{2}} = [(y^3-1)^4]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{1}{(y^3-1)^2};\ dx = 4(y^3-1)^3\,3y^2\,dy = 12(y^3-1)^3 y^2\,dy$$

Поэтому

$$I=\int\frac{1}{(y^3-1)^2}y\cdot 12(y^3-1)^3y^2\,dy=12\int y^3(y^3-1)\,dy=$$

$$=12\int(y^6-y^3)\,dy=12\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^4}{4}\right)+C=12y^4\left(\frac{y^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

Возвращаясь к старой переменной, при помощи равенства $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ получим

$$I=12(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.$$

**Задача 9,23** (для самостоятельного решения).

Найти $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

Указание. $m=-\frac{1}{2}$; $n=\frac{1}{6}$; $p=\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}=3$ — целое число. Здесь имеем второй случай интегрируемости. Знаменатель дроби $p$ равен 3. Подстановка (9, 10): $1+x^{\frac{1}{6}}=y^3$. После подстановки получится

$$18\int(y^3-1)^2y^3\,dy.$$

**Ответ.** $18(1+\sqrt[6]{x})\sqrt[3]{1+\sqrt[6]{x}}\left[\frac{1}{10}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^2-\frac{2}{7}\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+\frac{1}{4}\right].$

**Задача 9,24.** Найти $I=\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}$.

**Решение.** Запишем интеграл в виде $I=\int(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx.$

Сравнивая его с (9,8), замечаем, что $m=0$; $n=2$; $p=-\frac{3}{2}$.

Составляем числа $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n}+p$, чтобы обнаружить, какое из них — целое (если бы оказалось, что ни одно из чисел не целое, то от интегрирования мы бы отказались):

$\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ — не целое число;

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ — целое число, и мы имеем здесь третий случай интегрируемости.

Подстановка (9,11) при $n=2$ (знаменатель дроби $p$ равен также 2) выглядит так:

$$ax^{-2}+b=y^2.$$

Отсюда следует, что $-2ax^{-3}\,dx = 2y\,dy$, а $x^{-3}\,dx = -\frac{1}{a}\,y dy$. Преобразуем подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало $ax^{-2}+b$ (в третьем случае интегрируемости биноминальных дифференциалов рекомендуется преобразовывать подынтегральное выражение так, чтобы оно содержало $ax^{-n}+b$). Вынося в подынтегральном выражении $x^2$ за скобку, имеем

$$(a+bx^2)^{-\frac{3}{2}}dx = \left[x^2\left(\frac{a}{x^2}+b\right)\right]^{-\frac{3}{2}}dx =$$

$$= x^{-3}(ax^{-2}+b)^{-\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{1}{a}\,y^{-2}\,dy.$$

Поэтому

$$I = -\frac{1}{a}\int y^{-2}\,dy = -\frac{1}{a}\,\frac{y^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{a}\,\frac{1}{y} + C.$$

Подставляя сюда

$$y = (ax^{-2}+b)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{x^2}+b\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a+bx^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

получим окончательно

$$I = \frac{1}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} + C.$$

**Задача 9,25** (для самостоятельного решения).

Найти $\int \sqrt{x(3+4x^3)}\,dx.$

Указание. Записать интеграл в виде $\int x^{\frac{1}{2}}(3+4x^3)^{\frac{1}{2}}\,dx$; $m=\frac{1}{2}$; $n=3$; $p=\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}+p=1$ — целое число, третий случай интегрируемости.

Подстановка (9,11): $3x^{-3}+4=y^2$. Подынтегральную функцию представить в виде $x^2(3x^{-3}+4)^{\frac{1}{2}}$. Из подстановки следует, что $3x^{-3}=y^2-4$; $x^{-3}=\frac{y^2-4}{3}$, а $x^3=\frac{3}{y^2-4}$. Отсюда $3x^2\,dx = -\frac{3\cdot 2y}{(y^2-4)^2}\,dy$; $x^2\,dx = -\frac{2y\,dy}{(y^2-4)^2}$, и интеграл преобразуется к виду $-\int \frac{2y^2}{(y^2-4)^2}\,dy$.

Вычисление этого интеграла можно выполнить разложением рациональной дроби на простейшие, но проще применить интегрирование по частям, полагая

| | |
|---|---|
| $u = y$ | $du = dy$ |
| $dv = \frac{y\,dy}{(y^2-4)^2}$ | $v = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y^2-4}$ |

После интегрирования получим

$$I=\frac{y}{y^2-4}-\frac{1}{4}\ln\frac{y-2}{y+2}+C,$$

причем, чтобы возвратиться к старой переменной, надо сюда подставить

$$y=\sqrt{3x^{-3}+4}=\sqrt{\frac{3}{x^3}+4}=\sqrt{\frac{3+4x^3}{x^3}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{3+4x^3}{x}}.$$

**Задача 9,26.** Найти интегралы:

$$1)\int\frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx;\quad 2)\int x^3\sqrt[3]{5+x^2}\,dx.$$

**Ответ.** 1) $\dfrac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{3}{2}\arcsin x+C$;

2) $\dfrac{3}{56}(5+x^2)(4x^2-15)\sqrt[3]{5+x^2}+C$.

## IV. ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{9,13}$$

где $R$ — знак рациональной функции.

(Еще раз напоминаем, что это понимается так: над аргументами $x$ и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ могут производиться четыре действия арифметики и возведение в целую степень как положительную, так и отрицательную).

**а) Интегралы вида**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{9,14}$$

Напомним три интеграла, которые нам часто будут встречаться:

$$1)\int\frac{u'}{\sqrt{u^2\pm a^2}}dx=\ln|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|+C; \tag{9,15}$$

$$2)\int\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx=\arcsin\frac{u}{a}+C; \tag{9,16}$$

$$3)\int\frac{u'}{\sqrt{u}}dx=2\sqrt{u}+C. \tag{9,17}$$

Вычисление интеграла (9,14) производится так:

1) под корнем $|a|$ следует вынести за скобку, $\dfrac{1}{\sqrt{|a|}}$ — за знак интеграла;

2) после этого под корнем выделить полный квадрат и применить формулу (9,15) (при $a>0$) или (9,16) (при $a<0$).

(Если $|a|=1$, то вынесение за скобку становится излишним, и надо только выделить под корнем полный квадрат).

**Задача 9,27.** Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}$.

**Решение.** Здесь $a=2>0$; вопрос сведется к применению формулы (9,15). Вынесем под корнем 2 за скобку, и в оставшемся выражении выделим полный квадрат:

$$\sqrt{2x^2+3x+7}=\sqrt{2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}=$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}};$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right|+C=$$

| Применяем формулу (9,15): $u=x+\frac{3}{4}$; $u'=1$ | | Выражение, стоящее под корнем, равно $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ |
|---|---|---|

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4x+3+4\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}}{4}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\left|4x+3+2\sqrt{4\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}\right.-\ln 4\right\}+C.$$

Окончательно, присоединяя $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 4$ к произвольной постоянной, получаем

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|4x+3+2\sqrt{2(2x^2+3x+7)}|+C.$$

**Задача 9,28** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$;

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{5+13x+8x^2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{11+5x+6x^2}}$;

5) $\int\frac{dx}{\sqrt{14x^2+9x+1}}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln|14x+5+2\sqrt{7(7x^2+5x+4)}|+C$;

2) $\ln|2x+2+2\sqrt{x^2+2x+9}|+C$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|16x+13+2\sqrt{8(5+13+8x^2)}|+C$;

4) $\frac{1}{\sqrt{6}}\ln|12x+5+2\sqrt{6(6x^2+5x+11)}|+C$;

5) $\frac{1}{\sqrt{14}}\ln|28x+9+2\sqrt{14(14x^2+9x+1)}|+C$.

**Задача 9,29.** Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt{5+7x-3x^2}}$.

**Решение.** Здесь $a=-3<0$, интеграл может быть вычислен по формуле (9,16). Вынесем под корнем за скобку 3, т. е. $|a|$:

$$\sqrt{5+7x-3x^2}=\sqrt{3\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{3}x-x^2\right)}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}x-x^2}=$$

| Выделяем под корнем полный квадрат |

$$=\sqrt{3}\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}.$$

Для выделения полного квадрата в этом случае поступаем так: 1) ставим перед скобкой минус; 2) в скобку вписываем $x$ и половину коэффициента при $x$ в первой степени с обратным знаком; 3) выражение в скобке возводим в квадрат, а квадрат второго слагаемого в скобке прибавляем к свободному члену.

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{109}{36}-\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{7}{6}}{\frac{\sqrt{109}}{6}}+C.$$

| Применяем (9,16): $u=x-\frac{7}{6}$; $a=\frac{\sqrt{109}}{6}$ |

Окончательно

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x-7}{\sqrt{109}}+C.$$

**Задача 9,30** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$;

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-5x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{9-x-x^2}}$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{11+9x-7x^2}}$.

**Ответ.** 1) $\arcsin\frac{2x-3}{\sqrt{29}}+C$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x-1}{4}+C$;

3) $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{37}}+C$; 4) $\frac{1}{\sqrt{7}}\arcsin\frac{14x-9}{\sqrt{389}}+C$.

**б) Интегралы вида**

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx. \qquad (9,18)$$

Интегралы этого вида приводятся к интегралам (9,15) и (9,17), если $a>0$, а если $a<0$, — к интегралам (9,16) и (9,17). Достигается это так: в числителе дроби, стоящей под интегралом, записывается производная подкоренного выражения, т. е. $2ax + b$, которая тождественными преобразованиями преобразуется в заданный числитель $Ax + B$.

$$Ax + B = (2ax + b)\frac{A}{2a} + B - \frac{bA}{2a},$$

и тогда

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{(2ax+b)\frac{A}{2a} + B - \frac{bA}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx =$$

| Разлагаем на сумму двух интегралов |

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B - \frac{bA}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

| Этот интеграл вычисляется по формуле (9,17): числитель — производная подкоренного выражения | Этот интеграл приводится при $a>0$ к интегралу (9,15), при $a<0$ — по формуле (9,16) |

**Задача 9,31.** Найти интегралы:

$$1)\ I_1 = \int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}\,dx;\quad 2)\ I_2 = \int \frac{2x+5}{\sqrt{7+8x-11x^2}}\,dx.$$

**Решение.** 1) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{\sqrt{5x^2+8x+1}}\,dx = \int \frac{(10x+8)\frac{3}{10} - 7 - \frac{24}{10}}{\sqrt{5x^2+8x+1}}\,dx =$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{10x+8}{\sqrt{5x^2+8x+1}}\,dx - \frac{47}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+8x+1}} =$$

| Применяем формулу (9,17) | См. задачу 9,27 |

$$= \frac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1} - \frac{47}{5\sqrt{5}}\ln\left|10x+8+2\sqrt{5(5x^2+8x+1)}\right| + C.$$

$$2)\ \int \frac{2x+5}{\sqrt{7+8x-11x^2}}\,dx = \int \frac{(8-22x)\left(-\frac{1}{11}\right) + 5 + \frac{8}{11}}{\sqrt{7+8x-11x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{11}\int \frac{8-22x}{\sqrt{7+8x-11x^2}}\,dx + \frac{63}{11}\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x-11x^2}} =$$

| Применяем формулу (9,17) | Поступаем так же, как и в задаче (9,29) |

$$= -\frac{2}{11}\sqrt{7+8x-11x^2} + \frac{63}{11\sqrt{11}}\arcsin\frac{11x-4}{\sqrt{93}} + C.$$

**Задача 9,32** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$;

2) $\int \frac{x+8}{\sqrt{3x^2+x+9}}$; 3) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{4x^2-x-7}}dx$;

4) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$; 5) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1-13x-5x^2}}dx$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5x+3}-\frac{5}{4\sqrt{2}}\ln|4x+5+$
$+2\sqrt{2(2x^2+5x+3)}|+C$;

2) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+x+9}+\frac{47}{6\sqrt{3}}\ln|6x+1+2\sqrt{3(3x^2+x+9)}|+C$;

3) $-\frac{3}{4}\sqrt{4x^2-x-7}+\frac{13}{16}\ln|8x-1+2\sqrt{4(4x^2-x+7)}|+C$;

4) $-\frac{1}{2}\sqrt{8-3x-2x^2}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{\sqrt{73}}+C$;

5) $-\sqrt{1-13x-5x^2}-\frac{19}{2\sqrt{5}}\arcsin\frac{10x+13}{\sqrt{189}}+C$.

в) интегрирование функций вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ в общем случае приводится к интегрированию рациональной дроби и вычислению интегралов таких трех видов:

$$1)\ \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (P(x) — \text{многочлен}); \tag{9,19}$$

$$2)\ \int \frac{dx}{(x+k)^p\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (p — \text{целое число и} > 0); \tag{9,20}$$

$$3)\ \int \frac{(Mx+N)\,dx}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^m\sqrt{ax^2+bx+c}} \qquad (m — \text{целое число и } m > 0) \tag{9,21}$$

Укажем способы вычисления интегралов вида (9,19) и (9,20), выполним упражнения на применение этих способов, а затем вычислим несколько интегралов, в которых подынтегральную функцию придется преобразовывать так, чтобы вопрос сводился к вычислению интегралов указанных видов[1].

**1. Интеграл вида** (9,19) вычисляется по формуле

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{9,22}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени, на единицу меньшей, чем многочлен $P(x)$.

[1] Интегралы вида (9,21) нами рассматриваться не будут, так как программа не предусматривает изучение их. Интересующиеся этим видом интегралов могут обратиться к учебнику Г. М. Фихтенгольца «Курс дифференциального и интегрального исчисления», т. II, § 272.

Коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число $\lambda$ подлежат определению. Интеграл же $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выше уже был рассмотрен.

Для определения коэффициентов многочлена $Q(x)$ и числа $\lambda$ поступают так:

дифференцируют обе части равенства (9,22) и получают тождество

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q(x)\frac{(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + \\ + \lambda \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

(производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции).

Умножая обе части этого равенства на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получаем

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)\cdot(2ax+b) + \lambda.$$

Неизвестные коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число $\lambda$ находятся сравнением коэффициентов при одинаковых степенях буквы $x$ в последнем равенстве.

Подставляя найденные коэффициенты и число $\lambda$ в (9,22) и вычисляя интеграл, входящий в правую часть этой формулы, находим и интеграл (9,19).

Решим несколько относящихся сюда примеров.

**Задача 9,33.** Найти интеграл $I = \int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx.$

**Решение.** На основании формулы (9,22) имеем

$$\int \frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}\,dx = \underbrace{(ax^2+bx+c)}_{\substack{\text{Многочлен степени, на}\\ \text{единицу меньшей, чем}\\ \text{многочлен числителя дро-}\\ \text{би, стоящей под интегра-}\\ \text{лом}}}\sqrt{2x^2+5x+7} + \\ + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Определению подлежат неизвестные коэффициенты $a$, $b$, $c$ и число $\lambda$.

Дифференцируем обе части последнего равенства и, учитывая, что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, получаем

$$\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}} = (2ax+b)\sqrt{2x^2+5x+7} + \\ + (ax^2+bx+c)\frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x+7}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Умножая обе части этого равенства на $2\sqrt{2x^2+5x+7}$, имеем

$$6x^3+10x^2-14x+18=(4ax+2b)(2x^2+5x+7)+$$
$$+(ax^2+bx+c)(4x+5)+2\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем:

| | | |
|---|---|---|
| При $x^3$ | $6=\ 8a+\ 4a.$ | (1) |
| При $x^2$ | $10=20a+\ 4b+5a$ | (2) |
| При $x$ | $-14=28a+10b+5b+4c$ | (3) |
| При $x^0$ (свободный член) | $18=14b+\ 5c+2\lambda$ | (4) |

Из первого уравнения следует, что $a=\frac{1}{2}$.

Подставляя $a=\frac{1}{2}$ во второе уравнение, получаем $10=10+ +8b+\frac{5}{2}$, отсюда $b=-\frac{5}{16}$. При найденных значениях $a$ и $b$ из уравнения (3) получаем, что $c=-\frac{373}{64}$, а из уравнения (4) — $\lambda=\frac{3297}{128}$.

Таким образом,

$$I=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{373}{64}\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{128}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C,$$

| См. задачу 9,27 |

а потому окончательно

$$I=\frac{1}{64}(32x^2-20x-373)\sqrt{2x^2+5x+7}+$$
$$\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C.$$

**Задача 9,34** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{x^2-4}{\sqrt{3x^2+6x-5}}dx$; 2) $\int\frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}dx$.

Указания. В первом примере на основании формулы (9,22) имеем

$$\int\frac{x^2-4}{\sqrt{3x^2+6x-5}}dx=(ax+b)\sqrt{3x^2+6x-5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-5}}.$$

Дифференцируем обе части этого равенства, освобождаемся от дробей и сравниваем в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой части, получаем

$$a=\frac{1}{6};\quad b=-\frac{1}{2};\quad \lambda=-\frac{5}{3}.$$

Во втором примере по формуле (9,22) находим

$$\int \frac{3x^3-8x+5}{\sqrt{x^2-4x-7}}\,dx=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x-7}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-7}}.$$

Дифференцируя обе части равенства, освобождаемся в полученном выражении от дробей и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой части, получаем:

$$a=1;\quad b=5;\quad c=36;\quad \lambda=112.$$

**Ответ.** 1) $\frac{1}{6}(x-3)\sqrt{3x^2+6x-5}-\frac{5}{3\sqrt{3}}\ln|3x+3+$
$+\sqrt{3(3x^2+6x-5)}|+C;$

2) $(x^2+5x+36)\sqrt{x^2-4x-7}+112\ln|x-2+$
$+\sqrt{x^2-4x-7}|+C.$

**Задача 9,35** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{x^3}{\sqrt{5x^2-6x+3}}\,dx$; 2) $\int\frac{11x^4-195x^2}{\sqrt{x^2+6x+5}}$.

Указание. В первом примере окажется, что

$$a=\frac{1}{15};\quad b=\frac{1}{10};\quad c=\frac{1}{10};\quad \lambda=0.$$

**Замечание.** В этих двух примерах $\lambda=0$, а потому решение имеет чисто алгебраический вид.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{30}(2x^2+3x+3)\sqrt{5x^2-6x+3}+C$; 2) $\frac{1}{4}(11x^3-$
$-77x^2+105x-175)\sqrt{x^2+6x+5}+C.$

**Задача 9,36.** Найти интеграл

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

**Решение.** Следует иметь в виду, что к интегралам (9,19) легко приводятся интегралы вида

$$\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

где $P(x)$ — многочлен относительно $x$.

Действительно, перенося иррациональность в знаменатель, получим

$$\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{P(x)(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Теперь остается применить формулу (9,22).

Предложенный в задаче интеграл может быть представлен так:

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=$$
$$=(\alpha x+\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

| Применена формула (9,22) с другим обозначением неизвестных коэффициентов |
|---|

Значения неизвестных коэффициентов:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{b}{4a}; \quad \lambda = \frac{4ac - b^2}{8a};$$

и, таким образом, учитывая, что

$$\frac{1}{2}x + \frac{b}{4a} = \frac{2ax + b}{4a},$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{2ax + b}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \\ + \frac{4ac - b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}. \qquad (9,23)$$

Вычисление же последнего интеграла известно из задачи 9,27.

**Задача 9,37** (для самостоятельного решения).

По формуле (9,23) найти интегралы:

1) $\int \sqrt{c + x^2}\, dx$; 2) $\int \sqrt{c - x^2}\, dx$ $(c > 0)$.

**Ответ.** 1) $\frac{x}{2}\sqrt{c + x^2} + \frac{c}{2}\ln|x + \sqrt{c + x^2}| + C$;

2) $\frac{x}{2}\sqrt{c - x^2} + \frac{c}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{c}} + C$.

**Задача 9,38** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы:

1) $\int \sqrt{5 + 3x + 8x^2}\, dx$; 2) $\int \sqrt{2x^2 + 5x + 7}\, dx$;

3) $\int \sqrt{5 - x - 3x^2}\, dx$; 4) $\int \sqrt{7 + 8x - 5x^2}\, dx$,

не применяя формулы (9,23), а пользуясь указаниями, данными в задаче 9,36.

**Ответ.** 1) $\frac{16x + 3}{32}\sqrt{5 + 3x + 8x^2} + \frac{151}{128\sqrt{2}}\ln|16x + 3 + \\ + 4\sqrt{10 + 6x + 16x^2}| + C$;

2) $\frac{4x + 5}{8}\sqrt{2x^2 + 5x + 7} + \frac{31}{16\sqrt{2}}\ln|4x + 5 + \\ + 2\sqrt{4x^2 + 10x + 14}| + C$;

3) $\frac{6x + 1}{12}\sqrt{5 - x - 3x^2} + \frac{61}{24\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x + 1}{\sqrt{61}} + C$;

4) $\frac{5x - 4}{10}\sqrt{7 + 8x - 5x^2} + \frac{51}{10\sqrt{5}}\arcsin\frac{5x - 4}{\sqrt{51}} + C$.

2. **Интегралы вида** (9,20)

$$\int \frac{dx}{(x+k)^p \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

подстановкой

$$x+k=\frac{1}{y} \tag{9,24}$$

приводятся к интегралу вида (9,19), примеры определения которого мы уже разобрали.

**Задача 9,39.** Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$.

**Решение.** Этот интеграл принадлежит к рассматриваемому типу: $k=0$; $p=1$; $a=1$; $b=0$; $c=5$. Применим подстановку (9,24), которая в данном случае будет такой: $x=\frac{1}{y}$; $dx=-\frac{1}{y^2}dy$. Подставляя эти значения в подынтегральную функцию, получим

$$I=\int \frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+5}}=-\int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1+5y^2}{y^2}}}=-\int \frac{\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y^2}\sqrt{1+5y^2}}=$$

$$=-\int \frac{dy}{\sqrt{1+5y^2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1+(\sqrt{5}y)^2}}dy=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}y+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+5y^2}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}\frac{1}{x}+\sqrt{1+5\cdot\frac{1}{x^2}}\right|+C=$$

| Возвращаемся к старой переменной: $y=\frac{1}{x}$ |
|---|

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+5}}{x}\right|+C.$$

Окончательно

$$I=-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+5}}{x}+C.$$

**Задача 9,40.** Найти $I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-x^2}}$.

**Решение.** Этот интеграл относится к рассматриваемому типу: $k=0$; $p=2$; $a=-1$; $b=0$; $c=7$.

Подстановка:

$$x=\frac{1}{y};\quad x^2=\frac{1}{y^2};\quad dx=-\frac{dy}{y^2}.$$

Поэтому

$$I=\int\frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y^2}\sqrt{7-\frac{1}{y^2}}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{7-\frac{1}{y^2}}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{7y^2-1}{y^2}}}=$$

$$=-\int\frac{y\,dy}{\sqrt{7y^2-1}}=-\frac{1}{14}\int\frac{14y\,dy}{\sqrt{7y^2-1}}=-\frac{1}{14}\cdot 2\sqrt{7y^2-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{7}\sqrt{7y^2-1}+C=-\frac{1}{7}\sqrt{7\cdot\frac{1}{x^2}-1}+C.$$

| Возвращаемся к старой переменной: $y=\frac{1}{x}$ |
|---|

Окончательно

$$I=-\frac{1}{7}\frac{\sqrt{7-x^2}}{x}+C.$$

**Задача 9,41** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}}$; 2) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{15+3x^2}}$.

**Ответ.** 1) $\arccos\frac{1}{x\sqrt{2}}+C$; 2) $-\frac{1}{15}\frac{\sqrt{15+3x^2}}{x}+C$.

**Задача 9,42** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $I_1=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

2) $I_2=\int\frac{dx}{(x-2)^3\sqrt{3x^2-8x+5}}$.

Указания. В первом примере использовать подстановку $x-1=\frac{1}{y}$, во втором — подстановку $x-2=\frac{1}{y}$. После подстановки получится: $I_2=-\int\frac{y^2}{\sqrt{y^2+4y+3}}dy$; применить формулу (9,22).

**Ответ.** 1) $-\ln\left|\frac{3-x+2\sqrt{1+x-x^2}}{2(x-1)}\right|+C$;

2) $\frac{6x-13}{2(x-2)^2}\sqrt{3x^2-8x+5}-\frac{9}{2}\ln\left|\frac{2x-3+\sqrt{3x^2-8x+5}}{x-2}\right|+C$.

## V. ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВОК ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ВИДА

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \tag{9,13}$$

Для вычисления интегралов, не содержащих другой иррациональности, кроме квадратного корня из квадратного трехчлена, применяются также тригонометрические подстановки, которые приводят интеграл (9,13) к интегралу от рациональной функции синуса и косинуса.

Чтобы применить эти подстановки, следует поступить так:

Из квадратного трехчлена, находящегося под корнем, надо выделить полный квадрат, после чего применить линейную подстановку, которая будет показана ниже на ряде примеров. Это даст возможность получить под корнем следующие выражения:

1) При $a > 0$ — сумму квадратов вида

$$k^2 + y^2 \tag{9,25}$$

или разность квадратов вида

$$y^2 - k^2. \tag{9,26}$$

После того как под корнем окажется выражение вида (9,25), для уничтожения иррациональности в подынтегральном выражении следует применить подстановку

$$\left.\begin{aligned} y &= k \operatorname{tg} t \\ dy &= k \sec^2 t dt \\ \sqrt{k^2 + y^2} &= k \sec t \end{aligned}\right\} \tag{9,27}$$

Если под корнем окажется выражение вида (9,26), то для уничтожения иррациональности в подынтегральном выражении надо применить подстановку

$$\left.\begin{aligned} y &= k \sec t \\ dy &= k \sec t \operatorname{tg} t dt \\ \sqrt{y^2 - k^2} &= k \operatorname{tg} t \end{aligned}\right\} \tag{9,28}$$

2) При $a < 0$ под корнем после выделения полного квадрата и применения линейной подстановки могут оказаться выражения вида

$$k^2 - y^2 \tag{9,29}$$

или

$$-k^2 - y^2. \tag{9,30}$$

В случае, когда под корнем окажется выражение вида (9,29), подстановка

$$\left.\begin{aligned} y &= k \sin t \\ dy &= k \cos t dt \\ \sqrt{k^2 - y^2} &= k \cos t \end{aligned}\right\} \tag{9,31}$$

освободит подынтегральное выражение от иррациональности.

Случай (9,30) не представляет для нас интереса, так как корень здесь не имеет вещественного значения ни при одном действительном значении $y$.

Помещаем для справок основные интегралы рассматриваемого вида:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C; \tag{9,32}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \tag{9,33}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C; \tag{9,34}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C. \tag{9,35}$$

Сначала найдем несколько интегралов, в которых выражение, находящееся под корнем, имеет один из видов: (9,25), (9,26) и (9,29), а после этого — несколько примеров, в которых подкоренное выражение придется приводить к этому виду.

**Задача (9,43).** Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$.

**Решение.** Выражение, стоящее под корнем, имеет вид (9,25) ($k = 3$). Применяем подстановку (9,27):

$$x = 3\operatorname{tg} y; \quad dx = 3\sec^2 y\,dy$$

$$x^2 + 9 = 9\operatorname{tg}^2 y + 9 = 9(\operatorname{tg}^2 y + 1) = 9\sec^2 y.$$

Поэтому

$$\sqrt{x^2+9} = 3\sec y, \quad \text{а } I = \int \frac{3\sec^2 y\,dy}{9\sec^2 y \cdot 3\sec y} = \frac{1}{9}\int \frac{dy}{\sec y} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \cos y\,dy = \frac{1}{9}\sin y + C.$$

Для того, чтобы возвратиться к первоначальной переменной $x$, найдем $\sin y$ через $x$. Из подстановки

$$x = 3\operatorname{tg} y; \quad \operatorname{tg} y = \frac{x}{3}; \quad \sin y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y = \frac{\operatorname{tg} y}{\sec y} = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} =$$

$$= \frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Поэтому окончательно

$$I = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} + C.$$

**Задача 9,44** (для самостоятельного решения).

**Найти** интегралы: 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C$; 2) $\frac{x}{16\sqrt{16+x^2}} + C$.

**Задача 9,45.** Найти $I=\int\frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}$.

**Решение.** Подкоренное выражение имеет вид (9,26). Подстановка (9,28) ($k^2=5$, $k=\sqrt{5}$) должна уничтожить иррациональность подынтегрального выражения. Полагаем

$$x=\sqrt{5}\sec t; \quad dx=\sqrt{5}\sec t\operatorname{tg} t\,dt;$$

$$x^2-5=5\sec^2 t-5=5\operatorname{tg}^2 t; \quad \sqrt{x^2-5}=\sqrt{5}\operatorname{tg} t.$$

Тогда

$$I=\int\frac{\sqrt{5}\sec t\operatorname{tg} t\,dt}{5\operatorname{tg}^2 t\sqrt{5}\operatorname{tg} t}=\frac{1}{5}\int\frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt=\frac{1}{5}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{5}\frac{1}{\sin t}+C.$$

Из подстановки $x=\sqrt{5}\sec t$ следует, что

$$\sec t=\frac{x}{\sqrt{5}}; \quad \cos t=\frac{\sqrt{5}}{x}; \quad \cos^2 t=\frac{5}{x^2};$$

$$\sin^2 t=1-\frac{5}{x^2}=\frac{x^2-5}{x^2}; \quad \sin t=\frac{\sqrt{x^2-5}}{x},$$

а потому окончательно

$$I=-\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}+C.$$

**Задача 9,46** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{dx}{(x^2-10)\sqrt{x^2-10}}$; 2) $\int\frac{dx}{(x^2-14)\sqrt{x^2-14}}$.

**Ответ.** 1) $-\frac{1}{10}\frac{x}{\sqrt{x^2-10}}+C$; 2) $-\frac{1}{14}\frac{x}{\sqrt{x^2-14}}+C$.

**Задача 9,47.** Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$.

**Решение.** Подкоренное выражение имеет вид (9,29) ($k^2=2$; $k=\sqrt{2}$). Применяем подстановку (9,31):

$$x=\sqrt{2}\sin t; \quad dx=\sqrt{2}\cos t\,dt; \quad 2-x^2=2\cos^2 t;$$

$$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t;$$

$$I=\int\frac{\sqrt{2}\cos t\,dt}{2\cos^2 t\sqrt{2}\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}\operatorname{tg} t+C.$$

Но из подстановки $x=\sqrt{2}\sin t$ следует, что $\sin t=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg} t=\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$, а поэтому окончательно

$$I=\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}+C.$$

**Задача 9,48** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int \frac{dx}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{5}\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}+C$; 2) $\frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{3-x^2}}+C$.

**Задача 9,49** (для самостоятельного решения).

Найти $\int \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}$.

**Ответ.** $\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{1-x^2}}+C$.

**Задача 9,50.** Найти интеграл

$$I=\int \frac{(x+4)\,dx}{(x^2+2x+4)\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

**Решение.** В подкоренном выражении выделяем полный квадрат: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$.

Сделаем линейную подстановку, о которой мы упоминали на стр. 143: $x+1=y$; $dx=dy$; $x^2+2x+4=(x+1)^2+3=$ $=y^2+3$; $x+4=x+1+3=y+3$, а интеграл

$$I=\int \frac{y+3}{(y^2+3)\sqrt{y^2+4}}\,dy.$$

Теперь выражение, стоящее под корнем, имеет вид (9,25). Применим подстановку (9,27) ($k^2=4$; $k=2$):

$y=2\operatorname{tg}t$; $dy=2\sec^2 t\,dt$; $\sqrt{y^2+4}=2\sec t$; $y+3=2\operatorname{tg}t+3$; $y^2+3=4\operatorname{tg}^2 t+3$.

Теперь

$$I=\int \frac{2\operatorname{tg}t+3}{(4\operatorname{tg}^2 t+3)\,2\sec t}\,2\sec^2 t\,dt=\int \frac{(2\operatorname{tg}t+3)\sec t\,dt}{4\operatorname{tg}^2 t+3}=$$

$$=\int \frac{\left(2\frac{\sin t}{\cos t}+3\right)\frac{1}{\cos t}\,dt}{4\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+3}=\int \frac{2\sin t+3\cos t}{4\sin^2 t+3\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2\int \frac{\sin t}{\underbrace{4\sin^2 t+3\cos^2 t}_{4\sin^2 t+3\cos^2 t=4-\cos^2 t}}\,dt+3\int \frac{\cos t}{\underbrace{4\sin^2 t+3\cos^2 t}_{4\sin^2 t+3\cos^2 t=\sin^2 t+3}}\,dt=$$

$$=2\int \frac{\sin t}{4-\cos^2 t}\,dt+3\int \frac{\cos t}{\sin^2 t+3}\,dt=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\cos t}{2-\cos t}\right|+\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sin t}{\sqrt{3}}+C=\underbrace{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\cos t}{2+\cos t}\right|}_{\text{Учтен знак минус, стоящий перед логарифмом}}+$$

$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Теперь следует от переменной $t$ перейти к переменной $y$, а затем от $y$ к $x$.

Так как $y=2\operatorname{tg}t$, то $\operatorname{tg}t=\frac{y}{2}$; $\sin t=\frac{y}{\sqrt{4+y^2}}$; $\cos t=\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}$, а потому

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}}{2+\frac{2}{\sqrt{4+y^2}}}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{4+y^2}-2}{2\sqrt{4+y^2}+2}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{4+y^2}}+C.$$

Но так как $x+1=y$, то $y^2+4=x^2+2x+5$, и окончательно

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-1}{\sqrt{x^2+2x+5}+1}\right|+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

**Задача 9,51** (для самостоятельного решения).

Найти интегралы: 1) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+x+4)\sqrt{4x^2+4x+5}}$;

2) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+4)^7}}$.

Указания. 1) Подкоренное выражение представить так:

$$4x^2+4x+5=(2x+1)^2+4.$$

Линейная подстановка $2x+1=y\left(2\,dx=dy;\ dx=\frac{1}{2}dy\right)$ приведет это выражение к виду $y^2+4$. Выражение же $x^2+x+4=$ $=\frac{4x^2+4x+16}{4}=\frac{(2x+1)^2+15}{4}=\frac{y^2+15}{4}$. Теперь следует применить подстановку $y=2\operatorname{tg}t$. Можно сразу взять $2x+1=2\operatorname{tg}t$.

2) Подкоренное выражение $x^2+2x+4=(x+1)^2+3$. Можно сразу применить подстановку $x+1=\sqrt{3}\operatorname{tg}t$ или сначала линейной подстановкой $x+1=y$ привести подкоренное выражение к виду $y^2+3$, а потом взять $y=\sqrt{3}\operatorname{tg}t$. Вопрос сведется к вычислению интеграла $\int\cos^5 t\,dt$. Из $x+1=\sqrt{3}\operatorname{tg}t$ следует, что $\sin t=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{165}}\ln\left|\frac{\sqrt{11}(2x+1)-\sqrt{15(4x^2+4x+5)}}{\sqrt{11}(2x+1)+\sqrt{15(4x^2+4x+5)}}\right|+$ $+\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4x^2+4x+5}}{\sqrt{11}}+C$;

2) $\frac{1}{27}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-\frac{2}{81}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)^3+\frac{1}{135}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}\right)^5+C.$

# ДЕСЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Интегральная сумма. Определенный интеграл и его основные свойства. Задачи механики и физики, приводящие к вычислению предела интегральной суммы. Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы.

## КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

**1. Интегральная сумма.** Пусть на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ оси $Ox$ задана непрерывная функция $f(x)$.

Отрезок $[a, b]$ разделим на $n$ частей, длины которых могут быть произвольными.

Каждый такой отрезок будем называть частичным.

Абсциссы точек деления обозначим через $x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}$ и будем полагать, что

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < b.$$

Длину частичного отрезка, равную разности $x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, обозначим через $\Delta x_k$:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На каждом частичном отрезке выберем *произвольную точку*, абсциссу которой обозначим через $\xi_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, вычислим $f(\xi_k)$ — значение заданной функции $f(x)$ в этой точке. Найдем произведение числа $f(\xi_k)$ на длину $\Delta x_k$ отрезка, на котором взята точка $\xi_k$, т. е. $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Составим сумму таких произведений

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n,$$

которую обозначим

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{10,1}$$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Для заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно составить бесчисленное множество интегральных сумм, так как отрезок $[a, b]$ может быть разделен на части бесчисленным числом способов, а при выбранном способе разделения существует еще бесчисленное число возможностей для выбора в каждом отрезке точек $\xi_k$.

**2. Определенный интеграл.** Обозначим через $l$ *длину наибольшего* из частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$ в данном разделении отрезка $[a, b]$ на части $(l = \max \Delta x_k)$.

***Определение.*** Предел интегральной суммы (10,1)

$$\lim_{\substack{l\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

при условии, что $l \to 0$ (а значит, число отрезков $n$ неограниченно возрастает ($n \to \infty$)), если он существует и не зависит ни от того, каким образом разделен на части отрезок $[a, b]$, ни от того, какая точка $\xi_k$ выбрана на каждом частичном отрезке, называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Таким образом,

$$\lim_{\substack{l \to 0) \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (10{,}2)$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Гарантией существования этого предела, или, что то же самое, существования определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, и независимости его ни от способа деления отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек $\xi_k$ на каждом частичном отрезке является непрерывность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

***Теорема*** (о существовании определенного интеграла).

*Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм* (10,1) *при условии, что длина каждого частичного отрезка стремится к нулю, а число частичных отрезков неограниченно увеличивается, существует и не зависит ни от способа разделения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек на каждом частичном отрезке.*

В символе $\int_a^b f(x)\,dx$ числа $a$ и $b$ называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, отрезок $[a, b]$ — отрезком интегрирования, а переменная величина $x$ — переменной интегрирования.

Отыскивая предел (10,2) суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ при условии, что длина наибольшего из частичных отрезков $\Delta x_k$ стремится к нулю, следует иметь в виду, что каждое слагаемое $f(\xi_k)\,\Delta x_k$ есть величина бесконечно малая, так как в этом предельном процессе $\Delta x_k$ — величина бесконечно малая, а $f(\xi_k)$ имеет конечное значение, потому что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по предположению непрерывна. **Таким образом, определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ есть предел суммы бесконечно малых величин, количество которых неограниченно возрастает.**

**3. Формула Ньютона — Лейбница.** Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{10,3}$$

где функция $F(x)$ есть какая-нибудь первообразная для подынтегральной функции $f(x)$.

Формула (10,3) называется формулой Ньютона — Лейбница. Она является основной формулой интегрального исчисления.

Согласно этой формуле, для вычисления предела интегральной суммы (10,1) при указанных выше условиях, или, что то же, для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, надо: 1) найти какую-нибудь первообразную функцию $F(x)$ для подынтегральной функции; 2) вычислить ее значение $F(b)$ при верхнем пределе и вычесть из него ее значение $F(a)$ при нижнем пределе.

Обычно при вычислении определенного интеграла употребляют такую запись:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона — Лейбница позволяет свести сложную задачу вычисления предела интегральной суммы, для решения которой отсутствует общий прием, к нахождению первообразной функции для подынтегральной; тем самым она указывает единообразный и простой способ вычисления предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин и позволяет заменить бесконечный процесс суммирования хорошо известной операцией отыскания первообразной функции.

**4. Основные свойства определенного интеграла.**

1)
$$\int_a^b dx = b - a. \tag{10,4}$$

2) *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{10,5}$$

где $c$ — постоянная величина.

3) *Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций*

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\, dx =$$
$$= \int_a^b f_1(x)\, dx \pm \int_a^b f_2(x)\, dx \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)\, dx. \qquad (10,6)$$

4) *При перестановке пределов интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный*

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx. \qquad (10,7)$$

5) Если нижний и верхний пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю

$$\int_b^a f(x)\, dx = 0. \qquad (10,8)$$

6) *Переменную интегрирования можно обозначить любой буквой*, не нарушая справедливости формул, т. е.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(\alpha)\, d\alpha. \qquad (10,9)$$

7) Имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \qquad (10,10)$$

которая верна при любом взаимном расположении чисел $a$, $b$ и $c$.

Если выполняются неравенства $a < c < b$, то из формулы (10,10) следует, что интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка[1].

**1. Упражнения на вычисление определенных интегралов непосредственно из определения, как предела интегральных сумм, и с применением формулы Ньютона — Лейбница.**

**Задача 10,1.** Составить формулы для вычисления интегральных сумм для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, разделяя этот отрезок на $n$ равных частичных отрезков.

Значение функции вычислять:

1) в правом конце каждого частичного отрезка;

2) в левом конце каждого частичного отрезка.

[1] Дальнейшие свойства определенных интегралов будут рассмотрены на последующих практических занятиях.

**Решение.** 1) Длина отрезка интегрирования равна $b-a$. Длину каждого частичного отрезка для удобства записи обозначим не через $\Delta x$, как обычно, а через $h$. Тогда

$$h=\frac{b-a}{n}.$$

Координаты точек деления равны:

$$x_0=a;\ x_1=a+h;\ x_2=a+2h,\ \ldots,\ x_{n-1}=a+(n-1)h;$$
$$x_n=b=a+nh. \tag{10,11}$$

Значения функции в правых концах частичных отрезков будут

$$f(a+h);\ f(a+2h);\ f(a+3h),\ \ldots,\ f(a+nh).$$

Умножая каждое из этих чисел на длину $h$ частичного отрезка и складывая эти произведения, получим интегральную сумму

$$S_n=f(a+h)h+f(a+2h)h+f(a+3h)h+\cdots+f(a+nh)h=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f(a+ih)h=h\sum_{i=1}^{n}f(a+ih). \tag{10,12}$$

(величина $h$, входящая в каждое слагаемое, вынесена за знак суммы).

В таком случае $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет пределом этой интегральной суммы, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}} h\sum_{i=1}^{n}f(a+ih) \tag{10,13}$$

2) Значениями функции в левых концах каждого частичного отрезка будут числа

$$f(a);\ f(a+h);\ f(a+2h),\ \ldots,\ f[a+(n-1)h].$$

Умножая каждое из этих значений на длину $h$ частичного отрезка, получим интегральную сумму

$$S_n^{\mathrm{I}}=f(a)h+f(a+h)h+f(a+2h)h+\cdots+f[a+(n-1)]h=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih)h=h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih). \tag{10,14}$$

В этом случае

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{h\to 0\\(n\to\infty)}} h\sum_{i=0}^{n-1}f(a+ih). \tag{10,15}$$

**Задача 10,2.** Составить формулу для вычисления интегральной суммы для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, разделяя отрезок $[a, b]$ на $n$ частичных отрезков так, чтобы абсциссы точек деления образовывали геометрическую прогрессию (или, что то же, чтобы длины частичных отрезков разбиения образовывали геометрическую прогрессию).

**Решение.** Если знаменатель геометрической прогрессии обозначить через $q$ $(q > 1)$, то абсцисса конца отрезка $[a, b]$

$$b = aq^n. \tag{10,16}$$

Абсциссы точек деления будут такими:

$$x_0 = a;\ x_1 = aq;\ x_2 = aq^2;\ x_3 = aq^3,\ \ldots,\ x_n = aq^n = b.$$

Длины частичных отрезков равны:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = aq - a = a(q-1); \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = aq^2 - aq = aq(q-1)$$

и вообще

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = aq^{k-1}(q-1).$$

Вычислим значения функции в левом конце каждого частичного отрезка и получим числа

$$f(a);\ f(aq);\ f(aq^2),\ \ldots,\ f(aq^{n-1}).$$

Умножая эти числа на длину соответствующего отрезка и складывая полученные произведения, составим интегральную сумму

$$f(a)\cdot a(q-1) + f(aq)\cdot aq(q-1) + f(aq^2)\cdot aq^2(q-1) + \cdots + f(aq^{n-1})\cdot aq^{n-1}(q-1) = a(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} f(aq^i)\,q^i. \tag{10,17}$$

В этом случае

$$\int_a^b f(x)\,dx = a\lim_{\substack{n\to\infty\\(q\to 1)}} \sum_{i=0}^{n-1}(q-1)f(aq^i)\,q^i = a\lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}}(q-1)\sum_{i=0}^{n-1} f(aq^i)\,q^i. \tag{10,18}$$

Из (10,16) получаем

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}, \tag{10,19}$$

а потому, когда $n \to \infty$, то $q \to 1$ (см. И. А. Каплан. «Практические занятия по высшей математике», ч. II, задача 13,2).

**Задача 10,3.** Вычислить определенный интеграл $\int_a^b e^x\,dx$ как предел интегральной суммы.

**Решение.** Разделим отрезок интегрирования $[a, b]$ на $n$ равных частей и составим для функции $f(x) = e^x$ по формуле (10,12) интегральную сумму, выбирая точки в правом конце каждого частичного отрезка. Так как $f(x) = e^x$, то

$$f(a+h) = e^{a+h};\ f(a+2h) = e^{a+2h}, \ \ldots, \ f(a+ih) = e^{a+ih};$$

$$f(a+nh) = f(b) = e^{a+nh} \quad (a+nh = b);$$

$$S_n = he^{a+h} + he^{a+2h} + \cdots + he^{a+ih} + \cdots + he^{a+nh};$$

$$S_n = he^a(e^h + e^{2h} + \cdots + e^{ih} + \cdots + e^{nh}). \qquad (10,20)$$

Выражение в скобках — геометрическая прогрессия, знаменатель которой $q = e^h$.

Известно, что сумма $n$ членов геометрической прогрессии равна

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \qquad (10,21)$$

У нас $a_1 = e^h$; $q = e^h$, а потому (10,20) перепишется так:

$$S_n = he^a \frac{e^h(e^{nh} - 1)}{e^h - 1} = \frac{he^h}{e^h - 1}(e^{a+nh} - e^a).$$

Но из (10,11) следует, что $a + nh = b$, а потому

$$S_n = \frac{he^h}{e^h - 1}(e^b - e^a).$$

На основании (10,2) определенный интеграл

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{h\to 0} S_n = \lim_{h\to 0}\frac{he^h}{e^h - 1}(e^b - e^a) = 1\cdot(e^b - e^a)\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h - 1} = e^b - e^a$$

(множитель $e^b - e^a$ как постоянная величина, вынесен за знак предела, а по правилу Лопиталя $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{e^h - 1} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{e^h} = 1$, а $\lim\limits_{h\to 0} e^h = 1$).

Итак,

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

Вычислите самостоятельно этот интеграл по формуле (10,14), т. е. разделяя отрезок $[a, b]$ по-прежнему на $n$ равных частей, но выбирая на каждом частичном отрезке $(x_{k-1}, x_k$ точку в его левом конце.

Теперь применим к вычислению этого интеграла формулу (10,3) Ньютона — Лейбница. Согласно этой формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функция для подынтегральной функции $f(x)$. Поэтому

$$\int_a^b e^x\,dx = e^x\Big|_a^b = e^b - e^a,$$

что совпадает с ранее найденным результатом.

Учащийся легко оценит экономию в вычислениях, которую дает формула Ньютона—Лейбница: весь процесс сводится к отысканию первообразной функции для подынтегральной, вычислению её значений при верхнем и нижнем пределах интегрирования и определению разности этих значений.

**Задача 10,4.** Вычислить интеграл $\int\limits_a^b x^k dx$, где $a$ и $b$ — положительные числа, $a < b$, $k \neq -1$, рассматривая его как предел интегральной суммы.

**Решение.** Предпримем такое разбиение отрезка интегрирования $[a, b]$ на части, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию. (Это равносильно тому, что длины частичных отрезков образуют геометрическую прогрессию). Вычислять значение функции будем в левом конце каждого частичного отрезка.

В задаче 10,2 была получена формула (10,18) для вычисления определенного интеграла при таком способе разбиения отрезка интегрирования на части. Полагая в этой формуле $f(x) = x^k$, $f(aq^i) = (aq^i)^k$ и учитывая (10,19), получим

$$\int_a^b x^k\,dx = a \lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^k q^i = a \lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} a^k q^{i(k+1)} =$$

$$= a^{k+1} \lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} (q-1) \sum_{i=0}^{n-1} q^{i(k+1)}. \qquad (10,22)$$

Под знаком суммы стоит геометрическая прогрессия. Её первый член $a_1 = 1$, знаменатель $q^{k+1}$. Поэтому по формуле (10,21) сумма этой прогрессии

$$S_n = \frac{1\cdot[(q^{k+1})^n - 1]}{q^{k+1}-1} = \frac{(q^n)^{k+1} - 1}{q^{k+1}-1}.$$

Но на основании (10,19) $q^n = \frac{b}{a}$, поэтому

$$S_n = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} - 1}{q^{k+1}-1},$$

а (10,22) перепишется в виде

$$\int_a^b x^k\,dx = a^{k+1} \lim_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} (q-1)\frac{\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1}{q^{k+1}-1} =$$

$$= a^{k+1}\left(\frac{b^{k+1}}{a^{k+1}}-1\right)\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},$$

так как по правилу Лопиталя

$$\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{q^{k+1}-1} = \lim_{q\to 1}\frac{1}{(k+1)\,q^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Итак,

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1} \tag{10,23}$$

причем на пределы интегрирования $a$ и $b$ было наложено ограничение $0<a<b$, так как при этом предположении проведенное деление отрезка $[a, b]$ на части, длины которых составляют геометрическую прогрессию, всегда возможно.

Следует отметить, что формула (10,23) верна при любых значениях $a$ и $b$.

Теперь применим к вычислению этого интеграла формулу (10,3) Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b x^k\,dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$

(никаких ограничений на числа $a$ и $b$ не наложено).

Очевидно, что применение этой формулы просто и быстро дает необходимый результат.

При $k=0$ из (10,23) получаем

$$\int_a^b dx = b-a,$$

т. е. *определенный интеграл от дифференциала равен разности между верхним и нижним пределами интегрирования.*

Эти две задачи приведены с целью упражнения в составлении интегральной суммы для подынтегральной функции, определении предела этой суммы при разных способах разбиения отрезка интегрирования на части, а также для сравнения труда, затрачиваемого на вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница и как предела интегральных сумм.

Теперь мы предложим для тех же упражнений несколько задач для самостоятельного решения с необходимыми указаниями.

**Задача 10,5** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx$ $(a > 0;\ b > 0;\ a < b)$, составив интегральную сумму для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на отрезке $[a, b]$. Разбиение отрезка на части произвести точками, абсциссы которых составляют геометрическую прогрессию. Вычислить этот интеграл и по формуле Ньютона—Лейбница.

Указание. Использовать формулу (10,18).

$$f(aq^i) = \frac{1}{aq^i};\quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{aq^i}\,q^i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a} = n\cdot\frac{1}{a}.$$

Задача сведется к определению предела $\lim\limits_{\substack{q\to 1\\(n\to\infty)}} n(q-1)$.

Так как согласно (10,19) $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, то $\ln q = \frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}$, а $n = \dfrac{\ln\frac{b}{a}}{\ln q}$. Поэтому указанный предел преобразуется в

$$\lim_{q\to 1} \frac{\ln\frac{b}{a}}{\ln q}(q-1) = \ln\frac{b}{a}\lim_{q\to 1}\frac{q-1}{\ln q}$$

(применить правило Лопиталя: «неопределенность» вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

**Ответ.** $\ln\frac{b}{a}$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}.$$

Требование, чтобы $a$ и $b$ были числами положительными, является существенным, так как каждое из них оказалось под знаком логарифма.

**Задача 10,6** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_a^b x\,dx$, составив интегральную сумму для функции $f(x) = x$. Отрезок $[a, b]$ разделить произвольным образом на $n$ частей.

Точку, в которой вычисляется значение функции, взять в середине каждого частичного отрезка:

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}.$$

Так как $f(x) = x$, то $f(\xi_k) = \xi_k$.

Длина частичного отрезка

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Интегральная сумма примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2).$$

Но $x_n = b$; $x_0 = a$, поэтому интегральная сумма равна $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$, а ее предел в данном случае, как предел постоянной величины, равен ей самой

$$\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Такой результат, конечно, мог быть получен сразу по формуле (10,23). При решении этой задачи было произведено не специальное разбиение отрезка на части, а произвольное. Точка, в которой вычисляется значение функции, была выбрана в середине каждого отрезка. По формуле Ньютона—Лейбница получается, конечно, то же самое

$$\int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

**Задача 10,7** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int_a^b \sin x\,dx$ как предел интегральной суммы и применяя формулу Ньютона—Лейбница.

Указание. Отрезок $[a, b]$ разделить на $n$ равных частей. Значения функции $\sin x$ вычислить в правом конце каждого отрезка.

По формуле (10,12) интегральная сумма будет иметь такой вид $\left(\text{с учетом, что } h = \frac{b-a}{n}\right)$:

$$h[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+ih) + \\ + \ldots + \sin(a+nh)].$$

Учесть, что $2\sin(a+ih)\sin\frac{h}{2}=\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+\right.$ $\left.+ih+\frac{h}{2}\right)$, а отсюда

$$\sin(a+ih)=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+ih-\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Подставляя это значение $\sin(a+ih)$ в интегральную сумму, после приведения подобных членов получим

$$\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)-\cos\left(a+nh+\frac{h}{2}\right)\right].$$

Перейти к пределу при $h\to 0$ $(n\to\infty)$, но учесть, что $a+$ $+nh=b$, а $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}=1$ (применить правило Лопиталя).

**Ответ.** $\int\limits_a^b \sin x\,dx=\cos a-\cos b$.

По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b \sin x\,dx=-\cos x\Big|_a^b=-(\cos b-\cos a)=\cos a-\cos b.$$

Заканчивая упражнения на вычисление определенного интеграла как предела интегральных сумм, отметим еще раз, что такое вычисление даже в простейших случаях требует больших усилий.

В заключение этого практического занятия выполним ряд упражнений на вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница.

**Задача 10,8** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^{kx}dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ (учесть, что значения функции $y=\operatorname{arctg} x$ находятся на интервале $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{arctg} 1=$ $=\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$; 5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$.

**Ответ.** 1) 2; 2) $\frac{e^k-1}{k}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $\sqrt{2}-1$.

**Задача 10,9** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} (a > 0;\ b > 0)$; 2) $\int\limits_a^b \cos x\, dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

5) $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$ (учесть результат задачи **4,3**).

**Ответ.** 1) $\ln\frac{b}{a}$; 2) $\sin b - \sin a$; 3) $\ln 2$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi a^2}{2}$.

**Задача 10,10** (для самостоятельного решения).

Интегралы, вычисляемые в этой задаче, имеют большое значение в теории тригонометрических рядов.

Доказать справедливость следующих формул, если $m$ и $n$ — целые числа:

1) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0;$$

2) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \neq |n|, \\ \pi & \text{»} \quad m = n, \\ -\pi & \text{»} \quad m = -n. \end{cases}$$

Указание: $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$.

3) $$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \neq |n|, \\ \pi & \text{»} \quad m = \pm n, \\ 2\pi & \text{»} \quad m = n = 0. \end{cases}$$

Указание: $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$.

**Задача 10,11** (для самостоятельного решения).

Интегрируя по частям, доказать формулу

$$\int \sin^{2m} x\, dx = -\frac{1}{2m}\sin^{2m-1} x \cos x + \frac{2m-1}{2m}\int \sin^{2m-2} x\, dx$$

и, применяя её при $m > 0$ и целом, показать, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (10,24)$$

**Задача 10,12** (для самостоятельного решения).

Из формулы (10,24) получить, заменяя $x$ на $\frac{\pi}{2} - z$, формулу

$$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2m}\cos^{2m-1} x \sin x + \frac{2m-1}{2m}\int \cos^{2m-2} x\,dx$$

и, пользуясь ею, доказать, что при $m > 0$ и целом

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}. \qquad (10,25)$$

На последующих практических занятиях учащийся сможет выполнить еще много упражнений, связанных с применением формулы Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

## ОДИННАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Задачи механики и физики, приводящие к определенному интегралу (продолжение).

Решим несколько задач, в которых для определения искомой величины требуется сначала составить интегральную сумму, а затем найти ее предел.

**Задача 11,1.** Сила тока $I$ является заданной непрерывной функцией времени $t$: $I = I(t)$. Определить количество $Q$ электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время $T$, отсчитываемое время от момента начала опыта.

**Решение.** Считая, что в начале опыта $T = 0$, разделим произвольным образом отрезок времени $(0, T)$ на $n$ частичных отрезков. Абсциссами точек деления пусть будут числа $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}$, а длины частичных отрезков времени $t_k - t_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим через $\Delta t_k$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем подчеркнем еще раз, что промежутки времени $\Delta t_k$ не обязательно должны быть между собою равны. В каждом из этих частичных промежутков времени выберем произвольный момент времени $\tau_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Этот момент может находиться как внутри отрезка времени $[t_{k-1}, t_k]$, так и на любом из его концов.

Сила тока — величина переменная, изменяющаяся во времени. Однако мы будем считать, что за время $\Delta t_k$ сила тока не изменяется, а имеет в течение всего этого промежутка постоянное значение, а именно то, которое она имела в момент $\tau_k$. Таким образом, для отрезка времени $[t_{k-1}, t_k]$ сила тока, равная $I(\tau_k)$, считается величиной постоянной.

Известно, что для постоянного тока количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника, равно произведению силы тока на время, затраченное на прохождение током этого проводника. Следовательно, за отрезок времени, равный $\Delta t_k$, протечет количество электричества, приближенно равное

$$I(\tau_k)\,\Delta t_k \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Произведение $I(\tau_k)\,\Delta t_k$ дает приближенное, а не точное количество электричества, протекшего за время $\Delta t_k$, потому что силу тока в течение всего этого промежутка времени мы считаем величиной постоянной, в то время как в действительности она изменяется непрерывно со временем и является величиной переменной.

Давая индексу $k$ значения 1, 2, ..., $n$ и складывая произведения $I(\tau_1)\,\Delta t_1$, $I(\tau_2)\,\Delta t_2$, ..., $I(\tau_n)\,\Delta t_n$, найдем, что количество электричества $Q$, протекшего за весь отрезок времени $[0, T]$, приближенно определяется суммой

$$Q \approx I(\tau_1)\,\Delta t_1 + I(\tau_2)\,\Delta t_2 + \cdots + I(\tau_n)\,\Delta t_n,$$

которая является интегральной суммой для функции $I(t)$ на отрезке $[0, T]$. Итак,

$$Q \approx \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (11,1)$$

За точное значение количества электричества $Q$ принимается предел этой интегральной суммы при условии, что наибольший из отрезков времени $\max \Delta t_k$ стремится к нулю, а значит, число $n$ этих отрезков неограниченно возрастает, т. е.

$$Q = \lim_{\substack{\max \Delta t_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} I(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (11,2)$$

Когда наибольший из отрезков времени $\Delta t_k$ стремится к нулю, то каждое слагаемое $I(\tau_k)\,\Delta t_k$ — величина бесконечно малая, а количество $n$ этих слагаемых неограниченно возрастает. Таким образом, при определении предела интегральной суммы (11,1) мы отыскиваем предел суммы бесконечно малых величин, когда их количество неограниченно возрастает.

Из (11,2) следует, что количество электричества, протекшего за отрезок времени $[0, T]$, определяется по формуле

$$Q = \int_0^T I(t)\,dt \qquad (11,3)$$

(см. формулу (10,2)).

Таким образом, формула (11,1) определяет *приближенно* количество электричества, протекшего через поперечное сечение проводника за время, равное $T$ секундам. Формула же (11,3) определяет это количество *точно*, причем числа, найденные по этим формулам, тем меньше отличаются одно от другого, чем меньше отрезки времени $\Delta t_k$, на которые разделен основной отрезок времени $[0, T]$.

Напомним, что в технической системе единиц количество электричества $Q$ измеряется в кулонах, а сила тока $I$ — в амперах:

**Задача 11,2.** Сила тока $I = 2t^2 - 3t + 2$.

Определить количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника за 10 секунд, считая время от начала опыта.

**Решение.**

$$Q = \int_0^{10} (2t^2 - 3t + 2)\,dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t\right)\Big|_0^{10} = 536\frac{2}{3}\,k.$$

**Задача 11,3.** Тело движется по прямой $Ox$ из точки с абсциссой $a$ до точки с абсциссой $b$ $(a < b)$ под действием **переменной** силы $\overline{F}$, являющейся непрерывной функцией абсциссы $x$: $\overline{F} = \overline{F}(x)$, причем сила параллельна прямой $Ox$, а ее направление совпадает с направлением движения тела. Найти работу $A$, произведенную силой $\overline{F}(x)$ на этом перемещении.

**Решение.** Если бы сила $\overline{F}(x)$ была не переменной, а постоянной, параллельной прямой $Ox$, и ее направление совпадало с направлением движения тела, то работа $A$, произведенная ею, была бы равна произведению модуля силы на пройденный путь, т. е. на длину отрезка $[a, b]$, равную $(b - a)$:

$$A = F(b - a).$$

Но сила переменна, а потому этой формулой для определения работы мы воспользоваться не можем.

Отрезок $[a, b]$ разделим на $n$ отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. На каждом из них выберем произвольную точку $\xi_k$. Определим в этой точке численное значение силы $\overline{F}(x)$. Получится число $F(\xi_k)$. Полагая, что в пределах каждого частичного отрезка сила не переменна, а постоянна и что ее значение на всем частичном отрезке такое же, как в выбранной точке, будем считать произведенную этой силой работу приближенно на каждом частичном отрезке равной произведению модуля силы на путь, т. е. $F(\xi_k)\,\Delta x_k$.

Работа силы $\overline{F}(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ приближенно равна сумме работ на всех частичных участках

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k. \qquad (11,4)$$

Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k)\,\Delta x_k$ — интегральная сумма для функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. По формуле (11,4) мы получим не точное значение работы, а приближенное, потому что на каждом частичном отрезке мы считали силу постоянной, в то время как фактически в пределах каждого частичного отрезка она непрерывно изменяется.

За точное значение работы силы $\overline{F}(x)$ на отрезке $[a, b]$ мы примем тот предел, к которому стремится интегральная сумма (11,4), когда наибольший из частичных отрезков $\Delta x_k$ стремится к нулю, а число их $n$ неограниченно возрастает, т. е.

$$A = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k) \Delta x_k,$$

и согласно формуле (10,2)

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \qquad (11,5)$$

Подынтегральное выражение $F(x)\,dx$ называется элементарной работой и обозначается через $\delta A$.

Работа $A$ есть определенный интеграл от элементарной работы $\delta A = F(x)\,dx$. Таким образом, для определения работы переменной силы на прямолинейном пути надо сначала вычислить элементарную работу $\delta A$, а после этого интегрированием по формуле (11,5) найти полную работу.

Приближенное значение работы, вычисленное по формуле (11,4), будет тем меньше отличаться от ее точного значения (11,5), чем меньшими будут частичные отрезки $\Delta x_k$, на которые разбит отрезок $[a, b]$.

При определении предела суммы (11,4) наибольший из отрезков $\Delta x_k \to 0$, каждое слагаемое $F(\xi_k)\,\Delta x_k$ — величина бесконечно малая, а количество их неограниченно возрастает. Поэтому и здесь определение искомой величины, как и в задаче 11,1 связано с определением предела суммы бесконечно малых величин, когда их количество неограниченно возрастает.

**Задача 11,4** (работа упругой силы на прямолинейном перемещении).

К телу прикреплена пружина, другой конец которой закреплен неподвижно в точке $O$. Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука, согласно которому $F = -kx$, где $k$ — коэффициент пропорциональности, а $x$ — удлинение пружины. Найти работу упругой силы на прямолинейном перемещении по линии действия силы из точки с абсциссой $a$ в точку с абсциссой $b$. (Сила — в килограммах, перемещение — в метрах). Знак минус в выражении силы показывает, что упругая сила стремится восстановить равновесие.

**Решение.** Элементарная работа $\delta A$ силы упругости на перемещении $dx$ равна

$$\delta A = -kx\,dx,$$

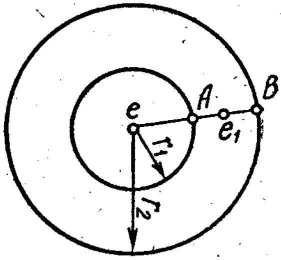
а потому полная работа на перемещении из точки $a$ в точку $b$ определится по формуле (11,5)

$$A = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b -kx\,dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{k}{2}(a^2 - b^2).$$

Следует иметь в виду, что работа упругой силы положительна, если тело движется в сторону убывания модуля упругой силы, и отрицательна, когда движение происходит в сторону возрастания модуля упругой силы.

**Задача 11,5.** Электрический точечный заряд $+e_1$ движется в электрическом поле, созданном точечным зарядом $+e$. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в пустоте численно определяется по формуле

$$F = \frac{e_1 e}{r^2}.$$



К задаче 11,5

Определить работу при перемещении заряда $e_1$ из точки $A$ в точку $B$, считая, что $A$ и $B$ находятся на прямой, проходящей через заряд $+e$.

**Решение.** Элементарная работа на перемещении $dr$ равна $\delta A = F\,dr = \frac{e_1 e}{r^2}\,dr$, а полная работа определится интегрированием.

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 e}{r^2}\,dr = e_1 e\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = e_1 e\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right);$$

$$A = e_1\left(\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках,— разность потенциалов или напряжение между точками $A$ и $B$.

При решении задачи можно было не составлять выражение элементарной работы, а сразу воспользоваться формулой (11,5), так как здесь известно аналитическое выражение силы: $F = \frac{e_1 e}{r^2}$. Это же замечание относится и к предыдущей задаче.

**Задача 11,6.** Тяжелая цепь длиною $L = 200$ *м* поднимается, навиваясь на ворот. Определить работу силы веса при поднятии цепи, пренебрегая размерами ворота, если погонный метр цепи весит 50 *кг*.

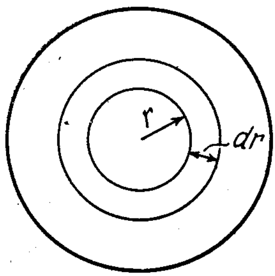
**Решение.** Пусть к некоторому моменту времени на ворот навернулся отрезок цепи длиной $x$. Тогда свешивается его часть длиной $L-x$. Весит эта часть $(L-x)\cdot 50$ *кг*. Элементарная работа силы веса на перемещении $dx$ будет равна

$$\delta A = -(L-x)\cdot 50\,dx.$$

(Знак минус поставлен потому, что сила веса направлена противоположно перемещению). Полную работу найдем по формуле (11,5) как интеграл от элементарной работы

$$A = \int_0^L -(L-x)\cdot 50\,dx = 50\frac{(L-x)^2}{2}\Big|_0^L = -25L^2 =$$
$$= -25\cdot 200^2 = -1\,000\,000 \text{ кг}\cdot\text{м}.$$

**Задача 11,7.** На вал, вращающийся с угловой скоростью $\omega$, насажен диск радиуса $R$, погруженный в жидкость. Считая, что сила трения окружающей жидкости о поверхность диска пропорциональна плотности жидкости $\rho$, квадрату скорости и площади соприкасания, определить момент сил трения относительно оси вала.



К задаче 11,7

**Решение.** Очевидно, что сила трения окружающей жидкости о поверхность диска будет меняться с глубиной. Подсчитаем сначала элементарную силу трения $dF$. На расстоянии $r$ от оси вала рассмотрим кольцо, внутренний радиус которого $r$, а внешний $r+dr$. Площадь этого кольца равна

$$\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\,dr + \pi\,dr^2.$$

При $dr$, стремящемся к нулю, $\pi\,dr^2$ — величина бесконечно малая высшего порядка малости, чем $dr$, а потому, пренебрегая ею, примем площадь кольца равной $2\pi r\,dr$. Линейная скорость $v=\omega r$. Квадрат этой скорости равен $\omega^2 r^2$, плотность жидкости — $\rho$. А потому, принимая коэффициент пропорциональности равным $k$, для элементарной силы трения $dF$ на расстоянии $r$ от оси вала получаем

$$dF = k\rho 2\pi r\,dr\omega^2 r^2,$$

а ее момент относительно оси вала

$$dm = r\,dF = (k\rho 2\pi r\,dr\omega^2 r^2)\,r;$$
$$dm = 2\pi k\rho\omega^2 r^4\,dr.$$

Полный момент сил трения найдем интегрированием этого выражения от 0 до $R$:

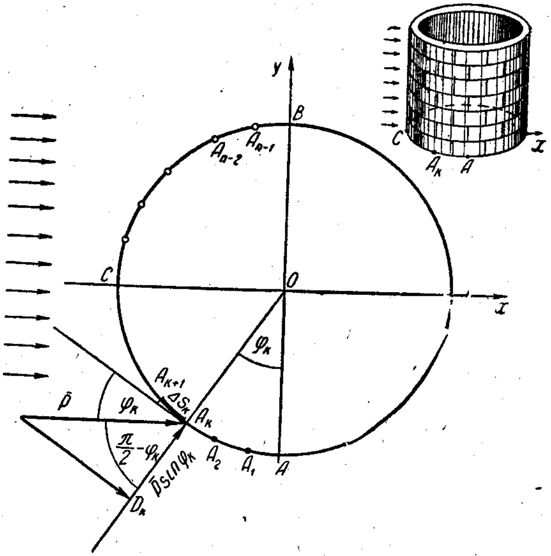
$$m = 2\pi k\rho\omega^2\int_0^R r^4\,dr = 2\pi k\rho\omega^2\frac{r^5}{5}\Big|_0^R = 2\pi k\rho\omega^2\frac{R^5}{5}.$$

Число это следует удвоить, принимая во внимание, что трутся обе поверхности диска. Поэтому полный момент сил трения

$$M = \frac{4}{5}\pi k\rho\omega^2 R^5.$$

При решении задач 11,8—11,15 следует иметь в виду, что давление — величина векторная.

**Задача 11,8.** Определить численное значение силы давления $\overline{p}$ ветра на стоящую вертикально цилиндрическую башню высотой $h$ *м* с круглым основанием радиуса $a$ *м*, если известно, что сила давления ветра на 1 *м*² плоской поверхности, расположенной перпендикулярно к его направлению, равна $p$ *кг*.



К задаче 11,8

**Решение.** На чертеже показано основание башни, направление ветра и расположение координатных осей. Дугу $ACB$ разделим на $n$ дуг точками $A_1, A_2, \ldots, A_\kappa, \ldots, A_{n-1}$ и рассмотрим полоски башни, опирающиеся на соответственные дуги. Если направление ветра не перпендикулярно поверхности полоски, то эта поверхность будет испытывать только часть давления, равную составляющей силы давления $\overline{p}$ по нормали к этой поверхности. Вычислим силу давления, которую испытывает полоска башни, опирающаяся на дугу $\Delta s_\kappa$. Обозначим через $\varphi_\kappa$ угол, который касательная в точке $A_\kappa$ дуги $A_\kappa A_{\kappa+1}$ составляет с направлением ветра. Тогда составляющая $\overline{D_\kappa A_\kappa}$ силы давления по нормали равна

$$\overline{p}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_\kappa\right) = \overline{p}\sin\varphi_\kappa.$$

Полоска башни, опирающаяся на дугу $\Delta s_\kappa$, имеет площадь, равную приближенно $h\,\Delta s_\kappa$ *м*², а потому она испытывает давление, равное

$$\overline{\Delta p_\kappa} = \overline{p}\sin\varphi_\kappa h\,\Delta s_\kappa.$$

Обозначим через $\Delta\varphi_к$ центральный угол, опирающийся на дугу $\Delta s_к$. Учитывая, что радиус окружности основания башни равен $a$, получим

$$\Delta s_к = a\Delta\varphi_к,$$

а сила давления ветра на полоску башни, опирающуюся на дугу

$$\overline{\Delta p_к} = \overline{p}\sin\varphi_к\, ha\Delta\varphi_к.$$

Определим проекции этой силы на координатные оси $Ox$ и $Oy$:

$$(\overline{\Delta p_к})_x = (pah\sin\varphi_к\Delta\varphi_к)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_к\right),$$

или

$$(\overline{\Delta p_к})_x = pah\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к;$$

$$(\overline{\Delta p_к})_y = (pah\sin\varphi_к\Delta\varphi_к)\cos\varphi_к = pah\sin\varphi_к\cos\varphi_к\,\Delta\varphi_к.$$

(Учащегося должен заинтересовать вопрос, почему от силы давления ветра $\overline{\Delta p_к}$ на полоску башни мы переходим к проекциям этой силы на координатные оси).

Суммы проекций по соответствующим координатным осям дадут приближенные значения проекции на эти оси силы давления $\overline{p}$ на всю башню.

$$\left.\begin{aligned} p_x &\approx \sum_{к=1}^{n} pah\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к = pah\sum_{к=1}^{n}\sin^2\varphi_к\Delta\varphi_к \\ p_y &\approx \sum_{к=1}^{n} pah\sin\varphi_к\cos\varphi_к\Delta\varphi_к = pah\sum_{к=1}^{n}\sin\varphi_к\cos\varphi_к\Delta\varphi_к \end{aligned}\right\} \quad (11{,}6)$$

(в обоих случаях постоянная величина $pah$, входящая в каждое слагаемое, вынесена за знак суммы).

Угол $\varphi$ отсчитывается от $OA$ и изменяется на дуге $ACB$ от 0 до $\pi$, а потому, переходя к пределу в последних равенствах (11,6) при условии, что число частей деления дуги $ACB$ на части неограниченно увеличивается, а все $\Delta\varphi_к$ стремятся к нулю, получим точные выражения для проекций силы давления на оси $Ox$ и $Oy$ в виде определенных интегралов:

$$p_x = pah\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi = pah\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \frac{pah}{2}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{pah\,\pi}{2}\,кг;$$

$$p_y = pah\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi = pah\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Итак, $p_x = \frac{pah\,\pi}{2}\,кг;\quad p_y = 0.$

Если известны проекции $a_x$ и $a_y$ вектора $\bar{a}$ на координатные оси, то его численное значение (модуль), как известно, находится по формуле $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$, а потому модуль силы давления $\bar{p}$ на всю башню равен

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \frac{pah\pi}{2} \text{ кг.}$$

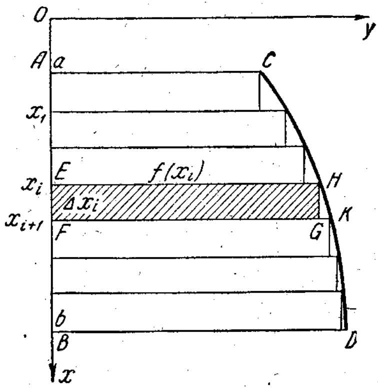
**Задача 11,9** (о давлении жидкости на погруженную в нее вертикальную стенку).

В жидкость, удельный вес которой равен $\gamma$, погружена вертикальная стенка. Определить численное значение (модуль) силы гидростатического давления жидкости на эту стенку (см. чертеж).

**Решение.** Из гидростатики известно, что давление жидкости на погруженную в нее горизонтальную пластинку численно равно весу столба жидкости, опирающегося на эту пластинку, т. е. произведению площади этой пластинки на ее расстояние от свободной поверхности жидкости и на удельный вес жидкости.

Если площадь пластинки $S$, ее расстояние от свободной поверхности жидкости $h$, а удельный вес жидкости $\gamma$, то модуль силы давления

$$P = Sh\gamma. \qquad (11,7)$$




К задаче 11,9

Но эта формула верна только для пластинки, занимающей в жидкости горизонтальное положение. Если же пластинка, погруженная в жидкость, занимает не горизонтальное положение, а, например, вертикальное, то ее различные точки находятся на различной глубине, а поэтому о расстоянии всей пластинки от свободной поверхности жидкости не имеет смысла говорить, и формула (11,7) для вычисления модуля силы давления на эту пластинку непригодна.

Отнесем пластинку $ABCD$ к прямоугольной системе координат (см. чертеж), причем ось $Oy$ расположим на поверхности жидкости. Абсциссы точек $A$ и $B$ соответственно равны $a$ и $b$, а линия $CD$ определяется уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на $n$ произвольных частей и построим прямоугольники, как показано на чертеже. Площадь пластинки $EFKH$ примем приближенно равной площади прямоугольника $EFGH$, т. е. произведению $f(x_i)\Delta x_i$. Чтобы вычислить приближенно величину давления на этот прямоугольник, повернем его вокруг стороны $EH$ так, чтобы он принял горизонтальное положение. Теперь уже к этой площадке применима формула (11,7), и *приближенно* величина давления жидкости на прямоугольник $EFGH$ будет равна

$$(f(x_i)\,\Delta x_i)\,x_i\gamma.$$

Эта величина тем меньше будет отличаться от истинной величины давления на пластинку $EFKH$, чем на большее число $n$ разделен отрезок $[a, b]$.

Поступая так же со всеми прямоугольниками, мы найдем, что приближенно модуль силы давления определяется интегральной суммой

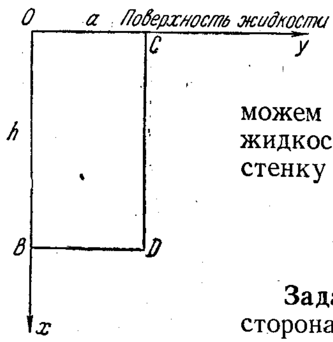
$$P \approx \gamma \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i)\,\Delta x_i$$

(постоянная величина $\gamma$ входит в каждое слагаемое, а потому вынесена за знак суммы). При составлении интегральной суммы мы точку на каждом частичном отрезке взяли в его левом конце. Как известно, на предел интегральной суммы это не повлияет.

За точное значение модуля силы давления примем предел, к которому стремится эта сумма, когда наибольший из отрезков $\Delta x_i$ стремится к нулю, а число $n$ этих отрезков неограниченно увеличивается

$$P = \gamma \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} x_i f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Так как $\Delta x_i \to 0$, то каждое произведение $x_i f(x_i)\,\Delta x_i$ — величина бесконечно малая, и здесь опять-таки мы имеем дело с определением предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.



К задаче 11,10

На основании формулы (10,2) мы можем записать, что модуль силы давления жидкости на вертикально погруженную в нее стенку равен

$$P = \gamma \int_a^b x f(x)\,dx. \qquad (11,8)$$

**Задача 11,10.** Прямоугольная пластинка со сторонами $a$ *дм* и $h$ *дм* вертикально погружена в жидкость удельного веса $\gamma$. Сторона длиной $a$ *дм* лежит на поверхности жидкости. Определить численное значение силы давления, испытываемого каждой стороной пластинки.

**Решение.** Применим формулу (11,8). В ней нижний предел интегрирования нужно взять равным нулю, верхний равен $h$, $f(x)=a$, а потому модуль силы давления

$$P=\gamma\int_0^h axdx=\gamma\frac{ah^2}{2}\ \text{кг}$$

(давление получилось в килограммах, так как стороны прямоугольника выражены в дециметрах).

При решении задачи значительно большую пользу принесло бы повторение рассуждений, проведенных в предыдущей задаче, чем использование готовой формулы (11,8).

**Задача 11,11.** При условиях предыдущей задачи определить, на какой глубине надо разделить прямоугольник горизонтальной прямой, чтобы давления на каждую из двух частей прямоугольника были равны между собой.

**Решение.** Проведем прямую, разделяющую треугольник на глубине $c\,(c<h)$. Тогда давление $p_1$ на верхнюю часть прямоугольника численно равно

$$p_1=\gamma\int_0^c axdx,$$

а давление $p_2$ на нижнюю его часть

$$p_2=\gamma\int_c^h axdx.$$

По условию задачи эти числа должны быть между собой равны, а потому

$$\gamma\int_0^c axdx=\gamma\int_c^h axdx.$$

Сокращая на $a\gamma$ и интегрируя, получим уравнение для определения неизвестной величины $c$:

$$\frac{c^2}{2}=\frac{h^2-c^2}{2};\ 2c^2=h^2;\ c=\frac{\sqrt{2}}{2}h.$$

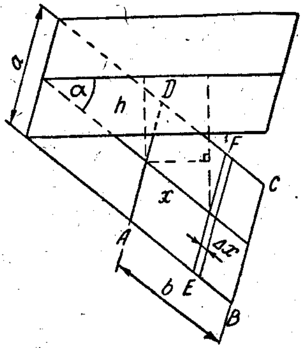
**Задача 11,12** (для самостоятельного решения).

Определить численное значение давления жидкости удельного веса $\gamma$ на одну из сторон прямоугольной пластинки, наклоненной к поверхности жидкости под углом $\alpha$, причем верхняя сторона

$AD$ длиной $a$ *дм* расположена горизонтально на глубине $h$ от поверхности жидкости. Длина другой стороны $AB$ прямоугольника — $b$ *дм* (см. чертеж).

Указание. На прямоугольнике $ABCD$ взять полоску шириной $\Delta x$ на расстоянии $x$ от стороны $AD$. Площадь этой полосы равна $a \cdot \Delta x$, а ее расстояние от поверхности жидкости равно $h + x \sin \alpha$. Давление, оказываемое жидкостью на эту полоску, приближенно равно

$$\gamma (h + x \sin \alpha)\, a \Delta x.$$




К задаче 11,12

**Ответ.** $p = \frac{ab\gamma}{2}(2h + b \sin \alpha)$ *кг*.

**Задача 11,13** (для самостоятельного решения).

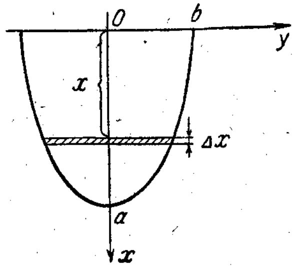
Плотина имеет форму половины эллипса, малая ось которого $2b$ лежит на поверхности жидкости. Большая ось эллипса — $2a$. Вычислить численное значение давления воды на плотину.

Указание. Если расположить оси, как это сделано на чертеже, то эллипс определится уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Вырежем полоску на глубине $x$ шириною $\Delta x$. Площадь этой полоски равна $2y\Delta x$. Величину $y$ определить из уравнения эллипса. Принять удельный вес воды $\gamma = 1$.

Численное значение давления равно

$$\frac{2b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$




К задаче 11,13

Можно было сразу воспользоваться готовой формулой (11,8), в которой взять $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

**Ответ.** Если полуоси эллипса выражены в дециметрах, то численно давление получится в килограммах

$$p = \frac{2}{3} a^2 b \text{ кг}.$$

Если заменить эллипс половиной круга ($a = b$) то

$$p = \frac{2}{3} a^3 \text{ кг}.$$

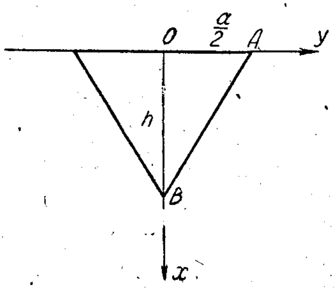
**Задача 11,14** (для самостоятельного решения).

Найти численное значение давления воды ($\gamma = 1$) на треугольные щиты, показанные на чертеже.

Указание. а) Уравнение $AB$: $y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2h}x$;

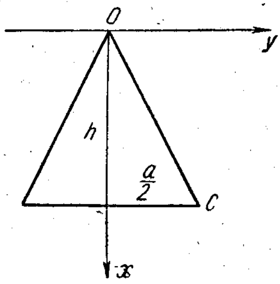
б) уравнение $OC$: $y = \frac{a}{2h}x$.

Ответ. а) $p = \frac{ah^2}{6}$; б) $p = \frac{ah^2}{3}$.




а

К задаче 11,14 а

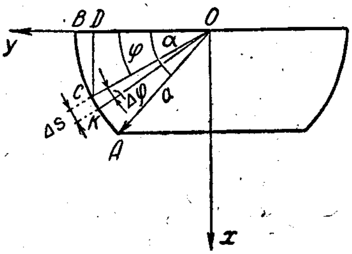



б

К задаче 11,14 б

**Задача 11,15** (для самостоятельного решения).

Поперечное сечение стенки резервуара, наполненного водой, представляет дугу $AB$ круга радиуса $a$ *дм*, центр $O$ которого лежит на поверхности воды, а центральный угол $AOB$ равен $\alpha$. Определить давление воды на эту дугу (см. чертеж).




К задаче 11,15

Указание. 1. Дугу $AB$ разделить на $n$ частей.

2. Учесть, что давление направлено по перпендикуляру к поверхности и численно равно произведению длины элемента $\Delta s$ на его глубину $DC$ и на удельный вес $\gamma$ жидкости.

3. Длина дуги окружности равна произведению ее радиуса на число радианов, содержащихся в центральном угле, опирающемся на эту дугу, т. е.

$$\Delta s = a\Delta\varphi,$$

$DC = a\sin\varphi$; $\gamma = 1$, а потому на элемент $\Delta s$ дуги $AB$ численное значение силы давления $\overline{\Delta p}$ приближенно равно

$$\Delta p = (a\sin\varphi)\, a\,\Delta\varphi = a^2 \sin\varphi\, \Delta\varphi.$$

4) Найти проекции $\Delta X$ и $\Delta Y$ силы $\overline{\Delta p}$ на оси $Ox$ и $Oy$:

$$\Delta X = (a^2 \sin\varphi\, \Delta\varphi) \cos(90^\circ - \varphi) = a^2 \sin^2\varphi\, \Delta\varphi;$$

$$\Delta Y = a^2 \sin\varphi \cos\varphi\, \Delta\varphi.$$

$$X = \int_0^\alpha a^2 \sin^2\varphi\, d\varphi;\quad Y = \int_0^\alpha a^2 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi;\quad p = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

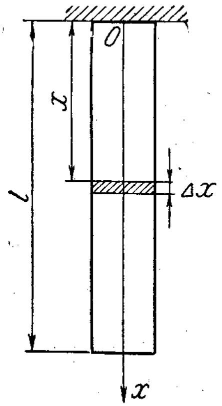
Как и в задаче 11,9, читателя должна заинтересовать причина, заставляющая перейти от элементарных давлений $\overline{\Delta p}$ к их проекциям, затем суммировать не элементарные давления, а их проекции, и только найдя их, определить численное значение самого давления.

**Ответ.** $p = \frac{a^2}{4}\sqrt{4\sin^4\alpha + (2\alpha - \sin 2\alpha)^2}$ *кг.*

**Задача 11,16.** Согласно закону Гука, удлинение $\Delta l$ стержня длиной $l$ постоянного сечения $F$ под действием растягивающей нормальной силы $P$ определяется формулой

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \qquad (11,9)$$

где $E$ — модуль упругости материала, из которого сделан стержень.




К задаче 11,16

Определить удлинение свободно подвешенного цилиндрического стержня длиной $l$ *см* и поперечного сечения $F$ *см*$^2$ под действием его собственного веса. Удельный вес материала стержня $\gamma$ *г/см*$^3$.

**Решение.** Разделим стержень на элементарные цилиндрические стержни. Эти элементы будут испытывать различные растяжения, так как они находятся под действием различных сил веса.

Вычислим по формуле (11,9) растяжение элементарного цилиндра высотой $\Delta x$, находящегося на расстоянии $x$ от места подвеса. На него действует сила веса, равная весу нижележащей части стержня. Длина этой части равна $(l - x)$, объём ее — $(l - x)F$, а вес — $(l - x)F\gamma$. Полагая в формуле (11,9) $l = \Delta x$; $P = (l - x)F\gamma$, получим, что растяжение элементарного цилиндра приближенно равно

$$\frac{(l - x)F\gamma\,\Delta x}{EF} = \frac{(l - x)\gamma\,\Delta x}{E}.$$

Суммируя растяжения этих элементарных цилиндров и переходя к пределу при условии, что число этих элементарных цилиндров неограниченно возрастает, а высота $\Delta x$ каждого из них неограниченно убывает, общее удлинение стержня найдем по формуле

$$\Delta l=\int_0^l \frac{(l-x)\gamma}{E}\,dx=-\frac{\gamma}{E}\frac{(l-x)^2}{2}\Bigg|_0^l.$$

**Ответ.**

$$\Delta l=\frac{\gamma l^2}{2E}\ см.$$

**Задача 11,17** (для самостоятельного решения).

Материальная точка движется по прямой с переменной скоростью, являющейся заданной непрерывной функцией времени $t$: $v=v(t)$. Определить путь, пройденный телом от момента времени $t_0$ до момента $T$.

Указание. Промежуток времени $[t_0,\ T]$ разделить на $n$ произвольных частей. Длина каждого промежутка времени

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}.$$

В каждом частичном промежутке времени выберем произвольный момент — $\tau_k$. (Момент $\tau_k$ может совпадать и с любым из концов отрезка времени $\Delta t_k$).

Вычислим скорость $v$ в этот момент времени. Получится число $f(\tau_k)$.

Принимаем, что за время $\Delta t_k$ движение происходит равномерно. Поскольку при равномерном прямолинейном движении путь, пройденный телом, равен произведению скорости на время, путь, пройденный за время $\Delta t_k$, будет приближенно равен $f(\tau_k)\,\Delta t_k$. Сложим пути, пройденные за все частичные отрезки времени.

Приближенное значение пути

$$S\approx\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta t_k. \qquad (11,10)$$

За точное значение пути $S$ следует принять предел интегральной суммы (11,10), когда наибольший из промежутков времени $\Delta t_k$ стремится к нулю:

$$S=\lim_{\max \Delta t_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta t_k.$$

На основании формулы (10,2) можно записать, что

$$S=\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt. \qquad (11,11)$$

Таким образом, если задан закон изменения скорости, то путь, пройденный телом, вычисляется с помощью определенного интеграла по формуле (11,11).

Когда $\max \Delta t_k \to 0$, то произведение $v(\tau_k)\,\Delta t_k$ — величина бесконечно малая. Определение искомой величины и в этой задаче свелось к отысканию предела суммы неограниченно возрастающего количества бесконечно малых величин.

**Задача 11,18** (для самостоятельного решения).

Вычислить путь, пройденный свободно падающим в пустоте телом за $T$ секунд, если известно, что скорость $v$ свободного падения в пустоте определяется формулой $v = gt$ (начальную скорость $v_0$ принимаем равной нулю).

**Ответ.** $S = \frac{gT^2}{2}$. Если $v_0 \neq 0$, то $v = v_0 + gt$, а $S = v_0 T + \frac{gT^2}{2}$.

**Задача 11,19** (для самостоятельного решения).

Дан неоднородный тонкий стержень длиной $L$. Определить массу этого стержня, зная, что в каждой его точке плотность $\mu$ есть заданная непрерывная функция абсциссы $x$ этой точки: $\mu = \mu(x)$.

Указание. Если бы стержень был однородным, то плотность $\mu$ во всех его точках была бы величиной постоянной, а его масса, учитывая, что по условию стержень тонкий, была бы равна произведению плотности $\mu$ на его длину $L$, т. е. $m = \mu L$.

Разделить длину стержня на $n$ произвольных частей. Вычислить массу каждой части, считая, что плотность каждой из частей постоянна, сложить полученные массы и перейти к пределу, устремляя к нулю наибольший из частичных отрезков, на которые разделен стержень.

**Ответ.** $m = \int\limits_0^L \mu(x)\,dx$.

## ДВЕНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям. Теорема о среднем значении.

### I. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

#### Краткие сведения из теории

Часто для упрощения вычисления интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{12,1}$$

приходится заменять независимую переменную величину $x$, полагая, что

$$x = \varphi(t). \tag{12,2}$$

Это приводит к формуле преобразования определенного интеграла при введении новой переменной

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (12,3)$$

При этом предполагается: 1) функция $f(x)$ — непрерывна на отрезке $[a, b]$; 2) функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ — непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$; 3) имеют место равенства $a = \varphi(\alpha)$: $b = \varphi(\beta)$; 4) при изменении новой переменной $t$ от $\alpha$ до $\beta$ функция $x = \varphi(t)$ изменяется всегда в одном и том же направлении от $\varphi(\alpha) = a$ до $\varphi(\beta) = b$, т. е. функция $x = \varphi(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ должна быть монотонной. (Это требование можно заменить другим: все значения функции $\varphi(t)$ должны находиться на отрезке $[a, b]$).

Из этой справки читатель видит, что замена переменной в определенном интеграле требует осторожности и обязательного выполнения всех перечисленных условий, налагаемых на функцию (12,2). При соблюдении этих требований важно отметить, что замена переменной в определенном интеграле приводит в общем случае к интегралу с новыми пределами интегрирования. Эти пределы находятся так: в (12,2) подставляется сначала нижний предел $a$ заданного интеграла и решается уравнение $a = \varphi(t)$. Значение $t$, найденное из него, и будет новым нижним пределом $\alpha$. Если этому уравнению удовлетворяет не одно, а несколько значений $t$, то за $\alpha$ можно принять любое из них. Затем для определения нового верхнего предела в (12,2) подставляется верхний предел $b$ заданного интеграла и решается уравнение $b = \varphi(t)$. Найденное из этого уравнения значение $t$ будет новым верхним пределом $\beta$. Если это уравнение имеет несколько корней, то за $\beta$ можно принять любой из них. Однако свобода выбора чисел $\alpha$ и $\beta$ ограничивается требованием, чтобы значения функции $\varphi(t)$ не выходили из отрезка $[a, b]$, в котором определена и непрерывна подынтегральная функция $f(x)$ (см. задачу 12,1).

Сделав замену переменной, изменив пределы интегрирования, после вычисления преобразованного определенного интеграла нет необходимости переходить к старой переменной, как это мы делали при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной.

Еще раз подчеркиваем, что подстановка (12,2) должна упростить вычисление интеграла (12,1).

Укажем также, что несоблюдение всех указанных требований, налагаемых на функцию (12,2), может привести к грубым ошибкам.

Во многих случаях приходится вместо подстановки (12,2), которая переменную интегрирования $x$ заменяет функцией новой переменной, вводить новую переменную $t$ как функцию старой переменной $x$, т. е. полагать

$$t = \omega(x).$$

В этом случае новые пределы интегрирования $\alpha = \omega(a)$, а $\beta = \omega(b)$. Если соотношение $t = \omega(x)$ разрешить относительно $x$, то окажется, что $x = \varphi(t)$, причем необходимо, чтобы для функции $\varphi(t)$ были соблюдены все указанные выше условия.

**Задача 12,1.** Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

**Решение.** Можно было бы воспользоваться известным из задачи 4,3 вычислением неопределенного интеграла $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ и, применяя формулу (10,2) Ньютона — Лейбница, найти искомый интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{a}{a} = \frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \frac{a^2\pi}{4}.$$

(Первое слагаемое $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}$ обращается в нуль как при верхнем, так и при нижнем пределах).

Вычислим теперь этот же интеграл с помощью замены переменной. Введем подстановку

$$x = a \sin t. \tag{12,4}$$

Прежде всего определим новые пределы интегрирования. Когда $x = 0$, из уравнения $0 = a \sin t$ получаем, что $t = k\pi$. Подставляя же в (12,4) вместо $x$ верхний предел $a$, получим: $a = a \sin t$; $\sin t = 1$; $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Из всех возможных значений $t$, удовлетворяющих уравнениям $a \sin t = 0$ и $a = a \sin t$, мы возьмем 0 и $\frac{\pi}{2}$ потому, что на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x = a \sin t$ удовлетворяет не только первым трем из указанных требований, что очевидно было сразу, но и четвертому, так как на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ она монотонно возрастает и ее значения сплошь заполняют первоначальный отрезок интегрирования $[0, a]$. Вместо этих значений можно было бы взять и любые другие, но такие, чтобы значения функции $x = a \sin t$ не выходили из отрезка $[0, a]$. В качестве таких значений можно взять, например, $\alpha = 2\pi$, $\beta = \frac{5}{2}\pi$. При изменении $t$ от $2\pi$ до $\frac{5}{2}\pi$ функция $x = a \sin t$ изменяется от 0 до $a$. Но взять значения $\alpha = \pi$,

$\beta = \frac{3}{2}\pi$ нельзя, так как тогда функция $x = a\sin t$ принимает значения не на отрезке $[0, a]$, на котором ведется вычисление заданного интеграла, а на отрезке $[0, -a]$.

Подынтегральная функция преобразуется так:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\cos t;\ dx = a\cos t\,dt.$$

Поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ответы, конечно, совпали.

**Задача 12,2.** Вычислить $\int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}\,dx$.

**Решение.** Преобразуем подкоренное выражение

$$2ax - x^2 = a^2 - (x^2 - 2ax + a^2) = a^2 - (x - a)^2$$

и введем подстановку

$$x - a = a\sin t;\ x = a + a\sin t; \tag{12,5}$$

$$dx = a\cos t\,dt;\ \sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} = a\cos t.$$

Подынтегральное выражение будет таким: $\sqrt{2ax - x^2}\,dx = a^2\cos^2 t\,dt$.

Теперь надо не забыть определить новые пределы интегрирования: сначала в подстановку (12,5) подставим нижний предел заданного интеграла $x = 0$, а потом верхний $x = 2a$, и получим: при $x = 0$ $0 = a + a\sin t$; $\sin t = -1$; $t = -\frac{\pi}{2}$; при $x = 2a$ $2a = a + a\sin t$; $2 = 1 + \sin t$; $\sin t = 1$; $t = \frac{\pi}{2}$. Решая уравнения $\sin t = -1$ и $\sin t = 1$, мы остановились на значениях $t = -\frac{\pi}{2}$ и $t = \frac{\pi}{2}$, так как на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция (12,5) монотонно возрастает и остальным требованиям она также удовлетворяет.

Таким образом, новыми пределами интегрирования будут $-\frac{\pi}{2}$ — нижний предел, $\frac{\pi}{2}$ — верхний. Поэтому

$$\int_0^{2a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi a^2}{2}.$$

**Задача 12,3** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^2-2ax+2a^2}}$.

Указание. $x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$.
Подстановка: $x-a=z$.

Пределы интегрирования: при $x=0$ получаем, $z=-a$, при $x=a$ $z=0$. Таким образом, новая переменная $z$ изменяется на отрезке $[-a, 0]$. Интеграл преобразуется к интегралу $\int\limits_{-a}^{0}\frac{dz}{\sqrt{z^2+a^2}}$.

**Ответ.** $\ln(\sqrt{2}+1)$.

**Задача 12,4** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_1^4 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

Указание. Подстановка: $x=z^2$ $(z>0)$.
Определяем новые пределы интегрирования:

при $x=1$ $1=z^2$; $z=1$;
» $x=4$ $4=z^2$; $z=2$.

Новая переменная $z$ изменяется на отрезке $[1; 2]$. Интеграл преобразуется к виду $2\int\limits_1^2\frac{z^2\,dz}{1+z}$.

**Ответ.** $1+\ln\frac{9}{4}$.

**Задача 12,5.** Вычислить $\int\limits_0^1\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.

Указание. Сделать подстановку: $x=\cos\theta$.

Пределы интегрирования:

при $x=0 \quad 0=\cos\theta;\ \theta=\frac{\pi}{2}$;

» $\ x=1 \quad 1=\cos\theta;\ \theta=0.$

Новая переменная изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\ 0\right]$.

Интеграл приводится к виду $-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta.$

(Перемена местами пределов интегрирования меняет знак определенного интеграла на противоположный)

**Ответ.** $\frac{\pi}{2}-1.$

**Задача 12,6.** Вычислить $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$

**Решение.** Сделаем подстановку:

$$x=\pi-z. \tag{12,6}$$

Новые пределы интегрирования:

при $x=0 \quad 0=\pi-z;\ z=\pi$;

» $\ x=\pi \quad \pi=\pi-z;\ z=0.$

Таким образом, новая переменная изменяется на отрезке $[\pi,\ 0]$. Подстановка (12,6) поменяла пределы местами. Учитывая, что из (12,6) $dx=-dz$, данный интеграл

$$I=-\int\limits_{\pi}^{0}\frac{(\pi-z)\sin(\pi-z)}{1+\cos^2(\pi-z)}\,dz=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-z)\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz=$$

$$=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz-\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz.}_{I}$$

Но $\int\limits_0^{\pi}\frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz$ равен искомому, потому что по сравнению с ним здесь изменилось только название переменной ($z$ вместо $x$).

Поэтому последнее равенство можно переписать так:

$$I=\pi\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz-I,$$

т. е.

$$2I = \pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz; \quad I = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^\pi \frac{\sin z}{1 + \cos^2 z}\, dz =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} (\cos z) \Big|_0^\pi = -\frac{\pi}{2} [\operatorname{arctg} (\cos \pi) - \operatorname{arctg} (\cos 0)] =$$

$$= -\frac{\pi}{2} [\operatorname{arctg} (-1) - \operatorname{arctg} 1] = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

**Ответ.** $I = \frac{\pi^2}{4}$.

**Задача 12,7.** Вычислить $\displaystyle\int\limits_{\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}}$.

**Решение.** Применим подстановку:

$$x^2 = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta. \tag{12,7}$$

Отсюда следует:

$$2x\, dx = -2a^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta + 2b^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta;$$

$$x\, dx = (b^2 - a^2) \sin\theta \cos\theta\, d\theta; \tag{12,8}$$

$$x^2 - a^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta - a^2 = b^2 \sin^2\theta + a^2 (\cos^2\theta - 1) =$$
$$= b^2 \sin^2\theta - a^2 \sin^2\theta = (b^2 - a^2) \sin^2\theta;$$

$$b^2 - x^2 = b^2 - a^2 \cos^2\theta - b^2 \sin^2\theta = b^2 (1 - \sin^2\theta) - a^2 \cos^2\theta =$$
$$= b^2 \cos^2\theta - a^2 \cos^2\theta = (b^2 - a^2) \cos^2\theta;$$

$$\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)} = \sqrt{(b^2 - a^2) \sin^2\theta\, (b^2 - a^2) \cos^2\theta} =$$
$$= (b^2 - a^2) \sin\theta \cos\theta.$$

При учете (12,8) подынтегральное выражение станет равным $d\theta$. Теперь определим новые пределы интегрирования.

При нижнем пределе $x = \frac{\sqrt{3a^2 + b^2}}{2}$ имеем из (12,7):

$$\frac{3a^2 + b^2}{4} = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta;$$

$$3a^2 + b^2 = 4a^2 (1 - \sin^2\theta) + 4b^2 \sin^2\theta = 4a^2 - 4a^2 \sin^2\theta + 4b^2 \sin^2\theta;$$

$$b^2 - a^2 = 4 (b^2 - a^2) \sin^2\theta; \quad \sin^2\theta = \frac{1}{4}; \quad \sin\theta = \frac{1}{2}; \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

При верхнем пределе $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, используя (12,7), получим:

$$\frac{a^2+b^2}{2}=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta;$$

$$a^2+b^2=2a^2(1-\sin^2\theta)+2b^2\sin^2\theta;$$

$$a^2+b^2=2a^2-2a^2\sin^2\theta+2b^2\sin^2\theta;$$

$$b^2-a^2=2(b^2-a^2)\sin^2\theta;\quad \sin^2\theta=\frac{1}{2};\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\theta=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, новая переменная $\theta$ изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right]$, а исходный интеграл

$$I=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

**Ответ.** $I=\frac{\pi}{12}$.

**Задача 12,8** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

$$1)\ I_1=\int\limits_1^2\frac{dx}{x(1+x^4)};\quad 2)\ I_2=\int\limits_3^{10}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}};\quad 3)\ \int\limits_0^1\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Указания. 1) Подстановка: $x=\frac{1}{\sqrt[4]{t-1}}$. Здесь можно вообще легко избежать подстановки, если подынтегральную функцию представить в виде

$$\frac{1}{x(1+x^4)}=\frac{1+x^4-x^4}{x(1+x^4)}=\frac{1+x^4}{x(1+x^4)}-\frac{x^4}{x(1+x^4)}=\frac{1}{x}-\frac{x^3}{1+x^4}.$$

Новые пределы интегрирования: 2 и $\frac{17}{16}$;

$$I_1=-\frac{1}{4}\int\limits_2^{\frac{17}{16}}\frac{dt}{t}.$$

2) Подстановка: $x+6=z^2$. Новые пределы интегрирования: нижний $z=3$, верхний $z=4$; $x-1=z^2-7$,

**Ответ.** 1) $\frac{1}{4}\ln\frac{32}{17}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\frac{16+5\sqrt{7}}{9}$; 3) $\frac{5}{3}-\ln 4$.

**Задача 12,9** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$ (подстановка: $x = z^2$);

2) $\int\limits_1^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2\,dx}{13-6x^3+x^6}$ (подстановка: $x^3 = z$);

3) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$ (подстановка: $1+x^2 = z^2$).

**Ответ.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{12}$; 3) $\frac{58}{15}$.

**Задача 12,10** (для самостоятельного решения).

Доказать, что интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ может быть преобразован в интеграл с заданными пределами $\alpha$ и $\beta$ при помощи подстановки

$$x = \frac{b-a}{\beta-\alpha}t + \frac{a\beta - b\alpha}{\beta-\alpha},$$

и указать подстановку, которая преобразует этот интеграл в интеграл с пределами 0 и 1.

## II. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Формула интегрирования по частям для определенных интегралов имеет вид

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du \qquad (12,9)$$

в предположении, что функции $u$ и $v$ имеют непрерывные производные на отрезке интегрирования.

Применение формулы (12,9) мало чем отличается от применения соответствующей формулы для неопределенного интеграла. Поэтому мы ограничимся небольшим числом упражнений

**Задача 12,11.** Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

**Решение.** 1) $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \arcsin x & du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = x \end{array}\right|$$

$= 1 \cdot \arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0 + \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$, так как

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$2)\ \int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx =$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = x\,dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

**Задача 12,12** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_1^e \ln^2 x\, dx; \quad 2)\ \int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^5}\, dx; \quad 3)\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x\, dx; \quad 4)\ \int\limits_0^1 (\arcsin x)^2\, dx.$$

**Ответ.** 1) $e-2$; 2) $\frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$; 3) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$;

4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

## III. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ

### Краткие сведения из теории

Вводя понятие об определенном интеграле, мы произвольным образом делили отрезок интегрирования $[a, b]$ на $n$ частей, и в произвольной точке $\xi_i$ каждого частичного отрезка вычисляли значение функции $f(x)$. При этом получались числа $f(\xi_i)$. Очевидно, самым простым способом будет разложение отрезка $[a, b]$ на части, равные между собой. В таком случае длина каждой из них будет равна $\frac{b-a}{n}$, интегральная сумма примет вид

$$\frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)],$$

и ее предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)]=\int_a^b f(x)\,dx,$$

или

$$(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}=\int_a^b f(x)\,dx.$$

После деления обеих частей этого равенства на $b-a$ получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (12,10)$$

Число $\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)}{n}$ есть среднее арифметическое чисел $f(\xi_1), f(\xi_2), \ldots, f(\xi_n)$, а потому и правую часть $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ формулы (12,10) называют средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Среднее значение функции $f(x)$ обозначается через $f(c)$, и имеет место формула

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (12,11)$$

которая и выражает теорему о среднем значении. При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Итак, по определению, *среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равно определенному интегралу от этой функции, вычисленному в пределах от $a$ до $b$ и разделенному на длину этого отрезка.*

**Задача 12,13.** Найти среднее значение функции $y=\sin 3x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

**Решение.** По формуле (12,11), полагая в ней $a = 0$; $b = \frac{\pi}{3}$; $f(x) = \sin 3x$, получим, что среднее значение функции

$$f(c) = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - 0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\, dx = -\frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\cos 3\frac{\pi}{3} - \cos 0\right] = -\frac{1}{\pi}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{1}{\pi}(-1 - 1) =$$

$$= \frac{2}{\pi} = 0{,}6366.$$

**Задача 12,14.** На отрезке $AB$ длиною $a$ *см* взята точка $P$. Найти среднее значение $S_m$ площадей прямоугольников, построенных на отрезках $AP$ и $PB$ как на сторонах.

**Решение.** Примем точку $A$ за начало отсчета. Пусть точка $P$ находится на расстоянии $x$ от $A$. Тогда $AP = x$, а $PB = a - x$. Площадь прямоугольника, построенного на $AP$ и $PB$ как на сторонах равна $x(a - x)$.

По формуле (12,11), полагая в ней нижний предел равным 0, а верхний $a$, находим среднее значение площадей

$$S_m = \frac{1}{a}\int\limits_0^a x(a - x)\, dx = \frac{1}{a}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{1}{a}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^2}{6}.$$

Итак, $S_m = \frac{a^2}{6}$ *см*$^2$.

**Задача 12,15** (для самостоятельного решения).

Чему равно среднее значение обратных величин всех вещественных чисел, лежащих между $a$ и $b$ $(a < b)$? Рассмотреть частный случай: $b = 2a$.

Указание. Обозначить обратную величину вещественного числа через $\frac{1}{x}$, а искомую — через $m$.

**Ответ.** $m = \frac{1}{b - a}\ln\frac{b}{a}$. При $b = 2a$ $m = \frac{1}{a} \cdot 0{,}69315$ $(\ln 2 = 0{,}69315)$.

**Задача 12,16** (для самостоятельного решения).

Если тело падает свободно вблизи поверхности земли без начальной скорости, то его скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2gS}$, где $S$ — путь, пройденный от начала падения. Найти среднюю скорость $v_m$ на пути $S_1$, пройденном от начала падения.

**Ответ.** $v_m = \frac{1}{S_1}\int\limits_0^{S_1} \sqrt{2gS}\, dS$; $\quad v_m = \frac{2}{3} v_1$, где $v_1 = \sqrt{2gS_1}$ — скорость в момент, когда пройденный путь равен $S_1$.

**Задача 12,17** (для самостоятельного решения).

Найти среднюю длину $\rho_m$ радиусов кривизны одной арки циклоиды.

Уравнение циклоиды

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Указание. Радиус кривизны циклоиды равен $4a\left|\sin \frac{t}{2}\right|$ (см. И. А. Каплан. «Практические занятия по высшей математике», ч. II, стр. 291, формула (36,27).

**Ответ.** $\rho_m = \frac{2a}{\pi}$.

**Задача 12,18.** В динамомашине электродвижущая сила переменного тока выражается формулой

$$E = E_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

где $T$ — продолжительность периода в *сек*;

$E_0$ — максимальное значение (амплитуда) электродвижущей силы.

Определить среднее значение $E_m$ электродвижущей силы и среднее значение ее квадрата $(E^2)_m$ в течение одного полупериода от $t = 0$ до $t = \frac{T}{2}$.

**Ответ.** 1) $E_m = 0{,}6366E_0$; 2) $(E^2)_m = \frac{E_0^2}{2}$.

## ТРИНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ [1]

Содержание: Несобственные интегралы по бесконечному интервалу и от разрывных функций. Принцип сравнения несобственных интегралов с положительными подынтегральными функциями.

### Краткие сведения из теории

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ во всем предыдущем рассматривался при следующих предположениях: 1) отрезок $[a; b]$ интегрирования конечен и 2) подынтегральная функция на этом отрезке непрерывна. При таких предположениях этот интеграл называется интегралом в «собственном смысле», или «собственным» интегралом. В том же случае, когда отрезок интегрирования бесконечен или

[1] Без ущерба для последующего задачи этого практического занятия могут решаться после шестнадцатого практического занятия.

конечен, но подынтегральная функция на этом отрезке терпит разрыв, интеграл называется интегралом в «несобственном смысле», или «несобственным» интегралом.

Каждый из названных двух случаев рассматривается на этом практическом занятии.

## I. ИНТЕГРАЛ, РАСПРОСТРАНЕННЫЙ НА БЕСКОНЕЧНЫЙ ПРОМЕЖУТОК (НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ)

### Определение интеграла с бесконечными пределами

В этом разделе считается, что $f(x)$ в промежутке $[a, +\infty]$ непрерывна. Интегралом от $f(x)\,dx$ между пределами $a$ и $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{13,1}$$

называется предел интеграла от $f(x)\,dx$, взятого в пределах $a$ и $N$, когда $N$ стремится к $+\infty$, т. е.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_a^N f(x)\,dx. \tag{13,2}$$

Интеграл (13,1) с бесконечным верхним пределом — *несобственный* интеграл.

Если существует определенный конечный предел в правой части (13,2), то несобственный интеграл (13,1) называется *сходящимся*, а функция $f(x)$ в этом случае называется интегрируемой на бесконечном промежутке $[a, +\infty]$.

Если же этот предел бесконечен или не существует, то интеграл называется *расходящимся*.

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ определяется аналогично:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)\,dx; \tag{13,3}$$

а интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ N\to+\infty}}\int_A^N f(x)\,dx, \tag{13,4}$$

при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{13,5}$$

где $a$ — любое число.

Если удается найти первообразную функцию $F(x)$ для подынтегральной $f(x)$, то записи можно расположить так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} F(x)\Big|_a^N =$$

$$= \lim_{N\to+\infty} [F(N) - F(a)] = \lim_{N\to+\infty} F(N) - F(a). \qquad (13,6)$$

Очевидно, что несобственный интеграл (13,1) существует, если существует предел $\lim\limits_{N\to+\infty} F(N)$.

Введем обозначение $\lim\limits_{N\to+\infty} F(N) = F(+\infty)$ (и аналогично: $\lim\limits_{N\to-\infty} F(N) = F(-\infty)$).

Тогда (13,6) можно переписать так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} F(N) - F(a) = F(+\infty) - F(a).$$

Разность же $F(+\infty) - F(a)$ можно записать в виде $F(x)\Big|_a^{+\infty}$, в таком случае вычисления располагают следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (13,7)$$

понимая, что $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Если отыскать первообразную функцию для $f(x)$ трудно или если она в конечном виде не может быть вычислена, то существуют признаки, позволяющие решить вопрос о сходимости или расходимости интеграла (13,1).

### Признаки сравнения

1. Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ для всех значений $x$ из полуотрезка $[a, +\infty]$ не принимают отрицательных значений и к тому же

$$f(x) \leqslant \varphi(x), \qquad (13,8)$$

то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится, если расходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. Если при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = c, \qquad (13,9)$$

причем $c > 0$, $c \neq \infty$ и $f(x) \neq 0$ для всех достаточно больших $x$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3. Если сходится $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$), то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} kf(x)dx$, где $k$ — величина постоянная.

Эти признаки распространяются и на интегралы вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, но относятся только к указанным выше функциям.

4. Для решения вопроса о сходимости интеграла (13,1) в том случае, когда функция $f(x)$ является знакопеременной в промежутке $[a, +\infty]$, можно применить такую теорему:

Если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ от абсолютной величины функции $f(x)$ сходится, то сходится и интеграл (13,1).

**Задача 13,1.** Вычислить

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}. \tag{13,10}$$

**Решение.** По определению, применяя запись (13,7), полагая $p \neq 1$, имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = -\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{p-1}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, & \text{если } p > 1; \\ +\infty, & \text{если } p < 1. \end{cases}$$

Значит, при $p > 1$ интеграл сходится, а при $p < 1$ — расходится. (Первый ответ получен так: если $p > 1$, то $p - 1 > 0$, и если $x \to +\infty$, то $x^{p-1} \to +\infty$, а дробь $\frac{1}{x^{p-1}} \to 0$.

Второй ответ объясняется так: если $p < 1$, то $p - 1 < 0$, а $1 - p > 0$. Тогда $x^{p-1} = \frac{1}{x^{1-p}} \to 0$, когда $x \to +\infty$, т. е. величина $x^{p-1}$ — бесконечно малая. Поэтому величина $\frac{1}{x^{p-1}}$, которая нас интересует, — величина бесконечно большая).

Осталось рассмотреть случай $p = 1$:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

Таким образом, при $p = 1$ интеграл (13,9) расходится. Так как нам придется обращаться к этому интегралу, то сделаем общее заключение.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится, когда $p \leqslant 1$.

Этим интегралом часто пользуются, применяя признак сравнения, для решения вопроса о сходимости интеграла.

**Задача 13,2.** Вычислить интегралы:

$$1) \int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\,dx; \quad 2) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{px}\,dx. \qquad (13,11)$$

**Решение.** 1) Интеграл $I_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\,dx = -\frac{1}{p} e^{-px} \Big|_0^{+\infty} =$

$$= -\frac{1}{p} \lim_{x \to +\infty} (e^{-px} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{если } p > 0; \\ +\infty, & \text{если } p < 0. \end{cases}$$

При $p > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-px} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{px}} = 0$, так как $e^{px} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. При $p < 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-px} = +\infty$.

**Заключение.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}\,dx$ при $p > 0$ сходится, а при $p < 0$ расходится.

2) Второй из интегралов (13,11) сводится к первому подстановкой $x = -y$ (сделайте это преобразование самостоятельно), а потому $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{px}\,dx$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p < 0$.

**Задача 13,3.** Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

**Решение.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x - \lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x =$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Можно было бы записи вести так:

$$\operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Задача 13,4.** Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx$.

**Решение.** $\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x + 1$.

Но $\cos x$ при $x \to +\infty$ не стремится ни к какому пределу, совершая колебания от $-1$ к $+1$, а потому интеграл расходится. Этот случай отличается от рассмотренного в задаче 13,2 при $p < 0$ тем, что там имелся бесконечный предел, а здесь его вовсе нет.

Записи в этом примере можно было вести и так:

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{+\infty} = -\cos(+\infty) + 1,$$

но $\cos(+\infty)$ числового значения не имеет.

**Задача 13,5.** Решить вопрос о сходимости интеграла $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx\,dx$ и вычислить его $(a > 0)$.

**Решение.** Вопрос о сходимости этого интеграла решается просто. Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx$ при $a > 0$ сходится (см. задачу 13,2), а $|e^{-ax} \sin bx| \leqslant e^{-ax}$, то на основании признака сравнения сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx\,dx|$. Применяя пункт 4 (стр. 191), заключаем, что сходится и рассматриваемый интеграл. Требуется не только решить вопрос о сходимости этого интеграла принципиально, но и вычислить его.

Пользуясь справочником (а этого избегать не следует), или применяя дважды интегрирование по частям, легко показать, что для функции $e^{-ax} \sin bx$ первообразная функция

$$F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}.$$

Поэтому

$$I = -\lim_{x\to+\infty} \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

так как под знаком предела числитель дроби — величина ограниченная, а $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ при $a > 0$. Величина же $\frac{b}{a^2 + b^2}$ есть $F(0)$.

**Задача 13,6** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$.

Ответ. $\frac{a}{a^2+b^2}$.

**Задача 13,7** (для самостоятельного решения).

Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2ab}$.

**Задача 13,8** (для самостоятельного решения).

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

Указание. Воспользуйтесь справочником для вычисления неопределенного интеграла $\int \frac{dx}{1+x^4}$ или найдите первообразную функцию самостоятельно.

Должно получиться

$$F(x)=\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right].$$

Ответ. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

**Задача 13,9.** Вычислить $I_n=\int\limits_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,dx$ ($n>0$ и целое). (Индекс $n$ у $I_n$ равен показателю степени буквы $x$ в подынтегральной функции).

**Решение.** Применим формулу интегрирования по частям

$$I_n=\int\limits_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,dx=-x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx=$$

$$\left|\begin{array}{l|l} u=x^n & du=nx^{n-1}\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx & v=-e^{-x}\end{array}\right|$$

$$=-\lim_{x\to+\infty} x^ne^{-x}+nI_{n-1}.$$

Для вычисления $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}$ применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} =$$
$$= \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Таким образом, $I_n = nI_{n-1}$. Применяя последовательно эту рекуррентную формулу, найдем

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = n(n-1)(n-2)I_{n-3} = \ldots =$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ 2\cdot 1\cdot I_0 = n!I_0.$$

Но, как легко видеть, $I_0 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty}[e^{-x} - 1] = 1$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Таким образом,

$$I_n = n!$$

**Задача 13,10.** Доказать, что $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится.

**Решение.** Этот интеграл имеет важное значение в теории вероятностей и называется интегралом вероятностей. В данном случае $\int e^{-x^2}\,dx$ через элементарные функции не выражается.

Для решения поставленного вопроса используем признак сравнения. Для этого рассмотрим выражение $x^2 - 2x + 1$. Ясно, что

$$x^2 - 2x + 1 \geqslant 0;\quad -2x + 1 \geqslant -x^2,\ \text{или}\ -x^2 \leqslant -2x + 1,\ \text{а потому}\ e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1},\ \text{или}\ e^{-x^2} \leqslant e^{-2x}\cdot e.$$

Из задачи 13,2 следует, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx$ сходится, значит, на основании п. 3 (стр. 191) сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot e\,dx$.

А так как $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x}\cdot e$, то на основании признака сравнения п. 1 (стр. 190) заключаем, что сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Заменяя в этом интеграле $x$ на $-y$, приходим к выводу, что сходится и $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$ (название переменной интегрирования не изменяет величину определенного интеграла). Из сходимости рассмотренных двух интегралов следует, что сходится также и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

**Задача 13,11** (для самостоятельного решения).

Доказать, что интегралы $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{x}{c^2+x^2}\,dx$ и $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{c^2+x^2}$ расходятся.

Указание. Вычислить первообразные функции.

После того как доказана расходимость первого интеграла, расходимость второго легко показать на основании признака сравнения.

**Задача 13,12** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx;\quad 2)\ \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx.$$

Указание. 1) Интегрировать по частям и принять во внимание, что $-\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x)^2}\Bigg|_0^{+\infty} = 0$.

2) Положить $x = t^2$. Получится $2\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}$ и интегрировать по частям.

**Ответ.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

**Задача 13,13.** Доказать, что $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ расходится.

**Решение.** Воспользуемся формулой (13,9). Сравним заданный интеграл с интегралом (13,10) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, в котором подынтегральная функция равна $\frac{1}{x^p}$.

Полагаем, что в (13,9) $\varphi(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$, а $f(x) = \frac{1}{x^p}$ (при $x \geqslant 1$ $\varphi(x) > 0$ и $f(x) > 0$ формула (13,9) применима), тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{x}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} x^{p-1}\cdot \operatorname{arctg} x.$$

Определим теперь $p$ так, чтобы этот предел был конечным и не равным нулю. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, то определяемый предел будет иметь конечное значение, не равное нулю, только при $p-1=0$, т. е. при $p=1$ $\left(\text{и этот предел будет равен } \frac{\pi}{2}\right)$.

Но при $p=1$ функция $f(x)=\frac{1}{x}$, а $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, а потому расходится и исследуемый интеграл (см. п. 2, стр. 190).

Решим две задачи физики, которые приводят к вычислению интеграла по бесконечному промежутку.

**Задача 13,14.** В начале координат $O$ находится масса $m$, которая притягивает по закону Ньютона с силой, модуль которой $F=\frac{m}{x^2}$, материальную точку $M$ единичной массы, находящуюся на оси $Ox$ на расстоянии $x$ от начала координат.

Вычислить работу $A$, которую произведет эта сила при перемещении точки $M$ в бесконечность из положения $x=a$.

Под перемещением точки в бесконечность следует понимать удаление ее на такое расстояние, что сила $\bar{F}$ уже не оказывает на нее действия.

**Решение.** Так как сила притяжения направлена к началу координат, т. е. против движения, то работа будет отрицательной. На основании формулы (11,5), принимая верхний предел равным $+\infty$, получаем

$$A=\int\limits_a^{+\infty} -\frac{m}{x^2}\,dx=\frac{m}{x}\Bigg|_a^{+\infty}=-\frac{m}{a}.$$

**Задача 13,15.** Согласно закону Био—Савара, модуль силы $\bar{F}$, с которой на магнитный полюс массы $1$ действует конечный прямолинейный отрезок тока, вычисляется по формуле

$$F=\int\limits_{S_1}^{S_2} \frac{aI}{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}\,ds,$$

где $I$ — сила тока;

$a$ — расстояние от магнитного полюса до прямолинейного отрезка, по которому протекает ток;

$ds$ — элемент тока.

Вычислить модуль силы $\bar{F}$ в предположении, что проводник имеет бесконечно большую длину.

**Решение.** Прежде всего сделаем оговорку: проводников бесконечно большой длины не бывает. Если проводник очень длинный, то его приближенно можно рассматривать как бесконечно большой. В этом случае модуль силы $\bar{F}$

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{al}{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}}\, ds.$$

Легко показать, что подстановка $s = a\operatorname{tg} t$ приведет задачу к вычислению интеграла

$$F = \frac{l}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = \frac{l}{a}\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l}{a}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2l}{a}.$$

**Задача 13,16** (для самостоятельного решения). Исследовать сходимость интегралов:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 5x + 3}};\quad 2)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 + 5}}.$$

Указание. Каждый из интегралов представить в виде суммы двух интегралов, из которых первый берется по интервалу (0,1), а второй — по интервалу $(1, +\infty)$.

За интеграл сравнения взять (13,10)[1], $f(x) = \frac{1}{x^p}$, а $\varphi(x)$ — подынтегральная функция.

В первом интеграле $\sqrt{x^3 + 5x + 3} = x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}$, во втором $\sqrt[3]{x^2 + 5} = x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{1 + \frac{5}{x^2}}$.

При отыскании предела (13,9) для первого интеграла окажется, что он имеет конечное и отличное от нуля значение при $p = \frac{3}{2}$, а для второго интеграла $p = \frac{2}{3}$. Поэтому, используя интеграл сравнения (13,10) и п. 2 (стр. 191), заключаем, что первый интеграл сходится, а второй расходится.

---

[1] Поэтому и следует интервал интегрирования $(0, +\infty)$ представить в виде суммы двух интервалов: (0, 1) и $(1, +\infty)$.

## II. ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

а) Может оказаться, что в интеграле

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{13,12}$$

функция $f(x)$ неограниченно возрастает, т. е. $f(x) \to \pm\infty$, когда $x$ приближается к одному из пределов интегрирования.

Если это имеет место, когда $x \to b$, а $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ определяется так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_a^{b-\varepsilon} = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon) - F(a). \tag{13,13}$$

Аналогично находят этот интеграл и в том случае, когда при $x \to a$ подынтегральная функция $f(x) \to \pm\infty$. При этом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \\ = F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon). \tag{13,14}$$

Если в (13,13) и (13,14) конечные пределы существуют, то интеграл (13,12) называется сходящимся. Если же эти пределы бесконечны или вовсе не существуют, то интеграл (13,12) называется расходящимся.

Таким образом, в обоих рассматриваемых случаях отбрасывают тот конец отрезка интегрирования, на котором подынтегральная функция перестает быть ограниченной, и переходят к пределу.

б) Если подынтегральная функция перестает быть ограниченной внутри отрезка интегрирования, например, при $x = c$, то эту точку «вырезают», а интеграл (13,12) определяют в предположении, что $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, так:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{c+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(c-\varepsilon) - F(a) + \\ + F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(c+\varepsilon). \tag{13,15}$$

Если пределы в (13,15) существуют и конечны, то интеграл (13,12) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

**Задача 13,17.** Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

**Решение.** При $x \to 0$, т. е. при приближении $x$ к нижнему пределу, подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ неограниченно возрастает. Здесь $x = 0$ особая точка. По (13,14) имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2 \cdot 1 - \lim_{\varepsilon \to +0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Интеграл сходящийся.

**Задача 13,18.** Вычислить $\int\limits_0^2 \frac{dx}{2-x}$.

**Решение.** Когда $x$ приближается к верхнему пределу ($x \to 2$), подынтегральная функция $\frac{1}{2-x} \to +\infty$. Точка $x = 2$ — особая. На основании (13,13) имеем

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\varepsilon \to +0} [-\ln(2-x)]\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln(2-2+\varepsilon) + \ln 2 = -\lim_{\varepsilon \to +0} \ln(+\varepsilon) + \ln 2 = +\infty.$$

Интеграл расходящийся.

**Задача 13,19** (для самостоятельного решения).

Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

Особые точки: 1) $x = 2$; 2) $x = 1$; 3) $x = 1$.

**Ответ.** 1) $2\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) интеграл расходится. Первообразная функция $\ln \ln x$.

**Задача 13,20** (для самостоятельного решения).

Доказать, что интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, где $a < b$, а $p = \text{const}$, сходятся при $p < 1$ и расходятся при $p \geqslant 1$.

**Задача 13,21.** Вычислить $I=\int\limits_0^1 \ln x\,dx$.

**Решение.** Здесь особенность при $x=0$. Интеграл заменим по формуле (13,14).

$$I=\int\limits_0^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}[x\ln x-x]\Big|_\varepsilon^1=$$
$$=-1-\lim_{\varepsilon\to+0}(\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon).$$

Но $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon=0$ $\left(\text{применить правило Лопиталя к } \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}\right)$, а потому $I=-1$.

**Задача 13,22.** Вычислить: 1) $I=\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}$;

2) $I=\int\limits_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

**Решение.** 1) Когда $x$ приближается к нижнему пределу, подынтегральная функция $\frac{1}{x\sqrt{2x^2-x-1}}$ неограниченно возрастает. Особая точка $x=1$.

Отыщем первообразную функцию для подынтегральной с помощью подстановки $x=\frac{1}{z}$. Окажется, что $\int\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}=$ $=-\arcsin\frac{x+2}{3x}$;

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2\frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}}=-\lim_{\varepsilon\to+0}\arcsin\frac{x+2}{3x}\Big|_{1+\varepsilon}^2=$$
$$=-\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

2) Решите эту задачу самостоятельно.

**Ответ.** $\frac{\pi^2}{8}$.

Чтобы закончить практическое занятие, рассмотрим пример, в котором подынтегральная функция неограниченно возрастает при некотором значении $x$ внутри отрезка интегрирования.

**Задача 13,23.** Вычислить $\int\limits_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

**Решение.** Внутри отрезка интегрирования $[-8,27]$ при $x\to 0$ подынтегральная функция неограниченно возрастает ($x=0$ — особая точка). «Вырежем» эту точку, и тогда по (13,15)

$$\int\limits_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-8}^{-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{+\varepsilon}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-8}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{+\varepsilon}^{27}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}-(-8)^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}\left(27^{\frac{2}{3}}-\lim_{\varepsilon\to+0}(+\varepsilon^{\frac{2}{3}})\right)=$$

$$=\frac{3}{2}(-4+9)=\frac{3}{2}\cdot 5=\frac{15}{2}.$$

**Задача 13,24.** Вычислить $I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx$.

**Решение.** Здесь на отрезке интегрирования $[-2,2]$ две точки: $x=-1$ и $x=+1$, при приближении к которым подынтегральная функция неограниченно возрастает. Интеграл надо расписать так:

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx+\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{4x^3}{x^4-1}\,dx.$$

Вычислять эти пределы не имеет смысла, так как первообразная функция $\ln(x^4-1)$ обращается в бесконечность в особых точках. Рассматриваемый интеграл расходится.

**Задача 13,25** (для самостоятельного решения).

**Доказать, что** интеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ расходится, а интеграл $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=\pi$, причем $a<b$.

## ЧЕТЫРНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Приближенное вычисление интегралов: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол).

### Краткие сведения из теории

Известно, что *всякая непрерывная функция имеет первообразную*. Однако это утверждение имеет только теоретическое значение. Для широкого класса элементарных функций первообразная функция уже не является элементарной и не может быть определена их конечной комбинацией. К таким функциям относятся, например,

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\ln x}, \quad e^{x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}.$$

В тех случаях, когда первообразная функция для подынтегральной, хотя и существует, но не может быть вычислена, пользуются способами приближенного вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Программа предусматривает овладение только тремя такими способами.

**1. Способ прямоугольников.** Отрезок интегрирования делится на $n$ равных частей точками деления

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Длина каждой такой части равна $h = \frac{b-a}{n}$.

Эта величина называется шагом интегрирования.

В каждой точке деления вычисляются значения подынтегральной функции $f(x)$, т. е. значения

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_{n-1}).$$

Формула для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ по этому способу называется формулой прямоугольников. Она записывается так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\,[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})]. \quad (14{,}1)$$

**2. Способ трапеций.** В этом способе отрезок $[a, b]$ интегрирования делится также на $n$ равных частей. С прежними обозначениями формула для приближенного вычисления интеграла выглядит так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\,\{f(x_0) + f(x_n) + 2\,[(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})]\}.$$

Если $\sum_1 = f(x_0) + f(x_n)$, а $\sum_2 = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(\sum\nolimits_1 + 2\sum\nolimits_2\right). \quad (14{,}2)$$

Эта формула называется формулой трапеций.

3. **Способ парабол** (способ Симпсона). Здесь отрезок интегрирования делится на четное число равных частей. Обозначим это число через $2n$, точки деления $[a, b]$ — через

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b,$$

а значения подынтегральной функции в этих точках — через

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.$$

Формула для приближенного вычисления определенного интеграла в этом случае записывается так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[(y_0+y_{2n}) + 4(y_1+y_3+y_5+\ldots+y_{2n-1}) +$$
$$+ 2(y_2+y_4+y_6+\ldots+y_{2n-2})]$$

или, если $\sum_1 = y_0 + y_{2n}$; $\sum_2 = y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}$; $\sum_3 = y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2}$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\sum\nolimits_1 + 4\sum\nolimits_2 + 2\sum\nolimits_3\right). \qquad (14,3)$$

Формула (14,3) называется формулой Симпсона. Оценкой погрешности, возникающей при использовании этих формул, мы заниматься не будем. Отметим, что формула Симпсона дает точность значительно большую, чем формула (14,2) трапеций при одном и том же шаге.

**Рекомендации.** 1) При вычислениях следует пользоваться не логарифмической линейкой, а арифмометром или электрической клавишной машиной. Даже в решенных примерах необходимо выполнять все выкладки, а не пользоваться «готовыми» числами.

2) Следует иметь пятизначные таблицы тригонометрических функций, натуральных и десятичных логарифмов, значений обратных чисел и их квадратов.

Очень удобными являются «Пятизначные математические таблицы» Б. И. Сегала и К. А. Семендяева (конечно, можно пользоваться и другими).

**Обозначения.** Искомый интеграл будем обозначать символом $I_k$, где индекс $k$ указывает число равных частей, на которые разделен отрезок интегрирования.

Для того, чтобы оценить точность различных способов, мы вычислим сначала с помощью указанных способов интегралы, значения которых известны. Затем уже применим эти способы к вычислению интегралов, значения которых неизвестны.

**Задача 14,1.** Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int\limits_0^1 e^x\,dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на 8 частей.

**Решение.** Точное значение вычисляемого интеграла с пятью верными знаками $\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1 = 2{,}718\,28 - 1 = 1{,}718\,28$.

Теперь посмотрим, что даст каждый из применяемых способов.

**Способ прямоугольников** (формула (14,1)). Если $n = 8$, то $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$, а точками деления будут:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0; | 0,125; | 0,250; | 0,375; | 0,500; | 0,625; | 0,750; | 0,875 |

Значения подынтегральной функции $e^x$ в этих точках по таблицам следующие:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= e^0 = 1{,}000\,00\\
f(x_1) &= e^{0,125} = 1{,}133\,15\\
f(x_2) &= e^{0,250} = 1{,}284\,02\\
f(x_3) &= e^{0,375} = 1{,}454\,99\\
f(x_4) &= e^{0,500} = 1{,}648\,72\\
f(x_5) &= e^{0,625} = 1{,}868\,24\\
f(x_6) &= e^{0,750} = 2{,}117\,00\\
f(x_7) &= e^{0,875} = 2{,}398\,88\\
\hline
\textstyle\sum &= 12{,}905\,00
\end{aligned}$$

$$I \approx I_8 = 0{,}125 \cdot 12{,}905\,00.$$
$$I_8 \approx 1{,}61312$$

Полученная точность явно недостаточна.

Применим **способ трапеций** (формула (14,2)).

Шаг $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$.

Множитель $\frac{b-a}{2n}$ перед скобкой в (14,2) равен $\frac{1-0}{2 \cdot 8} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(a) = e^0 = 1{,}000\,00\\
f(x_8) &= f(1) = e^1 = 2{,}718\,28\\
\hline
\textstyle\sum_1 &= 3{,}718\,28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= e^{0,125} = 1{,}133\,15\\
f(x_2) &= e^{0,250} = 1{,}284\,02\\
f(x_3) &= e^{0,375} = 1{,}454\,99\\
f(x_4) &= e^{0,500} = 1{,}648\,72\\
f(x_5) &= e^{0,625} = 1{,}868\,24\\
f(x_6) &= e^{0,750} = 2{,}117\,00\\
f(x_7) &= e^{0,875} = 2{,}398\,88\\
\hline
\textstyle\sum_2 &= 11{,}905\,00 \qquad 2\textstyle\sum_2 = 23{,}810\,00\\
& \qquad\qquad\qquad\quad \textstyle\sum_1 = 3{,}718\,28\\
\hline
& \textstyle\sum_1 + 2\sum_2 = \sum = 27{,}528\,28.
\end{aligned}$$

$$I \approx I_8 = 0{,}0625 \cdot 27{,}528\,28$$
$$I \approx 1{,}72052$$

Здесь мы уже значительно ближе подошли к искомому значению.

Теперь применим способ Симпсона.

Отрезок [0, 1] разделен на 8 частей. Значит, $2n = 8$; $n = 4$. Вычислим прежде всего множитель перед скобкой в (14,3):

$$\frac{b-a}{6n} = \frac{1-0}{6 \cdot 4} = \frac{1}{24} = 0{,}041667.$$

$$\begin{aligned} y_0 &= e^0 = 1{,}00000 \\ y_8 &= e^1 = 2{,}71828 \\ \hline \textstyle\sum_1 &= 3{,}71828 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{0.125} = 1{,}13315 \\ y_3 &= e^{0{,}375} = 1{,}45499 \\ y_5 &= e^{0{,}625} = 1{,}86824 \\ y_7 &= e^{0{,}875} = 2{,}39888 \\ \hline \textstyle\sum_2 &= 6{,}85526 \\ 4\textstyle\sum_2 &= 27{,}42104 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_2 &= e^{0{,}250} = 1{,}28402 \\ y_4 &= e^{0{,}500} = 1{,}64872 \\ y_6 &= e^{0{,}750} = 2{,}11700 \\ \hline \textstyle\sum_3 &= 5{,}04974 \\ 2\textstyle\sum_3 &= 10{,}09948 \end{aligned}$$

$$I \approx I_8 = 0{,}041667\left(\textstyle\sum_1 + 4\sum_2 + 2\sum_3\right) = 0{,}041667\,(3{,}71828 + \\ + 27{,}42104 + 10{,}09948);$$

$$I_8 \approx 0{,}041667 \cdot 41{,}23880 = 1{,}71829.$$

После запятой здесь уже верны четыре знака, в то время как формула трапеций давала только один верный знак.

Погрешность по сравнению с точным значением $R = 1{,}71829 - 1{,}71828 = 0{,}00001$, что следует признать очень хорошей точностью.

**Задача 14,2.** Найти число $\pi$, пользуясь интегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$. $\left(\text{С шестью верными знаками } \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\right)$.

**Решение.** Отрезок интегрирования разделим на 10 равных частей точками:

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0; | 0,1; | 0,2; | 0,3; | 0,4; | 0,5; | 0,6; | 0,7; | 0,8; | 0,9. |

Способ прямоугольников $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Поэтому с помощью таблиц получаем: $f(x_0)=1$;

$$f(x_1)=f(0{,}1)=\frac{1}{1+0{,}1^2}=\frac{1}{1{,}01}=0{,}990\,099$$
$$f(x_2)=f(0{,}2)=\frac{1}{1+0{,}2^2}=\frac{1}{1{,}04}=0{,}961\,538$$
$$f(x_3)=f(0{,}3)=\frac{1}{1+0{,}3^2}=\frac{1}{1{,}09}=0{,}917\,431$$
$$f(x_4)=f(0{,}4)=\frac{1}{1+0{,}4^2}=\frac{1}{1{,}16}=0{,}862\,069$$
$$f(x_5)=f(0{,}5)=\frac{1}{1+0{,}5^2}=\frac{1}{1{,}25}=0{,}800\,000$$
$$f(x_6)=f(0{,}6)=\frac{1}{1+0{,}6^2}=\frac{1}{1{,}36}=0{,}735\,294$$
$$f(x_7)=f(0{,}7)=\frac{1}{1+0{,}7^2}=\frac{1}{1{,}49}=0{,}671\,141$$
$$f(x_8)=f(0{,}8)=\frac{1}{1+0{,}8^2}=\frac{1}{1{,}64}=0{,}609\,756$$
$$f(x_9)=f(0{,}9)=\frac{1}{1+0{,}9^2}=\frac{1}{1{,}81}=0{,}552\,486$$
$$\sum=7{,}099\,814$$

Применим формулу (14,1). Складывая полученные числа, найдем сумму, стоящую в скобках.

Шаг $h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{10}=0{,}1$.

$$I\approx I_{10}=\frac{1}{10}\cdot 7{,}099\,814=0{,}709\,98.$$

(Округление сделано до пяти знаков после запятой).

Сравнивая с точным значением, убеждаемся, что получена очень незначительная точность.

Теперь применим формулу трапеций **(14,2)**. Для этого надо довычислить

$$f(x_{10})=f(1)=\frac{1}{1+1^2}=0{,}5.$$

Множитель перед скобкой в формуле (14,2) равен

$$\frac{b-a}{2n}=\frac{1-0}{2\cdot 10}=\frac{1}{20}=0{,}05.$$

$$f(x_0)=1{,}000\,000$$
$$f(x_{10})=0{,}500\,000$$
$$\sum\nolimits_1=1{,}500\,000$$

$$\sum\nolimits_2=\sum_{i=1}^{9}f(x_i)=7{,}099\,814$$

$$2\sum\nolimits_2=14{,}199\,628;\quad \sum\nolimits_1+2\sum\nolimits_2=15{,}699\,628$$
$$I\approx I_{10}=0{,}05\left(\sum\nolimits_1+2\sum\nolimits_2\right)=0{,}784\,981.$$

Если округлить это до трех десятичных знаков после запятой, то получится 0,785, т. е. три верных знака.

Применим формулу Симпсона (14,3).

Теперь следует считать число частей деления равным $2n = 10$; $n = 5$, а множитель перед скобкой в (14,3) равен $\frac{b-a}{6n} = \frac{1-0}{6 \cdot 5} = \frac{1}{30}$.

$$\begin{aligned} y_0 &= 1{,}000\,000 \\ y_{10} &= 0{,}500\,000 \\ \hline \textstyle\sum_1 &= 1{,}500\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} y_2 = 0{,}961\,538 & \qquad & y_1 = 0{,}990\,099 \\ y_4 = 0{,}862\,069 & & y_3 = 0{,}917\,431 \\ y_6 = 0{,}735\,294 & & y_5 = 0{,}800\,000 \\ y_8 = 0{,}609\,756 & & y_7 = 0{,}671\,141 \\ \hline \sum_3 = 3{,}168\,657 & & y_9 = 0{,}552\,486 \\ 2\sum_3 = 6{,}337\,314 & & \sum_2 = 3{,}931\,157 \\ & & 4\sum_2 = 15{,}724\,628 \end{array}$$

$$I \approx I_{10} = \frac{1}{30}\left(\textstyle\sum_1 + 4\sum_2 + 2\sum_3\right) = \frac{1}{30}(1{,}500\,000 + 15{,}724\,628 + $$

$$+ 6{,}337\,314) = \frac{1}{30} \cdot 23{,}561\,942 = 0{,}785\,398,$$

т. е. получено значение числа $\frac{\pi}{4}$ с шестью (!) верными знаками.

**Задача 14,3.** Вычислить по способу трапеций и способу Симпсона $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$.

**Ответ.** По способу трапеций $I = 0{,}997\,94$, по способу Симпсона $I = 1{,}000\,06$.

**Задача 14,4** (для самостоятельного решения).

Вычислить по способам трапеций и Симпсона интегралы:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_0^{0{,}8} \cos x\, dx$; 3) $\int\limits_0^4 e^x\, dx$; 4) $\int\limits_{0{,}1}^{1{,}7} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Отрезок интегрирования делить в первых двух интегралах на 10 равных частей, в последних — на 8.

**Ответ.** 1) Точное значение интеграла 0,69314718...
Приближенное: по способу трапеций 0,693 77,
по способу Симпсона 0,693 152.

2) Точное значение интеграла 0,717 36.
Приближенное: по способу трапеций 0,716 76,
по способу Симпсона 0,717 36.

3) Точное значение интеграла 53,598 15.
Приближенное: по способу трапеций 54,710 15,
погрешность равна — 1,112 00,
по способу Симпсона 53,616 22,
погрешность равна — 0,018 07, что указывает на значительно более высокую точность.

4) Точное значение интеграла 1,975 12.
Приближенное: по способу трапеций 2,020 18,
погрешность равна — 0,045,
по способу Симпсона 1,985 58,
погрешность равна — 0,010.

**Задача 14,5** (для самостоятельного решения).

Вычислить по формулам трапеций и Симпсона $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. Отрезок интегрирования разделить на 10 равных частей.

Указание. При $x = 0$ $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ находится как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

**Ответ.** По способу трапеций 0,915 728,
по способу Симпсона 0,915 965 (все знаки верны).

**Задача 14,6.** Вычислить по формуле Симпсона $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

**Ответ.** 0,746 825 (все шесть знаков верны).

## ПЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Приложения определенного интеграла к геометрии. Определение площадей плоских фигур.

### Площадь в прямоугольных координатах

Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной кривой, уравнение которой в прямоугольных координатах имеет вид $y = f(x)$, осью $Ox$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx, \text{ или } S = \int\limits_a^b y\,dx. \qquad (15,1)$$

Отрезок $[a, b]$ следует разделить на части, в каждой из которых функция $f(x)$ сохраняет один и тот же знак. При этом необходимо соблюдать такое **правило знаков:** площади, находящиеся над осью $Ox$, берутся со знаком плюс, а площади, расположенные под осью $Ox$, со знаком минус.

Если площадь ограничена двумя непрерывными кривыми, уравнения которых в прямоугольных координатах $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем всюду на отрезке $[a, b]$ $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, то площадь определяется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\, dx. \qquad (15,2)$$

И в этом случае надо соблюдать указанное выше правило знаков.

## Интегрирование четных и нечетных функций в пределах, симметричных относительно начала координат

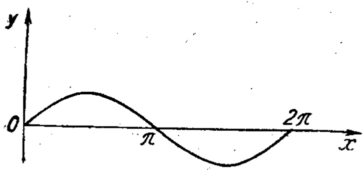
Если функция $f(x)$ — четная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx. \qquad (15,3)$$

Если же функция $f(x)$ — нечетная, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0. \qquad (15,4)$$

Эти формулы часто оказываются полезными при вычислении определенных интегралов вообще и, в частности, при вычислении площадей. Формула (15,3) применяется в том случае, когда рассматриваемая фигура симметрична относительно оси $Oy$.



К задаче 15,1

**Задача 15,1.** Найти площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ и осью $Ox$.

**Решение.** На отрезке $[0, \pi]$ функция $\sin x$ сохраняет знак, а потому, по формуле (15,1), полагая в ней $f(x) = \sin x$, сразу находим

$$S = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) =$$

$$= -(-1 - 1) = 2 \text{ кв. ед.}$$

В частности, если единицей масштаба является сантиметр, то $S = 2$ *см*$^2$.

Если требовалось бы найти площадь, ограниченную той же синусоидой и осью $Ox$ на отрезке $[0, 2\pi]$, то, применив формулу

(15,1) без учета правила знаков, мы получили бы абсурдный результат: оказалось бы, что площадь равна нулю. Действительно,

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0.$$

Это получилось потому, что на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $\sin x$ меняет знак. Следовало этот отрезок разделить на два: $[0, \pi]$ и $[\pi, 2\pi]$, в каждом из которых функция сохраняет знак (в первом — плюс, во втором — минус (15,1)).

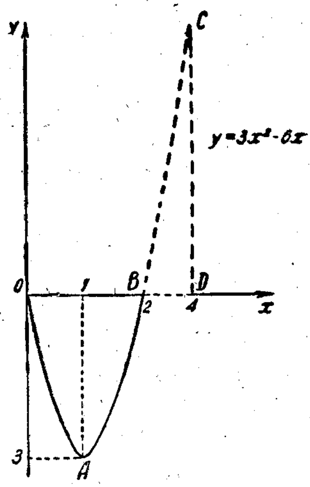
По правилу знаков, на отрезке $[\pi, 2\pi]$ площадь надо было брать со знаком минус и тогда

$$S = S_1 - S_2 = \int_0^{\pi} \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = -(-1-1) + (1-(-1)) =$$
$$= 2 + 2 = 4 \text{ кв. ед.}$$

При вычислении площадей строго соблюдайте правило знаков и, прежде чем интегрировать, убедитесь, что на отрезке интегрирования функция сохраняет знак.

**Задача 15,2.** Вычислить площадь, ограниченную прямой $x = 4$, кривой $y = 3x^2 - 6x$ и осью $Ox$ на отрезке $[0,4]$.



К задаче 15,2

**Решение.** Прежде всего постройте эскиз графика функции. Кривая — парабола. Площадь $OAB$ расположена под осью, брать ее надо со знаком минус, а площадь $BCD$ — над осью $Ox$, и взять ее следует со знаком плюс. Отрезок интегрирования $[0,4]$ должен быть разделен на два: $[0,2]$ и $[2,4]$. Поэтому, полагая в (15,1) $f(x) = 3x^2 - 6x$, найдем

$$S = -S_1 + S_2 = -\int_0^2 (3x^2 - 6x)\, dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x)\, dx =$$

$$= -(x^3 - 3x^2) \Big|_0^2 + (x^3 - 3x^2) \Big|_2^4 = -(8-12) +$$
$$+ (64 - 48 - 8 + 12) = 4 + 20 = 24 \text{ кв. ед.}$$

Если за единицу длины взять, например, дециметр, то площадь равна 24 $дм^2$.

Если бы правило знаков не было учтено, ответ был бы неверен.

**Задача 15,3** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную осью $Ox$ и параболами:

$$1)\ y = 2x^2 + 3x - 9; \quad 2)\ y = x^2 + 6x + 5.$$

**Ответ.** 1) $30\frac{3}{8}$ кв. ед., 2) $10\frac{2}{3}$ кв. ед.

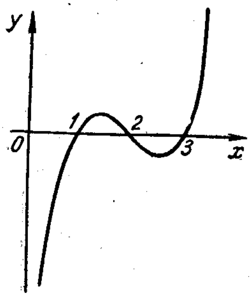
**Задача 15,4** (для самостоятельного решения).

Найти площади, ограниченные осью $Ox$ и линиями:

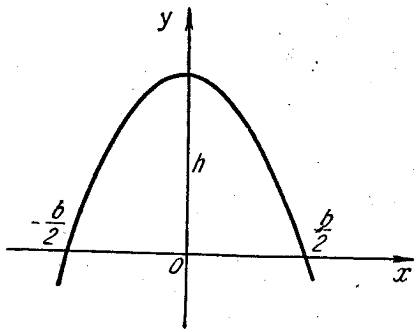
1) $y = 2x^2$; $x = 1$ и $x = 2$; 2) $y = \frac{1}{4}x^3$ на отрезке $[0,2]$, $x = 2$.

**Ответ.** 1) $4\frac{2}{3}$ кв. ед.; 2) 1 кв. ед.

**Задача 15,5.** Найти площадь, ограниченную осью $Ox$ и кривой $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.




К задаче 15,5




К задаче 15,6

**Решение.** Найдем точки пересечения кривой с осью $Ox$. Для этого решим уравнение $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Легко заметить, что его корнем является $x_1 = 1$. После деления левой части уравнения на $x - 1$, получим $x^2 - 5x + 6$, а приравняв это выражение нулю, найдем: $x_2 = 2$; $x_3 = 3$. Из эскиза графика видно, что на отрезке $[2,3]$ площадь находится под осью $Ox$, а потому

$$S = S_1 - S_2 = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,dx -$$

$$- \int_2^3 (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)\,dx = \frac{1}{2} \text{ кв. ед.}$$

**Задача 15,6.** Доказать, что площадь параболического сегмента, отсеченного от параболы хордой, перпендикулярной ее оси, равна $\frac{2}{3}$ произведения высоты $h$ сегмента на его основание $b$.

**Решение.** Пусть середина указанной хорды — начало координат, ось $Ox$ направлена по хорде направо, а ось $Oy$ вверх по оси симметрии параболы.

Уравнение параболы будет иметь вид $y = -ax^2 + c$ $(a > 0)$. Вершина параболы находится в точке $(0,\ h)$, где $h$ — высота сегмента. Ось $Ox$ парабола пересекает в точках $\left(-\frac{b}{2},\ 0\right)$ и $\left(\frac{b}{2},0\right)$. Зная координаты этих точек, найдем значения коэффициентов $a$ и $c$ в уравнении параболы. Подставляя координаты вершины в уравнение $y = -ax^2 + c$, получим $h = c$. Подставляя же координаты $\left(\frac{b}{2},\ 0\right)$, имеем:

$$0 = -a \cdot \frac{b^2}{4} + h; \quad \frac{ab^2}{4} = h; \quad a = \frac{4h}{b^2},$$

и уравнение параболы с найденными $a$ и $c$ примет вид $y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$. Искомую площадь определим по формуле (15,1), полагая в ней $f(x) = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h$:

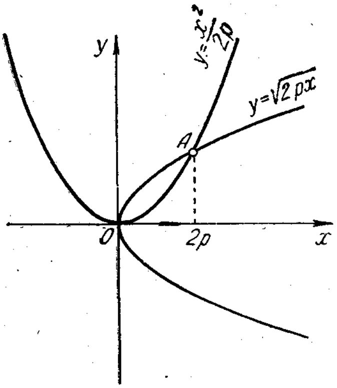
$$S = \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(-\frac{4h}{b^2}x^2 + h\right) dx = \left(-\frac{4h}{b^2}\frac{x^3}{3} + hx\right)\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}hb \text{ кв. ед.}$$

**Задача 15,7** (для самостоятельного решения). Вычислить площадь, ограниченную эллипсом.

Указание. Из уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ найти $y$. Четверть площади эллипса равна $\frac{S}{4} = \frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$. Применить подстановку $x = a\sin z$. Новые пределы интегрирования: $0$ и $\frac{\pi}{2}$. Под интегралом окажется $\cos^2 z$, который надо заменить на $\frac{1 + \cos 2z}{2}$.

**Ответ.** $\pi ab$ кв. ед. (Этот ответ полезно запомнить). При $a = b$ имеем окружность. Получается, что площадь круга равна $\pi a^2$, как это известно из геометрии.



К задаче 15,8

**Задача 15,8.** Определить площадь, ограниченную параболами $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

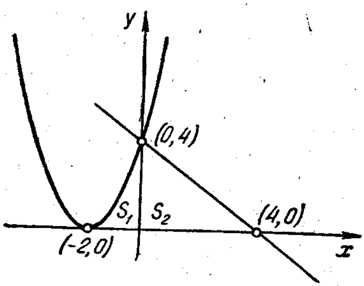
**Решение.** Найдем прежде всего координаты точек пересечения парабол, чтобы определить отрезок интегрирования. Из первого уравнения $y=\sqrt{2px}$ ($y>0$, так как точка пересечения — в первой четверти), из второго $y=\frac{x^2}{2p}$. Приравнивая эти значения, получим

$$\sqrt{2px}=\frac{x^2}{2p}, \quad \text{или} \quad 2px=\frac{x^4}{4p^2}.$$

Отсюда $x^4-8p^3x=0$; $x(x^3-8p^3)=0$; $x(x-2p)(x^2+2px+4p^2)=0$, т. е. $x=0$; $x-2p=0$; $x^2+2px+4p^2=0$. Корни первых двух уравнений: $x_1=0$; $x_2=2p$. Последнее уравнение имеет комплексные корни. Значит, параболы пересекаются в начале координат ($x=0$) и в точке $A$ с абсциссой $x=2p$. Искомую площадь найдем по формуле (15,2). Значения $y$ из каждого уравнения были найдены выше. Принимая в (15,2) $f_2(x)=\sqrt{2px}$, а $f_1(x)=\frac{x^2}{2p}$, получим

$$S=\int_0^{2p}\left(\sqrt{2px}-\frac{x^2}{2p}\right)dx=\left(\sqrt{2p}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6p}\right)\Bigg|_0^{2p}=\frac{4}{3}p^2 \text{ кв. ед.}$$

**Задача 15,9.** Вычислить площадь, ограниченную осью $Ox$ и линиями $y=(x+2)^2$ и $y=4-x$.




К задаче 15,9

**Решение.** Первая линия — парабола, вторая — прямая. Отрезок интегрирования $[-2,4]$ следует разбить на два: $[-2,0]$ и $[0,4]$, так как на этих отрезках линии, ограничивающие площадь, имеют различные уравнения. На отрезке $[-2,0]$ надо $y$ взять из уравнения параболы, а на отрезке $[0,4]$ — из уравнения прямой. Поэтому

$$S=S_1+S_2=\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx+\int_0^4(4-x)\,dx=\frac{(x+2)^3}{3}\Bigg|_{-2}^{0}+$$

$$+\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=\frac{8}{3}+16-8=10\frac{2}{3} \text{ кв. ед.}$$

**Задача 15,10** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную осью $Ox$ и линиями $y=(x-4)^2$ и $y=16-x^2$ (сделать чертеж).

**Ответ.** 64 кв. ед.

**Задача 15,11** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную линиями $xy = 3$ и $x + y = 4$. Сделать чертеж.

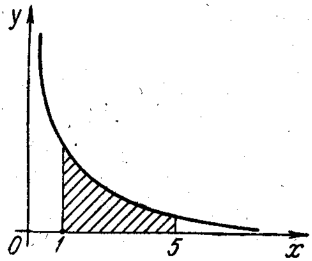
Указание. Разрешить оба уравнения относительно $y$. Найти абсциссы точек пересечения линий. Окажется, что $x = 1$; $x = 3$. Применить формулу (15,2), в которой $f_2(x) = 4 - x$; $f_1(x) = \frac{3}{x}$.

**Ответ.** $(4 - \ln 27)$ кв. ед.

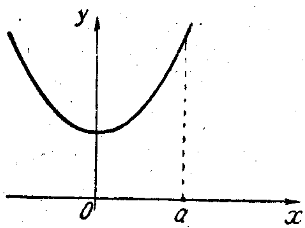
**Задача 15,12** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную гиперболой $xy = a^2$ и прямыми $x = 1$; $x = 5$; $y = 0$.

**Ответ:** $a^2 \ln 5$ кв. ед.



К задаче 15,12



К задаче 15,13

**Задача 15,13.** Найти площадь, ограниченную цепной линией, определяемой уравнением $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, осями координат и прямой $x = a$ $(a > 0)$.

**Решение.** По формуле (15,1)

$$S = \frac{a}{2}\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{a}{a}} - e^{-\frac{a}{a}}\right) =$$

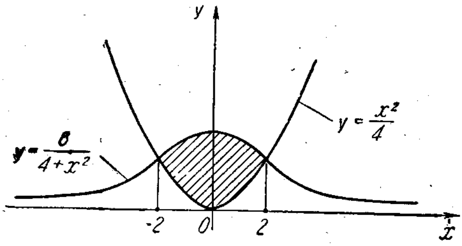
$$= \frac{a^2}{2}(e - e^{-1}) = a^2 \operatorname{sh} 1 \text{ кв. ед.}$$

Если заметить, что $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$, то задача решается проще

$$S = a\int_0^a \operatorname{ch}\frac{x}{a}\, dx = a^2 \operatorname{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^a = a^2 \operatorname{sh} 1 \text{ кв. ед.}$$

**Задача 15,14.** Найти площадь, заключенную между кривыми $y=\frac{8}{4+x^2}$ и $y=\frac{x^2}{4}$.

Указание. Первая кривая называется локоном Аньези, вторая — парабола. Чтобы определить отрезок интегрирования, найдем абсциссы точек пересечения этих кривых.



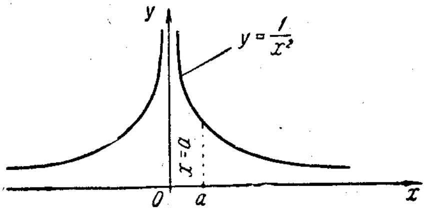
К задаче 15,14

**Ответ.** $2\left(\pi-\frac{2}{3}\right)$ кв. ед.

**Задача 15,15.** Найти площадь фигуры, ограниченную линиями $y=\frac{1}{x^2}$, $x=a\ (a>0)$ и осью абсцисс.

**Решение.** В формуле (15,1) верхний предел интегрирования равен $+\infty$, а потому

$$S=\underbrace{\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{\boxed{\text{Интеграл несобственный}}}=-\frac{1}{x}\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\ \text{кв. ед.}$$



К задаче 15,15

Таким образом, несмотря на то, что площадь простирается в бесконечность, в данном случае ей можно приписать определенное числовое значение.

**Задача 15,16.** Та же задача для равносторонней гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

**Решение.**

$$S=\underbrace{\int\limits_a^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx}_{\boxed{\text{Интеграл несобственный}}}=\ln x\Big|_a^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\ln a=+\infty,$$

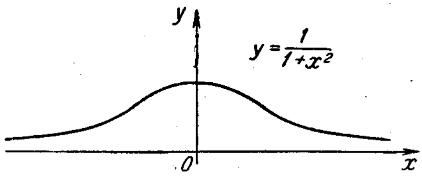
т. е. площадь бесконечно велика и никакого числового значения ей приписать нельзя.

**Задача 15,17** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную осью $Ox$ и локоном Аньези, определяемым уравнением $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Указание. $S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = 2\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x.$

Ответ. $S = \pi$ кв. ед.




К задаче 15,17

**Задача 15,18** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$, $x = 4$ и осью $Ox$.

Ответ. $\frac{1}{12}$ кв. ед.

**Задача 15,19** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x = 1$ и осью $Ox$.

Ответ. $+\infty$.

**Задача 15,20** (для самостоятельного решения).

Найти площадь, ограниченную кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, осью $Oy$ и прямой $x = 9$.

Указание. $S = \int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. При приближении к нижнему пределу $(x \to +0)$ подынтегральная функция неограниченно возрастает, а потому этот интеграл — несобственный:

$$\int\limits_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{9} = 2\lim_{\varepsilon\to+0}(\sqrt{9}-\sqrt{\varepsilon}) = 6 \text{ кв. ед.}$$

### Вычисление площади, ограниченной кривой, заданной полярным уравнением и двумя радиусами-векторами

Если кривая, ограничивающая площадь, определяется уравнением

$$r = f(\varphi),$$

то площадь, ограниченная ею, вычисляется по формуле

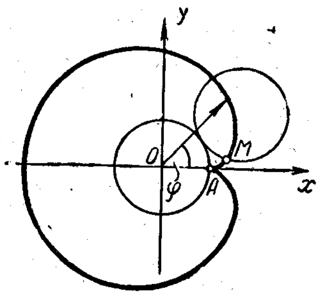
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi, \tag{15,5}$$

где $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha < \beta)$ — пределы изменения полярного угла.

**Задача 15,21.** Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$r = 2a(1 - \cos\varphi).$$

**Решение.** Кривая относится к классу эпициклоид и является траекторией точки, лежащей на окружности круга радиуса $a$, который без скольжения катится по внешней части окружности круга такого же радиуса (интересующихся выводом уравнения эпициклоид, гипоциклоид и их частных случаев отсылаем к книге акад. В. И. Смирнова «Курс высшей математики», том I).



К задаче 15,21

На всей кардиоиде полярный угол $\varphi$ изменяется от 0 до $2\pi$, а потому, учитывая, что $r^2 = 4a^2(1 - \cos\varphi)^2$:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4a^2(1 - \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 6\pi a^2 \text{ кв. ед.},$$

т. е. площадь, ограниченная кардиоидой, равна ушестеренной площади круга, который ее производит.

**Задача 15,22.** Определить площадь, ограниченную спиралью Архимеда $r = a\varphi$ и двумя радиусами-векторами, которые соответствуют полярным углам $\varphi_1$ и $\varphi_2$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$.

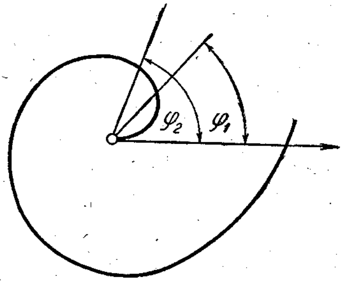
**Решение.** Спираль Архимеда — траектория точки, равномерно движущейся по прямой, которая равномерно вращается вокруг заданной точки (полюса).

По формуле (15,5) имеем $r^2 = a^2\varphi^2$;

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)}{6}. \qquad (A)$$

Из ($A$) следует, что площадь, ограниченная полярной осью и первым витком спирали Архимеда ($\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 2\pi$):

$$S_1 = \frac{a^2}{6}(2\pi)^3 = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ кв. ед.}$$



К задаче 15,22

Площадь, ограниченная полярной осью и вторым витком ($\varphi_1 = 2\pi$; $\varphi_2 = 4\pi$), на основании (А) равна

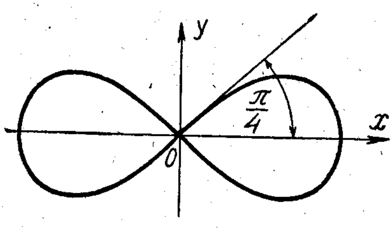
$$S_2 = \frac{a^2}{6}(64\pi^3 - 8\pi^3) = $$
$$= \frac{a^2}{6}56\pi^3 = \frac{28}{3}\pi^3 a^2.$$

Разность этих площадей, т. е. площадь, заключенная между вторым и первым витками спирали Архимеда:

$$S_2 - S_1 = \frac{28}{3}\pi^3 a^2 - \frac{4}{3}\pi^3 a^2 = 8\pi^3 a^2.$$

Можно показать, что и вообще площадь, заключенная между двумя последовательными витками спирали Архимеда равна $8\pi^3 a^2$

**Задача 15,23.** Определить площадь, ограниченную лемнискатой Бернулли, определяемой уравнением $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$.



К задаче 15,23

**Решение.** *Лемниската—это геометрическое место точек, произведение расстояний каждой из которых от двух фиксированных точек (фокусов) — постоянная величина.* Ее уравнение в прямоугольных координатах

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Проследим, как изменяется угол $\varphi$, когда радиус-вектор точки на лемнискате описывает четверть искомой площади, лежащей в первой четверти

При $\varphi = 0$ $r = a\sqrt{2}$. Определим, чему равен полярный угол $\varphi$, когда радиус-вектор станет равным нулю. Подставляя $r = 0$ в уравнение лемнискаты, получим $0 = 2a^2\cos 2\varphi$, откуда $\cos 2\varphi = 0$; $2\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Таким образом, на одной четверти площади полярный угол $\varphi$ изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{4}$. Поэтому по формуле (15,5) четверть искомой площади

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2},$$

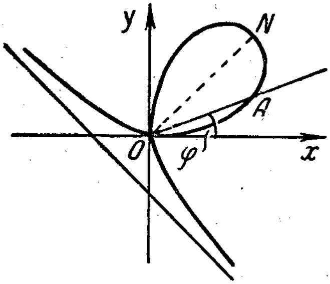
а вся площадь

$$S = 2a^2 = (a\sqrt{2})^2 \text{ кв. ед.},$$

т. е. площадь, ограниченная лемнискатой, равна площади квадрата со стороной $a\sqrt{2}$.

**Задача 15,24** (для самостоятельного решения).

Вычислить площадь, ограниченную петлей декартова листа, определяемого уравнением




К задаче 15,24

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \qquad (15,6)$$

Указание. 1) Перейти к полярным координатам, положив $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Получится уравнение

$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

2) Учесть, что так как в уравнение (15,6) координаты $x$ и $y$ входят симметрично, т. е. замена $x$ на $y$, а $y$ на $x$ не изменяет уравнения, то кривая симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла $y = x$. Поэтому искомую площадь можно рассматривать как удвоенную площадь $OAN$. Когда радиус-вектор $OA$ описывает площадь $OAN$, угол $\varphi$ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

3) Половина площади

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \frac{9}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^6\varphi + 2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \cos^6\varphi} d\varphi =$$

| Числитель и знаменатель дроби умножить на $\cos^2\varphi$ |

$$= \frac{9}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi\cos^4 d\varphi}{\cos^2\varphi(\sin^6\varphi + 2\sin^3\varphi\cos^3\varphi + \cos^6\varphi)}.$$

Числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^6\varphi$, получится

$$\frac{S}{2}=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}^6\varphi+2\operatorname{tg}^3\varphi+1)}\,d\varphi=\frac{9}{2}a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi\,(\operatorname{tg}^3\varphi+1)^2}\,d\varphi.$$

Подстановка $\operatorname{tg}\varphi=z$; $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=dz$. Новые пределы интегрирования 0 и *1*.

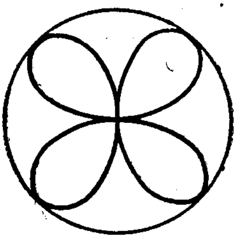
$$\frac{S}{2}=\frac{9}{2}a^2\int_0^1\frac{z^2}{(z^3+1)^2}\,dz.$$

**Ответ.** $S=\frac{3}{2}a^2$ кв. ед.

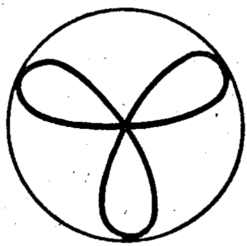
**Задача 15,25.** Вычислить площадь одного лепестка розы, определяемой уравнением

$$r=a\sin k\varphi. \tag{15,7}$$

**Решение.** Кривые, определяемые уравнением (15,7), а также, уравнением $r=a\cos k\varphi$, где $a$ и $k$ — постоянные величины, назы-



К задаче 15,25 а



К задаче 15,25 б

ваются розами. Если $k$ — четное число, то кривая имеет $2k$ лепестков, если же $k$ — нечетное число, то кривая имеет $k$ лепестков.

Например, кривая, определяемая уравнением $r=a\sin 2\varphi$, имеет 4 лепестка, а кривая $r=a\sin 5\varphi$ — 5 лепестков.

Чтобы найти площадь одного лепестка, определим, как изменяется полярный угол $\varphi$, когда радиус-вектор описывает площадь одного лепестка. Положим в (15,7) $r=0$ и решим уравнение $0=a\sin k\varphi$. Из него следует, что $\sin k\varphi=0$, а отсюда $k\varphi=n\pi$. При $n=0$ $\varphi=0$, при $n=1$ имеем $k\varphi=\pi$, а $\varphi=\frac{\pi}{k}$. Таким образом, угол $\varphi$ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{k}$, а площадь одного лепестка по формуле (15,5) равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{k}} a^2 \sin^2 k\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{1-\cos 2k\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4k}\sin 2k\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{k}} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k} - \frac{1}{4k}\sin 2k\frac{\pi}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{k} = \frac{\pi a^2}{4k};\quad S = \frac{\pi a^2}{4k}\ \text{кв. ед.}$$

а) Для четырехлепестковой розы $r = a\sin 2\varphi$ площадь одного лепестка

$$S = \frac{\pi a^2}{4\cdot 2} = \frac{\pi a^2}{8}\ \text{кв. ед.}$$

б) Площадь одного лепестка трехлепестковой розы $r = a\sin 3\varphi$

$$S = \frac{\pi a^2}{4\cdot 3} = \frac{\pi a^2}{12}\ \text{кв. ед.}$$

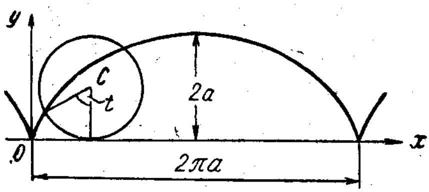
### Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, уравнения которой заданы в параметрической форме

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \qquad (15,8)$$

и в точках $A$ и $B$ кривой $t_1$ и $t_2$ — значения параметра, то площадь вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (15,9)$$



К задаче 15,26

**Задача 15,26.** Найти площадь, ограниченную осью $Ox$ и одной «аркой» циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$; $y = a\,(1 - \cos t)$.

**Решение.** Когда круг, производящий циклоиду, сделает один полный оборот, абсцисса той точки окружности круга, которая в начале движения совпадала с началом координат, станет равной $2\pi a$ ($a$ — радиус окружности).

В формуле (15,9) надо взять $\psi(t) = y = a\,(1-\cos t)$; $\varphi'(t)$ находят из уравнения $\varphi(t) = x = a\,(t - \sin t)$. Получим $\varphi'(t) = a\,(1 - \cos t)$.

Пределы интегрирования будут равны 0 и $2\pi$, так как параметр $t$ при одном полном обороте производящего круга пробегает отрезок $[0,2\pi]$. Поэтому

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,a(1-\cos t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=$$

$$=a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Таким образом, искомая площадь в три раза больше площади катящегося круга.

**Задача 15,27** (для самостоятельного решения).

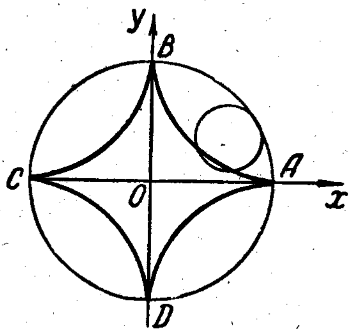
Найти площадь, ограниченную астроидой, определяемой уравнением:

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos^3\frac{t}{4}\\ y&=R\sin^3\frac{t}{4}\end{aligned}\right\}. \qquad (15,10)$$

Параметр $t$ — угол, на который из начального положения повернулась подвижная окружность. За один полный оборот подвижной окружности ($t$ изменяется от 0 до $2\pi$) описывается четверть площади, ограниченной кривой и двумя радиусами $OA$ и $OB$ неподвижной окружности. При вычислении интеграла

$$\int \sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}\,dt$$

подынтегральную функцию представить в виде




К задаче 15,27

$$\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}=\left(\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\sin 2\frac{t}{4}\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1}{8}(1-\cos t).$$

**Ответ.** $S=\frac{3}{8}\pi R^2$ кв. ед.

**Задача 15,28.** Найти площадь, заключенную между осью $Ox$ и верзиерой[1], определяемой уравнениями

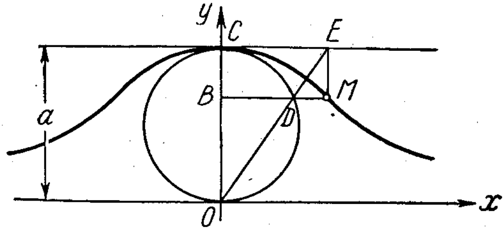
$$\left.\begin{aligned} x&=t\\ y&=\frac{a^3}{a^2+t^2}\end{aligned}\right\}.$$

[1] Кривая, называемая верзиерой, получается так: берется круг диаметром $a$ и отрезок $BDM$ такой, что $OB:BD=OC:BM$. Геометрическое место точек $M$ и представляет верзиеру (см. А. А. Савелов «Плоские кривые»).

**Решение.** Кривая симметрична относительно оси $Oy$. На всей площади абсцисса точки кривой изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а так как $x = t$ (первое уравнение), то параметр $t$ изменяется в тех же пределах. По формуле (15,9)

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2+t^2}\,dt = a^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{a^2+t^2} = a^3 \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= a^2 [\operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)] = a^2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi a^2 \text{ кв. ед.}$$




К задаче 15,28

Эта кривая называется также локоном Аньези.

## ШЕСТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Приложения определенного интеграла к геометрии (продолжение): длина дуги плоской кривой, объем тела вращения, поверхность тела вращения.

### Краткие сведения из теории

1. Длина дуги плоской кривой, определяемой в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$, находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{16,1}$$

где $a$ и $b$ — соответственно абсциссы начала и конца дуги.

2. Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\},$$

причем $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, а функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, то длина дуги

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{16,2}$$

3. Если кривая задана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi),$$

а полярный угол $\varphi$ на дуге изменяется от $\alpha$ до $\beta$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{16,3}$$

**Задача 16,1.** Найти длину окружности.

**Решение.** Возьмем окружность радиуса $R$ с центром в начале координат. Ее уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Чтобы применить формулу (16,1), найдем из этого уравнения $y$. Окажется, что $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, причем знак плюс отвечает верхней полуокружности, а минус — нижней.

Найдем длину четверти окружности, лежащей в первой четверти. Возьмем поэтому перед корнем знак плюс. Под интегралом в формуле (16,1) стоит $\sqrt{1 + y'^2}$. Вычислим это выражение

1) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$; $\quad y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$;

2) $y'^2 = \dfrac{x^2}{R^2 - x^2}$;

3) $1 + y'^2 = 1 + \dfrac{x^2}{R^2 - x^2} = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$;

4) $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{\dfrac{R^2}{R^2 - x^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

Подставим его под знак интеграла в (16,1) и учтем, что абсцисса $x$ точки на окружности, находящейся в первом квадранте, изменяется от 0 до $R$, а потому четверть длины окружности

$$\frac{L}{4} = \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = R\left(\arcsin\frac{R}{R} - 0\right) =$$

$$= R \arcsin 1 = R\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$L = 4\frac{\pi}{2}R; \quad L = 2\pi R.$$

В процессе решения задачи становится ясно, что не следует сразу подставлять $y'$ под знак интеграла в формулу (16,1), а надо сначала вычислить $\sqrt{1 + y'^2}$, определить, как изменяется абсцисса $x$ точки на дуге, длина которой вычисляется, и после этого применить формулу (16,1). Это замечание относится и к формулам (16,2) и (16,3).

Эту же задачу решим для случая, когда окружность задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}\right\}.$$

Чтобы применить формулу (16,2), вычислим:

$$x' = -R\sin t; \quad y' = R\cos t;$$

$$x'^2 = R^2\sin^2 t; \quad y'^2 = R^2\cos^2 t;$$

$$x'^2 + y'^2 = R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2;$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{R^2} = R.$$

На всей окружности параметр $t$ (его геометрическое значение — центральный угол, опирающийся на дугу, начало которой лежит на положительной части оси $Ox$) изменяется от 0 до $2\pi$, а потому по формуле (16,2) длина окружности

$$L = \int_0^{2\pi} R\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Еще более простым будет решение этой задачи, если уравнение окружности задать в полярных координатах. Если центр окружности находится в начале координат, то она определяется полярным уравнением

$$r = R$$

(полярная ось совпадает с положительной частью оси $Ox$, а полярный угол $\varphi$, когда точка на окружности пробегает ее всю, изменяется от 0 до $2\pi$). Поэтому по формуле (16,3), так как $r$ — величина постоянная, равная радиусу окружности, а $r' = 0$, получаем, что $\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{R^2} = R$ и

$$L = \int_0^{2\pi} R\,d\varphi = R\varphi\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

**Задача 16,2** (для самостоятельного решения).

Найти длину цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между точками с абсциссами 0 и $x$ ($x > 0$) (см. чертеж к задаче 15,13).

Указание. Применить формулу (16,1);

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right); \quad 1 + y'^2 = \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4};$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

**Ответ.** $L = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\,dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$

**Задача 16,3** (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$ от вершины до произвольной точки с абсциссой $x$.

Указание. $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{4a^2x^2+1}$ (применить формулу (16,1))

**Ответ.** $L = \frac{x}{2}\sqrt{4a^2x^2+1} + \frac{1}{4a}\ln\left(2ax + \sqrt{4a^2x^2+1}\right)$.

**Задача 16,4** (для самостоятельного решения).

Вычислить всю длину астроиды, определяемой уравнением

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

(см. чертеж к задаче 15,27).

Указание. $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$; чтобы найти $y$, возвести обе части этого равенства в степень $\frac{3}{2}$. Получится $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$;

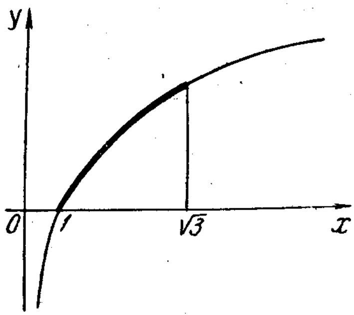
$y' = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{1+y'^2} = a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$.

**Ответ.** $\frac{L}{4} = \int\limits_0^a a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\,dx$; $L = 6a$.

**Задача 16,5.** (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой 1 до точки с абсциссой $\sqrt{3}$.

Указание. $L = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$.



К задаче 16,5

Удобна подстановка $x = \operatorname{tg} z$, которая приведет к вычислению интеграла

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dz}{\sin z\cos^2 z} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin z\cos^2 z}\,dz = \left(\sec z + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}.$$

**Ответ.** $2 - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln 3 - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = 0{,}920$.

**Задача 16,6.** Вычислить длину дуги линии $y = e^x$ от точки $x = 0$ до точки $x$.

Указание. $L = \int\limits_0^x \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$.

Подстановка: $1 + e^{2x} = z^2$.

**Ответ.** $\sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

**Задача 16,7** (для самостоятельного решения).

Найти длину одной «арки» циклоиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}.$$

Указание. Применить формулу (16,2). Пределами интегрирования по $t$ будут 0 и $2\pi$ (см. задачу 15,26).

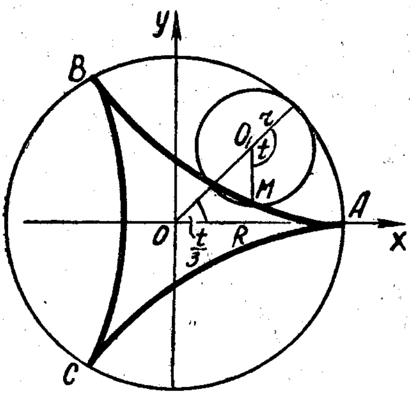
$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

**Ответ.** $L = 8a$, т. е. длина одной «арки» циклоиды равна увосьмеренному радиусу производящего ее круга.

**Задача 16,8** (для самостоятельного решения).

Определить длину всей кривой Штейнера[1].

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R\cos\frac{t}{3} + R\cos\frac{2t}{3} \\ y &= 2R\sin\frac{t}{3} - R\sin\frac{2t}{3} \end{aligned}\right\}$$




К задаче 16,8

Указание.

$$x'^2 + y'^2 = \frac{8}{9}R^2(1 - \cos t) = \frac{16}{9}R^2 \sin^2\frac{t}{2};$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2};$$

$$\frac{L}{3} = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}R\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{16}{3}R.$$

**Ответ.** $L = 16R$.

**Задача 16,9** (для самостоятельного решения).

Найти длину всей астроиды:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos^3\frac{t}{4} \\ y &= R\sin^3\frac{t}{4} \end{aligned}\right\}$$

(см. чертеж к задаче 15,27).

Указание. (См. также указание к задаче 15,27).

Воспользоваться формулой (16,2):

$$x'^2 + y'^2 = \frac{9R^2}{16}\sin^2\frac{t}{4}\cos^2\frac{t}{4}; \quad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{3R}{4}\sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4};$$

$$\frac{L}{4} = \frac{3R}{4}\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{4}\cos\frac{t}{4}\,dt.$$

**Ответ.** $L = 6R$.

---

[1] Кривой Штейнера называется гипоциклоида, которая получается в том случае, когда радиус производящего круга в три раза меньше радиуса неподвижного круга.

**Задача 16,10** (для самостоятельного решения).

Определить длину одной ветви эпициклоиды, определяемой уравнениями:[1]

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + mR)\cos mt - mR\cos(t + mt) \\ y &= (R + mR)\sin mt - mR\sin(t + mt) \end{aligned}\right\}.$$

**Ответ.** $8Rm(1 + m)$.

**Задача 16,11** (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги кардиоиды, определяемой уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R\cos t - R\cos 2t \\ y &= 2R\sin t - R\sin 2t \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

(см. чертеж к задаче 15,21).

(Эти уравнения получаются из уравнений предыдущей задачи при $m = 1$).

**Ответ.** $L(t_1) = 4R\int\limits_0^{t_1}\sin\frac{t}{2}\,dt = 16R\sin^2\frac{t_1}{4}$. При $t_1 = 2\pi$ получим, что длина всей кардиоиды $L = 16R$.

**Задача 16,12.** Решить предыдущую задачу в случае, когда кардиоида задана полярным уравнением $r = 2a(1 - \cos\varphi)$ (см. чертеж к задаче 15,21).

**Решение.** Надо воспользоваться формулой (16,3):

$$r' = 2a\sin\varphi; \quad r'^2 = 4a^2\sin^2\varphi;$$

$$r^2 + r'^2 = 4a^2(1 - \cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi =$$

$$= 4a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4a^2(2 - 2\cos\varphi) =$$

$$= 8a^2(1 - \cos\varphi) = 16a^2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = 4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Когда точка на кардиоиде пробегает всю кривую, ее полярный угол изменяется от 0 до $2\pi$.

Поэтому по формуле (16,3)

$$L = \int\limits_0^{2\pi} 4a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4a\cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -8a(\cos\pi - \cos 0) = -8a(-2) = 16a.$$

Мы получили тот же ответ, что и в предыдущей задаче ($R = a$).

---

[1] Эпициклоидой называется кривая, являющаяся траекторией точки, неизменно связанной с окружностью, которая без скольжения катится по внешней стороне неподвижной окружности радиуса $R$, а $m$ — отношение радиуса подвижной окружности к радиусу неподвижной.

**Задача 16,13** (для самостоятельного решения).

Найти длину дуги спирали Архимеда $r = a\varphi$ от начала координат до произвольной точки $P(r, \varphi)$ (см. чертеж к задаче 15,22).

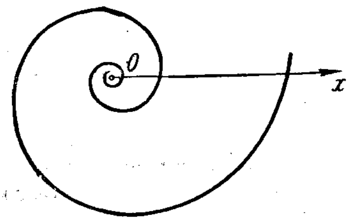
Указание. Чтобы воспользоваться формулой (16,3), надо вычислить $\sqrt{r^2 + r'^2}$. Из $r = a\varphi$ следует, что $r' = a$;

$$r^2 + r'^2 = a^2\varphi^2 + a^2 = a^2(1 + \varphi^2);$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a\sqrt{1 + \varphi^2};\ L = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi \quad \text{(см. формулу (16,3))}.$$

**Ответ.** $L = \frac{a}{2}[\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})]$.

При $\varphi = 2\pi$ получим длину первого витка спирали Архимеда.




К задаче 16,14

**Задача 16,14** (для самостоятельного решения).

Найти длину логарифмической спирали $r = a^{\varphi}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ между точками $(r_0, \varphi_0)$ и $(r_1, \varphi_1)$.

Указание. Воспользоваться формулой (16,3):

$$r^2 + r'^2 = a^{2\varphi} + a^{2\varphi}\ln^2 a = a^{2\varphi}(1 + \ln^2 a);$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a^{\varphi}\sqrt{1 + \ln^2 a};\ L = \sqrt{1 + \ln^2 a}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a^{\varphi}\, d\varphi.$$

**Ответ.** $L = \sqrt{1 + \ln^2 a} \cdot \frac{a^{\varphi_1} - a^{\varphi_0}}{\ln a}$, или

$$L = \sqrt{1 + \ln^2 a} \cdot \frac{r_1 - r_0}{\ln a}.$$

Во второй части этой книги (задача 36,15) была определена длина полярной касательной логарифмической спирали $T = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}}\, r$, или $T = \sqrt{1 + \ln^2 a} \cdot \frac{r}{\ln a}$.

Запишем полученный в этой задаче ответ в виде

$$L = \sqrt{1 + \ln^2 a}\,\frac{r_1}{\ln a} - \sqrt{1 + \ln^2 a}\,\frac{r_0}{\ln a}.$$

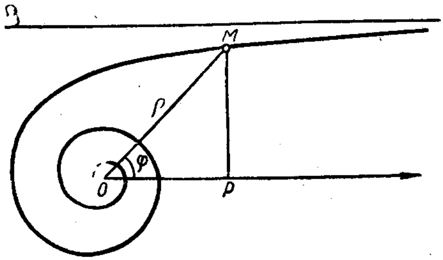
Таким образом, *длина дуги логарифмической спирали равна разности длин полярных касательных, проведенных в конце и начале этой дуги.*

**Задача 16,15** (для самостоятельного решения).

Определить длину дуги гиперболической спирали $r = \frac{a}{\varphi}$ от точки $(r_1, \varphi_1)$ до точки $(r_2, \varphi_2)$.

Указание. $L = a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi^2}\, d\varphi$. Подынтегральную функцию представить в виде $\frac{1+\varphi^2}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}} = \frac{1}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

К вычислению $\int \frac{1}{\varphi^2\sqrt{1+\varphi^2}}\, d\varphi$ применить подстановку обратного количества: $\varphi = \frac{1}{z}$, а $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$ — табличный.




К задаче 16,15

**Ответ.** $L = a\left[\frac{\sqrt{1+\varphi_1^2}}{\varphi_1} - \frac{\sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_2} + \ln\frac{\varphi_2 + \sqrt{1+\varphi_2^2}}{\varphi_1 + \sqrt{1+\varphi_1^2}}\right]$.

**Задача 16,16.** Найти длину дуги циссоиды Диоклеса

$$r = 2a\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$$

от точки $(r_1, \varphi_1)$ до точки $(r_2, \varphi_2)$ $(\varphi_1 < \varphi_2)$.

**Решение.** Кривая задана полярным уравнением. Чтобы применить формулу (16,3), вычислим $\sqrt{r^2 + r'^2}$:

$$r' = 2a\,\frac{2\sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\varphi}{\cos^2\varphi};$$

$$r^2 + r'^2 = 4a^2\cdot\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}(1 + 3\cos^2\varphi);$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi};$$

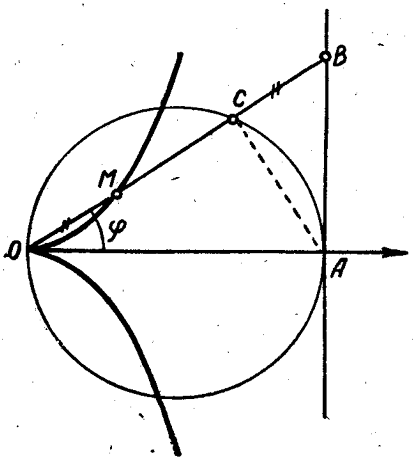
$$L = 2a\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Сначала вычислим неопределенный интеграл

$$2a\int\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

С помощью подстановки $\sqrt{3}\cos\varphi=\frac{1}{u}$ придем к интегралу

$$2a\sqrt{3}\int\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}du=2a\sqrt{3}\int\frac{1+u^2}{u\sqrt{1+u^2}}du=$$
$$=2a\sqrt{3}\left[\int\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}+\int\frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}}\right].$$



К задаче 16,16

Первый интеграл вычислим подстановкой обратного количества $u=\frac{1}{t}$, и после интегрирования получим

$$-\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)=$$
$$=-\ln\left(\frac{1}{u}+\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\right),$$

а возвращаясь к старой переменной $\varphi$, найдем, что он равен

$$-\ln\left(\sqrt{3}\cos\varphi+\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\right).$$

Второй интеграл равен $\sqrt{1+u^2}$, а после перехода к старой переменной

$$\sqrt{1+\frac{1}{3\cos^2\varphi}}=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\sqrt{3}\cos\varphi}.$$

Поэтому искомая длина

$$L=2a\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{\sqrt{3}\cos\varphi}-\ln\left(\sqrt{3}\cos\varphi+\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\right)\right]\Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

Окончательно

$$L=2a\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi_2}}{\sqrt{3}\cos\varphi_2}-\frac{\sqrt{1+3\cos^2\varphi_1}}{\sqrt{3}\cos\varphi_1}-\right.$$
$$\left.-\ln\frac{\sqrt{3}\cos\varphi_2+\sqrt{1+3\cos^2\varphi_2}}{\sqrt{3}\cos\varphi_1+\sqrt{1+3\cos^2\varphi_1}}\right].$$

Вычисление длин дуг многих кривых, например, эллипса, гиперболы, лемнискаты, приводит к так называемым эллиптическим интегралам, которые мы рассмотрим в связи с упражнениями по степенным рядам.

## Объем тела

Если известна площадь $S(x)$ поперечного сечения тела, то его объем

$$V = \int_a^b S(x)\,dx, \qquad (16{,}4)$$

где абсциссы $a$ и $b$ отвечают крайним сечениям.

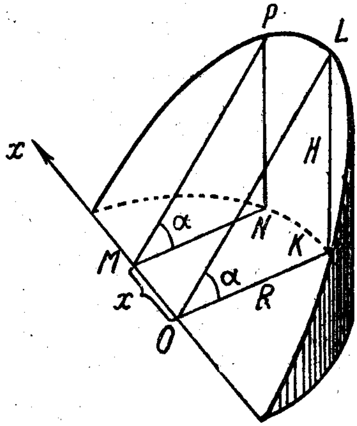
Объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой, определяемой уравнением $y = f(x)$, осью $Ox$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx. \qquad (16{,}5)$$

Площадь поверхности тела вращения определяется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (16{,}6)$$

**Задача 16,17.** Найти объем тела, отсекаемого от прямого круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом $\alpha$ к нему.



К задаче 16,17

**Решение.** Такое тело называется цилиндрическим отрезком. Пусть цилиндр, о котором идет речь, определяется уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. Найдем площадь сечения, перпендикулярного оси $Ox$. Сечение — прямоугольный треугольник. Возьмем на оси $Ox$ точку с абсциссой $x$ ($|x| < R$). Площадь сечения будет функцией $x$:

$$S(x) = \frac{1}{2} MN \cdot NP.$$

Но $MN$ — ордината точки $N$ окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и

$$MN = \sqrt{R^2 - x^2}; \quad NP = MN \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Если обозначить через $H$ высоту цилиндрического отрезка ($KL = H$), то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R}$, и тогда $NP = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{H}{R}$,

$$S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{H}{R};$$

$$S(x) = \frac{1}{2}\frac{H}{R}(R^2 - x^2).$$

Переменная интегрирования $x$ изменяется от $-R$ до $+R$, а потому по формуле (16,4)

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{H}{R}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{H}{R}\cdot 2\int_{0}^{R}(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{H}{R}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{2}{3}HR^2 \text{ куб. ед.}$$

**Задача 16,18.** Найти объем части однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, ограниченного плоскостями $z=-H$ и $z=H$.

**Решение.** Вычислим площадь сечения гиперболоида плоскостью, перпендикулярной оси $Oz$ при постоянном $z$.

Площадь эта будет функцией $z$. В сечении получится эллипс, который определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1+\frac{z^2}{c^2}\\ z&=\text{const}\end{aligned}\right\}.$$

Перепишем первое уравнение так, чтобы можно было сразу усмотреть, чему равны полуоси эллипса. Для этого обе его части разделим на правую часть. Тогда уравнения эллипса, полученного в сечении, будут такими:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}&=1\\ z&=\text{const}\end{aligned}\right\}.$$

Из первого уравнения следует, что полуоси этого эллипса равны:

$$a_1=a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}};\quad b_1=b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}},$$

а потому его площадь (см. задачу 15,7)

$$S(z)=\pi a_1b_1=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

В формуле (16,4) переменной интегрирования надо взять не $x$, а $z$, так как площадь поперечного сечения есть функция $z$, причем на вычисляемом объеме $z$ изменяется от $-H$ до $+H$, поэтому

$$V=\int_{-H}^{H}\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(H+\frac{H^3}{3c^2}\right) \text{ куб. ед.}$$

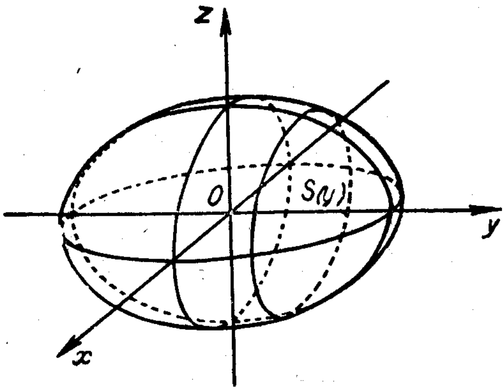
**Задача 16,19** (для самостоятельного решения).

Найти объем трехосного эллипсоида, определяемого уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Указание. Пересечь эллипсоид плоскостью, перпендикулярной оси $Oy$ и проходящей через точку $y$ этой оси ($-b \leqslant y \leqslant b$). При постоянном $y$ из уравнения эллипсоида получим уравнение эллипса-сечения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1-\frac{y^2}{b^2}\\ y&=\text{const}\end{aligned}\right\},$$




К задаче 16,19

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}&=1\\ y&=\text{const}\end{aligned}\right\}.$$

Полуоси этого эллипса:

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}};\quad c_1=c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},$$

а его площадь

$$S(y)=\pi a_1c_1=\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Теперь в формуле (16,4) надо вести интегрирование не по $x$, а по $y$ в пределах от $-b$ до $+b$:

$$V=\pi ab\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{4}{3}\pi abc \text{ куб. ед.}$$

Итак, объем трехосного эллипсоида

$$V = \frac{4}{3}\pi abc \text{ куб. ед.}$$

Этот результат полезно помнить.

Если $a = b = c$, то эллипсоид — сфера, и тогда объем, ею ограниченный, равен

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ куб. ед.}$$

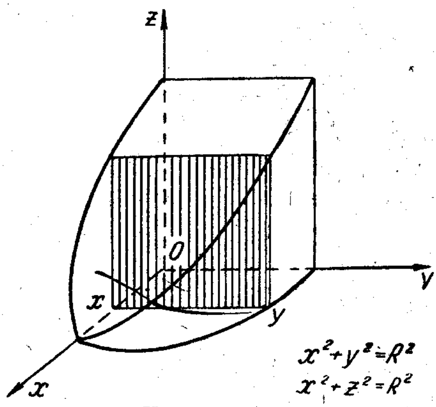
(Хорошо известная из геометрии формула для вычисления объёма шара).

**Задача 16,20** (для самостоятельного решения).

Найти объем тела, ограниченного двумя прямыми круговыми цилиндрами:

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ и } x^2 + z^2 = R^2.$$

Указание. Пересечь тело плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$ и проходящей через точку с абсциссой $x\,(-R < x < R)$. На чертеже изображена восьмая часть тела.



К задаче 16,20

В сечении получится квадрат, сторона которого равна ординате той точки окружности $x^2 + y^2 = R^2$, абциссса которой равна $x$, т. е. сторона квадрата равна $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Площадь квадрата будет функцией $x$, она равна

$$S(x) = y^2 = R^2 - x^2.$$

При вычислении объема восьмой части тела пределами интегрирования по $x$ будут $O$ и $R$:

$$\frac{V}{8} = \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx.$$

Ответ. $V = \frac{16}{3}R^3$ куб. ед.

**Задача 16,21** (для самостоятельного решения).

Найти объем пирамиды, зная, что ее высота $H$, а основание — многоугольник, площадь которого равна $S$.

Указание. Из геометрии известно, что сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, есть многоугольник, подобный основанию, причем отношение площади сечения к площади основания равно отношению квадратов их расстояний от вершины. Провести сечение на расстоянии $h$ от основания. Обозначить площадь сечения через $S(h)$. Расстояние этого сечения от вершины равно $H-h$. Поэтому

$$\frac{S(h)}{S}=\frac{(H-h)^2}{H^2};\quad S(h)=\frac{S}{H^2}(H-h)^2.$$

В формуле (16,4) переменной интегрирования будет $h$, причем $h$ изменяется от 0 до $H$:

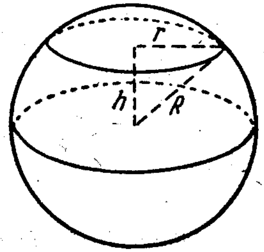
$$V=\int_0^H \frac{S}{H^2}(H-h)^2\,dh=\frac{SH}{3}\text{ куб. ед.}$$

Мы получим известный из геометрии результат: объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

**Задача 16,22** (для самостоятельного решения).

Найти объем шара радиуса $R$.

Указание. Пересечь шар плоскостью, перпендикулярной диаметру. Вычислить площадь круга, полученного в сечении. Из чертежа видно, что радиус этого круга $r=\sqrt{R^2-h^2}$. Его площадь есть функция $h$ и равна $S(h)=\pi r^2=\pi(R^2-h^2)$, причем $h$ — расстояние сечения от экваториальной плоскости и изменяется $h$ от $-R$ до $+R$.



К задаче 16,22

В формуле (16,4) переменной интегрирования надо взять $h$

$$V=\int_{-R}^{R} S(h)\,dh=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-h^2)\,dh=\frac{4}{3}\pi R^3\text{ куб. ед.}$$

## Объемы и поверхности тел вращения

**Задача 16,23.** Найти объем и боковую поверхность параболоида, образованного вращением параболы $y^2=2px$ вокруг оси $Ox$ и ограниченного плоскостью $x=H$.

**Решение.** Объем тела вычислим по формуле (16,5):

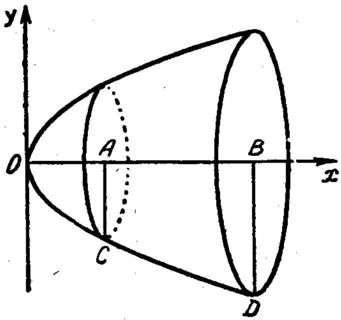
$$V=\pi\int_0^H y^2dx=\pi\int_0^H 2px\,dx=2p\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H=\pi pH^2\text{ куб. ед.}$$

Боковая поверхность определится по формуле (16,6). Найдем сначала корень $\sqrt{1+y'^2}$, входящий в эту формулу. Если $y^2=2px$, то $y' = \frac{p}{y}$, $y'^2 = \frac{p^2}{y^2} = \frac{p^2}{2px} = \frac{p}{2x}$; $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{p}{2x}}$.

Так как $y^2 = 2px$, то $y = \sqrt{2px}$ и по формуле (16,6) находим

$$S = 2\pi\int_0^H \sqrt{2px}\cdot\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx = 2\pi\int_0^H \sqrt{2px+p^2}\,dx =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^H = \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left[\left(H+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \text{ кв. ед.}$$




К задаче 16,23

**Задача 16,24.** Вычислить объем и поверхность шара, рассматривая его как тело вращения.

**Решение.** Будем полагать, что сфера образована вращением окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси $Ox$. Чтобы найти объем шара по формуле (16,4), найдем из уравнения окружности $y^2 = R^2 - x^2$. Переменная интегрирования $x$ изменяется от $-R$ до $+R$, а поэтому

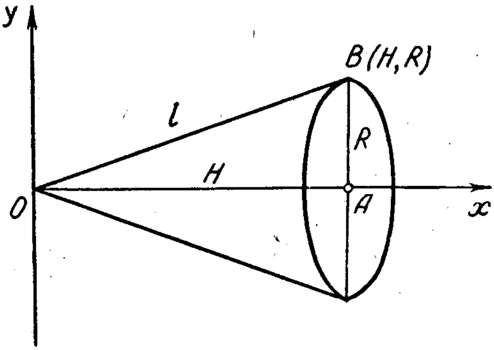
$$V = \pi\int_{-R}^{R} y^2dx = \pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

Теперь вычислим площадь поверхности сферы по формуле (16,6). Из уравнения окружности найдем, что $y' = -\frac{x}{y}$; $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y}} = \frac{R}{y}$, так как $x^2+y^2=R^2$. Подставляя это значение корня в (16,6), получим

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}dx = 2\pi\int_{-R}^{R} y\cdot\frac{R}{y}\,dx = 2\pi Rx\Big|_{-R}^{R};$$

$$S = 4\pi R^2 \text{ кв. ед.}$$

Здесь уместно обратить внимание читателя на то, как просто с помощью интегрального исчисления получены объем и поверхность шара. Для того, чтобы это оценить, полезно вспомнить достаточно сложный и громоздкий вывод этих же формул в элементарной геометрии.




К задаче 16,25

**Задача 16,25** (для самостоятельного решения).

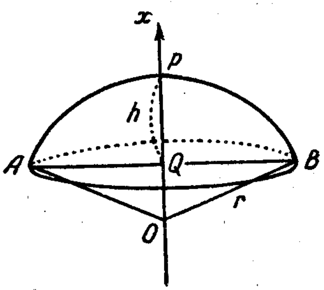
Найти объем и боковую поверхность прямого кругового конуса, рассматривая его как тело, полученное от вращения полупрямой, проходящей через начало координат и точку $(H, R)$, и ограниченное плоскостью $x = H$.

Указание. Уравнение прямой $y = \frac{R}{H}x$. Определив боковую поверхность конуса, учесть, что его образующая $L = \sqrt{H^2 + R^2}$.

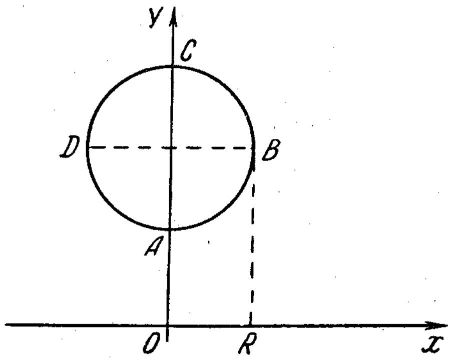
**Ответ.** $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$; $S = \pi RL$.

**Задача 16,26** (для самостоятельного решения).

Доказать, что поверхность сферического сегмента равна боковой поверхности цилиндра с тем же основанием и высотой.




К задаче 16,26




К задаче 16,27

**Задача 16,27.** Вычислить объем и поверхность тора, образованного вращением круга, уравнение окружности которого $x^2 + (y - a)^2 = R^2$, вокруг оси $Ox$ $(a > R)$.

**Решение.** Тором называется тело, образованное вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга и не пересекающей его. Это тело напоминает бублик или автомобильную шину. Из чертежа видно, что объем тела равен разности объемов тел, полученных от вращения полукруга $BCDB$ и полукруга $ABDA$ вокруг оси $Ox$. Чтобы воспользоваться формулой (16,5), найдем ординаты кривых $BCD$ и $BAD$. Решим уравнение окружности относительно $y$:

$$(y-a)^2 = R^2 - x^2; \quad y - a = \pm \sqrt{R^2 - x^2};$$

$$y = a \pm \sqrt{R^2 - x^2}.$$

На окружности $BCD$: $y_{BCD} = a + \sqrt{R^2 - x^2}$;

на окружности $BAD$: $y_{BAD} = a - \sqrt{R^2 - x^2}$;

$$V = V_{BCD} - V_{BAD} = 2\pi \int_0^R y_{BCD}^2\, dx - 2\pi \int_0^R y_{BAD}^2\, dx.$$

(Множитель 2 появился потому, что мы взяли пределами интегрирования не $-R$ и $+R$, а $0$ и $R$, учитывая симметрию тела относительно оси $Oy$).

$$V = 2\pi \int_0^R (y_{BCD}^2 - y_{BAD}^2)\, dx = 2\pi \int_0^R (y_{BCD} - y_{BAD})(y_{BCD} + y_{BAD})\, dx =$$

$$= 2\pi \int_0^R 2a \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 8a\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 8a\pi \left( \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} \right) \Bigg|_0^R = 2\pi^2 a R^2 \text{ куб. ед.}$$

Поверхность тора равна сумме поверхностей, полученных от вращения дуг $BCD$ и $BAD$ вокруг оси $Ox$.

На верхней полуокружности $BCD$ $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$; $y'^2 = \frac{x^2}{R^2 - x^2}$;

$1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$; $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$.

На нижней полуокружности $BAD$ $\sqrt{1 + y'^2}$ имеет то же значение (вычислите его). Поэтому

$$S = S_{BCD} + S_{BAD} = 2\left[2\pi \int_0^R y_{BCD} \sqrt{1 + y'^2}\, dx + 2\pi \int_0^R y_{BAD} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\right] =$$

$$= 4\pi \int_0^R (y_{BCD} + y_{BAD}) \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Но

$$y_{BCD} + y_{BAD} = 2a; \text{ а } \sqrt{1+y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

и

$$S = 4\pi\int_0^R 2a\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 8\pi aR\int_0^R\frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = 8\pi aR\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R =$$

$$= 4\pi^2 aR \text{ кв. ед.}$$

**Задача 16,28** (для самостоятельного решения).

Вычислить поверхность эллипсоида, полученного от вращения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: а) вокруг его большой оси (так называемый вытянутый эллипсоид вращения) и б) вокруг малой оси (сжатый эллипсоид вращения).

Указание. В случае а) вычисление поверхности сведется к интегралу $\frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx$.

Следует для упрощения записей ввести $a^2-b^2=c^2$, где $c$ — половина фокусного расстояния, а поэтому

$$S = \frac{2\pi b}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^4-c^2x^2}\,dx = \frac{2\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2-x^2}\,dx,$$

и теперь можно воспользоваться формулой (4,7).

В случае б) вращение происходит вокруг оси $Oy$, и задача сводится к вычислению поверхности по формуле

$$S = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy. \qquad (16,7)$$

(Этой формулой следует пользоваться в том случае, когда поверхность образована вращением вокруг оси $Oy$).

Ответ. а) $S = 2\pi b\left(b+\frac{a^2}{c}\arcsin\frac{c}{a}\right)$;

б) $S = 2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\frac{a+c}{a-c}\right)$.

Этот ответ получится, если учесть, что $\sqrt{b^2+c^2}=a$.

**Задача 16,29** (для самостоятельного решения).

Решить предыдущую задачу, взяв уравнение эллипса в параметрической форме:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t.$$

Указание. В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, объем тела вращения

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\, \varphi'(t)\, dt, \tag{16,8}$$

а поверхность тела вращения

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}\, dt. \tag{16,9}$$

При вычислении половины площади поверхности пределами интегрирования по $t$ будут 0 и $\frac{\pi}{2}$.

В первом случае (вытянутый эллипсоид вращения) получится

$$S = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, \cos\varphi\, d\varphi.$$

Интеграл легко вычисляется подстановкой $e \sin\varphi = z$ (новые пределы интегрирования 0 и $e$), где $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Во втором случае (сжатый эллипсоид вращения)

$$S = 4\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \varphi}\, \cos\varphi\, d\varphi,$$

где $k^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$.

Применить подстановку $k \sin\varphi = z$. Новые пределы интегрирования 0 и $k$. Ответы, конечно, должны получиться те же. Докажите, что при $b$, стремящемся к $a$, из обоих ответов получится площадь поверхности сферы $4\pi a^2$.

При определении предела $\frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a}$ представить это выражение в виде $a \frac{\arcsin e}{e}$, учитывая, что $\frac{c}{a} = e$.

**Задача 16,30** (для самостоятельного решения).

Найти объем и поверхность тела, образованного вращением одной арки циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

вокруг оси $Ox$.

Окажется, что

$$V = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = 5\pi^2 a^3$$

$$\left(\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\, dt = \int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt = 5\pi\right).$$

При вычислении поверхности надо пользоваться формулой (16,9):

$$S = 8\pi a^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt.$$

**Ответ.** $V = 5\pi^2 a^3$ куб. ед.; $S = \frac{64}{3}\pi a^2$ кв. ед.

**Задача 16,31** (для самостоятельного решения).

Найти объем и поверхность тела, образованного вращением кардиоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= 2R\cos t - R\cos 2t \\ y &= 2R\sin t - R\sin 2t \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

вокруг ее оси (см. чертеж к задаче 15,21).

Указание. При вычислении объема воспользоваться формулой (16,8), при вычислении поверхности — формулой (16,9).

**Ответ.** $V = \frac{64}{3}\pi R^3$ куб. ед.; $S = \frac{128}{5}\pi R^2$ кв. ед.

**Задача 16,32** (для самостоятельного решения).

Найти объем и поверхность тела, полученного от вращения астроиды

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos^3 \frac{t}{4} \\ y &= R\sin^3 \frac{t}{4} \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

вокруг оси $Ox$ (см. чертеж к задаче 15,27).

**Ответ.** $V = \frac{32}{105}\pi R^3$ куб. ед.; $S = \frac{12}{5}\pi R^2$ кв. ед.

# СЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Дифференциальные уравнения первого порядка.

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

*Дифференциальным уравнением* называется соотношение связывающее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные (или ее дифференциалы).

В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

*Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

*Обыкновенное* дифференциальное уравнение порядка $n$ в самом общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию и ее производные или дифференциалы до порядка $n$ включительно и имеет вид

$$f(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \tag{17,1}$$

В этом уравнении $x$ — независимая переменная, $y$ — неизвестная функция, а $y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}$ — производные неизвестной функции.

*Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка* имеет вид

$$f(x,\ y,\ y') = 0, \tag{17,2}$$

а если его удастся решить относительно производной, то оно запишется так:

$$y' = F(x,\ y). \tag{17,3}$$

Задача состоит в определении из дифференциального уравнения неизвестной функции, а процесс определения этой функции называется решением, или интегрированием дифференциального уравнения.

*Решением*, или интегралом уравнения (17,3) называется всякая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки которой в уравнение (17,3) оно обращается в тождество, т. е.

$$\varphi'(x) = F[x,\ \varphi(x)]$$

является тождеством относительно $x$.

Кривая $y = \varphi(x)$, определяемая решением уравнения (17,2) или (17,3), называется интегральной кривой дифференциального уравнения.

*Общим решением* дифференциального уравнения (17,2) или (17,3) называются соотношения вида

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0,\ \text{или}\ \Phi(x,\ y)=C, \qquad (17,4)$$

включающие одну произвольную постоянную величину и обладающие тем свойством, что решая их относительно $y$ при любых частных значениях произвольной постоянной, получаем функции вида $y=\varphi(x)$, являющиеся решениями уравнения (17,2) или (17,3).

Уравнения (17,4) определяют *семейство интегральных кривых* уравнения (17,2).

*Частным решением* дифференциального уравнения (17,2) называется такое решение, которое получается из общего решения (17,4) при некотором частном значении произвольной постоянной.

Произвольная постоянная $C$, входящая в (17,4), определяется из так называемых начальных условий.

Задача с начальными условиями ставится так: найти решение $y=\varphi(x)$ уравнения (17,2) такое, чтобы оно принимало заданное значение $y_0$ при заданном значении независимой переменной $x=x_0$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$y_0=\varphi(x_0).$$

С точки зрения геометрии задача с начальными условиями сводится к тому, чтобы из семейства интегральных кривых (17,4) выделить ту, которая проходит через точку $(x_0,\ y_0)$ плоскости.

*Задача Коши*. Задача отыскания решения уравнения (17,2), удовлетворяющего начальным условиям

$$y=y_0\ \text{при}\ x=x_0,$$

называется *задачей Коши*.

*Особое решение*. Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, включая $\pm\infty$. называется его особым решением.

При решении дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с определением общего решения были найдены также и особые.

Мы рассмотрим на этом практическом занятии типы дифференциальных уравнений первого порядка, предусмотренные программой.

### *Первый тип*. Уравнения с разделяющимися переменными

Этот тип уравнений является самым простым типом уравнений первого порядка, но вместе с тем очень важным.

Если в дифференциальное уравнение первого порядка $F(x,\ y,\ y')=0$ производная $y'$ входит в первой степени, то после решения его относительно $y'$ получится уравнение вида

$$f(x,\ y)+\varphi(x,\ y)\,y'=0.$$

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то это уравнение может быть переписано так:

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = 0.$$

В частном случае, когда каждая из функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ является произведением двух функций, одна из которых — функция только $x$, а вторая — только $y$, т. е. когда

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \text{ а } \varphi(x,y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y),$$

уравнение примет вид

$$f_1(x) \cdot f_2(y)\,dx + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y)\,dy = 0. \qquad (17,5)$$

Уравнение (17,5) называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Разделение переменных производится делением обеих частей (17,5) на произведение $\varphi_1(x) \cdot f_2(y)$, в котором $f_2(y)$ — функция только от $y$, являющаяся множителем при $dx$, а $\varphi_1(x)$ — функция только от $x$, являющаяся множителем при $dy$. После деления на это произведение уравнение (17,5) примет вид

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy = 0, \qquad (17,6)$$

а его общий интеграл запишется так:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy = C. \qquad (17,7)$$

### Особые решения уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение (17,5) может быть переписано так:

$$\varphi_1(x) \cdot f_2(y) \left[\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy\right] = 0.$$

Поэтому, кроме найденного ранее общего интеграла (17,7) уравнения (17,5), ему могут также удовлетворять решения, получаемые из уравнения

$$\varphi_1(x) \cdot f_2(y) = 0. \qquad (17,8)$$

Если эти решения не входят в общий интеграл (17,7), то они будут *особыми* решениями уравнения (17,5).

**Задача 17,1.** Найти общие интегралы уравнений, особые решения, а также частные решения, удовлетворяющие начальным условиям:

Начальные условия:

1) $x^2(y^3+5)\,dx+(x^3+5)\,y^2\,dy=0,\qquad y(0)=1;$

2) $x\sqrt{1+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0,\qquad y(\sqrt{3})=0;$

3) $xy\,dx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy=0,\qquad y(\sqrt{8})=1;$

4) $y'=5\sqrt{y},\qquad y(0)=25;$

5) $\operatorname{tg} y\,dx-x\ln x\,dy=0,\qquad x\left(\frac{\pi}{2}\right)=e;$

6) $y'+y^2=1.$

**Решение.** 1) Приведем уравнение к виду (17,6). Разделим обе части уравнения на $(x^3+5)(y^3+5)$ и получим

$$\frac{x^2}{x^3+5}dx+\frac{y^2}{y^3+5}dy=0.$$

Теперь переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{x^2}{x^3+5}dx+\int\frac{y^2}{y^3+5}dy=C_1;$$

$$\frac{1}{3}\ln|x^3+5|+\frac{1}{3}\ln|y^3+5|=\frac{1}{3}\ln|C|.$$

(Здесь мы заменили $C_1$ на $\frac{1}{3}\ln|C|$).

Отсюда общий интеграл запишется так:

$$(x^3+5)(y^3+5)=C.$$

Следует также рассмотреть уравнение $(x^3+5)(y^3+5)=0$. Но решения этого уравнения не являются особыми, так как они получаются из общего интеграла при $C=0$. (Напоминаем, что *особым решением* дифференциального уравнения называется такое его решение, которое не может быть получено из общего ни при одном частном значении произвольной постоянной $C$).

Используя начальное условие, найдем $C$: подставляем $x=0$, $y=1$ в общий интеграл:

$$(0+5)(1+5)=C;\ C=30.$$

Частное решение, соответствующее начальному условию:

$$(x^3+5)(y^3+5)=30.$$

2) Приведем уравнения к виду (17,6). Для этого разделим обе его части на $\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}$. После деления получим

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=0.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим общий интеграл:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = C.$$

Отсюда

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C \quad (C > 0). \tag{17,9}$$

($C > 0$, так как рассматриваются только арифметические значения корня).

Теперь следует решить вопрос об особых решениях. Для этого рассмотрим уравнение

$$\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2} = 0.$$

Действительных решений это уравнение не имеет, а потому и нет особых решений.

Частное решение получим из условия $y = 0$ при $x = \sqrt{3}$. Подставляя эти значения $x$ и $y$ в общий интеграл (17,9), получим

$$\sqrt{1+3} + \sqrt{1+0} = C; \ C = 3;$$

и частным решением будет

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = 3.$$

3) Обе части уравнения делим на $y\sqrt{1+x^2}$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \frac{1+y^2}{y}\,dy = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = C$$

или

$$\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + \frac{y^2}{2} = C.$$

Чтобы рассмотреть вопрос об особых решениях, надо приравнять нулю произведение $y\sqrt{1+x^2} = 0$. Отсюда следует, что $y = 0$, $\sqrt{1+x^2} = 0$.

Решение $y = 0$ является особым решением, так как оно удовлетворяя уравнению не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении $C$. Уравнение же $\sqrt{1+x^2} = 0$ действительных решений не имеет.

Частное решение получим, подставляя в общий интеграл $x = \sqrt{8}$; $y = 1$:

$$\sqrt{1+8} + \ln 1 + \frac{1}{2} = C; \ C = \frac{7}{2}.$$

Частное решение

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=\frac{7}{2},$$

или

$$2\sqrt{1+x^2}+\ln y^2+y^2=7.$$

4) Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=5\sqrt{y}$.

Отсюда, деля обе части уравнения на $5\sqrt{y}$ и умножая на $dx$, получим

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}}=dx.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл

$$\frac{2}{5}\sqrt{y}=x+C, \qquad (17{,}10)$$

или

$$y=\frac{25}{4}(x+C)^2.$$

Чтобы получить особое решение, рассмотрим уравнение $5\sqrt{y}=0$, откуда $y=0$. Это решение будет особым, так как оно не может быть получено из общего ни при одном числовом значении произвольной постоянной $C$.

Частное решение получим из (17,10), подставляя в него $x=0$, $y=25$:

$$\frac{2}{5}\sqrt{25}=0+C;\ C=2,$$

и частным решением будет

$$y=\frac{25}{4}(x+2)^2.$$

5) Для того, чтобы разделить переменные, разделим обе части уравнения на $\operatorname{tg} y\cdot\ln x$, и получим $\frac{dx}{x\ln x}-\frac{dy}{\operatorname{tg} y}=0$, а интегрируя

$$\int\frac{dx}{x\ln x}-\int\frac{dy}{\operatorname{tg} y}=\ln|C|,$$

найдем

$$\ln|\ln x|-\ln|\sin y|=\ln|C|.$$

Отсюда

$$\frac{\ln x}{\sin y}=C,$$

или

$$\ln x=C\sin y.$$

Общий интеграл уравнения

$$x = e^{C \sin y}. \tag{17,11}$$

Для решения вопроса об особом решении надо приравнять нулю выражение $\operatorname{tg} y \cdot x \ln x$, на которое мы делим уравнение:

$$\operatorname{tg} y \cdot x \ln x = 0.$$

Отсюда $\operatorname{tg} y = 0$; $x = 0$; $\ln x = 0$. Таким образом, $y = k\pi$ ($k = 0$, $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm \ldots$); $x = 0$; $x = 1$.

Но из общего интеграла при $C = 0$ получаем $x = 1$. Значит, $x = 1$ является не особым решением, а частным. При $C = -\infty$ имеем $x = 0$, а потому $x = 0$ также не особое решение, а частное. При $C = +\infty$ будет $y = k\pi$, что следует из (17,11), и поэтому эти решения не особые, а частные. Таким образом, решения $x = 0$; $x = 1$ и $y = k\pi$ «подозрительные» на особенность являются попросту частными решениями. Значит, особых решений уравнение не имеет.

Чтобы найти частное решение, подставим в (17,11) $x = e$; $y = \frac{\pi}{2}$, и получим

$$e = e^{C \sin \frac{\pi}{2}}; \; e = e^C; \; C = 1.$$

Поэтому частным решением будет

$$x = e^{\sin y}.$$

6) Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2.$$

Разделим обе части уравнения на $1 - y^2$ и умножим на $dx$. Получим уравнение, в котором переменные разделены:

$$\frac{dy}{1 - y^2} = dx.$$

Интегрируем обе его части:

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = x + C;$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = x + C.$$

Отсюда

$$\ln \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = 2(x + C); \; \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = e^{2(x+C)};$$

$$\frac{1 + y}{1 - y} = e^{2(x+C)}, \quad \text{или} \quad \frac{1 + y}{1 - y} = -e^{2(x+C)}.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) $\dfrac{1 + y}{1 - y} = e^{2(x+C)}$; $y = \dfrac{e^{2(x+C)} - 1}{e^{2(x+C)} + 1} = \dfrac{e^{(x+C)} - e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)} + e^{-(x+C)}}$.

Общий интеграл: $y = \operatorname{th}(x+C)$.

2) $\frac{1+y}{1-y} = -e^{2(x+C)}$; $y = \frac{e^{2(x+C)}+1}{e^{2(x+C)}-1} = \frac{e^{(x+C)}+e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)}-e^{-(x+C)}}$.

Общий интеграл: $y = \operatorname{cth}(x+C)$.

Чтобы решить вопрос об особом решении, приравняем нулю выражение $1-y^2$, на которое мы делили обе части уравнения:

$$1-y^2=0, \quad y=\pm 1.$$

Эти решения являются особыми, так как не могут быть получены из общего ни при одном числовом значении произвольной постоянной $C$.

**Задача 17,2** (для самостоятельного решения).

Найти общие интегралы, особые и частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y'=0$; 2) $y'=a$; 3) $y'=2x^2+5x+12$; $y(1)=\frac{1}{6}$;

4) $y'-y^2-3y+4=0$;

5) $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$; $y(0)=1$;

6) $(1+y^2)\,dx+(1+x^2)\,dy=0$; $y(1)=2$.

Указания. В пятом уравнении произвольную постоянную выгодно ввести под видом $\arcsin C$, в шестом уравнении — под видом $\operatorname{arctg} C$.

**Ответ.** 1) $y=C$; 2) $y=ax+C$;

3) $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+12x+C$. Частное решение $y=$ $=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+12x-15$.

4) $y=\frac{1+4e^{5(x+C)}}{1-e^{5(x+C)}}$; $y=\frac{1-4e^{5(x+C)}}{1+e^{5(x+C)}}$.

Решения $y=1$ и $y=-4$ — частные. Они содержатся в общем решении: первое при $C=-\infty$, второе при $C=+\infty$.

5) $\arcsin x+\arcsin y=\arcsin C$, или, беря синус обеих частей, $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$. Учесть, что $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

Особое решение $y=\pm 1$. Частное решение $x\sqrt{1-y^2}+$ $+y\sqrt{1-x^2}=1$.

6) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg} C$. Беря тангенс обеих частей, это равенство можно записать в виде $\frac{x+y}{1-xy}=C$. Частное решение $\frac{x+y}{1-xy}=-3$. Учесть, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)=$ $=x$.

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c) \qquad (17,12)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$ax + by + c = z; \ a + by' = z'; \ y' = \frac{z' - a}{b}.$$

Уравнение (17,12) принимает вид:

$$\frac{z' - a}{b} = f(z); \ z' = bf(z) + a;$$

$$\frac{dz}{dx} = bf(z) + a, \ \text{ или } \ \frac{dz}{bf(z) + a} = dx.$$

Последнее уравнение — уравнение, в котором переменные разделены. В общем интеграле следует перейти к старой переменной, заменив $z$ на $ax + by + c$.

**Задача 17,3.** Найти решения уравнений:

$$1)\ y' = \frac{1}{3x + y}; \ 2)\ y'(y + x) = 1; \ 3)\ y' = 3^{3x+2y}.$$

**Решение.** Первое и второе уравнения этой задачи относятся к типу (17,12), а третье — уравнение с разделяющимися переменными.

1) Подстановка: $3x + y = z$. Дифференцируя, находим: $3 + y' = z'$; $y' = z' - 3$. Поэтому $z' - 3 = \frac{1}{z}$; $z' = \frac{1 + 3z}{z}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1 + 3z}{z}$. Разделяем переменные, умножая обе части последнего уравнения на $\frac{z}{1 + 3z} dx$. Получаем $\frac{z}{1 + 3z} dz = dx$.

Интегрируя, находим

$$\int \frac{z}{1 + 3z} dz = x + C;$$

откуда, вычисляя интеграл, получаем

$$\frac{1}{3} z - \frac{1}{9} \ln|1 + 3z| = x + C,$$

а заменяя $z$ на $3x + y$, имеем

$$\frac{1}{3}(3x + y) - \frac{1}{9} \ln|9x + 3y + 1| = x + C.$$

2) Подстановка: $x + y = z$.

Ответ. $y - \ln|x + y + 1| = C$.

3) Представить правую часть в виде $3^{3x+2y} = 3^{3x} \cdot 3^{2y}$: $\frac{dy}{dx} = 3^{3x} \cdot 3^{2y}$; $\frac{dy}{3^{2y}} = 3^{3x} dx$.

Произвольную постоянную выгодно ввести под видом $-\frac{C}{6 \ln 3}$.

**Ответ.** $3 \cdot 3^{-2y} + 2 \cdot 3^{3x} = C$.

**Задача 17,4** (для самостоятельного решения).

Проинтегрировать уравнения:

1) $y' = 3x + 4y$; 2) $y' = \frac{2}{x+2y} - 3$; 3) $y' = \sqrt{2x + y - 3}$.

**Ответ.** 1) $y = Ce^{4x} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}$;

2) $5x + 10y + 4 \ln |5x + 10y - 4| = C - 25x$;

3) $2\sqrt{2x + y - 3} - 4 \ln (\sqrt{2x + y - 3} + 2) = x + C$.

### *Второй тип.* Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения вида

$$y' + p(x) y = q(x) \tag{17,13}$$

называются линейными потому, что искомая функция $y$ и ее производная $y'$ входят в них в первой степени.

Функции $p(x)$ и $q(x)$ предполагаются непрерывными в промежутке $(a, b)$, в котором ищется решение уравнения (17,13).

Если правая часть в (17,13) — функция $q(x)$ тождественно равна нулю при всех значениях $x$ из $(a, b)$, то уравнение принимает вид

$$y' + p(x) y = 0 \tag{17,14}$$

и называется в этом случае линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Оно соответствует уравнению (17,13), которое при $q(x) \neq 0$ называется неоднородным. Отметим, что линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Иногда уравнение (17,14) называется линейным уравнением без правой части.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (17,13) можно найти с помощью подстановки

$$y = e^{-\int p(x)\,dx} v(x), \tag{17,15}$$

где $v(x)$ — новая искомая функция. Множитель $e^{-\int p(x)\,dx}$ — общее решение линейного однородного уравнения (17,14), соответствующего уравнению (17,13), причем в этом общем решении опущен множитель $C$.

Эта подстановка предпочтительнее указанной в учебниках — $y = uv$, так как функция $u$ всегда равна выражению $e^{-\int p(x)\,dx}$ и ее, собственно, каждый раз отыскивать излишне.

Подстановка (17,15) приводит (17,13) к уравнению с разделяющимися переменными.

**Задача 17,5.** Найти решение уравнения $y' + y = e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

(Прежде всего обратите внимание на то, что уравнение — линейное, так как искомая функция $y$ и ее производная $y'$ входят в него в первой степени).

**Решение.** Сравнивая это уравнение с (17,13), мы видим, что функция $p(x)$ — коэффициент при $y$ — равна 1.

Чтобы применить подстановку (17,15), вычислим $\int p(x)\,dx$, который при $p(x) = 1$ запишется в виде $\int p(x)\,dx = \int dx = x$, а $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-x}$. Поэтому подстановка (17,15) имеет вид

$$y = e^{-x}v. \qquad (17,16)$$

Подставим выражение (17,16) в заданное уравнение. Для этого (17,16) продифференцируем как произведение

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = e^{-x}v'(x) - v(x)\,e^{-x} \\ & + \\ 1 & y = \qquad\qquad\quad v(x)\,e^{-x} \\ \hline & e^x = e^{-x}v'(x) \end{array}$$

(Складывая в левых частях этих равенств $y' + y$, мы получаем правую часть заданного уравнения, т. е. $e^x$).

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}e^{-x} = e^x.$$

Умножая обе его части на $e^x\,dx$, получим

$$dv = e^{2x}\,dx,$$

а интегрируя, найдем

$$v = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Подставляя найденное значение $v$ в (17,16) получим

$$y = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)e^{-x},$$

или

$$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x. \qquad (17,17)$$

Как доказывается в теории интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка (17,13), общее решение этого уравнения равно сумме двух слагаемых, из которых одно является общим решением соответствующего однородного уравнения (17,14), а другое — его частным решением неоднородного уравнения (оно получается из общего при $C = 0$). В нашем случае в (17,17) первое слагаемое $Ce^{-x}$ — общее решение однородного линейного уравнения $y' + y = 0$, соответствующего заданному, а второе $\frac{1}{2}e^x$ — частное решение заданного уравнения

Действительно, уравнение $y' + y = 0$ — уравнение с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{dx} = -y$; $\frac{dy}{y} = -dx$. Интегрируя, получим

$$\ln|y| = -x + \ln|C|;\ \ln|y| - \ln|C| = -x;\ \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x;$$

$$\left|\frac{y}{C}\right| = e^{-x};\quad |y| = |C|e^{-x};\quad y = Ce^{-x}.$$

Из (17,17) определим произвольную постоянную $C$, используя начальное условие $y(0) = 1$:

$$1 = Ce^0 + \frac{1}{2}e^{2.0};\ 1 = C + \frac{1}{2};\ C = \frac{1}{2}.$$

Подставляя в (17,17) $C = \frac{1}{2}$, получим частное решение $y = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$, т. е. частным решением является $y = \operatorname{sh} x$.

**Задача 17,6.** Найти общее решение уравнения $y' - 4y = \cos x$, а также частное, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

**Решение.** Сравнивая с (17,13), заключаем, что, $p(x) = -4$ (это коэффициент при $y$ в заданном уравнении). Чтобы применить подстановку (17,15), вычислим $-\int p(x)\,dx$, подставляя в него $p(x) = -4$:

$$-\int p(x)\,dx = -\int -4\,dx = 4x,$$

а $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{4x}$.

Поэтому (17,15) запишется так:

$$y = ve^{4x}. \tag{17,18}$$

Подставляя это значение $y$ в заданное уравнение, получим

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = v'e^{4x} + 4ve^{4x} \\ -4 & y = \qquad\quad ve^{4x} \\ \hline & \cos x = v'e^{4x} \end{array}$$

(при сложении два последних слагаемых уничтожились). Получилось уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx}e^{4x} = \cos x.$$

Умножая обе его части на $e^{-4x}\,dx$, получим

$$dv = e^{-4x}\cos x\,dx.$$

Интеграл правой части найден в задаче (4,22). В формуле (4,11) надо взять $a = -4$; $b = 1$.

Поэтому $v = \frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C$, а из (17,18) получаем:

$$y = \left[\frac{e^{-4x}}{17}(\sin x - 4\cos x) + C\right]e^{4x};$$

$$y = Ce^{4x} + \frac{1}{17}(\sin x - 4\cos x). \tag{17,19}$$

Здесь опять-таки следует обратить внимание на то, что слагаемое $Ce^{4x}$ есть общее решение однородного линейного уравнения $y' - 4y = 0$, соответствующего данному неоднородному, а второе слагаемое — частное решение всего данного уравнения. Это слагаемое получается из общего решения при $C = 0$.

Чтобы определить частное решение, подставляем в (17,19) $x = 0$; $y = 1$ и получаем:

$$1 = C - \frac{4}{17}; \quad C = \frac{21}{17},$$

поэтому частным решением будет

$$y = \frac{1}{17}(21e^{4x} + \sin x - 4\cos x).$$

**Задача 17,7** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$x' + ax = e^{bt} \quad (a + b \neq 0).$$

Рассмотреть также случай $a + b = 0$.

Указание. Здесь искомая функция не $y$, как было в двух предыдущих задачах, а $x$, независимой переменной является $t$ (это усматриваем из того, что правая часть $e^{bt}$ — функция $t$).

Вместо интеграла $-\int p(x)\,dx$ в (17,15) надо вычислить $-\int a\,dt = -at$. Поэтому подстановка (17,15) будет такой:

$$x = v(t)\,e^{-at}.$$

**Ответ.** $x = Ce^{-at} + \dfrac{e^{bt}}{a+b} \quad (a + b \neq 0).$

Если $a + b = 0$, то $x = Ce^{-at} + te^{-at}$.

Указание. Если $a + b = 0$, то $b = -a$.

В трех последних задачах коэффициент при первой степени искомой функции в линейном уравнении был величиной постоянной (это были числа 1, $-4$, $a$).

Теперь мы решим задачу, в которой этот коэффициент есть функция независимой переменной.

**Задача 17,8.** Найти решение уравнения

$$y' + y\cos x = \sin x \cos x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

(Уравнение линейное, так как искомая функция $y$ и ее производная $y'$ входят в уравнение в первой степени).

**Решение.** Сравнивая заданное уравнение с (17,13), заключаем, что $p(x) = \cos x$; $-\int p(x)\,dx = -\int \cos x\,dx = -\sin x$. Поэтому множитель $e^{-\int p(x)\,dx}$ в (17,15) равен $e^{-\sin x}$, а подстановка (17,15) запишется так:

$$y = v(x)\,e^{-\sin x}. \qquad (17,20)$$

Подставляя это значение $y$ в заданное уравнение, получим:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y' = v'e^{-\sin x} - ve^{-\sin x}\cos x \\ \cos x & y = \qquad\qquad ve^{-\sin x} \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin x\cos x = v'e^{-\sin x}} \end{array}$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx}e^{-\sin x} = \sin x\cos x.$$

Умножая его обе части на $e^{\sin x}$, получим

$$dv = e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx,$$

а

$$v = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx = e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\,dx =$$

$$\left|\begin{array}{l|l} u = \sin x & du = \cos x\,dx \\ dt = e^{\sin x}\cos x\,dx & t = e^{\sin x} \end{array}\right| \bullet$$

$$= e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Подставляя это значение $v$ в (17,20), найдем

$$y = (e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C)\,e^{-\sin x};$$

$$y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Теперь найдем частное решение. Подставляем в общее решение начальное условие $x = 0$; $y = 0$; $0 = C - 1$; $C = 1$. Частное решение запишется так:

$$y = e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

**Задача 17,9** (для самостоятельного решения).

Найти общие и частные решения следующих линейных уравнений:

1) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$

2) $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 4x + 5;\quad y(-1) = \frac{3}{2};$

3) $\frac{dx}{dt} - \frac{nx}{t+1} = e^t(t+1)^n;\quad x(0) = 1.$

Указания. При решении многих задач придется пользоваться формулой $e^{\ln N} = N$. В первом уравнении $p(x) = \mathrm{tg}\,x$;

$$-\int p(x)\,dx = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \ln\cos x;\quad e^{-\int p(x)\,dx} = e^{\ln\cos x} = \cos x.$$

Во втором уравнении

$$p(x) = -\frac{1}{x+2};\quad -\int p(x)\,dx = \int\frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|;$$

$$e^{-\int p(x)\,dx} = e^{\ln(x+2)} = x + 2.$$

Подстановка: $y = v(x)(x+2)$. Функция $v(x) = \int \frac{x^2+4x+5}{x+2}dx = \frac{(x+2)^2}{2} + \ln(x+2) + C$.

**Ответ.** 1) $y = C\cos x + \sin x \cos x$; частное решение: $y = \sin x \cos x$;

2) $y = C(x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)\ln(x+2)$; частное решение: $y = (x+2) + \frac{(x+2)^3}{2} + (x+2)\ln(x+2)$;

3) $x = C(t+1)^n + e^t(t+1)^n$; частное решение: $x = e^t(t+1)^n$.

**Задача 17,10** (для самостоятельного решения).

Найти общие интегралы и частные решения линейных уравнений:

1) $y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = -\operatorname{cosec} x - \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $y' - 2xy = 1 - 2x^2$; $y(0) = 2$;

3) $xy' + y = x^2 + 3x + 2$; $y(1) = \frac{29}{6}$.

**Указания.** 1) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln \operatorname{tg} x$; $e^{\ln \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$. Подстановка: $y = v \operatorname{tg} x$.

2) $p(x) = -2x$; $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{x^2}$. Подстановка: $y = ve^{x^2}$.

3) Обе части уравнения разделить на $x$. Функция $p(x) = \frac{1}{x}$; $-\int p(x)\,dx = -\ln x$; $e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$. Подстановка: $y = v \cdot \frac{1}{x}$.

**Ответ.** 1) $y = C\operatorname{tg} x + \cos x$; $y = \operatorname{tg} x + \cos x$;

2) $y = Ce^{x^2} + x$; $y = 2e^{x^2} + x$;

3) $y = \frac{C}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2$; $y = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3} + \frac{3x}{2} + 2$.

**Задача 17,11.** Найти общий интеграл уравнения

$$y\,dx - (x + y^2 \sin y)\,dy = 0.$$

**Решение.** Если обе части уравнения разделить на $dy$, то получится

$$y\frac{dx}{dy} - x - y^2 \sin y = 0.$$

Разделив на коэффициент при $\frac{dx}{dy}$, получим уравнение

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y \sin y,$$

в котором искомой функцией является $x$, независимой переменной — $y$. А так как искомая функция $x$ и ее производная $\frac{dx}{dy}$ входят в уравнение в первой степени, то оно линейное. Подстановка (17,15) запишется так:

$$x = v(y)\, e^{-\int p(y)\, dy} = ve^{-\int -\frac{1}{y}\, dy} = ve^{\ln y} = vy.$$

Общее решение: $x = Cy - y \cos y$.

**Задача 17,12** (для самостоятельного решения).

Найти общие интегралы уравнений:

1) $t\, dx + (x - t \sin t)\, dt = 0$;

2) $2y \frac{dx}{dy} + x = 2y^3$;

3) $(y^2 + 1) \frac{dx}{dy} + 2xy = 2y^2$.

Указание. Каждое из этих уравнений линейно относительно $x$ и $\frac{dx}{dy}$. Искомая функция — $x$, независимая переменная — $y$. Прежде чем интегрировать обе части уравнения, разделить на коэффициент при $\frac{dx}{dy}$.

**Ответ.** 1) $x = \frac{C}{t} + \frac{\sin t}{t} - \cos t$; 2) $x = \frac{C}{\sqrt{y}} + \frac{2}{7} y^3$;

3) $x = \frac{2}{3} \frac{y^3 + C}{y^2 + 1}$.

**Задача 17,13.** Найти общие интегралы уравнений:

1) $y' - \frac{2x+1}{x^2+x+1} y = \cos x - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \sin x$;

2) $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x - \frac{x^2 \cos x}{\sin x}$;

3) $y' - \frac{2}{x} y = \frac{e^x (x-2)}{x}$.

Указание. В третьем уравнении при интегрировании по частям, которое надо будет применить, два интеграла взаимно уничтожатся. Интегрировать по частям придется только один раз.

**Ответ.** 1) $y = C(x^2 + x + 1) + \sin x$;
2) $y = C \sin x + x^2$;
3) $y = Cx^2 + e^x$.

### *Третий тип.* Уравнение Бернулли

Если правую часть линейного уравнения (17,13) умножить на $y^n$ при условии, что $n$ — любое действительное число, кроме нуля и единицы ($n \neq 0$ и $n \neq 1$), то получим уравнение вида

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^n. \qquad (17,21)$$

Оно называется уравнением Бернулли.

Так как $n \neq 0$ и $n \neq 1$, то это уравнение не является линейным.

После умножения его обеих частей на $y^{-n}$ и подстановки $y^{1-n} = z$, где $z$ — новая искомая функция, оно приводится к линейному, интегрированием которого мы уже занимались.

Преобразование уравнения Бернулли в линейное будем проводить в такой последовательности:

1) умножим обе части уравнения на $y^{-n}$;

2) введем подстановку $y^{1-n} = z$. Обе части этого равенства продифференцируем: $(1-n)\,y^{-n}y' = z'$; $y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$;

3) полученное уравнение проинтегрируем как линейное с помощью подстановки (17,15), в которой вместо $y$ надо писать $z$;

4) возвратимся к искомой функции, заменяя $z$ на $y^{1-n}$.

Подробно мы рассматриваем решение только одного уравнения Бернулли и для самостоятельного решения предлагаем 5 уравнений, учитывая большое число упражнений, выполненных при интегрировании линейных уравнений.

**Задача 17,14.** Найти общее решение уравнения

$$xy' - y\,(2y \ln x - 1) = 0.$$

**Решение.** Приведем уравнение к виду (17,21):

$$y' + \frac{1}{x}\,y = 2\,\frac{\ln x}{x}\,y^2$$

(обе части уравнения мы разделили на $x$ и слагаемое, содержащее $y$ в первой степени, оставили в левой части уравнения).

1) Обе части уравнения умножим на $y^{-2}$:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}\,y^{-1} = 2\,\frac{\ln x}{x}. \tag{17,22}$$

2) Сделаем теперь подстановку

$$y^{-1} = z. \tag{17,23}$$

Дифференцируя обе части этого равенства и помня, что $y$ есть функция $x$, получим

$$-y^{-2}y' = z', \quad \text{а} \quad y^{-2}y' = -z'.$$

Делая эти замены в (17,22), получим уравнение

$$-z' + \frac{1}{x}\,z = 2\,\frac{\ln x}{x},$$

или

$$z' - \frac{1}{x}\,z = -2\,\frac{\ln x}{x},$$

которое линейно относительно $z$ и $z'$.

Чтобы сделать подстановку (17,15), вычислим сначала входящий в нее интеграл.

У нас $p(x) = -\frac{1}{x}$; $-\int p(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$; $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{\ln x} = x$.

Подстановка: $z = vx$.

$$\begin{array}{r|l} & z' = v'x + v \\ -\frac{1}{x} & z = \quad vx \\ \hline \end{array}$$

$$-2\frac{\ln x}{x} = v'x; \quad \frac{dv}{dx} = -2\frac{\ln x}{x^2};$$

$$dv = -2\frac{\ln x}{x^2}\,dx;$$

$$v = -2\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -2\left(-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2}\right) = 2\frac{\ln x}{x} + 2\frac{1}{x} + C;$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{1}{x}\,dx \\ dt = \frac{dx}{x^2} & t = -\frac{1}{x} \end{array}\right|$$

$$z = vx = \left(2\frac{\ln x}{x} + 2\frac{1}{x} + C\right)x;$$

$$z = Cx + 2(\ln x + 1).$$

Чтобы возвратиться к исходной искомой функции, воспользуемся сделанной подстановкой (17,23) и получим

$$y^{-1} = Cx + 2(\ln x + 1).$$

**Задача 17,15.** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнения:

1) $x^2y^2\frac{dy}{dx} + xy^3 = a^2$; 2) $xy' - y^2\ln x + y = 0$;

3) $y' - \frac{1}{x}y = -y^2$; 4) $(x^2 - 4)y' - 4y = -(x+2)y^2$;

5) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.

Указание. Прежде чем делать какие-нибудь преобразования в уравнениях 1, 2 и 4, следует разделить обе части уравнения на коэффициент при $y'$.

**Ответ.** 1) $y^3 = \frac{C}{2x^3} + \frac{3a^2}{2x}$; 2) $\frac{1}{y} = 1 + \ln x + Cx$;

3) $y = \frac{2x}{x^2 + C}$; 4) $\frac{1}{y} = \frac{x+2}{x-2}[C + \ln(x+2)]$;

5) $\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1-x^2}{3}$.

### *Четвертый тип.* Однородные уравнения

(Эти уравнения не следует смешивать с линейными однородными уравнениями (17,14), которые рассматривались выше).

Если уравнения $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ не изменяются при замене $x$ на $kx$ и $y$ на $ky$, то они называются однородными. Подстановка

$$y = ux, \tag{17,24}$$

где $u$ — новая искомая функция, преобразует однородное уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

После того как новое уравнение будет проинтегрировано, следует $u$ заменить на $\frac{y}{x}$.

**Задача 17,16.** Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

$$1)\ y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0; \quad 2)\ xy\,dy - y^2\,dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}}\,dx.$$

**Решение.** 1) Прежде всего следует убедиться, что это уравнение однородное. Заменив $x$ на $kx$, а $y$ на $ky$, заметим, что уравнение не изменилось. Это и доказывает, что оно однородное. Сделаем подстановку (17,24): $y = ux$. Тогда $y' = u'x + u$, и уравнение перепишется так:

$$u'x + u + \frac{x^2 + u^2x^2}{xux} = 0,$$

или, сокращая на $x^2$:

$$u'x + u + \frac{1 + u^2}{u} = 0,$$

откуда $u'x + \frac{1 + 2u^2}{u} = 0$; $\frac{du}{dx}x = -\frac{1 + 2u^2}{u}$.

Теперь мы получили уравнение с разделяющимися переменными, которое после разделения переменных запишется следующим образом:

$$-\frac{u}{1 + 2u^2}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$-\frac{1}{4}\ln(1 + 2u^2) = \ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln(1 + 2u^2)^{-1} = 4\ln|x| + 4\ln|C|,$$

или, переходя от логарифмов к числам, т. е. потенцируя, находим

$$\frac{1}{1 + 2u^2} = Cx^4.$$

Заменим теперь $u$ на $\frac{y}{x}$ и получим

$$\frac{1}{1+\frac{2y^2}{x^2}} = Cx^4; \quad \frac{x^2}{x^2+2y^2} = Cx^4.$$

Сократим на $x^2$, тогда $\frac{1}{x^2+2y^2} = Cx^2$.

Это решение удобнее записать в виде

$$\frac{1}{(x^2+2y^2)\,x^2} = C,$$

или $x^2(x^2+2y^2) = \frac{1}{C}$.

Заменяя $\frac{1}{C}$ на $C_1$, получаем

$$x^2(x^2+2y^2) = C_1.$$

2) В том, что это уравнение однородное, легко убедиться, заменив $x$ на $kx$, а $y$ на $ky$. Замечаем, что при этом уравнение не изменилось. Перепишем его для удобства в виде

$$[(x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} + y^2]\,dx - xy\,dy = 0$$

и сделаем подстановку $y = ux$, из которой следует, что

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Уравнение перепишется в виде

$$[(x+ux)^2 e^{-u} + u^2x^2]\,dx - ux^2(u\,dx + x\,du) = 0.$$

Разделив обе его части на $x^2$, получим уравнение

$$[(1+u)^2 e^{-u} + u^2]\,dx - u(u\,dx + x\,du) = 0,$$

или

$$[(1+u)^2 e^{-u} + u^2 - u^2]\,dx - ux\,du = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим уравнение

$$\frac{dx}{x} - \frac{u\,du}{(1+u)^2 e^{-u}} = 0. \qquad (17{,}25)$$

Интеграл

$$\int \frac{u\,du}{(1+u)^2 e^{-u}} = \int \frac{ue^u\,du}{(1+u)^2} = \frac{e^u}{1+u}.$$

Поэтому из (17,25) получаем

$$\ln x - \frac{e^u}{1+u} = -\ln C,$$

или

$$\ln x + \ln C = \frac{e^u}{1+u}.$$

Заменяя $u$ на $\frac{y}{x}$, получаем

$$\ln Cx = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{1+\frac{y}{x}}; \quad \ln Cx = \frac{xe^{\frac{y}{x}}}{x+y},$$

и окончательно

$$(x+y)\ln Cx = xe^{\frac{y}{x}}.$$

Помещаем для самостоятельного решения еще 5 однородных уравнений.

**Задача 17,17.** Проинтегрировать уравнения:

1) $(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0$; 2) $(x^2 - xy)\,dy + y^2\,dx = 0$;

3) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1$; 4) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$;

5) $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0$.

Указание. В третьем уравнении $\int \frac{du}{e^u+1} = \int \frac{e^u+1-e^u}{e^u+1}\,du = u - \ln(e^u+1)$. Полученное решение разрешить относительно $e^{\frac{y}{x}}$.

**Ответ.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right)$; 2) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$;
3) $e^{\frac{y}{x}} = \frac{Cx}{1-Cx}$; 4) $y = 2x\operatorname{arctg} Cx$; 5) $\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}$.

В заключение этого практического занятия решим несколько задач из физики и механики, которые требуют составления дифференциального уравнения первого порядка и его интегрирования.

В задачах 17,18—17,21, несмотря на их внешнее различие, две переменные величины $x$ и время $t$, участвующие в них, обладают тем общим свойством, что *скорость изменения одной из них* ($x$) *по отношению к другой* ($t$) *пропорциональна наличному количеству величины* $x$ *в рассматриваемый момент времени.*

Учитывая, что скорость изменения величины $x$ есть производная $\frac{dx}{dt}$, обозначим через $k$ коэффициент пропорциональности. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс, будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = kx. \qquad (17,26)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и интегрируется оно очень просто.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x}=k\,dt;\quad \ln|x|=kt+\ln|C|,$$

или

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right|=kt;\quad \left|\frac{x}{C}\right|=e^{kt};\quad |x|=|C|e^{kt};$$

$$x=Ce^{kt}. \tag{17,27}$$

Таким образом, решением уравнения (17,26) является показательная функция.

Условие задачи должно содержать данные:

1) для определения произвольной постоянной, т. е. значение $x_0$ величины $x$ в момент времени $t=t_0$: $x(t_0)=x_0$;

2) для определения коэффициента пропорциональности $k$.

Уравнение (17,26) описывает процесс непрерывного роста или непрерывного убывания величины $x$, причем, как видно из решения (17,27), рост имеет место при положительном коэффициенте пропорциональности $k$, а убывание — при отрицательном $k$.

**Задача 17,18.** Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Количество радия в начале процесса ($t=0$) было равно $x_0$. Известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества.

1) Через сколько лет количество нераспавшегося радия будет составлять 80% первоначального?

2) Определить, какой процент радия сохранится через 300 лет.

**Решение.** Уравнение (17,26) описывает процесс радиораспада. Определим в (17,27) произвольную постоянную $C$. Известно из условия задачи, что в начальный момент, т. е. при $t=0$, количество радия равно $x_0$. Таким образом, начальное условие: $x(0)=x_0$. Подставляя в (17,27) $t=0$; $x=x_0$, получим

$$x_0=Ce^{0\cdot t};\quad C=x_0,$$

а потому (17,27) перепишется так:

$$x=x_0e^{kt}. \tag{17,28}$$

Задача содержит условие, позволяющее определить коэффициент пропорциональности $k$: когда $t=1600$, количество радия $x$ равно половине начального, т. е. $x=\frac{x_0}{2}$. Подставляя в (17,28) $\frac{x_0}{2}$ вместо $x$ и 1600 — вместо $t$, получаем $\frac{x_0}{2}=x_0e^{k\cdot 1600}$. Сокращая на $x_0$, получим $\frac{1}{2}=e^{k\cdot 1600}$. Для определения $k$, прологарифмируем по основанию $e$ обе части этого равенства:

$$\ln\frac{1}{2}=k\cdot 1600;\quad \ln 1-\ln 2=k\cdot 1600;\quad k=-\frac{\ln 2}{1600}.$$

Теперь решение (17,28) перепишется в виде

$$x = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600} t},$$

или

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}. \qquad (17,29)$$

Ответим на первый вопрос задачи. По условию $\frac{x}{x_0} = 0,8\,(80\%)$. Подставляя это значение в последнее уравнение, имеем

$$0,8 = e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}.$$

Для определения $t$ прологарифмируем обе части равенства

$$\ln 0,8 = -\frac{\ln 2}{1600} t,$$

отсюда

$$t = -\frac{1600 \ln 0,8}{\ln 2} = -\frac{1600\,(-0,223\,14)}{0,69315} \approx 515 \text{ лет.}$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, найдем из (17,29) отношение $\frac{x}{x_0}$ при $t = 300$:

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600} \cdot 300}; \quad \frac{x}{x_0} = e^{-\frac{0,69315 \cdot 300}{1600}} = e^{-0,130} \approx 0,878 = 87,8\%.$$

Таким образом, через 300 лет сохранится 87,8% начального количества радия, а следовательно, распадется за 300 лет 12,2%.

**Задача 17,19** (для самостоятельного решения).

Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Определить, за какое время тело, нагретое до температуры $x_0 = 300°$, помещенное в жидкость, температура которой 60°, охладится до 150°, если считать количество жидкости настолько большим, что ее температура практически остается без изменения. При этом известно, что через 10 минут после начала процесса температура тела равна 200°.

У к а з а н и е. Обозначить через $x$ непрерывно убывающую температуру тела $(300 \leqslant x \leqslant 60)$. Разность температур тела и жидкости равна $x - 60°$. Скорость охлаждения $-\frac{dx}{dt}$. Если $k$ — коэффициент пропорциональности, то дифференциальное уравнение процесса будет таким:

$$\frac{dx}{dt} = k\,(x - 60).$$

Общее решение имеет вид

$$x - 60 = Ce^{kt}. \qquad (17,30)$$

Начальное условие: в начальный момент времени $t = 0$ температура $x_0 = 300°$:

$$300 - 60 = Ce^{k \cdot 0}; \quad C = 240.$$

Поэтому (17,30) запишется так:

$$x = 60 + 240e^{kt}. \qquad (17,31)$$

Для определения коэффициента пропорциональности $k$ используем дополнительное условие в задаче:

при $t = 10$ *мин* температура тела равна 200°. Поэтому из (17,31) при $x = 200$, $t = 10$, $200 = 60 + 240e^{k \cdot 10}$. Откуда следует, что $k = -0,053$, и тогда уравнение (17,31), связывающее температуру $x$ и время $t$, запишется так:

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо подставить сюда $x = 150$ и определить $t$.

Окажется, что $t = -\frac{1}{0,053} \ln \frac{3}{8}$.

**Ответ.** $t = 18,5$ *мин*.

**Задача 17,20** (для самостоятельного решения).

Известно, что изолированный проводник вследствие несовершенства изоляции теряет сообщенный ему заряд, причем скорость потери заряда пропорциональна наличному заряду в данный момент.

В начальный момент проводнику сообщен заряд 2000 *CGSE*. За первые две минуты проводник теряет 150 *CGSE*. Определить, через сколько минут заряд проводника станет равным половине начального.

Указание. Обозначая переменный заряд через $x$, получим дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx.$$

Его общее решение дается формулой (17,27): $x = Ce^{kt}$. Из начального условия ($x = 2000$ при $t = 0$) следует, что $C = 2000$, и тогда

$$x = 2000\, e^{kt}. \qquad (17,32)$$

Так как через две минуты заряд равен $2000 - 150 = 1850$ *CGSE*, то для определения $k$ имеем уравнение:

$$1850 = 2000e^{kt}; \quad k = \frac{1}{2} \ln \frac{37}{40} = -0,039.$$

Поэтому (17,32) перепишется так: $x = 2000^{-0,039t}$. Подставляя сюда $x = 1000$ — заряд, равный половине исходного, получаем: $1000 = 2000e^{-0,039t}$, откуда $\frac{1}{2} = e^{-0,039t}$, а $t = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{0,039}$.

**Ответ.** $t \approx 18$ *мин.*

**Задача 17,21** (для самостоятельного решения).

Предполагая, что скорость прироста населения пропорциональна его наличному количеству, и зная, что население СССР на 1 января 1962 года составляло 200 млн. человек (приближенно), а прирост за 1962 год был равен 2%, определить на основании сделанного предположения и этих данных количество населения СССР на 1 января 2000 года.

**Указание.** Дифференциальное уравнение процесса: $\frac{dx}{dt} = kx$; $x = Ce^{kt}$; $C = 200$, а потому

$$x = 200\,e^{kt}. \tag{17,33}$$

По условию за 1962 год прирост населения составил 2%. Полагая в (17,33) $x = 200 + \frac{200}{100} \cdot 2$, т. е. $x = 204$, а $t = 1$, находим $k$: $k = \ln\frac{102}{100} = \ln 1,02 = 0,02$, а поэтому уравнение (17,33) перепишется так:

$$x = 200\,e^{0,02t}.$$

На 1 января 2000 года $t = 38$, так как за начальный момент приняты сведения на 1 января 1962 года. Отсюда $x = 200e^{0,02\cdot 38}$.

**Ответ.** $x_{2000} = 428$ млн. человек.

Если бы не был принят во внимание непрерывный рост населения, то за 38 лет из расчета 2% в год прирост населения составил бы 76% начального, т. е. 152 млн. человек, и на 1 января 2000 года оно равнялось бы только $200 + 152 = 352$ млн. человек.

Ошибка была бы в $428 - 352 = 76$ млн. человек.

**Задача 17,22.** Точка движется по прямой с постоянным ускорением, равным $a\ \frac{см}{сек^2}$. В начальный момент $t = 0$, ее скорость $v = v_0$, а расстояние от начала координат — $S_0$, т. е. $v(0) = v_0$, $S(0) = S_0$.

Найти закон движения.

**Решение.** При движении по прямой ускорение есть производная от скорости по времени, а потому ускорение $a = \frac{dv}{dt}$; $dv = adt$. Интегрируя, получим $v = at + C_1$. Подставляя сюда $t = 0$, $v = v_0$, найдем $C_1 = v_0$, а потому уравнение, связывающее скорость и время, перепишется так:

$$v = at + v_0.$$

Известно, что скорость в прямолинейном движении — производная от пути по времени: $v = \frac{dS}{dt}$.

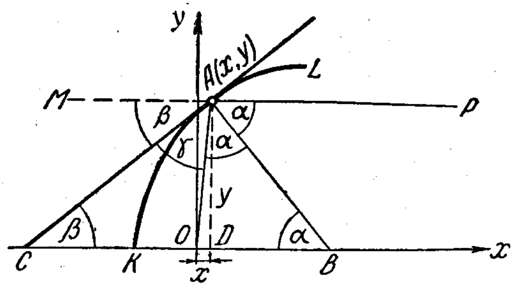
Поэтому $\frac{dS}{dt} = at + v_0$, $dS = atdt + v_0dt$, а $S = \frac{at^2}{2} + v_0t + C_2$. Используя начальное условие $S = S_0$ при $t = 0$, получим, что $C_2 = S_0$, и закон движения запишется следующим образом:

$$S = \frac{at^2}{2} + v_0t + S_0.$$

Если $S_0 = 0$, то $S = \frac{at^2}{2} + v_0t$ — хорошо известный из физики закон прямолинейного равномерно-переменного движения.

**Задача 17,23.** Определить форму зеркала, отражающего все лучи, исходящие из одной точки так, чтобы после отражения они были параллельны заданному направлению.

**Решение.** Поместим начало координат в точку, из которой исходят лучи, а заданное направление, которому должны быть параллельны отраженные лучи, примем за ось $Ox$ (см. чертеж).




К задаче 17,23

Пусть точка $A$ принадлежит зеркалу, а $AP$ — один из таких лучей. Кривая $AK$ — линия пересечения зеркала с плоскостью $xOy$. Согласно известному закону оптики, лучи падающий, отраженный и нормаль к поверхности, на которую падает луч, лежат в одной плоскости и составляют с нормалью равные углы (угол падения равен углу отражения). На чертеже $AB$ — нормаль к кривой $KL$ в точке $A(x, y)$, $OA$ — падающий луч, $AP$ — отраженный. Поэтому $\angle OAB = \angle BAP = \alpha$. Треугольник $OAB$ — равнобедренный: $OA = OB$. Сумма углов с общей вершиной в точке $A$, расположенных по одну сторону от $MP$, равна $180°$. Поэтому, так как $\alpha + \gamma = 90°$, то и $\alpha + \beta = 90°$. Значит, $\alpha + \gamma = \alpha + \beta$, а $\gamma = \beta$. Отсюда заключаем, что треугольник $COA$ — равнобедренный: $OC = OA$.

Если уравнение искомой кривой $y = f(x)$, то $\operatorname{tg}\beta = y'(x)$. Но с другой стороны, $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{OC + OD} = \frac{y}{OA + OD}$. Так как $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $OD = x$, то $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$. Подставляя сюда $\operatorname{tg}\beta = y'$, получаем дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x},$$

которое не изменяется от замены $x$ на $kx$, а $y$ на $ky$, а потому оно является однородным. Применяя подстановку $y = ux$, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{u\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+u^2}+1},$$

а после разделения переменных

$$\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{u\sqrt{1+u^2}}\,du = -\frac{dx}{x}.$$

Иметь в виду, что $\int\frac{du}{u\sqrt{1+u^2}}$ удобно вычислить при помощи подстановки $u = \frac{1}{z}$. Окажется, что он равен $-\ln\frac{1+\sqrt{u^2+1}}{u}$.

**Ответ.** $y^2 = C^2 + 2Cx$ — семейство парабол.

Зеркало должно иметь форму параболоида вращения. Докажите, что начало координат есть фокус параболы.

## ВОСЕМНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Дифференциальное уравнение порядка $n$ $(n > 1)$ имеет вид

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (18,1)$$

где по-прежнему $x$ — независимая переменная, $y$ — искомая функция. Всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная и $n$ раз дифференцируемая в промежутке $(a, b)$, называется решением этого уравнения, если она обращает его в тождество.

**Задача Коши.** Задача Коши для дифференциального уравнения (18,1) порядка $n$ ставится так:

Найти такое решение дифференциального уравнения, чтобы оно само и его производные до порядка $(n-1)$ включительно при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимали бы заданные значения, т. е. чтобы это решение удовлетворяло условиям:

$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0';\ y''(x_0) = y_0'';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (18,2)$$

где $x_0$ и $y_0$; $y_0'$; $y_0''$; ...; $y_0^{(n-1)}$ — заданные числа, которые называются начальными данными или начальными условиями. Число $x_0$ называется начальным значением независимой переменной, а числа $y_0$, $y_0'$, $y_0''$, ..., $y_0^{(n-1)}$ — начальными значениями решения и его производных.

Отличительной особенностью задачи Коши является то, что значения как искомой функции, так и всех ее производных до порядка $(n-1)$ включительно задаются *при одном и том же значении независимой переменной* $x = x_0$.

Решение уравнения (18,1) имеет в своем составе $n$ произвольных постоянных и имеет вид

$$F(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = 0.$$

Если произвольные постоянные в это решение входят так, что задачу Коши можно решить при любых начальных условиях, то оно называется общим.

**Краевая задача.** Задача интегрирования уравнения (18,1) называется краевой, если значения искомой функции $y$ и, возможно, ее производных задаются не при одном и том же значении независимой переменной, как это делается в задаче Коши, а на концах некоторого фиксированного интервала. В более общих случаях значения искомой функции или ее производных могут задаваться более чем в двух точках.

Задача Коши иногда называется одноточечной, краевые задачи — двухточечными, а в соответствующих случаях — многоточечными.

Отметим, что краевая задача не всегда имеет решение, а если она его и имеет, то оно во многих случаях не является единственным.

На этом практическом занятии будут рассмотрены три типа дифференциальных уравнений порядка выше первого, которые допускают понижение порядка и интегрируются в квадратурах.

### *Первый тип.* Уравнения, содержащие только производную порядка $n$ и независимую переменную

Эти уравнения имеют вид

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \tag{18,3}$$

Если удается это уравнение разрешить относительно $y^{(n)}$, то оно записывается так:

$$y^{(n)} = f(x). \tag{18,4}$$

Общее решение уравнения (18,4) имеет вид

$$y = \underbrace{\int dx \int dx \ \ldots \int f(x)\, dx}_{n \text{ раз}} + C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1}. \tag{18,5}$$

Из этого видно, что для получения общего решения уравнения (18,4) нужно $n$ раз проинтегрировать функцию $f(x)$ и прибавить к полученному результату многочлен от $x$ степени $(n-1)$, коэффициентами которого являются произвольные постоянные.

Если задача Коши решается для уравнения (18,4) с начальными условиями (18,2), то частное решение уравнения (18,4) имеет вид

$$y=\int\limits_{x_0}^{x}dx\int\limits_{x_0}^{x}dx\ \ldots\ \int\limits_{x_0}^{x}f(x)\,dx+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{y_0^{n-2}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\ \ldots\ +y_0'(x-x_0)+y_0. \qquad (18,6)$$

(См. В. В. Степанов. «Курс дифференциальных уравнений», стр. 154; Н. М. Матвеев. «Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений», стр. 217).

## Уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$

**Задача 18,1.** Решить задачу Коши при указанных начальных условиях для уравнений:

1) $y'''=\frac{1}{x}$; $y(1)=1$; $y'(1)=2$; $y''(1)=-2$;

2) $y^{IV}=\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$; $y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=y'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;

3) $y^{V}=e^{2x}$; $y(0)=0$; $y'(0)=-2$; $y''(0)=3$; $y'''(0)=-1$; $y^{IV}(0)=2$.

**Решение.** 1) На основании (18,6) выполним трижды интегрирование функции $\frac{1}{x}$ каждый раз в пределах от 1 до $x$ $(x_0=1)$

Первое интегрирование:

$$\int\limits_1^x\frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_1^x=\ln x.$$

Второе интегрирование:

$$\int\limits_1^x\ln x\,dx=x\ln x\Big|_1^x-\int\limits_1^x dx=x\ln x-(x-1).$$

| | |
|---|---|
| $u=\ln x$ | $du=\frac{1}{x}\,dx$ |
| $dv=dx$ | $v=x$ |

Третье интегрирование:

$$\int_1^x [x\ln x-(x-1)]dx=\int_1^x x\ln x\,dx-\int_1^x (x-1)\,dx=$$

$$\left|\begin{array}{c|c} u=\ln x & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^x-\frac{1}{2}\int_1^x x\,dx-\int_1^x (x-1)\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^x-$$

$$-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_1^x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}-\frac{(x-1)^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}.$$

На основании формулы (18,6), полагая в ней $n=3$, имеем:

$$y_0=1;\quad y_0'=+2;\quad y_0''=-2;\quad x_0=1;$$

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3}{4}x^2+x-\frac{1}{4}-(x-1)^2+2(x-1)+1.$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, получим

$$y=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{7}{4}x^2+5x-\frac{9}{4}.$$

(Проверьте, что начальные условия выполнены).

2) Проинтегрировав четырежды $\sin x$ в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до $x$ и использовав формулу (18,6) при $n=4$, при заданных начальных условиях получим после приведения подобных членов

$$y=\sin x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right).$$

(Проверьте, что начальные условия выполнены).

3) Проинтегрируем 5 раз функцию $e^{2x}$ в пределах от 0 до $x$ ($x_0=0$) и, использовав формулу (18,6) при $n=5$ и заданных начальных условиях, получим частное решение

$$y=\frac{1}{32}e^{2x}+\frac{1}{16}x^4-\frac{5}{24}x^3+\frac{23}{16}x^2-\frac{33}{16}x-\frac{1}{32}.$$

(Проверьте, что выполнены начальные условия).

**Задача 18,2** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'''=2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$; 2) $\sqrt{1+x^2}y''-1=0$;

3) $y''=\arcsin x$; 4) $y'''=27e^{3x}+120x^3$.

Указания. Воспользоваться формулой (18,5).

Уравнение 2 представить в виде $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; в уравнении 3 при вычислении $\int x \arcsin x\, dx$ воспользоваться справочником.

**Ответ.** 1) $y = \ln \sin x + C_1 + C_2x + G_3x^2$;

2) $y = x \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C_1 + C_2x$;

3) $y = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x + \frac{3}{4} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \arcsin x + C_1 + C_2x$;

4) $y = e^{3x} + x^6 + C_1 + C_2x + C_2x^2$.

**Задача 18,3.** В сопротивлении материалов доказывается, что дифференциальное уравнение упругой линии консоли с постоянным поперечным сечением и сосредоточенной на свободном конце силой $P$ имеет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{Px}{EI},$$

где $w$ — прогиб консоли в сечении с абсциссой $x$, а $EI$ — постоянная величина, так называемая жесткость на изгиб сечения балки.

Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$w(l) = 0; \quad w'(l) = 0.$$

**Решение.** Уравнение принадлежит к рассматриваемому типу. Применив формулу (18,6) при $n = 2$ и $x_0 = l$, получим

$$w(x) = -\frac{P}{EI} \int_l^x dx \int_l^x x\, dx$$

(два последних слагаемых в этой формуле исчезают, так как имеют место нулевые начальные условия);

$$w(x) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2x}{2} + \frac{l^3}{3}\right). \qquad (18,7)$$

Если не пользоваться сразу готовой формулой (18,6) (хотя в этом нет ничего предосудительного), то интегрирование уравнения можно провести так.

Первое интегрирование даст

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{P}{EI} \int x\, dx = -\frac{P}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Учитывая второе начальное условие $w'(l) = 0$, получаем уравнение для определения произвольной постоянной

$$0 = -\frac{P}{EI}\frac{l^2}{2} + C_1; \quad C_1 = \frac{P}{EI}\frac{l^2}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{P}{EI}\frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI}\frac{l^2}{2} = -\frac{P}{2EI}(x^2 - l^2).$$

Интегрируя вторично, получаем

$$w = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - l^2 x\right) + C_2.$$

Используя первое начальное условие, находим

$$0 = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{l^3}{3} - l^3\right) + C_2,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EI},$$

и поэтому окончательно

$$w = -\frac{P}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - l^2 x\right) - \frac{Pl^3}{3EI},$$

что, как легко видеть, совпадает с полученным ранее решением.

Полученное уравнение (18,7) — уравнение упругой линии консоли. Из него видно, что эта линия — кубическая парабола (парабола третьей степени).

**Задача 18,4** (для самостоятельного решения).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси простой балки постоянного сечения, несущей сплошную равномерно распределенную нагрузку интенсивностью $q$, имеет вид

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)$$

($EI$ имеет прежнее значение, $l$ — длина балки).

Краевые условия (иногда они называются граничными):
при $x = 0$ $w = 0$, иначе: $w(0) = 0$;
при $x = l$ $w = 0$, иначе: $w(l) = 0$,
т. е. на концах балки прогиб равен нулю.

**Указание.** Эта задача — краевая, так как заданы условия не в одной точке, а в двух. Поэтому формулой (18,6) воспользоваться нельзя. Можно применить формулу (18,5), найти общее решение и, пользуясь заданными условиями на краях балки, определить входящие в общее решение две произвольные постоянные.

**Ответ.** Общее решение

$$w(x) = \frac{ql}{12EI}x^3 - \frac{q}{24EI}x^4 + C_1 x + C_2.$$

Первое краевое условие дает $C_2 = 0$, второе — $C_1 = -\frac{ql^3}{24EI}$.
Искомое решение, удовлетворяющее краевым условиям:

$$w(x) = -\frac{ql^3 x}{24EI}\left[1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right].$$

**Задача 18,5.** Найти общие решения уравнений:
1) $y'' = 0$; 2) $y'' = a$.

**Решение.** 1) Если $y'' = 0$, то $y' = C_1$, отсюда $\frac{dy}{dx} = C_1$; $dy = C_1\,dx$;

$$y = C_1 x + C_2. \tag{18,8}$$

2) $y'' = a$; $y''\,dx = a\,dx$, но $y''\,dx$ — дифференциал $y'$, а потому $dy' = a\,dx$.

$$y' = ax + C_1; \quad \frac{dy}{dx} = ax + C_1;$$

$$dy = ax\,dx + C_1\,dx;$$

$$y = \frac{ax^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{18,9}$$

Уравнения этого вида часто встречаются в задачах теоретической механики, второе из них нам встретится в следующей задаче.

**Задача 18,6** (прямолинейное движение материальной частицы). При движении точки по прямой, принимаемой за ось $Ox$, основное уравнение движения точки записывается так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \tag{18,10}$$

где $m$ — масса точки; $\frac{d^2x}{dt^2}$ — ускорение, а $F_x$ — проекция действующей на точку силы на ось $Ox$.

Найти закон движения точки, падающей под действием силы тяжести, учитывая, что в начальный момент $t = t_0$ ее координата $x = x_0$, а начальная скорость равна $v_0$.

**Решение.** Направим ось $Ox$ вертикально вниз и обозначим через $g$ ускорение силы тяжести.

Уравнение движения (18,10) запишется так;

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg.$$

Сокращаем на $m$ и получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

Умножаем на $dt$ обе части равенства:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,dt = g\,dt.$$

Но $\frac{d^2x}{dt^2}\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, поэтому $d\left(\frac{dx}{dt}\right) = g\,dt$. Интегрируя, имеем $\frac{dx}{dt} = gt + C_1$. При $t = t_0$ начальная скорость $v = v_0$. Подставляя эти значения, получаем

$$v_0 = gt_0 + C_1; \quad C_1 = v_0 - gt_0.$$

Теперь

$$\frac{dx}{dt} = gt + v_0 - gt_0; \quad \frac{dx}{dt} = g(t - t_0) + v_0;$$

$$dx = [g(t - t_0) + v_0]\, dt.$$

Интегрируя вторично, находим

$$x = v_0 t + g\frac{(t - t_0)^2}{2} + C_2.$$

Но $x = x_0$ при $t = t_0$, а потому $x_0 = v_0 t_0 + C_2$; $C_2 = x_0 - v_0 t_0$. Подставив это значение $C_2$, получим окончательно

$$x = v_0 t + g\frac{(t - t_0)^2}{2} + x_0 - v_0 t_0.$$

Если $t_0 = 0$, то

$$x \neq x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}.$$

(Это тот же результат, что и в задаче 17,22, если заменить $x$ на $S$, $g$ на $a$, $x_0$ на $S_0$).

Задачу можно было решить сразу по формуле (18,6).

Теперь рассмотрим случаи интегрирования уравнения вида (18,3) $F(x, y^{(n)}) = 0$, когда решение его относительно $y^{(n)}$ затруднительно или просто невозможно.

В этом случае полагают, что

$$x = \varphi(t); \quad y^{(n)} = \psi(t). \tag{18,11}$$

Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ должны обращать уравнение (18,3) в тождество.

Дифференциал производной $(n-1)$ порядка, т. е.

$$dy^{(n-1)} = [y^{(n-1)}]'\, dx = y^{(n)}\, dx. \tag{18,12}$$

Из (18,11) следует, что $dx = \varphi'(t)\, dt$, а потому

$$dy^{(n-1)} = \underbrace{\psi(t)}_{y^{(n)}}\, \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{dx}.$$

Интегрируя, получим

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C_1 = \psi_1(t, C_1).$$

Теперь рассмотрим

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\, dx = \psi_1(t, C_1)\, \underbrace{\varphi'(t)\, dt}_{dx}$$

и, снова интегрируя, получаем

$$y^{(n-2)} = \int \psi_1(t, C_1)\, \varphi'(t)\, dt + C_2 = \psi_2(t, C_1, C_2)$$

и т. д.

В итоге окажется, что

$$y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

и решение уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ представится в виде

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Иногда выгодно взять

$$y^{(n)} = t, \tag{18,13}$$

т. е. принять параметр $t$ равным $y^{(n)}$.

**Задача 18,7.** Решить уравнение

$$e^{y''} + y'' = x. \tag{18,14}$$

**Решение.** Это уравнение относится к рассматриваемому виду $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Положим, как это указано выше в (18,13), $y'' = t$. Тогда уравнение (18,14) перепишется в виде

$$e^t + t = x.$$

Параметрическое представление заданного уравнения:

$$x = e^t + t; \quad y'' = t.$$

На основании формулы (18,12)

$$dy' = y''\,dx = t\,dx.$$

Но $dx = (e^t + 1)\,dt$, а потому

$$dy' = t(e^t + 1)\,dt.$$

Интегрируя, находим

$$y' = \int t(e^t + 1)\,dt = te^t + t^2 - \int (e^t + t)\,dt =$$

$$\underline{\left| \begin{array}{l|l} u = t & du = dt \\ dv = (e^t + 1)\,dt & v = e^t + t \end{array} \right|}$$

$$= te^t + t^2 - e^t - \frac{t^2}{2} + C_1; \quad y' = e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Умножая обе части этого уравнения на $dx$, получим

$$y'\,dx = \left[e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1\right] dx.$$

Но $dx = (e^t + 1)\,dt$, а $y'\,dx = dy$. Поэтому

$$dy = \left[e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt,$$

а

$$y = \int \left[e^t(t - 1) + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt + C_2.$$

Выполнив интегрирование, получаем

$$y = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2,$$

а общее решение предложенного уравнения имеет такое параметрическое представление:

$$x = e^t + t; \quad y = e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) + e^t\left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

**Задача 18,8** (для самостоятельного решения).

Решить уравнение

$$(y''')^2 + x^2 = 1.$$

Указание. Перейти к параметрическому представлению уравнения, положив $x = \sin t$; $y''' = \cos t$.

Убедиться, что эти значения $x$ и $y'''$ удовлетворяют уравнению ($\cos^2 t + \sin^2 t = 1$).

Учесть, что $dx = \cos t\, dt$, и поэтому

$$dy'' = y'''\, dx = \underbrace{\cos t}_{y'''}\, \underbrace{\cos t\, dt}_{dx} = \cos^2 t\, dt;$$

$$y'' = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C_1.$$

Помещаем промежуточные результаты:

$$y' = \frac{1}{2} t \sin t + \frac{3}{8} \cos t - \frac{1}{24} \cos 3t + C_1 \sin t + C_2.$$

Учесть, что

$$\int \sin 2t \cos t\, dt = -\frac{1}{6} \cos 3t - \frac{1}{2} \cos t; \quad dy = y'\, dx = y' \cos t\, dt,$$

$$\text{a } \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

**Ответ.** $y = -\frac{1}{8} t \cos t + \frac{3}{16} t + \frac{7}{48} \sin 2t - \frac{1}{192} \sin 4t - \frac{C_1}{4} \cos 2t + C_2 \sin t + C_3.$

Учтено, что

$$\int \cos 3t \cos t\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \sin 4t + \frac{1}{2} \sin 2t\right).$$

## *Второй тип.* Уравнения, не содержащие искомой функции

Уравнение порядка $n$, не содержащее искомой функции, имеет такой вид:

$$f(x,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0. \tag{18,15}$$

Порядок его может быть понижен на единицу с помощью подстановки

$$y' = p(x), \tag{18,16}$$

где $p(x)$ — новая искомая функция.

Эта подстановка приводит к уравнению

$$f(x, p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

Если уравнение (18,15) не содержит ни искомой функции $y$, ни ее производных до порядка $(k-1)$ включительно, т. е. имеет вид

$$f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{18,17}$$

то его порядок может быть понижен на $k$ единиц при помощи подстановки

$$y^{(k)} = p(x). \tag{18,18}$$

После определения функции $p(x)$ уравнение (18,17) оказывается приведенным к уравнению вида (18,3), интегрирование которого разобрано выше (см. первый тип).

К этому же типу уравнений относятся и такие, которые содержат только две последовательные производные, т. е. уравнения вида

$$f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \tag{18,19}$$

Если это уравнение можно решить относительно $y^{(n)}$, то оно принимает вид

$$y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)}) \tag{18,20}$$

и интегрируется подстановкой

$$y^{(n-1)} = p(x), \tag{18,21}$$

которая приводит к уравнению

$$\frac{dp}{dx} = \varphi(p).$$

Определив из этого уравнения функцию $p(x)$ и подставив ее в (18,21), придем к уравнению вида (18,3).

**Задача 18,9.** Найти решения уравнений:

$$1)\ (1-x^2)y'' - xy' = 2;\ 2)\ y'' = ay'.$$

(Уравнения не содержат искомой функции $y$, а потому относятся к рассматриваемому типу).

**Решение.** 1) Пусть $y' = p(x)$. Тогда $y'' = \frac{dp}{dx}$, и уравнение перепишется так:

$$(1-x^2)\frac{dp}{dx} - xp = 2.$$

Это линейное уравнение относительно $p$ и $\frac{dp}{dx}$. Разделим его обе части на коэффициент при $\frac{dp}{dx}$ и получим

$$\frac{dp}{dx}-\frac{x}{1-x^2}p=\frac{2}{1-x^2}. \qquad (18,22)$$

Сделаем подстановку (17,15).

Искомая функция

$$p=e^{-\int-\frac{x}{1-x^2}dx}v(x);$$

$$\int\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2); \quad e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}=e^{\ln\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v(x).$$

Подстановка в (18,22) дает:

$$\begin{array}{c|l} 1 & \dfrac{dp}{dx}=\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}v(x)+v'(x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ -\dfrac{x}{1-x^2} & p=\dfrac{v(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \end{array}$$

$$\frac{2}{1-x^2}=v'(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \frac{dv}{dx}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}; \quad dv=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$v=2\arcsin x+C_1; \quad p=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1).$$

Но $p=y'=\frac{dy}{dx}$, а потому

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(2\arcsin x+C_1); \quad dy=\frac{2\arcsin x+C_1}{\sqrt{1-x^2}}dx;$$

$$y=2\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx+C_1\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+C_2;$$

$$y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2.$$

2) Это уравнение относится также к рассматриваемому типу, так как оно не содержит искомой функции (его можно отнести и к частному случаю этого типа — к уравнению (18,19)).

Подстановка: $y'=p(x)$; $y''=\frac{dp}{dx}$.

Уравнение принимает вид

$$\frac{dp}{dx}=ap.$$

Переменные разделяются: $\frac{dp}{p}=adx$.

Интегрирование дает:

$$\ln p = ax + \ln C_1; \quad \ln\frac{p}{C_1} = ax; \quad \frac{p}{C_1} = e^{ax}; \quad p = C_1 e^{ax}.$$

Но $p = \frac{dy}{dx}$, а потому $\frac{dy}{dx} = C_1 e^{ax}$. Снова переменные разделяются: $dy = C_1 e^{ax}\,dx$; $y = \frac{C_1}{a} e^{ax} + C_2$. Обозначим $\frac{C_1}{a} = C_1$, и получим окончательно

$$y = C_1 e^{ax} + C_2.$$

**Задача 18,10.** Найти плоские кривые, у которых кривизна постоянна.

**Решение.** Известно, что кривизна кривой

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Найдем решение этого уравнения, полагая, что $K$ — величина постоянная.

Подстановка: $y' = p(x)$, $y'' = \frac{dp}{dx}$;

$$K = \frac{\frac{dp}{dx}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{dp}{dx} = K(1+p^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя их, получим:

$$\frac{1}{K}\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = dx; \quad \frac{1}{K}\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = x + C_1.$$

При вычислении интеграла положить $p = \operatorname{tg} z$; $1 + p^2 = \sec^2 z$; $dp = \sec^2 z\,dz$;

$$\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{\sec^2 z\,dz}{(\sec^2 z)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{dz}{\sec z} = \int\cos z\,dz = \sin z.$$

Но если $\operatorname{tg} z = p$, то $\sin z = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

Поэтому после первого интегрирования получаем

$$\frac{1}{K}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=x+C_1.$$

Определим отсюда $p$:

$$\frac{1}{K^2}\frac{p^2}{1+p^2}=(x+C_1)^2;\quad \frac{1}{K^2}p^2=(x+C_1)^2+p^2(x+C_1)^2;$$

$$\frac{1}{K^2}p^2-p^2(x+C_1)^2=(x+C_1)^2;\quad p^2\left[\frac{1}{K^2}-(x+C_1)^2\right]=$$

$$=(x+C_1)^2;\quad p=\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{\frac{1}{K^2}-(x+C_1)^2}}.$$

Второе интегрирование даст: $y+C_2=\pm\sqrt{\frac{1}{K^2}-(x+C_1)^2}$.

Заменяя $\frac{1}{K}$ — величину, обратную кривизне, радиусом кривизны $R$ $\left(\frac{1}{K}=R\right)$, получим ответ

$$(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=R^2.$$

Полученное уравнение — уравнение семейства всевозможных окружностей радиуса $R$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что единственными плоскими кривыми с постоянной кривизной являются окружности.

**Задача 18,11** (для самостоятельного решения). Найти частное решение уравнения $y''=1+\frac{x(y'-x)}{1-x^2}$, удовлетворяющее краевым условиям: $y(0)=1$; $y(1)=\frac{1}{2}$.

Указание. Подстановка $y'=p(x)$ приведет к линейному уравнению $\frac{dp}{dx}-\frac{x}{1-x^2}p=\frac{1-2x^2}{1-x^2}$.

**Ответ.** Общее решение:

$$y=\frac{1}{2}x^2+C_1\arcsin x+C_2.$$

Частное решение:

$$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{\pi}\arcsin x+1.$$

**Задача 18,12** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y''-2x(x^2-y')=0$; 2) $y'y''-\sqrt{1+y'^2}=0$; 3) $y''^2=y'$.

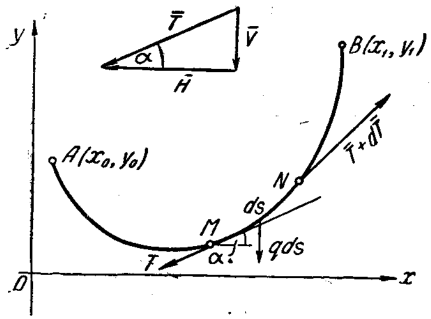
**Ответ.** 1) $y=\frac{1}{3}x^3-x+C_1\int e^{-x^2}dx+C_2$, причем входящий в общее решение интеграл в конечном виде не вычисляется.

$$2)\ y=\frac{x-C_1}{2}\sqrt{(x-C_1)^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left[(x-C_1)+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(x-C_1)^2-1}\right]+C_2;$$

$$3)\ y=\frac{1}{12}(x-C_1)^3+C_2.$$

**Задача 18,13** (задача о цепной линии).

Найти уравнение кривой, по которой расположится гибкая нерастяжимая нить, укрепленная концами в двух данных точках $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, под действием нагрузки, равномерно распределенной по ее длине, причем нагрузка, приходящаяся на единицу длины, равна $\bar{q}$.




К задаче 18,13

**Решение.** Вырежем на кривой элемент дуги $MN=ds$. На него действуют такие силы: в точке $M$ — натяжение $\bar{T}$, в точке $N$ — натяжение $\bar{T}+d\bar{T}$ и сила тяжести, численно равная $\bar{q}\,ds$. Условия равновесия требуют, чтобы суммы проекций этих сил на оси координат были равны нулю.

Сумма проекций всех сил на ось $Ox$:

$\sum X=-T_x+(T+dT)_x=0$ (проекция силы $\bar{q}\,ds$ на ось $Ox$
$\sum X=-T_x+T_x+(dT)_x=0$ равна нулю).

$$dT_x=0. \qquad (18,23)$$

Сумма проекций всех сил на ось $Oy$:

$$\sum Y=-T_y+(T+dT)_y-q\,ds=0;$$
$$\sum Y=-T_y+T_y+(dT)_y-q\,ds=0,$$

откуда

$$dT_y-q\,ds=0. \qquad (18,24)$$

Обозначим для удобства горизонтальную проекцию $T_x$ натяжения через $H$, а вертикальную его проекцию $T_y$ — через $V$. Тогда уравнения равновесия (18,23) и (18,24) запишутся так:

$$dH=0;\quad dV-q\,ds=0. \qquad (18,25)$$

Из $dH=0$ следует, что $H=\text{const}$, т. е. горизонтальная проекция натяжения нити — величина постоянная. Обозначим через $\alpha$ угол, который касательная к нити в точке $M$ составляет с осью $Ox$.

Второе уравнение в (18,25) преобразуем так:

$$\frac{V}{H} = \operatorname{tg}\alpha = y'; \; V = Hy'; \; dV = d(Hy') = Hy''\,dx.$$

(Величина $H$, как постоянная, вынесена за знак дифференциала). Дифференциал дуги $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$. Подставляя эти значения $dV$ и $ds$ во второе уравнение (18,25), получим

$$Hy''\,dx = q\sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

и окончательно дифференциальное уравнение искомой линии будет таким:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \tag{18,26}$$

Обозначим $\frac{q}{H} = a$ и введем подстановку $\frac{dy}{dx} = p\,(x)$. Тогда $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, и уравнение (18,26) станет таким:

$$\frac{dp}{dx} = a\sqrt{1 + p^2}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. После разделения переменных получим

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = a\,dx.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\ln\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right) = ax + C_1,$$

откуда

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{ax + C_1}. \tag{18,27}$$

Из (18,27) надо определить $p$. Это проще всего сделать так: умножим обе части (18,27) на $p - \sqrt{1 + p^2}$ и получим

$$\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)\left(p - \sqrt{1 + p^2}\right) = e^{ax + C_1}\left(p - \sqrt{1 + p^2}\right),$$

или

$$-1 = e^{ax + C_1}\left(p - \sqrt{1 + p^2}\right).$$

Отсюда, умножая обе части равенства на $e^{-(ax + C_1)}$, получаем

$$p - \sqrt{1 + p^2} = -e^{-(ax + C_1)}. \tag{18,28}$$

Складываем почленно (18,27) и (18,28):

$$2p = e^{ax + C_1} - e^{-(ax + C_1)},$$

а

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{ax + C_1} - e^{-(ax + C_1)}\right).$$

Правая часть последнего равенства есть $\operatorname{sh}(ax+C_1)$, а $p=\frac{dy}{dx}$. Поэтому последнее равенство перепишется так:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{sh}(ax+C_1), \quad \text{или} \quad dy=\operatorname{sh}(ax+C_1)\,dx.$$

Интегрируя, находим

$$y=\frac{1}{a}\operatorname{ch}(ax+C_1)+C_2. \tag{18,29}$$

Перепишем (18,29) в виде

$$y-C_2=\frac{1}{a}\operatorname{ch}a\left[x+\frac{C_1}{a}\right] \tag{18,30}$$

и перенесем начало координат в точку $\left(-\frac{C_1}{a},\ C_2\right)$, а новые координаты точки на кривой обозначим по-прежнему через $x$ и $y$. Уравнение (18,29) перепишется в виде

$$y=\frac{1}{a}\operatorname{ch}ax.$$

Это уравнение цепной линии. Итак, искомая кривая — цепная линия.

### *Третий тип.* Уравнения, не содержащие независимой переменной

Эти уравнения имеют в общем случае такой вид:

$$f(y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0. \tag{18,31}$$

Понижение порядка на единицу достигается подстановкой $y'=p(y)$, где $p(y)$ — новая искомая функция. В этом случае за независимую переменную принимается не $x$, а $y$. Поэтому вторая и последующие производные должны быть преобразованы так, чтобы независимой переменной был $y$:

$$y''=[p(y)]'_x=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p, \tag{18,32}$$

так как $\frac{dy}{dx}=p$;

$$y'''=\left(\frac{dp}{dy}p\right)'_x=\left(\frac{dp}{dy}p\right)'_y\frac{dy}{dx}=\left(\frac{d^2p}{dy^2}p+\frac{dp}{dy}\frac{dp}{dy}\right)p=\frac{d^2p}{dy^2}p^2+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2p \tag{18,33}$$

и т. д.

Поэтому уравнение (18,31) перепишется так:

$$f\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy},\ \frac{d^2p}{dy^2},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0.$$

Если удастся найти общее решение этого уравнения, то оно будет иметь вид

$$F(y,\ p,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1})=0. \tag{18,34}$$

Так как $p=\frac{dy}{dx}$, то (18,34) — уравнение первого порядка, из которого определится искомая функция $y$.

*Частный случай.* Если уравнение (18,31) имеет вид

$$f(y,\ y'')=0 \qquad (18,35)$$

и его удается разрешить относительно $y''$ так, что

$$y''=\varphi(y), \qquad (18,36)$$

то интегрирование, кроме указанного приема, можно провести так: умножим обе его части на $2y'\,dx$ и приведем уравнение к виду

$$2y'y''\,dx=2\varphi(y)\,y'\,dx. \qquad (18,37)$$

Левая часть этого уравнения $2y'y''\,dx=d(y'^2)$, а в правой части $y'\,dx=dy$, поэтому (18,37) перепишется так:

$$d(y'^2)=2\varphi(y)\,dy.$$

Отсюда следует, что

$$y'^2=2\int\varphi(y)\,dy+C_1;\quad y'=\sqrt{2\int\varphi(y)\,dy+C_1}.$$

Последнее уравнение допускает разделение переменных. Проинтегрировав его, найдем

$$x+C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int\varphi(y)\,dy+C_1}},$$

т. е. определим $x$ как функцию $y$.

Следует отметить, что этот прием интегрирования уравнения (18,35) не дает ничего существенно нового по сравнению с указанным общим приемом замены $y''$ по формуле (18,32).

К уравнениям вида (18,35) приводятся также и уравнения вида

$$y^{(n)}=f(y^{(n-2)}), \qquad (18,38)$$

содержащие только две производные, порядки которых отличаются на две единицы. В этом случае применяется подстановка

$$y^{(n-2)}=p(x). \qquad (18,39)$$

**Задача 18,14.** Найти общие решения уравнений:

1) $y''=ae^y$; 2) $y'^2+2yy''=0$; выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1,1) и касающуюся в этой точке биссектрисы первого координатного угла; 3) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$.

**Решение.** 1) Уравнение не содержит независимой переменной и относится к рассматриваемому типу. Полагаем $y'=p(y)$. Вторую производную $y''$ определяем по формуле (18,32):

$$y''=\frac{dp}{dy}p.$$

Уравнение запишется в виде

$$p\frac{dp}{dy} = ae^y.$$

Отсюда

$$p\,dp = ae^y\,dy.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{p^2}{2} = ae^y + \frac{C_1}{2}.$$

Находим, что

$$p = \sqrt{2ae^y + C_1}; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{2ae^y + C_1}.$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dy}{\sqrt{2ae^y + C_1}} = dx; \quad \int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y + C_1}} = x + C_2.$$

Интеграл $I = \int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y + C_1}}$ вычисляется подстановкой $2ae^y + C_1 = z^2$; $2ae^y\,dy = 2z\,dz$; $ae^y\,dy = z\,dz$; $dy = \frac{z\,dz}{ae^y}$. Но так как $ae^y = \frac{z^2 - C_1}{2}$, то

$$dy = \frac{z\,dz}{\frac{z^2 - C_1}{2}} = \frac{2z\,dz}{z^2 - C_1}.$$

Поэтому

$$I = \int\frac{2\,dz}{z^2 - C_1} = 2\frac{1}{2\sqrt{C_1}}\ln\frac{z - \sqrt{C_1}}{z + \sqrt{C_1}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\frac{\sqrt{2ae^y + C_1} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{2ae^y + C_1} + \sqrt{C_1}}.$$

Окончательно

$$x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\frac{\sqrt{2ae^y + C_1} - \sqrt{C_1}}{\sqrt{2ae^y + C_1} + \sqrt{C_1}}.$$

2) Это уравнение, так же как и предыдущие, не содержит независимой переменной $x$, а потому относится к рассматриваемому типу. Полагаем $y' = p(y)$. По формуле (18,32) $y'' = \frac{dp}{dy}p$, и уравнение запишется в виде

$$p^2 + 2yp\frac{dp}{dy} = 0.$$

Сокращаем на $p$ (не забудем впоследствии исследовать решение $p = 0$):

$$p + 2y\frac{dp}{dy} = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$2y\frac{dp}{dy} = -p; \quad \frac{2dp}{p} = -\frac{dy}{y}; \quad 2\ln p = -\ln y + \ln C_1^2.$$

Отсюда, потенцируя, находим, что

$$p^2 = \frac{C_1^2}{y}; \quad p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

В этом месте мы можем определить произвольную постоянную $C_1$. В условии задачи дано, что кривая в точке (1,1) касается прямой $y = x$. Следовательно, угловой коэффициент касательной в этой точке равен $y' = 1$. Подставляя $y' = 1$; $y = 1$ в последнее уравнение, получаем: $1 = \frac{C_1}{1}$; $C_1 = 1$.

Переписываем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ и, разделяя переменные, имеем

$$\sqrt{y}\, dy = dx.$$

Интегрируя, получаем $\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = x + C_2$.

Используем то, что кривая проходит через точку (1,1):

$$\frac{2}{3} \cdot 1 = 1 + C_2; \quad C_2 = -\frac{1}{3},$$

а потому

$$\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} = x - \frac{1}{3}; \quad 2y^{\frac{3}{2}} = 3x - 1; \quad y^{\frac{3}{2}} = \frac{3x-1}{2}.$$

Возводя обе части равенства в степень $\frac{2}{3}$, получим окончательно уравнение искомой интегральной кривой

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} (3x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

Исследуйте оставленное решение: $p = 0$, т. е. $\frac{dy}{dx} = 0$; $y = C$. Решите вопрос о том, будет ли это решение особым решением уравнения.

3) Это уравнение также относится к рассматриваемому типу, так как оно не содержит независимой переменной $x$. Подстановка, понижающая порядок на единицу: $y' = p(y)$. По (18,32) $y'' = \frac{dp}{dy} p$.

С этими значениями $y'$ и $y''$ уравнение перепишется так:

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Разделяя переменные, получаем $p\, dp = \frac{dy}{\sqrt{y}}$; $\frac{p^2}{2} = 2\sqrt{y} + 2C_1$; $p^2 = 4\sqrt{y} + 4C_1$. (Произвольную постоянную мы ввели под видом $2C_1$ с тем, чтобы в последующем извлечь корень из 4);

$$p = \sqrt{4(\sqrt{y} + C_1)} = 2\sqrt{\sqrt{y} + C_1}.$$

Так как $p=\frac{dy}{dx}$, последнее уравнение перепишется так: $\frac{dy}{dx}=$ $=2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$. Разделяя переменные, получаем $\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=dx$. Интегрируя, получим:

$$\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=x+C_2.$$

Вычислить интеграл в левой части можно с помощью подстановки $\sqrt{y}+C_1=z^2$.

Окончательно получим

$$x+C_2=\frac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}.$$

**Задача 18,15** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y''=\frac{1}{a}(1+y'^2)$. Начальные условия $y(0)=y'(0)=0$;

2) $yy''=y'^2$; 3) $yy''-2yy'\ln y=y'^2$.

**Ответ.** 1) $y=-a\ln\cos\frac{x}{a}$, или $e^{\frac{y}{a}}\cos\frac{x}{a}=1$;

2) $y=C_2e^{C_1x}$ (здесь положено $e^{C_2}=C_2$);

3) $y=e^{C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)}$; $y=C$ (особое решение).

**Задача 18,16.** Найти общее решение уравнений:

1) $y^3y''=-1$; 2) $y''=\frac{1}{3y\sqrt[3]{y^2}}$.

**Решение.** 1) Перепишем уравнение в виде $y''=-\frac{1}{y^3}$. Будем его интегрировать таким приемом: обе части умножим на $2y'\,dx$ и получим

$2y'y''\,dx=-\frac{1}{y^3}2y'\,dx$. Но $y'\,dx=dy$, а потому имеем

$$d(y'^2)=-\frac{1}{y^3}\cdot 2dy.$$

Интегрируя получаем:

$$y'^2=\frac{1}{y^2}+C_1;\quad y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+C_1};$$

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1+C_1y^2}}{y}.$$

Разделяем переменные $\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1+C_1y^2}}=dx$; интегрируем вторично и получаем $\pm\frac{1}{C_1}\sqrt{1+C_1y^2}=x+C_2$. Так как $C_1$ может быть величиной как положительной, так и отрицательной, то знаки $\pm$

перед корнем нет смысла сохранять. Окончательно общее решение имеет вид

$$\sqrt{1+C_1y^2}=C_1x+C_2,$$

где $C_2=C_1C_2$.

2) Умножаем обе части уравнения на $2y'\,dx$ и получаем

$$2y'y''\,dx=\frac{2}{3y\sqrt[3]{y^2}}\,dy \quad (y'\,dx=dy),$$

или

$$d\left(y'^2\right)=\frac{2}{3y\sqrt[3]{y^2}}\,dy.$$

Интегрируя, имеем

$$y'^2=\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+C_1;\quad y'=\pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}+C_1};$$

$$y'=\pm\frac{\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt[3]{y}}.$$

Разделяем переменные: $\dfrac{\sqrt[3]{y}\,dy}{\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}}=\pm\,dx.$

Интегрируем вторично: $I=\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{y}\,dy}{\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}}$ и вычисляем $I$ при помощи подстановки $1+C_1\sqrt[3]{y^2}=z^2$. Отсюда

$$\sqrt[3]{y^2}=\frac{z^2-1}{C_1};\ \sqrt[3]{y}=\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{C_1}};\ \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\,dy=\frac{z\,dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}};$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\,dy=\frac{z\,dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}};\quad dy=\frac{3\sqrt[3]{y^2}\cdot z\,dz}{\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}};\ dy=\frac{3(z^2-1)\,z\,dz}{C_1\sqrt{C_1}\sqrt{z^2-1}}.$$

Поэтому

$$I=\frac{3}{C_1^2}\int(z^2-1)\,dz;$$

$$I=\frac{3}{C_1^2}\left(\frac{z^3}{3}-z\right)=\frac{3}{C_1^2}z\left(\frac{z^2}{3}-1\right)=\frac{z}{C_1^2}(z^2-3)=$$

$$=\frac{1}{C_1^2}\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}\,(1+C_1\sqrt[3]{y^2}-3).$$

Окончательно

$$\frac{1}{C_1^2}(C_1\sqrt[3]{y^2}-2)\sqrt{1+C_1\sqrt[3]{y^2}}=\pm(x+C_2).$$

**Задача 18,17** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнений:

1) $y''' - y' = 0$; 2) $y^{\mathrm{IV}} - a^2 y'' = 0$.

Указание. 1) Подстановка $y' = p(x)$ приводит к уравнению $p'' = p$ (уравнение вида (18,36).

2) Подстановка $y'' = p$ понизит порядок уравнения на две единицы и оно примет вид $p'' = a^2 p$.

Ответ. 1) $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$;

2) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{ax} + C_4 e^{-ax}$.

**Замечание.** На следующем практическом занятии эти уравнения будут проинтегрированы очень просто, как линейные уравнения.

В заключение этого практического занятия решим две задачи из теоретической механики.

**Задача 18,18.** Найти закон прямолинейного движения материальной точки массы $m$, которая падает в среде, сопротивление которой пропорционально второй степени скорости. Начальные условия: в начальный момент движения $t = 0$ координата точки равна $x_0$, а начальная скорость $v = v_0$ (см. чертеж).

К задаче 18,18

**Решение.** На точку действуют две силы: вес $\overline{P}$ и сила сопротивления $\overline{f}$. Примем прямую, по которой происходит движение, за ось $Ox$, и направим ее вертикально вниз.

Основным уравнением динамики точки является уравнение

$$m\overline{w} = \sum \overline{F}_k, \tag{18,40}$$

где $\sum \overline{F}_k$ — равнодействующая всех сил, действующих на точку.

Так как сила сопротивления по условию пропорциональна квадрату скорости, то ее модуль $f = k^2 m v^2$, где $k^2 m$ — коэффициент пропорциональности. Спроектируем на ось $Ox$ действующие на точку силы:

$$\left(\sum \overline{F}_k\right)_x = mg - k^2 m v^2.$$

Знак минус перед $k^2 m v^2$ объясняется тем, что сила сопротивления всегда направлена в сторону, противоположную движению.

Проекция ускорения $\overline{w}$ на ось $Ox$ равна $\frac{d^2x}{dt^2}$, а проекция скорости на ту же ось есть $\frac{dx}{dt}$, а потому (18,40) перепишется в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k^2 m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Сокращая на $m$, получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

которое является дифференциальным уравнением движения точки. Это уравнение не содержит искомой функции $x$ и принадлежит к виду (18,15). Сделаем подстановку: $\frac{dx}{dt} = p(t)$. Порядок уравнения понизится на единицу и оно перепишется так:

$$\frac{dp}{dt} = g - k^2p^2.$$

Переменные в этом уравнении разделяются, получается следующее уравнение:

$$\frac{dp}{g - k^2p^2} = dt.$$

Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dp}{g - k^2p^2} = t + C_1,$$

или

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} = t + C_1. \qquad (18,41)$$

Так как при $t = 0$ скорость $\frac{dx}{dt} = p(t)$ равна $v_0$, то для определения $C_1$ получаем уравнение

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0} = C_1,$$

и уравнение (18,41) запишется в виде

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} = t + \frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}.$$

Определим отсюда $p$:

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}}\left[\ln \frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} - \ln \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}\right] = t;$$

$$\frac{1}{2k\sqrt{g}} \ln \frac{\dfrac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp}}{\dfrac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0}} = t;$$

$$\frac{\sqrt{g} + kp}{\sqrt{g} - kp} = \frac{\sqrt{g} + kv_0}{\sqrt{g} - kv_0} e^{2k\sqrt{g}\,t}.$$

Решая это уравнение относительно $p = \frac{dx}{dt}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{(\sqrt{g} + kv_0)e^{2k\sqrt{g}\,t} - (\sqrt{g} - kv_0)}{(\sqrt{g} + kv_0)e^{2k\sqrt{g}\,t} + (\sqrt{g} - kv_0)}. \qquad (18,42)$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $e^{-k\sqrt{g}t}$. Тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{k}\frac{\sqrt{g}\,(e^{k\sqrt{g}\,t}-e^{-k\sqrt{g}t})+kv_0\,(e^{k\sqrt{g}\,t}+e^{-k\sqrt{g}t})}{\sqrt{g}\,(e^{k\sqrt{g}\,t}+e^{-k\sqrt{g}\,t})+kv_0\,(e^{k\sqrt{g}\,t}-e^{-k\sqrt{g}\,t})}.$$

Вводя гиперболические синус и косинус и сокращая на 2, получим

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{k}\cdot\frac{\sqrt{g}\operatorname{sh}k\sqrt{g}t+kv_0\operatorname{ch}k\sqrt{g}t}{\sqrt{g}\operatorname{ch}k\sqrt{g}t+kv_0\operatorname{sh}k\sqrt{g}t}. \qquad (18{,}43)$$

Если в правой части уравнения числитель умножить на $k\sqrt{g}$, то он станет производной знаменателя. Замечая это, разделяем переменные и интегрируя получаем

$$x=\frac{1}{k^2}\ln(\sqrt{g}\operatorname{ch}k\sqrt{g}t+kv_0\operatorname{sh}k\sqrt{g}t)+C_2.$$

Определим произвольную постоянную $C_2$.

На основании начальных условий $x=x_0$ при $t=0$. Поэтому

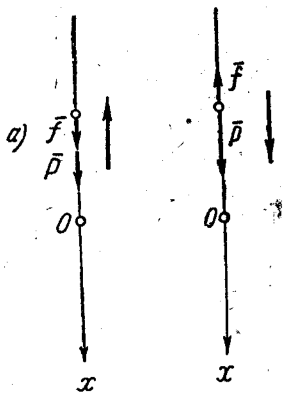
$$x_0=\frac{1}{k^2}\ln\sqrt{g}+C_2 \quad (\operatorname{ch}0=1;\ \operatorname{sh}0=0);$$

$$C_2=x_0-\frac{1}{k^2}\ln\sqrt{g}.$$

Окончательно

$$x=x_0+\frac{1}{k^2}\ln\left(\operatorname{ch}k\sqrt{g}t+\frac{kv_0}{\sqrt{g}}\operatorname{sh}k\sqrt{g}t\right).$$

Уравнение (18,43) дает закон изменения скорости в зависимости от времени. Очевидно, что при неограниченном возрастании времени ($t\to\infty$) дробь в правой части этого уравнения стремится к единице, а скорость $v\to\frac{\sqrt{g}}{k}$. Отсюда мы можем заключить, что движение точки асимптотически приближается к равномерному, скорость которого равна $\frac{\sqrt{g}}{k}$, причем эта скорость не зависит от начальных условий.



К задаче 18,19

**Задача 18,19** (для самостоятельного решения).

Материальная точка массы $m$ брошена из начала координат вертикально вверх со скоростью $v_0$, и движение происходит в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости. Определить: 1) высоту $h$, на которую поднимется точка и 2) скорость $u$, с которой точка возвратится в исходное положение.

Считать, что движение происходит по оси $Ox$, которая направлена вертикально вниз.

Указание. Модуль силы сопротивления $f = k^2mv^2$, где $k^2m$ — коэффициент пропорциональности. Так как сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению, то она при движении вверх направлена вертикально вниз.

Проекции на ось $Ox$, силы веса и силы сопротивления — положительны:

$$(\sum \overline{F}_k)_x = mg + k^2mv^2.$$

Уравнение движения после сокращения на $m$ запишется так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{18,44}$$

По условию задачи требуется определить скорость в зависимости от положения точки. Поэтому здесь выгодно проинтегрировать уравнение способом, указанным для интегрирования уравнения (18,36). Перепишем его в виде

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = 1$$

и умножим обе части на $2\frac{dx}{dt}dt$:

$$\frac{2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt = 2dx \quad \left(\frac{dx}{dt}dt = dx\right).$$

Если числитель дроби в левой части умножить на $k^2$, то он станет равным производной знаменателя, а потому, интегрируя, получим

$$\frac{1}{k^2}\ln\left(g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = 2x + C_1.$$

Определив произвольную постоянную $\left(\text{при } t = 0 \;\; x = 0, \; \frac{dx}{dt} = = v_0\right)$, найдем закон скорости в зависимости от положения точки в виде

$$\frac{g + k^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{g + k^2v_0^2} = e^{2k^2x}. \tag{18,45}$$

Чтобы найти высоту подъема, надо в этом уравнении взять $\frac{dx}{dt} = 0$, так как подъем точки прекратится в тот момент, когда ее скорость станет равной нулю. Обозначая высоту подъема через $h$ и подставляя в (18,45) $x = h$, $\frac{dx}{dt} = 0$, получим для определения высоты подъема $h$ уравнение

$$\frac{g}{g + k^2 v_0^2} = e^{2k^2 h}, \tag{18,46}$$

отсюда

$$h = \frac{1}{2k^2} \ln \frac{g}{g + k^2 v_0^2}.$$

При движении вниз надо учесть, что начальная скорость $v_0 = 0$, а $x_0 = h$. Движение вниз описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

(см. предыдущую задачу). Интегрируя это уравнение тем же способом, что и уравнение (18,44), получим

$$-\frac{1}{k^2} \ln \left[g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = 2x + C_2.$$

Из начальных условий при $x_0 = h$, $v_0 = 0$

$$-\frac{1}{k^2} \ln g = 2h + C_2; \quad C_2 = -\frac{1}{k^2} \ln g - 2h,$$

а потому

$$-\frac{1}{k^2} \ln \left[g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = 2x - \frac{1}{k^2} \ln g - 2h,$$

или

$$\ln \left[g - k^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = -2k^2 x + \ln g + 2hk^2.$$

Когда точка возвратится в исходное положение в начало координат, то $x$ станет равным нулю, а скорость в этот момент пусть равна $\bar{u}$, т. е. $\frac{dx}{dt} = u$, поэтому

$$\ln [g - k^2 u^2] = \ln g + 2hk^2;$$
$$g - k^2 u^2 = e^{\ln g + 2hk^2} = g e^{2hk^2}.$$

Используя (18,46), получаем

$$g - k^2 u^2 = g \frac{g}{g + k^2 v_0^2};$$

$$k^2 u^2 = g - \frac{g^2}{g + k^2 v_0^2} = \frac{g k^2 v_0^2}{g + k^2 v_0^2};$$

$$u^2 = \frac{g v_0^2}{g + k^2 v_0^2}.$$

Окончательно скорость, с которой точка возвратится в первоначальное положение, равна

$$u = v_0 \sqrt{\frac{g}{g + k^2 v_0^2}}.$$

# ДЕВЯТНАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Линейным дифференциальным уравнением порядка $n$ называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x), \tag{19,1}$$

где $f(x)$ — функция независимой переменной $x$, по которой вычислены производные.

Отличительной чертой линейного уравнения является то, что искомая функция $y$ и все ее производные входят в это уравнение в первой степени.

2. Предполагается, что функции $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и правая часть уравнения — функция $f(x)$ непрерывны в промежутке $(a, b)$. Случаи $a = -\infty$, $b = +\infty$ не исключаются. Функции $p_i(x)$ называются коэффициентами уравнения.

3. Задача Коши (см. восемнадцатое практическое занятие) для этого уравнения при сделанном предположении (п. 2) всегда имеет единственное решение при любых начальных условиях (18,2), лишь бы точка $x = x_0$ находилась в промежутке $(a, b)$ непрерывности функций $p_i(x)$ и $f(x)$.

4. Если в уравнении (19,1) правая часть $f(x)$ тождественно равна нулю в промежутке $(a, b)$, то уравнение (19,1) принимает вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{-1}(x)\,y' + p_n(x)y = 0 \tag{19,2}$$

и называется в этом случае линейным однородным уравнением, соответствующим уравнению (19,1). При $f(x) \not\equiv 0$ уравнение (19,1) называется неоднородным.

На этом практическом занятии мы будем заниматься только однородными линейными уравнениями, причем нами будут рассматриваться два вида этих уравнений: 1) уравнения, в которых коэффициенты при производных являются функциями независимой переменной, и 2) уравнения, в которых коэффициенты при производных постоянны, так называемые линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

5. Если функция $y_1(x)$ является решением линейного однородного уравнения (19,2), то и $C_1 y_1(x)$ — произведение ее на произвольную постоянную величину $C_1$ — также является решением этого уравнения.

6. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (19,2), то и их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ также является решением этого уравнения.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ являются решениями уравнения (19,2), то и функция

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{19,3}$$

где $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ — произвольные постоянные, также является решением этого уравнения. Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ называются частными решениями уравнения (19,2).

7. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* в промежутке $(a, b)$, если их отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ в этом промежутке не является постоянной величиной.

Если же отношение $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ — величина постоянная, то эти функции называются *линейно зависимыми.*

8. Если имеется $n$ функций $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$, то они называются линейно независимыми в промежутке $(a, b)$, при условии, что равенство

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0,$$

где $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, может выполняться только тогда, когда все коэффициенты $\alpha_i$ равны нулю.

Если же это равенство в промежутке $(a, b)$ имеет место, когда хотя бы один из коэффициентов $\alpha$ не равен нулю, то функции $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ называются линейно зависимыми.

9. Если функции $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ являются решениями уравнения (19,2) и в промежутке $(a, b)$ они линейно независимы, то общее решение этого уравнения имеет вид (19,3):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots + C_n y_n.$$

Эта формула определяет структуру общего решения линейного однородного уравнения (19,2) порядка $n$ и указывает способ построения общего решения. *Таким образом, чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения, надо найти $n$ его частных линейно независимых в $(a, b)$ решений, каждое из них умножить на произвольную постоянную величину и все эти произведения сложить.*

Система линейно независимых решений уравнения (19,2) называется фундаментальной.

10. Для того, чтобы функции $y_1$, $y_2$, ..., $y_n$ были линейно независимы в промежутке $(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы их так называемый определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0$ промежутка $(a, b)$, в котором непрерывны коэффициенты уравнения (19,2).

Таким образом, чтобы проверить линейную независимость функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, надо составить их определитель Вронского $W(x)$ и убедиться, что хотя бы при одном значении $x$ из промежутка $(a, b)$ он не равен нулю.

11. Уравнение (19,2) имеет $n$ и только $n$ линейно независимых решений.

12. Если известно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения (19,2), то его порядок можно понизить на единицу при помощи подстановки

$$y = y_1 \int u\,dx, \tag{19,4}$$

где $u = u(x)$ — новая искомая функция.

Полученное в результате подстановки (19,4) уравнение также будет линейным.

## 1. Линейные однородные уравнения с переменными коэффициентами

**Задача 19,1.** Доказать, что если $y_1(x)$ — частное решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0, \tag{19,5}$$

то второе его частное решение, линейно независимое с первым, находится по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx.$$

**Решение.** Подставим (19,4) в данное уравнение, помня, что $\left(\int u\,dx\right)' = u$. Получим

$$\begin{array}{rl|c}
 & y = y_1 \int u\,dx & p_2(x) \\
+ & y' = y_1' \int u\,dx + y_1 u & p_1(x) \\
 & y'' = y_1'' \int u\,dx + y_1' u + y_1' u + y_1 u' & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$0 = \underbrace{(y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_2(x)\,y_1)}_{\substack{\text{Это выражение равно} \\ \text{нулю, так как } y_1 \text{ —} \\ \text{решение данного} \\ \text{уравнения}}} \int u\,dx + y_1 u' + [2y_1' + p_1(x)\,y_1]\,u$$

(для сокращения записей вместо $y_1(x)$ мы пишем $y_1$).

Получаем уравнение

$$y_1 u' + (2y_1' + p_1 y_1) u = 0,$$

порядок которого понижен на единицу по сравнению с данным. Оно является также линейным однородным уравнением первого порядка, допускающим, как известно, разделение переменных.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{du}{u} = -\frac{2y_1' + p_1 y_1}{y_1} dx.$$

Интегрируя, будем иметь

$$\ln u = -\int \frac{2y_1'}{y_1} dx - \int p_1 \, dx = -2 \ln y_1 - \int p_1 \, dx.$$

Отсюда

$$u = e^{-2 \ln y_1 - \int p_1 dx} = e^{-2 \ln y_1} e^{-\int p_1 dx} = e^{\ln y_1^{-2}} e^{-\int p_1 dx} = y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx} =$$

$$= \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2}.$$

Заменяя в выражении (19,4) $y = y_1 \int u \, dx$ функцию $u$ только что найденным значением, получаем

$$y = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dx}}{y_1^2} dx. \tag{19,6}$$

Найденное значение $y$ и будет вторым частным решением $y_2(x)$ данного уравнения. Его линейная независимость с первым видна из того, что отношение $\frac{y_2}{y_1}$ не является постоянной величиной.

Решение этой задачи показывает, что знание одного частного решения уравнения (19,5) позволяет найти второе линейно независимое с первым частное решение при помощи формулы (19,6), которая требует выполнения двух интегрирований (говорят — двух квадратур).

Тем самым для определения общего решения линейного однородного уравнения второго порядка достаточно знать одно его частное решение.

Ниже предлагаются задачи на применение этой формулы.

**Задача 19,2.** Найти общее решение уравнения $(x-1) y'' - xy' + y = 0$, если известно, что его частное решение $y_1 = x$ (проверьте, что оно действительно является решением). Найти частное решение при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

**Решение.** Данное уравнение — линейное однородное уравнение второго порядка. Прежде всего приведем уравнение к виду (19,5), в котором коэффициент при $y''$ равен единице. Получаем

$$y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{y}{x-1} = 0.$$

Здесь коэффициент при $y'$ — функция $p_1(x) = -\frac{x}{x-1}$. Вычислим прежде всего входящий в формулу (19,6) интеграл —

$$-\int p_1(x)\,dx = -\int -\frac{x}{x-1}\,dx = \int \frac{x}{x-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx =$$
$$= x + \ln(x-1)$$

(произвольную постоянную вводить не следует, так как в последующем она объединится с произвольной постоянной, вводимой при построении общего решения).

Теперь входящее в (19,6) выражение

$$e^{-\int p_1\,dx} = e^{x + \ln(x-1)} = e^{x}e^{\ln(x-1)} = e^{x}(x-1),$$

а формула (19,6) дает

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx = x \int \frac{e^x(x-1)}{x^2}\,dx =$$
$$= x\left[\int \frac{e^x}{x}\,dx - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx\right] = x\left[\frac{1}{x}e^x + \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx\right] =$$
$$\left|\begin{array}{l|l} u = \frac{1}{x} & du = -\frac{1}{x^2}\,dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right|$$
$$= x \cdot \frac{1}{x} e^x = e^x.$$

Итак, $y_2 = e^x$. Умножая $y_1$ на $C_1$, $y_2$ на $C_2$ и складывая произведения, получим общее решение заданного уравнения

$$y = C_1 x + C_2 e^x. \tag{19,7}$$

Указание. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (т. е. чтобы решить задачу Коши), надо начальные условия подставить в систему уравнений, которая состоит из общего решения и его производных до порядка ($n$—1) включительно; определить из этой системы произвольные постоянные и подставить их значения в найденное общее решение. Полученное выражение и будет искомым частным решением.

Дифференцируя найденное общее решение (19,7) один раз (так как $n = 2$, то $n - 1 = 1$), получаем систему

$$\left.\begin{array}{l} y = C_1 x + C_2 e^x \\ y' = C_1 + C_2 e^x \end{array}\right\},$$

подставляем в нее начальные условия: $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;

$$\left.\begin{array}{l} 1 = C_1 \cdot 0 + C_2 e^0 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{array}\right\} \text{ или } \left.\begin{array}{l} 1 = C_2 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{array}\right\};$$

$C_2 = 1$; $C_1 = 1$,

искомое частное решение $y = x + e^x$.

**Задача 19,3** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения линейных однородных уравнений второго порядка и их частные решения по известным первым частным решениям этих уравнений и заданным начальным условиям:

1) $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0;\ y_1=\ln x.$

Начальные условия: $y(1)=2;\quad y'(1)=4;$

2) $y''+\operatorname{tg} x\cdot y'+\cos^2 x\cdot y=0;\quad y_1=\cos(\sin x).$

Начальные условия: $y(0)=3;\quad y'(0)=2;$

3) $y''-\operatorname{ctg} x\cdot y'+\sin^2 x\cdot y=0;\quad y_1=\cos(\cos x).$

Начальные условия: $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;$

4) $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{9}{x^2}y=0;\ y_1=x^3.$

Начальные условия: $y(3)=1;\quad y'(3)=\frac{4}{5}.$

Указание. Во всех задачах использовать формулу (19,6). В первом уравнении разделить обе его части на $1-\ln x$.

Учесть, что $-\int p_1(x)\,dx=-\int\frac{dx}{x(1-\ln x)}=\ln(\ln x-1),$

а $e^{\ln(\ln x-1)}=\ln x-1;\quad \int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,dx=\int\frac{dx}{\ln x}-\int\frac{dx}{\ln^2 x}.$

Первый интеграл вычислить по частям. Окажется, что второй интеграл взаимно уничтожится с тем, который получится при применении интегрирования по частям к первому интегралу.

**Ответ.**

| № | Второе частное решение | Общее решение | Частное решение |
|---|---|---|---|
| 1 | $y_2=x$ | $y=C_1\ln x+C_2x$ | $y=2\ln x+2x$ |
| 2 | $y_2=\sin(\sin x)$ | $y=C_1\cos(\sin x)+$ $+C_2\sin(\sin x)$ | $y=3\cos(\sin x)+$ $+2\sin(\sin x)$ |
| 3 | $y_2=\sin(\cos x)$ | $y=C_1\cos(\cos x)+$ $+C_2\sin(\cos x)$ | $y=-\sin(\cos x)$ |
| 4 | $y_2=\frac{1}{x^3}$ | $y=C_1x^3+C_2\frac{1}{x^3}$ | $y=\frac{1}{30}x^3+\frac{27}{10x^3}$ |

**Задача 19,4** (для самостоятельного решения).

Зная первое частное решение линейных однородных уравнений второго порядка, найти их общие решения:

1) $4x^2y'' + 5y = 0; \quad y_1 = \sqrt{x}\cos(\ln x)$;

2) $$y'' + \left(\sin x - \cos x + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right) y' - $$
$$-\left(\sin x \cos x - \frac{1}{\sin x + \cos x}\right) y = 0; \quad y_1 = e^{\sin x}.$$

Указания. Для отыскания второго частного решения применить формулу (19,6).

В первом уравнении разделить обе его части на коэффициент при $y''$. Учесть, что $p_1(x) = 0$, так как уравнение не содержит $y'$, а $\int p_1(x)\,dx = \int 0 \cdot dx = C$, причем, можно взять $C = 1$, ибо в последующем произвольная постоянная будет введена.

Интеграл $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \operatorname{tg}(\ln x)$ (подстановка $\ln x = z$).

Во втором уравнении $-\int p_1(x)\,dx = -\int\left[\sin x - \cos x + \right.$
$$\left. + \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right] dx = \cos x + \sin x + \ln(\sin x + \cos x);$$
$$e^{\cos x + \sin x + \ln(\sin x + \cos x)} = e^{\cos x + \sin x}(\sin x + \cos x);$$
$$y_2 = e^{\sin x}\int \frac{e^{\cos x + \sin x}(\sin x + \cos x)}{e^{2\sin x}}\,dx =$$
$$= e^{\sin x}\int e^{\cos x - \sin x}(\sin x + \cos x)\,dx = e^{\sin x}(-e^{\cos x - \sin x});$$
$$y_2 = -e^{\cos x}.$$

(Знак минус при написании общего решения ввести в произвольную постоянную).

Ответ. 1) $y_2 = \sqrt{x}\sin(\ln x)$;
общее решение:
$$y = C_1\sqrt{x}\cos(\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(\ln x),$$
или
$$y = \sqrt{x}\,(C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x));$$
2) $y_2 = -e^{\cos x}$;

общее решение:
$$y = C_1e^{\sin x} + C_2e^{\cos x}.$$

**Задача 19,5.** Доказать, что если $y_1$ и $y_2$ — два линейно независимых частных решения линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0, \tag{19,8}$$

то $p_1(x) = -\dfrac{W'(x)}{W(x)}$, а $p_2(x) = -\dfrac{y_1''}{y_1} + \dfrac{y_1'}{y_1}\dfrac{W'(x)}{W(x)}$,

где $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$.

**Решение.** Так как $y_1$ и $y_2$ — решения заданного уравнения, то имеет место система уравнений относительно неизвестных $p_1(x)$ и $p_2(x)$, подлежащих определению:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p_1(x)\,y_1' + p_2(x)\,y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)\,y_2' + p_2(x)\,y_2 = 0 \end{aligned}\right\},$$

или

$$\left.\begin{aligned} p_1(x)\,y_1' + p_2(x)\,y_1 = -y_1'' \\ p_1(x)\,y_2' + p_2(x)\,y_2 = -y_2'' \end{aligned}\right\}. \tag{19,9}$$

Исследуем определитель этой системы:

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Строки и} \\ \text{столбы} \\ \text{поменяли} \\ \text{местами}}} = \underbrace{-\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{\substack{\text{Поменяли} \\ \text{местами} \\ \text{строки и из-} \\ \text{менили знак} \\ \text{перед опре-} \\ \text{делителем}}} = -W(x). \tag{19,10}$$

Так как решения $y_1$ и $y_2$ по условию линейно независимы, то $W(x) \neq 0$ и система (19,9) имеет решение и притом единственное:

$$p_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 \\ -y_2'' & y_2 \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{-W(x)}}_{\text{На основании } 19{,}10}} = -\frac{W'(x)}{W(x)}.$$

(Следует иметь в виду, что производная определителя Вронского, как легко проверить, есть определитель, который отличается от определителя Вронского тем, что в нем последняя строка содержит производные порядка на единицу большего, чем в определителе Вронского).

Из первого уравнения системы (19,9) следует, что

$$y_1p_2(x) = -y_1'' - y_1'\,p_1(x),$$

откуда и получается доказываемое значение $p_2(x)$.

Найденные выражения коэффициентов $p_1(x)$ и $p_2(x)$ уравнения (19,5) позволяют составить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известна его фундаментальная система решений.

## 2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Характеристическое уравнение. Если в уравнении (19,2) коэффициенты постоянны, то оно называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами и имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (19,11)$$

где все $a_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественные числа; $y$ — искомая функция; $x$ — независимая переменная.

Решение этого уравнения ищется в виде

$$y = e^{kx}. \quad (19,12)$$

Это приводит к алгебраическому уравнению степени $n$

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0, \quad (19,13)$$

которое называется характеристическим.

Таким образом, чтобы составить характеристическое уравнение (19,13), надо в уравнении (19,11) заменить производные степенями неизвестной величины $k$, причем степень $k$ должна быть равна порядку соответствующей производной, а сама искомая функция $y$ заменена единицей.

1. Если все корни характеристического уравнения $k_1$, $k_2$, $k_3$, ... $k_n$ — числа вещественные и среди них нет равных между собою, то, подставляя значение корней в (19,12), получим $n$ частных линейно независимых решений уравнения (19,11) в виде

$$y_1 = e^{k_1 x};\ y_2 = e^{k_2 x};\ y_3 = e^{k_3 x};\ \ldots;\ y_n = e^{k_n x}. \quad (19,14)$$

2. Если все корни характеристического уравнения — числа вещественные, но среди них есть равные, то каждому корню $k_i$ кратности $l$ соответствует $l$ линейно независимых частных решений уравнения (19,11)

$$y_1 = e^{k_i x};\ y_2 = x e^{k_i x};\ y_3 = x^2 e^{k_i x};\ \ldots;\ y_n = x^{l-1} e^{k_i x}. \quad (19,15)$$

3. Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные, но не равные между собой, то каждой паре сопряженных комплексных корней $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$ соответствуют два частных линейно независимых решения уравнения (19,11) вида

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ и } e^{\alpha x} \sin \beta x. \quad (19,16)$$

Если же среди комплексных корней характеристического уравнения имеются кратные комплексные корни, то корню $\alpha + \beta i$ кратности $l$ (корень $\alpha - \beta i$ имеет ту же кратность) соответствует $2l$ частных линейно независимых решения уравнения (19,11), которые имеют вид

$$\begin{matrix} e^{\alpha x} \cos \beta x; & x e^{\alpha x} \cos \beta x; & x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x; & \ldots; & x^{l-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x; & x e^{\alpha x} \sin \beta x; & x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x; & \ldots; & x^{l-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{matrix} \quad (19,17)$$

**Задача 19,6.** Найти решения линейных однородных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $y'' - 3y' + 2y = 0;$ | $y(0) = 2;$ | $y'(0) = -3;$ |
| 2) $y'' - 6y' + 8y = 0;$ | $y(0) = 1;$ | $y'(0) = 0;$ |
| 3) $y'' + 9y' + 20y = 0;$ | $y(0) = 0;$ | $y'(0) = -1;$ |
| 4) $y'' - y = 0;$ | $y(0) = 1;$ | $y'(0) = 1$ |
| 5) $y'' - 2y' + y = 0;$ | $y(0) = 2;$ | $y'(0) = 4;$ |
| 6) $y'' + 4y' + 4y = 0;$ | $y(2) = 4;$ | $y'(2) = 0;$ |
| 7) $y'' - 2y' + 2y = 0;$ | $y(\pi) = -2;$ | $y'(\pi) = -3;$ |
| 8) $y'' + y' + y = 0;$ | $y(0) = 2;$ | $y'(0) = \frac{1}{2};$ |
| 9) $y'' + \omega^2 y = 0;$ | $y(0) = a;$ | $y'(0) = v_0;$ |
| 10) $y'' + y' = 0;$ | $y(0) = 2;$ | $y'(0) = 5.$ |

**Решение.** 1) Составляем характеристическое уравнение вида (19,13), согласно сделанному указанию: заменяем $y''$ на $k^2$, $y'$ на $k$, а $y$ на 1.

Получаем $k^2 - 3k + 2 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, находим, что $k_1 = 1$; $k_2 = 2$. Корни характеристического уравнения — числа вещественные и не равные между собою. Согласно (19,14) частными решениями уравнения будут функции: $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{2x}$. Легко видеть, что функции эти линейно независимы $\left(\frac{y_2}{y_1} = e^x \neq \text{const}\right)$. Общим решением, согласно (19,3), будет

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \qquad (A)$$

Теперь определим произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$ по заданным начальным условиям. Прежде всего найдем производную

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}. \qquad (B)$$

Пользуясь указанием стр. 301 подставляем начальные условия в $(A)$ и $(B)$, и для определения $C_1$ и $C_2$ составляем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2 &= C_1 + C_2 \\ -3 &= C_1 + 2C_2 \end{aligned}\right\}.$$

Решая эту систему, получаем: $C_1 = 7$, $C_2 = -5$.

Подставляя эти значения в $(A)$, найдем решение заданного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 7e^x - 5e^{2x}.$$

2) Характеристическое уравнение вида (19,13) получим, заменив $y''$ на $k^2$, $y'$ на $k$, а $y$ на 1. Оно запишется так: $k^2 - 6k + 8 = 0$.

Решая это квадратное уравнение, найдем, что $k_1 = 2$; $k_2 = 4$. Корни его — числа вещественные и не равные между собою. Согласно (19,14), частными решениями уравнения будут функции: $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{4x}$. Функции эти линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = e^{2x} \neq \text{const}$. В соответствии с (19,3) общим решением уравнения будет

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}. \qquad (A)$$

Чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, найдем производную полученного общего решения

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x}. \qquad (B)$$

В уравнения $(A)$ и $(B)$ подставим заданные начальные условия и получим для определения произвольных постоянных $C_1$ и $C_2$ систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 0 &= 2C_1 + 4C_2 \end{aligned}\right\},$$

из которой следует, что $C_1 = 2$; $C_2 = -1$.

Подставляя эти значения в общее решение $(A)$, находим решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 2e^{2x} - e^{4x}.$$

3) Это уравнение решим без подробных объяснений. Характеристическим уравнением будет $k^2 + 9k + 20 = 0$; $k_1 = -4$; $k_2 = -5$ (корни — вещественные и разные); частными решениями, согласно (19,14), — функции $y_1 = e^{-4x}$; $y_2 = e^{-5x}$. Общее решение на основании (19,3): $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-5x}$. Находим $y' = -4C_1 e^{-4x} - 5C_2 e^{-5x}$. Система уравнений для определения произвольных постоянных на основании начальных условий:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2; \\ -1 &= -4C_1 - 5C_2; \end{aligned}$$

$C_1 = -1$; $C_2 = 1$. Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = -e^{-4x} + e^{-5x}.$$

4) Характеристическое уравнение: $k^2 - 1 = 0$; корни его $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ — числа вещественные и не равные между собою. Частные решения, согласно (19,14), имеют вид: $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{-x}$. Общее решение в соответствии с (19,3)

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Вместо этого вида общего решения в прикладных науках оно записывается часто через гиперболические синус и косинус. Так как $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, а $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, то

$$\left.\begin{aligned} e^x &= \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \\ e^{-x} &= \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \end{aligned}\right\}. \qquad (19,18)$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим

$$y = C_1(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) + C_2(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x),$$

или

$$y = (C_2 + C_1)\operatorname{ch} x + (C_2 - C_1)\operatorname{sh} x.$$

Обозначим: $C_2 + C_1 = c_1$; $C_2 - C_1 = c_2$, и тогда общее решение запишется в виде

$$y = c_1 \operatorname{ch} x + c_2 \operatorname{sh} x.$$

Из начальных условий $C_1 = 1$; $C_2 = 0$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = e^x, \text{ или } y = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x.$$

5) Составляем характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Его корни $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ — числа вещественные, но равные между собою ($k_1 = k_2$). Поэтому частные решения надо записать не в виде (19,14), а в виде (19,15):

$$y_1 = e^x;\ y_2 = xe^x.$$

Легко заметить, что в этом случае второе частное решение получается умножением первого частного решения на независимую переменную (в данном случае на $x$). Решения эти линейно независимы, так как $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$.

Общее решение, согласно (19,3), имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2xe^x, \text{ или } y = e^x(C_1 + C_2x); \qquad (A)$$

$$y' = e^x[C_1 + C_2(x+1)].$$

Подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим систему уравнений для определения произвольных постоянных:

$$2 = C_1;$$

$$4 = C_1 + C_2;$$

$C_1 = 2$; $C_2 = 2$. Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 2e^x(1 + x).$$

6) Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 4 = 0$. Его корни $k_1 = -2$; $k_2 = -2$ — числа вещественные и равные между собой. Согласно (19,15) в этом случае частными решениями являются функции

$$y_1 = e^{-2x};\ y_2 = xe^{-2x}.$$

Общее решение

$$y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x},$$

или

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x);$$

$$y' = e^{-2x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2x).$$

Система уравнений для определения $C_1$ и $C_2$ из начальных условий:

$$\left.\begin{array}{l} 4e^{-4} = C_1 + 2C_2 \\ 0 \quad = 2C_1 + 3C_2 \end{array}\right\},$$

$C_1 = -12e^{-4}$; $C_2 = 8e^{-4}$. Искомое решение

$$y = 4e^{4-2x}(2x - 3).$$

7) Характеристическое уравнение запишется так: $k^2 - 2k + 2 = 0$. Его корни $k_1 = 1 + i$; $k_2 = 1 - i$ — сопряженные комплексные числа вида $\alpha + \beta i$. Частные решения имеют вид (19,16), причем в этих решениях надо взять $\alpha = 1$; $\beta = 1$:

$$y_1 = e^x \cos x; \quad y_2 = e^x \sin x.$$

Общее решение:

$$y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x,$$

или

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x). \qquad (A)$$

Для определения произвольных постоянных из начальных условий надо найти $y'$:

$$y' = e^x[(C_2 + C_1)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x]. \qquad (B)$$

Подставляя в $(A)$ и $(B)$ начальные условия, получим систему уравнений для определения произвольных постоянных:

$$\left.\begin{array}{l} -2 = -e^{\pi} C_1 \\ -3 = -e^{\pi}(C_1 + C_2) \end{array}\right\},$$

$$C_1 = 2e^{-\pi}; \quad C_2 = e^{-\pi}.$$

Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям, получим, подставляя эти значения в общее решение $(A)$:

$$y = e^{x-\pi}(2\cos x + \sin x).$$

8) Характеристическое уравнение:

$$k^2 + k + 1 = 0.$$

Его корни: $k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ — комплексные сопряженные числа вида $\alpha \pm \beta i$; $\alpha = -\frac{1}{2}$; $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Согласно (19,16), частными решениями будут функции:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x; \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

(очевидно, что эти функции линейно независимы). Общее решение в соответствии с (19,3) запишется так:

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

или, вынося $e^{-\frac{1}{2}x}$ за скобку:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \qquad (A)$$

Чтобы определить произвольные постоянные на основании начальных условий, найдем $y'$:

$$y' = e^{-\frac{1}{2}x} \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_1 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \left( \frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]. \quad (B)$$

Используя начальные условия, из уравнений ($A$) и ($B$) получаем систему уравнений для определения $C_1$ и $C_2$:

$$\left. \begin{aligned} 2 &= C_1 \\ \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 - \frac{1}{2} C_1 \end{aligned} \right\},$$

отсюда $C_1 = 2$; $C_2 = \sqrt{3}$. Подставляя эти значения в общее решение, найдем искомое решение

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left( 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

9) Это уравнение является уравнением свободных гармонических колебаний. Оно имеет очень важное значение в механике и других прикладных науках.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + \omega^2 = 0$; $k_1 = \omega i$; $k_2 = -\omega i$ — корни комплексные сопряженные, причем $\alpha = 0$; $\beta = \omega$.

Частные решения, согласно (19,16), имеют вид:

$$y_1 = \cos \omega x; \quad y_2 = \sin \omega x.$$

Следует запомнить, что когда действительная часть комплексного корня характеристического уравнения равна нулю, т. е. когда корни чисто мнимые, то частные решения содержат только тригонометрические функции, множитель же $e^{\alpha x}$ при них отсутствует, так как при $\alpha = 0$ $e^{\alpha x} = 1$.

Общее решение, согласно (19,3):

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x; \qquad (19,19)$$

$$y' = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x$$

(рекомендуется запомнить это общее решение уравнения свободных гармонических колебаний. Встречаться оно будет очень часто).

Определяем $C_1$ и $C_2$ из начальных условий:

$$\left. \begin{aligned} a &= C_1 \\ v_0 &= C_2 \omega \end{aligned} \right\}.$$

Отсюда $C_1 = a$; $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$. Подставляя эти значения произвольных постоянных в (19,19), получаем искомое решение в виде

$$y = a\cos\omega x + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega x.$$

Это решение выгодно представить в другом виде. Положим

$$a = A\sin\varphi; \quad \frac{v_0}{\omega} = A\cos\varphi. \tag{19,20}$$

Тогда

$$y = A\cos\omega x\sin\varphi + A\sin\omega x\cos\varphi = A(\cos\omega x\sin\varphi + \sin\omega\cos\varphi).$$

Окончательно

$$y = A\sin(\omega x + \varphi). \tag{19,21}$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (19,20) и складывая их почленно, получим:

$$A = \sqrt{a^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a\omega}{v_0}.$$

Механический смысл величин $A$, $\omega$ и $\varphi$: $A$ — амплитуда колебаний; $\omega$ — частота колебаний; $\varphi$ — начальная фаза.

Движение, определяемое рассматриваемым уравнением $y'' + \omega^2 y = 0$,— периодическое. Его период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

10) Характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0$. Его корни $k_1 = 0$; $k_2 = -1$. Корни вещественные и разные. Частные решения на основании (19,14)

$$y_1 = 1; \quad y_2 = e^{-x}.$$

Общее решение в соответствии с (19,3)

$$y = C_1 + C_2e^{-x}.$$

Решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 7 - 5e^{-x}$$

$(C_1 = 7;\ C_2 = -5)$.

**Задача 19,7** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений (независимая переменная $t$):

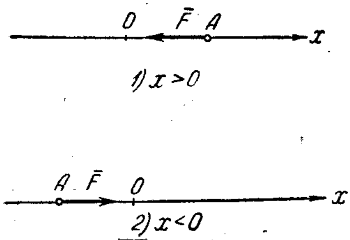
1) $x'' - 4x' = 0$; 2) $x'' - 9x = 0$; 3) $x'' - 7x' + 10x = 0$;
4) $x'' + 5x' = 0$; 5) $x'' - 16x = 0$; 6) $x'' + x' + x = 0$;
7) $x'' + 2x' + 4x = 0$; 8) $x'' - 4x' + 4x = 0$; 9) $x'' + 6x' + 9x = 0$;
10) $x'' - 4x' + 29x = 0$; 11) $x'' + 4x = 0$; 12) $x'' + 17x = 0$.

**Ответ.** 1) $x = C_1 + C_2e^{4t}$; 2) $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$; 3) $x = C_1e^{2t} + C_2e^{5t}$; 4) $x = C_1 + C_2e^{-5t}$; 5) $x = C_1e^{4t} + C_2e^{-4t}$; 6) $x = e^{-\frac{t}{2}} \times \left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; 7) $x = e^{-t}(C_1\cos\sqrt{3}t + C_2\sin\sqrt{3}t)$; 8) $x = e^{2t}(C_1 + C_2t)$; 9) $x = e^{-3t}(C_1 + C_2t)$; 10) $x = e^{2t}(C_1\cos 5t + C_2\sin 5t)$; 11) $x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$; 12) $x = C_1\cos\sqrt{17}t + C_2\sin\sqrt{17}t$.

**Задача 19,8** (для самостоятельного решения).

Материальная точка массы $m$ движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямо пропорциональной расстоянию точки от центра притяжения. Сопротивление среды отсутствует. Определить закон движения точки, если в начальный момент движения $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$, т. е. $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

**Решение.** Прямую, по которой происходит движение точки, примем за ось $Ox$, причем положительным будем считать направление направо. Начало координат поместим в центр притяжения. Коэффициент пропорциональности возьмем для удобства последующих выкладок равным $k^2m$. Сила притяжения



К задаче 19,8

$$\bar{F} = k^2m\bar{x},$$

здесь $|\bar{x}|$ — расстояние точки от начала координат.

Определим модуль силы $\bar{F}$.

Модуль вектора — величина положительная. Поэтому перед модулем силы надо поставить знак плюс, когда точка находится справа от начала координат ($x > 0$), и знак минус, когда она находится слева от него ($x < 0$). Таким образом, модуль силы

$$F = \pm k^2mx. \qquad (A)$$

Когда точка находится справа от начала координат ($x > 0$), то сила притяжения к началу координат направлена в отрицательную сторону оси $Ox$, а потому составляет с осью $Ox$ угол в 180°, а $\cos(x, \bar{F}) = -1$.

Если же точка находится слева от начала координат ($x < 0$), сила притяжения направлена в положительную сторону оси $Ox$ и составляет с нею угол в 0°, а потому $\cos(x, \bar{F}) = +1$.

Таким образом, $\cos(x, \bar{F}) = \mp 1$, причем верхний знак соответствует $x > 0$, а нижний $x < 0$.

Известно, что проекция вектора на ось равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью. Умножая ($A$) на $\cos(x, \bar{F}) = \mp 1$, получаем

$$F_x = -k^2mx, \qquad (B)$$

независимо от того, где находится на оси $Ox$ притягиваемая точка.

Подставляя это значение проекции силы в основное уравнение динамики:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,$$

получаем дифференциальное уравнение движения

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx \tag{19,22}$$

и, сокращая на $m$, имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{C}$$

Это уравнение, как мы уже говорили, называется уравнением свободных гармонических колебаний. Мы замечаем, что оно является линейным однородным уравнением второго порядка (искомая функция — $x$, независимая переменная — $t$).

Его характеристическим уравнением будет

$$l^2 + k^2 = 0. \tag{D}$$

Неизвестное характеристического уравнения мы обозначили не буквой $k$, как это было в предыдущих задачах, а $l$, так как $k$ входит уже в коэффициент пропорциональности.

Решая уравнение ($D$), находим, что $l = \pm ki$, а потому частными решениями уравнения ($D$) будут:

$$x_1 = \cos kt; \quad x_2 = \sin kt,$$

и его общее решение

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt.$$

Из начальных условий задачи следует, что $C_1 = x_0$; $C_2 = \frac{v_0}{k}$ (определите это самостоятельно), поэтому решением задачи, удовлетворяющим начальным условиям, будет

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt. \tag{E}$$

Далее удобно поступить так, как это было сделано в задаче 19,6 (9), и тогда решение ($E$) запишется так:

$$x = a\sin(\omega t + \varphi),$$

где

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x_0k}{v_0}.$$

**Задача 19,9** (для самостоятельного решения).

Материальная точка массы $m$ движется по прямой, отталкиваемая от неподвижного центра силой, пропорциональной расстоянию. Начальные условия: $x(t_0) = x_0$; $v(t_0) = v_0$.

Указание. Дифференциальным уравнением движения будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = k^2mx.$$

Общее решение:

$$x = C_1e^{kt} + C_2e^{-kt}.$$

Из начальных условий определяем $C_1$ и $C_2$:

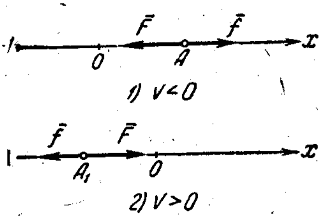
$$C_1 = \frac{kx_0 + v_0}{2k} e^{-kt_0}; \quad C_2 = \frac{kx_0 - v_0}{2k} e^{kt_0};$$

$$x = \frac{1}{2}\left[\left(x_0 + \frac{V_0}{k}\right) e^{k(t-t_0)} + \left(x_0 - \frac{V_0}{k}\right) e^{-k(t-t_0)}\right],$$

или, используя формулы (19,18):

$$x = x_0 \operatorname{ch} k(t - t_0) + \frac{v_0}{k} \operatorname{sh} k(t - t_0).$$

**Задача 19,10.** Материальная точка массы $m$ движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой $\overline{F}$, прямо пропорциональной расстоянию точки от центра притяжения. Сила сопротивления среды $\overline{f}$ прямо пропорциональна первой степени скорости.




К задаче 19,10

Начальные условия: в начальный момент движения $(t = 0)$ $x(0) = x_0$; $v_0(0) = v_0$. Найти закон движения.

**Решение.** Эта задача отличается от задачи 19,8 тем, что здесь учитывается сила сопротивления среды. Обозначим для удобства последующих выкладок коэффициент пропорциональности через $2hm$ $(h > 0)$. Если точка движется в положительном направлении оси $Ox$, то ее абсцисса с течением времени возрастает, а скорость $\frac{dx}{dt} > 0$. Если же точка движется в отрицательном направлении оси, то ее абсцисса убывает с течением времени, а следовательно, ее скорость $\frac{dx}{dt} < 0$. Так как сила сопротивления $\overline{f}$ всегда направлена в сторону, противоположную скорости, то $\overline{f} = -2hm\overline{V}$. Таким образом, на точку действует сила притяжения $\overline{F} = k^2 m\overline{x}$; $F_x = -k^2 mx$ (см. задачу 19,8) и сила сопротивления $\overline{f} = -2hm\overline{V}$. Сумма проекций этих сил на ось $Ox$ равна $-k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt}$, и дифференциальное уравнение движения, согласно второму закону Ньютона, запишется так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt},$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \tag{19,23}$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Искомая функция — $x$, независимая переменная — $t$.

Характеристическое уравнение, если обозначить его неизвестное буквой $s$, будет таким:

$$s^2 + 2hs + k^2 = 0;$$

$$s = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}.$$

Рассмотрим три случая: 1) $h < k$; 2) $h = k$; 3) $h > k$.

1) Если $h < k$, то $h^2 - k^2 < 0$. Обозначим $h^2 - k^2 = -\omega^2$. Тогда $s = -h \pm \omega i$, а $x_1 = e^{-ht}\cos\omega t$; $x_2 = e^{-ht}\sin\omega t$.

Общее решение:

$$x = C_1 e^{-ht}\cos\omega t + C_2 e^{-ht}\sin\omega t,$$

или

$$x = e^{-ht}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t).$$

При $t = 0$ имеем $x_0 = C_1$.

Найдем $\frac{dx}{dt}$ и определим $C_2$:

$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht}\left[(C_2\omega - C_1 h)\cos\omega t - (C_1\omega + C_2 h)\sin\omega t\right].$$

При $t = 0$

$$v_0 = -C_1 h + C_2\omega, \text{ или } v_0 = -x_0 h + C_2\omega,$$

$$C_2 = \frac{v_0 + x_0 h}{\omega}.$$

Подставляя найденные значения $C_1$ и $C_2$ в общее решение, получим решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = e^{-ht}\left(x_0\cos\omega t + \frac{v_0 + x_0 h}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Если обозначить

$$x_0 = a\sin\varphi; \quad \frac{v_0 + x_0 h}{\omega} = a\cos\varphi, \tag{19,24}$$

то предыдущее равенство запишется так:

$$x = ae^{-ht}\sin(\omega t + \varphi). \tag{19,25}$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (19,24) и складывая их почленно, получим

$$a = \frac{1}{\omega}\sqrt{x_0^2\omega^2 + (v_0 + x_0 h)^2},$$

а $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\omega}{v_0 + x_0 h}$.

Наличие в равенстве (19,24) множителя $\sin(\omega t + \varphi)$ указывает на колебательный характер движения. С увеличением времени $t$ множитель $e^{-ht}$ уменьшается и стремится к нулю. Когда время неограниченно возрастает, точка колеблется около начала координат, неограниченно к нему приближаясь. Движение в рассматриваемом случае является затухающим колебательным, а уравнение (19,23) называется уравнением затухающих колебаний.

2) Если $h > k$, то $h^2 - k^2 > 0$, $h^2 - k^2 = \omega^2$; корни характеристического уравнения $s_1$ и $s_2$ — числа вещественные и не равные между собой:

$$x = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}. \tag{19,26}$$

Из начальных условий следует, что

$$C_1 = \frac{x_0 s_2 - v_0}{s_2 - s_1}; \quad C_2 = \frac{v_0 - x_0 s_1}{s_2 - s_1}.$$

Решение (19,26) описывает так называемый апериодический затухающий процесс движения точки к положению равновесия.

3) При $h = k$ корни характеристического уравнения вещественны и между собою равны: $s_1 = s_2 = -h$:

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}; \tag{19,27}$$

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = x_0 h + v_0.$$

И в этом случае, когда $t \to \infty$, абсцисса движущейся точки $x \to 0$, т. е. точка неограниченно приближается к началу координат — положению равновесия, оставаясь с одной стороны от него, если начальная скорость $v_0$ не очень велика. Движение, описываемое уравнением (19,26), также называется апериодическим.

Теперь мы решим несколько линейных дифференциальных однородных уравнений порядка выше чем второй с постоянными коэффициентами.

**Задача 19,11.** Найти общие решения уравнений:
1) $y''' - y'' - y' + y = 0$; 2) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; 3) $y''' + y = 0$;
4) $y^{(4)} - y'' = 0$; 5) $y^{(4)} - y = 0$; 6) $y^{(4)} + y = 0$; 7) $y^{(6)} - 2y^{(4)} - y'' + 2y = 0$;
8) $\frac{d^4x}{dt^4} - 13\frac{d^2x}{dt^2} + 36x = 0$; 9) $\frac{d^3z}{du^3} - 6\frac{d^2z}{du^2} + 12\frac{dz}{du} - 8z = 0$;
10) $y^{(5)} - 5y^{(4)} + 12y''' - 16y'' + 12y' - 4y = 0$.

Независимой переменной во всех примерах, где она не указана, является $x$.

**Решение.** 1) Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0.$$

Разлагаем левую часть этого уравнения на множители:

$$k^2(k - 1) - (k - 1) = 0; \quad (k - 1)(k^2 - 1) = 0,$$

или $(k - 1)(k - 1)(k + 1) = 0$. Отсюда $k - 1 = 0$; $k - 1 = 0$; $k + 1 = 0$. Корни: $k_1 = 1$; $k_2 = 1$; $k_3 = -1$. Все корни — вещественны, но среди них есть два равных: $k_1 = k_2$.

Частными решениями уравнения на основании (19,14) и (19,15) будут:

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = xe^x; \quad y_3 = e^{-x}.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}.$$

2) Характеристическое уравнение: $k^3-3k^2+3k-1=0$, его левая часть равна $(k-1)^3$. Поэтому $k_1=1$; $k_2=1$; $k_3=1$. Корни вещественны и все между собою равны.

Частными решениями уравнения в соответствии с (19,15) будут:

$$y_1=e^x;\quad y_2=xe^x;\quad y_3=x^2e^x,$$

а общее решение запишется так:

$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x, \text{ или } y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2).$$

3) Характеристическое уравнение: $k^3+1=0$. Разлагая левую часть на множители, получаем: $(k+1)(k^2-k+1)=0$; $k+1=0$; $k^2-k+1=0$. Корни: $k_1=-1$; $k_{2,3}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Корню $k_1=-1$ соответствует решение $y_1=e^{-x}$, а корням $k_2$ и $k_3$ $\left(\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ на основании (19,16) — решения:

$$y_2=e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x;\quad y_3=e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

окончательно

$$y=C_1e^{-x}+e^{\frac{1}{2}x}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

4) Характеристическое уравнение: $k^4-k^2=0$; $k^2(k^2-1)=0$. Корни: $k_1=0$; $k_2=0$; $k_3=1$; $k_4=-1$. Первым двум вещественным и равным между собою корням соответствуют на основании (19,15) частные решения: $y_1=1$; $y_2=x$, а корням $k_3$ и $k_4$ — решения $y_3=e^x$ и $y_4=e^{-x}$.

Общим решением уравнения будет

$$y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}.$$

5) Характеристическое уравнение: $k^4-1=0$.

Разлагая левую часть этого уравнения на множители, получаем: $(k^2-1)(k^2+1)=0$, или $(k-1)(k+1)(k^2+1)=0$. Корни: $k_1=1$; $k_2=-1$; $k_{3,4}=\pm i$. Первым двум корням в соответствии с (19,14) отвечают частные решения уравнения: $y_1=e^x$; $y_2=e^{-x}$, а мнимым корням $k_3$ и $k_4$ ($\alpha=0$; $\beta=1$) на основании (19,16) — решения: $y_3=\cos x$; $y_4=\sin x$.

Общее решение:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

6) Уравнение встречается при определении уравнения изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании.

Характеристическое уравнение: $k^4 + 1 = 0$.

Решение этого двучленного уравнения вызовет некоторые затруднения. Прибавим в его левую часть и одновременно вычтем из нее $2k^2$, отчего уравнение не изменится. Получим:

$$k^4 + 2k^2 + 1 - 2k^2 = 0; \quad (k^2 + 1)^2 - 2k^2 = 0.$$

Разлагаем левую часть на множители: $(k^2 + 1 - \sqrt{2}k)(k^2 + 1 + \sqrt{2}k) = 0$. Отсюда получаем два уравнения:

$$k^2 - \sqrt{2}k + 1 = 0 \quad \text{и} \quad k^2 + \sqrt{2}k + 1 = 0.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$k_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i; \quad k_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

На основании (19,16) частными решениями, соответствующими первым двум корням, будут

$$y_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x; \quad y_2 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

а частными решениями, соответствующими третьему и четвертому корням:

$$y_3 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x; \quad y_4 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Общее решение:

$$y = C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

или

$$y = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right).$$

Во многих прикладных науках (например, в сопротивлении материалов) принято функции $e^x$ и $e^{-x}$ заменять гиперболическими по формулам (19,18). На основании этих формул:

$$e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x + \operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x; \quad e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x - \operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Поэтому предыдущее решение может быть записано так:

$$y = c_1 \operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 \operatorname{ch}\frac{\sqrt{2}}{2}x \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_3 \operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + c_4 \operatorname{sh}\frac{\sqrt{2}}{2}x \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

где $c_1 = C_1 + C_3$; $c_2 = C_2 + C_4$; $c_3 = C_1 - C_3$; $c_4 = C_2 - C_4$.

7) Характеристическое уравнение:

$$k^6-2k^4-k^2+2=0.$$

Легко заметить, что корнями этого уравнения будут: $k_1=1$ и $k_2=-1$. Разделив левую часть уравнения на $k^2-1$, получим $k^4-k^2-2$. Поэтому левую часть уравнения можно записать в виде

$$(k-1)(k+1)(k^4-k^2-2)=0.$$

Решая биквадратное уравнение $k^4-k^2-2=0$, найдем корни: $k_3=\sqrt{2}$; $k_4=-\sqrt{2}$; $k_{5.6}=\pm i$.

Частными решениями уравнения будут:

$$y_1=e^x;\ y_2=e^{-x};\ y_3=e^{\sqrt{2}x};\ y_4=e^{-\sqrt{2}x};\ y_5=\cos x;\ y_6=\sin x.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{\sqrt{2}x}+C_4e^{-\sqrt{2}x}+C_5\cos x+C_6\sin x.$$

8) Характеристическое уравнение: $k^4-13k^2+36=0$. Его корни: $k_1=2$; $k_2=-2$; $k_3=3$; $k_4=-3$.

Частные решения: $x_1=e^{2t}$; $x_2=e^{-2t}$; $x_3=e^{3t}$; $x_4=e^{-3t}$.

Общее решение:

$$x=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+C_3e^{3t}+C_4e^{-3t}.$$

9) Характеристическое уравнение: $k^3-6k^2+12k-8=0$.

Левая часть уравнения — куб разности $k-2$, и уравнение переписывается так: $(k-2)^3=0$.

Его корни: $k_1=2$; $k_2=2$; $k_3=2$ — вещественны и все равны между собой. Поэтому на основании (19,15) частными решениями будут (иметь в виду, что искомая функция — $z$, независимая переменная — $u$):

$$z_1=e^{2u};\ z_2=ue^{2u};\ z_3=u^2e^{2u}.$$

Общее решение:

$$z=C_1e^{2u}+C_2ue^{2u}+C_3u^2e^{2u},$$

или

$$z=e^{2u}(C_1+C_2u+C_3u^2).$$

10) Характеристическое уравнение:

$$k^5-5k^4+12k^3-16k^2+12k-4=0.$$

Очевидным корнем его является 1 ($k_1=1$). После деления левой части уравнения на $k-1$ получим $k^4-4k^3+8k^2-8k+4$. Левая часть уравнения теперь представится в виде произведения двух множителей:

$$(k-1)(k^4-4k^3+8k^2-8k+4)=0,$$

откуда

$$k-1=0;\ k_1=1;\ k^4-4k^3+8k^2-8k+4=0.$$

Представим последнее уравнение в виде

$$(k^2-2k)^2+4(k^2-2k)+4=0.$$

Левая часть этого уравнения есть полный квадрат суммы $[(k^2-2k)+2]^2$, а потому $(k^2-2k+2)^2=0$.

Корнями этого уравнения являются числа:

$$k_{2,3}=1\pm i;\ k_{4,5}=1\pm i,$$

т. е. его корни — комплексные и кратные.

Первому корню соответствует решение $y_1=e^x$, остальным четырем корням на основании (19,17) — решения ($\alpha=1$; $\beta=1$):

$$y_2=e^x\cos x;\quad y_3=e^x\sin x;$$
$$y_4=xe^x\cos x;\quad y_5=xe^x\sin x.$$

Общее решение:

$$y=C_1e^x+C_2e^x\cos x+C_3e^x\sin x+C_4xe^x\cos x+C_5xe^x\sin x,$$

или

$$y=[C_1+(C_2+C_4x)\cos x+(C_3+C_5x)\sin x]\,e^x.$$

В заключение решим четыре задачи с граничными (краевыми) условиями.

Как уже указывалось, в этих задачах искомая функция и ее производные задаются не при одном и том же значении аргумента, как это делается в задачах с начальными условиями (в задаче Коши), а при разных значениях аргумента, соответствующих границам (краям) некоторого промежутка интегрирования. Поэтому они и называются граничными (иначе краевыми) задачами.

Учащийся должен иметь в виду, что не всякая граничная задача имеет решение, а если и имеет его, то во многих случаях оно не является единственным.

Приведем пример граничной задачи, которая не имеет решения.

Найти решение дифференциального уравнения $y''+4y=0$, удовлетворяющее граничным условиям: при $x=0$ искомая функция $y=2$; при $x=\frac{\pi}{2}$ искомая функция $y=3$.

Здесь заданы значения искомой функции на концах промежутка $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Характеристическое уравнение: $k^2+4=0$. Его корни: $k_1=2i$; $k_2=-2i$. Частные решения уравнения: $y_1=\cos 2x$; $y_2=\sin 2x$. Общее решение: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Определим теперь произвольные постоянные так, чтобы $y$ удовлетворял граничным условиям. Подставим в общее решение первое граничное условие $y(0)=2$ и получим, что $2=C_1$. Подстановка же в общее решение второго граничного условия $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ дает $3=-C_1$. Система

$$\left.\begin{aligned}2&=C_1\\3&=-C_1\end{aligned}\right\}$$

не совместна и, таким образом, нет решения предложенного уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям.

На языке геометрии это означает, что через точки (0, 2) и $\left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ не проходит ни одна интегральная кривая.

Если бы второе граничное условие: $y = 3$ при $x = \frac{\pi}{2}$ мы заменили, положив $y = -2$ при $x = \frac{\pi}{2}$, то оказалось бы, что $-2 = -C_1$, и для определения $C_1$ получилась бы уже совместная система уравнений, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = C_1 \\ 2 = C_1 \end{array}\right\},$$

а решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям, записалось бы так:

$$y = 2\cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

где $C_2$ — произвольная постоянная. Это означает, что существует бесчисленное множество интегральных кривых заданного уравнения, проходящих через точки (0,2) и $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

**Задача 19,12.** Найти решение уравнения

$$EI\frac{d^4y}{dz^4} - \frac{4k}{a^3}y = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$1) \text{ при } z = 0 \quad y = 0; \quad 2) \text{ при } z = 0 \quad \frac{dy}{dz} = 0;$$
$$3) \text{ при } z = l \quad \frac{d^2y}{dz^2} = 0; \quad 4) \text{ при } z = l \quad \frac{d^3y}{dz^3} = 0. \qquad (19,28)$$

**Решение.** Это уравнение встречается при решении задачи о потере устойчивости стержня, находящегося в магнитном поле. (Здесь $EI$ — жесткость стержня; $a$ — начальное расстояние между магнитом и стержнем; $k$ — коэффициент пропорциональности; $y$ — отклонение стержня от положения равновесия).

Из уравнения видно, что искомой функцией является $y$, а независимой переменной — $z$. Разделим обе части уравнения на $EI$ и обозначим

$$\frac{4k}{EIa^3} = \alpha^4; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{4k}{EIa^3}}.$$

Уравнение переписывается так:

$$\frac{d^4y}{dz^4} - \alpha^4 y = 0$$

и представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня.

Характеристическое уравнение: $k^4 - \alpha^4 = 0$. Разлагая его левую часть на множители, получаем:

$$(k^2 - \alpha^2)(k^2 + \alpha^2) = 0, \quad \text{или} \quad (k - \alpha)(k + \alpha)(k^2 + \alpha^2) = 0.$$

Его корни: $k_1 = \alpha$; $k_2 = -\alpha$; $k_{3,4} = \pm \alpha i$. Частные решения уравнения

$$y_1 = e^{\alpha z} = \operatorname{ch} \alpha z + \operatorname{sh} \alpha z; \quad y_2 = e^{-\alpha z} = \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z$$

(см. формулы (19,18)); $y_3 = \cos \alpha z$; $y_4 = \sin \alpha z$.

Общее решение:

$$y = C_1 (\operatorname{ch} \alpha z + \operatorname{sh} \alpha z) + C_2 (\operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z) + C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z.$$

Перепишем его в виде

$$y = (C_1 + C_2) \operatorname{ch} \alpha z + (C_1 - C_2) \operatorname{sh} \alpha z + C_3 \cos \alpha z + C_4 \sin \alpha z.$$

Обозначим: $C_1 + C_2 = A_1$; $C_1 - C_2 = A_2$, и для однообразности обозначений примем $C_3 = A_3$; $C_4 = A_4$.

Общее решение запишется теперь так:

$$y = A_1 \operatorname{ch} \alpha z + A_2 \operatorname{sh} \alpha z + A_3 \cos \alpha z + A_4 \sin \alpha z. \tag{19,29}$$

Для определения четырех произвольных постоянных используем четыре заданных граничных условия (19,28) и получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \qquad\qquad\qquad + A_3 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ A_2 \qquad\qquad\qquad + A_4 \qquad\qquad &= 0 \\ A_1 \operatorname{ch} \alpha l + A_2 \operatorname{sh} \alpha l - A_3 \cos \alpha l - A_4 \sin \alpha l &= 0 \\ A_1 \operatorname{sh} \alpha l + A_2 \operatorname{ch} \alpha l + A_3 \sin \alpha l - A_4 \cos \alpha l &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{19,30}$$

Уравнения (19,30) представляют собой систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. Как и всякая система алгебраических линейных однородных уравнений, она имеет тривиальное (самоочевидное) решение:

$$A_1 = 0; \quad A_2 = 0; \quad A_3 = 0; \quad A_4 = 0.$$

Чтобы система (19,30) имела решение, отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & -\sin \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & \sin \alpha l & -\cos \alpha l \end{vmatrix} = 0 \tag{19,31}$$

Вычислим этот определитель. Отнимем от элементов четвертого столбца соответствующие элементы второго столбца, и уравнение (19,31) перепишется так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l & -\cos \alpha l & -\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l & \sin \alpha l & -\cos \alpha l - \operatorname{ch} \alpha l \end{vmatrix} = 0$$

Во второй строке все элементы, кроме второго, равны нулю, а поэтому определитель равен произведению этого неравного нулю элемента на его алгебраическое дополнение, и теперь уравнение (19, 30) будет выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \operatorname{ch}\alpha l & -\cos\alpha l & -\sin\alpha l-\operatorname{sh}\alpha l \\ \operatorname{sh}\alpha l & \sin\alpha l & -\cos\alpha l-\operatorname{ch}\alpha l \end{vmatrix}=0.$$

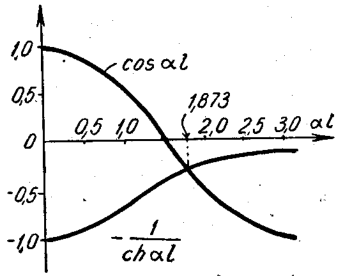
Вычислив определитель третьего порядка по известному правилу, получим уравнение

$$\cos\alpha l\operatorname{ch}\alpha l=-1, \tag{19,32}$$

которое перепишем в виде

$$\cos\alpha l=-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha l}.$$

Построим графики функций $\cos\alpha l$ и $-\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha l}$ (см. чертеж). Абсциссы точек пересечения этих графиков и будут корнями этих уравнений. Наименьший корень $\alpha l=$ $=1,873$.




К задаче 19,12

Установим теперь, какая зависимость существует между произвольными постоянными $A_1, A_2, A_3, A_4$.

Первое и второе уравнения системы (19,30) показывают, что

$$A_3=-A_1;\quad A_4=-A_2. \tag{19,33}$$

Исключая $A_3$ и $A_4$ из третьего и четвертого уравнений этой системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} A_1(\operatorname{ch}\alpha l+\cos\alpha l)+A_2(\operatorname{sh}\alpha l+\sin\alpha l)=0 \\ A_1(\operatorname{sh}\alpha l-\sin\alpha l)+A_2(\operatorname{ch}\alpha l+\cos\alpha l)=0 \end{aligned}\right\}. \tag{19,34}$$

Первое уравнение системы дает

$$A_2=-\frac{\operatorname{ch}\alpha l+\cos\alpha l}{\operatorname{sh}\alpha l+\sin\alpha l}A_1. \tag{19,35}$$

И, таким образом, все произвольные постоянные могут быть выражены через $A_1$.

Подставляя в (19,35) $\alpha l=1,873$ и учитывая равенства (19,33), получаем:

$$A_2=-0,734A_1;\quad A_3=-A_1;\quad A_4=0,734A_1, *$$

* $\cos 1,873=-0,2976$; $\sin 1,873=0,9547$; $\operatorname{sh} 1,873=3,1771$; $\operatorname{ch} 1,873=$ $=3,3307$.

а потому, так как $\alpha = \frac{1,873}{l}$, общее решение (19,29) запишется так:

$$y = A_1 \operatorname{ch} \frac{1,873}{l} z - A_1 0,734 \operatorname{ch} \frac{1,873}{l} z - A_1 \cos \frac{1,873}{l} z +$$
$$+ A_1 0,734 \sin \frac{1,873}{l} z.$$

Окончательно, вынося $A_1$ за скобку, получим уравнение изогнутой оси стержня

$$y = A_1 \left( \operatorname{ch} 1,873 \frac{z}{l} - 0,734 \operatorname{sh} 1,873 \frac{z}{l} - \cos 1,873 \frac{z}{l} + \right.$$
$$\left. + 0,734 \sin 1,873 \frac{z}{l} \right),$$

содержащее единственный неопределенный параметр $A_1$, характеризующий масштаб кривой изгиба.

**Замечание.** Мы указали общий способ решения системы (19,30). Однако можно было бы и не идти этим общим путем, а исключить с помощью первого и второго уравнений этой системы неизвестные $A_3$ и $A_4$ и тем самым получить систему (19,34), из которой, приравнивая нулю ее определитель:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l & \operatorname{sh} \alpha l + \sin \alpha l \\ \operatorname{sh} \alpha l - \sin \alpha l & \operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l \end{vmatrix} = 0,$$

получили бы

$$\operatorname{ch}^2 \alpha l + 2 \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l + \cos^2 \alpha l - \operatorname{sh}^2 \alpha l + \sin^2 \alpha l = 0.$$

Отсюда

$$1 + 1 + 2 \operatorname{ch} \alpha l \cos \alpha l = 0, \text{ или } \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = -1,$$

т. е. уравнение (19,32), которое было получено раньше.

**Задача 19,13.** Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 y}{dz^4} + s^3 \frac{dy}{dz} = 0 \qquad (19,36)$$

($s$ — постоянная величина), удовлетворяющее граничным условиям:

1) $y'' = 0$ при $z = 0$; 2) $y''' = 0$ при $z = 0$;
3) $y = 0$ при $z = b$; 4) $y' = 0$ при $z = b$.

**Решение.** К уравнению (19,36) приводит решение задачи об исследовании искривленной поверхности пластинки, жестко опертой по одной из ее длинных кромок и свободной вдоль другой, когда изгиб пластинки обусловлен аэродинамическими нагрузками. Величина $s$ в уравнении зависит от скорости потока и от параметров пластинки.

Характеристическое уравнение: $k^4+s^3k=0$. Разлагая его левую часть на множители, получаем $k(k^3+s^3)=0$;

$$k(k+s)(k^2-sk+s^2)=0.$$

Корни:

$$k_1=0;\quad k_2=-s;\quad k_{3,4}=\frac{s}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}si.$$

Частные решения уравнения (19,36): $y_1=1$; $y_2=e^{-sz}$; $y_3=$ $=e^{\frac{sz}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sz$; $y_4=e^{\frac{sz}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sz$.

Общее решение:

$$y=C_1+C_2e^{-sz}+\left(C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sz+C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sz\right)e^{\frac{sz}{2}}. \qquad (19,37)$$

Если использовать граничные условия, то для определения произвольных постоянных получим систему четырех однородных линейных алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3-\frac{1}{2}C_4=0\\
&C_2+C_4=0\\
&C_1+C_2e^{-sb}+\left(C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)e^{\frac{sb}{2}}=0\\
&-C_2e^{-sb}+\frac{1}{2}e^{\frac{sb}{2}}C_3\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)+\\
&+\frac{1}{2}e^{\frac{sb}{2}}C_4\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)=0
\end{aligned}\right\} \qquad (19,38)$$

Для того, чтобы эта система уравнений имела решение, отличное от тривиального

$$C_1=C_2=C_3=C_4=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был равен нулю.

Однако мы не будем составлять этот определитель и вычислять его, а выразим неизвестные $C_3$ и $C_4$ через $C_2$.

Из второго уравнения следует, что

$$C_4=-C_2. \qquad (19,39)$$

Подставляя это значение $C_4$ в первое уравнение (19,38) получим

$$C_2+\frac{1}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3=0;\quad \frac{3}{2}C_2+\frac{\sqrt{3}}{2}C_3=0,$$

откуда

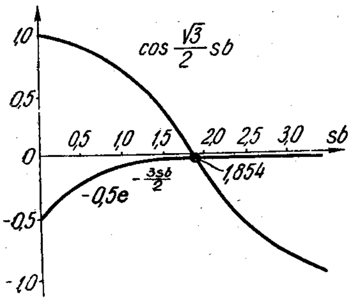
$$C_3=-\sqrt{3}C_2. \qquad (19,40)$$

Теперь эти выражения $C_4$ и $C_3$ через $C_2$ подставим в четвертое уравнение:

$$-C_2e^{-sb}-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{sb}{2}}C_2\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)-$$
$$-\frac{1}{2}e^{\frac{sb}{2}}C_2\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)=0.$$

Выноса $-C_2$ за скобку, получим

$$-C_2\left(e^{-sb}+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{sb}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\frac{3}{2}e^{\frac{sb}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}e^{\frac{sb}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{sb}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)=0.$$




К задаче 19,13

Так как по предположению $C_2 \neq 0$, то

$$e^{-sb}+2e^{\frac{sb}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb=0.$$

Для определения параметра $sb$ получаем уравнение

$$\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb=-0{,}5e^{-\frac{3}{2}sb}. \qquad (A)$$

Графическое решение этого трансцендентного уравнения дано на чертеже.

Абсциссы точек пересечения этих кривых будут корнями уравнения ($A$). Наименьший, наиболее важный корень дает

$$sb=1{,}854; \quad s=\frac{1{,}854}{b}$$

(см. чертеж).

Подставляя найденное значение $sb$ в третье уравнение и используя соотношение (19,39) и (19,40), выразим $C_1$ через $C_2$:

$$C_1=-C_2e^{-sb}+\left(C_2\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)e^{\frac{sb}{2}};$$

$$C_1=\left[-e^{-sb}+\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sb+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sb\right)e^{\frac{sb}{2}}\right]C_2;$$

$sb=1{,}854$, а поэтому

$$C_1=1{,}942C_2. \qquad (19{,}41)$$

Подставляя (19,39), (19,40) и (19,41) в (19,37), получим решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$y=\left[1{,}942+e^{-sz}-\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}sz+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}sz\right)e^{\frac{sz}{2}}\right]C_2.$$

Это решение содержит один произвольный параметр $C_2$.

**Задача 19,14** (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -Pw,$$

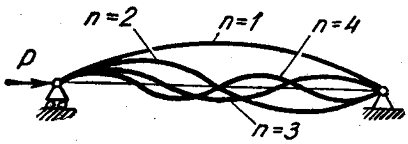
удовлетворяющее граничным условиям: $w(0) = 0$; $w(l) = 0$.

Указание. К этому уравнению приводит задача о продольном изгибе стержня (задача Эйлера). Здесь $P$ — сила, сжимающая стержень вдоль его оси.

Обозначить

$$\frac{P}{EI} = k^2. \qquad (A)$$

Уравнение приводится к виду $\frac{d^2w}{dx^2} + k^2w = 0$. Это дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня при продольном изгибе. Его общее решение: $w = C_1\cos kx + C_2\sin kx$. Из граничных условий получаем: из первого условия $C_1 = 0$; из второго условия, зная, что $C_1 = 0$, имеем




К задаче 19,14

$$0 = C_2\sin kl,$$

отсюда или $C_2 = 0$, или $\sin kl = 0$.

Если $C_2 = 0$, то $w = 0$, т. е. решение тривиальное, которое, собственно, и искать было нечего. Остается рассмотреть $\sin kl = 0$. Отсюда $kl = n\pi$; $k = \frac{n\pi}{l}$, где $n$ — любое целое число, не равное нулю. Так, если $kl = 0$, то $l = 0$, $k = 0$, а этого не может быть.

Из $kl = n\pi$ $(n \neq 0)$ следует, что $k^2l^2 = n^2\pi^2$, $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$; $k = \frac{n\pi}{l}$. Подставляя эти значения в (А), получим $\frac{P}{EI} = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$,

$$\text{или } P = \frac{n^2\pi^2 EI}{l^2}. \qquad (B)$$

Выражение ($B$) дает так называемое критическое значение сжимающей силы $P$, действующей вдоль стержня, при котором становится возможным продольный изгиб.

Решение, удовлетворяющее граничным условиям, запишется так:

$$w = C_2\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \left(\frac{n\pi}{l} = k\right).$$

При $n = 1$ сжимающая сила $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, уравнение изогнутой оси стержня

$$w = C_2\sin\frac{\pi}{l}x.$$

Это основной случай.

Так как наибольшее значение $\sin\frac{\pi x}{l}=1$, то $w_{\text{наиб}}=C_2$, и таким образом, $C_2$ есть не что иное, как наибольший прогиб стержня.

При $n=2$ сила $P=\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$, а уравнение изогнутой оси стержня имеет вид $w=C_2\sin\frac{2\pi}{l}x$ и т. д.

Число $n$ представляет собой число полуволн синусоиды, располагающихся по длине изогнутого стержня (см. чертеж).

**Задача 19,15** (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$EI\frac{d^4y}{dz^4}=-\frac{qv^2}{g}\frac{d^2y}{dz^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям:

1) при $z=0$ $y=0$; 2) при $z=0$ $y''=0$;

3) при $z=l$ $y=0$; 4) при $z=l$ $y''=0$.

Указание. К предложенному уравнению сводится задача о статической неустойчивости трубопровода. Здесь $EI$ — жесткость поперечного сечения трубопровода; $q$ — вес жидкости, приходящейся на единицу длины трубопровода; $g$ — ускорение силы тяжести; $v$ — скорость потока жидкости; $y$ — прогиб оси трубопровода.

Положить

$$s^2=\frac{v^2q}{gEI}. \tag{A}$$

Уравнение приобретает вид

$$\frac{d^4y}{dz^4}+s^2\frac{d^2y}{dz^2}=0.$$

Частные решения: $y_1=1$; $y_2=z$; $y_3=\cos sz$; $y_4=\sin sz$.

Общее решение:

$$y=C_1+C_2z+C_3\cos sz+C_4\sin sz.$$

Из граничных условий окажется, что

$$\sin sl=0;\quad sl=n\pi.$$

Первое значение $sl$, которое наиболее важно: $sl=\pi$; $s=\frac{\pi}{l}$.

Решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$y=C_4\sin sz.$$

Из $(A)$ следует, что $v=s\sqrt{\frac{gEI}{q}}$, и при $s=\frac{\pi}{l}$ получаем так называемое критическое значение скорости $v_{\text{кр}}=\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{gEI}{q}}$ потока жидкости, при котором наступает потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия трубопровода.

# ДВАДЦАТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x). \tag{20,1}$$

2. Общее решение линейного неоднородного уравнения находится так:

а) Найти одно какое-нибудь его частное решение.

б) Найти общее решение соответствующего однородного уравнения.

в) Сложить эти два решения. Сумма их и будет общим решением уравнения (20,1).

Так, если частное решение неоднородного уравнения есть $Y$, а общее решение соответствующего однородного есть $C_1y_1+C_2y_2+ + \ldots +C_ny_n$, то общее решение линейного неоднородного уравнения (20,1):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n + Y. \tag{20,2}$$

Условия, налагаемые на коэффициенты $p_i(x)$ и правую часть $f(x)$, изложены в пояснениях к уравнению (19,1).

3. Если правая часть уравнения (20,1) есть сумма двух функций:

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = = f_1(x) + f_2(x), \tag{20,3}$$

следует рассмотреть два уравнения, у которых левые части такие же, как в (20,3), но в одном из них правой частью будет функция $f_1(x)$, а во втором $f_2(x)$, т. е. рассмотреть уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + + p_n(x)\,y = f_1(x) \tag{20,4}$$

и

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + + p_n(x)\,y = f_2(x). \tag{20,5}$$

Если функции $Y_1$ и $Y_2$ — соответственно частные решения уравнений (20,4) и (20,5), то их сумма $Y_1 + Y_2$ будет частным решением уравнения (20,3). (Это свойство называется наложением решений и распространяется на случай, когда правая часть — сумма $n$ функций).

4. Если известно общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, то его

частное решение $Y$ можно найти с помощью квадратур методом, который указал Лагранж. Этот метод называется методом вариации (изменения) произвольных постоянных.

Получив общее решение (19,3)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

линейного однородного уравнения (19,2), поступают так: полагают, что в этом решении величины $C_1$, $C_2$, ..., $C_n$ являются не постоянными, а функциями независимой переменной $x$. Записывают это так:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n. \qquad (20,6)$$

Для определения функций $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ составляется система уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x) \end{array}\right\} \qquad (20,7)$$

Мы рассмотрим подробно этот метод для линейных дифференциальных неоднородных уравнений второго порядка:

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \qquad (20,8)$$

Получив общее решение

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad (20,9)$$

соответствующего однородного уравнения, поступают так: полагают, что в этом решении величины $C_1$ и $C_2$ являются не постоянными, а функциями независимой переменной $x$, и записывают это так:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляется система уравнений (20,7):

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{array}\right\}. \qquad (20,10)$$

Определитель этой системы — определитель Вронского. Так как (20,9) есть общее решение уравнения (20,8), то функции $y_1$ и $y_2$ линейно независимы и их определитель Вронского не равен нулю.

Поэтому система (20,10) всегда имеет решение и притом единственное.

Решая эту систему уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим:

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}; \quad C_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{W} \\ C_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}; \quad C_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{W} \end{aligned}\right\}, \tag{20,11}$$

где определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Из (20,11) интегрированием находим:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{y_2 f(x)}{W}\, dx + c_1; \\ C_2(x) &= \int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx + c_2. \end{aligned} \tag{20,12}$$

Подставляя (20,12) в (20,9), получим

$$y = \left(-\int \frac{y_2 f(x)}{W}\, dx + c_1\right) y_1 + \left(\int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx + c_2\right) y_2.$$

Раскрывая скобки, найдем

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}\, dx.$$

Сравнивая с (20,2), замечаем, что первые два слагаемых $c_1 y_1 + c_2 y_2$ в правой части — общее решение однородного уравнения, соответствующего (20,8), а последние два слагаемых — частное решение неоднородного уравнения (20,8). Обозначая эти два слагаемых через $Y$, получаем формулу частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка

$$Y = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W}\, dx.$$

В более компактной форме частное решение линейного неоднородного уравнения второго порядка может быть записано так:

$$Y = \begin{vmatrix} \int \frac{y_1 f(x)}{W}\, dx & \int \frac{y_2 f(x)}{W}\, dx \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \tag{20,13}$$

Все величины, входящие в эту формулу, известны.

**Замечание.** Следует иметь в виду, что система (20,10), так же как и формула (20,13), имеет место тогда, когда коэффициент при старшей производной равен единице. Функция $f(x)$ есть правая часть уравнения при этом предположении.

5. Метод вариации произвольных постоянных — универсальный. Он позволяет при помощи квадратур определить частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (20,1), если известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения.

Ниже будет рассмотрен случай, когда частное решение неоднородного уравнения (20,1) может быть найдено без применения метода вариаций произвольных постоянных, и тем самым без вычисления интегралов.

Приступим к упражнениям, связанным с применением метода вариации произвольных постоянных.

**Задача 20,1.** Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2,$$

зная, что частным решением соответствующего ему однородного уравнения является функция $y_1 = x^2$.

**Решение.** Прежде всего преобразуем уравнение так, чтобы коэффициент при старшей производной, т. е. при $y''$, был равен единице. Для этого обе части уравнения разделим на $x^2$ и получим

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1. \qquad (A)$$

Теперь правая часть уравнения $f(x) = x^2 - 1$. Отбросим ее и найдем общее решение уравнения

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0, \qquad (B)$$

зная его одно частное решение. По формуле (19,6) определим второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx.$$

У нас $p(x) = -\frac{4}{x}$; $-\int p(x)\,dx = \int \frac{4}{x}dx = 4\ln x = \ln x^4$; $e^{-\int p(x)dx} = e^{\ln x^4} = x^4$. Помня, что $y_1 = x^2$, получаем

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^4}{x^4} dx = x^2 \cdot x = x^3.$$

Итак, $y_2 = x^3$. Общее решение $y_0$ уравнения $(B)$ запишется так:

$$y_0 = C_1x^2 + C_2x^3. \qquad (C)$$

Теперь применим формулу (20,13) для определения частного решения уравнения $(A)$. Определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4;$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^2(x^2-1)}{x^4} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x + \frac{1}{x};$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^3(x^2-1)}{x^4} dx = \int \left(x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x|.$$

Подставляя в (20,13) значения интегралов и частные решения $y_1$ и $y_2$ уравнения ($B$), получим

$$Y = \begin{vmatrix} x + \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} - \ln|x| \\ x^2 & x^3 \end{vmatrix} = \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|.$$

Складывая это частное решение заданного неоднородного уравнения с общим решением ($C$) соответствующего ему однородного, получим общее решение заданного уравнения

$$y = \underline{C_1x^2} + C_2x^3 + \frac{x^4}{2} + \underline{x^2} + x^2 \ln|x|.$$

Это выражение можно упростить, если объединить подчеркнутые слагаемые и обозначить $C_1 + 1$ через $c_1$, а $C_2 = c_2$. Тогда

$$y = c_1x^2 + c_2x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 \ln|x|.$$

**Задача 20,2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(2x + 1)\, y'' + (4x - 2)\, y' - 8y = 2e^x (2x + 1)^3,$$

зная, что функция $y_1 = e^{-2x}$ является частным решением соответствующего ему однородного уравнения.

**Решение.** Преобразуем уравнение ($A$) так, чтобы коэффициент при старшей производной $y''$ был равен единице. Разделим его обе части на $(2x + 1)$. Получим

$$y'' + \frac{4x - 2}{2x + 1} y' - \frac{8}{2x + 1} y = 2e^x (2x + 1)^2. \qquad (A)$$

Правая часть этого уравнения $f(x) = 2e^x (2x + 1)^2$. Отбросим правую часть и найдем общее решение полученного однородного уравнения

$$y'' + \frac{4x - 2}{2x + 1} y' - \frac{8}{2x + 1} y = 0. \qquad (B)$$

Здесь опять-таки чтобы найти $y_2$ следует воспользоваться формулой (19,6), в которой $p(x) = \frac{4x - 2}{2x + 1}$, $y_1 = e^{-2x}$ (согласно условию):

$$-\int p(x)\, dx = -\int \frac{4x - 2}{2x + 1} dx = -2 \int \frac{2x - 1}{2x + 1} dx =$$

$$= -2 \int \frac{2x + 1 - 2}{2x + 1} dx = -2 \int \left(1 - \frac{2}{2x + 1}\right) dx = -2x +$$

$$+ 2 \ln|2x + 1| = -2x + \ln(2x + 1)^2;$$

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-2x + \ln(2x+1)^2} = e^{-2x} (2x + 1)^2;$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = e^{-2x} \int \frac{e^{-2x} (2x + 1)^2}{e^{-4x}} dx =$$

$$= e^{-2x} \int e^{2} (4x^2 + 4x + 1)\, dx = \frac{1}{2} e^{-2x} (4x^2 + 1)\, e^{2x} = \frac{1}{2} (4x^2 + 1);$$

$$y_2 = \frac{1}{2} (4x^2 + 1).$$

Этот интеграл проще всего вычислить так:

$$\int e^{2x}(4x^2+4x+1)\,dx = e^{2x}(ax^2+bx+c).$$

Теперь следует продифференцировать обе части этого равенства, сократить на $e^{2x}$ и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях $x$ в левой и правой частях равенства. Получится, что

$$e^{2x}(4x^2+4x+1) = e^{2x}(2ax^2+2bx+2c+2ax+b).$$

Отсюда $2a=4$; $2b+2a=4$; $2c+b=1$;

$$a=2;\ b=0;\ c=\frac{1}{2}.$$

Итак, общее решение $y_0$ уравнения ($B$) запишется так:

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2\frac{1}{2}(4x^2+1)$$

(в последующем множитель $\frac{1}{2}$ во втором слагаемом мы включим в состав произвольной постоянной $C_2$).

Чтобы воспользоваться формулой (20,13) для определения частного решения заданного неоднородного уравнения ($A$), определим вронскиан:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2x} & \frac{1}{2}(4x^2+1) \\ -2e^{-2x} & 4x \end{vmatrix} = e^{-2x}(2x+1)^2.$$

Так как правая часть уравнения ($A$) $f(x) = 2e^x(2x+1)^2$, выражения для интегралов, входящих в (20,13), будут такими:

$$\int\frac{y_1 f(x)}{W}\,dx = \int\frac{e^{-2x}2e^x(2x+1)^2}{e^{-2x}(2x+1)^2}\,dx = 2e^x;$$

$$\int\frac{y_2 f(x)}{W}\,dx = \int\frac{\frac{1}{2}(4x^2+1)\,2e^x(2x+1)^2}{e^{-2x}(2x+1)^2}\,dx = \int e^{3x}(4x^2+1)\,dx =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{17}{27}\right).$$

(Последний интеграл вычислен способом, указанным выше).

Найденные значения интегралов и частные решения $y_1$ и $y_2$ уравнения ($B$) подставим в (20,13), получим частное решение $Y$ заданного неоднородного уравнения:

$$Y = \begin{vmatrix} 2e^x & e^{3x}\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{17}{27}\right) \\ e^{-2x} & \frac{1}{2}(4x^2+1) \end{vmatrix} = \frac{2}{27}(36x^2+12x+5)\,e^x.$$

Учитывая общее решение ($B$) однородного уравнения, соответствующего уравнению ($A$), и прибавляя к нему только что найденное частное решение заданного неоднородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2(4x^2+1) + \frac{2}{27}(36x^2+12x+5)e^x.$$

**Задача 20,3** (для самостоятельного решения). Найти общее решение неоднородных линейных уравнений, зная одно частное решение соответствующего однородного уравнения:

1) $x^2y'' - xy' + y = 3x^3$; $\quad y_1 = x$;
2) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln x$; $\quad y_1 = x^2$;
3) $x^2y'' - 2y = x^2$; $\quad y_1 = \frac{1}{x}$.

**Ответ.** 1) $y = C_1x + C_2x\ln|x| + \frac{3}{4}x^3$;

2) $y = C_1x^2 + C_2x + \frac{x^5}{12}\ln|x| - \frac{7}{144}x^5$;

3) $y = C_1\frac{1}{x} + C_2x^2 + \frac{1}{3}x^2\ln|x|$.

## МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

### Сведения из теории

Пусть в уравнении (20,1) коэффициентами являются не функции, а вещественные числа, а его правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x], \tag{20,14}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, которые могут быть одной и той же степени, и разных степеней. Если они разной степени, то пусть $n$ — их наивысшая степень (при $n=0$ эти многочлены попросту постоянные величины).

Величины $\alpha$ и $\beta$ — вещественные числа.

В рассматриваемом случае метод вариации произвольных постоянных для определения частного решения неоднородного уравнения, конечно, также применим. Однако здесь можно отыскать частное решение более простым способом, пользуясь которым не понадобится вычислять интегралы. Интегрирование уравнения можно провести с помощью только алгебраических операций при помощи метода, который называется методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть имеет вид (20,14), то следует рассмотреть два возможных случая:

1. Число $\alpha+\beta i$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y=e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x], \tag{20,15}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — числа, подлежащие определению. В (20,15) только эти коэффициенты и подлежат определению, числа же $\alpha$ и $\beta$ — те же, что и в (20,14).

2. Если число $\alpha+\beta i$ является корнем кратности $k$ $(k\geqslant 1)$ характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$Y=x^k e^{\alpha x}[p(x)\cos\beta x+q(x)\sin\beta x], \tag{20,16}$$

здесь $p(x)$ и $q(x)$ — многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в (20,14), а коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ подлежат определению; показатель степени $k$ равен кратности корня $\alpha+\beta i$ характеристического уравнения. Таким образом, и в этом случае определению подлежат только коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$, все же остальные числа $\alpha$, $\beta$ и $k$ — известны.

Неопределенные коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ как в том, так и в другом случае находятся так.

В заданное уравнение подставляется $Y$ и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной в левой и правой частях равенства. Ниже на примерах мы укажем, как это выполняется практически.

Заметим, что рассматриваемый вид неоднородных линейных уравнений (коэффициенты постоянны, а правая часть имеет вид (20,14)) встречается очень часто, а техника их интегрирования исключительно проста. Мы рассмотрим различные возможные случаи сначала для линейных неоднородных уравнений второго порядка, а потом и порядка выше, чем второй.

**Задача 20,4.** Найти общее решение уравнения

$$y''-7y'+12y=5. \tag{A}$$

**Решение.** Уравнение линейное неоднородное. Прежде всего отбрасываем правую часть и решаем соответствующее однородное уравнение

$$y''-7y'+12y=0. \tag{B}$$

Характеристическое уравнение

$$k^2-7k+12=0$$

имеет корни:

$$k_1=3;\ k_2=4. \tag{C}$$

Частные решения уравнения ($B$):

$$y_1 = e^{3x};\ y_2 = e^{4x}.$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_0 = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}. \tag{D}$$

Теперь рассмотрим правую часть уравнения ($A$) и сравним ее с (20,14). Так как правая часть не содержит множителя $e^{\alpha x}$, то надо считать, что $\alpha = 0$ ($e^{\alpha x} = e^{0\cdot x} = e^0 = 1$).

Правая часть не содержит также ни синуса, ни косинуса. Это значит, что $\beta = 0$ ($\sin 0\cdot x = \sin 0 = 0$; $\cos 0\cdot x = \cos 0 = 1$). Число 5 в правой части надо рассматривать как многочлен нулевой степени.

Составляем число $\alpha + \beta i$, чтобы решить вопрос, является ли оно корнем характеристического уравнения. Так как у нас $\alpha = \beta = 0$, то $\alpha + \beta i = 0$. Из рассмотрения корней ($C$) характеристического уравнения видно, что 0 не является корнем характеристического уравнения. Значит, имеет место первый случай и частное решение надо искать в виде (20,15), в котором положить $\alpha = 0$, $\beta=0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — нулевой степени.

Таким образом, частное решение будем искать в виде

$$Y = A\ (A \text{ — const}). \tag{E}$$

Подставляя ($E$) в заданное уравнение ($A$), получим

$$\begin{array}{r|l} 12 & Y = A \\ (-7) & Y' = 0 \\ 1 & Y'' = 0 \end{array}\quad, \tag{F}$$

Приравниваем сумму левых частей равенств ($F$) правой части заданного уравнения (мы вправе это сделать, так как предполагается, что $Y$ — частное решение заданного уравнения. Так мы будем поступать и при решении последующих задач, не делая этой оговорки).

Учитывая это указание и складывая почленно равенства $F$, получаем

$$5 = 12A,$$

откуда $A = \frac{5}{12}$ и, следовательно, частное решение неоднородного уравнения $Y = \frac{5}{12}$.

Складывая $Y$ с общим решением ($D$) однородного уравнения, находим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{5}{12}.$$

**Задача 20,5** (для самостоятельного решения). Найти общие решения уравнений: 1) $y'' - 6y' + 8y = 10$; 2) $y'' + 4y = 8$.

**Ответ.** 1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} + \frac{5}{4}$; 2) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2$.

**Задача 20,6.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 5y' = 7. \qquad (A)$$

**Решение.** Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$y'' - 5y' = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение: $k^2 - 5k = 0$.

Его корни: $k_1 = 0$; $k_2 = 5$. Частными решениями уравнения $(B)$ являются: $y_1 = 1$; $y_2 = e^{5x}$. Общее решение этого уравнения:

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}. \qquad (C)$$

Сравним теперь правую часть уравнения $(A)$ с (20,14).

Правая часть не содержит ни множителя $e^{\alpha x}$, ни тригонометрических функций. Значит, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Поэтому число $\alpha + \beta_i = 0$, а нуль есть простой (однократный) корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения $(A)$ следует искать в виде (20,16), в котором надо взять $k = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ должны быть той же степени, что и многочлен в правой части заданного уравнения, т. е. нулевой. Итак, $Y = Ax$.

$$\begin{array}{c|l} 0 & Y = Ax \\ (-5) & Y' = A \\ 1 & Y'' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$7 = -5A; \quad A = -\frac{7}{5}.$$

Подставляя это значение $A$ в выражение для $Y$, получим $Y = -\frac{7}{5}x$. Общее решение уравнения $(A)$ будет суммой общего решения $(C)$ соответствующего однородного уравнения и только что найденного частного решения заданного неоднородного. Тогда

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - \frac{7}{5}x.$$

**Задача 20,7** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' + 6y' = 8; \quad 2)\ y'' - y' = 3.$$

**Ответ.** 1) $y = C_1 + C_2 e^{-6x} + \frac{4}{3}x$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{x} - 3x$.

**Задача 20,8** (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 6x = 2,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 1$; $x'(0) = 0$.

Указание. Общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{3}.$$

**Ответ.** $x = \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{1}{3}$.

**Задача 20,9.** Весомая частица массы $m$ брошена вертикально вверх и при движении испытывает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости. Определить закон движения частицы, если в начальный момент $t=0$ положение точки определяется координатой $x=s_0$, а начальная скорость $v=v_0$.

Решение. На точку действуют две силы: 1) сила тяжести $\bar{P}$, ($g$ — ускорение силы тяжести) и 2) сила сопротивления $\bar{f}=$ $=k^2mv$, где через $k^2m$ обозначен для удобства коэффициент пропорциональности.

Направим ось $Ox$, по которой происходит движение, вертикально вниз.

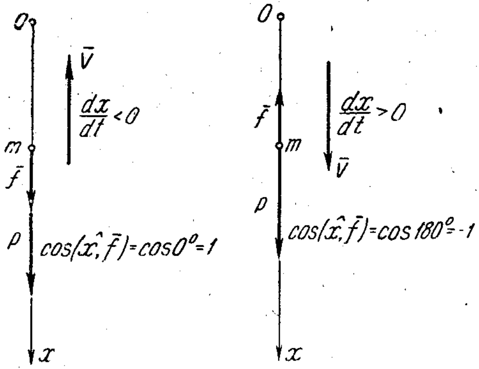
Уравнение движения будет таким:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=P\cos(\widehat{x,\bar{P}})+f\cos(\widehat{x,\bar{f}}), \qquad (20{,}17)$$

где $P$ и $f$ — соответственно модули силы тяжести и силы сопротивления.

Следует учесть, что сила сопротивления направлена всегда противоположно направлению движения, а скорость — в сторону движения. Модуль силы сопротивления

$$f=\pm k^2m\frac{dx}{dt}. \qquad (A)$$




К задаче 20,9

При движении частицы *вверх* проекция скорости отрицательна, т. е. $\frac{dx}{dt}<0$, а модуль вектора всегда положителен. Поэтому в ($A$) при движении вверх надо взять знак минус. В этом случае угол между силой сопротивления $\bar{f}$ и осью $Ox$ равен 0°, вследствие чего $\cos(\widehat{x,\bar{f}})=1$, а произведение $f\cos(\widehat{x,\bar{f}})=$ $=-k^2m\frac{dx}{dt}$.

При движении частицы *вниз* проекция скорости $\frac{dx}{dt}>0$. Для того, чтобы модуль силы $\bar{f}$ был величиной положительной, надо в ($A$) взять знак плюс. В этом случае угол между силой сопротивления $\bar{f}$ и осью $Ox$ равен 180°, а потому $\cos(\widehat{x,\bar{f}})=-1$, а произведение $f\cos(\widehat{x,\bar{f}})$ по-прежнему равно $-k^2m\frac{dx}{dt}$. Учитывая, что сила тяжести направлена вертикально вниз, ее модуль

$P = mg$, угол между силой тяжести и осью $Ox$ равен $0°$, а $\cos(\widehat{x, \overline{P}}) = 1$, уравнение движения запишем так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k^2m\frac{dx}{dt}.$$

Сокращаем на $m$ и переписываем уравнение в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{dx}{dt} = g. \qquad (B)$$

Мы получили линейное неоднородное уравнение (искомая функция $-x$, независимая переменная $-t$, правая часть равна $g$).

Отбрасываем правую часть и находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2\frac{dx}{dt} = 0. \qquad (C)$$

Его характеристическое уравнение: $r^2 + k^2r = 0$; $r(r + k^2) = 0$. (Конечно, буквой $k$ здесь нельзя обозначать неизвестное характеристического уравнения, так как эта буква уже занята. Неизвестное характеристического уравнения мы обозначили буквой $r$).

Корни характеристического уравнения:

$$r_1 = 0;\ r_2 = -k^2. \qquad (D)$$

Частные решения уравнения $(B)$:

$$x_1 = 1;\ x_2 = e^{-k^2t}.$$

Его общее решение

$$x_0 = C_1 + C_2e^{-k^2t}. \qquad (E)$$

Теперь определим частное решение неоднородного уравнения $(B)$. Сравнивая его правую часть с выражением (20,14), приходим к выводу, что $\alpha = \beta = 0$, поэтому число $\alpha + \beta i = 0$. Среди корней $(D)$ характеристического уравнения нуль есть. Значит, число $\alpha + \beta i$ — корень характеристического уравнения простой (или однократный). В выражении (20,16) число $k = 1$. Так как $g$ — величина постоянная, многочлен нулевой степени, то и в (20,16) надо $p(x)$ и $q(x)$ считать многочленами нулевой степени и, следовательно, учитывая, что $k = 1$, искать частное решение неоднородного уравнения в виде $X = At$:

$$\begin{array}{l|l} 0 & X = At \\ k^2 & X' = A \\ 1 & X'' = 0 \\ \hline \multicolumn{2}{l}{g = Ak^2;\ A = \frac{g}{k^2}} \end{array}$$

Поэтому $X=\frac{g}{k^2}t$, а общее решение уравнения ($B$) будет равно сумме общего решения ($E$) уравнения ($C$) и только что найденного частного решения неоднородного уравнения

$$x=C_1+C_2e^{-k^2t}+\frac{g}{k^2}t. \tag{F}$$

Теперь нам осталось из начальных условий определить произвольные постоянные $C_1$ и $C_2$. Подставляя $t=0$ и $x=s_0$, получим

$$s_0=C_1+C_2. \tag{G}$$

Продифференцируем обе части ($F$)

$$\frac{dx}{dt}=-k^2C_2e^{-k^2t}+\frac{g}{k^2}$$

и поставим $t=0$, а $\frac{dx}{dt}=v_0$:

$$v_0=-k^2C_2+\frac{g}{k^2}.$$

Отсюда

$$C_2=\frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2}-v_0\right).$$

Подставляя это значение в ($G$), найдем

$$C_1=s_0-\frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2}-v_0\right).$$

Найденные значения $C_1$ и $C_2$ подставим в ($F$) и получим окончательно решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x=s_0-\frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2}-v_0\right)+\frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2}-v_0\right)e^{-k^2t}+\frac{g}{k^2}t,$$

или

$$x=s_0+\frac{g}{k^2}t+\frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2}-v_0\right)(e^{-k^2t}-1).$$

Из полученного результата можно сделать интересный вывод: если бы время $t$ неограниченно возрастало, то $e^{-k^2t}\to 0$, и тогда

$$x=s_0+\frac{g}{k^2}t+\frac{v_0}{k^2}-\frac{g}{k^4};\quad x=\left(x_0+\frac{v_0}{k^2}-\frac{g}{k^4}\right)+\frac{g}{k^2}t,$$

т. е. движение асимптотически приближается к равномерному со скоростью $\frac{dx}{dt}=\frac{g}{k^2}$.

Положение точки при очень большом $t$ мало отличалось бы от того, которое бы она занимала, двигаясь равномерно со скоростью $\frac{g}{k^2}$, выйдя из начального положения, абсцисса которого равна $s_0+\frac{v_0}{k^2}-\frac{g}{k^4}$.

**Задача 20,10.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' + y = 3e^{2x}. \qquad (A)$$

Решение. Отбрасываем правую часть $3e^{2x}$ и будем искать общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y' + y = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + k + 1 = 0$$

имеет корни

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения $(B)$:

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x; \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x,$$

а его общее решение

$$y_0 = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right). \qquad (D)$$

Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения $(A)$. Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 2$; $\beta = 0$, многочлен $P(x)$ имеет нулевую степень (множитель при $e^{2x}$ — величина постоянная). Число $\alpha + \beta i = 2$ и не является корнем характеристического уравнения (среди корней $(C)$ число 2 отсутствует). Частное решение следует искать в виде (20,15), полагая в нем $\alpha = 2$; $\beta = 0$; многочлены $p(x)$ и $q(x)$ надо взять нулевой степени. Таким образом, $Y = Ae^{2x}$:

$$\begin{array}{c|l} 1 & Y = Ae^{2x} \\ 1 & Y' = 2Ae^{2x} \\ 1 & Y'' = 4Ae^{2x} \\ \hline \end{array}$$

$$3e^{2x} = e^{2x}(A + 2A + 4A); \quad 3 = 7A; \ A = \frac{3}{7}$$

и, значит, $Y = \frac{3}{7} e^{2x}$. Общее решение заданного уравнения будет суммой этого частного решения неоднородного уравнения и общего решения $(D)$ соответствующего однородного:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{3}{7} e^{2x}.$$

**Задача 20,11** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$; 2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 4x = 7e^{3t}$.

**Ответ.** 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - e^{-x}$; 2) $x = C_1 e^t + C_2 e^{4t} - \frac{7}{2} e^{3t}$.

**Задача 20,12.** Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 3e^{2t}. \qquad (A)$$

Решение. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0. \qquad (B)$$

Корни его характеристического уравнения $k^2 - 6k + 8 = 0$ равны: $k_1 = 2$; $k_2 = 4$. Частные решения: $x_1 = e^{2t}$; $x_2 = e^{4t}$. Его общее решение

$$x_0 = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}. \qquad (C)$$

Теперь приступим к отысканию частного решения неоднородного уравнения $(A)$.

Сравнивая его правую часть с выражением (20,14), заключаем, что $\alpha = 2$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 2$. Но 2 есть простой корень характеристического уравнения. Поэтому частное решение неоднородного уравнения $(A)$ ищем в виде (20,16), в котором $k = 1$, а независимую переменную $x$ надо заменить на $t$, многочлены же $p(x)$ и $q(x)$ взять нулевой степени, т. е. такой же, как и многочлен, стоящий множителем при $e^{2t}$ в правой части заданного уравнения. Таким образом, ищем частное решение уравнения $(A)$ в виде $X = Ate^{2t}$ (члены, содержащие $t$ уничтожились)

$$\begin{array}{r|l} 8 & X \;= Ate^{2t} \\ -6 & X' = e^{2t}(A + 2At) \\ 1 & X'' = e^{2t}(4A + 4At) \\ \hline \end{array}$$

$$3e^{2t} = e^{2t}(8At - 6A - 12At + 4A + 4At).$$

Сокращая на $e^{2t}$, получим уравнение для определения неизвестного коэффициента $A$:

$$3 = -2A; \; A = -\frac{3}{2},$$

и поэтому частное решение неоднородного уравнения

$$X = -\frac{3}{2}te^{2t},$$

а его общее решение будет суммой этого частного решения и общего решения $(C)$ соответствующего однородного уравнения:

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - \frac{3}{2}te^{2t},$$

или

$$x = \left(C_1 - \frac{3}{2}t\right)e^{2t} + C_2e^{4t}.$$

**Задача 20,13** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' - 7y' + 12y = 5e^{3x};\quad 2)\ y'' - 4y' = 2e^{4t}.$$

**Ответ.** 1) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - 5xe^{3x}$;

2) $y = C_1 + C_2e^{4t} + \frac{1}{2}te^{4t}$.

**Задача 20,14.** Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - 6\frac{dr}{d\varphi} + 9r = 4e^{3\varphi}. \qquad (A)$$

**Решение.** Заданное уравнение — неоднородное линейное. Искомая функция — $r$, независимая переменная — $\varphi$. Однородное уравнение, соответствующее ему:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} - 6\frac{dr}{d\varphi} + 9r = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0$ имеет корни:

$$k_1 = 3;\quad k_2 = 3. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения $(B)$:

$$r_1 = e^{3\varphi};\quad r_2 = \varphi e^{3\varphi}. \qquad (D)$$

Общее решение уравнения $(B)$

$$r_0 = C_1e^{3\varphi} + C_2\varphi e^{3\varphi}. \qquad (E)$$

Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения $(A)$. Сравнивая его правую часть с (20,14), замечаем, что $\alpha = 3$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 3$.

Среди корней $(C)$ характеристического уравнения оно встречается дважды. (В таком случае говорят, что 3 — двукратный корень характеристического уравнения). Частное решение следует искать в виде (20,16), в котором надо взять $k = 2$. Учитывая, что правая часть уравнения $(A)$ имеет постоянный множитель, т. е. многочлен нулевой степени, надо и в (20,15) многочлены $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$ взять нулевой степени.

Таким образом, частное решение надо искать в виде

$$R = \varphi^2Ae^{3\varphi}$$

(в формуле (20,16) мы заменили независимую переменную $x$ независимой $\varphi$):

$$\begin{array}{r|l}
9 & R = \varphi^2Ae^{3\varphi} \\
-6 & R' = Ae^{3\varphi}(2\varphi + 3\varphi^2) \\
1 & R'' = Ae^{3\varphi}(12\varphi + 9\varphi^2 + 2) \\
\hline
\end{array}$$

$$4e^{3\varphi} = 2Ae^{3\varphi};\quad 2A = 4;\quad A = 2$$

$$R = 2\varphi^2e^{3\varphi}$$

Складывая это решение с общим решением ($E$) однородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$r = C_1 e^{3\varphi} + C_2 \varphi e^{3\varphi} + 2\varphi^2 e^{3\varphi},$$

или

$$r = e^{3\varphi}(C_1 + C_2\varphi + 2\varphi^2).$$

**Задача 20,15** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

$$1)\ y'' + 4y' + 4y = 5e^{-2\varphi};\quad 2)\ y'' - 2y' + y = 3e^t.$$

**Ответ.**

$$1)\ y = e^{-2\varphi}\left(C_1 + C_2\varphi + \frac{5}{2}\varphi^2\right);\quad 2)\ y = e^t\left(C_1 + C_2 t + \frac{3}{2}t^2\right).$$

**Задача 20,16.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8. \qquad (A)$$

**Решение.** Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 8y' + 7y = 0. \qquad (B)$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 8k + 7 = 0$ имеет корни:

$$k_1 = 1;\quad k_2 = 7. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения ($B$):

$$y_1 = e^x;\quad y_2 = e^{7x}.$$

Его общее решение

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{7x}. \qquad (Д)$$

Переходим к определению частного решения неоднородного уравнения ($A$). В его правой части отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции. Поэтому $\alpha = 0$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$, а нуль не является корнем характеристического уравнения (см. ($C$)). Частное решение следует искать в виде (20,15), причем многочлены $p(x)$ и $q(x)$ должны иметь вторую степень. (Очевидно многочлен $q(x)$ не будет участвовать, так как $\beta = 0$, а при многочлене $q(x)$ множитель $\sin\beta x = 0$. Частное решение ищем в виде $Y = Ax^2 + Bx + C$:

$$\begin{array}{r|l} 7 & Y = Ax^2 + Bx + C \\ -8 & Y' = 2Ax + B \\ 1 & Y'' = 2A \\ \hline \end{array}$$

$$3x^2 + 7x + 8 = 7Ax^2 + (7B - 16A)x + (2A - 8B + 7C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$7A = 3; \quad A = \frac{3}{7};$$

$$7B - 16A = 7; \quad B = \frac{97}{49};$$

$$2A - 8B + 7C = 8; \quad C = \frac{1126}{343},$$

и, таким образом,

$$Y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}.$$

Общим решением заданного уравнения будет сумма этого частного решения неоднородного уравнения ($A$) и общего решения ($D$) соответствующего однородного уравнения ($B$):

$$y = C_1e^x + C_2e^{7x} + \frac{3}{7}x^2 + \frac{97}{49}x + \frac{1126}{343}.$$

**Задача 20,17** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y'' - y' - 2y = x^3 - 5x^2 + 7x + 2;$

2) $x'' - 3x' - 4x = t^2.$

**Ответ.** 1) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{51}{8};$

2) $x = C_1e^{-t} + C_2e^{4t} - \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{8}t - \frac{13}{32}.$

**Задача 20,18.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' = x^3 + 2x - 1. \qquad (A)$$

**Решение.** Соответствующее однородное уравнение

$$y'' - 2y' = 0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет корни

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 2. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения ($B$):

$$y_1 = 1; \quad y_2 = e^{2x}.$$

Общее решение уравнения ($B$)

$$y_0 = C_1 + C_2e^{2x}. \qquad (D)$$

Теперь приступим к определению частного решения данного неоднородного уравнения ($A$). Сравнивая его правую часть с (20,14) и замечая, что в ней отсутствуют множитель $e^{\alpha x}$ и тригонометрические функции, заключаем, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$. Но нуль есть среди корней ($C$) характеристического уравнения. Корень этот простой, однократный. Частное решение будем искать в виде (20,16), в котором следует взять $k = 1$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ — той же степени, что и многочлен в правой части уравнения ($A$), т. е. третьей. Ясно также, что многочлен $q(x)$ будет отсутствовать, так как множитель при нем $\sin\beta x = 0$ ($\beta = 0$).

Итак, частное решение ищем в виде

$$Y = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\text{*};$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & Y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \\ -2 & Y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D \\ 1 & Y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \\ \hline \end{array}$$

$$x^3 + 2x - 1 = -8Ax^3 + (12A - 6B)x^2 + (6B - 4C)x + (2C - 2D).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$-8A = 1; \quad A = -\frac{1}{8};$$

$$12A - 6B = 0; \quad B = -\frac{1}{4};$$

$$6B - 4C = 2; \quad C = -\frac{7}{8};$$

$$2C - 2D = -1; \quad D = -\frac{3}{8}.$$

Таким образом, частное решение заданного неоднородного уравнения

$$Y = -\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

Складывая это частное решение уравнения ($A$) с общим решением ($D$) соответствующего ему однородного уравнения, получим общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x.$$

**Задача 20,19** (для самостоятельного решения).

Найти решение уравнения

$$x'' + x' = t^2 + 2t,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 4$; $x'(0) = -2$.

**Ответ.** $x = 2 + 2e^{-t} + \frac{1}{3}t^3$.

**Задача 20,20.** Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = (x + 2)e^{3x}. \qquad (A)$$

**Решение.** Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + 4y = 0. \qquad (B)$$

---

* Такое умножение на $x$ часто называется «усилением».

Характеристическое уравнение $k^2-2k+4=0$ имеет корни:

$$k_{1,2}=1\pm\sqrt{3}i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения $(B)$:

$$y_1=e^x\cos\sqrt{3}x; \quad y_2=e^x\sin\sqrt{3}x.$$

Его общее решение

$$y_0=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x). \qquad (D)$$

Отыскиваем частное решение неоднородного уравнения $(A)$. Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha=3$, $\beta=0$. Многочлен $P(x)$ имеет первую степень. Число $\alpha+\beta i=3$. Оно не является корнем характеристического уравнения. Поэтому частное решение ищем в виде (20,15) ($q(x)\sin\beta x=0$, так как $\beta=0$):

$$\begin{array}{r|l}
4 & Y\ =e^{3x}(Ax+B)\\
-2 & Y'=e^{3x}(3Ax+A+3B)\\
1 & Y''=e^{3x}(9Ax+6A+9B)\\
\hline
\multicolumn{2}{c}{(x+2)e^{3x}=e^{3x}(7Ax+4A+7B)}
\end{array}$$

Сокращая на $e^{3x}$ и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим:

$$1=7A; \quad A=\frac{1}{7};$$

$$2=4A+7B; \quad B=\frac{10}{49}.$$

Поэтому

$$Y=e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right).$$

Общее решение уравнения $(A)$ есть сумма этого его частного решения и общего решения $(D)$ соответствующего однородного уравнения:

$$y=e^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+e^{3x}\left(\frac{1}{7}x+\frac{10}{49}\right).$$

**Задача 20,21** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+13x=e^t(t^2-5t+2)$;

2) $\frac{d^2r}{d\theta^2}+5\frac{dr}{d\theta}-14r=e^{2\theta}(2\theta^3-3\theta-1)$.

Указания. 1) Частное решение $X$ неоднородного уравнения следует искать в виде

$$X=e^t(At^2+Bt+C),$$

коэффициенты $A$, $B$ и $C$ определятся из равенства

$$t^2-5t+2=8At^2+(8B-8A)t+(2A-4B+8C).$$

2) Частное решение $R$ неоднородного уравнения следует искать в виде

$$R=\theta e^{2\theta}(A\theta^3+B\theta^2+C\theta+D).$$

Это удобно переписать так:

$$R=e^{2\theta}(A\theta^4+B\theta^3+C\theta^2+D\theta),$$

коэффициенты $A$, $B$, $C$ и $D$ определятся из равенства
$$2\theta^3-3\theta-1=36A\theta^3+(12A+27B)\theta^2+(18C+6B)\theta+(9D+2C).$$

**Ответ.** 1) $x=e^{3t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+e^t\left(\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{32}\right)$;

2) $r=C_1e^{2\theta}+C_2e^{-7\theta}+e^{2\theta}\left(\frac{1}{18}\theta^4-\frac{2}{81}\theta^3-\frac{77}{486}\theta^2-\frac{166}{2187}\theta\right)$.

**Задача 20,22.** Найти общее решение уравнения

$$y''+y=5\sin 2x. \tag{A}$$

**Решение.** Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y''+y=0. \tag{B}$$

Характеристическое уравнение $k^2+1=0$ имеет корни

$$k_{1,2}=\pm i. \tag{C}$$

Частные решения уравнения $(B)$: $y_1=\cos x$; $y_2=\sin x$.
Общее решение уравнения $(B)$

$$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x. \tag{D}$$

Теперь обратимся к определению частного решения неоднородного уравнения. Сравнивая правую часть уравнения $(A)$ с (20,14), заключаем, что $\alpha=0$; $\beta=2$. Число $\alpha+\beta i=2i$ не является корнем характеристического уравнения. Решение будем отыскивать в форме (20,15). В правой части постоянный множитель 5 при $\sin 2x$ должен рассматриваться как многочлен нулевой степени. Поэтому в (20,15) вместо многочленов $p(x)$ и $q(x)$ надо взять постоянные величины, которые следует определить.

Учитывая это, а также то, что $\alpha=0$, $\beta=2$, частное решение будем искать в виде

$$Y=A\cos 2x+B\sin 2x. \tag{E}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & Y=A\cos 2x+B\sin 2x \\ 0 & Y'=2B\cos 2x-2A\sin 2x \\ 1 & Y''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x \\ \hline \end{array}$$
$$5\sin 2x=(-4A+A)\cos 2x+(B-4B)\sin 2x$$

Так как левая часть не содержит $\cos 2x$, то в правой части коэффициент при $\cos 2x$ должен быть равен нулю, т. е. $-4A+A=0$; коэффициенты при $\sin 2x$ должны быть равны между собой, т. е. $B-4B=5$. Значит, $A=0$; $B=-\frac{5}{3}$.

Поэтому частное решение ($E$) равно

$$Y=-\frac{5}{3}\sin 2x.$$

Общее решение уравнения ($A$) будет суммой только что найденного частного решения заданного неоднородного уравнения и общего решения ($D$) соответствующего однородного уравнения:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{5}{3}\sin 2x.$$

**Задача 20,23** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$y''-7y'+6y=\sin x.$$

Частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$Y=A\cos x+B\sin x.$$

**Ответ.** $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x.$

**Задача 20,24** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x$;
2) $y''-4y'+29y=44\sin 3x+28\cos 3x$.

Указание. В первом примере частное решение неоднородного уравнения искать в виде $Y=A\cos x+B\sin x$.

**Ответ.** 1) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+3\sin x+4\cos x$;
2) $y=e^{2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)+\sin 3x+2\cos 3x$.

**Задача 20,25.** Найти общее решение уравнения

$$y''-2y'+10y=x\cos 2x. \qquad (A)$$

**Решение.** Соответствующее однородное уравнение

$$y''-2y'+10y=0. \qquad (B)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2-2k+10=0$$

имеет корни:

$$k_{1,2}=1\pm 3i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения ($B$):

$$y_1=e^x\cos 3x;\quad y_2=e^x\sin 3x.$$

Общее решение уравнения ($B$):

$$y_0=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x). \qquad (D)$$

Приступаем к отысканию частного решения неоднородного уравнения ($A$). Сравнивая правую часть этого уравнения с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$; число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения (среди корней ($C$) число $2i$ отсутствует). Решение будем искать в виде (20,15). Нам осталось решить вопрос о степени многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (20,15). Следует помнить, что эти многочлены должны иметь одну и ту же степень, причем степень эта должна быть равна наибольшей степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в (20,14).

В нашем случае многочлен $P(x)$, стоящий множителем перед $\cos 2x$ в правой части уравнения ($A$), имеет первую степень, многочлен $Q(x)$ равен нулю. Поэтому многочлены $p(x)$ и $q(x)$ в (20,14) должны иметь первую степень. Учитывая все это ($\alpha = 0$, $\beta = 2$; степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ — первая); частное решение следует искать в виде

$$Y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x;$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & Y = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x \\ -2 & Y' = (2Cx + A + 2D)\cos 2x + (-2Ax - 2B + C)\sin 2x \\ 1 & Y'' = (-4Ax - 4B + 4C)\cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D)\sin 2x \\ \hline \end{array}$$

$$x\cos 2x = (6Ax - 4Cx - 2A + 6B + 4C - 4D)\cos 2x + (4Ax + 6Cx - 4A + 4B - 2C + 6D)\sin 2x$$

Перепишем правую часть этого равенства так, чтобы ясно были видны коэффициенты при $x$ и свободные члены многочленов:

$$x\cos 2x = [(6A - 4C)x - 2A + 6B + 4C - 4D]\cos 2x + [(4A + 6C)x - 4A + 4B - 2C + 6D]\sin 2x. \qquad (E)$$

Сравниваем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$\begin{array}{l|l} \text{при } \cos 2x & x = (6A - 4C)x - 2A + 6B + 4C - 4D; \\ \text{при } \sin 2x & 0 = (4A + 6C)x - 4A + 4B - 2C + 6D \end{array} \qquad (\Gamma)$$

(в последнем равенстве в левой части стоит нуль, так как в левой части равенства ($E$) $\sin 2x$ отсутствует). Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $x$ в левой и правой частях равенств ($\Gamma$), находим:

$$\left.\begin{array}{l} 6A - 4C = 1 \\ 4A + 6C = 0 \end{array}\right\} \qquad (I)$$

и

$$\left.\begin{array}{l} -2A + 6B + 4C - 4D = 0 \\ -4A + 4B - 2C + 6D = 0 \end{array}\right\}. \qquad (II)$$

Из системы (I) следует, что $A = \frac{3}{26}$; $C = -\frac{1}{13}$.

Подставляя в систему (II) значения $A$ и $C$ для определения $B$ и $D$, получим систему

$$\left.\begin{aligned} 6B - 4D &= \frac{7}{13} \\ 2B + 3D &= \frac{2}{13} \end{aligned}\right\},$$

из которой следует, что $B = \frac{29}{338}$; $D = -\frac{1}{169}$.

Таким образом, искомое частное решение будет таким:

$$Y = \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Общее решение заданного уравнения получим, складывая это частное решение с общим решением ($D$) соответствующего однородного уравнения:

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x + \\ + \left(-\frac{1}{13}x - \frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

**Задача 20,26** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = (4x + 22)\sin 3x - (28x + 84)\cos 3x.$$

**Ответ.**

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (2x + 6)\sin 3x + (x + 5)\cos 3x.$$

**Задача 20,27.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y = 3\sin 2x. \qquad (A)$$

**Решение.** Отбрасываем правую часть и решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' + 4y = 0. \qquad (B)$$

Корнями характеристического уравнения $k^2 + 4 = 0$ являются числа

$$k_{1,2} = \pm 2i. \qquad (C)$$

Частные решения уравнения ($B$):

$$y_1 = \cos 2x; \quad y_2 = \sin 2x,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \qquad (D)$$

Приступаем к определению частного решения заданного неоднородного уравнения ($A$). Сравнивая его правую часть с (20,14), заключаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 2$. Теперь надо определить число $\alpha + \beta i$. Оно равно $2i$. Число $2i$ является простым (однократным) корнем характеристического уравнения ($k = 1$). Частное решение ищем в виде (20,16), в котором следует взять $k = 1$; $\alpha = 0$; $\beta = 2$, степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ равна нулю.

Следовательно, надо взять

$$\begin{array}{r|l} 4 & Y = x(A\cos 2x + B\sin 2x) \\ 1 & Y'' = 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) \\ \hline \end{array}$$

$$3\sin 2x = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x$$

Учитывая, что в левой части этого равенства $\cos 2x$ отсутствует (а, следовательно, коэффициент при нем равен нулю), заключаем:

$$-4A = 3;$$

$$4B = 0.$$

Отсюда $A = -\frac{3}{4}$; $B = 0$ и поэтому $Y = -\frac{3}{4}x\cos 2x$.

Общее решение:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{3}{4}x\cos 2x.$$

**Задача 20,28** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = x\cos x.$$

Указание. Частное решение следует искать в виде

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x].$$

После подстановки в заданное уравнение окажется, что $A=0$; $B = \frac{1}{4}$; $C = \frac{1}{4}$; $D = 0$.

**Ответ.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x^2\sin x$.

**Задача 20,29** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9y = 18\cos 3x - 30\sin 3x.$$

Указание. Частное решение искать в виде

$$Y = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

**Ответ.** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + 3\sin 3x)$.

**Задача 20,30.** Найти закон движения точки, на которую действуют две силы: 1) сила притяжения к неподвижному центру, пропорциональная расстоянию точки от этого центра $P = -k^2mx$ (см. задачу 19,8), и 2) периодическая сила, определяемая формулой $F = Am\cos pt$.

**Решение.** Дифференциальное уравнение движения будет таким:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx + Am\cos pt.$$

Сократим уравнение на $m$ и запишем его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = A\cos pt. \qquad (A)$$

Уравнение — линейное неоднородное.

Рассмотреть следует два случая: 1) $p \neq k$; 2) $p = k$.

Уравнение ($A$) часто встречается в механике. Оно называется уравнением вынужденных колебаний при отсутствии сил сопротивления. Сила $F = Am\cos pt$ называется возмущающей.

*Первый случай* ($p \neq k$). Отбросим в уравнении ($A$) правую часть и найдем общее решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \qquad (B)$$

(уравнение свободных гармонических колебаний). Характеристическое уравнение $r^2 + k^2 = 0$ имеет корни:

$$r_{1,2} = \pm ki. \qquad (C)$$

Общее его решение:

$$x_0 = C_1\cos kt + C_2\sin kt. \qquad (D)$$

Частное решение неоднородного уравнения ($A$) в случае, когда $p \neq k$, следует искать в виде (20,15) ($\alpha = 0$; $\beta = p$; $\alpha + \beta i = pi$ не является корнем характеристического уравнения):

$$\begin{array}{r|l} k^2 & X = B\cos pt + C\sin pt \\ 1 & X'' = -Bp^2\cos pt - Cp^2\sin pt \\ \hline \multicolumn{2}{c}{A\cos pt = (Bk^2 - Bp^2)\cos pt + (Ck^2 - Cp^2)\sin pt} \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$, получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов $B$ и $C$:

$$\left.\begin{array}{l} Bk^2 - Bp^2 = A \\ Ck^2 - Cp^2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Поэтому

$$B = \frac{A}{k^2 - p^2}; \quad C = 0; \quad X = \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt$$

(так как $p \neq k$, то $k^2 - p^2 \neq 0$).

Общее решение уравнения ($A$) в этом случае будет таким:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + \frac{A}{k^2 - p^2}\cos pt. \qquad (E)$$

*Второй случай* ($p = k$). В этом случае по-прежнему $\alpha = 0$; $\beta = p$, но так как $p = k$, то $\beta = k$, а число $\alpha + \beta i = ki$ является корнем характеристического уравнения (см. ($C$)), поэтому частное решение надо искать в виде (20,16) (только не упустить из вида, что независимую переменную $x$ надо заменить на $t$). Правая часть заданного уравнения теперь равна $A\cos kt$ ($p$ заменено буквой $k$).

Итак, частное решение в этом случае:

$$\begin{array}{r|l} k^2 & X = t\,(C\cos kt + D\sin kt) \\ 1 & X'' = 2\,(-Ck\sin kt + Dk\cos kt) + \\ & \quad + t\,(-Ck^2\cos kt - Dk^2\sin kt) \\ \hline \end{array}$$

$$A\cos kt = -2Ck\sin kt + 2Dk\cos kt$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ в левой и правой частях этого равенства, получаем

$$D = \frac{A}{2k}; \quad C = 0;$$

частное решение неоднородного уравнения $X = t\,\frac{A\sin kt}{2k}$, а потому общее решение уравнения вынужденных колебаний ($A$) при $p = k$ (это уравнение полезно запомнить) запишется так:

$$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt + t\,\frac{A\sin kt}{2k}.$$

Рассмотренный второй случай представляет особый интерес. Наличие множителя $t$ в последнем слагаемом указывает на то, что с возрастанием времени $t$ абсцисса $x$ точки (т. е. ее размахи) неограниченно увеличивается и может достигнуть сколь угодно большой величины. Это явление называется резонансом. Оно наступает тогда, когда частота возмущающей силы равна частоте свободных колебаний точки ($p = k$). Следует обратить внимание на то, что при отсутствии возмущающей силы движение описывалось бы уравнением ($B$), а закон движения — уравнением ($D$) и точка совершала бы свободные гармонические колебания (см. задачу 19,6, п. 9). Уже рассмотрение решения ($E$) показывает, что, когда частоты свободных и вынужденных колебаний (числа $p$ и $k$) мало отличаются одна от другой, знаменатель $k^2 - p^2$ в последнем слагаемом мал, а само оно становится большим.

Из сказанного ясно, что при проектировании сооружений, судов, машин, фундаментов и т. д. надо всячески избегать явления резонанса, т. е. не допускать совпадения частот собственных колебаний с частотой накладывающейся возмущающей силы. Устранение этого явления может быть достигнуто увеличением разности между этими частотами.

**Задача 20,31.** Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = (3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x.$$

**Решение.** Соответствующее однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни:

$$k_{1,2} = \pm i.$$

Частные решения уравнения:

$$y_1 = \cos x; \quad y_2 = \sin x,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Приступая к определению частного решения заданного уравнения, сравним его правую часть с (20,14). Замечаем, что $\alpha = 0$ (множитель $e^{\alpha x}$ отсутствует в правой части), $\beta = 2$; число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения.

Частное решение надо поэтому искать в форме (20,15). Нам осталось решить вопрос о степени многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в (20,15). Так как многочлены при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в правой части заданного уравнения различны, то степень многочленов $p(x)$ и $q(x)$ должна быть равна наибольшей из них, т. е. второй, и частное решение должно иметь вид:

$$\begin{array}{l|l}
1 & Y = (Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x \\
1 & Y'' = (-4Ax^2 - 4Bx + 8Dx + 2A - 4C + 4E)\cos 2x + (-4Dx^2 - \\
 & \qquad - 4Ex - 8Ax - 4B + 2D - 4F)\sin 2x \\
\hline
\end{array}$$

$$(3x + 2)\sin 2x + (x^2 + x + 2)\cos 2x = (-3Ax^2 - 3Bx + 8Dx + 2A - 3C + 4E)\cos 2x + (-3Dx^2 - 3Ex - 8Ax - 4B + 2D - 3F)\sin 2x$$

Сравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях последнего равенства, получаем:

$$-3Dx^2 + (-3E - 8A)x + (-4B + 2D - 3F) = 3x + 2;$$

$$-3Ax^2 + (-3B + 8D)x + (2A - 3C + 4E) = x^2 + x + 2.$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях, получаем:

$$\text{при } x^2 \left|\begin{array}{ll} -3D = 0; & D = 0 \\ -3A = 1; & A = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\text{при } x \left|\begin{array}{lll} -3E - 8A = 3; & -3E + \frac{8}{3} = 3; & E = -\frac{1}{9} \\ -3B + 8D = 1; & -3B = 1; & B = -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} \text{свободный} \\ \text{член} \end{array} \left|\begin{array}{lll} -4B + 2D - 3F = 2; & \frac{4}{3} - 3F = 2; & F = -\frac{2}{9} \\ 2A - 3C + 4E = 2; & -\frac{2}{3} - 3C - \frac{4}{9} = 2; & C = -\frac{28}{27} \end{array}\right.$$

Значит,

$$Y = \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)\cos 2x + \left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)\sin 2x,$$

а общее решение заданного уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{28}{27}\right)\cos 2x +$$
$$+\left(-\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}\right)\sin 2x.$$

Теперь, учитывая, что учащийся приобрел уже прочные навыки в отыскании частного решения неоднородного линейного уравнения по виду его правой части, мы предлагаем для самостоятельного решения несколько дифференциальных неоднородных уравнений, порядок которых выше второго.

**Задача 20,32** (для самостоятельного решения).

Найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям: 1) $\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{dx}{dt} = e^{2t}$; $x(0) = 0$; $x'(0) = 0$; $x''(0) = 0$;

2) $\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^3x}{dt^3} = \cos t$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$; $x'''(0) = 5$;

3) $x^{(4)} + 4x = t^2$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$;

4) $\frac{d^4r}{d\varphi^4} + 2a^2\frac{d^2r}{d\varphi^2} + a^4r = \cos\varphi$; $r(0) = r'(0) = 1$; $r''(0) = 1 - 2a^2$; $r'''(0) = -2a^2$.

Указания. В третьем примере характеристическое уравнение $k^4 + 4 = 0$ может быть переписано так: $k^4 + 4k^2 + 4 - 4k^2 = 0$, или $(k^2 + 2)^2 - (2k)^2 = 0$; $(k^2 - 2k + 2)(k^2 + 2k + 2) = 0$. Его корни: $k_{1,2} = 1 \pm i$; $k_{3,4} = -1 \pm i$. Частное решение неоднородного уравнения $X = \frac{1}{4}t^2$.

В четвертом примере характеристическое уравнение $k^4 + 2a^2k^2 + a^4 = 0$; $(k^2 + a^2)^2 = 0$ имеет кратные корни: $k_1 = ai$; $k_2 = -ai$; $k_3 = ai$; $k_4 = -ai$. Частные решения соответствующего однородного уравнения: $r_1 = \cos a\varphi$; $r_2 = \sin a\varphi$; $r_3 = \varphi\cos a\varphi$; $r_4 = \varphi\sin a\varphi$. Частное решение неоднородного уравнения $R = A\cos\varphi$.

Ответ. 1) $x = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}e^{2t}$;

2) $x = \frac{5}{2}t^2 - 4t + 4 - \frac{9}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$;

3) $x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}e^t\sin t + \frac{1}{8}e^{-t}\sin t$;

4) $r = \left[1 - \frac{1}{(a^2+1)^2}\right]\cos a\varphi + \frac{1}{2a}\sin a\varphi + \frac{\varphi}{2}\cos a\varphi -$
$- \frac{a^3\varphi}{2(a^2+1)}\sin a\varphi + \frac{1}{(a^2+1)^2}\cos\varphi.$

**Задача 20,33** (для самостоятельного решения).

Решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x$$

при начальных условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

Указания. Заменить произведение синусов в правой части разностью косинусов:

$$\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x).$$

Рассмотреть два неоднородных уравнения:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = \frac{1}{2}\cos x; \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 4y = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

и отыскать для каждого из них частные решения: для первого в виде

$$Y_1 = A\cos x + B\sin x,$$

для второго

$$Y_2 = A_1\cos 2x + B_1\sin 2x.$$

После определения коэффициентов $A$, $B$, $A_1$ и $B_1$ образовать сумму $Y_1 + Y_2$, которая и будет частным решением заданного уравнения.

Ответ. $y = \frac{83}{160}e^{2x} + \frac{83}{160}e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{16}\cos 2x.$

## ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Уравнение Эйлера. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (основные понятия).

### I. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

#### Основные сведения из теории

Уравнение Эйлера является линейным дифференциальным уравнением, которое имеет вид

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + a_2(ax+b)^{n-2}y^{(n-2)} + \\ + \cdots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = f(x), \qquad (21,1)$$

где все $a_i$ ($i = 1, 2, \ldots$), а также $a$ и $b$ — вещественные числа, а правая часть $f(x)$ — функция независимой переменной $x$, и по этой переменной вычислены все производные в (21,1).

В частном случае, когда $a = 1$, $b = 0$, уравнение (21,1) принимает вид

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + a_2x^{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}xy' + \\ + a_ny = f(x). \qquad (21,2)$$

Уравнения Эйлера (21,1) и (21,2) представляют собой частный случай линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В приложениях математики уравнение Эйлера встречается часто.

Если ввести замену независимой переменной по формуле

$$ax + b = e^t \quad (t = \ln|ax + b|) \tag{21,3}$$

в случае, если уравнение имеет вид (21,1), или

$$x = e^t \quad (t = \ln|x|), \tag{21,4}$$

если уравнение имеет вид (21,2), то уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Из (21,3) следует:

$$\left.\begin{aligned} y' &= ae^{-t}\frac{dy}{dt} \\ y'' &= a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \\ y''' &= a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{21,5}$$

Делая в (21,1) замену переменных по формулам (21,5), это уравнение преобразуем в линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, которое мы умеем интегрировать.

Сначала решим несколько однородных уравнений Эйлера, т. е. таких, в которых правая часть $f(x) \equiv 0$.

**Задача 21,1.** Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0.$$

**Решение.** Это уравнение Эйлера типа (21,2).

Произведем замену переменной $x = e^t$ по формуле (21,4) на основании (21,5) при $a = 1$ и получим

$$y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}; \quad y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{21,5a}$$

Подставляя эти значения производных в заданное уравнение и замечая, что на основании (21,4) $x^2 = e^{2t}$, получаем

$$e^{2t}\cdot\underbrace{e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}_{y''} + 5e^t\cdot\underbrace{e^{-t}\frac{dy}{dt}}_{y'} + 3y = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 5\frac{dy}{dt} + 3y = 0.$$

Делая приведение подобных членов, имеем

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=0.$$

Сделанная подстановка привела нас к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2+4k+3=0$. Его корни: $k_1=-3$; $k_2=-1$.

Частные решения:

$$y_1=e^{-3t};\ y_2=e^{-t}. \qquad (A)$$

Теперь надо возвратиться к старой переменной $x$. Из (21,4) следует, что $t=\ln x$.

Частные решения запишутся в виде:

$$y_1=\frac{1}{x^3};\quad y_2=\frac{1}{x},$$

а общее решение заданного уравнения

$$y=\frac{C_1}{x^3}+\frac{C_2}{x},$$

или окончательно

$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{C_1}{x^2}+C_2\right).$$

**Задача 21,2** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений Эйлера:

1) $x^2y''+xy'-9y=0$; 2) $x^2y''+xy'+9y=0$; 3) $x^2y''+xy'=0$.

**Ответ.** 1) $y=C_1x^3+C_2x^{-3}$; 2) $y=C_1\cos(3\ln x)+C_2\sin(3\ln x)$; 3) $y=C_1+C_2\ln x$.

**Задача 21,3** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$x^2y''-xy'+y=0.$$

Указание. Рассматриваемое уравнение — уравнение Эйлера типа (21,2).

Применив подстановку $x=e^t$, получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=0.$$

Характеристическое уравнение: $k^2-2k+1=0$. Его корни $k_1=k_2=1$; частные решения: $y_1=e^t$; $y_2=te^t$.

**Ответ.** $y=C_1x+C_2x\ln x$, или $y=x(C_1+C_2\ln x)$.

**Задача 21,4** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение уравнения

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}-\frac{4}{\varphi^2}r=0. \qquad (A)$$

Указание. Если обе части уравнения ($A$) умножить на $\varphi^2$, то оно примет вид (21,2): $\varphi^2\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\varphi\frac{dr}{d\varphi}-4r=0$. Это и есть уравнение Эйлера (независимая переменная — $\varphi$). Подстановка (21,4) в данном случае имеет вид $\varphi=e^t$.

Используя формулы (21,5а), в которых $y$ надо заменить на $r$, получим уравнение $\frac{d^2r}{dt^2} - 3\frac{dr}{dt} - 4r = 0$. Его общее решение: $r = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$. Возвращаясь к старой переменной, по формуле $\varphi = e^t$ получим $e^{4t} = \varphi^4$; $e^{-t} = \varphi^{-1}$.

**Ответ.** $r = C_1\varphi^4 + C_2\varphi^{-1}$.

**Задача 21,5** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений Эйлера:

1) $\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} - 3\rho\frac{du}{d\rho} + 5u = 0$; 2) $t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 3t\frac{dx}{dt} - 5x = 0$;

3) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$.

Указание. Во втором примере искомой функцией является $x$, а независимой переменной $t$. Подстановка (21,4) может быть записана так: $t = e^u$, где $u$ — новая независимая переменная.

**Ответ.** 1) $u = \rho^2(C_1 \cos \ln \rho + C_2 \sin \ln \rho)$;

2) $x = C_1t^5 + \frac{C_2}{t}$; 3) $y = C_1x^2 + C_2x^4$.

**Задача 21,6.** Найти общее решение уравнения Эйлера

$$(3x + 1)^2 y'' - 2(3x + 1)y' - 12y = 0. \qquad (A)$$

**Решение.** Сделаем замену независимой переменной по формуле (21,3), полагая, что

$$3x + 1 = e^t. \qquad (B)$$

На основании (21,5), учитывая, что $a = 3$, $b = 1$, $(3x + 1)^2 = e^{2t}$, получим

$$9e^{2t}e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2 \cdot 3e^te^{-t}\frac{dy}{dt} - 12y = 0.$$

Отсюда получаем (после приведения подобных членов и сокращения на 3)

$$3\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} - 4y = 0. \qquad (C)$$

Характеристическое уравнение: $3k^2 - 5k - 4 = 0$. Его корни:

$$k_1 = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{73}}{6}; \quad k_2 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{73}}{6}.$$

Общее решение уравнения $(C)$

$$y = e^{\frac{5}{6}t}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{73}}{6}t} + C_2e^{-\frac{\sqrt{73}}{6}t}\right).$$

Из $(B)$ следует, что $t = \ln(3x + 1)$, а потому $e^{\frac{5}{6}t} = e^{\frac{5}{6}\ln(3x+1)} = (3x + 1)^{\frac{5}{6}}$; $e^{\frac{\sqrt{73}}{6}t} = (3x + 1)^{\frac{\sqrt{73}}{6}}$.

Общее решение заданного уравнения запишется так:

$$y = (3x + 1)^{\frac{5}{6}}\left[C_1(3x + 1)^{\frac{\sqrt{73}}{6}} + C_2(3x + 1)^{-\frac{\sqrt{73}}{6}}\right].$$

**Задача 21,7** (для самостоятельного решения). Проинтегрировать уравнения Эйлера:

1) $(3r+2)^2 \frac{d^2u}{dr^2} + 7(3r+2)\frac{du}{dr} = 0$;

2) $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' - 12y = 0$;

3) $(5+x)^2 y'' - 3(5+x)y' + 4y = 0$.

**Ответ.** 1) $u = C_1 + C_2(3r+2)^{-\frac{4}{3}}$;

2) $y = C_1(2x+1)^3 + C_2(2x+1)^{-1}$;

3) $y = (5+x)^2[C_1 + C_2 \ln(5+x)]$.

**Задача 21,8** (для самостоятельного решения). Найти общее решение уравнений Эйлера:

1) $x^3y''' - 6x^2y'' + 18xy' - 24y = 0$;

2) $x^4y^{\mathrm{IV}} - x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$.

Указания. 1) После подстановки $x = e^t$ на основании формул (21,5) при $a = 1$ получится уравнение $y''' - 9y'' + 26y' - 24y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^3 - 9k^2 + 26k - 24 = 0$ имеет корни: $k_1 = 2$; $k_2 = 3$; $k_3 = 4$.

2) Замена независимой переменной по формуле $x = e^t$ дает такое выражение для четвертой производной:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 11\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt}\right).$$

Оно получается из последней формулы в (21,5) при $a = 1$, если обе ее части продифференцировать по $x$. При этом надо иметь в виду, что для вычисления в правой части производной по $x$ надо ее продифференцировать по $t$, и результат дифференцирования умножить на $\frac{dt}{dx}$ или, что то же, разделить на $\frac{dx}{dt} = e^t$. Но деление на $e^t$ равносильно умножению на $e^{-t}$. Таким образом, чтобы найти производную по $x$ правой части этой формулы, надо ее продифференцировать по $t$, и результат дифференцирования умножить на $e^{-t}$.

После приведения подобных членов получится уравнение

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 7\frac{d^3y}{dt^3} + 17\frac{d^2y}{dt^2} - 17\frac{dy}{dt} + 6 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет корни:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 2; \; k_4 = 3.$$

**Ответ.** 1) $y = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4$;

2) $y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x^2 + C_4x^3$.

**Задача 21,9.** При изучении предмета «Сопротивление материалов» приходится решать так называемую задачу Ляме об определении напряжений в точках толстостенной цилиндрической трубы по известным равномерно распределенным давлениям, действующим на ее внутреннюю и наружную поверхности. Решение задачи приводит к дифференциальному уравнению

$$\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - u = 0,$$

которое является уравнением Эйлера.

Проинтегрируйте его самостоятельно.

**Ответ.** $u = C_1\rho + C_2 \frac{1}{\rho}$.

Теперь проинтегрируем несколько неоднородных уравнений Эйлера, т. е. таких, у которых правая часть $f(x)$ в (21,1) или в (21,2) не равна нулю.

**Задача 21,10.** Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + 4xy' + 12y = \ln x. \qquad (A)$$

**Решение.** Предложенное уравнение — уравнение Эйлера. От уравнений, решенных выше, оно отличается наличием правой части, являющейся функцией той независимой переменной, по которой вычислены производные.

Как и раньше, это линейное уравнение с переменными коэффициентами может быть преобразовано к линейному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью подстановки (21,4): $x = e^t$; $t = \ln x$.

Применяя формулы (21,5а); получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = t, \qquad (B)$$

которое является линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами. Поступаем так же, как и на предыдущем практическом занятии: отбрасываем правую часть и ищем общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 12y = 0. \qquad (C)$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2 + 3k + 12 = 0 \qquad (D)$$

имеет корни: $k_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2} i. \qquad (E)$

Частные решения уравнения ($C$):

$$y_1 = e^{-\frac{3}{2}t} \cos \frac{\sqrt{39}}{2} t; \quad y_2 = e^{-\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{39}}{2} t,$$

а его общее решение

$$y_0 = C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \cos \frac{\sqrt{39}}{2} t + C_2 e^{-\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{39}}{2} t. \qquad (F)$$

Теперь отыщем частное решение уравнения ($B$). Сравнивая его правую часть с (20,14), отмечаем, что $\alpha = 0$; $\beta = 0$. Число $\alpha + \beta i = 0$ не является корнем характеристического уравнения (среди корней ($E$) числа нуль нет).

Частное решение ищем в виде (20,15):

$$\begin{array}{r|l} 12 & Y = At + B \\ 3 & Y' = \quad A \\ 1 & Y'' = \quad 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{t = 12At + 12B + 3A} \end{array} \qquad \begin{array}{r} (G) \\ \\ \\ (K) \end{array}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы $t$ в левой и правой частях равенства ($K$), получим

$$12A = 1; \quad A = \frac{1}{12}; \quad 12B + 3A = 0; \quad B = -\frac{1}{48}.$$

Подставляя эти значения $A$ и $B$ в ($G$), найдем

$$Y = \frac{1}{12} t - \frac{1}{48}.$$

Складывая это частное решение неоднородного уравнения ($B$) с общим решением ($F$) соответствующего однородного уравнения получим общее решение уравнения ($B$):

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{2}t} \cos \frac{\sqrt{39}}{2} t + C_2 e^{-\frac{3}{2}t} \sin \frac{\sqrt{39}}{2} t + \frac{1}{12} t - \frac{1}{48}.$$

Теперь следует возвратиться к старой переменной $x$ с помощью равенства (21,4): $t = \ln x$. Имея в виду, что

$$e^{-\frac{3}{2}t} = e^{-\frac{3}{2}\ln x} = e^{\ln x^{-\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}},$$

получаем окончательно

$$y = x^{-\frac{3}{2}} \left[ C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{39}}{2} \ln x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{39}}{2} \ln x\right) \right] + \frac{1}{12} \ln x - \frac{1}{48}.$$

**Задача 21,11** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения уравнений:

1) $x^2 y'' + xy' - y = 9x^2$;
2) $x^2 y'' - xy' + y = 3x^3$;
3) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 5x$;
4) $(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1) y' - 12y = 3x + 1$.

Указание. Сделать подстановку

$$2x + 1 = e^t \tag{A}$$

и воспользоваться формулами (21,5). Из ($A$) следует:

$$x = \frac{1}{2}(e^t - 1); \quad 3x + 1 = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}.$$

**Ответ.** 1) $y = C_1 x + C_2 x^{-1} + 3x^2$;

2) $y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{3}{4}x^3$;

3) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + 5x$;

4) $y = C_1 (2x+1)^3 + C_2 (2x+1)^{-1} - \frac{3}{16}x - \frac{5}{96}$.

## II. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

а) Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{21,6}$$

В этой системе уравнений неизвестными являются $n$ функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а независимой переменной — $t$.

Особенности нормальной системы дифференциальных уравнений:

1) Все входящие в систему уравнения являются уравнениями первого порядка.

2) Все уравнения системы разрешены относительно производных искомых функций $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$.

Если нормальная система уравнений (21,6) линейна, а коэффициенты при неизвестных функциях постоянны, то она имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + \varphi_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \varphi_2(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + \varphi_n(t) \end{aligned}\right\} \tag{21,7}$$

Все искомые функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят в систему (21,7) в первой степени, а функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — функции независимой переменной $t$, по которой вычислены производные.

Если все эти функции равны нулю, то система (21,7) называется однородной, а если хотя бы одна из них не равна нулю,— неоднородной.

Число произвольных постоянных, входящих в общее решение нормальной системы уравнений, равно числу неизвестных функций, входящих в систему. Произвольные постоянные определяются из начальных или краевых условий.

Способ интегрирования нормальных систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами мы покажем на примере однородной системы из трех уравнений.

**Задача 21,12.** Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} &= -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= x - y + 3z \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$

**Решение.** Неизвестными функциями являются $x$, $y$ и $z$, а независимой переменной $t$.

Приведем решение этой системы к решению одного уравнения, порядок которого равен числу уравнений, входящих в систему. Для этого любое из уравнений системы ($A$) продифференцируем по $t$ и заменим в полученном уравнении производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ их выражениями из системы ($A$). Поступая так, например, с первым уравнением, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}.$$

Заменим в этом уравнении производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$, стоящие в правой части, их выражениями из второго и третьего уравнений заданной системы ($A$) и получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3\underbrace{(3x - y + z)}_{\frac{dx}{dt}} - \underbrace{(-x + 5y - z)}_{\frac{dy}{dt}} + \underbrace{(x - y + 3z)}_{\frac{dz}{dt}},$$

откуда после приведения подобных членов в правой части найдем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 11x - 9y + 7z. \qquad (B)$$

Это уравнение опять продифференцируем по $t$ и получим

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11\frac{dx}{dt} - 9\frac{dy}{dt} + 7\frac{dz}{dt}.$$

Снова заменим в правой части производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ и $\frac{dz}{dt}$ их выражениями из заданной системы ($A$) и получим уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 11(3x - y + z) - 9(-x + 5y - z) + 7(x - y + 3z),$$

которое после приведения подобных членов в правой части запишется так:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63y + 41z. \qquad (C)$$

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из первого уравнения заданной системы ($A$), т. е. уравнения, обе части которого мы дифференцировали, и уравнений ($B$) и ($C$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y + z \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 11x - 9y + 7z \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= 49x - 63y + 41z \end{aligned}\right\}. \qquad (D)$$

Чтобы прийти к уравнению, содержащему только одну неизвестную функцию, из первых двух уравнений системы ($D$) определим функции $y$ и $z$. Из этих уравнений следует:

$$\left.\begin{aligned} y - z &= 3x - \frac{dx}{dt} \\ 9y - 7z &= 11x - \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned}\right\}.$$

Решая их относительно $y$ и $z$, получим:

$$y = \frac{-10x + 7\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}; \quad z = \frac{-16x + 9\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}. \qquad (E)$$

Подставляя эти значения $y$ и $z$ в третье уравнение системы ($D$), найдем

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 49x - 63\,\frac{-10x + 7\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2} + 41\,\frac{-16x + 9\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}}{2}.$$

После упрощений в правой части получаем

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 36x - 36\frac{dx}{dt} + 11\frac{d^2x}{dt^2}. \qquad (F)$$

Уравнение ($F$) — линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами. Перепишем его так:

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 11\frac{d^2x}{dt^2} + 36\frac{dx}{dt} - 36x = 0 \qquad (G)$$

и найдем его общее решение по известным правилам. Составляем характеристическое уравнение

$$k^3 - 11k^2 + 36k - 36 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа:

$$k_1 = 2; \quad k_2 = 3; \quad k_3 = 6.$$

Частными решениями уравнения ($G$) будут функции:

$$x_1 = e^{2t}; \quad x_2 = e^{3t}; \quad x_3 = e^{6t},$$

а его общим решением

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}. \qquad (K)$$

Чтобы определить две остальные неизвестные функции $y$ и $z$, воспользуемся выражениями ($E$). После подстановки в ($E$) выражений $x$, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ получим:

$$y = C_2e^{3t} - 2C_3e^{6t}; \quad z = -C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}.$$

**Задача 21,13** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения систем уравнений:

$$1)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x} = -3x + y\\ \dot{y} = -20x + 6y\end{array}\right\}; \qquad 2)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x} = -\frac{y}{2}\\ \dot{y} = 2x\end{array}\right\}; \qquad 3)\ \left.\begin{array}{l}\dot{x} = x + 4y\\ \dot{y} = y - 3x\end{array}\right\};$$

$$\left(\dot{x} = \frac{dx}{dt};\ \dot{y} = \frac{dy}{dt}\right).$$

**Ответ.** 1) $x = C_1e^{2t} + C_2e^t; \quad y = 5C_1e^{2t} + 4C_2e^t;$

2) $x = C_1\cos t + C_2\sin t; \quad y = 2C_1\sin t - 2C_2\cos t;$

3) $x = e^t\,[C_1\cos(2\sqrt{3}t) + C_2\sin(2\sqrt{3}t)];$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}e^t\,[C_2\cos(2\sqrt{3}t) - C_1\sin(2\sqrt{3}t)].$$

**Задача 21,14** (для самостоятельного решения).

Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dx}{dt} = -x + y + 2\sin t - 3\cos t\\ \frac{dy}{dt} = -6x + 4y + 7\sin t - 20\cos t\end{array}\right\}.$$

Указание. Обе части первого уравнения продифференцировать по $t$. В полученное уравнение подставить вместо производной $\frac{dy}{dt}$ ее значение из второго уравнения, а вместо $y$ — его значение из первого уравнения:

$$y = \frac{dx}{dt} + x - 2\sin t + 3\cos t. \qquad (A)$$

Получится уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2\sin t - 6\cos t.$$

Интегрировать его следует как линейное неоднородное уравнение.

Чтобы определить функцию $y$, надо в выражение ($A$) подставить найденное значение $x$ и его производную $\frac{dx}{dt}$.

**Ответ.** $x = C_1e^t + C_2e^{2t} + 2\sin t;$

$y = 2C_1e^t + 3C_2e^{2t} + 5\cos t.$

**Задача 21,15** (для самостоятельного решения).

Решить системы уравнений при заданных начальных условиях:

1) $\left.\begin{aligned} x' &= -2y + 3t \\ y' &= 2x + 4 \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x(0) &= 2; \\ y(0) &= 3; \end{aligned}$

$x$ и $y$ — искомые функции, $t$ — независимая переменная.

2) $\left.\begin{aligned} x' + y' &= y + e^t \\ 2x' + y' &= -2y + \cos t \end{aligned}\right\}$ $x(0) = y(0) = 0.$

Указание. Разрешить систему относительно $x'$ и $y'$. Получится

$$\left.\begin{aligned} x' &= -3y + \cos t - e^t \\ y' &= 4y - \cos t + 2e^t \end{aligned}\right\}.$$

Интегрировать эту систему, как и предыдущую. Искомые функции и независимая переменная те же.

**Ответ.** 1) $x = \frac{13}{4}\cos 2t - 3\sin 2t - \frac{5}{4};$

$y = 3\cos 2t + \frac{13}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t;$

2) $x = e^t - \frac{11}{34}e^{4t} - \frac{3}{17}\cos t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{1}{2};$

$y = -\frac{2}{3}e^t + \frac{22}{51}e^{4t} + \frac{4}{17}\cos t - \frac{1}{17}\sin t.$

**Задача 21,16** (для самостоятельного решения).

Найти решения систем, удостоверяющие заданным условиям:

1) $\left.\begin{aligned} x' &= y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= x + z \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x(0) &= 1; \\ y(0) &= 2; \\ z(0) &= 3. \end{aligned}$

2) $\left.\begin{aligned} x' &= 6x - 72y + 44z \\ y' &= -4x + 40y - 22z \\ z' &= -6x + 57y - 31z \end{aligned}\right\}$ $\begin{aligned} x(0) &= 9; \\ y(0) &= 5; \\ z(0) &= 7. \end{aligned}$

(Искомые функции — $x$, $y$ и $z$, независимая переменная — $t$).

**Ответ.** 1) $x = 2 - e^t;$ $y = -2 + 4e^t - te^t;$ $z = -2 + 5e^t - te^t;$

2) $x = -11e^{2t} + 20e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t - \frac{212}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t;$

$y = -11e^{2t} + 16e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t - \frac{144}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t;$

$z = -17e^{2t} + 24e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{97}}{2}t - \frac{216}{\sqrt{97}}e^{\frac{13}{2}t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{97}}{2}t.$

## III. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С линейными системами дифференциальных уравнений второго порядка приходится встречаться часто в теоретической механике, сопротивлении материалов и в других приложениях математики.

Система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно наивысших производных искомых функций, называется **канонической**. В случае трех неизвестных функций $x$, $y$ и $z$ и независимой переменной $t$ эта система уравнений записывается так:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \psi\left(t,\ x,\ y,\ z,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (21,8)$$

Общее решение этой системы содержит шесть произвольных постоянных, для определения которых задается шесть начальных условий (в механике это начальное положение и скорость точки в некоторый момент времени $t = t_0$).

Для определения решения канонической системы уравнений (21,8) применяется такой же прием, как и при решении рассмотренных выше нормальных систем: последовательным дифференцированием одного уравнения системы (или нескольких ее уравнений) следует исключить все искомые функции, кроме одной. Сущность этого приема подробно разбирается на примере в следующей задаче.

**Задача 21,17.** Найти общее решение системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2x - 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x - 7y \end{aligned}\right\}.$$

**Решение.** Продифференцируем первое уравнение два раза по $t$ и получим

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{d^2y}{dt^2}. \qquad (A)$$

Подставим в $(A)$ вместо $\frac{d^2y}{dt^2}$ его выражение из второго уравнения системы.

Тогда

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4(x - 7y),$$

или

$$\frac{d^4x}{dt^4} = -2\frac{d^2x}{dt^2} - 4x + 28y. \qquad (B)$$

Из первого уравнения системы определим $y$ и подставим его в уравнение $(B)$:

$$y=\frac{1}{4}\left(-2x-\frac{d^2x}{dt^2}\right). \qquad (C)$$

С этим значением $y$ уравнение $(B)$ перепишется так:

$$\frac{d^4x}{dt^4}=-2\frac{d^2x}{dt^2}-4x+28\cdot\frac{1}{4}\left(-2x-\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Раскрывая скобки и перенося все члены уравнения в его левую часть, получаем

$$\frac{d^4x}{dt^4}+9\frac{d^2x}{dt^2}+18x=0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^4+9k^2+18=0$$

имеет корни: $k_{1,2}=\pm\sqrt{3}i$; $k_{3,4}=\pm\sqrt{6}i$.

Частные решения:

$$x_1=\cos\sqrt{3}t;\quad x_2=\sin\sqrt{3}t;\quad x_3=\cos\sqrt{6}t;\quad x_4=\sin\sqrt{6}t.$$

Функция

$$x=C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t. \qquad (D)$$

Теперь из $(C)$ найдем $y$. Из $(D)$ находим

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-3C_1\cos\sqrt{3}t-3C_2\sin\sqrt{3}t-6C_3\cos\sqrt{6}t-6C_4\sin\sqrt{6}t.$$

Подставляя $x$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ в $(C)$, получим

$$y=\frac{1}{4}C_1\cos\sqrt{3}t+\frac{1}{4}C_2\sin\sqrt{3}t+C_3\cos\sqrt{6}t+C_4\sin\sqrt{6}t.$$

**Задача 21,18.** Найти общее решение системы:

$$\left.\begin{aligned}y''&=4y-2z\\ z''&=y+z\end{aligned}\right\}$$

(независимая переменная $x$).

**Решение.** Продифференцируем по $x$ дважды второе уравнение:

$$z^{(4)}=y''+z''. \qquad (A)$$

Заменим в $(A)$ $y''$ его значением из первого уравнения. Тогда

$$z^{(4)}=4y-2z+z''. \qquad (B)$$

Чтобы получить уравнение, содержащее одну неизвестную функцию, исключим из него $y$ с помощью второго уравнения системы. Из него следует, что

$$y=z''-z. \qquad (C)$$

Подставляя это значение $y$ в $(B)$, получим

$$z^{(4)} = 4(z'' - z) - 2z + z'',$$

а после упрощений

$$z^{(4)} - 5z'' + 6z = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^4 - 5k^2 + 6 = 0$. Его корни: $k_1 = \sqrt{3}$; $k_2 = -\sqrt{3}$; $k_3 = \sqrt{2}$; $k_4 = -\sqrt{2}$.

Частные решения:

$$z_1 = e^{\sqrt{3}x}; \quad z_2 = e^{-\sqrt{3}x}; \quad z_3 = e^{\sqrt{2}x}; \quad z_4 = e^{-\sqrt{2}x}.$$

Функция

$$z = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x},$$

или на основании формул (19,18), вводя обозначения:

$$C_1 + C_2 = c_1; \quad C_1 - C_2 = c_2; \quad C_3 + C_4 = c_3; \quad C_3 - C_4 = c_4,$$

$$z = c_1 \operatorname{ch} \sqrt{3}x + c_2 \operatorname{ch} \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{ch} \sqrt{2}x + c_4 \operatorname{sh} \sqrt{2}x.$$

Подставляя найденное значение функции $z$ и ее вторую производную $z''$ в выражение $(C)$, получим

$$y = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{3}x + 2c_2 \operatorname{sh} \sqrt{3}x + c_3 \operatorname{ch} \sqrt{2}x + c_4 \operatorname{sh} \sqrt{2}x.$$

**Задача 21,19** (для самостоятельного решения).

Найти общие решения систем (во второй системе найти решение, удовлетворяющее начальным условиям):

1) $\left.\begin{array}{l} x''(t) + a^2 y = 0 \\ y''(t) - a^2 y = 0 \end{array}\right\}$; 2) $\left.\begin{array}{l} x''(t) + 6x + 7y = 0 \\ y''(t) + 3x + 2y = 2t \end{array}\right\}$;

$x(0) = 2$; $y(0) = 1$; $x'(0) = 1$; $y'(0) = 3$.

**Ответ.** 1) $x = \left[C_1 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{\frac{a}{\sqrt{2}}t} +$

$$+ \left[C_3 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}t};$$

$$y = \left[C_1 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) - C_2 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{\frac{a}{\sqrt{2}}t} +$$

$$+ \left[-C_3 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right) + C_4 \cos\left(\frac{a}{\sqrt{2}}t\right)\right] e^{-\frac{a}{\sqrt{2}}t};$$

2) $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + 7C_3 \cos 3t + 7C_4 \sin 3t + \frac{14}{9}t$;

$$y = -C_1 e^t - C_2 e^{-t} + 3C_3 \cos 3t + 3C_4 \sin 3t - \frac{4}{3}t.$$

Из начальных условий: $C_1 = -\frac{297}{180}$; $C_2 = \frac{31}{20}$; $C_3 = \frac{3}{10}$; $C_4 = \frac{17}{135}$.

**Задача 21,20.** Найти решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{dy}{dt} - g \end{aligned}\right\},$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = y(0) = 0$; $x'(0) = v_{0x}$; $y'(0) = v_{0y}$ ($k$ и $g$ — постоянные величины).

**Решение.** Предложенная система уравнений описывает движение снаряда с учетом сопротивления среды.

Каждое из уравнений системы содержит только одну неизвестную функцию.

Из первого уравнения следует

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = 0.$$

Характеристическое уравнение $r^2 + kr = 0$ имеет корни: $r_1=0$; $r_2 = -k$. Частные решения уравнения: $x_1 = 1$; $x_2 = e^{-kt}$. Его общее решение

$$x = C_1 + C_2e^{-kt}. \qquad (A)$$

Чтобы определить $C_1$ и $C_2$, найдем $x'$:

$$x' = -C_2ke^{-kt}. \qquad (B)$$

При $t = 0$ имеем:
из $(A)$ $0 = C_1 + C_2$;
из $(B)$ $v_{0x} = -C_2k$.

Отсюда $C_1 = \frac{v_{0x}}{k}$; $C_2 = -\frac{v_{0x}}{k}$.

Подставляя эти значения $C_1$ и $C_2$ в $(A)$, получим

$$x = \frac{v_{0x}}{k}(1 - e^{-kt}). \qquad (I)$$

Второе уравнение перепишем так:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{ay}{dt} = -g. \qquad (C)$$

Уравнение линейное неоднородное. Общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0 = C_3 + C_4e^{-kt}.$$

Так как корни характеристического уравнения — числа 0 и $-k$, из сравнения с (20,14) $\alpha = \beta = 0$, а число $\alpha + \beta i = 0$ является корнем характеристического, то частное решение следует искать в виде:

$$\begin{array}{r|l} 0 & Y = At \\ k & Y' = A \\ 1 & Y'' = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$-g = Ak;\ A = -\frac{g}{k};\ Y = -\frac{g}{k}t.$$

Общее решение уравнения ($C$);

$$y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k} t. \qquad (D)$$

Для определения $C_3$ и $C_4$ из начальных условий найдем $y'$:

$$y' = -C_4 k e^{-kt} - \frac{g}{k}. \qquad (E)$$

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений:

из ($D$) $0 = C_3 + C_4$;

из ($E$) $v_{0y} = -C_4 k - \frac{g}{k}$;

$$C_4 = -\frac{v_{0y} + \frac{q}{k}}{k}; \; C_3 = \frac{v_{0y} + \frac{g}{k}}{k}.$$

Подставляя эти значения $C_3$ и $C_4$ в ($D$), получим

$$y = \frac{v_{0y} + \frac{g}{k}}{k} (1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k} t. \qquad (II)$$

Уравнения (I) и (II) являются параметрическими уравнениями траектории снаряда.

Исключите самостоятельно параметр $t$ из этих уравнений (из (I) выразить $t$ через $x$ и подставить в (II)). Окажется, что

$$y = \frac{v_{0y} + \frac{g}{k}}{v_{0x}} x + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{kx}{v_{0x}}\right).$$

Из последнего уравнения можно определить горизонтальную дальность стрельбы, если положить в нем $y = 0$, и из полученного уравнения найти $x$.

# Часть IV
# Практические занятия по кратным и криволинейным интегралам

## ПЕРВОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Двойные интегралы. Вычисление площадей при помощи двойного интеграла.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### I. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

В прямоугольных координатах дифференциал площади

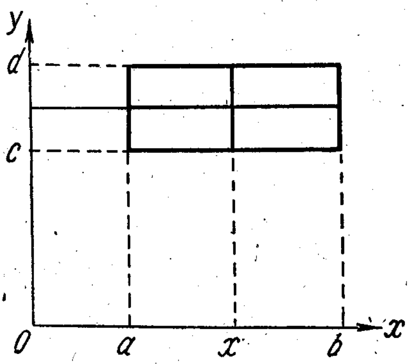
$$d\sigma = dx\,dy,$$

а двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (1,1)$$

а) Двойной интеграл по прямоугольнику

Если область ($\sigma$), на которую распространяется двойной интеграл (1,1), — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям и определяемыми уравнениями $x = a$; $x = b$ $(a \leqslant x \leqslant b)$; $y = c$; $y = d$ $(c \leqslant y \leqslant d)$ (фиг. 1,1), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:



Фиг. 1,1

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx \qquad (1,2)$$

или

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy. \qquad (1,3)$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул, называются *повторными*, или *двукратными*.

В формуле (1,2) интеграл $\int_a^b f(x, y)\,dx$ называется внутренним. Он вычисляется в предположении, что переменная $y$ сохраняет на отрезке $[a, b]$ зафиксированное постоянное значение. При таком предположении подынтегральная функция $f(x, y)$ является функцией только одной переменной $x$. В результате вычисления этого интеграла получится функция переменной $y$.

После того, как эта функция определена, надо выполнить внешнее интегрирование — проинтегрировать полученную функцию по переменной $y$. В результате этого вторичного интегрирования получится уже не функция, а число.

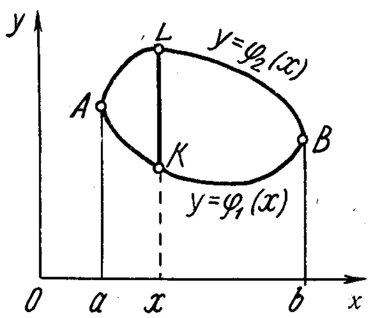
Таким образом, при вычислении двойного интеграла по формуле (1,2) первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной $x$ при постоянном $y$, а второе интегрирование — по переменной $y$.

Если же для вычисления двойного интеграла применяется формула (1,3), то порядок интегрирования меняется: первое (внутреннее) интегрирование ведется по переменной $y$ в предположении, что переменная $x$ на отрезке $[c, d]$ сохраняет постоянное зафиксированное значение, а повторное (внешнее) интегрирование — по переменной $x$. В результате вычисления внутреннего интеграла $\int_c^d f(x, y)\,dy$ получится функция переменной $x$, а повторное интегрирование даст число.

### б) Двойной интеграл по произвольной плоской фигуре

1. Если область интегрирования ($\sigma$) ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси $Oy$, пересекает не более чем в двух точках (фиг. 1,2), то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{1,4}$$



Фиг. 1,2

Интеграл в правой части этой формулы также называется *повторным*, или *двукратным*.

Внутренний интеграл в этой формуле отличается от внутреннего интеграла в формуле (1,3) тем, что здесь пределы интегрирования не постоянные величины $c$ и $d$, а функции переменной $x$. При вычислении внутреннего интеграла в подынтегральной функции $f(x, y)$ надо $x$ рассматривать как величину постоянную.

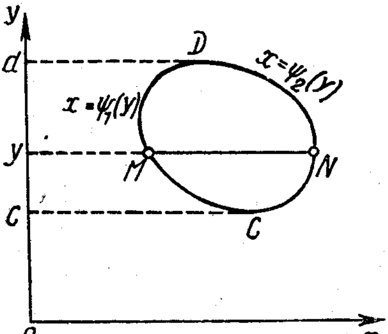
Пределы интегрирования в повторном интеграле в правой части формулы (1,4) находятся так.

1. Область ($\sigma$) проектируется на ось $Ox$. Этим определится отрезок $[a, b]$, на котором в области ($\sigma$) изменяется переменная $x$: $a \leqslant x \leqslant b$. Числа $a$ и $b$ $(a < b)$ будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Тем самым пределы интегрирования по $x$ определены.

Чтобы найти пределы интегрирования по $y$ во внутреннем интеграле, пометим на контуре ($L$), ограничивающем область ($\sigma$), точки $A$ и $B$ с абсциссами $a$ и $b$. Эти две точки разделят контур ($L$) на нижнюю и верхнюю части, уравнения которых следует разрешить относительно переменной $y$.

Пусть эти части определяются соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, причем, предполагается, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[a, b]$ оси $Ox$ любую точку $x$, проведем через нее прямую, параллельную оси $Oy$, и рассмотрим ее отрезок $KL$, содержащийся в области ($\sigma$). Теперь очевидно, что переменная $y$ изменяется в области ($\sigma$) от ее значения $\varphi_1(x)$ на нижней части контура ($L$) до ее значения $\varphi_2(x)$ на его верхней части: $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$.

Таким образом, нижний и верхний пределы при интегрировании по $y$ во внутреннем интеграле соответственно равны $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной $x$.



Фиг 1,3

*Подчеркнем особо, что во внутреннем интеграле при интегрировании по $y$ пределы интегрирования в общем случае есть функции переменной $x$, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла считалась постоянной.*

2. Если область ($\sigma$) ограничена кривой, которую любая прямая, параллельная оси $Ox$, пересекает не более чем в двух точках (фиг. 1,3), то двойной интеграл, распространенный на эту область, может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{1,5}$$

Здесь также пределы во внутреннем интеграле — не числа, как в формуле (1, 2), а функции переменной $y$.

Чтобы найти пределы во внешнем интеграле, область ($\sigma$) проектируется на ось $Oy$. Так определяется отрезок $[c, d]$, на котором в области ($\sigma$) изменяется переменная $y$: $c \leqslant y \leqslant d$. Числа $c$ и $d$ и будут соответственно нижним и верхним пределами во внешнем интеграле. Внутренний интеграл вычисляется по переменной $x$.

В подынтегральной функции $f(x, y)$ надо $y$ рассматривать как величину постоянную. Чтобы определить пределы изменения переменной $x$ в области ($\sigma$), пометим на контуре ($L$) точки $C$ и $D$ с ординатами $c$ и $d$. Эти две точки разделят контур ($L$) на левую и правую части, *уравнения которых следует разрешить относительно переменной* $x$.

Пусть этими уравнениями будут соответственно $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[c, d]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение. Зафиксируем на отрезке $[c, d]$ оси $Oy$ любую точку $y$, проведем через нее прямую, параллельную оси $Ox$, и рассмотрим ее отрезок $MN$, содержащийся в области ($\sigma$).

Переменная $x$ будет изменяться в области ($\sigma$) от ее значения $\psi_1(y)$ на левой части контура ($L$) до ее значения $\psi_2(y)$ на его правой части: $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$.

Таким образом, верхний и нижний пределы во внутреннем интеграле соответственно равны $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$. Подчеркнем, что здесь во внутреннем интеграле при интегрировании по $x$ пределы интегрирования в общем случае есть функции переменной $y$, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл и которая при вычислении внутреннего интеграла остается постоянной. После вычисления внутреннего интеграла получится функция переменной $y$. Следует обратить внимание на то, что во внешнем интеграле в обоих случаях пределы интегрирования — величины постоянные и в результате вычисления двойного интеграла должна получиться постоянная величина.

**Вычисление повторного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла.**

*Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области ($\sigma$), то значение повторного интеграла, распространенного на эту область, не зависит от порядка интегрирования по различным аргументам.*

Перед решением задач рекомендуется повторить уравнения поверхностей второго порядка. Особое внимание следует обратить на уравнение сферы, параболоида, конуса и цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными координатным осям.

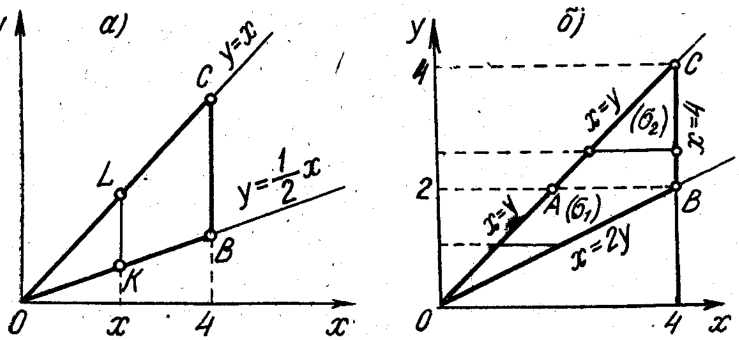
Свойства определенных интегралов распространяются и на двойные интегралы. В формуле (1,4) и (1,5) для вычисления двойного интеграла предполагалось, что кривая, ограничивающая область интегрирования ($\sigma$), пересекается всякой прямой, параллельной одной из координатных осей, не больше чем в двух точках. Если это условие не выполнено, то область ($\sigma$) следует разбить на части так, чтобы в каждой из частей это условие выполнялось.

### Вычисление двойного интеграла последовательными однократными интегрированиями. Изменение порядка интегрирования

**Задача 1,1.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy,$$

если область ($\sigma$) ограничена линиями $y = \frac{1}{2}x$; $y = x$; $x = 4$. Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.




К задаче 1,1

**Решение.** Прежде всего следует представить на чертеже область ($\sigma$). Контур этой области пересекается всякой прямой, параллельной оси $Oy$ в двух точках. Воспользуемся сперва формулой (1,4)

$$\iint\limits_{(\sigma)} (x^3 + y^3)\, dx\, dy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} (x^3 + y^3)\, dy.$$

Здесь в повторном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной $y$, а внешнее — по $x$.

Пределы интегрирования в повторном интеграле получены так: область ($\sigma$) была спроектирована на ось $Ox$. Получился отрезок $[0; 4]$. Этим были определены нижний предел 0 и верхний предел 4 изменения переменной $x$ во внешнем интеграле. Затем на отрезке $[0; 4]$ оси $Ox$ была выбрана произвольная точка $x$, через которую проведена прямая, параллельная оси $Oy$, и на ней рассмотрен отрезок $KL$, содержащийся в области ($\sigma$).

Область $(\sigma)$ ограничена снизу прямой $y=\frac{1}{2}x$, сверху — прямой $y=x$. Переменная $y$ изменяется в области $(\sigma)$ от ее значения $\frac{1}{2}x$ на нижней части контура $OBC$ до ее значения $x$ на верхней части этого контура. (Уравнения линий, ограничивающих область $(\sigma)$, должны быть разрешены относительно той переменной, по которой вычисляется внутренний интеграл).

Вычисления следует начинать с внутреннего интеграла

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{x}(x^3+y^3)\,dy,$$

в котором величина $x$ должна рассматриваться как постоянная.

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{x}(x^3+y^3)\,dy=x^3y+\frac{y^4}{4}\Big|_{\frac{1}{2}x}^{x}=x^3\left(x-\frac{1}{2}x\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left(x^4-\frac{1}{16}x^4\right)=\frac{47}{64}x^4.$$

Заметьте, что получилась функция переменной $x$, как это и следовало ожидать, на основании пояснений на стр. 6.

Вычисляем теперь внешний интеграл:

$$\int_0^4\frac{47}{64}x^4dx=\frac{47}{64}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^4=\frac{47}{64}\cdot\frac{4^5}{5}=\frac{752}{5}.$$

Вычислим теперь тот же двойной интеграл, изменив порядок интегрирования: внутреннее интегрирование будем производить по переменной $x$, а внешнее — по переменной $y$.

Из чертежа видно, что левая часть контура области $(\sigma)$ — одна линия, а именно $y=x$, а его правая часть состоит из двух линий $OB$ и $BC$, определяемых разными уравнениями: $(OB)\,y=$ $=\frac{1}{2}x$; $(BC)\,x=4$. В этом случае область $(\sigma)$ следует разбить на части так, чтобы каждая из них справа ограничивалась тоже одной линией, иначе говоря, линией, определяемой одним аналитическим выражением. Такими частями будут $(\sigma_1)$ — $OAB$ и $(\sigma_2)$ — $ABC$. Область $(\sigma)$ является суммой областей $(\sigma_1)$ и $(\sigma_2)$.

Интеграл представляется как сумма интегралов

$$\iint\limits_{(\sigma)}(x^3+y^3)\,dx\,dy=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x^3+y^3)\,dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_2)}(x^3+y^3)\,dx\,dy.$$

Так как теперь внутренние интегралы будут вычисляться по переменной $x$, то уравнения линий, ограничивающих каждую из областей $(\sigma_1)$ и $(\sigma_2)$, должны быть решены относительно этой переменной. Решая уравнения линий, ограничивающих области $(\sigma_1)$ и $(\sigma_2)$ относительно переменной $x$, получим, что область $(\sigma_1)$ ограничена линиями: 1) $x=y$; 2) $x=2y$; 3) $y=2$. Точка $B$ имеет координаты (4,2). Область $(\sigma_2)$ ограничена линиями:

$$1)\ y=2;\quad 2)\ x=y;\quad 3)\ x=4.$$

Спроектировав каждую из областей интегрирования $(\sigma_1)$ и $(\sigma_2)$ на ось $Oy$, получим пределы внешних интегралов: в первом интеграле — 0 и 2, во втором интеграле 2 и 4. Выбрав на отрезке [0; 2] произвольную точку $y$ и проведя через нее прямую, параллельную оси $Ox$, замечаем, что в области $(\sigma_1)$ переменная $x$ изменяется от ее значения, равного $y$ на левой части контура (т. е. на $OA$), до ее значения $2y$ на его правой части (т. е. на $OB$).

Таким образом, при интегрировании по области $(\sigma_1)$ во внутреннем интеграле пределами будут $y$ и $2y$. Поэтому

$$I_1=\iint\limits_{(\sigma_1)}(x^3+y^3)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{2y}(x^3+y^3)\,dx.$$

При вычислении внутреннего интеграла переменная $y$ должна считаться величиной постоянной (а пределы интегрирования есть функции переменной $y$, т. е. опять-таки той переменной, которая при интегрировании остается величиной постоянной).

Вычисления начинаем с внутреннего интеграла:

$$\int\limits_y^{2y}(x^3+y^3)\,dx=\frac{x^4}{4}+y^3x\Big|_y^{2y}=\frac{1}{4}[(2y)^4-y^4]+$$
$$+y^3(2y-y)=\frac{19}{4}y^4.$$

Следует заметить, что получилась функция переменной $y$, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл. Подставляем полученное выражение под знак внешнего интеграла:

$$I_1=\int\limits_0^2\frac{19}{4}y^4\,dy=\frac{19}{4}\cdot\frac{y^5}{5}\Big|_0^2=\frac{152}{5}.$$

Пределы внешнего интеграла при интегрировании по области $(\sigma_2)$ уже были определены: переменная $y$ в этой области изменяется на отрезке [2; 4], т. е. от 2 до 4. Чтобы определить, в каких пределах в этой области изменяется переменная $x$, возьмем на отрезке [2; 4] произвольную точку, проведем через нее прямую, параллельную оси $Ox$, и заметим, что на левой части $AC$ контура области $(\sigma_2)$ $x$ имеет значение, равное $y$, а на $BC$ — правой его части $x=4$.

Таким образом, в области $(\sigma_2)$ пределами интегрирования по $x$ будут $y$ и 4, а

$$I_2 = \iint\limits_{(\sigma_2)} (x^3 + y^3)\,dx\,dy = \int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 (x^3 + y^3)\,dx.$$

Внутренний интеграл (в нем $y$ — величина постоянная!)

$$\int\limits_y^4 (x^3 + y^3)\,dx = \frac{x^4}{4} + y^3 x\Big|_y^4 = \frac{1}{4}(4^4 - y^4) + y^3(4 - y) =$$
$$= 64 + 4y^3 - \frac{5}{4}y^4.$$

Заметьте! Получилась функция переменной $y$, т. е. той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл. Подставляем полученное выражение под знак внешнего интеграла:

$$I_2 = \int\limits_2^4 \left(64 + 4y^3 - \frac{5}{4}y^4\right) dy = 64y + y^4 - \frac{1}{4}y^5\Big|_2^4 = 120.$$

Искомый интеграл равен сумме

$$I_1 + I_2 = \frac{152}{5} + 120 = \frac{752}{5}.$$

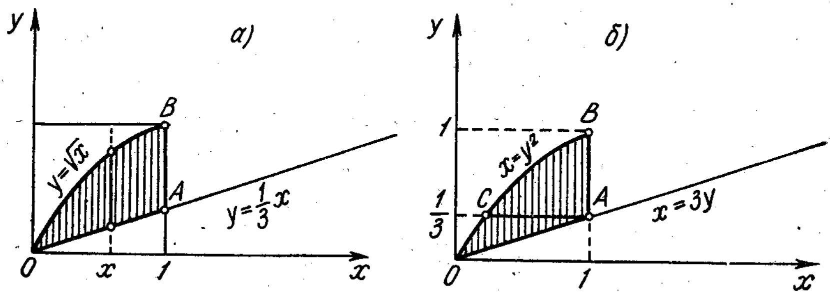
Поскольку подынтегральная функция $x^3 + y^3$ непрерывна, то результаты вычислений, как и следовало ожидать, совпали: они не зависят от порядка интегрирования.

Из этого примера видно, что выбор порядка интегрирования не безразличен. Выбрав рационально порядок интегрирования, можно сократить вычисления.

После столь подробного решения этой задачи предложим несколько задач для самостоятельного решения.

**Задача 1,2** (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{y^3}{x^2}\,dx\,dy.$$




К задаче 1,2

Область ($\sigma$) ограничена линиями: $y=\frac{1}{3}x$; $y=\sqrt{x}$; $x=1$.

Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования.

Указание. 1) $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{x^2}\,dy=\frac{121}{486}$.

Промежуточные вычисления:

$$\int\limits_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{x^2}\,dy=\frac{y^4}{4x^2}\Bigg|_{\frac{1}{3}x}^{\sqrt{x}}=\frac{1}{4}-\frac{1}{324}x^2.$$

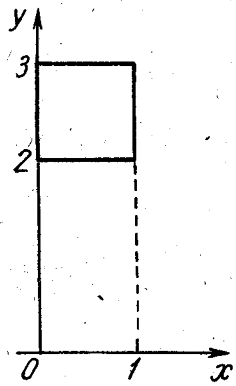
2) Если изменить порядок интегрирования и внутренний интеграл вычислить по переменной $x$, а внешний интеграл — по $y$, то область интегрирования надо разбить на две: ($\sigma_1$) — $OCA$ и ($\sigma_2$) — $CAB$. Это вызвано тем, что правая часть контура $OAB$, ограничивающего область ($\sigma$), состоит из двух линий $OA$ и $AB$, определяемых разными уравнениями: ($OA$) $x=3y$; ($AB$) $x=1$ (уравнения линий, ограничивающих контур, должны быть в этом случае решены относительно переменной $x$, т. е. той переменной, по которой ведется интегрирование):

$$I=\underbrace{\int\limits_0^{\frac{1}{3}}dy\int\limits_{y^3}^{3y}\frac{y^3}{x^2}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1}dy\int\limits_{y^3}^{1}\frac{y^3}{x^2}\,dx}_{I_2};$$

$$\int\limits_{y^3}^{3y}\frac{y^3}{x^2}\,dy=y-\frac{1}{3}y^2;\quad I_1=\frac{25}{486};$$

$$\int\limits_{y^3}^{1}\frac{y^3}{x^2}\,dx=y-y^3;\quad I_2=\frac{16}{81};$$

$$I=I_1+I_2=\frac{121}{486}.$$



К задаче 1,3

**Задача 1,3** (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)}(6xy^2-12x^2y)\,dx\,dy.$$

В повторном интеграле внутренний интеграл вычислить по $x$, а внешний — по $y$. Произвести вычисление того же интеграла, изменив порядок интегрирования. Область ($\sigma$) — квадрат со сторонами: $x=0$; $x=1$; $y=2$; $y=3$.

Указание. В первом случае внутренний интеграл

$$\int_0^1 (6xy^2 - 12x^2y)\,dx = 3y^2 - 4y$$

(при интегрировании по переменной $x$ получилась функция переменной $y$).

Во втором случае внутренний интеграл

$$\int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)\,dy = 38x - 30x^2$$

(при интегрировании по переменной $y$ получилась функция $x$).

**Ответ.** 9.

**Задача 1,4** (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

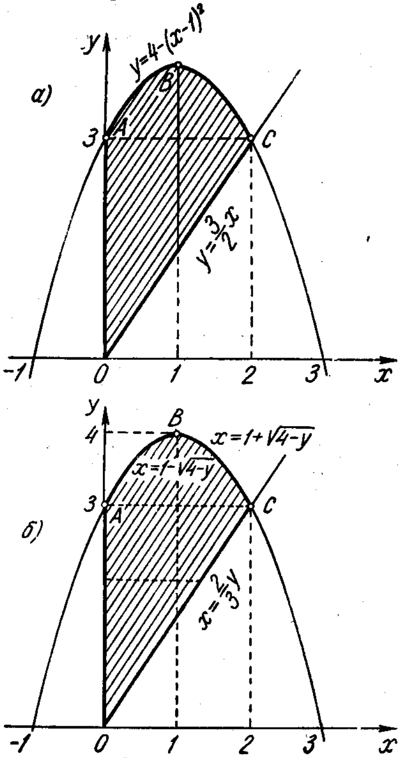
$$\iint_{(\sigma)} (x + y)\,dx\,dy.$$

В повторном интеграле внутреннее интегрирование выполнить по $y$, а внешнее — по $x$. Этот же интеграл вычислить, изменив порядок интегрирования. Область $(\sigma)$ ограничена линиями: $x = 0$; $y = \frac{3}{2}x\,(x > 0)$; $y = 4 - (x - 1)^2$.

Указание. При вычислении внутренних интегралов уравнения линий, ограничивающих область $(\sigma)$, должны быть решены относительно переменной $y$, т. е. той, по которой вычисляется внешний интеграл. Разрешая уравнение параболы $y = 4 - (x - 1)^2$ относительно $x$, получаем $x = 1 \pm \sqrt{4 - y}$, причем линия $AB$ определяется уравнением $x = 1 - \sqrt{4 - y}$, а линия $BC$ уравнением $x = 1 + \sqrt{4 - y}$.

**Ответ.**

$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x}^{4-(x-1)^2} (x + y)\,dy = \frac{208}{15}.$$



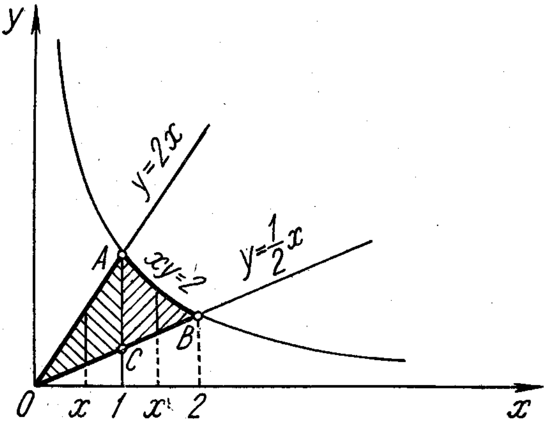
К задаче 1,4

После изменения порядка интегрирования

$$I = \int_0^3 dy \int_0^{\frac{2}{3}y} (x+y)\,dx + \int_3^4 dy \int_{1-\sqrt{4-y}}^{1+\sqrt{4-y}} (x+y)\,dx.$$

**Задача 1,5** (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(\sigma)} (x^2 + y)\,dx\,dy.$$




К задаче 1,5

В повторном интеграле выполнить внутреннее интегрирование по $y$, а внешнее — по $x$. Произвести вычисления, изменив порядок интегрирования. Область $(\sigma)$ ограничена линиями

$$y = \frac{1}{2}x;\; y = 2x;\; xy = 2\;\; (x \geqslant 0).$$

Указание. Область $(\sigma)$ ограничена снизу одной линией $y = \frac{1}{2}x$, а сверху — двумя линиями — $OA$ и $AB$, имеющими уравнения $y = 2x$ $(OA)$ и $y = \frac{2}{x}$ $(AB)$. Область $(\sigma)$ следует представить как сумму двух областей $OAC$ и $CAB$. Определить абсциссы точек пересечения прямых $OA$ и $OB$ с гиперболой. Они равны 1 и 2. Спроектировать каждую из областей на ось $Ox$.

После изменения порядка интегрирования для определения пределов во внутренних интегралах уравнения линий разрешить относительно переменной $x$.

**Ответ.**

$$I=\int_0^1 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{2x}(x^2+y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}}(x^2+y)\,dy=4\frac{1}{3}.$$

После изменения порядка интегрирования

$$I=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2y}(x^2+y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}}(x^2+y)\,dx.$$

Три следующие задачи показывают, что изменение порядка интегрирования может повлечь за собой изменение величины двойного интеграла.

**Задача 1,6** (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy.$$

Показать, что изменение порядка интегрирования приводит к различным результатам, и объяснить причину этого. Область $(\sigma)$ — квадрат со сторонами: $x=0$; $x=1$; $y=0$; $y=1$.

**Ответ.**

$$I=\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\frac{1}{2};$$

внутренний интеграл

$$\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy=\frac{1}{(1+x)^2}.$$

С другой стороны,

$$I=\int_0^1 dy\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\frac{1}{2};$$

внутренний интеграл

$$\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx=-\frac{1}{(1+y)^2}.$$

Различные результаты вычислений объясняются тем, что в точке $(0,0)$ подынтегральная функция не является непрерывной.

**Задача 1,7** (для самостоятельного решения). Вычислить двойной интеграл

$$I = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx\, dy.$$

Область $(\sigma)$ — квадрат, ограниченный координатными осями и прямыми $x = 1$ и $y = 1$. В повторном интеграле первый раз внутреннее интегрирование выполнить по $x$, а потом изменить порядок интегрирования. Объяснить причину различных результатов вычислений.

**Ответ.**

1) $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dx = -\frac{1}{e}$;

2) $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3}\right) e^{-\frac{x}{y^2}}\, dy = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}$.

**Задача 1,8** (для самостоятельного решения). Показать, что двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy$$

равен $\frac{\pi}{4}$ или $-\frac{\pi}{4}$ в зависимости от порядка интегрирования. Объяснить причину этого. Область $(\sigma)$ — квадрат, ограниченный линиями $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 1$.

## II. Двойной интеграл в полярных координатах

В полярных координатах дифференциал площади

$$d\sigma = r\, dr\, d\varphi,$$

а двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} f[r\cos\varphi,\ r\sin\varphi]\, r\, dr\, d\varphi.$$

Область $(\sigma)$ должна быть отнесена к полярной системе координат. Если она ограничена двумя полупрямыми с уравнениями $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и линиями, определяемыми уравнениями $r = u_1(\varphi)$ и $r = u_2(\varphi)$, а функции $u_1(\varphi)$ и $u_2(\varphi)$ в промежутке $[\alpha, \beta]$ непрерывны, однозначны и сохраняют аналитическое выражение, то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{(\sigma)} F(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{u_1(\varphi)}^{u_2(\varphi)} F(r, \varphi)\, r\, dr. \qquad (1,6)$$

Интеграл в правой части этой формулы — *повторный интеграл* (иначе *двукратный*). Во внутреннем интеграле $\varphi$ следует рассматривать как величину постоянную (фиг. 1,4).

Напомним уравнения окружности в полярной системе координат, с которыми нам часто придется встречаться:

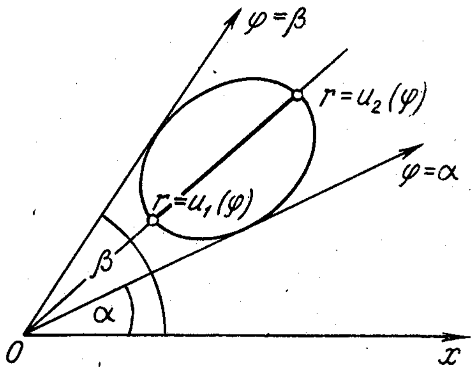
$$r = R; \qquad (1,7)$$

$$r = 2R\cos\varphi; \qquad (1,8)$$

$$r = 2R\sin\varphi. \qquad (1,9)$$

**Задача 1,9.** Вычислить двойной интеграл

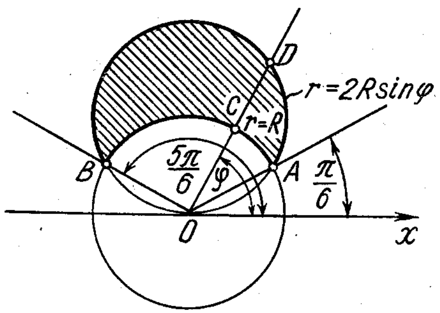
$$\iint\limits_{(\sigma)} r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi,$$




Фиг. 1,4

где область ($\sigma$) ограничена линиями $r = R$ и $r = 2R\sin\varphi$.

**Решение.** Чтобы определить, как изменяется в области ($\sigma$) полярный угол $\varphi$, проведем лучи в точки $A$ и $B$ области ($\sigma$). Решая совместно уравнения линий, ограничивающих область ($\sigma$), найдем значения угла $\varphi$, соответствующие лучам $OA$ и $OB$:




К задаче 1,9

$$\left.\begin{array}{l} r = R \\ r = 2R\sin\varphi \end{array}\right\}.$$

Отсюда

$$2R\sin\varphi = R; \quad \sin\varphi = \frac{1}{2};$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6}; \quad \varphi_2 = \frac{5}{6}\pi.$$

Таким образом, угол $\varphi$ в области ($\sigma$) изменяется от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5}{6}\pi$.

Теперь найдем пределы изменения полярного радиуса в области ($\sigma$). Под произвольным углом $\varphi$, взятым в промежутке $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$, проведем из полюса луч $OD$. В точке $C$ входа этого луча в область ($\sigma$) $r = R$, а в точке $D$ выхода его из области ($\sigma$) $r = 2R\sin\varphi$ и полярный радиус $r$ изменяется в области ($\sigma$) от $R$ до $2R\sin\varphi$. Поэтому нижний и верхний пределы во внутреннем интеграле равны соответственно $r$ и $2R\sin\varphi$.

По формуле (1,6)

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2 \, dr.$$

(Мы вынесли $\sin\varphi$ за знак внутреннего интеграла, так как при вычислении внутреннего интеграла переменная $\varphi$ сохраняет постоянное значение).

Внутренний интеграл

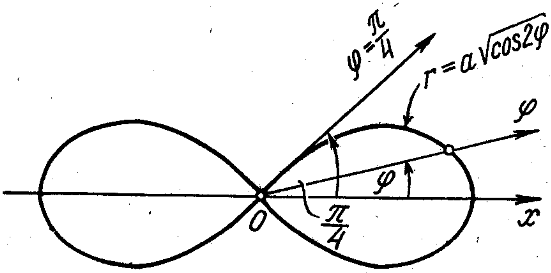
$$\int\limits_{R}^{2R\sin\varphi} r^2 \, dr = \frac{r^3}{3}\Big|_R^{2R\sin\varphi} = \frac{1}{3}(8R^3\sin^3\varphi - R^3) = \frac{1}{3}R^3(8\sin^3\varphi - 1).$$

Внешний интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \frac{1}{3}R^3(8\sin^3\varphi - 1)\sin\varphi \, d\varphi = \frac{1}{3}R^3 \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} (8\sin^4\varphi - \sin\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{12}\left(\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

**Задача 1,10.** Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} r^3 \, dr \, d\varphi$, где ($\sigma$) — область, ограниченная полярной осью и кривой $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ с дополнительным условием: полярный угол $\varphi < \frac{\pi}{2}$.




К задаче 1,10

**Решение.** Кривая $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ — лемниската. Определим, как изменяется угол $\varphi$ в области ($\sigma$). С увеличением угла $\varphi$ $\left(\text{при условии } \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ полярный радиус $r$ уменьшается. При некотором значении $\varphi$ он станет равным нулю. Найдем это значение $\varphi$.

Подставим в уравнение лемнискаты $r=0$ и получим уравнение для определения $\varphi$:

$$0=a^2\cos 2\varphi; \quad \cos 2\varphi=0; \quad 2\varphi=\frac{\pi}{2}; \quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

$\left(\text{Учтено условие, что } \varphi<\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, в области ($\sigma$) полярный угол изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Чтобы узнать, как изменяется в области ($\sigma$) полярный радиус $r$, проведем луч, пересекающий область ($\sigma$) под произвольным углом $\varphi$ $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right)$. Луч входит в область ($\sigma$) в полюсе, т. е. при $r=0$ и выходит из нее в точке $A$ на лемнискате. В этой точке $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Таким образом, переменная $r$ изменяется в области ($\sigma$) от $r=0$ до $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$. По формуле (1,6)

$$\iint\limits_{(\sigma)} r^3\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3\,dr=\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}}=\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi.$$

Внешний интеграл.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}a^4\cos^2 2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{8}a^4\left(\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{32}\pi a^4.$$

Дальнейшие упражнения в вычислении двойных интегралов связаны с решением задач геометрии и механики.

## III. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma, \tag{1,10}$$

где $d\sigma$ — дифференциал площади.

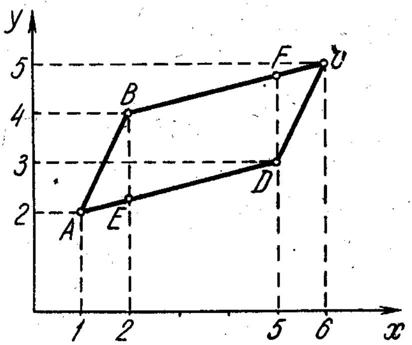
Если фигура отнесена к прямоугольной системе координат, то формула (1,10) перепишется так:

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy. \tag{1,11}$$

Если фигура отнесена к полярной системе координат, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} r\,dr\,d\varphi. \tag{1,12}$$

**Задача 1,11.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $2x-y=0\,(AB)$; $2x-y-7=0\,(DC)$; $x-4y+7=0\,(AD)$; $x-4y+14=0\,(BC)$.




К задаче 1,11

**Решение.** Фигура — параллелограмм. Его вершины находятся в точках: $A(1,2)$; $B(2,4)$; $D(5,3)$; $C(6,5)$.

Область интегрирования $(\sigma)$ разобьем на три части: $(\sigma_1)=ABE$; $(\sigma_2)=BEDF$; $(\sigma_3)=DFC$;

$$S=\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy=\iint\limits_{(\sigma_1)} dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_2)} dx\,dy+\iint\limits_{(\sigma_3)} dx\,dy. \tag{A}$$

Вычислим каждый из этих двойных интегралов.

В области $(\sigma_1)$ переменная $x$ изменяется на отрезке $[1,2]$. Выбрав внутри этого отрезка произвольную точку с абсциссой $x$, проведем прямую, параллельную оси $Oy$. На отрезке этой прямой, находящемся в области $(\sigma_1)$, переменная $y$ изменяется от ее значения на отрезке $AE$ до ее значения на отрезке $AB$. Из уравнения стороны $AD$

$$y=\frac{x+7}{4}. \tag{B}$$

Из уравнения стороны $AB$ $y=2x$. Поэтому

$$\iint\limits_{(\sigma_1)} dx\,dy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{x+7}{4}}^{2x} dy=\frac{7}{8}.$$

В области $(\sigma_2)$ переменная $x$ изменяется на отрезке $[2,5]$. Выберем на нем произвольную точку $x$, проведем через нее прямую, параллельную оси $Oy$. На отрезке этой прямой, содержащемся в области $(\sigma_2)$, переменная $y$ изменяется от ее значения на прямой $AD$ до ее значения на прямой $BC$.

Уравнение прямой $AD$ уже разрешено относительно $y$ [см. формулу (В)], а из уравнения стороны $BC$ следует, что

$$y = \frac{x+14}{4}. \qquad (C)$$

Поэтому

$$\iint\limits_{(\sigma_2)} dx\,dy = \int\limits_2^5 dx \int\limits_{\frac{x+7}{4}}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{21}{4}.$$

В области ($\sigma_3$) переменная $x$ изменяется на отрезке [5,6], а переменная $y$ — от ее значения на прямой $DC$ до ее значения на прямой $BC$. Из уравнения $DC$ $y = 2x - 7$, а из уравнения прямой $BC$ $y = \frac{x+14}{4}$ [см. формулу ($C$)].

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\sigma_3)} dx\,dy = \int\limits_5^6 dx \int\limits_{2x-7}^{\frac{x+14}{4}} dy = \frac{7}{8}.$$

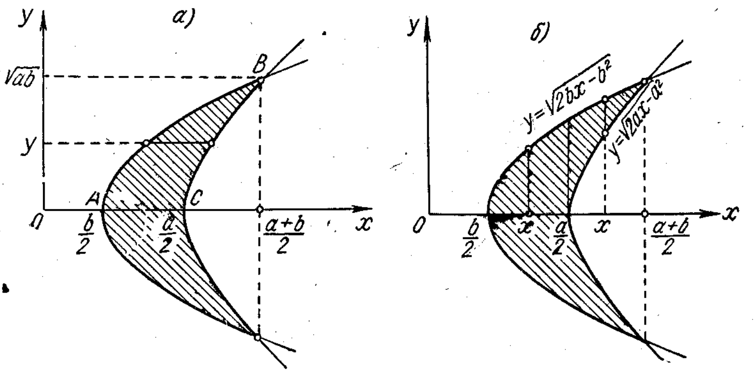
Окончательно из ($A$) получаем, что

$$S = \frac{7}{8} + \frac{21}{4} + \frac{7}{8}; \qquad S = 7 \text{ кв. ед.}$$

**Задача 1,12.** Вычислить площадь, ограниченную линиями

$$x = \frac{y^2+b^2}{2b}; \quad x = \frac{y^2+a^2}{2a},$$

$a$ и $b$ — положительны и $a > b$.




К задаче 1,12

**Решение.** Кривые — параболы. Первое интегрирование выгодно вести по переменной $x$, а второе — по $y$. Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{y^2+b^2}{2b} \\ x &= \frac{y^2+a^2}{2a} \end{aligned}\right\},$$

найдем координаты точки пересечения парабол:

$$x = \frac{a+b}{2}; \quad y = \pm\sqrt{ab}.$$

Следует учесть, что искомая площадь равна удвоенной площади фигуры $ABC$. В области $ABC$ переменная $x$ изменяется от ее значения $x = \frac{y^2+b^2}{2b}$ на параболе $AB$ до значения $x = \frac{y^2+a^2}{2a}$ на параболе $CB$. Переменная же $y$ изменяется от 0 до $\sqrt{ab}$ — ее значения в точке $B$.

Таким образом, по формуле (1,11) с учетом, что искомая площадь равна удвоенной площади $ABC$ и что внутренний интеграл вычисляется по переменной $x$,

$$S = 2\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = 2\int\limits_0^{\sqrt{ab}} dy \int\limits_{\frac{y^2+b^2}{2b}}^{\frac{y^2+a^2}{2a}} dx = 2\int\limits_0^{\sqrt{ab}} \left(\frac{y^2+a^2}{2a} - \frac{y^2+b^2}{2b}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}(a-b)\sqrt{ab} \text{ кв. ед.}$$

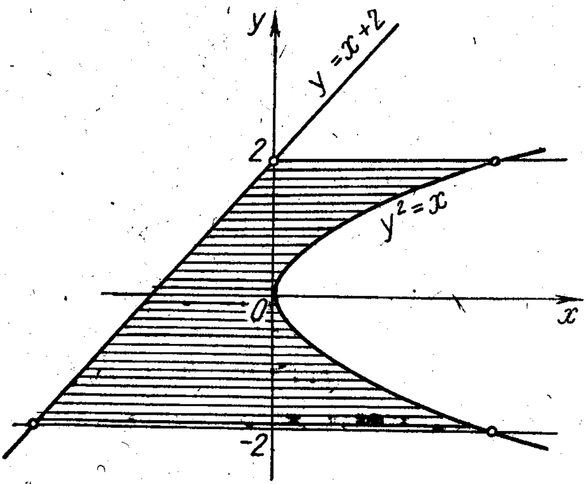
Если изменить порядок интегрирования, вычисляя внутренний интеграл по переменной $y$, а внешний — по переменной $x$, то выкладки усложнятся:

$$S = 2\iint\limits_{(\sigma)} dx\,dy = 2\left[\int\limits_{\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2bx-b^2}} dy + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2bx-b^2}} dy\right]$$

(для определения пределов во внутренних интегралах уравнения кривых разрешены относительно переменной $y$, т. е. той переменной, по которой ведется интегрирование).

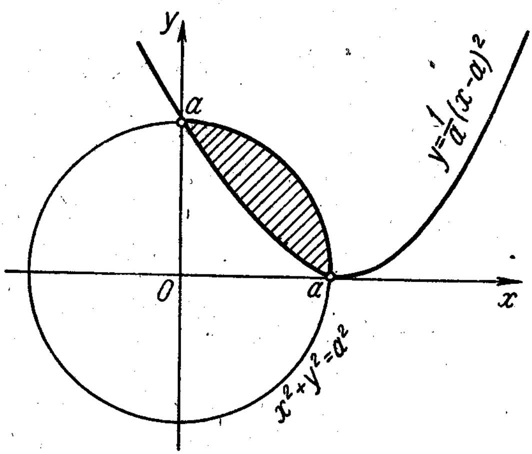
**Задача 1,13** (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2$; $y = x + 2$; $y = 2$; $y^2 = x$

**Ответ.** $\frac{40}{3}$ кв. ед.




К задаче 1,13

**Задача 1,14** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{a}(x - a)^2\ (a > 0)$; $x^2 + y^2 = a^2$.




К задаче 1,14

Указание.

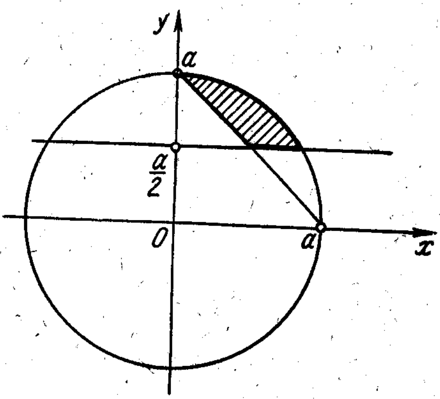
$$S=\iint_{(\sigma)} dx\,dy=\int_0^a dx\int_{\frac{1}{a}(x-a)^2}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

**Ответ.** $S=\frac{a^2}{12}(3\pi-4)$ кв. ед.

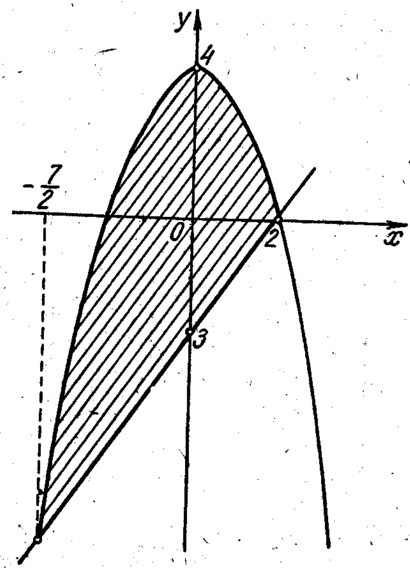
**Задача 1,15** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2+y^2=a^2;\ x+y=a;$$

$$y=\frac{a}{2}\left(a>0;\ x\geqslant 0;\ y\geqslant\frac{a}{2}\right)_0.$$




К задаче 1,15




К задаче 1,16

**Ответ.** $S=\frac{1}{6}\pi a^2-\frac{a^2}{8}(1+\sqrt{3})$ кв. ед.

**Задача 1,16** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $y=4-x^2$; $3x-2y-6=0$.

Указание.

$$S=\int_{-\frac{7}{2}}^{2} dx\int_{\frac{3x-6}{2}}^{4-x^2} dy.$$

**Ответ.**

$$S=\frac{1331}{48}\text{ кв. ед.}$$

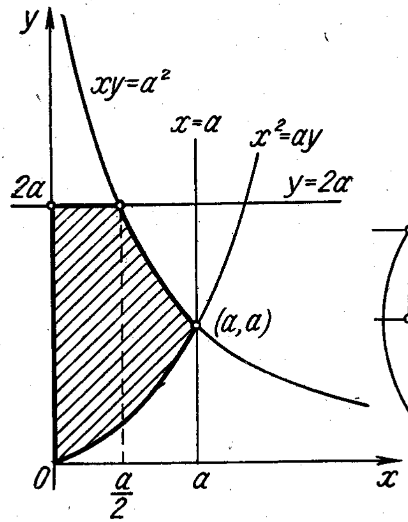
**Задача 1,17** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $xy=a^2$; $x^2=ay$; $y=2a$; $x=0\,(a>0)$.

Указание.

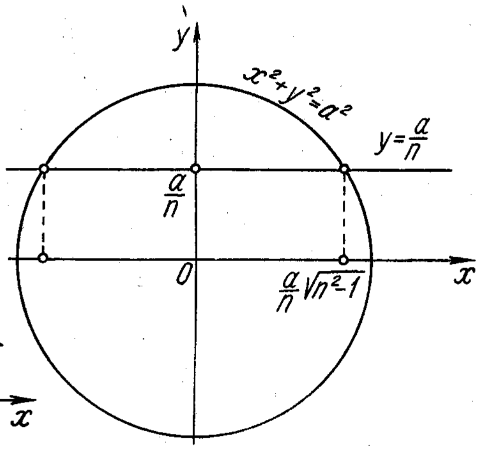
$$S=\int_0^{\frac{a}{2}}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a}dy+\int_{\frac{a}{2}}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{\frac{a^2}{x}}dy.$$

Ответ.

$$S=\left(\frac{23}{24}a^2+a^2\ln 2\right)\text{ кв. ед.}$$




К задаче 1,17




К задаче 1,18

**Задача 1,18** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2+y^2=a^2;\quad y=\frac{a}{n}\,(a>0;\quad n>1).$$

Указание.

$$S=2\int_0^{\frac{a}{n}\sqrt{n^2-1}}dx\int_{\frac{a}{n}}^{\sqrt{a^2-x^2}}dy.$$

Множитель 2 перед интегралом объясняется симметрией площади относительно оси $Oy$.

**Ответ.**

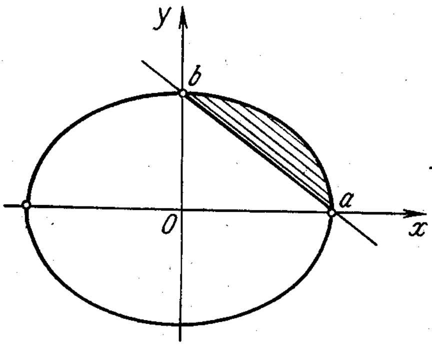
$$S=\frac{a^2}{2}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}-\frac{2}{n^2}\sqrt{n^2-1}\right)\text{ кв. ед.}$$

**Задача 1,19** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

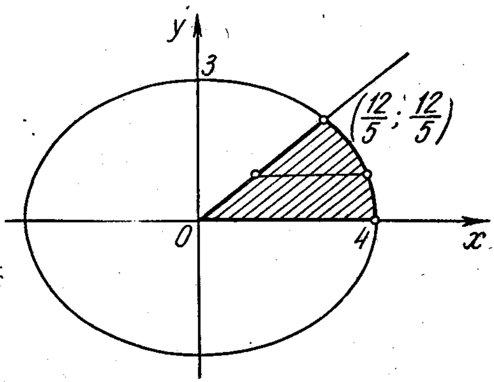
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \quad (a>0;\ b>0).$$

**Ответ.**

$S=\frac{1}{4}ab(\pi-2)$ кв. ед.




К задаче 1,19




К задаче 1,20

**Задача 1,20** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями

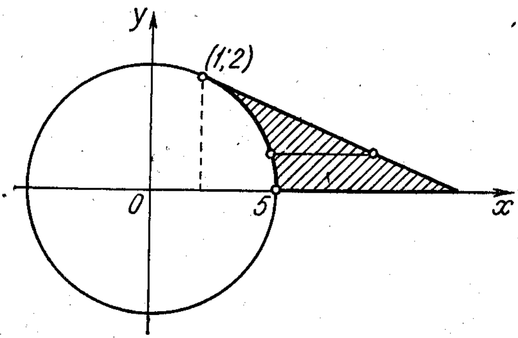
$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1; \quad y=x; \quad y=0. \quad (x\geqslant 0;\ y\geqslant 0).$$

Указание. Выгодно сначала интегрировать по переменной $x$.

**Ответ.**

$$S=6\arcsin\frac{4}{5} \text{ кв. ед.}$$

**Задача 1,21** (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x^2+y^2=5$, касательной к ней, проведенной в точку с координатами (1,2), и осью $Ox$.




К задаче 1,21

Указание. Уравнение касательной $x+2y-5=0$. Выгодно внутренний интеграл вычислить по переменной $x$.

**Ответ.**

$$S=\left(5-\frac{5}{2}\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{кв.ед.}$$

**Задача 1,22.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $(x-a)^2+y^2=a^2$ и $x^2+(y-a)^2=a^2$.

**Решение.** Линии — окружности с центрами в точках $(a, 0)$ и $(0, a)$. Если раскрыть скобки, то уравнения запишутся так:

$$x^2+y^2-2ax=0; \qquad (A)$$

$$x^2+y^2-2ay=0. \qquad (B)$$

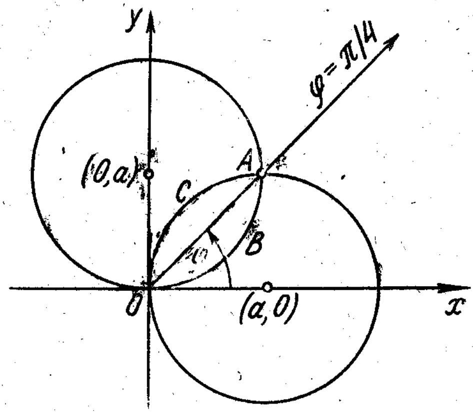
Наличие в уравнении кривой выражения $x^2+y^2$ указывает на возможную целесообразность перехода к полярным координатам (в полярных координатах $x^2+y^2=r^2$; $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$).

Уравнения $(A)$ и $(B)$ в полярных координатах запишутся так:

$$r=2a\cos\varphi; \qquad (I)$$

$$r=2a\sin\varphi. \qquad (II)$$

Прямая $OA$ делит искомую площадь на две части — $OBAO$ и $OACO$. Легко установить, решая совместно уравнения (I) и (II), что точка $A$ лежит на биссектрисе первого координатного угла. Уравнение луча $OA$: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.



К задаче 1,22

В области $OBAO$ полярный радиус $r$ изменяется от 0 до его значения на окружности, определяемой уравнением (II), т. е. до $2a\sin\varphi$, а полярный угол $\varphi$ — от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

В области $OACO$ $r$ изменяется от 0 до его значения на окружности, определяемой уравнением (I), т. е. до $2a\cos\varphi$, а угол $\varphi$ — от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, на основании формулы (1,12) искомая площадь

$$S=\iint\limits_{(OBAO)} r\,dr\,d\varphi+\iint\limits_{(OACO)} r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{2a\sin\varphi} r\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr.$$

Вычислим внутренние интегралы:

$$\int_0^{2a\sin\varphi} r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\sin\varphi}=2a^2\sin^2\varphi; \qquad \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr=\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\cos\varphi}=2a^2\cos^2\varphi.$$

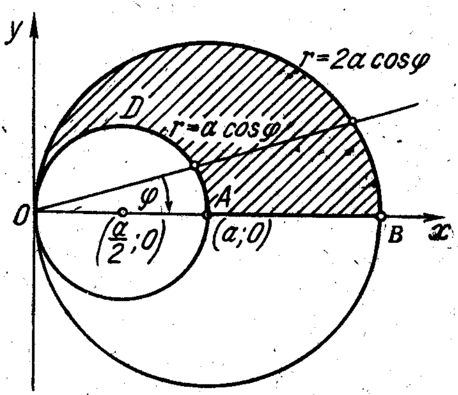
Поэтому площадь

$$S = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\, d\varphi + 2a^2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

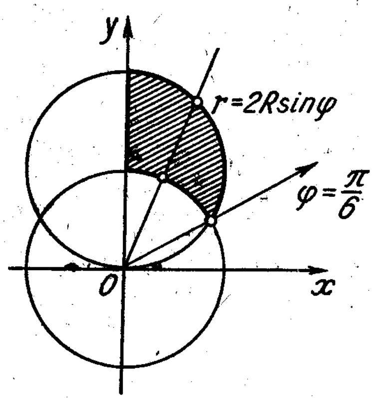
$$= a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) + a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right) \text{ кв. ед.}$$

*Замечание.* Легко было сразу усмотреть, что площади частей $OBAO$ и $OACO$ равны между собой, а потому можно было вычислить площадь по формуле

$$S = 2\iint\limits_{OBAO} r\,dr\,d\varphi.$$




К задаче 1,23




К задаче 1,24

Решение этой задачи в прямоугольных координатах было бы значительно сложнее.

**Задача 1,23** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $x^2+y^2-2ax=0$ и $x^2+y^2-ax=0$.

Указание. Уравнения линий преобразовать к полярным координатам. Искомая площадь равна удвоенной площади $ABCODA$

$$S = 2\iint\limits_{(ABCODA)} r\,dr\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a\cos\varphi}^{2a\cos\varphi} dr.$$

**Ответ.**

$$S = \frac{3}{4}\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

**Задача 1,24** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную линиями $x^2+y^2=R^2$, $x^2+y^2-2Ry=0$ и $x=0$.

Указание. Линии — окружности. Перейти к полярным координатам.

**Ответ.**

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{R}^{2R\sin\varphi}r\,dr=\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{ кв. ед.}$$

## ВТОРОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление объемов и поверхностей при помощи двойного интеграла.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

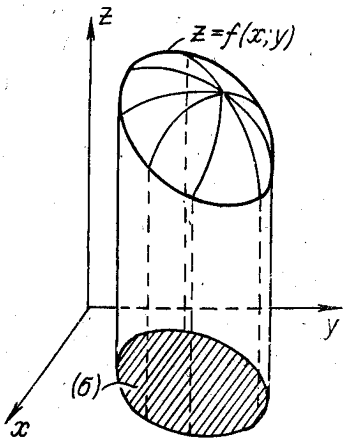
### I. Объем цилиндрического тела

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\,dx\,dy$ равен объему цилиндрического тела, ограниченного с боков цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси $Oz$. Направляющей ее служит контур $(l)$, ограничивающий область интегрирования $(\sigma)$, лежащую в плоскости $xOy$ и являющуюся нижним основанием этого цилиндрического тела. Сверху тело ограничено поверхностью, определяемой уравнением

$$z=f(x,y). \qquad (A)$$

Таким образом, объем такого цилиндрического тела (фиг. 2,1)

$$V=\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (2,1)$$



Фиг. 2,1

В этой формуле $f(x,y)$ есть правая часть уравнения $(A)$, т. е. уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает цилиндрическое тело. Формулу (2,1) удобно записать в виде

$$V=\iint\limits_{(\sigma)}z\,dx\,dy. \qquad (2,2)$$

Если вычисление ведется в полярных координатах, то эта формула имеет вид

$$V=\iint\limits_{(\sigma)}f(r\cos\varphi,\,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (2,3)$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ — непрерывна и однозначна в области $(\sigma)$. (Цилиндрическое тело, о котором идет речь, называется также *криволинейным цилиндром* по аналогии с криволинейной трапецией, а иногда цилиндрическим брусом).

Если область интегрирования $(\sigma)$ находится в плоскости $xOy$, то уравнение поверхности, которое сверху ограничивает цилиндрическое тело, должно быть решено относительно переменной $z$.

## II. Площадь кривой поверхности

Если поверхность определяется уравнением $z = f(x, y)$, то площадь той части поверхности, которая проектируется на плоскость $xOy$ в область $(\sigma)$, вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3}\, dx\, dy. \tag{2.4}$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ непрерывна и однозначна в области $(\sigma)$ и имеет в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Обыкновенно вводят обозначения $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, а потому формулу (2,4) можно записать и так:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xOy})} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{2,5}$$

Для упрощения вычислений иногда выгодно проектировать поверхность, площадь которой вычисляется, не на плоскость $xOy$, а на плоскость $yOz$ или на плоскость $xOz$. Тогда уравнение поверхности следует решить в первом случае относительно переменной $x$, во втором — относительно переменной $y$, а формула (2,4) запишется соответственно так:

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{yoz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz; \tag{2,6}$$

$$S = \iint\limits_{(\sigma_{xoz})} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dz. \tag{2,7}$$

Для применения формул (2,1) — (2,6) следует прежде всего проверить, является ли цилиндрическим тело, объем или поверхность которого вычисляется, какая поверхность ограничивает его сверху, знать ее уравнение, а также установить область $(\sigma)$, на которую распространяется интегрирование, вычертить эту область на отдельном чертеже и найти уравнение линии $(l)$ — контура области $(\sigma)$. Следует иметь в виду, что в частном случае образующие боковой цилиндрической поверхности могут быть равны нулю. Это имеет место, например, в задаче 2,3.

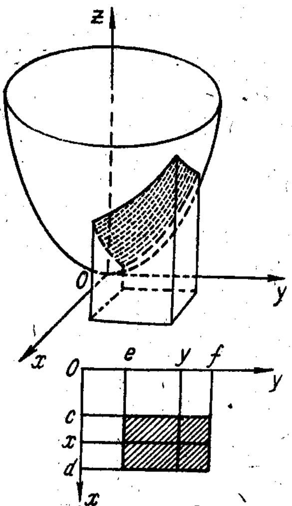
## 1. Вычисление объема тел

**Задача 2,1.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; 2) $x = c$ 3) $x = d$; $(c < d)$ 4) $y = e$ 5) $y = f$; $(e < f)$ 6) $z = 0$.

**Решение.** Поверхностями, ограничивающими тело, являются: 1) эллиптический параболоид; 2) и 3) — плоскости, параллельные плоскости $yOz$; 4) и 5) — плоскости, параллельные плоскости $xOz$ и 6) — плоскость $xOy$ (см. чертеж). Заданное тело цилиндрическое. Объем его вычисляется по формуле (2,2). Подставляя в эту формулу значение $z$ из уравнения поверхности, ограничивающей тело сверху, имеем

$$v = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx\, dy. \qquad (A)$$

На плоскости $xOy$ тело вырезает прямоугольник $(\sigma)$, ограниченный прямыми линиями $x = c$; $x = d$; $y = e$; $y = f$. Первые две параллельны оси $Oy$, вторые две — оси $Ox$. Как известно, в этом случае пределы интегрирования в повторном интеграле — величины постоянные. Порядок интегрирования в данном случае безразличен.



К задаче 2,1

Переходя в $(A)$ к повторному интегралу и выполняя первое интегрирование по переменной $x$, а второе по переменной $y$, будем иметь

$$V = \int_e^f dy \int_c^d \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx. \qquad (B)$$

Внутренний интеграл $\int_c^d \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{xy^2}{b^2}\Big|_c^d = \frac{d^3 - c^3}{3a^2} +$
$+ \frac{y^2(d-c)}{b^2} = (d-c)\left[\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right]$.

Подставляя значение внутреннего интеграла в формулу (B), получаем, вынося $d - c$ за знак интеграла,

$$V = (d-c)\int_e^f \left(\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy =$$

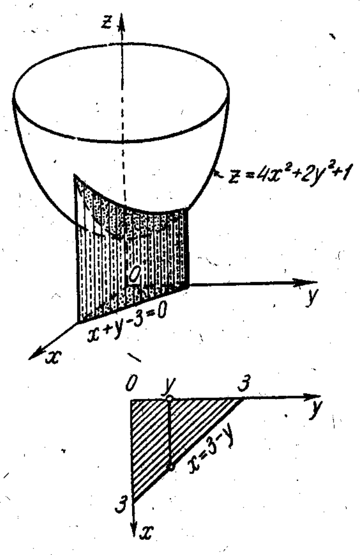
$$= (d-c)\left(\frac{d^2 + cd + c^2}{3a^2}\, y + \frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_e^f =$$

$$= \frac{(d-c)(f-e)}{3} \cdot \left(\frac{c^2 + cd + d^2}{a^2} + \frac{e^2 + ef + f^2}{b^2}\right) \text{ куб. ед.}$$

**Задача 2,2.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$; $x + y - 3 = 0$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

**Решение.** Первая поверхность — эллиптический параболоид, у которого осью симметрии является ось $Oz$. Он пересекает ее в точке (0, 0,1). Над плоскостью $xOy$ параболоид приподнят на одну единицу масштаба, поверхность $x + y - 3 = 0$ — плоскость, параллельная оси $Oz$, а остальные поверхности — координатные плоскости.

На плоскости $xOy$ тело вырезает треугольник, ограниченный координатными осями и прямой $x + y - 3 = 0$.




К задаче 2,2

Объем тела вычисляется по формуле (2,2), в которой область интегрирования ($\sigma$) — указанный треугольник, а $z$ надо заменить его значением из уравнения той поверхности, которая сверху ограничивает тело,

$$V = \iint\limits_{(\sigma)} (4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx\,dy.$$

Преобразуем двойной интеграл в повторный, причем первое интегрирование (внутреннее) будем вести по переменной $x$, а второе (внешнее) — по переменной $y$.

При постоянном $y$ переменная $x$ изменяется от $x = 0$ до $x = 3 - y$ (это значение $x$ найдено из уравнения прямой $x + y - 3 = 0$), а $y$ изменяется от 0 до 3. Поэтому

$$V = \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx \quad \text{(A)}$$

Вычисляем внутренний интеграл $\int\limits_0^{3-y} (4x^2 + 2y^2 + 1)\,dx =$

$$= \frac{4}{3}x^3 + 2xy^2 + x \Big|_0^{3-y} = \frac{4}{3}(3-y)^3 + 2(3-y)y^2 + (3-y) =$$

$$= 39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3}y^3.$$

Подставляя это значение внутреннего интеграла в выражение (А), получаем

$$V = \int\limits_0^3 \left(39 - 37y + 18y^2 - \frac{10}{3}y^3\right) dy =$$

$$= 39y - \frac{37}{2}y^2 + 6y^3 - \frac{10}{12}y^4 \Big|_0^3 =$$

$$= 39 \cdot 3 - \frac{37}{2} \cdot 9 + 6 \cdot 27 - \frac{5}{6} \cdot 81 = 45 \text{ куб. ед.}$$

**Задача 2,3.** Найти объем тела, отсекаемого плоскостью $y=b$ от эллиптического параболоида

$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}.$$

**Решение.** Четверть тела, лежащую в первом октанте, можно рассматривать как цилиндрическое тело с образующими, равными нулю. Уравнение поверхности, ограничивающей тело сверху, решим относительно $z$ и вычислим объем четверти тела, лежащего в первом октанте. Из уравнения поверхности параболоида $z=\frac{c}{a}\sqrt{a^2y-x^2}$ (перед корнем удержан знак плюс, так как в первом октанте $z\geqslant 0$).

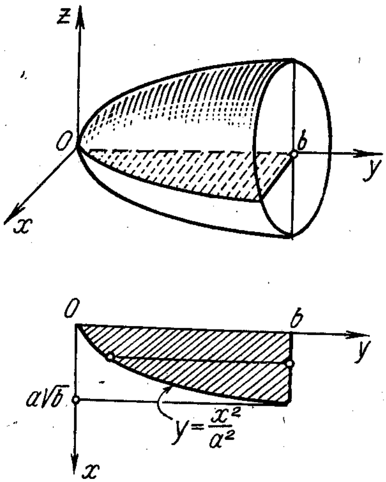
На плоскости $xOy$ тело вырезает параболу, уравнение которой $y=\frac{x^2}{a^2}$ получим, решив совместно уравнения параболоида и плоскости $xOy$

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\\ z&=0\end{aligned}\right\};$$

$$\frac{V}{4}=\frac{c}{a}\int\limits_0^{a\sqrt{b}}dx\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}}^{b}\sqrt{a^2y-x^2}\,dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{\frac{x^2}{a^2}}^{b}\sqrt{a^2y-x^2}\,dy=\frac{2}{3a^2}(a^2b-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$



К задаче 2,3

Поэтому

$$\frac{V}{4}=\frac{2c}{3a^3}\int\limits_0^{a\sqrt{b}}(a^2b-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Здесь удобна подстановка $x=a\sqrt{b}\sin t$. Новыми пределами интегрирования будут 0 и $\frac{\pi}{2}$, а $\frac{V}{4}=\frac{2}{3}ab^2c\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt.$

Интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{3!!}{4!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

**Ответ.**

$$V=\frac{\pi ab^2c}{2}\text{ куб. ед.}$$

Если переменить порядок интегрирования, то

$$\frac{V}{4}=\frac{c}{a}\int_0^b dy\int_0^{a\sqrt{y}}\sqrt{a^2y-x^2}\,dx.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{a\sqrt{y}}\sqrt{a^2y-x^2}\,dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2y-x^2}+\frac{a^2y}{2}\arcsin\frac{x}{a\sqrt{y}}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{y}}=$$

$$=\frac{a^2y}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Задачу можно решить, и не прибегая к двойному интегралу. Пересечем тело плоскостью, перпендикулярной оси $Oy$. Сечением является эллипс, определяемый уравнением

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2y}+\frac{z^2}{c^2y}&=1\\ y&=\text{const}\end{aligned}\right\},$$

которое получается из уравнения параболоида, если обе его части разделить на $y$. Полуоси этого эллипса равны: $a\sqrt{y}$ и $c\sqrt{y}$, а его площадь $S=\pi acy$.

Зная площадь поперечного сечения, объем тела найдем по формуле

$$V=\int_a^b S(y)\,dy.$$

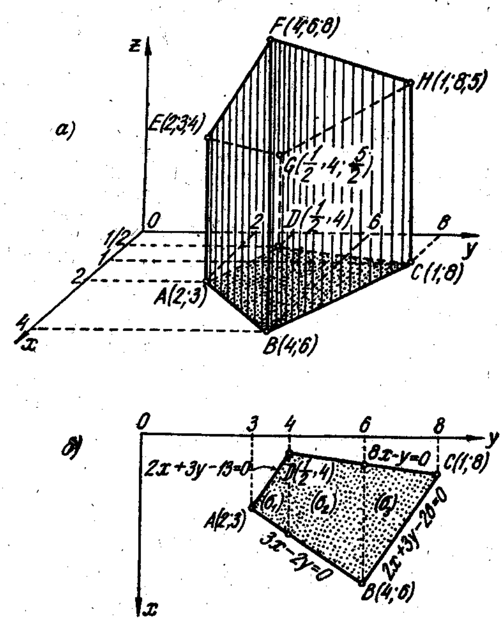
В нашем случае

$$V=\int_0^b \pi acy\,dy=\pi ac\int_0^b y\,dy=\frac{\pi ab^2c}{2}\text{ куб. ед.}$$

**Задача 2,4** (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $3x-2y=0$; 2) $8x-y=0$; 3) $2x+3y-13=0$; 4) $2x+3y-26=0$; 5) $17x+6y-13z=0$; 6) $z=0$.

Указание. Тело рассмотреть как цилиндрическое. Сверху оно ограничено поверхностью $17x + 6y - 13z = 0$. Ее уравнение следует решить относительно $z : z = \frac{1}{13}(17x + 6y)$ и воспользоваться формулой (2,2). Объем

$$V = \frac{1}{13}\iint\limits_{(\sigma)} (17x + 6y)\, dx\, dy.$$




К задаче 2,4

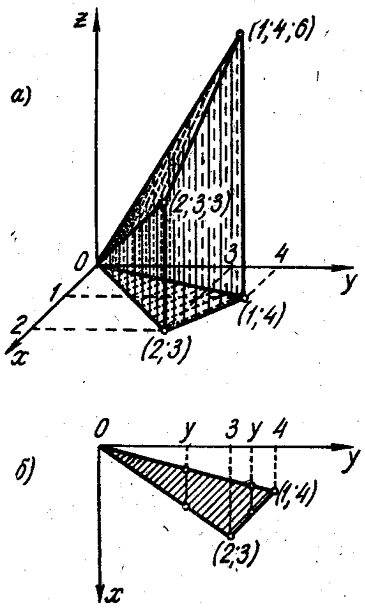
Область интегрирования представить как сумму трех областей: $(\sigma_1) + (\sigma_2) + (\sigma_3)$ (см. чертёж). Внутренние интегралы вычислять по переменной $x$

$$V = \frac{1}{13}\left[\int\limits_3^4 dy \int\limits_{\frac{13-3y}{2}}^{\frac{2}{3}y} (17x + 6y)\, dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_{\frac{y}{8}}^{\frac{2}{3}y} (17x + 6y)\, dx + \right.$$

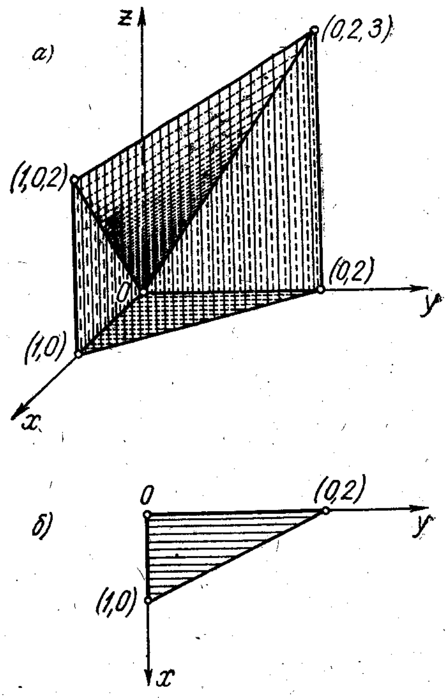
$$\left. + \int\limits_6^8 dy \int\limits_{\frac{y}{8}}^{\frac{26-3y}{2}} (17x + 6y)\, dx\right].$$

Решение задачи потребует большого числа арифметических выкладок. Первый интеграл в скобках равен $\frac{11\,999}{216}$. Второй интеграл в скобках равен $\frac{150\,917}{432}$. Третий интеграл в скобках равен $\frac{11\,323}{48}$.

**О т в е т.** $V = 49\frac{7}{24}$ куб. ед.




К задаче 2,5




К задаче 2,6

**Задача 2,5** (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $6x - 9y + 5z = 0$; 2) $3x - 2y = 0$; 3) $4x - y = 0$; 4) $x + y - 5 = 0$; 5) $z = 0$.

**О т в е т.** $x = 7{,}5$ куб. ед.

**Задача 2,6** (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $2x + y - 2 = 0$; $4x + 3y - 2z = 0$ и координатными плоскостями.

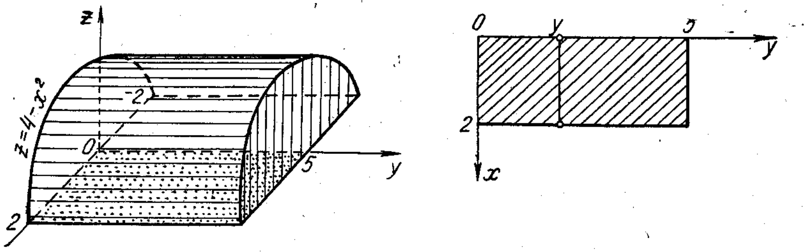
**О т в е т.** $V = \frac{5}{3}$ куб. ед.

**Задача 2,7** (для самостоятельного решения). Определить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = 4 - x^2$ 2) $y = 5$ 3) $y = 0$ 4) $z = 0$.

У к а з а н и е. В формулу (2,2) подставить $z$ из уравнения поверхности, ограничивающей сверху объем. Эта поверхность —

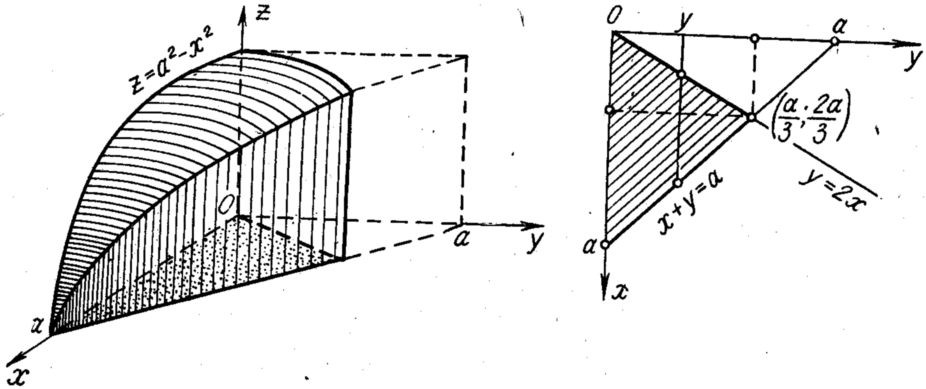
параболический цилиндр с образующими, параллельными оси $Oy$: $z = 4 - x^2$. Учесть симметрию тела относительно плоскости $yOz$.

**Ответ.** $V = 2\int\limits_0^5 dy \int\limits_0^2 (4 - x^2)\,dx$; $V = 53\frac{1}{3}$ куб. ед.




К задаче 2,7

**Задача 2,8** (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $z = a^2 - x^2$; 2) $x + y = a$; 3) $y = 2x$; 4) $z = 0$; 5) $y = 0$.




К задаче 2,8

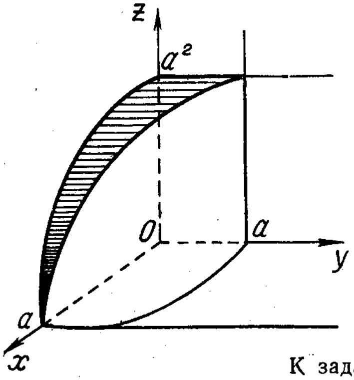
Указание. Первая поверхность — параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси $Oy$. Эта поверхность ограничивает сверху тело, объем которого вычисляется. В формуле (2,2) вместо $z$ подставить $a^2 - x^2$.

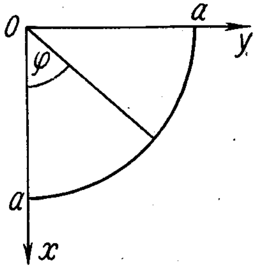
$$V = \int\limits_0^{\frac{2}{3}a} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{a-y} (a^2 - x^2)\,dx.$$

**Ответ.** $V = \frac{41}{162}a^4$ куб. ед.

**Задача 2,8а** (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и поверхностями: $z = a^2 - x^2$; $x^2 + y^2 = a^2$.

Указание. Первая поверхность — параболический цилиндр, образующие которого параллельны оси $Oy$, а направляющей является парабола $z = a^2 - x^2$, лежащая в плоскости $xOz$.



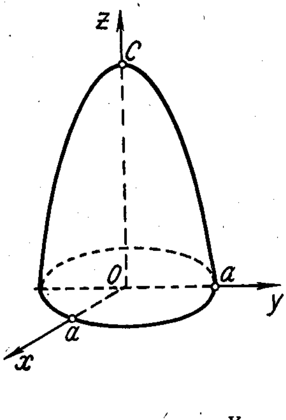

К задаче 2,8а

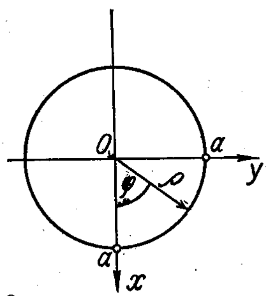
Вторая поверхность — круговой цилиндр с образующими, параллельными оси $Oz$. Его направляющей является окружность $x^2 + y^2 = a^2$, лежащая в плоскости $xOy$.
Объем

$$V = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (a^2 - x^2)\, dy.$$

**Ответ**. $V = \frac{3}{16}\pi a^4$ куб. ед.

**Задача 2,9** (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $c(x^2 + y^2) + a^2 z = a^2 c$ $(c > 0)$; $z = 0$




К задаче 2,9

казание. Поверхность — параболоид вращения. Наличие …аемого $c(x^2+y^2)$ в левой части уравнения указывает на то, удобно перейти к цилиндрическим координатам. Область интегрирования — круг радиуса $a$. Уравнение поверхности параболоида в цилиндрических координатах

$$c\rho^2 + a^2 z = a^2 c; \quad z = \frac{c}{a^2}(a^2 - \rho^2);$$

$$V = \frac{c}{a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a (a^2 - \rho^2)\,\rho d\rho.$$

**Ответ.** $V = \frac{1}{2}\pi a^2 c$ куб. ед.

Эту же задачу решить в прямоугольных координатах.

**Задача 2,10.** Найти объем тела, ограниченного трехосным эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (A)$$

**Решение.** Для того, чтобы воспользоваться формулой (2,1), надо уравнение поверхности решить относительно переменной $z$. Так как поверхность трехосного эллипсоида симметрична относительно координатных плоскостей, то достаточно вычислить восьмую часть объема, расположенную в первом октанте. Решая уравнение ($A$) относительно $z$ и учитывая, что в первом октанте $z \geqslant 0$, получаем:

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

$$\frac{V}{8} = \iint\limits_{(\sigma)} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy =$$

$$= c\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dy. \qquad (B)$$

При интегрировании по $y$ переменная $x$ считается постоянной. Удобно для сокращения записей обозначить величину $1 - \frac{x^2}{a^2}$ под корнем через $\frac{d^2}{b^2}$, т. е.

$$1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{d^2}{b^2}.$$

Отсюда следует, что $b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = d^2$; $\quad \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = d^2$.

Поэтому верхний предел во внутреннем интеграле $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=d$, а внутренний интеграл

$$I_1 = \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy = \int\limits_0^d \sqrt{\frac{d^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^d \frac{\sqrt{d^2-y^2}}{b}\,dy = \frac{1}{b}\int\limits_0^d \sqrt{d^2-y^2}\,dy = \frac{1}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{d^2-y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{2}\arcsin\frac{y}{d}\right]\Bigg|_0^d = \frac{1}{b}\cdot\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{d}{d} = \frac{d^2}{2b}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4b}d^2.$$

Подставим сюда $d^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ и тогда

$$I_1 = \frac{\pi}{4b}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) = \frac{\pi b}{4a^2}(a^2-x^2).$$

Подставляя это значение $I_1$ в формулу ($B$), получаем

$$\frac{V}{8} = c\int\limits_0^a \frac{\pi b}{4a^2}(a^2-x^2)\,dx = \frac{\pi bc}{4a^2}\int\limits_0^a (a^2-x^2)\,dx = \frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^2x - \frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{\pi bc}{4a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{\pi bc}{4a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \frac{\pi abc}{6}.$$

Итак, $\frac{V}{8} = \frac{\pi abc}{6}$, а $V = \frac{4}{3}\pi abc$ куб. ед.

Если $a=b=c$, элипсоид становится сферой и тогда объем шара $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

## 2. Вычисление площади поверхности

**Задача 2,11.** Вычислить площадь той части поверхности $ay = x^2+z^2$, которая находится в первом октанте и ограничена плоскостью $y=2a$.

**Решение.** Поверхность, площадь которой требуется вычислить, — часть параболоида вращения (ось вращения — $Oy$), находящаяся в первом октанте и ограниченная плоскостью $y=2a$, перпендикулярной оси $Oy$. Мы решим задачу двумя способами. Сначала спроектируем вычисляемую поверхность на плоскость $xOz$, а затем (для сравнения выкладок) — на плоскость $xOy$.

1) Проекцией поверхности на плоскость $xOz$ является четверть круга, ограниченного окружностью, уравнение которой мы получим, исключая $y$ из двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} ay &= x^2+z^2 \\ y &= 2a \end{aligned}\right\},$$

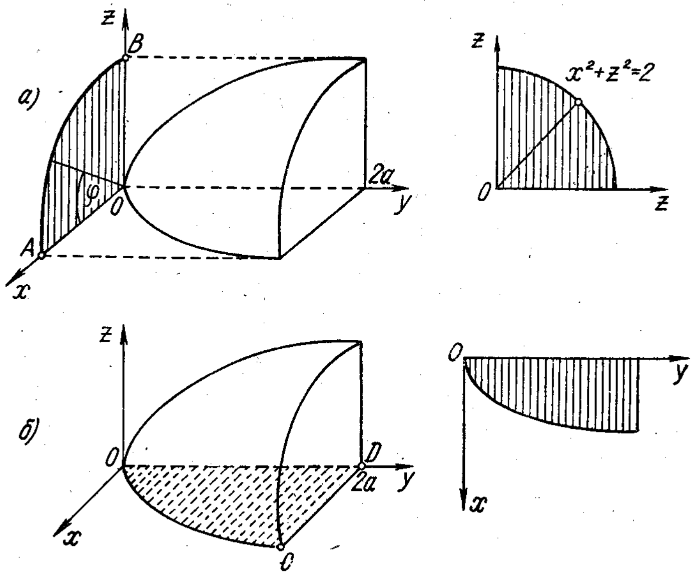
т. е. уравнение этой окружности

$$2a^2 = x^2 + z^2$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= 2a^2 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$

Так как мы проектировали поверхность на плоскость $xOz$, то ее уравнение должно быть решено относительно переменной $y$




К задаче 2,11

(см. стр. 30) и следует воспользоваться формулой (2, 7). Из условия задачи $y = \frac{1}{a}(a^2 + z^2)$.

Чтобы воспользоваться формулой (2, 7), надо определить частные производные $\frac{\partial y}{\partial x}$ и $\frac{\partial y}{\partial z}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{a}; \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{a}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{a^2} + \frac{4z^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)};$$

$$S = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2 + 4(x^2 + z^2)}\, dx\, dz,$$

где область интегрирования $(\sigma)$ — четверть круга $AOB$ (см. чертеж к задаче).

Наличие под корнем суммы $x^2+z^2$ указывает на то, что целесообразно ввести полярные координаты, учитывая, что в этих координатах $x^2+z^2=\rho^2$. Радиус окружности $AOB$, как видно из уравнений ($A$), равен $2\sqrt{a}$. Полярный угол $\varphi$ изменяется в области интегрирования от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$S=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{a^2+4\rho^2}\,\rho d\rho=\frac{1}{8}\left.\frac{(a^2+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{a\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\left[(a^2+8a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{12}\left[(9a^2)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{1}{12}\cdot 26a^3=\frac{13}{6}a^3.$$

Окончательно $S=\frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{13}{6}a^3=\frac{13}{12}\pi a^2$ кв. ед.

Теперь решим эту же задачу, проектируя поверхность на плоскость $xOy$ (см. чертеж б) к этой задаче). Для этого надо воспользоваться формулой (2,4) или, что то же, формулой (2,5). Уравнение поверхности должно быть решено относительно переменной $z$.

Из уравнения поверхности $z=\sqrt{ay-x^2}$
(в первом октанте $z\geqslant 0$, а потому перед корнем удержан только знак плюс).

Определим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{ay-x^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{a}{2\sqrt{ay-x^2}}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{ay-x^2}+\frac{a^2}{4(ay-x^2)}}=\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}},\text{ а}$$

$$S=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\sqrt{4ay+a^2}}{2\sqrt{ay-x^2}}\,dx\,dy,$$

где область интегрирования ($\sigma$) ограничена осью $Oy$, параболой $x^2=ay$ и прямой $y=2a$. Поэтому

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2a}\sqrt{4ay+a^2}\,dy\int\limits_0^{\sqrt{ay}}\frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}}.$$

Остальные вычисления проведите самостоятельно.

Внутренний интеграл

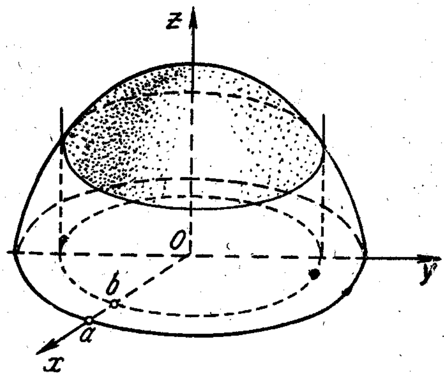
$$\int_0^{\sqrt{ay}} \frac{dx}{\sqrt{ay-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{ay}} \Big|_0^{\sqrt{ay}} = \frac{\pi}{2}.$$

Сравнение первого решения со вторым показывает преимущество первого. Рекомендуется проектировать поверхность на ту из координатных плоскостей, в которой область интегрирования будет наиболее простой.

**Задача 2,12** (для самостоятельного решения). Найти площадь поверхности, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=b^2$ из сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, считая, что $a>b$.

Указание. Вычислить 1/8 часть искомой площади, расположенную в первом октанте. Проектировать вычисляемую поверхность на плоскость $xOy$. Проекцией будет четверть круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=b^2$. Уравнение сферы решить относительно переменной $z$. Вычислить

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$



К задаче 2,12

Выражение $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{z}$.

Но

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},$$

а потому

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}.$$

После перехода к полярным координатам

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}};$$

$$\frac{S}{8}=\iint_{(\sigma)} \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\, d\rho\, d\varphi,$$

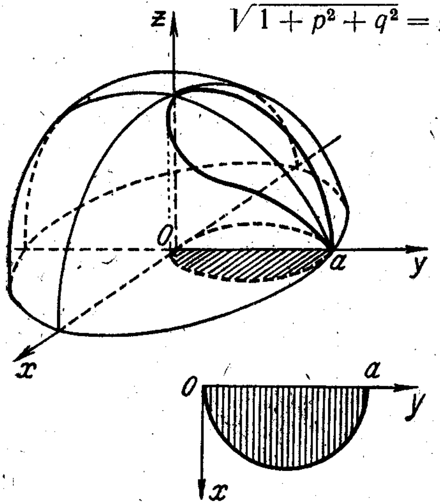
**Ответ.** $S=4a\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})$ кв. ед.

**Задача 2,13** (для самостоятельного решения). Найти площадь поверхности, вырезаемую на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ цилиндром $x^2+y^2-ay=0$.

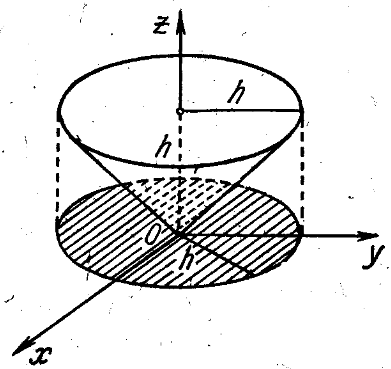
Указание. Как и в предыдущей задаче, уравнение сферы решить относительно переменной $z$.

После перехода к полярным координатам, как и в предыдущей задаче,

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$




К задаче 2,13




К задаче 2,14

Область интегрирования ограничена окружностью, уравнение которой

$$\rho=a\sin\varphi;$$

$$\frac{S}{4}=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sin\varphi}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

Ответ. $S=2a^2(\pi-2)$ кв. ед.

**Задача 2,14** (для самостоятельного решения). Найти площадь боковой поверхности, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$ и плоскостью $z=h$.

Указание. Выгодно спроектировать поверхность на плоскость $xOy$. Проекция — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=h^2$. Уравнение поверхности решить относительно переменной $z$. Воспользуемся формулой (2,5). Окажется, что

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{2},$$

а двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma)} \rho\, d\rho\, d\varphi$ равен площади круга, т. е. $\pi h^2$.

**Ответ.** $S = \pi h^2 \sqrt{2}$ кв. ед.

**Задача 2,15.** Вычислить площадь той части параболоида $z = \frac{1}{2a}(x^2 + y^2)$, которая ограничена плоскостями

$$y = x \operatorname{tg} \alpha; \quad y = 0; \quad z = 0; \quad z = \frac{a}{2} \quad \left(a > 0; \quad \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Указание. Искомая площадь проектируется в круговой сектор с центральным углом $\alpha$, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = a^2$

$$S = \frac{1}{a} \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Удобно перейти к полярным координатам.

**Ответ.** $S = \frac{\alpha a^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ кв. ед.

**Задача 2,16** (для самостоятельного решения). Вычислить поверхность шара радиуса $a$.

Указание. Следует вычислить 1/8 поверхности шара, расположенную в первом октанте, в котором $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Из уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ определить $z$:

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} = -\frac{y}{z}.$$

Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{z} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}}.$$

Выгодно перейти к полярным координатам, учитывая, что в этих координатах $x^2 + y^2 = \rho^2$. Поэтому

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}.$$

Восьмая часть поверхности в полярных координатах

$$\frac{S}{8}=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho\,d\varphi, \tag{A}$$

где $(\sigma)$ — четверть круга, лежащая в первой четверти координатной плоскости $xOy$.

$$\frac{S}{8}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho$$

или

$$\frac{S}{8}=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{\pi a^2}{2}.$$

Учесть, что

$$\int\limits_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\,d\rho=a\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^a=a\cdot a=a^2.$$

**Ответ.** $S=4\pi a^2$ кв. ед.

Для сравнения выкладок рекомендуется вычислить поверхность шара, не переходя к полярным координатам. Легко убедиться, что в этом случае вычисления окажутся более громоздкими.

## ТРЕТЬЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Тройной интеграл.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

Под областью $(v)$, на которую распространен тройной интеграл, понимается замкнутая пространственная область, ограниченная снизу и сверху поверхностями, определяемыми соответственно уравнениями $z=\varphi_1(x, y)$ и $z=\varphi_2(x, y)$ $(\varphi_1\leqslant\varphi_2)$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $Oz$ (фиг. 3а). (В частном случае может оказаться, что образующие цилиндрической поверхности равны нулю (фиг. 3б).

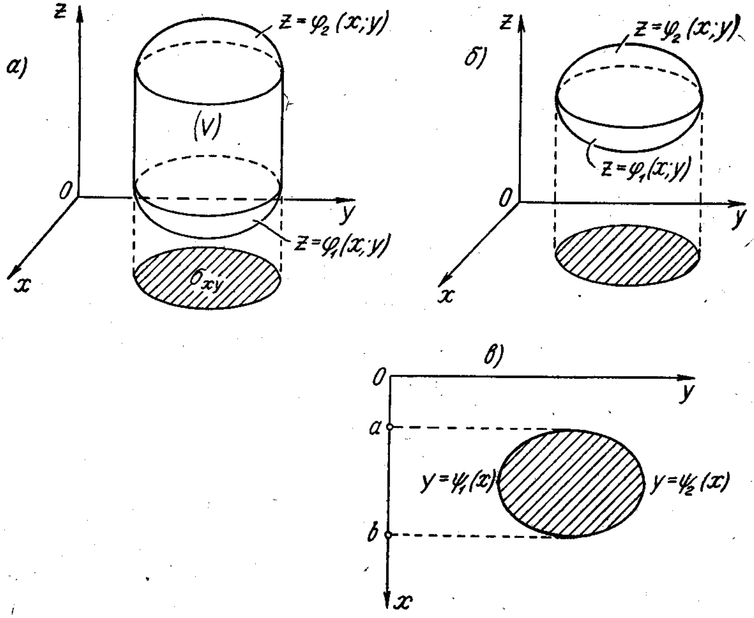
Переменные $x$ и $y$ изменяются в плоской области $(\sigma_{xy})$, которая является проекцией на плоскость $xOy$ пространственной области $(v)$.

В прямоугольных координатах элемент $dv$ объема вычисляется по формуле

$$dv = dx\,dy\,dz. \tag{3,1'}$$

Тройной интеграл от функции $f(x, y, z)$ трех независимых переменных, которая предполагается непрерывной в области $(V)$, в прямоугольных координатах записывается так:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dv = \iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$




Фиг. 3

и вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{\varphi_1(x,\,y)}^{\varphi_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz. \tag{3,2}$$

При вычислении внутреннего интеграла

$$\int\limits_{\varphi_1(x,\,y)}^{\varphi_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz$$

переменные $x$ и $y$ следует рассматривать как постоянные и единственной переменной величиной при этом является $z$. В результате получится функция двух независимых переменных $x$ и $y$. Обозначим ее через $F(x, y)$. Подставив ее в правую часть формулы (3,2), мы сведем вычисление тройного интеграла к двойному интегралу

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F(x, y)\,dx\,dy, \qquad (A)$$

с вычислением которого читатель знаком из первых двух занятий.

Таким образом, вычисление тройного интеграла сведено к вычислению одномерного интеграла (внутреннего) и двойного интеграла $(A)$.

Если область $(\sigma_{xy})$ ограничена непрерывными кривыми, определяемыми уравнениями $y=\psi_1(x)$ и $y=\psi_2(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, то двойной интеграл $(A)$ можно вычислить при помощи двух повторных интегрирований (фиг. 3в)

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} F(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} F(x, y)\,dy.$$

Тем самым вычисление тройного интеграла в формуле (3,2) может быть сведено к трем последовательным интегрированиям по формуле

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (3,3)$$

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен. А так как в формуле (3,3) участвуют всего три переменных $x$, $y$ и $z$, то тройной интеграл в формуле (3,3) может быть вычислен числом способов, равным числу перестановок из трех элементов, т. е. шестью способами.

Кроме формул (3,2) и (3,3), для вычисления тройного интеграла в прямоугольных координатах часто применяется еще одна формула, которая иногда упрощает вычисления:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{(\sigma_x)} f(x, y, z)\,dy\,dz, \qquad (3,4)$$

где область $(\sigma_x)$ — сечение области $(v)$ плоскостью, параллельной плоскости $yOz$ и проходящей через произвольную точку интервала $(a, b)$, по которому распространен внешний интеграл в формуле (3,3). (См. задачу 3,1).

Формула (3,4) получается из формулы (3,3), если в ней два последних интеграла заменить одним двойным, распространенным на область $(\sigma_x)$, разъяснения о которой даны выше.

Кроме формулы (3,4), для вычисления тройного интеграла могут быть также использованы аналогичные две:

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_c^d dz \iint\limits_{(\sigma_z)} f(x, y, z)\,dx\,dy \qquad (3,4a)$$

и

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_e^f dy \iint\limits_{(\sigma_y)} f(x, y, z)\,dx\,dz. \qquad (3,4б)$$

В формуле (3,4а) $(\sigma_z)$ — область, ограниченная кривой, по которой плоскость, параллельная плоскости $xOy$ при фиксированном $z$ из промежутка $(c, d)$, пересекает область $(v)$, а в формуле (3,4б) $(\sigma_y)$ — область, ограниченная кривой, по которой плоскость, параллельная плоскости $xOz$ при фиксированном $y$ из промежутка $(e, f)$, пересекает область $(v)$.

*Заметим, что во всех этих формулах пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда величины постоянные.*

## Применение тройного интеграла в геометрии и механике

**1. Вычисление объема тела.** Если функция $f(x, y, z)$ тождественно равна 1, т. е. $f(x, y, z) \equiv 1$ (символ $\equiv$ есть знак тождественного равенства), то тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \text{ превращается в } \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz,$$

который равен объему тела, ограниченного областью $(v)$.

Итак, объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz. \qquad (3,5)$$

Заметим, что во многих случаях вычисление объема при помощи тройного интеграла оказывается более простым, чем его вычисление двойным интегралом.

**2. Масса неоднородного тела.** Если тело **однородно,** т. е. в каждой его точке плотность $\gamma$ одна и та же, то масса $M$ тела равна произведению плотности тела $\gamma$ на его объем $V$

$$M = \gamma V.$$

Если же тело *неоднородно*, то плотность его в различных точках различна и меняется от точки к точке, являясь, таким образом, функцией координат точки, т. е. функцией трех независимых переменных.

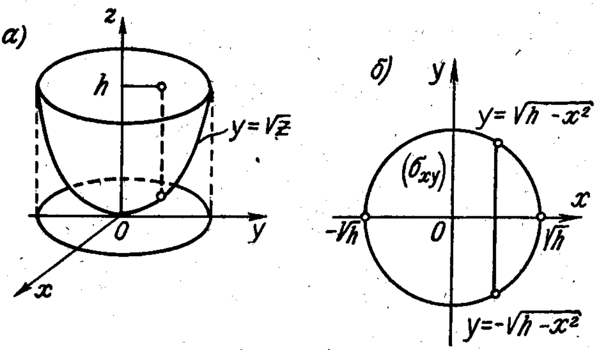
Таким образом, плотность $\gamma = \gamma(x, y, z)$, причем эта функция предполагается непрерывной.

Масса $M$ тела в этом случае равна тройному интегралу от плотности $\gamma(x, y, z)$, распространенному на объем $(V)$, занимаемый этим телом, и определяется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(v)} \gamma(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \qquad (3,6)$$

Различие между тройным интегралом в формулах (3,2) и (3,6) состоит только в том, что в формуле (3,6) вместо функции $f(x, y, z)$ фигурирует функция $\gamma(x, y, z)$. Ясно, что интеграл (3,6) вычисляется по тем же формулам, что и интеграл (3,2). Другие приложения тройного интеграла в механике рассматриваются на следующем практическом занятии.

Цель этого практического занятия — приобретение техники вычисления тройных интегралов и определение с их помощью массы и объемов тел. Основной трудностью, с которой сталкиваются в применении тройных интегралов, является определение пределов в трех одномерных интегралах в правой части формулы (3,3). Само же вычисление этих интегралов не должно вызвать, собственно, никаких затруднений.




К задаче 3,1

**Задача 3,1.** Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint\limits_{(v)} z^2 dx\, dy\, dz,$$

где $(v)$ — тело, ограниченное поверхностью, образованной вращением кривой $y = \sqrt{z}$ вокруг оси $Oz$ и плоскостью $z = h\,(h > 0)$.

**Решение.** Определим уравнение поверхности вращения (см., например, двадцатое практическое занятие в книге И. А. Каплан. Практические занятия по высшей математике, ч. I. Изд-во ХГУ, 1961).

В уравнении вращающейся линии $y = \sqrt{z}$ переменную $z$, одноименную с осью вращения $Oz$, оставляем без изменения, а переменную $y$ заменяем на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Заменяя этим корнем $y$ в уравнении $y = \sqrt{z}$, получаем уравнение поверхности вращения $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$ или $x^2 + y^2 = z$ (параболоид вращения).

Область интегрирования $(v)$ ограничена этой поверхностью и плоскостью $z = h\,(h > 0)$. Проекцией поверхности на плоскость $xOy$ является круг. Уравнение окружности $(l)$, ограничивающей этот круг, получим, исключая $z$ из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=z \\ z&=h \end{aligned}\right\}.$$

Уравнение окружности $(l)$: $x^2+y^2=h$. Ее радиус $R=\sqrt{h}$. В области интегрирования $(v)$ переменная $z$ изменяется от ее значения $z=x^2+y^2$ на поверхности параболоида, который снизу ограничивает область $(v)$, до значения $z=h$ на плоскости, ограничивающей эту область сверху, т. е.

$$x^2+y^2 \leqslant z \leqslant h$$

(см. фигуру *а*) на чертеже к этой задаче).

В области $(\sigma_{xy})$ переменная $y$ изменяется от ее значения $y=-\sqrt{h-x^2}$ на нижней части окружности, ограничивающей область $(\sigma_{xy})$, до значения $y=+\sqrt{h-x^2}$ на верхней части этой окружности, т. е.

$$-\sqrt{h-x^2} \leqslant y \leqslant +\sqrt{h-x^2}.$$

Переменная же $x$ в области $(\sigma_{xy})$ изменяется от $-\sqrt{h}$ до $+\sqrt{h}$: $-\sqrt{h} \leqslant x \leqslant +\sqrt{h}$ (см. фигуру *б*) на чертеже к этой задаче).

Формула (3,3) теперь перепишется так:

$$I=\iiint\limits_{(v)} z^2 dx\,dy\,dz=\int\limits_{-\sqrt{h}}^{+\sqrt{h}} dx \int\limits_{-\sqrt{h-x^2}}^{+\sqrt{h-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{h} z^2 dz.$$

Вычисление трех одномерных интегралов в этой формуле приведет к достаточно громоздким выкладкам. (Рекомендуется убедиться в этом самостоятельно).

Попытаемся вычислить этот интеграл другим путем, минуя применение формулы (3,3). Распишем вычисляемый интеграл так:

$$I=\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{h} z^2\,dz.$$

Это выгодно потому, что в двойном интеграле $\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy$ областью интегрирования является круг (применена формула (3,2)).

Внутренний интеграл

$$\int\limits_{x^2+y^2}^{h} z^2\,dz=\left.\frac{z^3}{3}\right|_{x^2+y^2}^{h}=\frac{1}{3}\left[h^3-(x^2+y^2)^3\right].$$

Поэтому

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}\left[h^3-(x^2+y^2)^3\right]dx\,dy.$$

Учитывая наличие в подынтегральной функции выражения $x^2+y^2$, а также то, что область $(\sigma_{xy})$ — круг, при вычислении этого интеграла выгодно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=\rho^2$, а элемент площади равен $\rho\,d\rho\,d\varphi$. Поэтому

$$I=\frac{1}{3}\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(h^3-\rho^6)\,\rho\,d\rho\,d\varphi=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{h}}(h^3-\rho^6)\,\rho\,d\rho.$$

Переменная $\rho$ при постоянном $\varphi$ изменяется от 0 до $\sqrt{h}$, а переменная $\varphi$ — от 0 до $2\pi$.

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\sqrt{h}}(h^3-\rho^6)\,\rho\,d\rho=\left(\frac{h^3\rho^2}{2}-\frac{\rho^8}{8}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{h}}=\frac{h^4}{2}-\frac{h^4}{8}=\frac{3}{8}h^4.$$

Окончательно

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{3}{8}h^4\,d\varphi=\frac{1}{8}h^4\,2\pi;$$

$$I=\frac{1}{4}\pi h^4.$$

Однако и это решение можно упростить. Перепишем интеграл в таком виде (формула (3,4a)):

$$I=\iiint\limits_{(v)}z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^h z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy, \qquad (A)$$

где $(\sigma_z)$ есть сечение тела плоскостью, перпендикулярной оси $Oz$, лежащей на высоте $z$, причем $0<z<h$. Это сечение является кругом, радиус которого $R$ равен $\sqrt{z}$, как это следует из уравнения поверхности $x^2+y^2=z$. (Радиусом круга является ордината $y$ при $x=0$).

Внутренний интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy$ в $(A)$ равен площади этого круга, а потому

$$\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy=\pi(\sqrt{z})^2=\pi z.$$

Подставляя это значение в $(A)$, получим

$$I=\int\limits_0^h z^2\pi z\,dz=\pi\int\limits_0^h z^3\,dz=\left(\pi\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^h=\frac{\pi h^4}{4}.$$

Совершенно очевидно, что вычисление заданного интеграла этим приемом оказалось несравненно более простым, чем предыдущими двумя. Таким образом, эта задача на вычисление тройного интеграла показывает, что не всегда для его вычисления следует пользоваться основной формулой (3,3), а полезно поискать более простые пути.

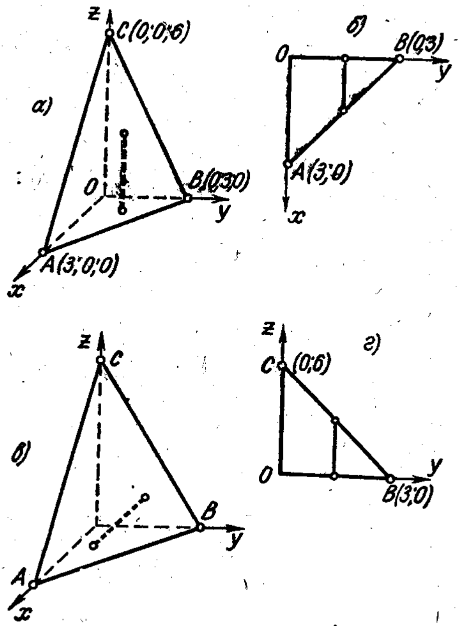
**Задача 3,2** (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz$, где $(v)$ — область, ограниченная плоскостями $z = 0$ и $z = h$ и поверхностью, образованной вращением кривой $y = z^2$ вокруг оси $Oz$.

**Ответ.** $\frac{\pi h^5}{5}$.

**Задача 3,3.** Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{(v)} x\,dx\,dy\,dz$, где $(v)$ — тетраэдр, ограниченный координатными плоскостями и плоскостью

$$2x + 2y + z - 6 = 0. \qquad (A)$$

**Решение.** Тетраэдр ограничен снизу плоскостью $z = 0$, сверху плоскостью $2x + 2y + z - 6 = 0$, на которой $z = 6 - 2x - 2y$. Поэтому в области интегрирования $(v)$ переменная $z$ изменяется от $z = 0$ до $z = 6 - 2x - 2y$ (см. фигуру *а*) на чертеже к этой задаче).



К задаче 3,3

Проекцией области $(v)$ на плоскость $xOy$ является треугольник $OAB$. Уравнение прямой $AB$ получим, решая совместно уравнение плоскости $(A)$ и плоскости $z = 0$.

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y + z - 6 &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда уравнение прямой $AB$ будет $2x + 2y - 6 = 0$ или $x + y - 3 = 0$.

В области $(\sigma_{xy})$ переменная $y$ при постоянном $x$ изменяется от ее значения на оси $Oy$, т. е. от $x = 0$ до ее значения на прямой $AB$, т. е. до $y = 3 - x$.

Итак,

$$0 \leqslant y \leqslant 3 - x$$

(фигура *б*) на чертеже к этой задаче). Переменная же $x$ в этой области изменяется от 0 до 3:

$$0 \leqslant x \leqslant 3$$

(фигура *б*) на чертеже к этой задаче).

Поэтому

$$I=\iiint\limits_{(v)} x dx\, dy\, dz=\int\limits_0^3 x dx\int\limits_0^{3-x} dy\int\limits_0^{6-2x-2y} dz.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{6-2x-2y} dz=(z)\Big|_0^{6-2x-2y}=6-2x-2y.$$

Следовательно,

$$I=\int\limits_0^3 x dx\int\limits_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy.$$

Теперь внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{3-x}(6-2x-2y)\,dy=(6y-2xy-y^2)\Big|_0^{3-x}=$$
$$=6(3-x)-2x(3-x)-(3-x)^2=9-6x+x^2.$$

Поэтому

$$I=\int\limits_0^3 x(9-6x+x^2)\,dx.$$

**Ответ.** $I=\frac{27}{4}$.

Эту же задачу рекомендуем решить, меняя порядок интегрирования. Область $(v)$ спроектировать на плоскость $yOz$, провести первую интеграцию по $x$, вторую — по $z$, третью — по $y$ (фиг. *в)* и *г)* на чертеже к этой задаче).

Указание.

$$I=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{2(3-y)} dz\int\limits_0^{\frac{6-2y-z}{2}} x\, dx.$$

**Задача 3,4.** Вычислить массу тела, ограниченного поверхностью трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если в каждой точке тела плотность равна квадрату ее расстояния от начала координат.

**Решение.** Квадрат расстояния точки тела от начала координат равен сумме квадратов координат этой точки. Поэтому плотность в каждой точке тела $\gamma(x, y, z)=x^2+y^2+z^2$, а масса тела

$$M=\iiint\limits_{(v)}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \qquad \text{(A)}$$

[см. формулу (3,6)].

Представим интеграл в (A) в виде суммы трех интегралов

$$M = \iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{(v)} y^2\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz.$$

Вычислим эти интегралы по формуле (3,3).

Первый интеграл

$$I_1 = \iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz.$$

Определим пределы интегрирования по каждой переменной. Чтобы определить пределы интегрирования по $z$, решим уравнение эллипсоида относительно переменной $z$:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

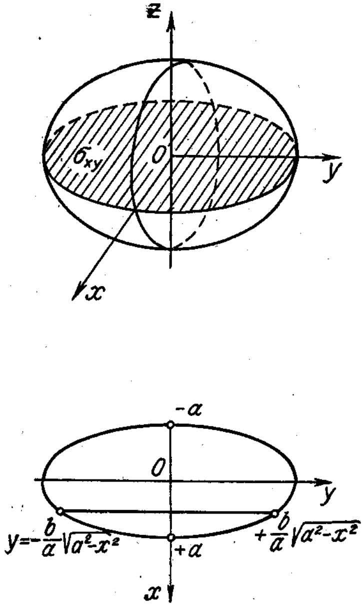
Уравнение той части эллипсоида, которая находится под плоскостью $xOy$, т. е. его нижней части

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

а уравнение той его части, которая находится над плоскостью $xOy$, т. е. его верхней части

$$z = +c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Спроектируем поверхность эллипсоида на плоскость $xOy$. Проекцией будет эллипс, уравнение которого мы получим из уравнения эллипсоида, полагая в нем $z = 0$. Уравнение этого эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.




К задаче 3,4

При фиксированном $x$ пределы изменения $y$ получим, решая это уравнение относительно $y$. Из уравнения эллипса

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

а потому $y$ изменяется от $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ до $+\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Переменная же $x$ в этом эллипсе изменяется от $-a$ до $+a$ (см. чертеж). Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-a}^{+a} x^2\,dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz.$$

Выполним три последовательных интегрирования:

$$1)\quad \int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz = 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

2) Подставим найденное значение под знак второго интеграла и получим

$$\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy. \qquad (A)$$

В этом интеграле переменной интегрирования является $y$, а переменная $x$ должна рассматриваться как величина постоянная. Удобно ввести такую замену

$$1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{d^2}{b^2}, \qquad (B)$$

откуда

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=d^2,$$

а

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}=d. \qquad (C)$$

Подкоренное выражение, стоящее под знаком интеграла ($A$), с учетом выражения ($B$) преобразуется так:

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{d^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{d^2-y^2}.$$

На основании соотношения ($C$) пределами интегрирования в ($A$) будут $-d$ и $+d$. Учитывая, что под интегралом находится четная функция, а также все вышеуказанные замены, интеграл ($A$) может быть переписан так:

$$\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{2c\cdot 2}{b}\int\limits_0^d\sqrt{d^2-y^2}\,dy=$$

$$=\frac{4c}{b}\left(\frac{y}{2}\sqrt{d^2-y^2}+\frac{d^2}{2}\arcsin\frac{y}{d}\right)\Bigg|_0^d=\frac{4c}{b}\cdot\frac{d^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

На основании ($C$)

$$d^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

а интеграл в $(A)$ равен

$$\frac{\pi c}{b}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2).$$

3) Подставляя это значение в исходный интеграл $I_1$, получим

$$I_1=\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-a}^{a} x^2\cdot\frac{\pi bc}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\int\limits_{0}^{a}(a^2x^2-x^4)\,dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{a^2x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^a=$$

| Учтено, что подынтегральная функция — чётная |
|---|

$$=\frac{2\pi bc}{a^2}\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{5}\right)=\frac{2\pi bc}{a^2}\cdot\frac{2a^5}{15}=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Итак, окончательно

$$\iiint\limits_{(v)} x^2\,dx\,dy\,dz=\frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

Остальные два интеграла следует вычислить самостоятельно. Однако не имеет смысла оставлять тот же порядок интегрирования.

При вычислении второго тройного интеграла интегрирование по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащему в плоскости $xOy$, выполнить сначала по $x$, а третье, последнее интегрирование — по $y$. Пределами изменения $x$ при постоянном фиксированном $y$ будут

$$-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\ \text{ и }\ +\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

а пределами изменения $y$ будут $-b$ и $+b$.

Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} y^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-b}^{+b} y^2\,dy\int\limits_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{+\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dx\int\limits_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}dz.$$

В результате получится число $\frac{4}{15}\pi ab^3c$.

При вычислении третьего интеграла также следует изменить порядок интегрирования. Уравнение поверхности эллипсоида рационально решить относительно переменной $y$. Окажется, что $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}$.

Эллипсоид спроектировать на плоскость $xOz$. В проекции получится эллипс, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

На этом эллипсе при постоянном $z$ переменная $x$ изменяется от значения $x=-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$ до значения $x=+\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}$, а переменная $z$ от $-c$ до $+c$.

Поэтому

$$\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz\int\limits_{-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}} dx\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}} dy.$$

Должно получиться число $\frac{4}{15}\pi abc^3$.

Таким образом, масса тела

$$M=\frac{4}{15}\pi a^3bc+\frac{4}{15}\pi ab^3c+\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Окончательно

$$M=\frac{4}{15}\pi abc\,(a^2+b^2+c^2).$$

Заметим, что, если бы мы при вычислении второго и третьего интегралов не изменяли порядка интегрирования, то, как легко убедиться, выкладки значительно усложнились бы. Рекомендуется это проверить.

Теперь покажем, как можно эту задачу решить значительно проще, минуя формулу (3,3), а применяя формулы (3,4), (3,4*а*) и (3,4*б*).

Вычислим для примера третий интеграл

$$I_3=\iiint\limits_{(v)} z^2\,dx\,dy\,dz$$

и по формуле (3,4а) перепишем его так:

$$I_3=\int\limits_{-c}^{c} dz\iint\limits_{(\sigma_z)} z^2\,dx\,dy=\int\limits_{-c}^{c} z^2\,dz\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy,$$

где пределы во внешнем интеграле очевидны из уравнения эллипсоида, а $(\sigma_z)$ (см. пояснения к формуле (3,4а)) — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, параллельная плоскости $xOy$, при постоянном $z$ из интервала $(-c, +c)$ пересекает эллипсоид. Интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ равен площади этого сечения, определим полуоси эллипса, получающегося в сечении. Из уравнения эллипсоида, считая, что $z$ — величина постоянная, получаем

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}=1.$$

Полуоси этого эллипса равны:

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}};\qquad b_1=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

а его площадь

$$\pi a_1b_1=\pi a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\cdot b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Поэтому двойной интеграл

$$\iint\limits_{(\sigma_z)}dx\,dy=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

а

$$I_3=\int\limits_{-c}^{c}z^2\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int\limits_0^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=$$

$$=2\pi ab\int\limits_0^c\left(z^2-\frac{z^4}{c^2}\right)dz=2\pi ab\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5c^2}\right)\Bigg|_0^c=$$

$$=2\pi ab\left(\frac{c^3}{3}-\frac{c^3}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$

Так же вычисляются и другие два интеграла. Вычисление должно быть выполнено самостоятельно. Читатель, конечно, отдаст предпочтение этому способу решения, на котором он убедился, что не всегда самым простым является механическое применение основных формул.

**Задача 3,5** (для самостоятельного решения). Определить массу материального круглого конуса, высота которого равна $h$, а угол между его осью и образующими равен $\alpha$, если известно, что плотность в каждой точке пропорциональна $n$-ой степени расстояния этой точки от плоскости, проведенной через вершину конуса параллельно основанию.

Указание. За ось конуса принять ось $Oz$ (см. чертеж к задаче). Найти уравнение поверхности конуса как поверхности, образованной вращением прямой $OC$ вокруг оси $Oz$.

Прямая $OC$ определяется уравнением

$$y = az. \qquad (a = \operatorname{tg} \alpha) \qquad \text{(A)}$$

Уравнение поверхности конуса

$$\sqrt{x^2 + y^2} = az;$$
$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Плотность $\rho = kz^n$, где $k$ — коэффициент пропорциональности

$$M = \iiint\limits_{(v)} kz^n \, dx \, dy \, dz,$$

$(v)$ — указанный конус.

Для вычисления интеграла применить формулу (3,4а)

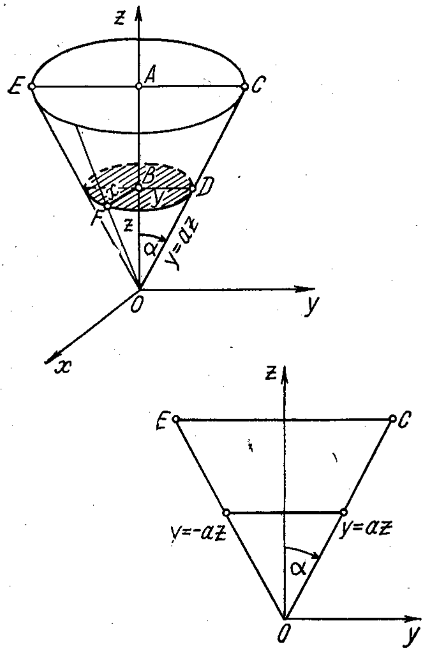
$$M = k \int\limits_0^h dz \iint\limits_{(\sigma_z)} z^n \, dx \, dy =$$

$$= k \int\limits_0^h z^n dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx \, dy, \quad \text{(A)}$$

где $(\sigma_z)$ — сечение конуса плоскостью, параллельной плоскости $xOy$ и проходящей через произвольную точку $z$ интервала $(0, h)$. Учесть, что $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx \, dy$ равен площади этого сечения, т. е. площади круга, радиус которого $BD = y = az$.

Таким образом,

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx \, dy = \pi a^2 z^2.$$




К задаче 3,5

Подставляя это значение в (А), получим

$$M = k \int\limits_0^h z^n \pi a^2 z^2 dz.$$

Окончательно

$$M = \frac{k\pi a^2 h^{n+3}}{n+3}.$$

Уместно сравнить это очень простое решение с вычислением исходного интеграла по общей формуле (3,3), в которой внутреннее интегрирование выполним по переменной $x$, а поверхность конуса спроектируем на плоскость $yOz$. Проекцией окажется треугольник $OCE$.

$$M = \iiint\limits_{(v)} kz^n\,dx\,dy\,dz = k\int_0^n z^n\,dz \int_{-az}^{az} dy \int_{-\sqrt{a^2z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2z^2-y^2}} dx. \qquad (C)$$

Пределы интегрирования по $x$ определены так: уравнение поверхности конуса решаем относительно переменной $x$. Окажется, что $x = \pm\sqrt{a^2z^2 - y^2}$.

На поверхности конуса $x$ изменяется от значения $x = -\sqrt{a^2z^2-y^2}$ на «тыловой» части конуса до значения $x = +\sqrt{a^2z^2-y^2}$ на его передней части.

Переменная $y$ изменяется от ее значения $y = -az$ на прямой $OE$ до значения $y = az$ на прямой $OC$ при фиксированном $z$, а переменная $z$ от 0 до $h$.

Внутренний интеграл

$$\int_{-\sqrt{a^2z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2z^2-y^2}} dx = 2\sqrt{a^2z^2-y^2}.$$

Интеграл $2\int\limits_{-az}^{az}\sqrt{a^2z^2-y^2}\,dy$ удобно вычислить подстановкой $y = az\sin\varphi$, имея в виду, что при вычислении этого интеграла $z$ следует считать величиной постоянной. Новыми пределами интегрирования будут $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Интеграл преобразуется к интегралу

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2z^2\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi a^2z^2.$$

Подставляя это значение в правую часть формулы (C), получим, конечно, прежний ответ. А теперь сравните, насколько этот путь оказался сложнее.

**Задача 3,6** (для самостоятельного решения). Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} xyz\,dx\,dy\,dz,$$

где $(v)$ — тело, ограниченное поверхностями: 1) $y = x^2$; 2) $x = y^2$; 3) $z = xy$ и 4) $z = 0$.

Указание.

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy \int_0^{xy} z\,dz$$

**Ответ.** $\frac{1}{96}$.

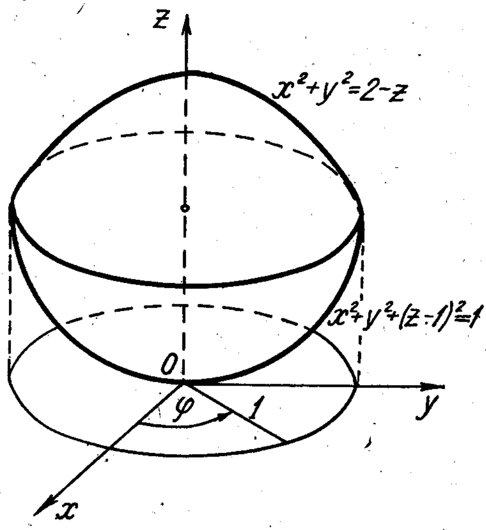
**Задача 3,7.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и $x^2+y^2=2-z$.

**Решение.** Первая поверхность — сфера, вторая — параболоид вращения (см. чертеж).

Уравнение сферы преобразуем к виду

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1. \tag{A}$$

Из этого уравнения видно, что центр сферы находится на оси $Oz$ в точке $(0, 0, 1)$, а ее радиус равен 1.




К задаче 3,7

Найдем уравнение линии, по которой пересекаются эти поверхности. Очевидно, что линией пересечения является окружность. Прежде всего определим, на какой высоте $z$ над плоскостью $xOy$ расположена эта линия.

Подставляя значение $x^2+y^2$ из второго уравнения в первое, получим уравнение для определения $z$:

$$(2-z)+z^2-2z=0$$

или

$$z^2-3z+2=0.$$

Решая его, получим, что $z_1=1$; $z_2=2$. Точка, в которой $z=2$, — вершина параболоида, а потому линия пересечения поверхностей находится на высоте $z=1$ над плоскостью $xOy$.

Уравнение этой линии получим, подставляя $z=1$ в уравнение любой из данных поверхностей. Подставляя, например, $z=1$ во второе уравнение, получим уравнение линии пересечения:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=1 \\ z&=1 \end{aligned}\right\}.$$

Эта окружность без искажения проектируется на плоскость $xOy$ в окружность $x^2+y^2=1$, а все тело проектируется в круг, ограниченный этой окружностью.

По формуле (3,5) объем тела

$$V=\iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz. \tag{B}$$

Первое интегрирование будем вести по переменной $z$. Определим пределы изменения этой переменной в области интегрирования. При фиксированных $x$ и $y$ из уравнения (A) сферы

$$z-1=\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

а

$$z=1\pm\sqrt{1-(x^2+y^2)}.$$

На нижней полусфере $z=1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, а из уравнения параболоида $z=2-(x^2+y^2)$.

Таким образом, в области интегрирования $z$ изменяется от $1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ до $2-(x^2+y^2)$.

Поэтому формула (B) может быть переписана так:

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}dx\,dy\int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)}dz\,, \tag{C}$$

где $(\sigma_{xy})$ — круг радиуса, равного 1, лежащий в плоскости $xOy$. Учитывая, что внутренний интеграл

$$\int\limits_{1-\sqrt{1-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)}dz=2-(x^2+y^2)-1+\sqrt{1-(x^2+y^2)}=$$
$$=1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)},$$

формула (C) перепишется так:

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}[1-(x^2+y^2)+\sqrt{1-(x^2+y^2)}]\,dx\,dy.$$

Поскольку под знаком интеграла имеется выражение $x^2+y^2$, а область интегрирования — круг, удобно перейти к полярным координатам, в которых $x^2+y^2=\rho^2$, а элемент площади $dx\,dy$ следует заменить на $\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Поэтому

$$V=\iint\limits_{(\sigma_{xy})}(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Так как в круге $(\sigma_{xy})$ $\rho$ изменяется от 0 до 1, а $\varphi$ от 0 до $2\pi$, то

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^1(1-\rho^2+\sqrt{1-\rho^2})\,\rho\,d\rho=\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}-\frac{1}{2}\,\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12},$$

а

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{7}{12} d\varphi = 2\pi \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{6} \pi \text{ куб. ед.}$$

Окончательно

$$V = \frac{7}{6} \pi \text{ куб. ед.}$$

Укажем и другой путь решения задачи: запишем формулу для вычисления объема в виде

$$V = \iiint\limits_{(v_1)} dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{(v_2)} dx\,dy\,dz,$$

где $(v_1)$ — область, ограниченная сферой и плоскостью $z = 1$, а $(v_2)$ — область, ограниченная этой же плоскостью и поверхностью параболоида.

$I_1 = \iiint\limits_{(v_1)} dx\,dy\,dz$ равен объему полушара с радиусом, равным 1, т. е. $\frac{2}{3}\pi$ куб. ед.

Второй интеграл запишем так:

$$I_2 = \iiint\limits_{(v_2)} dx\,dy\,dz = \int_1^2 dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy, \qquad (Д)$$

где $(\sigma_z)$ — круг, ограниченный окружностью, по которой плоскость, параллельная плоскости $xOy$, при фиксированном $z$ из промежутка $(1;\ 2)\ (1 < z < 2)$ пересекает параболоид. (Контур круга $(l)$ — окружность, так как параболоид — параболоид вращения).

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ равен площади круга $(\sigma_z)$. Радиус этого круга получим из уравнения параболоида $x^2 + y^2 = 2 - z$, взяв в нем $x = 0$, полагая, что радиус лежит в плоскости $yOz$, а $z$ будем считать величиной фиксированной.

Радиус этого круга $y$ получим из уравнения

$$y^2 = 2 - z; \quad y = \sqrt{2 - z}.$$

Площадь же круга равна $\pi y^2$, т. е. $\pi(2 - z)$.

Итак,

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy = \pi(2 - z).$$

Поэтому

$$I_2 = \pi \int_1^2 (2 - z)\,dz = \pi\left(2z - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi\left(4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ куб. ед.}$$

Складывая эти два объема, получим

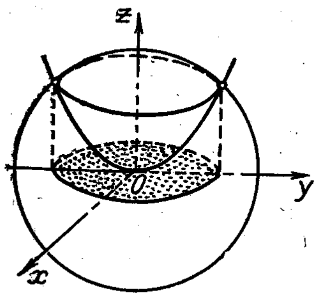
$$V = \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi \text{ куб. ед.},$$

т. е. то, что и раньше, но значительно проще.

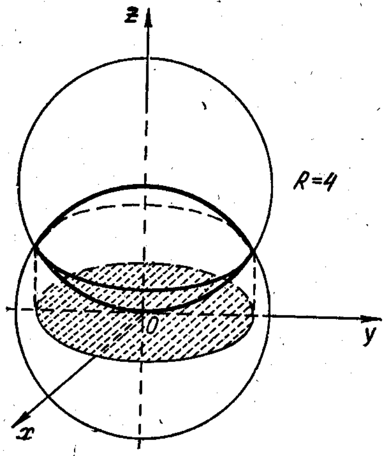
**Задача 3,8** (для самостоятельного решения). Найти объем, ограниченный поверхностями $4z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

**Ответ.** $V = \frac{8}{3}\pi(6\sqrt{3} - 5)$ куб. ед.

Рекомендуется провести решение двумя способами, как это сделано в предыдущей задаче.




К задаче 3,8




К задаче 3,9

**Задача 3,9** (для самостоятельного решения). Найти объем, ограниченный сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ и $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.

**Указание.**

$$V = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\, dy \int\limits_{4-\sqrt{16-(x^2+y^2)}}^{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} dz,$$

а $(\sigma_{xy})$ — круг, в который проектируется тело на плоскость $xOy$. Уравнение окружности этого круга $x^2 + y^2 = 12$.

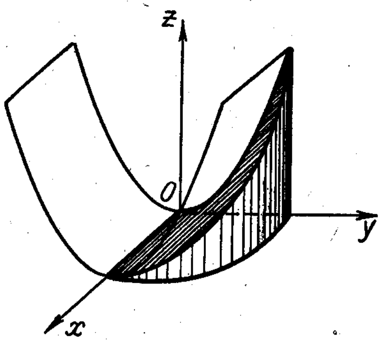
При вычислении двойного интеграла по области $(\sigma_{xy})$ удобно перейти к полярным координатам. Должно получиться

$$\iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{3}} (2\sqrt{16 - \rho^2} - 4)\, \rho\, d\rho.$$

**Ответ.** $\frac{80}{3}\pi$ куб. ед.

**Задача 3,10** (для самостоятельного решения). Определить объем тела, ограниченного поверхностями: $y^2 = pz$ $(p > 0)$, $x^2 + y^2 = a^2$ и плоскостью $xOy$.

Указание. В первом октанте находится четверть тела



К задаче 3,10

$$\frac{v}{4} = \iiint\limits_{(v)} dx\,dy\,dz = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{p}} dz. \qquad \text{(A)}$$

Решение провести также и по формуле

$$\frac{v}{4} = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} dx\,dy \int\limits_0^{\frac{y^2}{p}} dz,$$

где $(\sigma_{xy})$ — четверть круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = a^2$. Вычисление окажется значительно проще. При вычислении по формуле (А) встретится интеграл

$$\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.$$

Его удобно вычислить подстановкой $x = a \sin \varphi$. Это приведет к интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi\, d\varphi$, который легко может быть вычислен (можно воспользоваться и справочником).

Ответ. $V = \frac{\pi a^4}{4p}$ куб. ед.

## Тройной интеграл в сферических и цилиндрических координатах

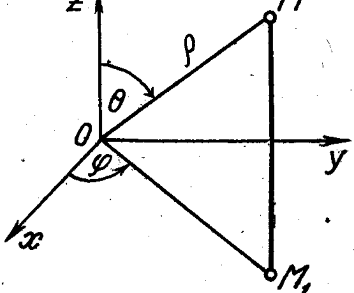
**1. Сферические координаты.** В сферических координатах (фиг. 3,2) положение точки $M$ в пространстве определяется так.

1) Задается расстояние этой точки от начала координат

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (3,7)$$

причем $\rho \geqslant 0$.

2) Точка $M$ проектируется на плоскость $xOy$ в точку $M_1$. Угол $\varphi$, составленный $OM_1$ и осью $Ox$, является второй сферической координатой точки $M$. Этот угол отсчитывается от оси $Ox$ против часовой стрелки и может изменяться от 0 до $2\pi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.



Фиг. 3,2

В географических координатах этот угол определяет долготу точки на поверхности земли, если за начальный меридиан принята плоскость $xOz$.

3) Третьей сферической координатой точки $M$ является угол $\theta$ между осью $Oz$ и отрезком $OM$. Этот угол отсчитывается от оси $Oz$ в направлении, указанном на фиг. 3,2 стрелкой. Угол $\theta$ может изменяться от 0 до $\pi$: $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$.

В географических координатах этому углу соответствует дополнение широты точки $M$ до 90°. Это так называемое полярное расстояние точки $M$.

Таким образом, сферическими координатами точки являются $\rho$, $\varphi$ и $\theta$.

**2. Формулы, связывающие прямоугольные координаты точки и ее сферические координаты.**

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}\right\}. \tag{3,8}$$

Легко проверить, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2. \tag{3,9}$$

Это также следует из формулы (3,7). (Сферические координаты точки иногда называются полярными координатами в пространстве).

**3. Цилиндрические координаты.** В цилиндрических координатах положение точки $M$ в пространстве определяется так.

Точка $M$ проектируется на плоскость $xOy$ и определяются ее полярные координаты $\rho$ и $\varphi$. Это первые две цилиндрические координаты.

Третьей цилиндрической координатой является расстояние точки от плоскости $xOy$, т. е. ее аппликата (иначе ее прямоугольная координата $z$).

Таким образом, цилиндрическими координатами точки являются $\rho$, $\varphi$ и $z$ (фиг. 3,3). Область изменения цилиндрических координат указывается неравенствами

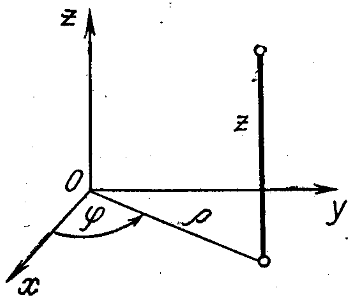
$\rho > 0$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

**4. Формулы, связывающие прямоугольные и цилиндрические координаты точки.**

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\}. \tag{3,10}$$

**5. В сферических координатах элемент объема.**

$$dv = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi. \tag{3,11}$$




Фиг. 3,3

**6. В цилиндрических координатах элемент объема**

$$dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (3{,}12)$$

**7. Правила для вычисления тройного интеграла в сферических и цилиндрических координатах:**

а) для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ преобразовать к сферическим координатам, надо $x$, $y$ и $z$ в подынтегральной функции заменить по формулам (3,8), а элемент объема $dx\, dy\, dz$ — по формуле (3,11). После этого вычислить его тремя последовательными интегрированиями по переменным $\rho$, $\theta$ и $\varphi$. (Порядок интегрирования безразличен). Заметим, что переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар;

б) для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_{(v)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ преобразовать к цилиндрическим координатам, надо $x$, $y$ и $z$ в подынтегральной функции заменить по формулам (3,10), а элемент объема $dx\, dy\, dz$ — по формуле (3,12). После этого тройной интеграл вычислить тремя последовательными интегрированиями.

**8. Формулы для вычисления объема в сферических и цилиндрических координатах.**

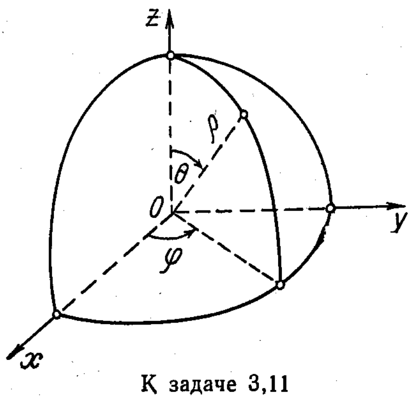
а) В сферических координатах объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi. \qquad (3{,}13)$$

б) В цилиндрических координатах объем тела

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (3{,}14)$$

**Задача 3.11.** Определить объем шара радиуса $R$.



К задаче 3,11

**Решение.** Будем вести вычисление в сферической системе координат. Центр шара поместим в начало координат. В прямоугольной системе координат уравнение поверхности этого шара, т. е. сферы, записывается так:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Заменяя $x^2 + y^2 + z^2$ через $\rho^2$ по формуле (3,9), получим уравнение поверхности шара $\rho^2 = R^2$ или $\rho = R$.

Вычислим объем той части шара, которая находится в первом октанте

$$\frac{V}{8} = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^R \rho^2 \, d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^R \rho^2 \, d\rho = \frac{R^3}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{V}{8} = \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta.$$

Но

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta = 1.$$

Значит,

$$\frac{V}{8} = \frac{R^3}{3} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^3}{6}.$$

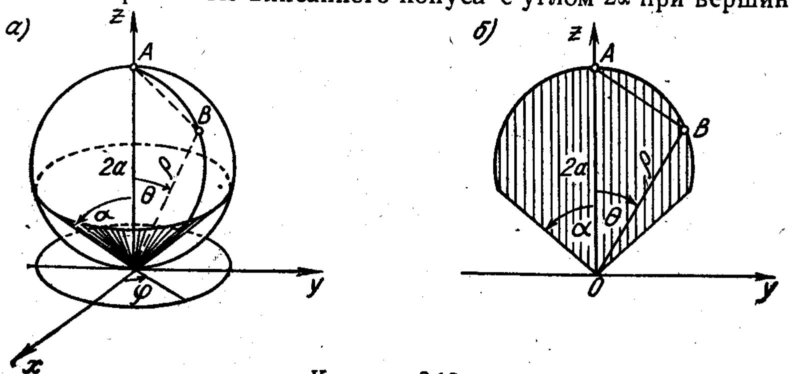
Окончательно объем шара

$$V = \frac{8}{6} \pi R^3;$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

Эта формула хорошо известна из элементарной геометрии, но получена она с помощью тройного интеграла в сферических координатах исключительно просто.

**Задача 3,12.** Вычислить объем тела, ограниченного сферой радиуса $a$ и поверхностью вписанного конуса с углом $2\alpha$ при вершине.




К задаче 3,12

**Решение.** Поместим начало координат в вершину конуса, а центр сферы на ось $Oz$ в точку с координатами $(0, 0, a)$. Уравнение поверхности сферы в прямоугольных координатах запишется так:

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2. \qquad \text{(A)}$$

Преобразуем это уравнение к сферическим координатам по формулам (3,8). Подставляя в уравнение (A) значения $x$, $y$ и $z$, из этих формул получим

$$\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (\rho\cos\theta - a)^2 = a^2$$

или

$$\rho^2 \sin^2\theta (\overbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}^{1}) + \rho^2\cos^2\theta - 2a\rho\cos\theta + a^2 = a^2.$$

После упрощения

$$\rho^2 \sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = 2a\rho\cos\theta;$$
$$\rho^2 (\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{1}) = 2a\rho\cos\theta.$$

Сокращая на $\rho$, получаем уравнение (A) в сферических координатах

$$\rho = 2a\cos\theta.$$

Это же уравнение можно было получить и проще: из чертежа а) к этой задаче видно, что в любой точке сферы $\rho = 2a\cos\theta$, так как в треугольнике $OAB$ угол $B$ — прямой как опирающийся на диаметр $OA$.

Переменные $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ меняются в таких пределах:

1) $\rho$ изменяется от 0 до $2a\cos\theta$ — значения $\rho$ на поверхности сферы;

2) $\theta$ изменяется от 0 до $\alpha$;

3) $\varphi$ изменяется от 0 до $2\pi$.

Поэтому на основании формулы (3,14)

$$V = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\alpha} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{2a\cos\theta} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\cdot 8a^3\cos^3\theta.$$

Подставляя это выражение под знак второго интеграла, получим

$$\frac{8}{3}a^3\int_0^{\alpha}\cos^3\theta\sin\theta d\theta = -\frac{8}{3}a^3\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\alpha} = -\frac{2}{3}a^3(\cos^4\alpha - 1) =$$

$$= \frac{2}{3}a^3(1-\cos^4\alpha).$$

Подставляя это выражение под знак «внешнего» интеграла, получим

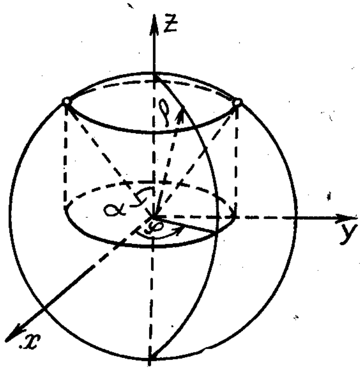
$$V = \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}a^3(1-\cos^4\alpha)\,d\varphi = \frac{2}{3}a^3(1-\cos^4\alpha)\cdot 2\pi.$$

Окончательно

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha) \text{ куб. ед.}$$

Для того, чтобы ощутить упрощение в решении, которое получено введением сферических координат, решите эту же задачу в прямоугольных координатах.

**Задача 3,13** (для самостоятельного решения). Вычислить объем шарового сектора, вырезанного у шара радиуса $R$ конусом, вершина которого находится в центре шара, а образующие наклонены к оси $Oz$ под углом $\alpha$.



К задаче 3,13

Указания. 1. Поместить вершину конуса, а тем самым и центр шара в начало координат. Так как поверхность, ограничивающая тело, — шар, то выгодно провести решение в сферических координатах. В отличие от предыдущей задачи, поскольку центр шара находится в начале координат, уравнение его поверхности будет $\rho = R$.

2. Переменные $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ в объеме $(V)$ меняются в таких пределах:

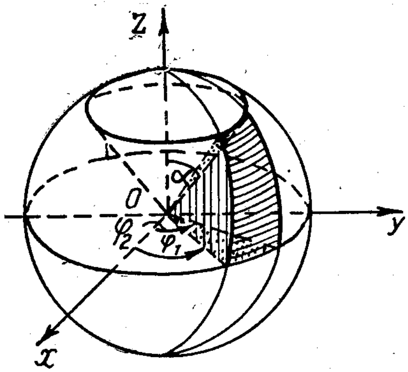
а) переменная $\rho$ от 0 до ее значения $R$ на поверхности шара;
б) переменная $\theta$ от 0 до $\alpha$;
в) переменная $\varphi$ от 0 до $2\pi$.

**Ответ.** $V = \frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{2}$ куб. ед.

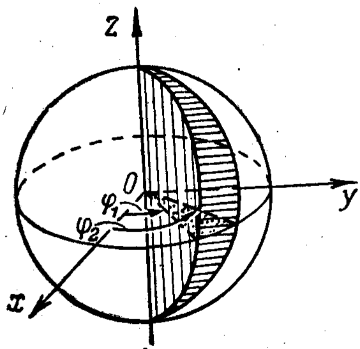
**Задача 3,14** (для самостоятельного решения). Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: 1) сферой радиуса $a$; 2) конусом с вершиной в центре сферы и образующими, наклоненными к оси $Oz$ под углом $\alpha$; 3) двумя плоскостями, проходящими через ось $Oz$ и составляющими с плоскостью $xOz$ углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$, причем $\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$; 4) плоскостью $xOy$.

Указания.

1. Решение провести в сферических координатах. Уравнение поверхности сферы $\rho = a$;




К задаче 3.14




К задаче 3,15

2. В объеме $(V)$ переменные $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ меняются в таких пределах:

а) $\rho$ от 0 до $a$;

б) $\theta$ от $\alpha$ до $\frac{\pi}{2}$;

в) $\varphi$ от $\varphi_1$ до $\varphi_2$.

3. $V = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_{0}^{a} \rho^2 d\rho.$

**Ответ.** $V = \frac{a^3}{3}(\varphi_2 - \varphi_1)\cos\alpha$ куб. ед.

**Задача 3,15** (для самостоятельного решения). Найти объем части шара радиуса $R$, заключенной между двумя меридианами, соответствующим долготам $\varphi_1$ и $\varphi_2$ $\left(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right)$.

**Ответ.** $V = \frac{2}{3}R^3(\varphi_2 - \varphi_1)$ куб. ед.

**Задача 3,16** (для самостоятельного решения). Найти объем тела, ограниченного поверхностями: 1) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$; $(b > a > 0)$; 3) конусом, образующие которого наклонены к оси $Oz$ под углом $\alpha$ (уравнение такого конуса $\theta = \alpha$); 4) плоскостью $y = x$; 5) плоскостью $xOy$ и 6) плоскостью $xOz$.

Указание. Перейти к сферическим координатам. Уравнения сфер будут такими: $\rho = a$ и $\rho = b$.

В объеме $(V)$ переменные $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ изменяются так:

а) $\rho$ от $a$ до $b$;

в) $\theta$ от $\alpha$ до $\frac{\pi}{2}$;

с) $\varphi$ от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

**Ответ.** $V = \frac{\pi}{12}(b^3 - a^3)\cos\alpha$ куб. ед.

**Задача 3,17** (для самостоятельного решения). Найти массу части шара радиуса $R$, находящейся в первом октанте, если в каждой его точке плотность равна расстоянию этой точки от плоскости $xOy$.

Указание.

1. Плотность $\gamma = z$. По формуле (3,6) искомая масса

$$M = \iiint\limits_{(v)} z dx dy dz.$$

2. Перейти к сферическим координатам. Для этого заменить $z$ по формуле (3,8), а $dx\,dy\,dz$ на элемент объема в сферических координатах — по формуле (3,11).

**Ответ.** $M = \frac{\pi R^4}{16}$.

Эту же задачу решите в прямоугольных координатах.

**Задача 3,18.** Вычислить массу тела, ограниченного поверхностями: 1) сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; 2) параболоидом $x^2+y^2=3z$. Плотность $\gamma$ в каждой точке тела равна аппликате точки: $\gamma = z$ (см. чертеж к задаче 3,8).

**Решение.** Здесь выгодно перейти к цилиндрическим координатам, так как в уравнении параболоида имеется сумма $x^2 + y^2$, а в цилиндрических координатах, как видно из формул (3,10),

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело, в цилиндрических координатах, заменив $x^2 + y^2$ на $\rho^2$.

Уравнение сферы запишется так:

$$\rho^2 + z^2 = 4; \quad \rho^2 = 4 - z^2.$$

Уравнение параболоида $\rho^2 = 3z$.

Из этих уравнений следует, что $z = \frac{\rho^2}{3}$ на параболоиде, $z = \sqrt{4 - \rho^2}$ — на сфере.

Спроектируем тело на плоскость $xOy$. Проекцией будет круг, ограниченный окружностью, радиус которого равен радиусу той окружности, по которой пересекаются поверхности, так как эта окружность без искажений проектируется на плоскость $xOy$. Радиус этой окружности проще всего определить так.

Найдем, при каком значении $z$ пересекаются поверхности. Для этого решим совместно уравнения поверхностей, преобразованные уже к цилиндрическим координатам, т. е. определим $z$ из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\rho^2 = 4 - z^2 \\ \rho^2 = 3z\end{array}\right\}.$$

Отсюда, приравнивая правые части этих уравнений, имеем

$$4 - z^2 = 3z; \quad z^2 + 3z - 4 = 0,$$

а

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -4.$$

Смыслу задачи удовлетворяет только $z_1 = 1$. Подставляя это значение $z_1 = 1$ в любое из уравнений системы, получим, что $\rho^2 = 3$, а $\rho = \sqrt{3}$.

Итак, радиус круга, в который спроектировалось тело, равен $R = \sqrt{3}$.

Таким образом, в теле переменные $z$, $\rho$ и $\varphi$ изменяются в пределах:

а) $z$ от $\frac{\rho^2}{3}$ до $\sqrt{4-\rho^2}$;

в) $\rho$ от 0 до $\sqrt{3}$;

с) $\varphi$ от 0 до $2\pi$.

Масса тела

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\,dx\,dy\,dz.$$

Поскольку координата $z$ в цилиндрических координатах такая же, как и в прямоугольных, то для вычисления этого тройного интеграла следует только заменить элемент объема $dx\,dy\,dz$ по формуле (3,12) на $\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

Таким образом,

$$M = \iiint\limits_{(v)} z\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \rho\,d\rho \int\limits_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z\,dz.$$

Вычисления проведите самостоятельно — они очень просты.

**Ответ.** $M = \frac{13}{4}\pi$.

**Задача 3,19** (для самостоятельного решения). Вычислить объем той части шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, которая лежит внутри цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам, заменив в уравнениях поверхностей $x^2+y^2$ на $\rho^2$

$$V=2\iiint\limits_{(v)}\rho d\rho\, d\varphi\, dz=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4R^2-\rho^2}}dz.$$

**Ответ.** $V=\frac{4}{3}\pi R^3(8-3\sqrt{3})$ куб. ед.

**Задача 3,20** (для самостоятельного решения). Вычислить объем, ограниченный поверхностями $x^2+y^2=R^2$; $x^2+y^2=z$; $z=0$.

Указание. Перейти к цилиндрическим координатам.

**Ответ.** $V=\frac{\pi R^4}{2}$ куб. ед.

## ЧЕТВЕРТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции плоских фигур и тел.

Упражнения этого практического занятия являются продолжением упражнений в вычислении двойных и тройных интегралов.

### ФОРМУЛЫ ДЛЯ СПРАВОК

**1. Статические моменты площадей плоских фигур.** Статические моменты плоской фигуры ($\sigma$) $S_x$ и $S_y$ относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$ вычисляются при помощи двойных интегралов по формулам

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x, y)\, y\, dx\, dy;\quad S_y=\iint\limits_{(\sigma)}\gamma(x, y)\, x\, dx\, dy, \tag{4,1}$$

где $\gamma(x, y)$ — плотность распределения масс.

Если фигура однородна, то $\gamma(x, y)=\text{const}$, которую в приложениях часто принимают равной 1. В этом случае формулы (4,1) принимают вид

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)}y\, dx\, dy;\quad S_y=\iint\limits_{(\sigma)}x\, dx\, dy. \tag{4,2}$$

Если вычисления ведутся в полярных координатах, то $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\, dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$.

Формулы (4,2) перепишутся так:

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi; \quad S_y = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \cos\varphi d\rho d\varphi. \tag{4,3}$$

**2. Координаты центра тяжести площади плоской фигуры** вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, dx\, dy}, \tag{4,4}$$

где $x_c$ и $y_c$ — соответственно абсцисса и ордината центра тяжести фигуры.

Если фигура однородна, то плотность $\gamma(x, y) = \text{const}$. Эта величина может быть вынесена за знак интеграла в числителе и знаменателе и сокращена. Формулы (4,4) перепишутся так:

$$x_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} x\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} dx\, dy}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_{(\sigma)} y\, dx\, dy}{\iint\limits_{(\sigma)} dx\, dy}. \tag{4,5}$$

(Знаменатели этих дробей — площадь фигуры, центр тяжести которой отыскивается).

В полярные координаты эти формулы преобразовываются так же, как и формулы (4,2) (см. выше).

**3. Моменты инерции площади плоской фигуры** относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, y^2\, dx\, dy; \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x, y)\, x^2\, dx\, dy. \tag{4,6}$$

Если фигура однородна, то плотность $\gamma(x, y) = \text{const}$ и если она принимается равной единице, то формулы (4,6) приобретают вид

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\, dx\, dy; \quad I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\, dx\, dy. \tag{4,7}$$

Преобразование этих формул к полярным координатам производится по тем же правилам, что и формул (4,2). (Моменты инерции относительно координатных осей часто называются осевыми моментами инерции).

В задачах, которые решаются на этом практическом занятии, все размеры указаны в сантиметрах.

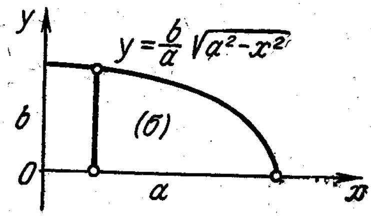
## I. Определение статических моментов и координат центра тяжести площади плоской фигуры *

**Задача 4,1.** Определить статические моменты $S_x$ и $S_y$ однородной фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и координатными осями.

**Решение.** В области интегрирования ($\sigma$) переменные $x$ и $y$ изменяются в таких пределах:

переменная $y$ от 0 до $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$;

переменная $x$ от 0 до $a$.




К задаче 4,1

Поэтому по формулам (4,2) получаем

$$S_x=\iint\limits_{(\sigma)} y\,dx\,dy=\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy=\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\text{ а } S_x=\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\int\limits_0^a(a^2-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{b}{2a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{b^2}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3.$$

$$S_x=\frac{1}{3}ab^2\ см^3;$$

$$S_y=\iint\limits_{(\sigma)} x\,dx\,dy=\int\limits_0^a x\,dx\int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy.$$

Вычисления проведите самостоятельно

$$S_y=\frac{1}{3}a^2b\ см^3.$$

**Задача 4,2** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести фигуры, указанной в предыдущей задаче.

**Указание.** Площадь этой фигуры как площадь одной четверти фигуры, ограниченной эллипсом, равна $\frac{\pi ab}{4}$. (Следует вспомнить, что площадь, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ равна $\pi ab$).

**Ответ.** $x_c=\frac{4}{3}\cdot\frac{a}{\pi}\ см;\quad y_c=\frac{4}{3}\cdot\frac{b}{\pi}\ см.$

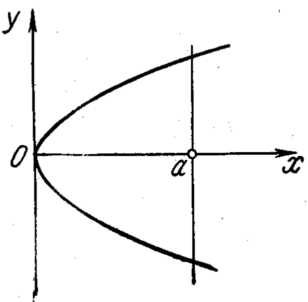
---

* В дальнейшем для сокращения записей в фразе «площади плоской фигуры» слово «площадь» мы опускаем.

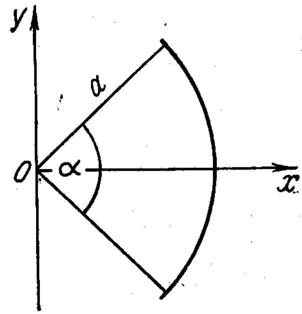
**Задача 4,3** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести фигуры, лежащей в первой четверти, ограниченной эллипсом $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и координатными осями, если в каждой точке фигуры плотность пропорциональна произведению координат этой точки: $\gamma(x, y) = kxy$ (см. чертеж к задаче 4,1).
$k$ — коэффициент пропорциональности.

Указание. Знаменатели дробей в формулах (4,4), (т. е. масса этой фигуры) окажутся равными $\frac{1}{8}ka^2b^2$. Числители дробей равны соответственно $\frac{1}{15}ka^3b^2$ и $\frac{1}{15}ka^2b^3$.

Ответ. $x_c = \frac{8}{15}a$ *см*; $y_c = \frac{8}{15}b$ *см*.



К задаче 4,4



К задаче 4,5

**Задача 4,4** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной кривой $y^2 = 2px$ и прямой $x = a$.

Указание. Учитывая симметрию фигуры относительно оси $Ox$, легко усмотреть, что центр тяжести лежит на оси $Ox$, а потому $y_c = 0$. Абсцисса центра тяжести определится по формуле (4,5).

В области $(\sigma)$ переменные $x$ и $y$ изменяются в таких пределах:
переменная $y$ от $-\sqrt{2px}$ до $+\sqrt{2px}$;
переменная $x$ от 0 до $a$.

(Пределы интегрирования по $y$ найдены так: из уравнения параболы $y^2 = 2px$ следует, что $y = \pm\sqrt{2px}$).

Ответ. $x_c = \frac{3}{5}a$ *см*.

Интересно отметить независимость полученного результата от параметра параболы.

**Задача 4,5.** Определить координаты центра тяжести сектора однородного круга радиуса $a$ с центральным углом $\alpha$, расположенного симметрично относительно оси $Ox$ (см. чертеж).

**Решение.** Задачу удобно решать в полярных координатах. В формулах (4,5) выгодно перейти к полярным координатам, сделав в них такие замены: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, а элемент площади $dx\,dy$ должен быть заменен на $\rho d\rho d\varphi$. Тогда окажется, что

$$x_c=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)}\rho\,d\rho\,d\varphi};\quad y_c=\frac{\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi}{\iint\limits_{(\sigma)}\rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

Нам следует вычислить только $x_c$, так как из симметрии фигуры относительно оси $Ox$ следует, что $y_c=0$.

В области $(\sigma)$ переменные $\rho$ и $\varphi$ изменяются в таких пределах:
переменная $\rho$ от 0 до $a$;

переменная $\varphi$ от $-\frac{\alpha}{2}$ до $+\frac{\alpha}{2}$.

Поэтому числитель дроби в выражении для $x_c$

$$I=\iint\limits_{(\sigma)}\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^a\rho^2\,d\rho.$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^a\rho^2\,d\rho=\frac{a^3}{3},$$

получаем

$$I=\frac{a^3}{3}\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{a^3}{3}(\sin\varphi)\Bigg|_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Знаменатель дроби в формуле для $x_c$

$$I_1=\iint\limits_{(\sigma)}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}d\varphi\int\limits_0^a\rho\,d\rho=\frac{1}{2}a^2\alpha.$$

(Мы могли бы $I_1$ не вычислять, так как из геометрии известно, что площадь кругового сектора радиуса $a$ с центральным углом $\alpha$ равна половине произведения квадрата радиуса на центральный угол, выраженный в радианах).

Итак,

$$x_c=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}a^2\alpha}=\frac{2}{3}a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\ \textit{см}.$$

Если $\alpha = \pi$, т. е. если сектор является полукругом, то

$$x_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi} \text{ см.}$$

Центр тяжести полукруга находится от его диаметра на расстоянии, равном $\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$. Если же $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то

$$x_c = \frac{4}{3}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{\pi} \text{ см.}$$

**Задача 4,6** (для самостоятельного решения). Найти статический момент однородного полукруга радиуса $a$ относительно его диаметра и расстояние его центра тяжести от этого диаметра.

Указание. Решение провести в полярных координатах. Диаметр круга расположить на оси $Ox$, а его центр поместить в начало координат. Тогда по первой формуле в (4,3)

$$S_x = \iint\limits_{(\sigma)} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi = \int\limits_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 d\rho;$$

$$S_x = \frac{2}{3} a^3 \text{ см}^3.$$

Учитывая, что площадь полукруга равна $\frac{\pi a^2}{2}$, для расстояния центра тяжести от диаметра получаем по второй формуле (4,5)

$$y_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi} \text{ см.}$$

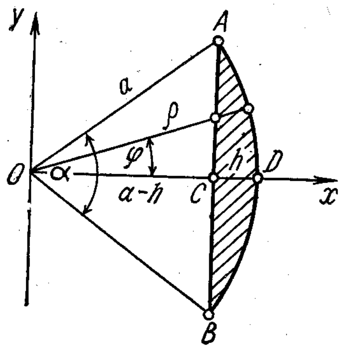
Этот результат уже известен нам из задачи 4,5, только в ней это расстояние было обозначено не через $y_c$, а через $x_c$.

**Задача 4,7** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести сегмента однородного круга радиуса $a$, высоты $h$ с центральным углом $\alpha$ (см. чертеж).

Указание. Уравнение линии $OA$: $y = x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а уравнение линии $OB$: $y = -x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Решение провести в прямоугольных координатах. Ордината центра тяжести из-за симметрии фигуры относительно оси $Ox$ равна нулю. Абсциссу $x_c$ центра тяжести найти по первой из формул (4,5). В области интегрирования переменные $x$ и $y$ изменяются так:

переменная $y$ от $-\sqrt{a^2 - x^2}$ до $+\sqrt{a^2 - x^2}$

переменная $x$ от $a - h$ до $a$, но $a - h = a\cos\frac{\alpha}{2}$, а поэтому переменная $x$ изменяется от $a\cos\frac{\alpha}{2}$ до $a$.



К задаче 4,7

Числитель дроби в указанной формуле

$$\iint_{(\sigma)} x\,dx\,dy = \int_{a\cos\frac{\alpha}{2}}^{a} x\,dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{+\sqrt{a^2-x^2}} dy$$

Этот интеграл равен

$$\frac{2}{3}a^3\sin^3\frac{\alpha}{2}.$$

Площадь сегмента, равная знаменателю дроби в формулах (4, 5) равна разности площадей сектора $OADBO$ и треугольника $OAB$ и может быть найдена без интегрирования. Учитывая, что площадь треугольника равна половине произведения его сторон на синус угла между ними, т. е. $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$, для площади сегмента получаем $\frac{1}{2}a^2(\alpha-\sin\alpha)$, так как площадь сектора равна $\frac{1}{2}a^2\alpha$. Этот результат полезно получить и вычислением интеграла в знаменателе дроби первой из формул (4,5).

**Ответ.** $x_c = \frac{4}{3}a\cdot\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\alpha-\sin\alpha}$ *см.*

Полезным упражнением будет решение этой же задачи в полярных координатах. Переменные $\rho$ и $\varphi$ изменяются в таких пределах:

$$\rho \text{ от } \frac{a-h}{\cos\varphi} \text{ до } a;$$

$$\varphi \text{ от } -\frac{\alpha}{2} \text{ до } \frac{\alpha}{2}.$$

**Задача 4,8** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородного сектора кругового кольца с внутренним радиусом $r$, внешним $R$ и центральным углом $\alpha$ (см. чертеж).

Указание. Вычисление провести в полярных координатах, преобразовав формулы (4,5) к этим координатам, как указано выше. В области интегрирования переменные $\rho$ и $\varphi$ изменяются так:

$$\rho \text{ от } r \text{ до } R;$$

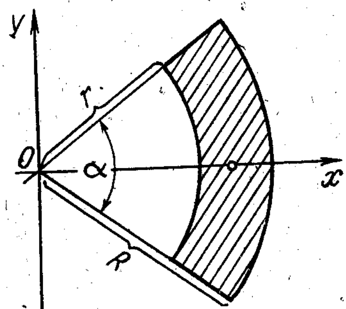
$$\varphi \text{ от } -\frac{\alpha}{2} \text{ до } \frac{\alpha}{2}.$$

Площадь этого кругового кольца равна разности площадей круговых секторов с радиусами $r$ и $R$.

**Ответ.**

$$x_c = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}\cdot\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}\text{ см};$$

$$y_c = 0.$$



К задаче 4,8

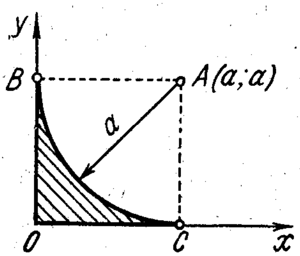
**Задача 4,9** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести так называемого кругового треугольника (см. чертеж) — фигуры, ограниченной другой окружностью и координатными осями, которых она касается.

Указание. Уравнение окружности с центром в точке $(a, a)$ радиуса $a$ запишется так:

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2.$$

Чтобы определить пределы интегрирования, надо решить уравнение окружности относительно переменной $y$:

$$y=a \pm \sqrt{a^2-(x-a)^2}.$$




К задаче 4,9

На дуге $BC$ $y=a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}$. В области интегрирования переменные $x$ и $y$ изменяются в таких пределах:

переменная $y$ от 0 до

$$a-\sqrt{a^2-(x-a)^2};$$

переменная $x$ от 0 до $a$. При вычислении $x_c$ встретится интеграл

$$I=\int_0^a x\left(a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx. \qquad \text{(A)}$$

Его удобно представить в виде

$$\int_0^a [(x-a)+a]\left(a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^a \left[ax-(x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}-a\sqrt{a^2-(x-a)^2}\right]dx.$$

Интеграл

$$\int_0^a (x-a)\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx=-\frac{1}{2}\left.\frac{[a^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^a.$$

Интеграл

$$\int_0^a \sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx$$

легко вычисляется по формуле

$$\int\sqrt{a^2-u^2}\cdot u'\,dx=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}.$$

Интеграл $I=\frac{a^3}{12}(10-3\pi)$.

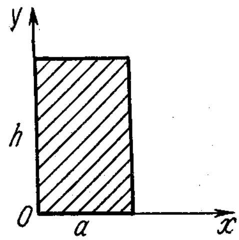
Площадь фигуры — знаменатель в дробях в формулах (4,5) — находится просто: она равна площади квадрата $OBAC$, т. е. $a^2$ минус площадь четверти круга $\frac{\pi a^2}{4}$ $см^2$. Площадь фигуры $OBC$ равна, таким образом, $\frac{a^2}{4}(4-\pi)$.

**Ответ.** $x_c = y_c = \frac{a}{3} \cdot \frac{10-3\pi}{4-\pi} \approx 0{,}223\,a$ *см*.

## II. Определение моментов инерции плоской фигуры

**Задача 4,10.** Найти момент инерции прямоугольника относительно его основания и высоты. Основание прямоугольника $a$ *см*, высота $h$ *см*.

**Решение.** Расположим оси прямоугольной системы координат так, как это показано на чертеже. Моменты инерции прямоугольника относительно его основания и высоты есть его моменты инерции относительно осей $Ox$ и $Oy$ соответственно.



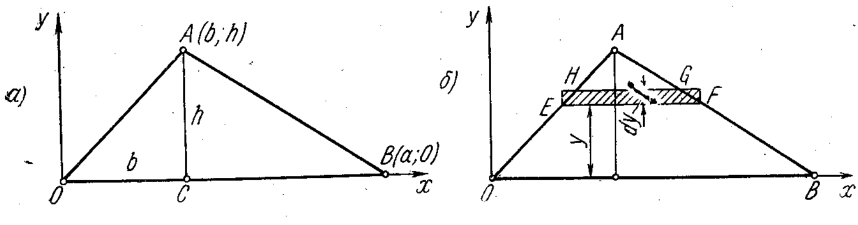
К задаче 4,10

По формулам (4,7) находим

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^h y^2\,dy = \frac{ah^3}{3}\,см^4;$$

$$I_y = \iint\limits_{(\sigma)} x^2\,dx\,dy = \int_0^a x^2\,dx \int_0^h dy = \frac{a^3h}{3}\,см^4.$$

**Задача 4,11.** Найти момент инерции однородного треугольника относительно его основания (см. чертеж).



К задаче 4,11

**Решение.** Укажем два способа решения этой задачи:

1. Пусть основание треугольника равно $a$ *см*, его высота $h$ *см*, а отрезок основания $OC$ от вершины $O$ до высоты равен $b$ *см* (см. чертеж а).

Уравнение стороны $OA$ будет таким: $y = \frac{h}{b}x$, а уравнение стороны $AB$: $y = h - h\frac{x-b}{a-b}$ (это уравнение легко найти, пользуясь уравнением прямой, проходящей через две данные точки). В области интегрирования переменные $x$ и $y$ изменяются в таких пределах:

переменная $x$ от $\frac{b}{h}y$ до $-\frac{y-h}{h}(a-b)+b$;

переменная $y$ от 0 до $h$

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \int\limits_0^h y^2\,dy \int\limits_{\frac{b}{h}y}^{-\frac{y-h}{h}(a-b)+b} dx =$$

$$= \int\limits_0^h \left[-\frac{y-h}{h}(a-b)+b-\frac{by}{h}\right] y^2\,dy =$$

$$= \int\limits_0^h \left(a-\frac{ay}{h}\right) y^2\,dy = \left(\frac{ay^3}{3}-\frac{ay^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{ah^3}{3}-\frac{ah^3}{4} = \frac{ah^3}{12}\ см^4.$$

Итак, момент инерции треугольника относительно его основания

$$I_x = \frac{ah^3}{12}\ см^4.$$

2. Перепишем первую формулу в (4,7) так:

$$I_x = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma)} y^2\,d\sigma. \qquad (A)$$

Найдем элемент $EFGH$ площади (см. чертеж б) к этой задаче) — площадь прямоугольника с высотой $dy$ и основанием $EF: d\sigma = EF\cdot dy$. Определим $EF$ в зависимости от $y$.

Из подобия треугольников $OAB$ и $EFA$

$$\frac{EF}{OB} = \frac{h-y}{h};\quad EF = a\cdot\frac{h-y}{h},$$

а

$$d\sigma = a\cdot\frac{h-y}{h}\,dy.$$

Если подставить это выражение под знак интеграла в ($A$), то мы получим одномерный определенный интеграл

$$I_x = \int\limits_0^h y^2\cdot a\cdot\frac{h-y}{h}\,dy$$

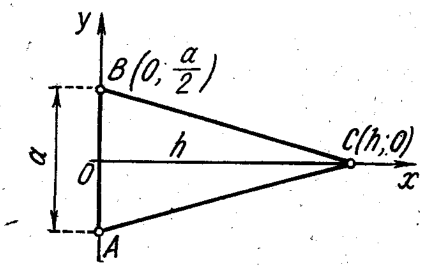
и для $I_x$ получится ранее найденное значение.

Конечно, второе решение проще первого, но его нельзя не признать несколько искусственным. Все-таки проще пользоваться общим приемом, чем каждый раз находить $d\sigma$.

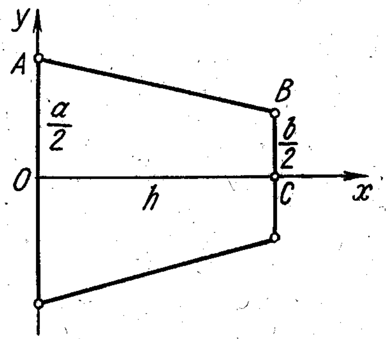
**Задача 4, 12** (для самостоятельного решения). Найти моменты инерции однородного равнобедренного треугольника относительно его высоты (см. чертеж). Основание треугольника равно *a см*, высота *h см*.

Указание. Расположить оси, как показано на чертеже. Уравнение стороны $BC$: $y = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{x}{h}\right)$.

Вычислить момент инерции треугольника $OBC$ относительно оси $Ox$ и полученное число умножить на 2, так как момент




К задаче 4,12




К задаче 4,13

инерции треугольника $ABC$ равен удвоенному моменту инерции треугольника $OBC$.

**Ответ.** $I_x = \frac{a^3h}{48}$ $см^4$.

**Задача 4, 13** (для самостоятельного решения). Найти момент инерции однородной равносторонней трапеции относительно прямой, соединяющей середины оснований. Размеры: большее основание равно *a см*, меньшее *b см*, высота *h см*.

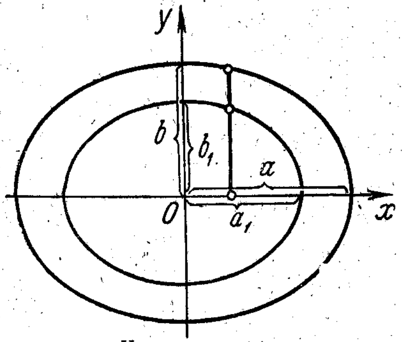
Указание. Расположить оси, как указано на чертеже. Найти момент инерции трапеции $OABC$ и найденное число удвоить. Уравнение стороны $AB$: $y = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{x}{h} + \frac{a}{2}$.

**Ответ.** $I_x = \frac{h}{48} \cdot \frac{a^4 - b^4}{a - b}$ $см^4$.

**Задача 4, 14.** Определить момент инерции $I_x$ и $I_y$ эллиптического однородного кольца, образованного двумя эллипсами с общим центром и совпадающими осями («концентрические» эллипсы). Оси внешнего эллипса *a см* и *b см*, а внутреннего $a_1$ *см* и $b_1$ *см*.

**Решение.** Вычислим моменты инерции четверти эллиптического кольца, расположенного в первой четверти. Для этого вычислим моменты инерции $I_x^{\text{внешн}}$ и $I_y^{\text{внешн}}$ площади, ограниченной внешним эллипсом и осями координат ($x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$), и вычтем из них соответственно моменты инерции $I_x^{\text{внутр}}$ и $I_y^{\text{внутр}}$ площади, ограниченной внутренним эллипсом и осями координат.

В первой четверти на площади, ограниченной внешним эллипсом и осями координат, переменные $x$ и $y$ изменяются в таких пределах:



К задаче 4,14

$$y \text{ от } 0 \text{ до } \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2};$$

$$x \text{ от } 0 \text{ до } a.$$

Поэтому

$$\frac{I_x^{\text{внешн}}}{4} = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy.$$

Внутренний интеграл

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2\,dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому

$$\frac{I_x^{\text{внешн}}}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Для вычисления $\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$ удобно применить тригонометрическую подстановку: $x = a\sin t$. Пределы интегрирования после подстановки станут равны 0 и $\frac{\pi}{2}$, а

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt.$$

С вычислением этого интеграла читатель неоднократно встречался. В результате вычислений окажется, что

$$I_x^{\text{внешн}} = \frac{1}{4}\pi ab^3\,см^4.$$

Совершенно ясно, что $I_x^{\text{внутр}} = \frac{1}{4}\pi a_1 b_1^3$.

Поэтому

$$I_x = \frac{1}{4}\pi ab^3 - \frac{1}{4}\pi a_1 b_1^3$$

и окончательно момент инерции эллиптического концентрического кольца относительно оси $Ox$

$$I_x = \frac{\pi}{4}(ab^3 - a_1 b^3)\ см^4. \qquad (A)$$

Докажите самостоятельно, что

$$I_y = \frac{\pi}{4}(a^3 b - a_1^3 b)\ см^4. \qquad (B)$$

Из полученных формул легко определить моменты инерции площади, ограниченной эллипсом, и площади круга. Чтобы получить моменты инерции площади, ограниченной эллипсом, а не эллиптическим кольцом, надо в предыдущих формулах взять $a_1 = 0$ и $b_1 = 0$.

Получим для эллипса

$$I_x = \frac{\pi}{4}ab^3; \quad I_y = \frac{\pi}{4}a^3 b.$$

Так как при $a = b$ эллипс становится окружностью, то для моментов инерции круга из последних формул получаем

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}a^4\ см^4.$$

Из формул ($A$) и ($B$) легко получаются моменты инерции кругового кольца. В этом случае $b = a$, $b_1 = a_1$ и моменты инерции кругового кольца определятся по формулам

$$I_x = I_y = \frac{\pi}{4}(a^4 - a_1^4)\ см^4,$$

где $a$ — радиус внешней окружности, а $a_1$ — радиус внутренней окружности.

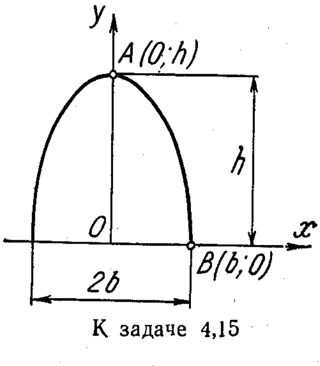
**Задача 4, 15** (для самостоятельного решения). Определить момент инерции $I_x$ параболического сегмента с размерами, указанными на чертеже.

Указание. Уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 + c$. Параметры $a$ и $c$ определить, учитывая, что парабола проходит через точки $(0, h)$ и $(b, 0)$.

Окажется, что $a = -\frac{h}{b^2}$; $c = h$, уравнение параболы будет таким:

$$y = -\frac{h}{b^2}x^2 + h.$$

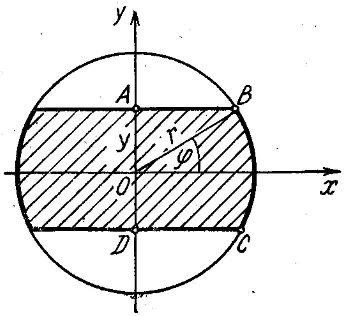
**Ответ.** $I_x = \frac{32}{105}bh^3\ см^4$.




К задаче 4,15

**Задача 4,16** (для самостоятельного решения). Определить относительно оси $Ox$ момент инерции фигуры, изображенной на чертеже.

Указание. Вычислить момент инерции половины площади фигуры, а полученное число удвоить. Так как уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$, то переменные $x$ и $y$ в области интегрирования изменяются:




К задаче 4,16

переменная $x$ от 0 до $\sqrt{r^2-y^2}$;
переменная $y$ от 0 до $r\sin\varphi$

($\varphi$ — величина постоянная).

$$I_x = 2\iint\limits_{(\sigma)} y^2\,dx\,dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{r\sin\varphi} y^2\,dy \int\limits_0^{\sqrt{r^2-y^2}} dx.$$

Интеграл $\int\limits_0^{r\sin\alpha} y^2\sqrt{r^2-y^2}\,dy$ удобно вычислить с помощью тригонометрической подстановки $y=r\sin u$. Пределами интегрирования станут 0 и $u$. При определении нового верхнего предела окажется, что $\varphi=u$. Поэтому удобно верхний предел обозначить через $\varphi$, чтобы он отличался от переменной $u$, по которой ведется интегрирование.

Заменить $\sin^2 u\cos^2 u$ через $\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2 2u$.

**Ответ.**

$$I_x = \frac{r^4}{2}\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right) см^4.$$

## III. Вычисление статических моментов, координат центра тяжести и моментов инерции тел

1. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей $xOy$, $yOz$ и $xOz$ вычисляются по формулам

$$S_{xy}=\iiint\limits_{(v)}\gamma z\,dv;\quad S_{yz}=\iiint\limits_{(v)}\gamma x\,dv;\quad S_{xz}=\iiint\gamma y\,dv. \qquad (4,8)$$

2. Координаты $x_c$, $y_c$, $z_c$ центра тяжести тела определяются по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \gamma x\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv}; \quad y_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \gamma y\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv} \\ z_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \gamma z\, dv}{\iiint\limits_{(v)} \gamma\, dv} \end{aligned}\right\} \quad (4,9)$$

3. Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{(v)} \gamma z^2\, dv; \quad I_{yz} = \iiint\limits_{(v)} \gamma x^2\, dx; \quad I_{xz} = \iiint\limits_{(v)} \gamma y^2\, dv. \quad (4,10)$$

4. Моменты инерции тела относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$I_x = \iiint\limits_{(v)} \gamma (y^2 + z^2)\, dv; \quad I_y = \iiint\limits_{(v)} \gamma (x^2 + z^2)\, dv; \quad (4,11)$$

$$I_z = \iiint\limits_{(v)} \gamma (x^2 + y^2)\, dv.$$

Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_{(v)} \gamma\, x^2 + y^2 + z^2)\, dv. \quad (4,12)$$

Во всех этих формулах $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — переменная плотность, $dv$ — элемент объема. В случае, если тело однородно, то, применяя эти формулы, часто удобно считать, что $\gamma = 1$.

Если вычисления по этим формулам ведутся в цилиндрических координатах, надо $x$, $y$ и $z$ заменить по формулам (3, 10), а элемент объема $dv$ — на $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

При вычислении в сферических координатах надо $x$, $y$ и $z$ заменить по формулам (3,8), а элемент объема $dv$ — на $\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$.

В прямоугольных координатах элемент объема

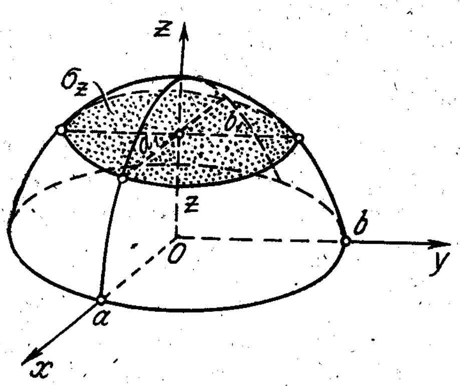
$$dv = dx\, dy\, dz.$$

**Задача 4,17.** Вычислить координаты центра тяжести однородного тела, расположенного над плоскостью $xOy$ и ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad z = 0 \quad (z \geqslant 0).$$

**Решение.** Воспользуемся формулами (4, 9). Тело по условию однородно, и мы полагаем в них $\gamma = 1$. Из симметрии тела относительно координатных плоскостей $xOz$ и $yOz$ видно, что $x_c = 0$; $y_c = 0$, центр тяжести лежит на оси $Oz$. Знаменатель дроби в каждой из формул (4, 9) при $\gamma = 1$ — объем тела. Объем тела, ограниченный эллипсоидом, нами уже вычислен в задаче 2,10. Он равен $\frac{4}{3}\pi abc$. Поэтому интересующий нас объем равен половине этого объема, т. е. $\frac{2}{3}\pi abc$.

Остается только вычислить числитель в третьей из формул (4,9). С учетом того, что вычисления ведутся в прямоугольной системе координат, в которых элемент объема $dv = dx\,dy\,dz$, имеем




К задаче 4,17

$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv = \iiint\limits_{(v)} z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^c z\,dz \iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy, \qquad \text{(A)}$$

где $\sigma_z$ — область, полученная в сечении эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси $Oz$ на расстоянии $z$ от плоскости $xOy\,(z < c)$. Если считать $z$ величиной фиксированной, то из уравнения эллипсоида следует, что уравнение эллипса в этом сечении

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}$$

или

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Полуоси этого эллипса равны

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}; \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Двойной интеграл $\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy$ в формуле (А) равен площади этого эллипса, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_z)} dx\,dy = \pi a_1 b_1 = \pi a\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Поэтому интересующий нас интеграл

$$\iiint\limits_{(v)} z\,dv = \int\limits_0^c z\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz =$$

$$= \pi ab\int\limits_0^c\left(z-\frac{z^3}{c^2}\right)dz = \pi ab\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4c^2}\right)\Bigg|_0^c =$$

$$= \pi ab\left(\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right) = \frac{1}{4}\pi abc^2,$$

а

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi abc^2}{\frac{2}{3}\pi abc} = \frac{3}{8}c\ \text{см}.$$

$$x_c = 0;\quad y_c = 0;\quad z_c = \frac{3}{8}\ \text{см}.$$

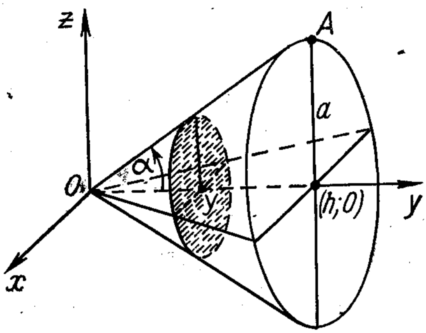
**Задача 4,18.** Найти координаты центра тяжести однородного кругового конуса, радиус основания которого равен $a$, а высота $h$.

**Решение.** Поверхность конуса образована вращением прямой $OA$ вокруг оси $Oy$. Уравнение этой прямой $z = y\operatorname{tg}\alpha$. Уравнение поверхности конуса

$$\pm\sqrt{x^2+z^2} = y\operatorname{tg}\alpha,$$

или

$$x^2+z^2 = y^2\operatorname{tg}^2\alpha. \qquad (A)$$



К задаче 4,18

Из симметрии тела относительно координатных плоскостей $xOy$ и $yOz$ ясно, что его центр тяжести лежит на оси $Oy$, а $x_c = z_c = 0$.

Чтобы вычислить $y_c$, надо воспользоваться второй из формул (4,9). В этой формуле знаменатель дроби — объем конуса, равный $\frac{1}{3}\pi a^2 h$, а потому нам остается вычислить только числитель этой дроби, т. е.

$$\iiint\limits_{(v)} y\,dv = \iiint\limits_{(v)} y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^h y\,dy\iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz, \qquad (B)$$

где $(\sigma_y)$ — сечение конуса плоскостью, перпендикулярной оси $Oy$ при фиксированном значении $y\,(O < y < h)$. Этим сечением является круг, радиус которого из уравнения (A) равен

$$r = y\operatorname{tg}\alpha.$$

В уравнении (A) правая часть при постоянном $y$ равна квадрату радиуса.

Двойной интеграл в $(B)$ равен площади этого круга, т. е.

$$\iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz = \pi r^2 = \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

а потому из формулы (B)

$$\int\limits_0^h y\,dy \iint\limits_{(\sigma_y)} dx\,dz = \int\limits_0^h y \cdot \pi y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\,dy =$$

$$= \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \int\limits_0^h y^3\,dy = \pi \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \frac{h^4}{4}.$$

Но $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{h}$, а потому этот интеграл равен

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{a^2}{h^2} \cdot h^4 = \frac{1}{4} \pi a^2 h^2.$$

Окончательно, деля эту величину на объем конуса, получим, что

$$y_c = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 h^2}{\frac{1}{3}\pi a^2 h} = \frac{3}{4} h \text{ см}.$$

Таким образом, центр тяжести однородного кругового конуса лежит на его оси на расстоянии, равном $\frac{3}{4}h$ от вершины.

**Задача 4,19** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

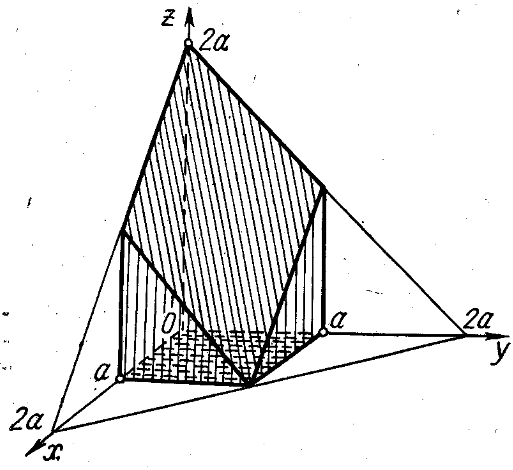
**Ответ.**

$$x_c = y_c = z_c = \frac{a}{4}.$$

**Задача 4,20** (для самостоятельного решения). Определить координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями $x + y + z = 2a$; $x = a$; $y = a$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

**Ответ.**

$x_c = \frac{5}{12} a$ *см*; $y_c = \frac{5}{12} a$ *см*; $z_c = \frac{7}{12} a$ *см*.

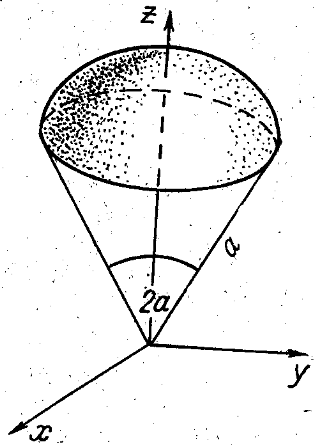


К задаче 4,20

**Задача 4,21.** Найти центр тяжести сектора однородного шара радиуса $a$ с телесным углом $2\alpha$.

**Решение.** Разместим оси, как указано на чертеже. Вычисления проведем в сферических координатах. Ясно, что центр тяжести находится на оси $Oz$, а потому $x_c = y_c = 0$. Координату центра тяжести найдем по третьей формуле в (4,9). После перехода к сферическим координатам ($z = \rho\cos\theta$; $dv = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$) получим

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta\cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}{\iiint\limits_{(v)} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}. \qquad \text{(A)}$$



К задаче 4.21

Переменные $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ в области интегрирования изменяются так:

$\rho$ от 0 до $a$;
$\theta$ от 0 до $\alpha$;
$\varphi$ от 0 до $2\pi$.

Знаменатель дроби в этой формуле — объем ($v$) указанного шарового сектора. В задаче 3,13 этот объем уже вычислен. Вычисляем числитель дроби в (А)

$$\iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta\cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\alpha} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{a} \rho^3 \, d\rho =$$

$$= \frac{a^4}{4} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{2} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$z_c = \frac{\frac{1}{4}\pi a^4 \sin^2\alpha}{\frac{4}{3}\pi a^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{3}{16} a \cdot \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Окончательно

$$z_c = \frac{3}{4} a \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ см}.$$

**Задача 4,22** (для самостоятельного решения). Найти координаты центра тяжести клинообразного однородного тела, ограниченного сферой радиуса $a$, плоскостью $xOy$ и двумя меридианными плоскостями, составляющими с плоскостью $xOz$ углы с соответственно равными $\varphi_1$ и $\varphi_2$

$$\left(\varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}\right).$$

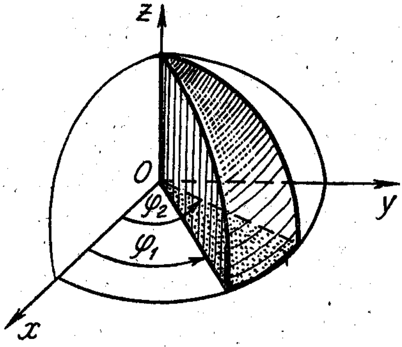
Указание. На основании результата, полученного в задаче 3,15, объем интересующего нас тела

$$V = \frac{1}{3} a^3 (\varphi_2 - \varphi_1).$$

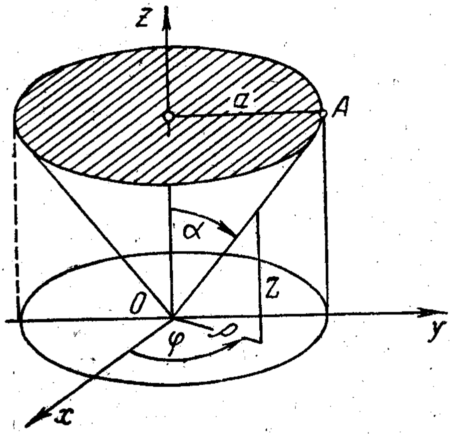
Вычисления провести в сферических координатах. Числители дробей в (4,9) для вычисления $x_c$, $y_c$ и $z_c$ окажутся соответственно равными

$$I_1 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin^2\theta \cos\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi; \quad I_2 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin^2\theta \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi;$$

$$I_3 = \iiint\limits_{(v)} \rho^3 \sin\theta \cos\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$




К задаче 4,22




К задаче 4,23

Переменные $\rho$, $\theta$ и $\varphi$ в области интегрирования изменяются так:

$$\rho \text{ от } 0 \text{ до } a;$$

$$\theta \text{ от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi \text{ от } \varphi_1 \text{ до } \varphi_2.$$

Указанные выше интегралы окажутся соответственно равными:

$$\frac{\pi a^4}{16} (\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1); \quad \frac{\pi a^4}{16} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2);$$

$$\frac{a^4 (\varphi_2 - \varphi_1)}{8}.$$

**Ответ.** $x_c = \frac{3}{16} \pi a \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}$; $y_c = \frac{3}{16} \pi a \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1}$; $z_c = \frac{3}{8} a$.

**Задача 4,23** (для самостоятельного решения). Определить момент инерции однородного кругового конуса относительно его оси, если высота конуса равна $h$ *см*, радиус основания $a$ *см*, угол между образующей и высотой конуса равен $\alpha$.

Указание. Расположить координатные оси, как показано на чертеже. Уравнение поверхности конуса в цилиндрических координатах $z = \rho \operatorname{ctg} \alpha$.

Наличие суммы $x^2 + y^2$ в (4,11) указывает на целесообразность перейти к цилиндрическим координатам, в которых $x^2 + y^2 = \rho^2$, а $dv = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$.

В области интегрирования переменные $z, \rho$ и $\varphi$ изменяются так: $z$ от его значения $z = \rho \operatorname{ctg} \alpha$ на поверхности конуса до $z = h$ на его основании; переменная $\rho$ от 0 до $a$, а $\varphi$ — от 0 до $2\pi$. Поэтому

$$I_z = \iiint\limits_{(v)} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^3 \, d\rho \int\limits_{\rho \operatorname{ctg} \alpha}^h dz.$$

**Ответ.** $I_z = \frac{1}{10} \pi a^4 h$ *см*$^5$.

**Задача 4,24.** Определить момент инерции однородного полого кругового цилиндра относительно его оси (ось $Oz$). Высота цилиндра равна $h$ *см*, внутренний радиус $a$ *см*, внешний $b$ *см*.

Указание. $I_z = \iiint\limits_{(v)} (x^2 + y^2) \, dv$. Перейти к цилиндрическим координатам.

**Ответ.** $I_z = \frac{1}{2} \pi h (b^4 - a^4)$ *см*$^5$.

**Задача 4,25** (для самостоятельного решения). Определить момент инерции относительно оси $Ox$ однородного тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Указание.

$$I_x = \iiint\limits_{(v)} (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} (y^2 + z^2) \, dy \, dz =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} y^2 \, dy \, dz + \int\limits_{-a}^{a} dx \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2 \, dy \, dz, \qquad \text{(A)}$$

где $(\sigma_x)$ — область, ограниченная эллипсом, по которому плоскость, перпендикулярная оси $Ox$, при фиксированном $x$, пересекает эллипсоид. Уравнение этого эллипса получим из уравнения эллипсоида, считая, что в нем $x$ — величина постоянная:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Полуоси этого эллипса

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \qquad \text{(B)}$$

Интегралы

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz \text{ и } \iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz$$

равны соответственно моментам инерции этого эллипса относительно его осей $c_1$ и $b_1$. В задаче 4,14 моменты инерции эллипса относительно его осей были получены:

$$I_{c_1} = \frac{1}{4}\pi b_1^3 c_1;\quad I_{b_1} = \frac{1}{4}\pi b_1 c_1^3.$$

Подставляя сюда значения $b_1$ и $c_1$ из соотношений (В), получим

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} y^2\,dy\,dz = I_{c_1} = \frac{1}{4} b^3 c\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2;$$

$$\iint\limits_{(\sigma_x)} z^2\,dy\,dz = I_{b_1} = \frac{1}{4} bc^3\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

Подставляя эти значения в (А) и выполняя интегрирование по $x$, получим окончательно

$$I_x = \frac{4}{15}\pi abc\,(b^2 + c^2)\ см^5.$$

Аналогично найдем моменты инерции этого тела относительно осей $Oy$ и $Oz$:

$$I_y = \frac{4}{15}\pi abc\,(a^2 + c^2)\ см^5;$$

$$I_z = \frac{4}{14}\pi abc\,(a^2 + b^2)\ см^5.$$

## ПЯТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание: Криволинейные интегралы.

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### I. Криволинейный интеграл I типа

Пусть на плоскости $xOy$ задана кривая линия $(L)$, в каждой точке которой определена функция $f(x, y)$ двух независимых переменных $x$ и $y$, предполагаемая непрерывной.

Разобьем дугу $AB$ кривой $(L)$ на $n$ частей точками: $A_0 = A$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_n = B$. На каждой части $A_iA_{i+1}$ выберем любую точку $M_i(x_i, y_i)$. Вычислим в этой точке значение заданной на кривой функции $f(x, y)$. Число $f(x_i, y_i)$ умножим на длину дуги $A_iA_{i+1} = \Delta S_i$. Сложим все эти произведения. Получится сумма

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i.$$

Отыщем предел этой суммы при условии, что наибольшая из дуг $A_iA_{i+1}$ стремится к нулю, а число их $n \to \infty$.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги $AB$, то этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения дуги $AB$ на части, ни от выбора точки $M(x_i, y_i)$ на каждой из этих частей.

*Этот предел называется криволинейным интегралом I типа и обозначается символом*

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS.$$

Таким образом,

$$\lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i = \int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS.$$

Из этого следует, что кривой $(AB)$ не приписывается определенного направления, т. е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{(BA)} f(x, y)\,dS.$$

По аналогии с этим, если $(AB)$ — пространственная кривая, то криволинейным интегралом, распространенным на эту кривую, называется интеграл вида

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,dS,$$

где $f(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных, определенная в каждой точке кривой $(AB)$, причем

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z)\,dS = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i.$$

## II. Формула для вычисления криволинейного интеграла I типа

Если кривая $AB$ задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\},$$

а параметр $t$ изменяется на дуге $AB$ от $t = \alpha$ до $t = \beta$, то криволинейный интеграл I типа вычисляется по формуле

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt. \qquad (5{,}1)$$

При этом предполагается, что производные функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывны.

Если кривая $(AB)$ задана уравнением $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,dS = \int\limits_{a}^{b} f[x, f(x)]\sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (5{,}2)$$

### III. Механический смысл криволинейного интеграла I типа

Если в каждой точке кривой $(AB)$ плотность $\mu$ масс, расположенных вдоль кривой, является заданной функцией координат этой точки, т. е. $\mu = f(x, y)$, *то масса* $m$ *этой кривой равна криволинейному интегралу I типа*:

$$m = \int_{(AB)} f(x, y)\, dS. \tag{5,3}$$

Если масса распределена непрерывно вдоль дуги кривой $(AB)$ с плотностью $\mu = f(x, y)$ в каждой точке этой кривой, то статические моменты $s_x$ и $s_y$ дуги относительно координатных осей $Ox$ и $Oy$ определяются по формулам

$$S_x = \int_{(AB)} yf(x, y)\, ds; \quad S_y = \int_{(AB)} xf(x, y)\, ds. \tag{5,4}$$

Моменты инерции этой дуги относительно координатных осей равны

$$I_x = \int_{(AB)} y^2 f(x, y)\, ds; \quad I_y = \int_{(AB)} x^2 f(x, y)\, ds. \tag{5,5}$$

6. Координаты центра тяжести дуги $(AB)$ определяются по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m}; \quad y_c = \frac{S_x}{m}, \tag{5,6}$$

где $m$ — масса этой дуги.

Формулы (5,6) с учетом формул (5,3) и (5,4) запишутся так:

$$x = \frac{\int\limits_{(AB)} xf(x, y)\, ds}{\int\limits_{(AB)} f(x, y)\, ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} yf(x, y)\, ds}{\int\limits_{(AB)} f(x, y)\, ds}. \tag{5,7}$$

Если кривая однородна, то плотность $\mu = f(x, y) = \text{const}$, а потому формулы (5,7) запишутся в виде

$$x_c = \frac{\int\limits_{(AB)} x\, ds}{\int\limits_{(AB)} ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} y\, ds}{\int\limits_{(AB)} ds}, \tag{5,8}$$

где $\int\limits_{(AB)} ds$ — длина дуги $AB$.

**Задача 5,1.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(AB)} x^2 y\, ds$, где $(AB)$ есть часть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащая в первой четверти.

**Решение.** Уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ запишем, выражая явно ординату $y$ через абсциссу $x$, и применим формулу (5,2).

Из $x^2+y^2=R^2$ следует, что $y=\sqrt{R^2-x^2}$ (перед корнем удержан знак плюс потому, что в первой четверти $y \geqslant 0$). Чтобы применить формулу (5,2), найдем $\sqrt{1+y'^2(x)}$:

$$y'(x)=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}; \quad y'^2=\frac{x^2}{R^2-x^2}; \quad 1+y'^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=$$
$$=\frac{R^2}{R^2-x^2}; \quad \sqrt{1+y'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Поэтому по (5,2)

$$\int\limits_{(AB)} x^2y\,ds=\int\limits_0^R x^2\cdot\underbrace{\sqrt{R^2-x^2}}_{y}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\int\limits_0^R x^2\,dx=R\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^R=\frac{R^4}{3}.$$

В дальнейшем все размеры указаны в сантиметрах.

**Задача 5,2** (для самостоятельного решения). Вычислить $I=$ $=\int\limits_{(AB)} x^2y\,ds$, где $(AB)$ — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, лежащая в первом квадранте.

Указание. Воспользоваться формулой (5,2).

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}; \quad y'=-\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2-x^2}};$$
$$I=\int\limits_0^a x^2\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2-x^2}}\,dx=$$
$$=\frac{b}{a^2}\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла удобно применить подстановку

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin z.$$

Тогда $\sqrt{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}=a^2\cos z$; $dx=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos z\,dz$.

$$I=\frac{b}{a^2}\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\frac{a^4}{a^2-b^2}\sin^2 z\cdot a^2\cos z\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos z\,dz=$$
$$=\frac{a^6b}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\sin^2 z\cos^2 z\,dz=$$
$$=\frac{a^6b}{8\,(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(z-\frac{1}{4}\sin 4z\right)\Bigg|_0^{\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}.$$

Учесть, что: 1)

$$\sin^2 z\cos^2 z = \left(\frac{1}{2}\sin 2z\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2z = \frac{1}{8}(1-\cos 4z)$$

2)

$$\sin 4z = 4\sin z\cos z(1-2\sin^2 z).$$

**Ответ.**

$$I = \frac{a^6 b}{8(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} - \frac{b(2b^2-a^2)\sqrt{a^2-b^2}}{a^4}\right).$$

**Задача 5,3** (для самостоятельного решения). Вычислить $\int\limits_{(AB)}(y-x)\,ds$, где $(AB)$ — дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки (1,1) до точки (2,8).

Указание. Воспользоваться формулой (5,2). Под интегралом заменить $y$ на $x^3$. На дуге $(AB)$ $x$ изменяется от 1 до 2:

$$I = \int\limits_1^2 (x^3-x)\sqrt{1+9x^4}\,dx;\quad I_1 = \int\limits_1^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx;$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 x\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

При вычислении $I_2$ удобна подстановка $3x^2=z$. Изменить пределы интегрирования: $z=3$ при $x=1$;

$z=12$ при $x=2$.

$$I_2 = \frac{1}{6}\int\limits_3^{12}\sqrt{1+z^2}\,dz = \frac{1}{6}\left[\frac{z}{2}\sqrt{1+z^2}+\frac{1}{2}\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right]\Bigg|_3^{12}.$$

**Ответ.**

$$\frac{1}{5}\left(145^{\frac{3}{2}}-10^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{1}{6}\left(6\sqrt{145}-\frac{3}{2}\sqrt{10}+\ln\sqrt{\frac{12+\sqrt{145}}{3+\sqrt{10}}}\right)$$

**Задача 5,4.** Найти центр тяжести полуокружности $x^2+y^2=R^2$, лежащей в верхней полуплоскости, а также ее момент инерции относительно оси $Ox$. Плотность считать равной единице.

**Решение.** Центр тяжести дуги кривой определяется по формулам (5,8). Из соображений симметрии ясно, что он находится на оси $Oy$. Поэтому $x_c=0$.

Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{\int\limits_{(AB)} y\,ds}{\int\limits_{(AB)} ds}.$$

Знаменатель этой дроби — длина полуокружности. Поэтому

$$\int\limits_{(AB)} ds = \pi R.$$

Для вычисления числителя воспользуемся параметрическими уравнениями окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(A)}$$

Дифференциал дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R\,dt$

$$\int\limits_{(AB)} y\,ds = \int\limits_0^\pi R\sin t \cdot R\,dt = R^2 \int\limits_0^\pi \sin t\,dt = R^2(-\cos t)\Big|_0^\pi = 2R^2;$$

$$y_c = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}\ \text{см}.$$

Итак, искомые координаты центра тяжести

$$x_c = 0;\quad y_c = \frac{2R}{\pi}\ \text{см}.$$

Из решения этой задачи следует, что статический момент полуокружности относительно стягивающего ее диаметра $S_d = 2R^2$ $см^2$.

По первой формуле (5,5) момент инерции относительно оси с учетом, что плотность равна единице:

$$I_x = \int\limits_{(AB)} y^2\,ds.$$

Из (А) следует, что $y^2 = R^2\sin^2 t$, и учитывая, что $ds = R\,dt$, получим

$$\int\limits_{(AB)} y^2\,ds = \int\limits_0^\pi R^3\sin^2 t\,dt = R^3\int\limits_0^\pi \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\pi R^3}{2}\ \text{см}^3.$$

**Задача 5,5** (для самостоятельного решения). Найти центр тяжести одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t);\quad y = a(1 - \cos t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Считать плотность равной единице.

Указание. Воспользоваться формулами (5,8). Учесть, что знаменатель дробей в этих формулах $\int\limits_{(AB)} ds$ — длина дуги одной арки циклоиды, равная 8a (она вычислена в третьей книге автора «Практические занятия по высшей математике»).

Учитывая симметрию, сразу заключаем, что абсцисса центра тяжести $x_c = \pi a$. Ордината центра тяжести $y_c = \dfrac{\int\limits_{(AB)} y\,ds}{\int\limits_{(AB)} ds}$.

Дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt;\quad \int\limits_{AB} ds = 8a.$$

$$\int\limits_{(AB)} y\,ds = \int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{2\pi} 2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt = \frac{32}{3}a^2.$$

**Ответ.** $x_c = \pi a$ *см*; $y_c = \frac{4}{3}a$ *см*.

**Задача 5,6** (для самостоятельного решения). Определить центр тяжести дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Плотность считать равной единице.

**Ответ.** $x_c = y_c = \frac{2}{5}a$ *см*.

**Задача 5,7** (для самостоятельного решения). Вычислить статический момент относительно координатных осей прямолинейного отрезка $(AB)$, соединяющего точки $(a, a)$ и $(b, b)$ $(b > a)$. Плотность в каждой точке отрезка равна произведению координат этой точки.

Указание. Воспользоваться формулами (5,4).

$$S_x = \int\limits_{(AB)} y(xy)\,ds;\quad S_y = \int\limits_{(AB)} x\cdot(xy)\,ds.$$

Уравнение отрезка $AB$: $y = x$; $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{2}dx$

**Ответ.** $S_x = S_y = \frac{\sqrt{2}}{4}(b^4 - a^4)$ *см*$^4$.

**Задача 5,8** (для самостоятельного решения). Найти массу кривой $y = x^2$ от точки $x = 0$ до $x = \sqrt{2}$, если в каждой точке кривой плотность равна квадрату ее абсциссы.

Указание. Использовать формулу (5,4), в которой $f(x, y) = x^2$, а $ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$. Интеграл $\int x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx$ записать в виде

$$\int\frac{x^2(1+4x^2)}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)\sqrt{1+4x^2} + E\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}.$$

Коэффициенты $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ определить на основании указаний задачи 9,33 в третьей части этой книги.

**Ответ.** Масса $m = \frac{17\sqrt{2}}{32} - \frac{1}{64}\ln(2\sqrt{2}+3)$.

**Задача 5,9** (для самостоятельного решения). Найти массу участка кривой $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\sqrt{3}$ до точки с абсциссой $x_2=2\sqrt{2}$, если плотность в каждой точке равна квадрату ее абсциссы.

Указание. $ds=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx.$

**Ответ.** $m=\frac{19}{3}$.

**Задача 5,10** (для самостоятельного решения). Найти массу кривой $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ на участке от $x=0$ до $x=a$, считая, что в каждой точке плотность обратно пропорциональна ординате этой точки.

Указание. Дифференциал дуги $ds=\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$; $m=\int\limits_0^a \frac{k}{y}\,ds$.

**Ответ.** $m=k$, где $k$ — коэффициент пропорциональности.

## II. Криволинейные интегралы II типа

Пусть во всех точках дуги $AB$ плоской кривой $(L)$ определена функция двух независимых переменных $P(x, y)$.

Дугу $AB$ разобьем на $n$ частичных дуг точками $A_0=A$; $A_1, A_2, \ldots A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n=B$. На каждой из частичных дуг выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i)$. В этой точке вычислим значение функции $P(x, y)$. Полученное число $P(x_i, y_i)$ умножим на $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ — проекцию дуги $A_iA_{i+1}$ на ось $Ox$ и получим произведение $P(x_i, y_i)\Delta x_i$.

Сложив все такие произведения, получим сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i.$$

Если функция $P(x, y)$ непрерывна во всех точках дуги $AB$, а сама эта дуга не имеет особых точек, то существует предел $\sum\limits_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i$ при стремлении всех $\Delta x_i$ к нулю, и он не зависит ни от способа разбиения дуги $AB$ на части, ни от выбора точки $M_i$ на каждой частичной дуге. Этот предел *называется криволинейным интегралом II типа от* $P(x, y)\,dx$ *по дуге* $(AB)$ *и обозначается символом* $\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx$, т. е.

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\Delta x_i=\int\limits_{(AB)} P(x, y)\,dx.$$

Если бы значение функции $P(x, y)$ в точке $M_i(x_i, y_i)$, т. е. $P(x_i, y_i)$, мы умножили не на $\Delta x_i$, а на $\Delta y_i$, т. е. на проекцию дуги $A_iA_{i+1}$ на ось $Oy$, то получили бы произведение $P(x_i, y_i)\Delta y_i$. Предел суммы таких произведений при условии, что все $\Delta y_i$ стремятся к нулю, был бы также криволинейным интегралом II типа и обозначался бы так: $\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\,dy$;

$$\lim_{\Delta y_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\,\Delta y_i = \int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\,dy.$$

В том случае, когда на дуге $(AB)$ заданы две непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, то можно рассмотреть криволинейные интегралы:

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\breve{AB})} Q(x, y)\,dy. \tag{A}$$

Сумму этих двух интегралов обозначают символом

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{5,9}$$

(При этом предполагается, что оба интеграла (A) вычисляются в одном и том же направлении).

### Свойства криволинейного интеграла II типа

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл II типа меняет знак на противоположный, т. е.

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = -\int\limits_{(\breve{BA})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

(для криволинейного интеграла I типа направление интегрирования роли не играет).

2. Если точка $C$ находится внутри дуги $AB$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(\breve{AB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{(\breve{AC})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + \int\limits_{(\breve{CB})} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Если $(L)$ — замкнутая кривая, то криволинейный интеграл II типа определяется так же. В этом случае следует обязательно указывать направление интегрирования, причем положительным направлением обхода замкнутого контура по условию считается то, при котором область, которую ограничивает этот контур, остается слева.

Когда криволинейный интеграл вычисляется по замкнутому контуру, он обозначается символом

$$\oint\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

причем на кружке, помещенном на знаке интеграла, указывается стрелкой направление обхода контура.

### Формула для вычисления криволинейного интеграла II типа

Вычисление криволинейного интеграла второго типа сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая $(L)$, по которой вычисляется криволинейный интеграл, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$; $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, а также их производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ — непрерывные функции $t$, то вычисление криволинейного интеграла производится по формуле

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\,\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\,\psi'(t)\}\,dt. \qquad (5,10)$$

Если же кривая $(L)$ задана явным уравнением $y = f(x)\,(a \leqslant x \leqslant b)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, то криволинейный интеграл II типа вычисляется по формуле

$$\int\limits_{(L)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} \{P[x, f(x)] + Q[x, f(x)]\,f'(x)\}\,dx. \qquad (5,11)$$

**Задача 5,11.** Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)\,dx$, если $(L)$ — дуга параболы $y = 2x^2$ от точки $x = 2$ до точки $x = 4$.

**Решение.** Кривая задана явным уравнением. Для вычисления интеграла применим формулу (5,10). Эта же формула применяется и для решения задач 5,11—5,16.

Пользуясь уравнением параболы $y = 2x^2$, заменим в подынтегральной функции $y^2$ на $4x^4$. Тогда

$$\int\limits_{(L)} (x^2 + y^2)\,dx = \int\limits_{2}^{4} (x^2 + 4x^4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{4}{5}x^5\right)\Bigg|_2^4 = \frac{12184}{15}.$$

**Ответ.** $\frac{12184}{15}$.

**Задача 5,12.** Вычислить интеграл $\int\limits_L x^2\,dx+\sqrt{x}y\,dy$, где $(L)$ есть четверть окружности $x^2+y^2=R^2$, пробегаемая против часовой стрелки, лежащая в первой четверти.

**Решение.** Из уравнения окружности $x^2+y^2=R^2$ выразим $y$ в функции от $x$: $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Перед корнем следует удержать знак плюс, так как в первой четверти $y\geqslant 0$. Найдем теперь $dy$: $dy=-\frac{x\,dx}{\sqrt{R^2-x^2}}$. После подстановки $y$ и $dy$ под знак интеграла подынтегральная функция будет зависеть только от $x$, а пределы интегрирования по $x$, учитывая, что интегрирование ведется против часовой стрелки, будут $+R$ и $0$.

Таким образом,

$$\int\limits_{(L)} x^2\,dx+\sqrt{x}y\,dy=\int\limits_R^0 x^2\,dx+\sqrt{x}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\limits_R^0(x^2-x\sqrt{x})\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)\Bigg|_R^0=-\frac{R^3}{3}+\frac{2}{5}R^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{15}R^2(6\sqrt{R}-5R).$$

**Задача 5,13** (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $\int\limits_{(L)}(x^2-y^2)\,dy$, где $(L)$ — дуга кубической параболы $y=2x^3$ от точки $x=0$ до точки $x=1$.

Указание. Из уравнения кривой следует, что $dy=6x^2\,dx$, а $y^2=4x^6$.

**Ответ.** $-\frac{22}{15}$.

**Задача 5,14** (для самостоятельного решения). Вычислить интегралы: 1) $\int\limits_{(L)}(x^2-y^2)\,dx$, где $(L)$ — дуга параболы $y=x^2$ от точки $x=0$ до точки $x=2$; 2) $\int\limits_{(L)}(x^2-y^2)\,dy$, где $(L)$ — та же дуга, что и в первом интеграле.

**Ответ.** 1) $-\frac{56}{15}$; 2) $\frac{40}{3}$.

**Задача 5,15** (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл $I=\int\limits_{(L)}(x-y)\,dx+(x+y)\,dy$, где $(L)$: 1) отрезок прямой, соединяющей точки $A\ (2,3)$ и $B\ (3,5)$; 2) дуга параболы $y=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$; 3) дуга параболы $x=y^2$. Соединяющие точки — $C\ (0,0)$ и $D\,(4,2)$.

**Ответ.** 1) Уравнение отрезка прямой: $y=2x-1$; $dy=2dx$. $I=\frac{23}{2}$; 2) $\frac{38}{3}$; 3) $dx=2y\,dy$; $I=\frac{22}{3}$.

**Задача 5,16.** Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_{(L)}(2y-6xy^3)\,dx+(2x-9x^2y^2)\,dy,$$

где $(L)$ — одна из линий, соединяющих точки $O(0,0)$ и $A(2,2)$:

1) отрезок прямой, соединяющий эти точки;

2) парабола $y=\frac{1}{2}x^2$;

3) парабола $x=\frac{1}{2}y^2$;

4) кубическая парабола $y=\frac{1}{4}x^3$.

**Решение.** 1) Уравнение прямой: $y=x$. Поэтому $dy=dx$. Заменяя в подынтегральном выражении $y$ на $x$, а $dy$ на $dx$, получим, что

$$I=\int\limits_0^2(2x-6x\cdot x^3)\,dx+(2x-9x^2\cdot x^2)\,dx=-88.$$

2) Из уравнения кривой $y=\frac{1}{2}x^2$ следует, что

$$dy=x\,dx.$$

Заменяя в подынтегральном выражении $y$ на $\frac{1}{2}x^2$, а $dy$ на $x\,dx$ получим, что

$$I=\int\limits_0^2\left[2\cdot\frac{1}{2}x^2-6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)^3\right]dx+\left[2x-9x^2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right]x\,dx=$$

$$=\int\limits_0^2(3x^2-3x^7)\,dx=-88.$$

3) Так как уравнение линии $x=\frac{1}{2}y^2$, то $dx=y\,dy$. Заменяя в подынтегральном выражении $x$ на $\frac{1}{2}y^2$, а $dx$ на $y\,dy$, получим, учитывая, что $y$ изменяется от 0 до 2,

$$I=\int\limits_0^2\left[2y-6\cdot\left(\frac{1}{2}y^2\right)\right]y\,dy+\left[2\cdot\frac{1}{2}y^2-9\cdot\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2\cdot y^2\right]dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left(3y^2-\frac{21}{4}y^6\right)dy=y^3-\frac{3}{4}y^7\Big|_0^2=8-\frac{3}{4}\cdot128=-88.$$

4) Убедитесь самостоятельно, что в этом случае $I=-88$.

Итак, по какой бы из указанных кривых, соединяющих точки $(0,0)$ и $(2,2)$, мы ни вычисляли этот интеграл, оказывается, что он равен одному и тому же числу. Иначе говоря, величина заданного интеграла не зависит от того, по какой из указанных кривых, соединяющих эти точки, он вычисляется. Можно показать, что и вообще величина этого интеграла по любой кривой, соединяющей две заданные точки, окажется одной и той же.

Этот интеграл также равен —88, если его вычислить и по ломанной $OCA$, состоящей из отрезка $OC$ оси $Ox$ и отрезка $CA$ прямой $x = 2$.

В этом случае на отрезке $OC$ $y = 0$; $dy = 0$. По отрезку $OC$ $I = 0$ вследствие того, что под знаком интеграла взять $y = 0$ и $dy = 0$.

На отрезке $CA$: $x = 2$, $dx = 0$, $y$ изменяется от 0 до 2

$$I = \int_0^2 (2 \cdot 2 - 9 \cdot 2^2 y^2)\, dy = (4y - 12y^3)\Big|_0^2 = -88.$$

Самостоятельно докажите, что этот интеграл равен —88, если его вычислить по ломанной $OBA$. На отрезке $OB$ $x = 0$, на $BA$ $y = 2$, $dy = 0$ (дифференциал постоянной величины равен нулю).

Решение этой задачи показывает, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле II типа может быть таким, что величина интеграла не зависит от той линии, по которой ведется интегрирование, а определяется только координатами начальной и конечной точек этой линии. (В таком случае говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования). Ниже будет указано условие, которому должно подчиняться подынтегральное выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ в криволинейном интеграле II типа, для того чтобы этот интеграл не зависел от пути интегрирования, соединяющего две данные точки.

## ШЕСТОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Условие независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал.

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

#### 1. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

В общем случае при одном и том же подынтегральном выражении величина криволинейного интеграла зависит от формы пути, по которому он вычисляется (иначе говоря, от кривой, по которой он берется) и от координат начальной и конечной точек этого пути.

Вместе с тем последний интеграл предыдущего практического занятия представляет пример такого криволинейного интеграла, величина которого не зависит от формы пути интегрирования, а определяется только координатами начала и конца этого пути. Если так случается, то говорят, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

***Определение.*** *Криволинейный интеграл*

$$\int_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

*называется независящим от формы пути интегрирования в области $(D)$, если каковы бы ни были точки $A$ и $B$, принадлежащие области $(D)$, значение этого интеграла остается одним и тем же независимо от того, по какой линии с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ он вычисляется, лишь бы эта линия целиком лежала в области $(D)$.*

*Односвязная область. Конечная область $(D)$ называется* ***односвязной****, если она ограничена единственным замкнутым контуром.* (Иначе говоря, односвязность области означает, что в ней отсутствуют «дыры», а это в свою очередь позволяет любой замкнутый контур, лежащий внутри такой области, стянуть в точку, не выходя за пределы этой области).

Приведем теорему, которая указывает необходимое и достаточное условие для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от формы пути интегрирования.

***Теорема.*** Если функция $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области $(D)$, то, для того чтобы криволинейный интеграл

$$\int_{(AB)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{A}$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6,1}$$

Напомним, что:

1) условие (6,1) является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ являлось полным дифференциалом некоторой однозначной функции, определенной

---

* Для неодносвязной области эта теорема в общем случае неверна.

в области $(D)$. Поэтому можно утверждать, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования $(AB)$, а только от его концов, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции.

2) Если выполняется условие (6,1), т. е. если выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции, то криволинейный интеграл $(A)$, взятый по любому замкнутому контуру, лежащему в односвязной ограниченной замкнутой области $(D)$, равен нулю.

Обозначение. Если путь, по которому вычисляется криволинейный интеграл $(A)$ безразличен, то употребляется обозначение

$$\int\limits_{(x_0,\, y_0)}^{(x_1,\, y_1)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \qquad (B)$$

где $(x_0, y_0)$ и $(x_1, y_1)$ координаты начала и конца пути интегрирования, а в качестве пути интегрирования в этом случае обыкновенно выбирается самый простой путь — отрезок прямой, соединяющий точки $(x_0, y_0)$ и $(x_1, y_1)$.

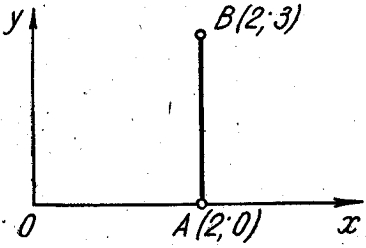
**Задача 6,1.** Выяснить, будет ли криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} (6xy + 4y^2 + 5y)\,dx + (3x^2 + 8xy + 5x)\,dy$$

зависеть от формы пути интегрирования.

**Решение.** Здесь функция $P(x, y) = 6xy + 4y^2 + 5y$, а функция $Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 5x$.

Интеграл не будет зависеть от формы пути интегрирования, если будет выполнено условие (6,1). Чтобы проверить его выполнение, найдем частные производные: от функции $P(x, y)$ по независимой переменной $y$, а от функции $Q(x, y)$ по независимой переменной $x$. (Заметим для запоминания, что функция $P(x, y)$ умножается под знаком интеграла на дифференциал переменной $x$, частная производная от нее берется по переменной $y$, а функция $Q(x, y)$ умножается в подынтегральном выражении на дифференциал переменной $y$ частная же производная от нее берется по переменной $x$).



К задаче 6,1

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6x + 8y + 5; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x + 8y + 5; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условие (6,1) выполнено — предложенный криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Вычислим этот интеграл по пути, соединяющему начало координат с точкой $A(2,3)$. Так как от формы пути, как мы показали, интеграл не зависит, то самым простым путем интегрирования явится отрезок прямой, соединяющий начало координат с точкой $A(2,3)$. Уравнение пути интегрирования: $y = \frac{3}{2}x$.

Поэтому, подставляя под знак интеграла $\frac{3}{2}x$ вместо $y$, получим

$$I = \int_0^2 \left(6x \cdot \frac{3}{2}x + 4\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 5 \cdot \frac{3}{2}x\right) dx +$$

$$+ \left(3x^2 + 8x \cdot \frac{3}{2}x + 5x\right) \cdot \frac{3}{2}dx = \int_0^2 \left(\frac{81}{2}x^2 + 15x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{81}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{15}{2}x^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{81}{2} \cdot \frac{8}{3} + \frac{15}{2} \cdot 4 = 138.$$

$\left(\text{учтено, что если } y = \frac{3}{2}x, \text{ то } dy = \frac{3}{2}dx\right)$.

Для упражнения этот же интеграл вычислить по ломаной $OAB$ и убедиться что, получится 138 (на $OA$ переменная $y$ равна 0, на $AB$ переменная $x$ равна 2, а $y$ изменяется от 0 до 3).

**Задача 6,2** (для самостоятельного решения). Убедиться, что интеграл

$$I = \int_{AB} (6xy^2 + 4x^3)\,dx + (6x^2y + 3y^2)\,dy$$

не зависит от формы пути интегрирования. После этого вычислить его по отрезку прямой, соединяющей точки (2,3) и (3,4).

У к а з а н и е. $P(x, y) = 6xy^2 + 4x^3$; $Q(x, y) = 6x^2y + 3y^2$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Уравнение прямой, соединяющей точки (2,3) и (3,4): $y = x + 1$; $dy = dx$.

В подынтегральном выражении заменить $y$ на $x + 1$, а $dy$ на $dx$. Под интегралом будет функция одной переменной $x$, пределы интегрирования: нижний 2, верхний 3.

Задачу можно было поставить так. Вычислить интеграл

$$I = \int_{(2,3)}^{(3,4)} (6xy^2 + 4x^3)\,dx + (6x^2y + 3y^2)\,dy.$$

Но такая запись допустима только в том случае, когда заранее известно, что интеграл не зависит от формы пути интегрирования, т. е. что условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено.

**Ответ.** 426.

**Задача 6,3** (для самостоятельного решения). Выяснить, будет ли интеграл

$$\int\limits_{(AB)}(2xy-5y^3)\,dx+(x^2-15xy^2+6y)\,dy$$

зависеть от пути интегрирования и вычислить его по линии $AB$, соединяющей точки (0,0) и (2,2).

Указание. Вычислить $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Убедиться, что $\frac{\partial P}{\partial y}=$ $=\frac{\partial Q}{\partial x}(=2x-15y^2)$.

За линию $AB$ принять прямую, соединяющую указанные точки. Ее уравнение: $y=x$.

**Ответ.** $-60$.

**Задача 6,4** (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)}\frac{x}{(x+y)^2}\,dx+\frac{2x+y}{(x+y)^2}\,dy.$$

Указание. Прежде всего убедиться, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. За путь интегрирования выбрать прямую, соединяющую точки (1,1) и (3,2). Ее уравнение $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

**Ответ.** $\ln\frac{5}{2}-\frac{1}{10}$.

**Задача 6,5.** Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}\,dy,$$

взятый по замкнутому контуру, равен нулю?

**Решение.** Из 2) на стр. 110 следует, что при выполнении условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ криволинейный интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю. Поэтому, чтобы ответить на вопрос задачи, следует только убедиться в том, что условие это выполнено. У нас

$$P(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4};\quad Q(x,y)=-\frac{2y}{x^3}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{6y}{x^4};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y}{x^6}3x^2=\frac{6y}{x^4}.$$

Значит, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и на вопрос задачи следует дать утвердительный ответ: заданный интеграл, если его взять по замкнутому контуру, равен нулю. Однако следует указать, что этот контур не должен ни охватывать, ни проходить через точку с абсциссой $x = 0$.

**Задача 6,6.** Будет ли криволинейный интеграл

$$\oint\limits_{(L)} (x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy),$$

где $(L)$ замкнутый контур, равен нулю? Подтвердить полученное заключение непосредственным вычислением по какому-нибудь замкнутому контуру.

**Решение.** Проверим, является ли подынтегральное выражение полным дифференциалом. У нас

$$P(x, y) = x^3 + xy^2; \quad Q(x, y) = x^2y + y^3;$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy.$$

Этим доказано, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и, значит, можно утвердительно ответить на вопрос задачи: по замкнутому контуру заданный интеграл равен нулю.

Теперь подтвердим это заключение непосредственным вычислением этого интеграла по какому-нибудь замкнутому контуру. В качестве такого контура выберем, например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Параметрические уравнения такой окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Тогда $x^2 + y^2 = 1$; $dx = -\sin t\,dt$;

$x\,dx = -\sin t \cos t\,dt$; $y = \sin t$; $dy = \cos t\,dt$; $y\,dy = \sin t \cos t\,dt$.

Подынтегральное выражение $(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) =$

$$= 1(-\sin t \cos t\,dt + \sin t \cos t\,dt) = 0.$$

По этому контуру интеграл равен нулю. По любому другому замкнутому контуру он также окажется равным нулю.

Уравнение окружности можно было задать и не параметрическими уравнениями, а в виде $x^2 + y^2 = 1$. Тогда, дифференцируя, получим: $2x\,dx + 2y\,dy = 0$ или $x\,dx + y\,dy = 0$. Поэтому подынтегральная функция равна нулю.

Этот же интеграл вычислить по периметру треугольника с вершинами в точках $(0,0)$; $(1,0)$; $(1,1)$.

**Задача 6,7** (для самостоятельного решения). Вычислить интеграл

$$\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy,$$

убедившись сначала, что он не зависит от пути интегрирования.

**Ответ.** 56.

**Задача 6,8** (для самостоятельного решения). Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить следующие интегралы:

$$(1)\quad \int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \left(2xy^2+3x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{y^2}\right)dx+\left(2x^2y+3y^2+\frac{1}{y^2}-\frac{2x^2}{y^3}\right)dy$$

(вдоль путей, не пересекающих координатных осей и не проходящих через начало координат).

$$2)\quad \int\limits_{(2,1)}^{(5,3)} \frac{-y^2\,dx+x^2\,dy}{(x-y)^2}$$

(вдоль путей, которые не пересекают биссектрису первого и третьего координатных углов).

$$3)\quad \int\limits_{(1,1)}^{(\sqrt{3},1)} \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}\,dx-\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}\,dy.$$

**Ответ.** 1) $-\frac{15}{4}$; 2) 5,5; 3) $\ln\frac{\pi}{3}$.

## II. Интегрирование дифференциальных уравнений, левая часть которых есть полный дифференциал

### Сведения из теории

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть удовлетворяет условию

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Общий интеграл такого уравнения может быть найден по одной из следующих двух формул:

$$\int_a^x (P(x, y)\,dx + \int Q(a, y)\,dy = C \qquad (6,3)$$

или

$$\int_b^y Q(x, y)\,dy + \int P(x,b)\,dx = C, \qquad (6,4)$$

где нижние пределы $a$ и $b$ могут быть выбраны произвольно.

В формуле (6,3) во втором интеграле функция $Q(x, y)$ преобразовывается: в нее вместо переменной $x$ подставляется $a$ — нижний предел первого интеграла и она становится равной $Q(a, y)$. Пользуясь произвольностью числа $a$, его следует выбрать так, чтобы функция $Q(a, y)$ стала наиболее простой.

Это указание относится и к формуле (6,4). В этой формуле функция $P(x, b)$ получается из функции $P(x, y)$, если в ней переменную величину $y$ заменить нижним пределом $b$ первого интеграла. Ясно, что и число $b$ выгодно выбрать так, чтобы функция $P(x, b)$ оказалась наиболее простой.

**Задача 6,9.** Найти общий интеграл уравнения

$$\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy = 0.$$

**Решение.** Прежде всего следует убедиться в том, что левая часть уравнения является полным дифференциалом. Здесь

$$P(x, y) = \frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}; \quad Q(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Отыскиваем $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2xy}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Заключение. Левая часть уравнения есть полный дифференциал. Для отыскания общего решения уравнения применим формулу (6,3). Возникает вопрос о выборе нижнего предела $a$ в первом интеграле этой формулы. Конечно, было бы очень хорошо, если бы можно было взять этот предел равным нулю, так как в этом случае замена в функции $Q(x, y)$ переменной $x$ нулем преобразовала бы ее в $Q(0, y) = \frac{1}{y}$. Но, к сожалению, этого сделать нельзя, так как интеграл

$$\int_0^x P(x, y)\,dx = \int_0^x \left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

становится несобственным. Положим $a=1$. Тогда, заменив в $Q(x, y)$ $x$ на 1, получим

$$Q(1, y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{(1-y)^2},$$

и формула (6,3) дает

$$\int_1^x\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\int\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{(1-y)^2}\right]dy=C.$$

При вычислении первого интеграла переменная $y$ должна рассматриваться как величина постоянная.

Выполнив интегрирование, получим:

$$\left(-\frac{y^2}{x-y}-\ln x\right)\Bigg|_1^x+\ln y-\frac{1}{1-y}=C$$

или

$$-\frac{y^2}{x-y}-\ln x+\frac{y^2}{1-y}+\ln y-\frac{1}{1-y}=C.$$

Преобразования в левой части приводят к выражению

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x-y}+\frac{y^2-1}{1-y}=C,$$

откуда

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x-y}-y-1=C. \qquad (A)$$

Относя $-1$ к произвольной постоянной, получаем окончательно:

$$\ln\frac{y}{x}-\frac{xy}{x-y}=C.$$

Если бы вместо $a=1$ мы взяли бы любое другое число, не равное нулю, то в левую часть равенства (А) входила бы другая постоянная величина, а не $-1$ и ее мы опять-таки ввели бы в состав произвольной постоянной.

**Задача 6,10** (для самостоятельного решения). Найти общие интегралы уравнений, убедившись сначала, что их левая часть является полным дифференциалом;

1) $[\sin 2x-2\cos(x+y)]\,dx-2\cos(x+y)\,dy=0.$

Указание. Применить формулу (6,3). Нижний предел в первом интеграле взять равным 0.

2) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}\,dy=0.$

Указание. Удобно применить формулу (6,4), взяв нижний предел $b=0$.

3) $\frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy=0.$

4) $\left(\frac{x+y+1}{x^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx-\left(\frac{x+y}{xy}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0;$

5) $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy=0;$

6) $\frac{y}{x^2+y^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}dx-\frac{x}{x^2+y^2}e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}dy=0;$

7) $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}}dy=0;$

8) $(\sin y+y\cos x)\,dx+(x\cos y+\sin x)\,dy=0;$

9) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}dy=0;$

10) $\frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}dx-\frac{\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}dy=0.$

Указание. Применить формулу (6,3). В первом интеграле положить нижний предел $a=1$. При вычислении интеграла

$$\int_1^x \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}dx$$

удобно применить подстановку $x=y\sec z$, которая приведет к вычислению интеграла

$$\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{\sec^2 z}{1+\sec^2 z}dz=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{dz}{1+\cos^2 z}=$$

$$=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{dz}{\sin^2 z+2\cos^2 z}=\sqrt{2}\int_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}\frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{2+\operatorname{tg}^2 z}dz=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{2}}\Bigg|_{\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}}^{\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}}=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{2}}.$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{y}\right)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{y},$$

а

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsec}\frac{1}{y}\right)=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Поэтому

$$\int_1^x \frac{\sqrt{2}\,xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{2}\,y} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}\,y}. \qquad (A)$$

Функция

$$Q(x, y) = \frac{-\sqrt{2}\,x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Подставляя в нее $x = 1$ — нижний предел первого интеграла, получим, что

$$Q(1, y) = \frac{-\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1-y^2}}.$$

Интеграл $-\int \frac{\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1-y^2}}\,dy$ удобно вычислить подстановкой $y = \sin z$, которая приведет к интегралу

$$-\sqrt{2}\int\frac{dz}{1+\sin^2 z} = -\sqrt{2}\int\frac{dz}{2\sin^2 z+\cos^2 z} =$$

$$= -\sqrt{2}\int\frac{\frac{1}{\cos^2 z}\,dz}{2\,\mathrm{tg}^2 z+1} = \operatorname{arcctg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,z) = \operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right),$$

так как из $y = \sin z$ следует, что $\mathrm{tg}\,z = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$. Но

$$\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{2}\,y}.$$

Таким образом, получен второй интеграл в формуле (6,3). Складывая его с выражением (А), получим ответ.

**Ответ.**

1) $\sin^2 x - 2\sin(x+y) = C$;

2) $\frac{x^2+y^2}{x^3} = C$;

3) $\ln\sqrt{x^2+y^2} - \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C$;

4) $\ln\frac{y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{y+1}{x} = C$;

5) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = C$;

6) $e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = C$;

7) $\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}) = C$;

8) $x\sin y + y\sin x = C$;

9) $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$;

10) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{2}\,y} = C$.

# СЕДЬМОЕ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

Содержание. Формула Грина. Вычисление площади при помощи криволинейного интеграла.

## ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### 1. Формула Грина

Криволинейный интеграл по простому замкнутому гладкому контуру $(C)$, ограничивающему односвязную область $(D)$, может быть преобразован в некоторый двойной интеграл по области $(D)$, ограниченной этим контуром.

Это преобразование выполняется по формуле Грина, которая записывается так:

$$\oint_{(C)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (7,1)$$

Предполагается, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а также их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области $(D)$ и на контуре $(C)$, который ее ограничивает, причем контур $(C)$ пробегается в положительном направлении, т. е. так, что область $(D)$ остается слева.

Если формулу (7,1) Грина прочесть справа налево, то можно сказать, что она сводит вычисление двойного интеграла по области $(D)$ к вычислению криволинейного интеграла, взятого по контуру, ограничивающему эту область.

Формула (7,1) справедлива не только для указанных областей $(D)$, но и для более сложных областей, ограниченных несколькими простыми гладкими контурами. В этом случае

$$\oint_{(C)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

следует рассматривать как сумму интегралов по составляющим контурам, причем интегрирование по этим контурам должно вестись в таком направлении, чтобы область $(D)$ оставалась слева.

Многие криволинейные интегралы по замкнутому контуру удобно вычислять, сводя их к двойному интегралу.

**Задача 7,1.** Применяя формулу Грина, показать, что криволинейный интеграл

$$\oint_{(C)} (6xy + 5y)\,dx + (3x^2 + 5x)\,dy$$

по любому замкнутому контуру равен нулю. Проверить это заключение, вычислив этот интеграл по контуру, ограниченному линиями: $y=0$; $x=3$; $y=\sqrt{x}$.

**Решение.** Чтобы применить формулу Грина, следует найти $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и под знак двойного интеграла подставить их разность $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$. У нас $P(x, y)=6xy+5y$; $Q(x, y)=3x^2+5x$. Поэтому $\frac{\partial Q}{\partial x}=6x+5$; $\frac{\partial P}{\partial y}=6x+5$. Подставляя выражения $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ и $\frac{\partial P}{\partial y}$ в (7,1), получаем

$$\oint\limits_{(C)}(6xy+5y)\,dx+(3x^2+5x)\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}[(6x+5)-(6x+5)]\,dx\,dy=\iint\limits_{D}0dx\,dy=0.$$

Тем самым доказано требуемое.

Доказать, что заданный криволинейный интеграл, вычисленный по замкнутому контуру, равен нулю, можно, конечно, и не прибегая к формуле Грина. Из равенства $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ следует, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, а в этом случае криволинейный интеграл по замкнутому контуру, при соблюдении известных условий, равен нулю.

Второе требование задачи следует выполнить самостоятельно.

**Задача 7,2.** Вычислить, применяя формулу Грина, интеграл

$$\oint\limits_{(C)}-x^2y\,dx+xy^2\,dy,$$

где $(C)$ — окружность $x^2+y^2=a^2$, пробегаемая в положительном направлении.

**Решение.** Здесь $P(x, y)=-x^2y$; $Q(x, y)=xy^2$; $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$.

Подставляя эти значения в формулу (7,1), получим

$$I=\oint\limits_{(C)}-x^2y\,dx+xy^2\,dy=\iint\limits_{(D)}[y^2-(-x^2)[\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(D)}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

Здесь $(D)$ — круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=a^2$.

Вычисление полученного двойного интеграла удобно провести в полярных координатах. Элемент площади $dx\,dy$ надо заменить на $\rho d\rho\, d\varphi$, а $x^2+y^2=\rho^2$. Поэтому

$$\iint\limits_{(D)} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{(D)} \rho^2\cdot\rho d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} \rho^3 d\rho = 2\pi\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Подчеркнем, что формулу Грина можно применять только тогда, когда функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой области $(D)$, т. е. внутри области $(D)$ и на ее контуре. Так, например, приводя вычисление интеграла

$$I = \oint\limits_{(C)} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \qquad (A)$$

к двойному интегралу по формуле Грина, следует найти $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Окажется, что $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, т. е. $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$, а потому двойной интеграл в правой части формулы (7,1) будет равен нулю, следовательно, и заданный интеграл $I$, вычисленный по любому замкнутому контуру, равен нулю. Однако такое заключение для *любого* замкнутого контура является неверным. Например, если вычислить этот интеграл по окружности $x=a\cos t$; $y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ с центром в начале координат, то можно легко проверить, что он будет равен не нулю, как это следует из формулы Грина, а $2\pi$ (проверьте!).

Такое несовпадение результатов объясняется тем, что в круге $(D)$ с центром в начале координат подынтегральные функции $P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ и $Q(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ не являются непрерывными.

Интеграл $(A)$ будет равен нулю только тогда, когда область $(D)$ не содержит внутри себя начало координат.

**Задача** 7,3 (для самостоятельного решения). Вычислить с помощью формулы Грина интеграл

$$\oint\limits_{(C)} \frac{y}{x}\,dx + 2\ln x\,dy,$$

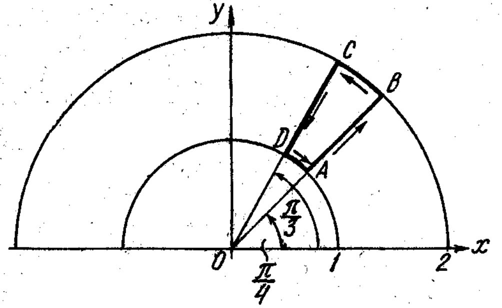
где $(C)$ — замкнутый контур, составленный из отрезка оси $Ox$ от точки $(1,0)$ до точки $(2,0)$, отрезка прямой $y=4-2x$ и отрезка прямой $x=1$ от точки $(1,0)$ до точки $(1,2)$.

**Ответ.** $4\ln 2-2$.

**Задача 7,4** (для самостоятельного решения). С помощью формулы Грина вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{(C)} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx + \frac{2}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}\, dy,$$

где $(C)$ — замкнутый контур, составленный дугами двух окружностей $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4\ (y > 0)$ и отрезками прямых $y = x$ и $y = \sqrt{3}x\ (y > 0)$, заключенных между этими окружностями.




К задаче 7,4

Указание.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

По формуле Грина заданный интеграл

$$I = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Выгодно перейти к полярным координатам

$$I = \iint\limits_{(D)} \frac{1}{\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi,$$

$(D)$ — часть кругового кольца, ограниченная указанными линиями. В области $(D)$ переменная $\rho$ изменяется от 1 до 2, а переменная $\varphi$ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$.

**Ответ.** $\frac{\pi}{12} \ln 2$.

**Задача 7,5.** (для самостоятельного решения). Криволинейный интеграл предыдущей задачи по тому же контуру вычислить, не применяя формулы Грина.

Указание. Переменная $x$ изменяется на отрезке $AB$ от $\frac{\sqrt{2}}{2}$ до $\sqrt{2}$, на отрезке $CD$ от 1 до $\frac{1}{2}$ (установите это самостоятельно).

Уравнения окружностей преобразуйте к параметрической форме. Получатся уравнения $x = \cos t$; $y = \sin t$ и $x = 2\cos t$; $y = 2\sin t$. Параметр $t$ изменяется: на дуге окружности $BC$ от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$, а на дуге $DA$ от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Интегралы по этим двум дугам взаимно уничтожаются. Интеграл по отрезку $AB$ равен $\frac{3}{4}\pi \ln 2$, а по отрезку $CD$ он равен $-\frac{2}{3}\pi \ln 2$.

## 2. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов

С помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры ($D$), ограниченной кусочно-гладкой кривой вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} x\,dy - y\,dx, \qquad (7,2)$$

где ($C$) — контур, ограничивающий искомую площадь, а интегрирование по этому контуру ведется в положительном направлении, т. е. таком, чтобы область ($D$) оставалась слева.

Подынтегральное выражение в этой формуле легко запомнить, если его записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix}.$$

Для вычисления площади с помощью криволинейного интеграла применяются также и такие формулы:

$$S = -\oint\limits_{(C)} y\,dx; \qquad (7,3)$$

$$S = \oint\limits_{(C)} x\,dy, \qquad (7,4)$$

однако формула (7,2) употребляется чаще.

**Задача 7,6.** С помощью криволинейного интеграла вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

**Решение.** Чтобы воспользоваться формулой (7,2) найдем $dx$ и $dy$:

$$dx = -a\sin t dt;\ dy = b\sin t dt.$$

Подынтегральное выражение в этой формуле равно

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & b\sin t \\ -a\sin t dt & b\cos t dt \end{vmatrix} =$$
$$= ab\cos^2 t dt + ab\sin^2 t dt = abdt.$$

Подставляя это значение подынтегрального выражения в формулу (7,2) и преобразовывая криволинейный интеграл в определенный, получим, что площадь, ограниченная эллипсом,

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} ab\,dt = \frac{1}{2}ab\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2}ab\cdot 2\pi = \pi ab \text{ кв. ед.}$$

**Задача 7,6 а.** Определить площадь, ограниченную одной аркой циклоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t) \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

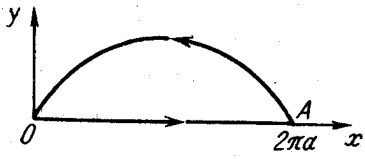
**Решение.** Прежде всего определим подынтегральное выражение в формуле (7,2):

$$dx = a(1 - \cos t)\,dt; \quad dy = a \sin t dt;$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(t - \sin t) & a(1 - \cos t) \\ a(1 - \cos t)\,dt & a \sin t dt \end{vmatrix} =$$

$$= a^2 (t \sin t + 2 \cos t - 2)\,dt.$$

При вычислении интеграла в формуле (7,2) интегрирование должно вестись по контуру $OABO$ в направлении, указанном стрелками. (Такое направление выбрано потому, что вычисляемая площадь при обходе по контуру, который ее ограничивает, должна оставаться слева). На отрезке $OA$ $y = 0$, значит, $dy = 0$, а потому на этом отрезке подынтегральное выражение $x\,dy - y\,dx$ равно нулю.




К задаче 7,6а

На дуге $ABO$ параметр $t$ изменяется от $2\pi$ (его значение в точке $A$) до 0 (его значение в начале координат). Полезно вспомнить геометрический смысл параметра $t$ у циклоиды. Учитывая это все, по формуле (7,2) получим

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(C)} a^2 (t \sin t + 2 \cos t - 2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int\limits_{2\pi}^{0} (t \sin t + 2 \cos t - 2)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \cdot 6\pi = 3\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

$\left(\text{интеграл } \int\limits_{2\pi}^{0} t \sin t\,dt = 2\pi\right).$

**Задача 7,7.** Найти площадь, ограниченную астроидой

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos^3 t \\ y &= a \sin^3 t \end{aligned}\right\}. \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

**Решение.** Определим $dx$ и $dy$:

$$dx = -3a \cos^2 t \sin t dt; \quad dy = 3a \sin^2 t \cos t dt$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos^3 t & a \sin^3 t \\ -3a \cos^2 t \sin t dt & 3a \sin^2 t \cos t dt \end{vmatrix} =$$

$$= 3a^2 \sin^2 t \cos^4 t dt + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t dt =$$

$$= 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt.$$

Подставляя это выражение в формулу (7,2) и учитывая, что параметр $t$ изменяется от 0 до $2\pi$, получим

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{(C)} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\cdot 3a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt =$$

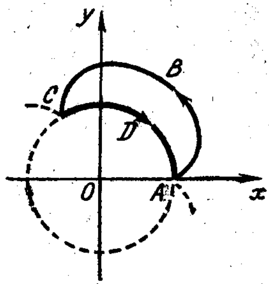
$$= \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}(\sin t\cos t)^2\,dt = \frac{3}{2}a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt =$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

**Задача 7,8** (для самостоятельного решения). Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой эпициклоиды и соответствующей дугой круга

$$\left.\begin{aligned} x &= a\left[(1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t\right] \\ y &= a\left[(1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (A)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Указание. Интеграл в формуле (7,2) нужно рассмотреть как сумму двух интегралов: сначала вычислить его по кривой $ABC$, а затем по дуге окружности $CDA$. В первом случае $x$ и $y$ взять из уравнений (A) эпициклоиды, причем на этой кривой параметр $t$ изменяется от 0 до $2\pi$.



К задаче 7,8

Подынтегральное выражение

$$x\,dy - y\,dx = a^2m(1+m)(1+2m)(1-\cos t)\,dt$$

и по формуле (7,2) получится: $\pi a^2 m(1+m)(1+2m)$.

На дуге $CDA$, принадлежащей окружности, параметр изменяется уже от $2\pi$ до 0. Уравнения окружности, если в них сохранить тот же параметр, что и в уравнении эпициклоиды, запишутся так:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos mt \\ y &= a\sin mt \end{aligned}\right\}.$$

Подынтегральное выражение $x\,dy - y\,dx$ в этом случае будет равно $a^2m\,dt$.

Ответ. $S = \pi a^2 m^2(2m+3)$ кв. ед.

**Задача 7,9** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную лемнискатой

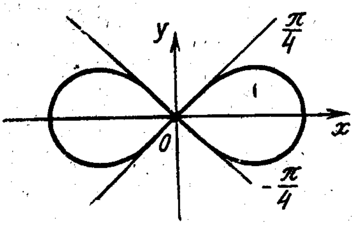
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2). \qquad (A)$$

Указание. Получить параметрические уравнения лемнискаты. Ввести параметр с помощью подстановки

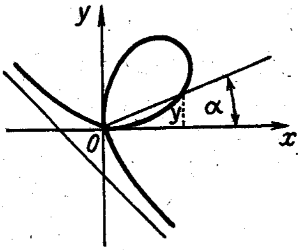
$$y = x \operatorname{tg} t. \qquad (B)$$

Подставляя это значение $y$ в уравнение (A) лемнискаты, получим параметрические уравнения лемнискаты

$$\left.\begin{aligned} x &= a\sqrt{2}\cos t\sqrt{\cos 2t} \\ y &= a\sqrt{2}\sin t\sqrt{\cos 2t} \end{aligned}\right\} \qquad (C)$$




К задаче 7,9




К задаче 7,10

Вычислить площадь одной петли (правой). Для этой петли, как видно из подстановки (B), параметр $t$ изменяется от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$.

Подынтегральное выражение в формуле (7,2) легко определить так: из подстановки (B) следует, что $\frac{y}{x} = t$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим:

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} \sec^2 t\, dt$$

или

$$x\,dy - y\,dx = x^2 \sec^2 t\, dt.$$

Подставляя сюда значение $x$ из уравнений $(C)$, получим

$$x\,dy - y\,dx = 2a^2 \cos 2t\, dt$$

и тогда по формуле (7,2)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2a^2 \cos 2t\, dt = a^2.$$

Ответ. $S = 2a^2$ кв. ед.

**Задача 7,10** (для самостоятельного решения). Найти площадь петли листа Декарта

$$x^3 + y^3 = 3axy.$$

Указание. Для получения параметрических уравнений контура положить

$$y = tx. \tag{A}$$

Получатся такие параметрические уравнения петли листа Декарта:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3} \end{aligned}\right\}. \tag{B}$$

Пределы, в которых изменяется параметр $t$, когда точка пробегает петлю, легко усмотреть из подстановки ($A$): $\frac{y}{x} = t$, но $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$ (см. чертеж). Угол $\alpha$ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha$ при этом изменяется от 0 до $\infty$, а значит, и параметр $t$, который есть не что иное как $\operatorname{tg}\alpha$, также изменяется от 0 до $\infty$.

Подынтегральное выражение легко найдется из подстановки (A):

$$\frac{y}{x} = t;\ d\left(\frac{y}{x}\right) = dt;$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = dt; \quad x\,dy - y\,dx = x^2\,dt.$$

Подставляя сюда значение $x$ из уравнений (B), получаем, что

$$x\,dy - y\,dx = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

Площадь петли

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\,dt.$$

**Ответ.** $S = \frac{3}{2}a^2$ кв. ед.

**Задача 7,11** (для самостоятельного решения). Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos t - a\cos 2t \\ y &= 2a\sin t - a\sin 2t \end{aligned}\right\}.$$

$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

**Ответ.** $6\pi a^2$ кв. ед.

**Илья Абрамович Каплан**

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

**Интегральное исчисление функций одной независимой переменной. Интегрирование дифференциальных уравнений, кратные и криволинейные интегралы**

Редактор *А. С. Нестеренко*
Обложка художника *А. П. Шулики*
Техредактор *Л. Т. Момот*
Крректоры *Р. Е. Дорф, Е. Т. Поступай*

Сдано в набор 22/VI 1965 г. Подписано к печати 12/X 1970 г. БЦ 50258. Формат 60×90¹/₁₆. Объем: 31,25 физ. печ. л., 31,25 усл. печ. л., 28 уч.-изд. л. Зак. 0-2385. Тираж 80 000. Цена 1 руб. 13 коп.
Св. ТПУ 1971 г. поз. 22.

Отпечатано с матриц Книжной фабрики им. Фрунзе на Типоофсетной фабрике «Коммунист» Комитета по печати при Совете Министров Украинской ССР, Харьков, ул. Энгельса, 11.