Міністерство освіти України

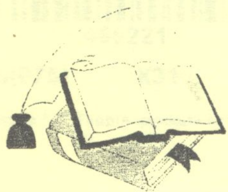
Вінницький державний технічний університет

Г. Г. Кашканова

В. А. Петрук

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник з вищої математики
для студентів усіх спеціальностей



Вінниця ВДТУ 1998

209

Міністерство освіти України

Вінницький державний технічний університет

Г. Г. Кашканова

В. А. Петрук

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник з вищої математики

для студентів усіх спеціальностей

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей

Вінниця ВДТУ 1998

УДК

Теорія функцій комплексної змінної. Навчальний посібник з вищої математики для студентів усіх спеціальностей (Г. Г. Кашканова, В. А. Петрук. – В.: ВДТУ, 1998. – с. 104 Укр. мовою).

В навчальному посібнику з теорії функцій комплексної змінної подані основні теоретичні питання даного курсу. Застосування формул та теорем розглядається на прикладах, використовуються графічні та геометричні ілюстрації.

Зокрема, розглянуті такі теми, як неперервність функцій комплексної змінної, диференціювання та аналітичність, інтегрування функцій комплексної змінної безпосередньо та за допомогою формул Коші, ряди з комплексними членами, включаючи ряди Тейлора та Лорана, поняття лишку та логарифмічного лишку, обчислення інтегралів за допомогою лишків.

Подано дидактичний матеріал для проведення самостійних робіт.

Навчальний посібник призначено для студентів технічних вузів усіх форм навчання та спеціальностей.

Бібліограф. 5 назв, 1 табл., 31 іл.

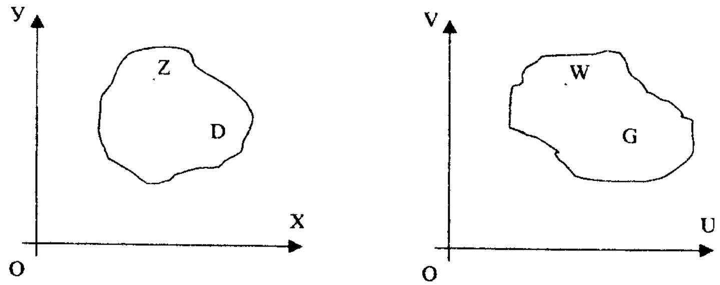
Рецензенти: доктор технічних наук В. М. Михалевич,
доктор фізико-математичних наук О. А. Панков

ЗМІСТ

Тема1. Поняття функції комплексної змінної

§1. Означення функції комплексної змінної

Нехай задано дві площини комплексних чисел: $Z=X+iY$ та $W=U+iV$ Розглянемо множину точок D в площині Z і множину точок G в площині W.



Означення. *Якщо кожному числу $Z \in D$ за деяким законом f поставлено у відповідність певне комплексне число $W \in G$, то говорять, що на множині D задана однозначна функція комплексної змінної, яка відображає множину D в множину G. Позначають $W=f(Z)$.*

Множину D називають областю визначення функції $f(Z)$. Якщо кожна точка множини G є значенням функції, то говорять, що G – область значень цієї функції або образ множини D за допомогою функції f. В цьому випадку говорять, що функція f відображає D на G.

Якщо кожному $Z \in D$ відповідає декілька значень W, то функция $W=f(Z)$ називається **багатозначною**.

Функцію $f(Z)$ можна записати в вигляді:

$$f(Z)=U(X,Y) + iV(X,Y) \qquad (X,Y) \in D$$

де $U(X,Y) = Re\, f(Z)$ - дійсна частина $f(Z)$

$V(X,Y) = Im\, f(Z)$ - уявна частина $f(Z)$

$U(X,Y), V(X,Y)$ - дійсні функції змінних X,Y.

Приклад 1. Нехай $W=Z^2 - iZ$, $Z=Z+iY$ $W = U+iV$,

тоді $W = U+iV = (X+iY)^2 - i(X-Y) = X^2+2iXY+i^2Y^2 -iX+i^2Y = (X^2-Y^2)+i(2XY-X+Y)$.

Тобто рівність $W=Z^2 - i\overline{Z}$ рівносильна системі $\begin{cases} U = X^2 - Y^2 \\ V = 2XY - X + Y \end{cases}$.

Приклад 2. Знайти дійсну та уявну частину функції $W=\overline{Z} - iZ^2$.

$W=X-iY-i(X+iY)^2=X-iY-iX^2-2i^2XY-i^3Y^2=X+2XY+(Y^2-X^2-Y)i$ $\rightarrow$

$Re\,W = X+2XY$ – дійсна частина

$In\,W = Y^2-X^2-Y$ – уявна частина.

Нехай в площині Z крива задана рівнянням $F(X,Y)=0$. Щоб знайти рівняння образу $\Phi(U,V)=0$ цієї кривої в площині W при відображенні за допомогою функції $W=f(Z)=U+iV$ потрібно виключити X та Y із рівнянь:

$$\begin{cases} U = U(X,Y) \\ V = V(X,Y) \\ F(X,Y) = 0 \end{cases}$$

Якщо крива задана параметрично $X=X(t)$, $Y=Y(t)$ або $Z=Z(t)=X(t) + iY(t)$, то параметричні рівняння її образу при відображенні $W=f(Z)$ будуть:

$$U=U(X(t),Y(t))=U(t)$$

$$V=V(X(t),Y(t))=V(t).$$

Приклад 3. В яку криву відображається коло радіуса $|Z|=2$ за допомогою функції $W=Z^2$?

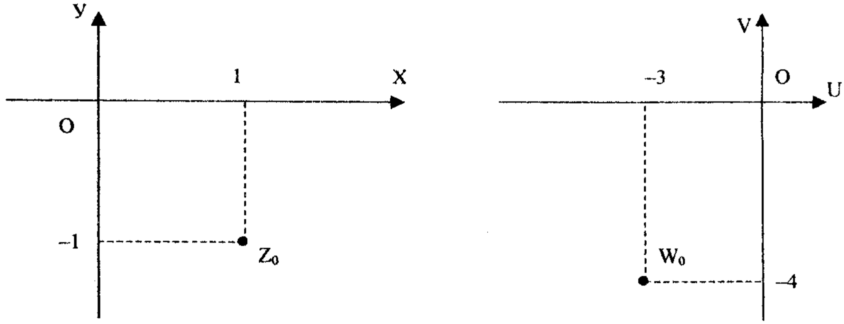
Розв'язування. За умовою $|Z|=2 \rightarrow |W|=|Z|^2=2^2=4$, тобто образом є коло радіуса R=4 в площині W.

$ArgW=2ArgZ+2\Pi k$ (k=0, ± 1, ..), (Це випливає із формули $|Z|^n=|Z|^n$ та

$ArgZ^n = nArgZ + 2k\Pi$). Якщо коли точка в площині Z описує коло $|Z|=2$, то її образ описує коло $|W|=4$ - два рази.

Приклад 4. Знайти образ т. $Z_o = 1-i$ при відображенні

$$W=(Z-i)^2=((1-i)-i)^2=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i.$$



§2. Основні елементарні функції комплексної змінної

1. *Дробово-раціональна функція*

$$W=\frac{a_0z^n + a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^m + b_1z^{m-1}+\ldots+b_m}$$

частиний випадок - многочлен $W=a_oz^n + a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$.

2. *Показникова функція* e^z визначається як сума абсолютно збіжного у всій комплексній площині степеневого ряду:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots +$$

Властивості: а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ z_1, z_2 – комплексні величини;

б) $e^{z+2k\Pi i} = e^z$ ($k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots$) - e^z - періодична функція з періодом $2\Pi i$.

3. *Тригонометричні функції* *sin Z* та *cos Z* визначається степеневими рядами:

$$\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{Z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

$$\cos Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{Z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

які абсолютно збігаються $\forall Z$. Функції, періодичні з дійсним періодом 2Π, мають тільки дійсні нулі $Z=k\Pi$ та $Z = \frac{\Pi}{2} + k\Pi$ відповідно, де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Для функцій e^z, $sinZ$, $cosZ$ мають місце формули Ейлера:

$$e^{iz} = cosZ + isinZ \qquad e^{-iz} = cosZ - isinZ$$

звідки $$cosZ = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad sinZ = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Функції tgZ та $ctgZ$ визначаються рівностями:

$$ctgZ = \frac{\cos Z}{\sin Z} \qquad tgZ = \frac{\sin Z}{\cos Z}$$

Для них залишаються справедливими всі формули тригонометрії.

4. *Гіперболічні функції* *shz, chz, thz, cthz* визначаються рівностями:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$thz = \frac{shz}{chz} \qquad cthz = \frac{chz}{shz}$$

5. *Тригонометричні* та *гіперболічні* функції зв'язані між собою співвідношеннями:

$$sinZ = -i\, shiZ \qquad shZ = -i\, siniZ$$

$$cosZ = chiZ \qquad chZ = cosiZ$$

$$tgZ = -\, i\, thiZ \qquad thZ = -\, i\, tgiZ$$

$$ctgZ = i\, cthiZ \qquad cthZ = i\, ctgiZ.$$

6. *Логарифмічна функція* $Ln\, Z$, де $Z \neq 0$, визначається як функція, обернена показниковій, причому

$$Ln\, Z = ln|Z| + i\, Arg\, Z = ln|Z| + i\, arg\, Z + 2k\Pi i,$$

$$(k = 0,\ \pm 1;\ \pm 2, ..).$$

Ця функція є багатозначною. Серед нескінченної множини значень логарифма числа Z виділяють одне значення, що дорівнює $ln|Z| + i\, arg\, Z$, яке називають головним значенням логарифма і позначають $ln\, Z$.

Очевидно, що $Ln\, Z = ln\, Z + 2k\Pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Справедливі слідуючі співвідношення:

$$Ln(Z_1 \cdot Z_2) = Ln\, Z_1 + Ln\, Z_2$$

$$Ln\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) = Ln\, Z_1 - Ln\, Z_2$$

7. *Обернені тригонометричні функції* $Arcsin\, Z$, $Arccos\, Z$, $Arctg\, Z$, $Arcctg\, Z$ визначаються як обернені відповідно до функцій $sinW$, $cosW$, tgW, $ctgW$. Наприклад, якщо $Z = sinW$, то W називається арксинусом числа Z та позначається $W = Arcsin\, Z$. Всі ці функції багатозначні та виражаються через логарифмічні.

$$Arcsin\, Z = -\, i\, Ln\left(iZ + \sqrt{1 - Z^2}\right)$$

$$Arccos\, Z = -\, i\, Ln\left(Z + \sqrt{Z^2 - 1}\right)$$

$$Arctg\, Z = -\,\frac{i}{2}\, Ln\frac{1 + iZ}{1 - iZ}$$

$$Arcctg\, Z = -\,\frac{i}{2}\, Ln\frac{Z + i}{Z - i}$$

Головні значення обернених тригонометричних функцій *arcsin Z*, *arccos Z*, *arctg Z*, *arcctg Z* отримаємо, якщо взяти головні значення відповідних логарифмічних функцій.

8. *Загальна степенева функція* $W=Z^{a}$, $a=\alpha+i\beta$ - комплексне число визначається рівністю $Z^{a}=e^{aLnZ}$ - функція багатозначна, її головне значення $Z^{a}=e^{a\ln Z}$.

9. *Загальна показникова функція* $W=a^{Z}$ ($a\neq 0$ - будь-яке комплексне число) визначається рівністю $a^{Z}=e^{ZLna}$.

Головне значення цієї функції $a^{Z}=e^{Z\ln a}$.

Приклад 5. Знайти значення модуля функції W=sinZ в точці Z=П+iln(2+$\sqrt{5}$).

Розв'язування: Z= X+iY, тоді W = sin(X+iY) = sinXcosiY + cosXsiniY

$$= \sin X chY - i shY\cos X,\quad |\sin Z| = \sqrt{\sin^2 X ch^2 Y + sh^2 Y\cos^2 X} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 X ch^2 Y + sh^2 Y(1-\sin^2 X)} = \sqrt{\sin^2 X + sh^2 Y},$$

якщо Z=П+iln(2+$\sqrt{5}$), то

$$\left|\sin(n+i\ln(2+\sqrt{5})\right| = \sqrt{\sin^2 n + sh^2(\ln(2+\sqrt{5}))} = sh(\ln(2+\sqrt{5})) =$$

$$= \frac{e^{\ln(2+\sqrt{5})} - e^{-\ln(2+\sqrt{5})}}{2} = \frac{2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2} = 2$$

тобто видно, що тригонометрична функція sin Z в комплексній області може приймати значення за модулем більші одиниці.

Тема 2. Границя функції комплексної змінної

§1. Основні геометричні поняття

Означення. *Областю комплексної площини називається множина D точок, що має такі властивості:*

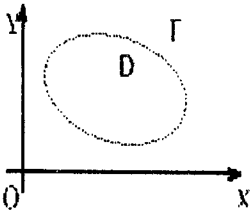
1) разом із кожною точкою з множини D цій множині належить достатньо малий круг з центром в цій точці (властивість відкритості).

2) будь-які дві точки, що належать D можна з'єднати кривою, що складається із точок D (властивість зв'язності).

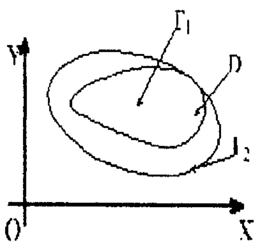
Означення. *Область називається однозв'язною, якщо будь-яку замкнену криву, що лежить в цій області, можна стягнути в точку, не виходячи за межі цієї області.*

Означення. *Область називається обмеженою, якщо всі її точки належать деякому кругу радіуса R з центром в початку координат . В протилежному випадку область називається необмеженою.*

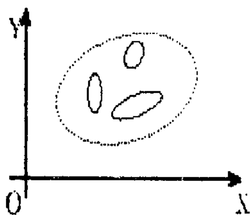
Означення. *Обмежена область є однозв'язною, якщо її межа складається із одної зв'язної лінії (тобто такої, що з будь-якої точки лінії можна пройти по цій лінії в будь-яку іншу точку). Якщо межа області складається із декількох зв'язних частин, то область називається багатозв'язною.*



Однозв'язна



Двозв'язна

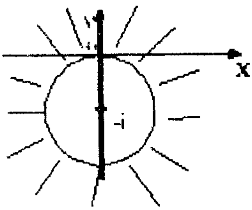


Чотиризв'язна

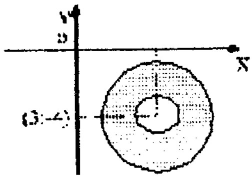
Приклад 1. Побудувати області в комплексній площині.

а) $|z+i|>1$ б) $1<|z-3+4i|<2$ в) $\operatorname{Re} Z \geq \frac{1}{2}$

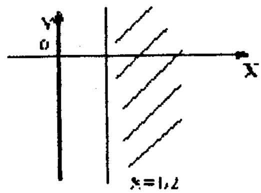
$Z_o=3\text{-}4i$ $X \geq \frac{1}{2}$



Відкрита необмежена однозв'язна область



Обмежена відкрита двозв'язна область



Необмежена замкнена однозв'язна область

§2. Границя послідовності комплексних чисел

Нехай задана послідовність комплексних чисел:

$\{Z_n\} = Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ $Z_n = X_n + iY_n$

Означення. *Комплексне число* $a = \alpha + i\beta$ *називається границею послідовності* $\{Z_n\}$, *якщо* $\forall \varepsilon > 0$ *можна вказати такий номер* $N=N(\varepsilon)$, *починаючи з якого всі елементи* Z_n *цієї послідовності задовольняють нерівність* $|Z_n - a| < \varepsilon$, *при* $n>N(\varepsilon)$.

Послідовність $\{Z_n\}$, що має границю a, називається збіжною до числа a.

Це записують: $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$

Кожній послідовності комплексних чисел $\{Z_n\}$ відповідає 2 послідовності дійсних чисел $\{X_n\}$ та $\{Y_n\}$ n=1,2,...

Теорема 1. Послідовність $\{Z_n = X_n + iY_n\}$ збігається до числа $a=\alpha + i\beta$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \alpha$ та $\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = \beta$

Означення. *Послідовність* $\{Z_n\}$ *називають обмеженою, якщо існує додатне число* M *таке, що для всіх елементів* Z_n *цієї послідовності виконується нерівність* $|Z_n| \le M$.

Теорема 2. Будь-яка збіжна послідовність обмежена.

Властивості збіжних послідовностей:

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = b$, то

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (Z_n \pm \tau_n) = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (Z_n \times \tau_n) = a \times b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Z_n}{\tau_n} = \dfrac{a}{b}$, $(\tau_n \ne 0; b \ne 0)$.

Приклад 2. Довести, що послідовність $Z_n = \dfrac{n-i}{n+1}$ n=1,2,... має границею число $a=1$.

Розв'язування. Задамо $\varepsilon > 0$, покажемо, що існує такий номер N, і якщо $n \ge N$, то виконується $|Z_n - 1| < \varepsilon$.

Розглянемо $|Z_n - 1| = \left|\dfrac{n-i}{n+1} - 1\right| = \left|\dfrac{-1-i}{n+1}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$, тоді $|Z_n - 1| < \varepsilon$ буде виконано, якщо $\dfrac{\sqrt{2}}{n+1} < \varepsilon$, тобто $n > \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1$ за N можна взяти число $N = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1\right] + 1$.

Теорема 3. Достатня умова збіжності послідовності $\{Z_n\}$.

Нехай $Z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, де $\begin{cases} \rho_n = |Z_n| \\ \varphi_n = \arg Z_n \end{cases}$ тоді, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ і

$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = P_0 e^{i\varphi_0}$.

Приклад 3. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$, де $Z = X + iY$.

Доведення. Позначимо $Z_n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, тоді

$$\lim_{n\to\infty}|Z_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{x+iy}{n}\right|^n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\frac{y}{n}\right|^n == \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)}^n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2nx+x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} >$$

$$> \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}\frac{n^2}{2nx+x^2+y^2}\frac{2nx+x^2+y^2}{n^2}} =$$

$$= \ell^{\lim\frac{n^2x+\frac{x^2n}{2}+\frac{y^2n}{2}}{n^2}} = \ell^x$$

Поскільки $\varphi_n = \arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = arctg\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}} = arctg\frac{y}{n+x}$, то

$$\arg Z_n = \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right) = narctg\frac{y}{n+x}$$

Якщо для будь-якого як завгодно великого числа M>0 існує натуральне число N таке, що всі члени Z_n послідовності з номерами n>N задовольняють нерівність $|Z_n| > M$, то говорять, що $\{Z_n\}$ збігається до нескінченно віддаленої точки, або просто до нескінченності та записують $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = \infty$.

§3. Границя функції комплексної змінної

Означення. *Околом точки Z_o площини комплексної змінної Z називається будь-яка область, що містить цю точку.*

∂-околом точки Z_o називається множина всіх точок Z, що лежать всередині круга радіуса ∂ з центром в точці Z_o, тобто множина точок Z, що задовольняють нерівність: $|Z - Z_o| < \partial$.

Означення. *Околом нескінченно віддаленої точки називається сукупність всіх точок Z, що задовольняють нерівність $|Z| > R$, тобто сукупність всіх точок Z, що лежать поза кругом з центром в початку координат достатньо великого радіуса R .*

Нехай функція f(z) визначена в деякому околі Ω точки Z_o, за винятком, можливо, самої точки Z_o.

Означення. *Число A називається границею функції f(z) в точці Z_o, якщо $\forall$ $E>0$ можна вказати таке число* $\partial=\partial(\varepsilon)>0$, *що для всіх точок* $Z\in\Omega$, *що задовольняють умову* $0<|Z-Z_O|<\partial$, *виконується нерівність:* $|f(z)-A|<\varepsilon$. *В цьому випадку пишуть* $\lim\limits_{z\to z_o} f(z)=A$

Існування границі, $\lim\limits_{z\to z_o} f(z)$ де f(Z) = U(x,y) + i V(x,y), $Z_o=X_o+iY_o$

рівносильне існуванню двох границь: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} U(x,y)$ та $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} V(x,y)$

причому $\lim\limits_{z\to z_O} f(z)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} U(x,y)+i\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} V(x,y)$

Границі функцій комплексної змінної мають такі властивості:

Нехай існують границі $\lim\limits_{z\to z_o} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_o} g(z)=B$

Тоді 1. $\lim\limits_{z\to z_O}(f(z)\pm g(z))=A\pm B$

2. $\lim\limits_{z\to z_O}(f(z)\cdot g(z))=A\times B$

3. $\lim\limits_{z\to z_o}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B}$, $B\neq 0$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}$

Розв'язування. $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+3iz-2}{z+i}=\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{(z+i)(z+2i)}{z+i}=$

$=\lim\limits_{z\to -i}(z+2i)=-i+2i=i$

Означення. *Функція* $f(z)$, *яка задана в області D, називається неперервною в точці* $Z_o\in D$, *якщо* $\lim\limits_{z\to z_O} f(z)=f(z_0)$.

Означення. *Функція* $f(z)$ *комплексної змінної називається неперервною в області D, якщо вона неперервна в кожній точці області D.* Для неперервності функції $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ в точці $Z_o = X_o + iY_o$ необхідно і достатньо, щоб функції $U(x,y)$ та $V(x,y)$ були неперервні в точці (X_o, Y_o) за сукупністю змінних x, y.

Приклад 2. Довести, що $W=Z^2$ неперервна на всій комплексній площині.

Розв'язування. Нехай Z_0 – деяка точка, задамо $\varepsilon>0$. Знайдемо $\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $\left|Z^2 - Z_0^2\right| < \varepsilon$ при $|Z - Z_O| < \delta$. Якщо $Z \to Z_O$, то знайдеться таке M>0, що $|Z|<M$ і $|Z_O|<M$, тоді $\left|Z^2 - Z_0^2\right| = |(Z+Z_0)(Z-Z_0)| = |Z+Z_0||Z-Z_0| < (|Z|+|Z_0|)$ $|Z-Z_0| < 2M|Z-Z_0|$. Таким чином, якщо $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, то з нерівності $|Z - Z_O| < \delta \;\Rightarrow\; \left|Z^2 - Z_0^2\right| < 2M\delta \le \varepsilon$, тобто, для будь-якого Z_0, $W=Z^2$ неперервна.

Тема 3. Диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. Поняття про конформне відображення.

§1. Диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана.

Нехай задана однозначна функція $W = f(z)$ в деякій області D (відкритій зв'язній множині) комплексної площини Z. Точки Z та $Z+\Delta Z$ належать області D. Позначимо $\Delta W = f(\, Z + \Delta Z\,) - f(Z)$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Означення. *Похідною функції $f(z)$ в точці $Z \in D$ називається границя* $\lim\limits_{\Delta Z \to 0} \dfrac{\Delta W}{\Delta Z} = \lim\limits_{\Delta Z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) = \dfrac{dW}{dz}$, *коли* $\Delta Z \to 0$ *будь-яким способом.*

Означення. *Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці $Z \in D$, якщо вона диференційовна в точці Z та деякому її околі.*

Функцію $f(z)$, що має неперервну похідну в будь-якій точці області D комплексної площини, називають аналітичною функцією на цій області.

Основні властивості похідних функції комплексної змінної аналогічні відповідним властивостям похідних функцій дійсної змінної.

Розглянемо комплексну функцію:

$W = f(Z) = U(x,y) + iV(x,y) \quad Z \in D$, нехай вона має похідну в точці

$$Z \in D: \; f'(z) = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta Z} \tag{1}$$

Таким чином, при будь-якому шляху прямування ΔZ до нуля повинна існувати границя (1), рівна одному і тому ж комплексному числу

$f'(z)$. Це виконується коли:

а) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x$ та $\Delta x \to 0$,

або якщо

б) $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$ та $\Delta y \to 0$.

В першому випадку:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} + i\frac{V(x+\Delta x, y) - V(x,y)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} + i\lim_{\Delta x \to 0}\frac{V(x+\Delta x, y) - V(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$$

В другому випадку:

$$f©(z) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{U(x, y+\Delta y) - U(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{V(x, y+\Delta y) - V(x,y)}{i\Delta y} =$$

$$= -i\lim_{\Delta y \to 0}\frac{U(x, y+\Delta y) - U(x,y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0}\frac{V(x, y+\Delta y) - V(x,y)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y}$$

Але тоді повинні виконуватись рівності: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ (2),

які називаються умовами Коші-Рімана .

Необхідна та достатня умови аналітичності функції комплексної змінної.

Теорема. Для того, щоб функція $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ була аналітичною в області D площини Z, необхідно і достатньо, щоб частинні похідні першого порядку функцій U та V були неперервні в D та виконувались умови Коші-Римана: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$; $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $(x,y) \in D$.

Приклад 1. Показати, що функція $W = e^{z}$ аналітична на всій комплексній площині.

Розв'язування. Маємо $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$

$U(x,y) = e^{x}\cos y$, $V(x,y) = e^{x}\sin y$ - диференційовні в будь-якій точці (x, y). Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{x}\cos y \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -e^{x}\sin y;$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = e^{x}\cos y \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x} = e^{x}\sin y$$

Умови Коші-Римана виконані , тому функція аналітична.

Для будь-якої аналітичної функції $f(z)$ похідну можна знайти, використовуючи одну із чотирьох формул:

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Для прикладу (1) маємо:

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = e^{x}\cos y + i\, e^{x}\sin y =$$

$$= e^{x}(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^{z} \rightarrow \left(e^{z}\right)' = e^{z}.$$

Приклад 2. Чи є функція $W = Z \times \overline{Z}$ аналітичною хоча б в одній точці?

Маємо $Z \times \overline{Z} = (x+iy)(x-iy) = x^{2} + y^{2} \rightarrow$

$U(x,y) = x^{2} + y^{2}$; $V(x,y) = 0$ – диференційовні функції.

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$ та $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 2y$ та $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ – умови виконались тільки в одній точці $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \to (0{,}0)$. Тобто функція диференційовна тільки в точці $(0{,}0)$.

Приклад 3. Чи є функція $W = \overline{Z} = x - iy$ аналітичною?

Маємо: $U(x,y) = x$, $V(x,y) = -y$ - диференційовні в будь-якій точці (x,y).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial U}{\partial x} \neq \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \to \qquad W = \overline{Z}$$

ніде не диференційовна, а значить не аналітична.

Використовуючи умови Коші-Рімана, аналітичну функцію можна відновити, якщо відома її дійсна частина $U(x,y)$ або уявна $V(x,y)$.

Приклад 4. Знайти аналітичну функцію $W = f(z)$, якщо $U(x,y) = 2e^x \cos y$ та $f(0) = 2$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (2e^x \cos y)'_x = 2e^x \cos y, \text{ але } \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \to 2e^x \cos y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$V(x,y) = \int 2\ell^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x) \quad \text{визначимо } \varphi(x):$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(2e^x \sin y + \varphi(x)\right)'_x = 2e^x \sin y + \varphi'(x)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = 2e^x \sin y, \text{ але } \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y},$$

тоді $2e^{x}\sin y+\varphi'(x)=2e^{x}\sin y\to$

$\varphi'(x)=0 \quad \varphi(x)=c$, де c - const $\to V(x,y)=2e^{x}\sin y+c$.

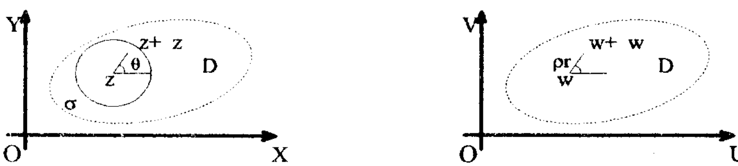
$f(z)=2e^{x}\cos y+i(2e^{x}\sin y+c)=2e^{z}+ic$

$f(0)=2 \quad \to f(0)=2\times e^{0}+ic=2+ic=2 \quad \to c=0$

$f(z)=2e^{z}$.

§2. Поняття про конформне відображення

Розглянемо геометричну інтерпретацію похідної $\varphi'(x)\neq 0$. Нехай задано дві площини: точок z та w.



Із точки z опишемо відкритий круг σ радіуса δ>0 з центром в ній. Довільна точка δ має вигляд $z+\Delta z$, де Δz - довільне комплексне число, причому $|z|<\delta$. Запишемо $\Delta z=\rho e^{i\theta}$ $(\rho>0)$. За допомогою функції $W=f(z)$ круг σ перейде в деяку область σ площини w. Область σ складається із точок $w+\Delta w$, де прирости Δw відповідають приростам Δz. Із означення похідної $\frac{\Delta W}{\Delta z}=f'(z)+\alpha(\Delta z)$, де

$\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Тоді $\Delta W = f'(z)\Delta z + \alpha(\Delta z) \times \Delta z$. Добуток $\Delta z\,\alpha(\Delta z)$ при $\Delta z \to 0$ прямує до нуля швидше, ніж Δz. Тому при $\varphi'(x) \neq 0$ $f'(z)\Delta z$ називають головною частиною приросту ΔW. Можна записати $\Delta W \approx f'(z)\Delta z$. Число $f'(z)$ запишемо в показниковій формі $f'(z) = r \times e^{i\varphi}$ $(r > 0)$, тоді $\Delta W \approx$ $r \times e^{i\varphi} \times \rho e^{i\theta}$ $= r\rho e^{i(\varphi + \theta)}$. Таким чином:

1) модуль $|\Delta W|$ з точністю до нескінченно малої вищого порядку в $r = |f'(z)|$ раз більше модуля $|\Delta z|$.

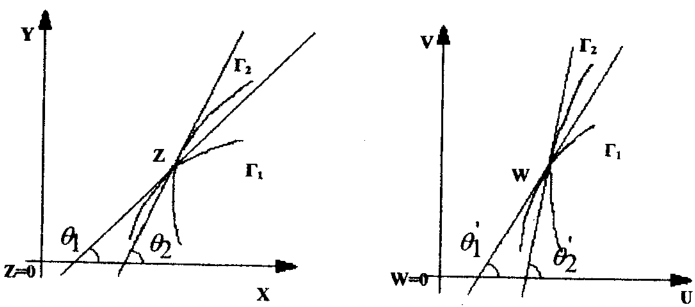
$$|W| = r\rho = r|\Delta z|.$$

2) аргумент ΔW отримують із $\mathrm{Arg}\,\Delta z$ шляхом додавання до нього числа φ: $Arg(\Delta W) \approx Arg(\Delta z) + \varphi$.

Для того, щоб уявити куди перейшли точки $z + \Delta z$ з $|z| < \delta$ за допомогою функції $W = f(z)$ потрібно:

1) повернути круг δ на кут $\varphi = \arg f'(z)$

2) розтягнути його в $|f'(z)|$ раз.



Нехай Γ_1 та Γ_2 - гладкі криві, що виходять із точки z. Дотичні до них утворюють з віссю OX відповідно кути θ_1 та θ_2. Образи цих кривих Γ_1' та Γ_2' на площині W за допомогою функції $W = f(z)$ мають дотичні в т. W, що утворюють з віссю U відповідні кути θ_1' та θ_2'.

Причому $\theta_1' = \theta_1 + \varphi$, $\theta_2' = \theta_2 + \varphi$, $\theta_2' - \theta_1' = \theta_2 - \theta_1$ - дане відображення зберігає кути, причому зі збереженням напрямку відліку (якщо $\theta_2 > \theta_1$, то $\theta_2' > \theta_1'$). Крім того, це відображення здійснює розтяг в кожній точці, де $f'(z) \neq 0$, що не залежить від напрямку. Таке відображення називають конформним.

Висновок: Відображення за допомогою аналітичної функції $W = f(z)$ є конформним в усіх точках, де $f'(z) \neq 0$.

Якщо функція $W = f(z)$ аналітична в деякій області D, взаємно однозначно відображає цю область на область D', то крива $L \subset D$ відобразиться в криву L' в площині W, довжина якої $l_W = \int\limits_L |f'(z)||dz|$.

Область D в площині Z при цьому перейде в D', причому площа D'

$$S_{D'} = \iint\limits_D |f'(z)|^2 dxdy$$

$|f'(z)|^2$ - дорівнює коефіцієнту спотворення площі при відображенні $W = f(z)$.

Приклад 1. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $W = z^2$ в точці $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Розв'язування. $W'(z) = 2z \quad W'(z_0) = 2\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

Перейдемо до тригонометричної форми комплексного числа:

$$2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\Pi}{4} + i\sin\frac{\Pi}{4}\right).$$

$$\left|f'(z)\right|_{z=z_0} = 4 \qquad \arg f'(z)\Big|_{z_0} = \frac{\Pi}{4}.$$

Коефіцієнт розтягу $r = 4$, кут повороту $\varphi = \dfrac{\Pi}{4}$.

Приклад 2. Точка $z = x + iy$ описує відрізок X=1; $-1 \le y \le 1$. Чому дорівнює довжина лінії при відображенні цього відрізка за допомогою функції $W = z^2$.

1-й спосіб: Маємо $W = z^2$ або $U + iV = x^2 - y^2 + i2xy$

$U = x^2 - y^2$, $V = 2yx$ на даній лінії $x = 1$ - тому $U = 1 - y^2$ $V = 2y$, причому $-1 \le y \le 1$ тоді $-2 \le V \le 2$.

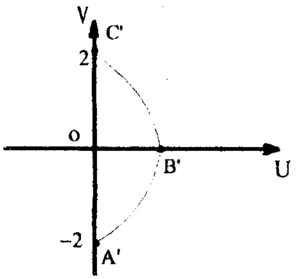
Тоді $y = \dfrac{V}{2}$, а $U = 1 - \dfrac{V^2}{4}$ - парабола

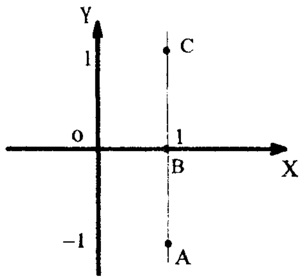
$$l\omega = 2\int_0^2 \sqrt{1 + \frac{V^2}{4}}\,dV = 2\sqrt{2} + \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

2-й спосіб: $\quad l\omega = \int\limits_L \left|f'(Z)\right|\left|dz\right| = 2\int\limits_L |Z|\left|dZ\right| \quad z = x + iy$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2}$$

$$|dz| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dy.$$



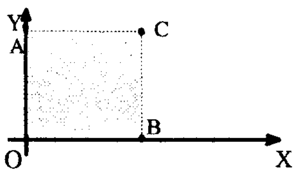


$$l\omega = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y^2}\,dy = 2\sqrt{2}+\ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Приклад 3. $W = z^2$, точка z описує квадрат $0 \le x \le 1$ $0 \le y \le 1$.

Яку область описує т. W при цьому відображенні?

Розв'язування: $W = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$



$U = x^2 - y^2,\ V = 2xy.$

Знайдемо відображення вершин квадрата:

т. O(0;0) $\rightarrow$ $U = 0; V = 0$ $\rightarrow$ (0;0)

т. C(1;1) $\rightarrow$ $U = 0; V = 2$ $\rightarrow$ (0;2)

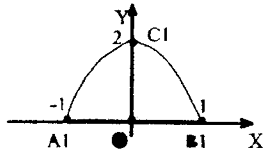
т. A(0;1) $\rightarrow$ $U = -1; V = 0$ $\rightarrow$ (-1;0)

т. B(1;0) $\rightarrow$ $U = 1; V = 0$ $\rightarrow$ (0;2).

Відображення сторін OB: $y = 0$ $U = x^2, V = 0$ $U \ge 0$.

OA: $x=0$ $\qquad U=-y^2, V=0$ тобто

$U \le 0, V=0.$



AC: $y=1$ $\qquad U=x^2-1, \qquad V=2x$

$\rightarrow U=\dfrac{V^2}{4}-1.$

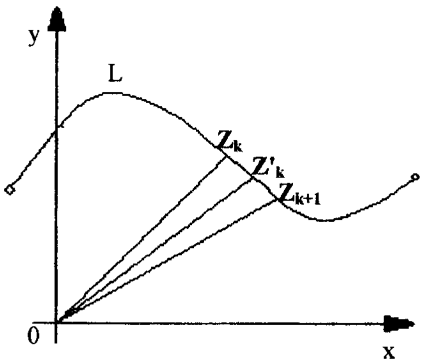
BC: $x=1$ $\quad U=1-y^2,\ V=2y \rightarrow U=1-\dfrac{V^2}{4}.$

Тобто квадрат OACB відобразиться в область $A_1\ C_1\ B_1 A_1$.

Тема 4. Інтегрування функції комплексної змінної. Теорема Коші.

§1. Методи обчислень та властивості інтегралів від функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція $f(z)$, де Z=X+iY визначена і неперервна в області D, а L - кусково-гладка замкнена (або незамкнена) орієнтована крива $L \subset D$.



Розіб'ємо криву L на n довільних частин $\Delta Z_k = Z_{k+1} - Z_k$. В кожній частині виберемо довільну точку Z'_k, обчислимо в ній значення функції $f\left(Z'_k\right)$, складемо інтегральну суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(Z'_k\right)\Delta k$. Границя цієї інтегральної суми при $\max\left|\Delta Z_k\right| \to 0$ (якщо вона існує і не залежить від способу розбиття, вибору точок всередині кожної елементарної частини) називається інтегралом від функції $f(z)$ вздовж кривої (контура) L і позначається $\int\limits_L f(Z)dz$. Якщо позначити $f(z) = U + iV$, де $U = U(x,y)$,

$V=V(x,y)$ - дійсні функції змінних x та y, то обчислення інтегралу від функції $f(z)$ комплексної змінної z зведеться до обчислення звичайних криволінійних інтегралів.

$$\int_L f(z)dz = \int_L (U+iV)(dx+idy) = \int_L Udx - Vdy + i\int_L Vdx + Udy.$$

Якщо крива L задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$; початкові та кінцеві точки дуги L відповідають значенням параметра $t=t_0$ та $t=t_1$,

то $\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt$, де $z(t)=x(t)+iy(t)$.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, що містить точки z_0 та z_1, то має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \phi(z_1)-\phi(z_0) = \phi(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$ де $\phi(z)$ - будь-яка первісна для функції $f(z)$: $\phi'(z)=f(z)$.

Приклад 1. $\int_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz$ оскільки підінтегральна функція $f(z)=3z^2+2z$ аналітична всюди, то за формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int_{1-i}^{2+i}\left(3z^2+2z\right)dz = (z^3+z^2)\Big|_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3+(2+i)^2-(1-i)^3-(1-i)^2 = 7+19i$$

Якщо функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ - аналітичні в однозв'язній області D, а z_0 та z_1 - довільні точки цієї області, то має місце формула інтегрування за частинами:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)dz = \left[f(z)\varphi(z)\right]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int\limits_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)dz.$$

Приклад 2. $\int\limits_0^i z\cos z dz$ функції $f(z) = z$ та $\varphi(z) = \cos z$ - аналітичні всюди, інтегруючи за частинами маємо:

$$\int\limits_0^i z\cos z dz = \int\limits_0^i z(\sin z)' dz = (z\sin z)\Big|_0^i - \int\limits_0^i \sin z dz = i\sin i + \cos z\Big|_0^i =$$

$$= i\sin i + \cos i - 1 = i(-ishi \times i) + chi \times i - 1 = -sh1 + ch1 - 1 =$$

$$= -\frac{e - e^{-1}}{2} + \frac{e + e^{-1}}{2} - 1 = \frac{-e + e^{-1} + e + e^{-1} - 2}{2} = e^{-1} - 1 = \frac{1-e}{e}.$$

Заміна змінних в інтегралах від функції комплексної змінної виконується аналогічно випадку функції дійсної змінної, якщо аналітична функція $z = \varphi(\omega)$ відображає взаємно однозначно контур L_1 в ω-площині на контур L в z-площині, тоді

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(\varphi(\omega))\varphi'(\omega)d\omega.$$

Якщо шлях інтегрування є: 1) напівпрямою, що виходить з т. z_0, або 2) колом з центром в т. z_0, вводять заміну $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$.

В випадку 1) $\varphi = const, \rho -$ дійсна змінна інтегрування.

2) $\rho = const, \varphi -$ дійсна змінна інтегрування.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{L^-} \left(z+2\bar{z}\right)dz$ за такими кривими:

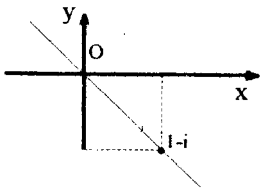
1. L - відрізок прямої від т.0 до т. 1-і

2. L - дуга кола $|z|=2$ $\quad -\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$

3. L - коло $|z-1|=2$.

Розв'язування: $f(z) = z + 2\bar{z} = x + iy + 2(x - iy) = 3x - iy$.

Тоді $\mathrm{I} = \int\limits_L \left(z+2\bar{z}\right)dz = \int\limits_L (3x - iy)\left(dx + idy\right) = \int\limits_L 3xdx + ydy + i\int\limits_L - ydx + 3xdy$



1. L - пряма, що з'єднує т.0 з т. 1-і, має рівняння $y = -x$
$0 \le x \le 1 \to dy = -dx$.

$$\mathrm{I} = \int\limits_0^1 3xdx - x(-dx) + i\int\limits_0^1 xdx - 3xdx = 4\int\limits_0^1 xdx + i\int\limits_0^1 -2xdx = 2x^2\Big|_0^1 - ix^2\Big|_0^1 =$$
$= 2 - i$.

2. На колі $|z|=2$ введемо параметричне рівняння $x = 2\cos\varphi$
$y = 2\sin\varphi$; $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \times 2\cos\varphi(-2\sin\varphi)d\varphi + 2\sin\varphi 2\cos\varphi d\varphi + i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin\varphi(-2\sin\varphi)d\varphi +$$

$$+3\times 2\cos\varphi 2\cos\varphi d\varphi = -8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi + i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4\sin^2\varphi + 12\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$= 8\pi i$

3. Точки кола L $|z-1| = 2$ можна представити таким чином

$Z - 1 = 2e^{i\varphi} \to z = 1 + 2e^{i\varphi}$ $-\Pi \le \varphi \le \Pi$.

Тому на L $\bar{z} = 1 + 2e^{-i\varphi}$ $dz = 2ie^{i\varphi}d\varphi$.

$$I = \int_{\Pi}^{-\Pi}\left[1 + 2e^{i\varphi} + 2(1 + 2e^{-i\varphi})\right]\times 2ie^{i\varphi}d\varphi = 16\Pi i$$

Властивості інтегралу від функції комплексної змінної

1. Лінійності: $\int\limits_L \left[c_1 f_1(z) + c_2 f_2\right]dz = c_1\int\limits_L f_1(z)dz + c_2\int\limits_L f_2(z)dz$

2. Аддитивності: $\int\limits_{L_1+L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz.$

де $L1 + L2$ - крива, складена із кривих L_1 та L_2.

3. Якщо на кривій L замінити напрям на протилежний (L^-), то інтеграл також змінить знак: $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{L^-} f(z)dz.$

§2. Інтегральна теорема Коші

Теорема Коші: Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ по будь-якому кусково-гладкому замкненому контуру L, що лежить в області D, дорівнює нулю.

Доведення. Якщо $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, тоді

$$\int\limits_L f(z)dz=\int\limits_L U\,dx-V\,dy+i\int\limits_L V\,dx-U\,dy=I_1+iI_2\,.$$

Поскільки $f(z)$ аналітична, то існує неперервна похідна $f'(z)$ і мають місце умови Коші-Рімана: $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\partial V}{\partial y};\quad \dfrac{\partial V}{\partial x}=-\dfrac{\partial U}{\partial y}.$

До кожного інтеграла I_1 та I_2 застосуємо формулу Гріна:

$$\int\limits_L X\,dx+Y\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy;$$

$$I_1=\int\limits_L U\,dx-V\,dy=\iint\limits_D\left(-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy=0;$$

$$I_2=\int\limits_L V\,dx+U\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy=0;$$

Тобто $\int\limits_L f(z)dz=I_1+iI_2=0.$

Приклад 4.

а) $\int\limits_L z^n dz=0 \qquad$ (n=0,1,2...)

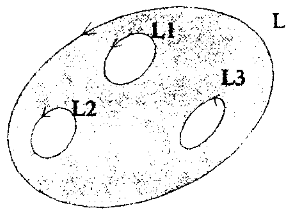
б) $\oint\limits_L e^z dz = 0$ $\qquad \oint\limits_L a^z dz = 0 \qquad (a>0)$

в) $\oint\limits_L \sin z dz = 0$ $\qquad \oint\limits_L \cos z dz = 0$

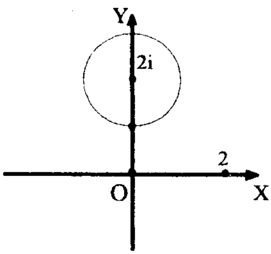
г) $\oint\limits_L shz dz = 0$ $\qquad \oint\limits_L chz dz = 0$,

де L - довільний замкнений кусково-гладкий контур.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в замкненій області D, обмеженій кусково-гладкими контурами L_1, L_2... L_n (багатозв'язна), то $\oint\limits_L f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} f(z)dz$.



Приклад 5. $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{\cos z}{z(z-2)^2} dz = 0$, поскільки контур інтегрування замкнений та функція $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-2)^2}$ аналітична всередині круга $|z-2i| \le 1$. (точки розриву 0, та 2 поза кругом).



§1. Однозначні вітки многозначної функції. Точки розгалуження

Нехай функція $W = f(z)$ аналітична в області D, відображає область D на область G і така, що обернена функція $z = \varphi(W)$ многозначна в області G. Якщо існують однозначні аналітичні в області D функції $z_1 = \varphi_1(W)$, $z_2 = \varphi_2(W)$,..., для яких дана функція $W = f(z)$ є оберненою, то функції $\varphi_1(W)$, $\varphi_2(W)$,... називаються однозначними вітками функції $\varphi(W)$, визначеними в області G.

Наприклад, функція $W = z^n$ кожній точці Z_0 ставить у відповідність єдину т. W_0, але одній і тій же т. W_0 $(W \neq 0, W \neq \infty)$ функція $Z = \sqrt[n]{W}$ ставить у відповідність n різних точок площини Z.

Точка, яка має властивість, що при обході навколо неї в достатньо малому околі існує перехід від однієї вітки многозначної функції до іншої, називається точкою розгалуження.

Для функції $Z = \sqrt[n]{W}$ - це точки 0 та ∞: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$ - в кожній із цих точок функція має тільки одне значення, тобто різні вітки функції в цих точках збігаються.

Після n-кратного обходу навколо т. W=0 ми повертаємося до первісної вітки функції $\sqrt[n]{W}$. Точки розгалуження, що мають таку властивість, називаються <u>алгебраїчними точками розгалуження</u>.

Для логарифмічної функції $W = LnZ$ точками розгалуження є т. Z=0 та т. $Z=\infty$, причому $Ln0 = \infty$ та $Ln\infty = \infty$. Будь-яка кількість обходів (не змінюючи напрямку) навколо т. Z=0 не приведе до первісної вітки функціїї LnZ. Такі точки називаються <u>логарифмічними точками</u>

розгалуження. При інтегруванні потрібно виділяти вітку многозначної функції.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, де c - верхня половина кола $|z| = 1$, для $\sqrt{z}$ береться вітка, для якої $\sqrt{z} = -1$.

Роз'язування. 1-й спосіб - функція $\sqrt{z}$ має два значення

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \Pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \Pi\right)\right] = -\sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Поскільки значення Z беруть на одиничному колі, то $|z| = 1$

$$\sqrt{z} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\ ;\ \sqrt{z} = -\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Умові $\sqrt{z} = -1$ задовольняє друге значення (Z=1, argZ=0, $\sqrt{1} = -1 - i \times 0 = -1$).

$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2\left(\sqrt{-1} - \sqrt{1}\right) = 2(-i+1) = 2(1-i).$$

2-й спосіб. Нехай $z = \rho e^{i\varphi}$, де $\rho = 1$, а $\varphi \in [0;\Pi]$

$(\arg 1 = 0; \arg(-1) = \Pi)$. З умови $\sqrt{z} = -1 \rightarrow \sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\Pi\right)}$.

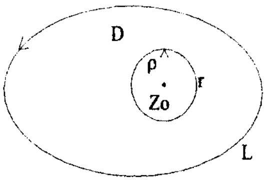
$$\int\limits_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int\limits_0^{\Pi} \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}}d\varphi = \int\limits_0^{\Pi} ie^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\Pi\right)}d\varphi = 2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\Pi\right)}\Big|_0^{\Pi} = 2\left(e^{-i\frac{\Pi}{2}} - e^{-i\Pi}\right) =$$
$$= 2(1-i).$$

§2. Формула Коші

Нехай функція $f(Z)$ аналітична в однозв'язній замкненій області D з кусково-гладкою межею L. Тоді має місце формула Коші:

$$f(Z_0) = \frac{1}{2\Pi i} \int\limits_L \frac{f(Z)dZ}{Z - Z_0}, \tag{3}$$

де Z_0 - будь-яка точка всередині контура L , та інтегрування здійснюється в додатному напрямі. Формула (3) має місце і для багатозв'язної області.



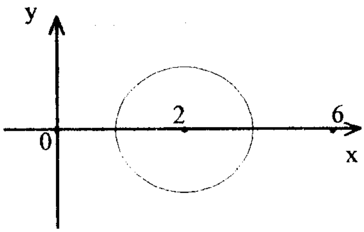
Вираз $\frac{1}{2\Pi i} \int\limits_L \frac{f(Z)dZ}{Z - Z_0}$, де $f(Z)$ - аналітична функція в замкненій області D з додатно орієнтованим контуром L, називається <u>інтегралом Коші</u>.

Якщо точка Z_0 лежить всередині L, то інтеграл Коші дорівнює $f(Z_0)$, якщо точка Z_0 лежить поза контуром L, то $\frac{f(Z)}{Z - Z_0}$ - аналітична функція в D, тоді інтеграл Коші дорівнює 0.

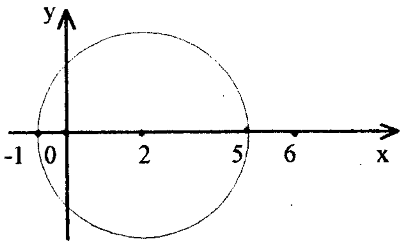
Приклад 2. Використовуючи формулу (3) обчислити

$I = \int\limits_L \frac{e^{Z^2}}{Z^2 - 6Z} dZ$, 1) L: $|Z - 2| = 1$, 2) L: $|Z - 2| = 3$, 3) L: $|Z - 2| = 5$

1) L: $|Z - 2| = 1$ В цьому колі функція аналітична, тому I =0.



2) L: $|Z-2|=3$ - в цьому колі існує т. $Z_0=0$, в якій знаменник дорівнює нулю.



$$I=\int\limits_L \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\int\limits_L \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz.$$

Функція $f(z)=\dfrac{e^{z^2}}{z-6}$ є аналітичною в даній області, тоді за формулою

Коші $\displaystyle\int\limits_L \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=2\Pi i f(Z_0)=2\Pi i\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{Z_0=0}=\frac{2\Pi i}{-6}=-\frac{\Pi i}{3}.$

3) L: $|Z-2|=5$ - в цьому колі існує дві точки Z=0 та Z=6, в яких знаменник дорівнює нулю. Безпосередньо формулу застосувати не можна.

1-й спосіб. Розкладемо підінтегральну функцію $f(Z)$ на найпростіші дроби:

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-6}=\frac{A(z-6)+Bz}{z^2-6z}$$

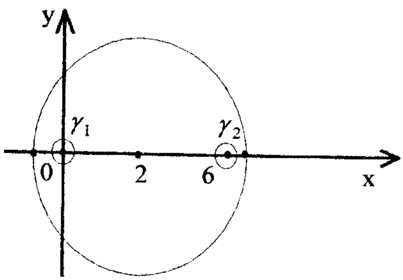
$$1=A(z-6)+Bz$$

$$z=0 \quad A=-\frac{1}{6}\ , z=6 \quad B=\frac{1}{6},$$

тоді $\quad \dfrac{1}{z^2-6z}=\dfrac{1}{6(z-6)}-\dfrac{1}{6z}$

$$\int\limits_{|Z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}dz=\frac{1}{6}\int\limits_{|Z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z-6}-\frac{1}{6}\int\limits_{|Z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z}=\frac{1}{3}\Pi ie^{36}-\frac{1}{3}\Pi i.$$

2-й спосіб. Побудуємо кола γ_1 та γ_2 з центрами в точках Z=0 та Z=6 достатньо малих радіусів, щоб кола не перетинались та первісні лежали в крузі $|Z-2|\le 5$.



В тризв'язній області, обмеженій колами $|Z-2|=5$,γ_1 та γ_2, підінтегральна функція всюди аналітична, тоді

$$\int\limits_{|Z-2|=5}\frac{e^{Z^2}}{z^2-6z}dz=\int\limits_{\gamma_2}\frac{e^{Z^2}dz}{z^2-6z}+$$

$$\int\limits_{\gamma_1}\frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}=2\Pi i\frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0}+2\Pi i\frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6}=\frac{1}{3}\Pi ie^{36}-\frac{1}{3}\Pi i.$$

Якщо функція $f(Z)$, що визначається інтегралом типу Коші, має в кожній точці $Z \in L$ похідні всіх порядків, то для будь-якого натурального n має місце формула:

$$f^{(n)}(Z_0) = \frac{n!}{2\Pi i}\int_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{4}$$

Приклад 3. $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \Pi z}{(z^2 - 1)^2}dz$.

Функція $\frac{\sin \Pi z}{(z^2 - 1)^2}$ аналітична в області $|Z - 1| = 1$ всюди, крім т. $Z_0=1$.

Виділимо функцію $f(Z)$ аналітичну в крузі $|Z - 1| \le 1$:

$$\frac{\sin \Pi z}{(z^2 - 1)^2} = \frac{\dfrac{\sin \Pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}.$$

$f(Z) = \dfrac{\sin \Pi z}{(z+1)^2} \to n = 1$, тоді за формулою (4) маємо:

$$\mathrm{I} = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \Pi z}{(z^2 - 1)^2}dz = 2\Pi i f'(z_0).$$

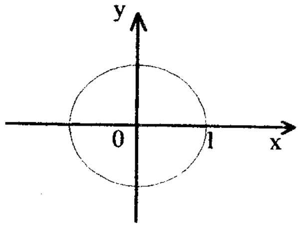
$$f'(z) = \left(\frac{\sin \Pi z}{(z+1)^2}\right)' = \frac{\Pi \cos \Pi z - (z+1) - 2\sin \Pi z}{(z+1)^3}$$

$$f'(1) =' = \frac{2\Pi \cos \Pi}{2^3} = -\frac{\Pi}{4} \to \mathrm{I} = 2\Pi i(-\frac{\Pi}{4}) = -\frac{\Pi^2}{2}i.$$

Приклад 4. Обчислити $\mathrm{I} = \int\limits_L \frac{\cos z}{z(z-2)^2}dz$.

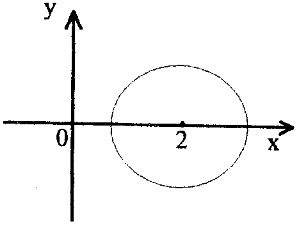
1) L: $|z| = 1$; 2) L: $|z-2| = 1$; 3)L: $|z-2i| = 1$

1) L: $|z| = 1 \to Z_0 = 0$



$$\mathrm{I} = \int\limits_z \frac{\frac{\cos z}{(z-2)^2}}{z}dz = 2\Pi i \left.\frac{\cos z}{(z-2)^2}\right|_{z=0} = \frac{\Pi i}{2}$$

2) L: $|z-2| = 1 \to Z_0 = 2$ $\mathrm{I} = \int\limits_{|z-2|=1} \frac{\frac{\cos z}{z}}{(z-2)^2}dz = 2\Pi i f'(2)$

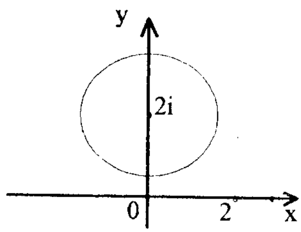


$$f'(z) = \left(\frac{\cos z}{z}\right)' = \frac{-z\sin z - \cos z}{z^2}$$

$$f'(2) = -\frac{2\sin 2 + \cos 2}{4}$$

$$\mathrm{I} = -2\Pi i \frac{2\sin 2 + \cos 2}{4} = -\frac{\Pi i}{2}(2\sin 2 + \cos 2).$$

3) L: $|z-2i| = 1$



- функція аналітична всередині кола,

тому $\mathrm{I} = 0$.

Наслідок із формули (4).

Якщо функція $W = f(z)$ аналітична в області D, тобто має неперервну першу похідну на D, то вона має похідні всіх порядків.

Тема 6. Числові та степеневі ряди в комплексній області

§1. Числові ряди з комплексними членами

Розглянемо ряд з комплексними членами:

Ряд $Z_1+Z_2+\ldots+Z_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} Z_n,$ (5)

називається збіжним, якщо послідовність його частинних сум

$$Sn=\sum_{k=1}^{n} Z_k = Z_1+Z_2+\ldots+Z_n \text{ збігається.}$$

$S=\lim_{n\to\infty} S_n$ називається його сумою. Ряд (5) буде збігатись тоді і тільки тоді, коли збігається ряд

$$x_1+x_2+\ldots+x_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad (6)$$

та ряд $y_1+y_2+\ldots+y_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} y_n$. (7)

Ряд (5) називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$|Z_1|+|Z_2|+\ldots+|Z_n|+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}|Z_n|.$$

Для рядів з комплексними членами справедливі такі ознаки.

1. Якщо $\forall n\geq n_0$ виконана умова $|Z_n|\leq a_n,\ a_n>0$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ збігається абсолютно.

2. Ознака Даламбера.

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = l$, то при $l<1$ ряд (5) абсолютно збіжний, при $l>1$ - розбіжний.

3. Ознака Коші.

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = l$, то при $l<1$ ряд абсолютно збігається, $l>1$ - розбігається.

Приклад 1. Дослідити на збіжність:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n + i\sin n}{n^2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$

а) $z_n = \frac{\cos n + i\sin n}{n^2}$ $\quad |z_n| = \left|\frac{\cos n + i\sin n}{n^2}\right| = \sqrt{\frac{\cos^2 n + \sin^2 n}{n^4}} = \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\frac{1}{n^2}$ - збіжний, тому даний ряд абсолютно збіжний.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{2-i}{3}\right|^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2-i}{3}\right|^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{5}{9}}\right)^{n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^{n} < 1$

абсолютно збіжний.

§2. Степеневі ряди з комплексними членами

Степеневим рядом називається ряд виду:

$c_0 + c_1(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)$, (8) де z - комплексна змінна, C_n та a - комплексні числа, якщо $a=0$, то маємо ряд:

$$C_0 + C_1 Z_1 + C_2 Z^2 + \ldots + C_n Z^n \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Z^n. \qquad (9)$$

Для степеневих рядів справедлива теорема Абеля.

Теорема Абеля:

Якщо степеневий ряд (9) збігається при деякому значенні $Z = Z_0$, то він збігається, причому абсолютно, при всіх значеннях Z, для яких

$$|Z| < |Z_0|.$$

Якщо ряд (9) розбіжний при $Z = Z_1$, то він розбігається і при будь-якому Z, для якого $|Z| > |Z_1|$.

Область збіжності ряду (8) – це круг з центром в точці a. Цей круг називається кругом збіжності, його радіус - радіусом збіжності ($R = \infty$, якщо ряд збігається на всій площині, $R = 0$, якщо він збігається тільки в одній точці a).

У всіх точках круга збіжності степеневий ряд збігається абсолютно і його сума $S(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (Z - a)$ аналітична.

Радіус збіжності можна знайти, використовуючи ознаки Коші та Даламбера або формули: $R = \lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|, C_n \neq 0;$ $\quad R = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}.$

Приклад 2. Знайти круг та радіус збіжності ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \qquad C_n = \frac{z^n}{n!} \qquad C_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|Z^n|(n+1)!}{n!|Z^{n+1}|}=\frac{1}{|Z|}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$ ряд збігається у всіх точках комплексної площини.

Областю збіжності степеневого ряду з від'ємними степенями $(z-a)$

$$\frac{b_1}{z-a}+\frac{b_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{b_n}{(z-a)^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}$$

є зовнішня частина круга з центром в точці a радіуса R.

Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ збігається в крузі $|z-a|<R$, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n(z-a)^{-n}$ збігається поза кругом $|z-a|>r$, то при $0\le r<R<+\infty$ областю збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-a)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ є кільце $r<|z-a|<R$, при $r>R$ - ряд всюди розбіжний.

Приклад 3. Визначити область збіжності ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{(z-2i)^n}.$$

Розглянемо окремо ряди з додатними та від'ємними степенями:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|Z-2i|^{n+1}\cdot 2^n(n+1)}{2^{n+1}(n+2)|Z-2i|^n}=\frac{|Z-2i|}{2}<1\to$$

$\to|Z-2i|<2$ – область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+5}{(z-2i)^n}:$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2+5)|z-2i|^n}{|z-2i|^{n+1}(n^2+5)}=\frac{1}{|z-2i|}<1\to|z-2i|>1$$

Область збіжності кільце $1<|z-2i|<2$.

Тема 7. Ряди Тейлора та Лорана

§1. Ряди Тейлора

Функція $f(Z)$ однозначна та аналітична в т. $Z = Z_o$, розкладається в околі цієї точки в степеневий ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (Z - Z_0)^n \tag{10}$$

коефіцієнти якого $Cn = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_L \dfrac{f(Z)dZ}{(Z-Z_0)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n)}(Z_o)}{n!}$ n=0,1,... (11)

де L - довільний контур, орієнтований проти годинникової стрілки, що належить кругу збіжності ряду (10) та містить в середині т. Z_o. Радіус збіжності ряду (10) дорівнює відстані від т. Z_0 до найближчої особливої точки функції $f(Z)$. Формули розкладу основних елементарних функцій комплексної змінної аналогічні формулам розкладу функцій дійсної змінної. Для багатозначних функцій потрібно до розкладу в ряд додати $2n\pi i$. Наприклад, функція $\ln(1+z)$ в околі точки $Z_0=0$ має такий розклад:

$$\ln(1+Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{Z^n}{n} + \ldots \qquad R=1.$$

Щоб отримати ряд Тейлора для інших значень багатозначної функції $\ln(1+z)$ потрібно до цього ряду додавати числа $2n\pi i$, $n = \pm 1; \pm 2; \ldots$

$$\ln(1+Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{Z^n}{n} + \ldots + 2n\pi i \qquad R=1$$

Приклад 1. Розкласти в ряд Тейлора за степенями z функцію

$f(Z) = \dfrac{Z}{Z^2 - 2Z - 3}$. Знайти радіус збіжності ряду.

1) Розкладемо функцію на найпростіші дроби:

$$f(Z)=\frac{Z}{Z^2-2Z-3}=\frac{A}{Z+1}+\frac{B}{Z-3}=\frac{A(Z-3)+B(Z+1)}{Z^2-2Z-3};$$

$$Z=A(Z-3)+B(Z+1) \qquad Z=3 \qquad 3=4B \qquad B=\frac{3}{4}$$

$$Z=-1 \qquad -1=-4A \qquad A=\frac{1}{4}$$

$$f(Z)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+Z}+\frac{3}{4}\frac{1}{Z-3}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+Z}+\frac{3}{4}\frac{1}{(-3)}\frac{1}{1-\frac{Z}{3}}=\frac{1}{4}\frac{1}{1+Z}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{Z}{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-Z+Z^2-Z^3+\ldots\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{Z}{3}+\frac{Z^2}{9}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}Z+\frac{8}{9}Z^2-\frac{28}{27}Z^3+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{Z}{3}+\frac{2}{3^2}Z^2-\frac{7}{3^3}Z^3+\ldots$$

Найближчою особливою точкою до т. Z_0 є т. $Z=-1$. Тому $R=1$.

Приклад 2. Розкласти за степенями різниці $(Z-3)$ функцію

$$f(Z)=\frac{1}{3-2Z}.$$

$$\frac{1}{3-2Z}=\frac{1}{3-2(Z-3+3)}=\frac{1}{3-2(Z-3)-6}=\frac{1}{-3-2(Z-3)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(Z-3)}=-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}(Z-3)+\frac{2^2}{3^2}(Z-3)^2-\frac{2^3}{3^3}(Z-3)^3+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(Z-3)-\frac{2^2}{3^3}(Z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(Z-3)^3-\ldots$$

Ряд збігається, якщо $\left|\frac{2}{3}(Z-3)\right|<1 \qquad |Z-3|<\frac{3}{2} \qquad R=\frac{3}{2}$.

§2. Ряди Лорана

Теорема. Нехай $0 \le r < R \le \infty$. Будь-яку аналітичну в кільці $r < |Z - Z_o| < R$ функцію $f(z)$ однозначно можна представити в ньому збіжним рядом:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Cn(Z - Z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} Cn(Z - Z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Cn}{(Z - Z_o)^n}, \qquad (12)$$

де $Cn = \dfrac{1}{2\Pi i} \displaystyle\int_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, n=0, $\pm 1, \pm 2, \ldots$ (13).

Цей ряд називається рядом Лорана.

Коли говорять, що ряд $\sum_{-\infty}^{\infty} C_n (Z - Z_0)^n$ збігається, розуміють, що збігаються окремо ряди $\sum_{n=0}^{\infty} Cn(Z - Z_0)^n$ та $\sum_{1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(Z - Z_0)^n}$.

Перший ряд $\sum_{n=0}^{\infty} Cn(Z - Z_0)^n$ в правій частині (12) збігається в крузі $|Z - Z_o| < R$ до деякої аналітичної в цьому крузі функції $f_1(z)$. Він називається правильною частиною ряду Лорана.

Другий ряд $\sum_{1}^{\infty} C_{-n} (Z - Z_0)^{-n}$ збігається при $|Z - Z_o| > r$, та визначає деяку аналітичну функцію $f_2(z)$ - головну частина ряду Лорана.

Тобто: $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$.

На практиці при знаходженні коефіцієнта C_n намагаються не застосовувати формули (11), а використовують готові розклади в ряд Тейлора елементарних функцій.

Приклад 3. Розкласти в ряд Лорана в кільці $0<|Z-1|<2$ функцію

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}.$$

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}.$$

Перші два доданки представлені за степенями $(z-1)$.

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+1+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{z-1}{2}\right)^{-2}$$

Застосуємо формулу: $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots-$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+\ldots\right)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2}=\frac{1}{4}\left(1-2\frac{Z-1}{2}+\frac{-2(-2-1)}{2!}\left(\frac{Z-1}{2}\right)^2+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}\left(\frac{Z-1}{2}\right)^3+\ldots\right)$$

Тоді

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{16}\left(1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-\frac{3}{64}(z-1)^3+\ldots$$

Приклад 4. Розкласти в ряд Лорана за степенями Z функцію

$$f(z) = \frac{1}{2z-5} \quad \text{в околі точки } z = \infty .$$

$f(z) = \dfrac{1}{2z-5} = \dfrac{1}{2z}\dfrac{1}{1-\dfrac{5}{2z}}$ в околі точки $z = \infty$ виконується нерівність

$\left|\dfrac{5}{2z}\right| < 1 \Rightarrow f(z)$ можна представити як нескінченно спадну геометричну прогресію, де знаменник $q = \dfrac{5}{2z}$.

$f(z) = \dfrac{1}{2z}\left(1 + \dfrac{5}{2z} + \dfrac{25}{4z^2} + \dfrac{125}{8z^3} + \ldots\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{n-1}}{2^n z^n}$ ряд збігається, якщо $|z| > \dfrac{5}{2}$.

Приклад 5. Розкласти в ряд Лорана функцію $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ за степенями Z в кільці: $1 < |z| < 3$

$$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3} \qquad A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}.$$

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n} = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$$

Приклад 6. Розкласти в ряд Лорана за степенями (z-2) функцію

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-2)^2};$$

Розв'язування. Нехай $z-2=z_1$, тоді

$$\frac{z^4}{(z-2)^2}=\frac{(z_1+2)^4}{(z_1)^2}=\frac{(z_1)^4+8(z_1)^3+24(z_1)^2+32z_1+16}{(z_1)^2}=$$

$$=\frac{16}{(z_1)^2}+\frac{32}{z_1}+24+8z_1+(z_1)^2=\frac{16}{(z-2)^2}+\frac{32}{z-2}+24+8(z-2)+$$

$$+(z-2)^2$$

$(z_1+2)^4$ – обчислили за формулою бінома Ньютона:

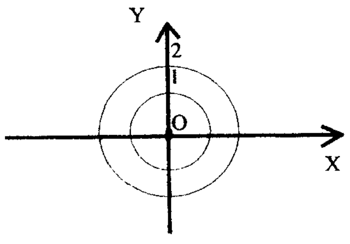
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k\ ,\quad \text{де } C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Оскільки розклад містить кінцеве число членів, то він справедливий для будь-якого z, крім $z=2$.

Приклад 7. Розглянути різні розклади в ряд Лорана функції

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2},z_0=0.$$

Розв'язування. Функція $f(z)$ має 2 особливі точки $z_1=-2$, $z_2=1$. Значить є три кільця з центром в т. $z_0=0.$, в кожному з яких $f(z)$ аналітична.



1) круг $|z|<1$.

2) кільце $1<|z|<2$.

3) кільце $2<|z|<+\infty$.

Знайдемо ряди Лорана в кожному із цих кілець.

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

1) $|z|<1$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}z^n=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots\right)-1-z-z^2-z^3-\ldots=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{15}{16}z^3-\ldots$$

Це ряд Тейлора функції $f(z)$.

2) $1<|z|<2$:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=\ldots+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots$$

або $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.

3) $|z|>2$.

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z^n}\right)^n\right)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+\ldots\right)$$

Приклад показує, що для однієї і тієї ж функції $f(z)$ ряд Лорана може мати різний вигляд для різних кілець.

Тема 8. Особливі точки аналітичної функції.

§1. Нулі функції

Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в точці Z_0.

Означення. *Точка* Z_0 *називається нулем функції* $f(z)$ *порядку (або кратності) "n", якщо виконуються умови* $f(Z_0)=0; f'(Z_0)=0;... f^{(n-1)}(Z_0)=0; f^{(n)}(Z_0)\neq 0;$ *якщо n=1, то точка* Z_0 *називається простим нулем.*

Теорема. Точка Z_0 тоді і тільки тоді є нулем n-го порядку функції $f(Z)$, аналітичної в точці Z_0, коли в деякому околі цієї точки виконується рівність:
$$f(Z)=(Z-Z_0)^n\varphi(Z),$$
де $\varphi(Z)$ аналітична в т. Z_0 та $\varphi(Z_0)\neq 0$.

Приклад 1. Знайти нулі функції $f(z)=1+\cos z$ та визначити їх порядок.

Розв'язування. $1+\cos z=0 \to \cos z=-1$.

$$z_n=\pm\pi+2\pi n, n=0,\pm1;\pm2,..$$

$$f'(z)=-\sin z \to f'(\pm\pi+2\pi n)=0$$
$$f''(z)=-\cos z \to f''(\pm\pi+2\pi n)=\pm1\neq 0$$

Значить точки $Z_n=\pm\pi+2\pi n$ - нулі 2-го порядку.

Приклад 2. Знайти порядок нуля $Z_0=0$ для функції $\dfrac{z^8}{z-\sin z}$.

Розв'язування. Використовуючи розклад функції sin$Z$ в ряд Тейлора в околі точки $Z = 0$ маємо:

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right)} = \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots} =$$

$$= z^5 \times \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \ldots}$$

Нехай $\varphi(z) = \dfrac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots} \to f(z) = z^5 \cdot \varphi(z)$, де функція $\varphi(z)$ аналітична в точці $z_0 = 0$, причому $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Значить точка $z_0 = 0$ - нуль п'ятого порядку.

Приклад 3. Знайти нулі функції $f(z) = 1 - e^Z$ та визначити їх порядок $f(z) = 1 - e^Z \to 1 - e^Z = 0;\ e^Z = 1$

$$Zn = Ln1 = \ln|1| + i \arg 1 + 2n\pi i = 2n\pi i; \quad n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$$

$$f'(2n\pi i) = -e^{2n\pi i} = -(\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi) = -1 \neq 0 \to Zn \text{ -}$$

прості нулі.

§2. Класифікація особливих точок

В темі ряд Лорана ми розглянули теорему про те, що функція $f(z)$ аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R$, розкладається в збіжний до неї ряд

Лорана: $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(Z-Z_0)^n = f_1(Z)+f_2(Z) \qquad r<|Z-Z_0|<R$,

де $f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \qquad |z-z_0|<R$,

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{(z-z_0)^n} \qquad |z-z_0|>r.$$

Нехай $r=0$, тобто $f(z)$ аналітична у відкритому крузі $0<|z-z_0|<R$, із якого вилучена точка z_0. В самій точці z_0 функція найчастіше не визначена. В цьому випадку говорять, що z_0 - це ізольована особлива точка.

Означення. *Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо існує окіл цієї точки, в якому $f(z)$ аналітична всюди, крім самої точки z_0.*

Розглянемо три випадки при $r=0$.

Випадок 1.

Функція $f(z)$ має вигляд $f(z)=f_1(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} Cn(z-z_0)^n$, тобто всі числа $C_{-n}=0,(n=1,2,\ldots)$.

Поскільки даний степеневий ряд збігається для всіх Z з круга $|z-z_0|<R$, то його радіус збіжності дорівнює R і його сума $f_1(z)$ визначена та диференційовна у всіх точках круга $|z-z_0|<R$, в тому числі і в точці z_0.

Тобто $f_1(z)$ аналітична в крузі, тому, якщо прийняти, що $f(z_0)=f_1(z_0)=C_0$, то і функція $f(z)$ буде аналітична в цьому крузі.

В цьому випадку говорять, що особливість у функції $f(z)$ в точці z_0 усувна. Достатньо припустити, що $f(z_0) = C_0$, тоді функція $f(z)$ стане аналітичною в точці z_0. В даному випадку $\int\limits_L f(z)dz = 0$ для будь-якого замкненого контура L, що містить всередині точку z_0 та належить кругу $|z - z_0| < R$.

Означення. *Точка z_0 називається усувною особливою точкою функції $f(z)$, якщо існує кінцева границя $f(z)$ в точці z_0.*

Висновок: Для того, щоб точка z_0 була усувною особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб лоранівський розклад $f(z)$ в околі точки z_0 не містив головної частини.

Приклад 4. $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$. Особлива точка z_0=0.

Маємо: $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{z} = 1 \to z_0 = 0$ - усувна особлива точка.

<u>Випадок 2</u>.

Функція $f(z)$ має вигляд:

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=1}^{m} \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-m}^{\infty} C_n (z - z_0)^n \qquad (C_{-m} \neq 0),$$

тобто $Cn = 0$ для $n = -(m+1), -(m+2), \ldots$

В цьому випадку говорять, що точка z_0 є полюсом функції $f(z)$ порядку (кратності) “m”. При m=1 точку z_0 називають простим полюсом.

Означення. *Точку z_0 називають полюсом функції $f(z)$, якщо* $\lim\limits_{z\to z_o} f(z) = \infty$. *Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$,* *необхідно і достатньо, щоб ця точка була нулем для функції* $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Означення. *Точку* z_0 *називають полюсом порядку* $n(n\geq 1)$ *функції* $f(z)$, *якщо ця точка є нулем порядку* n *для функції* $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. *Якщо* $n=1$ *- полюс простий.*

Приклад 5. $f(z)=\dfrac{1}{z^3}$. Особлива точка $z_0=0$.

Нехай $z=\rho e^{i\varphi}$, тоді $f(z)=\dfrac{e^{-i\varphi\cdot 3}}{\rho^3}$

$|f(z)|=\dfrac{1}{\rho^3}\to\infty$ при $z\to 0$ за будь-яким законом, тобто

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^3}=\infty\to z_0 \text{ - \textit{полюс}}$$

Розглянемо функцію $\varphi(z)=z^3$, точка $z_0=0$ - нуль третього порядку $\to z_0$ - полюс 3-ого порядку для $\dfrac{1}{z^3}$.

Для того, щоб точка z_0 була полюсом порядку "n" функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було представити в вигляді $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, де $\varphi(z)$ аналітична в точці z_0 та $\varphi(z_0)\neq 0$.

Приклад 6.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}=\frac{\sin z}{z^2(z+1)-(z+1)}=\frac{\sin z}{(z+1)(z^2-1)}=$$

$$=\frac{\sin z}{(z+1)^2(z-1)}\to z_1=-1;\quad z_2=1 \quad - \text{ \textit{це особливі точки.}}$$

а) $z=-1$ $\qquad f(z)=\dfrac{\frac{\sin z}{z-1}}{(z+1)^2}\to\varphi(z)=\dfrac{\sin z}{z-1}$ – аналітична в точці

$z=-1$, $\qquad \varphi(-1)=\dfrac{\sin(-1)}{-2}=\dfrac{\sin 1}{2}\neq 0$.

$z=-1$ - двократний полюс.

б) $z=1$ $\quad f(z)=\dfrac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{(z+1)^2}\to\varphi(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$ – аналітична в точці $z=1$,

$\varphi(1)=\dfrac{\sin 1}{4}$; $z=1$ - простий полюс.

Висновок: Для того, щоб точка z_0 була полюсом функції $f(z)$ необхідно і достатньо, щоб головна частина лоранівського розкладу $f(z)$ в околі точки z_0 містила лише кінцеве число членів. Найбільший з показників степенів у різниць $(z-z_0)$, що містяться в знаменниках членів головної частини ряду Лорана, дорівнює порядку полюса.

Приклад 7. Визначити характер особливої точки $z_0=0$ функції

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^7}.$$

$$f(z)=\frac{1}{z^7}\left(1-1+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}-\frac{z^8}{8!}+\frac{z^{10}}{10!}-\ldots\right)=\frac{1}{2!z^5}-\frac{1}{4!z^3}+\frac{1}{6!z}-\frac{z}{8!}+\frac{z^3}{10!}-\ldots$$

Лоранівський розклад в околі точки $z_0=0$ містить три члена з від'ємними степенями. Найбільший показник степеня у знаменнику членів головної частини ряду Лорана дорівнює п'яти. $z_0=0$ – полюс 5-го порядку.

Випадок 3.

Функція $f(z)$ має вигляд:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}=f_1(z)+f_2(z),$$

де в ряду $f_2(z)$ дорівнює нулю нескінчене число коефіцієнтів C_{-n}.

В цьому випадку говорять, що функція $f(z)$ має в точці z_0 істотну особливість.

Означення. *Точка z_0 називається істотно особливою точкою функції $f(z)$, якщо в точці z_0 функція $f(z)$ не має границі ні кінцевої, ні нескінченної.*

Приклад 8. Визначити характер особливої точки $z_0=0$ функції

$$f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Розв'язування. Розглянемо поведінку цієї функції на дійсній та уявній осях. На дійсній $z=x$, $f(z)=f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\to\infty, x\to 0$;

на уявній $z=iy$ та $f(z)=f(iy)=e^{-\frac{1}{y^2}}\to 0$ при $y\to 0$.

Значить, границі в точці $z_0=0$ функції $f(z)$ не існує, точка $z_0=0$ – істотно особлива точка.

Точка z_0 тоді і тільки тоді є істотно особливою точкою для функції $f(z)$, коли головна частина її лоранівського розкладу в околі точки z_0 має нескінченно багато членів.

Приклад 9. Визначити характер особої точки $z_0=1$ функції

$$f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Використаємо розклад $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$, нехай $u = \frac{1}{z-1}$

Отримаємо лоранівський розклад $f(z)$ в околі точки $z_0 = 1$.

$$f(z) = (z-1)\left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \ldots\right) = 1 + (z-1) + \frac{1}{2!(z-1)} +$$

$$+ \frac{1}{3!(z-1)^2} + \ldots$$

Розклад має нескінченну множину членів з від'ємними степенями $(z-1) \to z_0 = 1$ – істотно особлива точка.

Приклад 10. Визначити характер особливої точки $z_0 = 0$ функції

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$$

Використаємо розклад в ряд Тейлора функції $f(u) = e^u$, де $u = -z$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - e^{-z}\right) = \frac{1}{z}\left(1 - 1 + z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \ldots\right) = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \ldots$$

не містить головної частини - точка $z_0 = 0$ - усувна особлива точка.

Зауваження. Для будь-якого орієнтованого проти годинникової стрілки контуру L, що належить кругу $|z - z_0| < R$ та містить всередині точку z_0, так як і у випадку полюса

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i C_{-1}.$$

Тема 9. Лишки

§1. Означення та формули для обчислення лишків

Нехай точка z_0 - ізольована особлива точка функції $f(z)$, тобто функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, з якого вилучена точка z_0.

Означення. *Лишком функції $f(z)$ в точці z_0 називається інтеграл*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz = resf(z_0),$$

де L - контур в крузі $|z - z_0| < R$, орієнтований проти годинникової стрілки, що містить всередині точку z_0.

Інші позначення: $res(f(z), z_0)$, $\underset{z\to z_0}{res} f(z)$

1) Якщо $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$

$(0 < |z - z_0| < R)$ - це ряд Лорана функції $f(z)$ в точці z_0, тобто точка z_0 - істотно особлива, то $resf(z_0) = C_{-1}$

2) Якщо Z_0 – усувна особлива точка, то $resf(z_0) = 0$.

3) Якщо Z_0 – полюс n-го порядку функції $f(z)$, то

$$resf(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(f(z)(z - z_0)^n\right)$$

а) якщо Z_0 - полюс простий (n=1), то $resf(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(f(z)(z - z_0))$

б)якщо z_0 - простий полюс і $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\phi(z)}$, $\varphi(z), \phi(z)$ - аналітичні, то

$$resf(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\phi'(z_0)}.$$

Класифікація особливих точок та обчислення лишків в них

№	Означення Н і Д. умови	Лишки
1.	Z_0 – нуль порядку n $f(z_0)=0;\quad f'(z_0)=0;\ldots$ $f^{(n-1)}(z_0)=0;\quad f^{(n)}(z_0)\neq 0$ $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$	
2.	Z_0 – ізольована особлива точка *f(z)* – аналітична в крузі $0<\lvert z-z_0\rvert<R$ з якого вилучена точка z_0	$res\ f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L f(z)dz$
3.	Z_0 – усувна особлива точка $\lim\limits_{Z\to Z_0} f(z)dz=C,\quad C=const$ В ряді Лорана немає головної частини	$res\ f(z_0)=0$
4.	Z_0 – полюс порядку "n" $\lim\limits_{Z\to Z_0} f(z)dz=\infty$. Головна частина розкладу в ряд Лорана містить кінцеве число членів; найбільший із показників степенів у $(Z - Z_0)$, що знаходяться у знаменниках членів головної частини ряду Лорана – дорівнює порядку полюса. n = 1 – простий полюс $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ n > 1 – полюс порядку n > 1 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$	$res\ f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)$ $res\ f(z_0)=\frac{1}{(n-1)!}\times$ $\times\lim\limits_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[f(z)(z-z_0)^n\right]$
5.	Z_0 – істотно особлива точка $\lim\limits_{Z\to Z_0} f(z)dz$ – не існує. Головна частина розкладу в ряд Лорана в околі точки Z_0 має нескінченне число членів.	$res\ f(z_0)=C_{-1}$

Приклад 1. Знайти лишки функції $f(z)$ в її особливих точках, якщо

$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$$

Розв'язування. Знайдемо особливі точки:

$$z^3-\frac{\pi}{4}z^2=0\to z=0,\quad z=\frac{\pi}{4}.$$

1) z=0

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{\pi}{4}\to z=0$$

- усувна особлива точка, тому $resf(0)=0$

2) $z=\frac{\pi}{4}$, $\varphi(z)=\dfrac{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}{\sin z^2}$

$z=\frac{\pi}{4}$ - нуль для чисельника $\varphi(z)$.

$$\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^3-\left(\frac{\pi}{4}\right)^3=0 \qquad \phi'=\left(z^3-\frac{\pi}{4}z^2\right)'=3z^2-\frac{\pi}{2}z$$

$$\phi'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\left(\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\neq 0$$

$z=\frac{\pi}{4}$ - простий нуль для функції φ(z) → простий полюс для функції $f(z)$. Тоді

$$resf\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}} f(z)\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{\pi^2}{16}}{\frac{\pi^2}{16}}=\frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi^2}{16}$$

Приклад 2. Знайти лишки функції $f(z)$ в її особливих точках:

$$f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}\to z_1=-1, z_2=2$$

1) $z_1=-1$ - полюс 3-го порядку.

$$resf(-1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to-1}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z(z+1)^3}{(z+1)^3(z-2)}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to-1}\frac{(z^2-6z+10)e^z}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}$$

$z_2=2$ - простий полюс. $\quad resf(2)=\lim\limits_{z\to2}\dfrac{e^z}{(z+1)^3}=\dfrac{e^3}{27}.$

Приклад 3. $f(z)=\dfrac{1}{z^3+z}$ - має 3 простих полюси:

$$z(z^2+1)=0\to\quad z=0,\quad z=i,\quad z=-i.$$

Лишки в цих точках знайдемо за формулою:

$$resf(z_0)=\frac{\varphi(z)}{\phi'(z)}=\frac{1}{(z^3+z)'}=\frac{1}{3z^2+1}$$

$$resf(0)=\left.\frac{1}{3z^2+1}\right|_{z=0}=1$$

$$resf(i)=\left.\frac{1}{3i^2+1}\right|_{z=i}=-\frac{1}{2}$$

$$resf(-i)=\left.\frac{1}{3i^2+1}\right|_{z=-i}=-\frac{1}{2}$$

Приклад 4. Знайти лишки функції в особливій точці $z_0 = 0$.

а) $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z^2}$

$$f(z) = z^3\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \ldots\right) = z - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^7} - \ldots -$$

лоранівський розклад містить нескінченне число членів в головній частині $\rightarrow$ $z_0 = 0$ - істотно особлива точка, тому $resf(0) = C_{-1} = 0$.

б) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $\qquad z_0 = 0$.

$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots$ $\;-\;$ $z_0 = 0$ - істотно особлива точка.

$resf(0) = C_{-1} = 1$.

§2. Класифікація особливих точок на нескінченності

Означення. *Функція $f(z)$ називається аналітичною в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$, якщо функція $f\left(\frac{1}{z}\right)$ аналітична в точці $z_0 = 0$.*

Наприклад: $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ аналітична в точці $z = \infty$, тому що функція $f\left(\frac{1}{z}\right) = \sin z$ аналітична в точці $z_0 = 0$.

Околом нескінченно віддаленої точки (∞) називають зовнішню частину круга $|z| > r, (0 \le r < \infty)$. До множини комплексних чисел (точок) ми формально додали ще абстрактну нескінченно віддалену точку $z = \infty$.

Нехай $f(z)$ аналітична в деякому околі нескінченно віддаленої точки (крім самої точки $z=\infty$).

Означення. *Точка* $z=\infty$ *називається ізольованою особливою точкою функції* $f(z)$, *якщо в деякому околі цієї точки немає інших особливих точок функції* $f(z)$, *(тобто* $f(z)$ *- аналітична в околі точки* $z=\infty$, *виключаючи саму точку* $z=\infty$*).*

В залежності від поведінки функції $f(z)$ в околі точки $z=\infty$ вводять таку класифікацію:

1) Особливість в точці $z=\infty$ усувна, якщо

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=C_0, \quad C_0-const.$$

В цьому випадку лоранівський розклад функції $f(z)$ не містить додатних степенів z.

2) Точка $z=\infty$ - полюс порядку n, якщо. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

В цьому випадку лоранівський розклад містить кінцеве число додатних степенів z.

3) Точка $z=\infty$ - має істотну особливість, якщо $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ - не існує.

Лоранівський розклад містить нескінченне число додатних степенів z.

Визначити характер особливої точки $z=\infty$ для таких функцій.

Приклад 5.

$$f(z)=\frac{z^3-z^2+z+6}{z^2}$$

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$ – точка $z=\infty$ – полюс

$$f(z)=\frac{z^2\left(z-1+\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}\right)}{z^2}=z-1+\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}$$ - $z=\infty$ - простий полюс.

Приклад 6. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$

$$\lim_{z\to\pm\infty}\frac{e^z}{z^2}=\lim_{z\to\pm\infty}\frac{e^z}{2z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to\pm\infty}e^z=\begin{cases}\infty\\ 0\end{cases}\to z=\infty$$ -істотно особлива.

Приклад 7. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^4}$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z+1}{z^4}=0-const\quad\to\quad z=\infty$$ - усувна точка.

Означення. *Лишком функції* $f(z)$ *на нескінченності називається інтеграл* $\dfrac{1}{2\Pi i}\int\limits_{L^-}f(z)dz=resf(\infty)$, *де* L^- - *довільний замкнений контур, орієнтований за годинниковою стрілкою, що належить множині* $|z|>r$.

Із цього означення випливає, що лишок функції на нескінченності дорівнює коефіцієнту z^{-1} в лоранівському розкладі $f(z)$ в околі точки $z=\infty$, взятому з протилежним знаком: $resf(\infty)=-C_{-1}$

Приклад 8. $f(z)=\dfrac{z+1}{z}=1+\dfrac{1}{z}$.

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)=1.$$ $z=\infty$ - усувна особлива точка.

$$C_{-1}=1\to resf(\infty)=-1.$$

Зауваження: Якщо $z=\infty$ - усувна особлива точка, то в ряді Лорана відсутні додатні степені z, а z^{-1} може бути, тому $\operatorname{res} f(\infty)$ в цьому випадку не обов'язково дорівнює нулю.

Теорема про лишки.

Якщо функція $f(z)$ аналітична на всій площині z, за винятком кінцевого числа точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$, тоді має місце рівність:

$\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k) + \operatorname{res} f(\infty) = 0$, тобто сума всіх лишків функції $f(z)$, включаючи і лишок на нескінченності, дорівнює 0, або

$$\operatorname{res} f(\infty) = -\sum_{k=1}^{r} \operatorname{res} f(z_k).$$

Тема10. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.

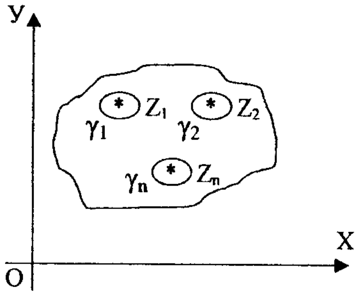
Логарифмічний лишок.

§1. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Теорема Коші про лишки. Якщо фукуція $f(z)$ аналітична на межі L області D та всюди всередині області D, за винятком кінцевого числа особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(z_k).$$

Доведення. Обмежимо кожну ізольовану особливу точку Z_k функції $f(z)$ достатньо малим замкненим контуром $\gamma_k (k = 1,2,\ldots n)$, що повністю лежить в області D і не містить інших особливих точок функції $f(z)$.



Всередині утвореної багатозв'язної області, обмеженої контуром L та контурами $\gamma_k (k = 1,2,\ldots n)$, функція $f(z)$ аналітична.

Тому за теоремою Коші: $\int\limits_{L^+} f(z)dz + \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0$. Звідки

$$\int\limits_{L^+} f(z)dz = -\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k^+} f(z)dz = 2\Pi i \sum_{k=1}^{n} res f(z_k).$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+z}dz$.

Знайдемо особливі точки:

$$z^2 - z = z(z+1) = 0$$
$$z = 0, z = -1$$

За теоремою Коші: $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2+z}dz = 2\pi i \cdot (resf(0) + resf(-1))$.

$z = 0$ - усувна особлива точка, тому що $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1$, тому $res\, f(0) = 0$.

$z = -1$ - полюс першого порядку: $\begin{cases} \varphi(z) = z^2 + z & \varphi'(z) = 2z+1 \\ \varphi(1) = 1-1 = 0 & \varphi'(-1) = -1 \neq 0 \end{cases}$

$$res\ f(-1) = \lim_{z\to -1}\frac{e^z - 1}{z(z+1)}(z+1) = 1 - e^{-1}$$

$$\int\limits_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+z}dz = 2\pi i(1 - e^{-1}).$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}$.

Полюсами підінтегральної функції $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ є корені рівняння:

$z^4 = -1$: z_1, z_2, z_3, z_4, які лежать всередині кола $|z| = 2$.

Розкладемо $f(z)$ в області $|z| > 2$ - в околі точки $z = \infty$.

$$f(z)=\frac{1}{1+z^4}=\frac{1}{z^4}\times\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}}=\frac{1}{z^4}\left(1-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^8}-\frac{1}{z^{12}}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{12}}-\frac{1}{z^{16}}+\ldots\rightarrow resf(\infty)=-C_{-1}=0$$

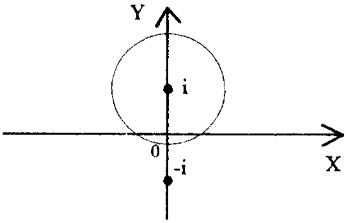
Тоді $\qquad \mathrm{I}=2\pi i\sum_{k=1}^{4}resf(z_k)=-2\pi i resf(\infty)=0.$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_{|z|=2} tgz dz$. В області $|z|=2$ $f(z)$ - аналітична всюди, крім точок $z_1=\frac{\pi}{2}$; $z_2=-\frac{\pi}{2}$ - це прості полюси. Інші особливі точки $z_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ - поза кругом - не враховуємо.

$$resf\left(\frac{\pi}{2}\right)=resf\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\frac{\pi}{2}}=-1 \qquad \mathrm{I}=2\pi i(-1-1)=-4\pi i.$$

Приклад 4. Обчислити

$$\int\limits_{|z-i|=1.5}\frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}dz.$$



$$\frac{1}{z^2}\rightarrow z_1=0 \quad z^2=-1 \quad z=\pm i$$

$$\mathrm{I}=2\pi i\left(resf(0)+resf(i)\right)$$

$$z=i \qquad resf(i)=\lim_{z\to i}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}(z-i)}{(z+i)(z-i)}=\frac{e^{-1}}{2i}$$

$$z=0 \qquad \lim_{z\to 0}\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}=\frac{1}{z^2+1}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4 2!}+\frac{1}{z^6 3!}+\ldots\right)$$

z=0 - істотно особлива точка

$$resf(0) = -C_{-1} = 0$$

$$\mathrm{I} = 2\pi i\left(\frac{1}{2ei} + 0\right) = \frac{\pi}{e}$$

§2. Логарифмічний лишок. Теорема Руше

Нехай однозначна функція $f(z)$ аналітична на області D, за винятком скінченного числа p ізольованих особливих точок $z_k(k=1,2,...,p)$, причому всі особливі точки z_k - полюси. Крім того, функція $f(z)$ в області D має кінцеве число n нулів; $z_k(k=1,2,...,p)$, а на межі області не має ні нулів, ні особливих точок функції $f(z)$.

Повним числом N нулів (повним числом P полюсів) функції $f(z)$, розташованих в області D, називається кількість всіх її нулів (полюсів) в цій області за умови, що кожен нуль (полюс) рахується стільки разів, який його порядок.

Функція $\varphi(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)} = (\ln f(z))'_z$ називається логарифмічною похідною функції $f(z)$, а лишки функції $\varphi(z)$ в її особливих точках $z_m(m=1,2,...M)$ - логарифмічними лишками функції $f(z)$.

Особливими точками функції $\varphi(z)$ є нулі і полюси функції $f(z)$. Якщо точка $\tilde{z}_k$ - нуль порядку n_k функції $f(z)$, то в околі цієї точки

$$f(z) = (z - \tilde{z}_k)^{n_k} f_1(z) \text{ , де } f_1(z) \neq 0 .$$

Тому $$\varphi(z) = \frac{f(z)'}{f(z)} = (\ln f(z))'_z = (n_k \ln(z - \tilde{z}_k) + \ln f_1(z))'_z =$$

$= \dfrac{n_k}{z-\widetilde{z}_k} + \dfrac{f_1'(z)}{f_1(z)}$ і точка $\widetilde{z}_k$ буде полюсом першого порядку для функції $\varphi(z)$.

Тоді $\operatorname{Res}\varphi(\widetilde{z}_k) = \operatorname{Res}\left(\dfrac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right) = n_k$, тобто логарифмічний лишок функції $f(z)$ відносно її нуля дорівнює порядку цього нуля.

Якщо z_k – полюс порядку P_K функції $f(z)$, то для функції $F(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ точка z_k буде нулем того ж порядку P_K і поскільки

$\ln f(z) = -\ln F(z)$, то

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (\ln f(z))_z' = (-\ln F(z))_z' = -(\ln F(z))_z' = -\frac{F'(z)}{F(z)}$$

Це означає, що $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right) = -\operatorname{Res}\left(\dfrac{F'(z_k)}{F(z_k)}\right) = -p_k$,

тобто логарифмічний лишок функції $f(z)$ відносно її полюса дорівнює порядку цього полюса, взятого зі знаком мінус.

Повне число нулів N і повне число полюсів P функції $f(z)$ визначаються за формулами:

$$N = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(\widetilde{z}_k)}{f(\widetilde{z}_k)}\right); \quad P = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right).$$

У відповідності з основною теоремою про лишки маємо:

$$\frac{1}{2\Pi i} \int_{L^+} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(\widetilde{z}_k)}{f(z)}\right) + \sum_{n=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z_k)}{f(z_k)}\right)$$

тобто $$\frac{1}{2\Pi i}\int\limits_{L^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P.$$

Вираз $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^+}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$ називають логарифмічним лишком функції $f(z)$ відносно контуру L.

Теорема Руше. Якщо на межі L області D має місце нерівність $|f(z)|_L > |\varphi(z)|_L$, причому функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ аналітичні в замкненій області $\overline{D}$, то в області D повне число нулів функції $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ дорівнює повному числу нулів функції $f(z)$.

Приклад 5. Знайти повне число нулів функції $w = z^2 - 1$ всередині круга $|z| \le 2$.

Розв'зування. Нехай $z^2 = f(z)$, - $1 = \varphi(z)$, то на межі L кола $|z| = 2$ маємо:

$$|f(z)|_L = 4, \quad |\varphi(z)|_L = 1, \quad |f(z)_L| > |\varphi(z)|_L$$

За теоремою Руше всередині круга $|z| \le 2$ функція $W = F(z) = f(z) = \varphi(z) = z^2 - 1$ має стільки ж нулів, скільки їх має функція $f(z) = z^2$, але ця функція має один нуль кратності 2, тобто її повне число нулів дорівнює 2. Тобто функція $W = z^2 - 1$ всередині круга $|z| \le 2$ має два нулі.

Завдання для самостійної роботи

Самостійна робота №1

Тема: Поняття функції комплексної змінної, конформне

відображення, диференціювання.

Варіант № 1

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(x^2 - y^2) + \frac{1}{3}$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2$$

$$Z_0 = \sqrt{2}(1+i)$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = \frac{y}{3}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 2

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2 + y^2) + 7$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = -Z^3$$

$$Z_0 = i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 2x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

....

Варіант № 3

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = e^{3x} \cdot \sin 3y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = 1 - i$$

3. Знайти відображення лінії $y = x + 1$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 4

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) + 2$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2 + i$$

$$Z_0 = 1 - i$$

3. Знайти відображення лінії $x = y$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 5

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = e^{2x} \cdot \sin 2y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2 + 2Z$$

$$Z_0 = i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = \frac{y}{2}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 6

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = x + y - 3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = e^{Z-1}$$

$$Z_0 = 1$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 2x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 7

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2) - 4$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = 1 + i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 - 2y = 0$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 8

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = 3x^2y - y^3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2 - iZ$$

$$Z_0 = 1$$

3. Знайти відображення лінії $y = -\frac{x}{2}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

....

Варіант № 9

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = 2xy - x - 5y + 2$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{Z}{Z}$$

$$Z_0 = 6 - 4i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = \frac{y}{6}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 10

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = 3x^2y - y^3 + 4$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{Z}$$

$$Z_0 = 2 - i$$

3. Знайти відображення лінії $y = -\frac{x}{22}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 11

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = e^{4x} \cdot \cos 4y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = (Z - i)^2$$

$$Z_0 = \frac{1+i}{2}$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 4x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

Варіант № 12

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = e^{2x} \cdot \cos 2y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{1}{Z}$$

$$Z_0 = 3 - 2i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 4x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 13

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = 3x^2y - y^3 + 24$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = 1$$

3. Знайти відображення лінії $y = -\frac{1}{3}x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 14

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = 3x^2y - y^3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2$$

$$Z_0 = i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = \frac{y}{2}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

....

Варіант № 15

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\cdot(x^2 - y^2) + \frac{1}{3}$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = \sqrt{2}\cdot(1+i)$$

3. Знайти відображення лінії $y = \frac{x}{9}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 16

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = e^{3x}\cdot\cos 3y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \ln(Z + 1)$$

$$Z_0 = 1$$

3. Знайти відображення лінії $y = \frac{x}{3}$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 17

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\cdot(x^2 - y^2) + 2xy + 6$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = i - 1$$

3. Знайти відображення лінії $y = 2x - 1$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

Варіант № 18

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = 1 + i$$

3. Знайти відображення лінії $y = x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 19

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + 2x + 3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \sin Z$$

$$Z_0 = 0$$

3. Знайти відображення лінії $y = 3x + 1$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 20

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = x + y - 3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{Z}$$

$$Z_0 = 1 - \frac{i}{2}$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 4y$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

Варіант № 21

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{Z}{Z}$$

$$Z_0 = 3 - 2i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 8x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 19

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + 2x + 3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \sin Z \qquad Z_0 = 0$$

3. Знайти відображення лінії $y = 3x + 1$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 20

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = x + y - 3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{\mathrm{Im}(Z)}{Z}$$

$$Z_0 = 1 - \frac{i}{2}$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 4y$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

Варіант № 21

4. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = \frac{Z}{Z}$$

$$Z_0 = 3 - 2i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 8x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 22

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = y - 5x - y^2 + x^2 - 7$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = ie^{2z}$$

$$Z_0 = 2\pi i$$

3. Знайти відображення лінії $y = 3x + 3$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 23

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^3$$

$$Z_0 = 2 - 2i$$

3. Знайти відображення лінії $y = 4x + 4$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

Варіант № 24

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = 2e^{x} \cdot \cos y + 3$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2$$

$$Z_0 = i$$

3. Знайти відображення лінії $y = 7x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 25

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = 2e^{x} \cdot \cos y + 1$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = (Z - i)^2$$

$$Z_0 = 1 + i$$

3. Знайти відображення лінії $x^2 + y^2 = 9x$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

....

Варіант № 26

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$U(x,y) = e^{6x} \cdot \sin 6y$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = Z^2 + i$$

$$Z_0 = 1 + i$$

3. Знайти відображення лінії $y = 3x - 2$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$.

Варіант № 27

1. Відновити аналітичну функцію, якщо :

$$V(x,y) = arctg\frac{y}{x}$$

2. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

$$W = ie^{3z}$$

$$Z_0 = 3\pi i$$

3. Знайти відображення лінії $y = 2x - 1$ при відображенні $W = \frac{1}{Z}$

Самостійна робота №2

Тема: Інтегрування функції комплексної змінної

Варіант № 1

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=1} z \cdot \bar{z} dz$

2) $\int\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$

3) $\int\limits_{L} \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z-1| = \frac{1}{3}$

Варіант № 2

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3} dz$

2) $\int\limits_{|z|=3} |z| dz$; $0 \le \arg z \le \pi$

3) $\int\limits_{L} \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z+2i| = \frac{1}{3}$

Варіант № 3

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=1} z \operatorname{Re} z dz$

2) $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{che^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$

3) $\int\limits_{L} \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z-2i| = \frac{1}{4}$

Варіант № 4

Обчислити:

1) $$\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}dz$$

2) $$\int\limits_{|z|=2} |z|dz$$

3) $$\int\limits_L \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2}dz \ ; \ L - |z+2| = \frac{1}{2}$$

Варіант № 5

Обчислити:

1) $$\int\limits_1^i \frac{1+tgz}{\cos^2 z}dz$$

2) $$\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3}dz$$

3) $$\int\limits_L \frac{e^{-z}}{z+\pi i}dz \ ; \ L - |z| = 6$$

Варіант № 6

Обчислити:

1) $$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}dz$$

2) $$\int\limits_{|z|=2} (2-3z+z^2)dz \ ; \ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$$

3) $$\int\limits_L \frac{e^{-z}}{z+\pi i}dz \ ; \ L - |z+2i| = \frac{1}{2}$$

Варіант № 7

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=1} z \cdot \bar{z} dz$

2) $\int\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$

3) $\int\limits_{L} \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z-1| = \frac{1}{3}$

Варіант № 8

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2 - 4z + 3} dz$

2) $\int\limits_{|z|=3} |z| dz$; $0 \le \arg z \le \pi$

3) $\int\limits_{L} \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z+2i| = \frac{1}{3}$

Варіант № 9

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=1} z \operatorname{Re} z dz$

2) $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{che^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$

3) $\int\limits_{L} \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z-2i| = \frac{1}{4}$

Варіант № 10

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)} dz$

2) $\int\limits_{|z|=2} |z| dz$

3) $\int\limits_L \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z+2| = \frac{1}{2}$

Варіант № 11

Обчислити:

1) $\int\limits_1^i \frac{1+tgz}{\cos^2 z} dz$

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

3) $\int\limits_L \frac{e^{-z}}{z+\pi i} dz$; $L - |z| = 6$

Варіант № 12

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z} dz$

2) $\int\limits_{|z|=2} (2-3z+z^2) dz$; $-\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$

3) $\int\limits_L \frac{e^{-z}}{z+\pi i} dz$; $L - |z+2i| = \frac{1}{2}$

Варіант № 13

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=2} z \cdot \bar{z} dz$

2) $\int\limits_{|z+6|=3} \frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$

3) $\int\limits_L \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z-1| = \frac{1}{3}$

Варіант № 14

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=2} z \operatorname{Re} z dz$

2) $\int\limits_{|z|=3} \frac{che^{i\pi z}}{z^3 - 4z^2} dz$

3) $\int\limits_L \frac{sh\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2} dz$; $L - |z+4i| = \frac{1}{4}$

Варіант № 15

Обчислити:

1) $\int\limits_0^i \frac{1+tgz}{\cos^2 z} dz$

2) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

3) $\int\limits_L \frac{e^{-z}}{z+\pi i} dz$; $L - |z| = 6$

Варіант № 16

Обчислити:

1) $\int\limits_0^i (z-i)\cdot e^{-z}dz$

2) $\int\limits_{|z-1|=1} \dfrac{\sin\frac{z}{4}}{(z-1)^2\cdot(z-3)}dz$

3) $\int\limits_L \dfrac{z^3+1}{z^2+4}dz$; $L - |z| = 1$

Варіант № 17

Обчислити:

1) $\int\limits_{|z|=5} \dfrac{1}{z^2+16}dz$

2) $\int\limits_L e^{-\bar{z}}dz$; L: пряма від т. $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 - i$

3) $\int\limits_L \dfrac{z^3+1}{z^2+4}dz$; $L - |z-2i| = 1$

Варіант № 18

Обчислити:

1) $\int\limits_1^{-i} ze^z dz$

2) $\int\limits_{|z|=2} \dfrac{z\cdot shz}{(z^2-1)^2}dz$

3) $\int\limits_L \dfrac{chz}{(z+\pi\frac{i}{2})\cdot(z-\pi\cdot i)^2}dz$; $L - \left|z+\pi\cdot\frac{i}{2}\right| = 1$

Варіант № 19

Обчислити:

1) $$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin(\pi \cdot \frac{z}{2})}{z^2 + 2z - 3} dz$$

2) $\int\limits_L |z| dz$; L: пряма від т. $z_1 = 0$ до $z_2 = 2+i$

3) $$\int\limits_L \frac{chz}{(z + \pi \cdot \frac{i}{2})^2 \cdot (z - \pi \cdot i)^2} dz$$; $L - |z| = 1$

Варіант № 20

Обчислити:

1) $$\int\limits_0^{1+i} \sin z \cdot \cos z dz$$

2) $$\int\limits_{|z|=1} \frac{shz^2}{z^3} dz$$

3) $$\int\limits_L \frac{\cos 2z}{z^2 + 3z + 2} dz$$; $L - |z+1| = \frac{1}{2}$

Варіант № 21

Обчислити:

1) $$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

2) $\int\limits_L e^{-\bar{z}} dz$; L: ламана з вершинами в т.$z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2-i$

3) $$\int\limits_L \frac{\cos 2z}{z^2 + 3z + 2} dz$$; $L - |z+2| = \frac{1}{2}$

Варіант № 22

Обчислити:

1) $\int_0^i (z-i)\cdot e^{-z}\,dz$

2) $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{z}{4}}{(z-1)^2\cdot(z-3)}\,dz$

3) $\int_L \frac{z^3+1}{z^2+4}\,dz$; $L - |z| = 1$

Варіант № 23

Обчислити:

1) $\int_{|z|=5} \frac{1}{z^2+16}\,dz$

2) $\int_L e^{-\bar{z}}\,dz$; L: пряма від т. $z_1 = 0$ до $z_2 = 2 - i$

3) $\int_L \frac{z^3+1}{z^2+4}\,dz$; $L - |z-2i| = 1$

Варіант № 24

Обчислити:

1) $\int_1^{-i} ze^z\,dz$

2) $\int_{|z|=2} \frac{z\cdot shz}{(z^2-1)^2}\,dz$

3) $\int_L \frac{chz}{(z+\pi\frac{i}{2})\cdot(z-\pi\cdot i)^2}\,dz$; $L - \left|z+\pi\cdot\frac{i}{2}\right| = 1$

Варіант № 25

Обчислити:

1) $$\int\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin(\pi \cdot \frac{z}{2})}{z^2+2z-3}dz$$

2) $$\int\limits_L |z|dz$$; L: пряма від т. $z_1 = 0$ до $z_2 = 2+i$

3) $$\int\limits_L \frac{chz}{(z+\pi \cdot \frac{i}{2})^2 \cdot (z-\pi \cdot i)^2}dz$$; $L - |z| = 1$

Варіант № 26

Обчислити:

1) $$\int\limits_0^{1+i} \sin z \cdot \cos z dz$$

2) $$\int\limits_{|z|=1} \frac{shz^2}{z^3}dz$$

3) $$\int\limits_L \frac{\cos 2z}{z^2+3z+2}dz$$; $L - |z+1| = \frac{1}{2}$

Варіант № 27

Обчислити:

1) $$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz$$

2) $$\int\limits_L e^{-\bar{z}}dz$$; L: ламана з вершинами в т.$z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2-i$

3) $$\int\limits_L \frac{\cos 2z}{z^2+3z+2}dz$$; $L - |z+2| = \frac{1}{2}$

Самостійна робота №3

Тема: Ряди, особливі точки, лишки, логаріфмічний лишок, інтегральна формула Коші

Варіант № 1

1. Розкласти функцію $z^4 - 3z^2 + 5z$ за степенями $z-2$.
2. Визначити характер особливої точки $\frac{1}{(e^{-z}-1)} + \frac{1}{z^2}, z = 0$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{\sin z + \frac{1}{2}}$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(x) = \cos z, |z| = 4$.

Варіант № 2

1. Розкласти $(z+i)\sin\left(\frac{1}{z+i}\right)$ в ряд Лорана в околі точки $z = i$.
2. Визначити характер особливих точок $\frac{1-\cos z}{z^2}, \quad z = 0$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{\cos 2z}{(z-\pi)\left(z-\frac{\pi}{6}\right)}, \quad z = \pi$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^4}{z^4+2z^2+1} dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z) = tgz, |z| = 3$.

Варіант № 3

1. Розкласти функцію $\frac{z}{(z+3)(z+2)^2}$ в ряд Лорана в околі точки $z = -2$.

2. Визначити характер особливої точки $zsh\left(\frac{1}{z}\right)$, $z = 0$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{z}{\sin^2 z}$, $z = 0$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z|=2} e^{\frac{1}{z+1}} dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z) = \cos 2z, |z| = 4$.

Варіант № 4

1. Розкласти функцію $\frac{1}{z(z-2)}$ в ряд в кільці $0 < |z-2| < 2$.

2. Визначити характер особливої точки $\frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}$, $z = 1$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{\cos z + \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{1}{z(z^2+4)^2} dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z) = \frac{tgz}{z^3}$, $|z| = \frac{\pi}{4}$.

Варіант № 5

1. Розкласти функцію $\frac{1}{z+1}$ в ряд в околі точки $z = -1$.

2. Визначити характер особливої точки $\frac{shz}{zshz}$, $z = 0$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{(z+1)^3(z-3)}$, $z=3$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=ctgz, |z|=2$.

Варіант № 6

1. Розкласти функцію $\cos(z-i)$ за степенями $z-i$.

2. Визначити характер особливої точки $e^{\frac{-1}{(z\cdot z)}}$.

3. Знайти лишок в особливих точках $\frac{z}{\sin z}$, $z=k\pi$.

4. Обчислити $\int\limits_C \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$, $C: x^2-y^2-2x=0$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{z^2}{1+z^3}, |z|=3$.

Варіант № 7

1. Розкласти функцію $\frac{1}{z(z-3)}$ в ряд в околі точки $z=0$.

2. Визначити характер особливої точки $\frac{\sin z}{e^{-z}+z-1}$, $z=0$.

3. Знайти лишок в особливій точці $f(z)=z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $z=0$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^z-1}{z^3-iz^2}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=chz, |z|=1$.

Варіант № 8

1. Розкласти функцію $e^{\frac{1}{(z\cdot z)}}$ в ряд Лорана в околі точки $z=0$.
2. Визначити характер особливої точки $\frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$, $z=1$
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{2z-5}{z^2-2z+1}$, $z=1$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}}(z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=e^z-2$, $|z|=8$.

Варіант № 9

1. Розкласти за степенями z $f(z)=\frac{1}{z-3}$ в крузі $|z|<3$.
2. Визначити характер особливої точки $\frac{z-\pi}{\sin^2 z}, z=\pi$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{z^2(z^2+4)}$, $z=0$.
4. Обчислити $\int\limits_C \frac{z}{(z-1)(z+2)}dz, C: x^2+y^2=9$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{\sin z}{z}, |z|=1$.

Варіант № 10

1. Розкласти функцію $\frac{z}{(z+3)(z+2)^2}$ в ряд в околі точки $z=-2$.
2. Визначити характер особливої точки $zsh\left(\frac{1}{z}\right)$, $z=0$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{z}{\sin^2 z}$, $z=0$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z|=2} e^{\frac{1}{z+1}}dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\cos 2z$, $|z|=4$.

Варіант № 11

1. Розкласти за степенями z, $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$ в крузі $|z|<3$.
2. Визначити характер особливої точки $\dfrac{1-\sin z}{\cos z}, z=\dfrac{\pi}{2}$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\dfrac{1}{z^2\left(z^2+4\right)}$, $z=2i$.
4. Обчислити $\int\limits_C \dfrac{1}{\left(z^4+1\right)}dz$, $C: x^2+y^2=2x$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\cos^3 z$, $|z|=1$.

Варіант № 12

1. Розкласти функцію $\dfrac{1}{(z-3)(z+2)}$ в ряд в околі точки $z=0$.
2. Визначити характер особливої точки $\cos\left(\dfrac{1}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{2-z\pi}{2z}\right)$, $z=0$.
3. Знайти лишок в особливих точках $\dfrac{z^2}{\sin z}$, $z=k\pi$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \dfrac{ch2z}{z^2(z+2)(z-1)}dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=tgz$, $|z|=2\pi$.

Варіант № 13

1. Розкласти в ряд $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$ в крузі $|z+1|<1$.
2. Визначити характер особливої точки $\dfrac{\ln\left(1+z^3\right)}{z^2}$, $z=0$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\dfrac{\sin 2z}{(z-\pi)^2\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)}$, $z=\dfrac{\pi}{3}$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z|=2} \frac{z}{z^2-1}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{z^3}{\left(z^2-1\right)^2}$, $|z|=3$.

Варіант № 14

1. Розкласти функцію $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ в ряд в крузі $|z-3|<3$.

2. Визначити характер особливої точки $\frac{\left(z^2-1\right)}{z^6+2z^5+z^4}$, $z=-1$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{(z+1)(z-2)^2}$, $z=-1$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z}{z(z+1)}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{shz}{z^3}$, $|z|=1$.

Варіант № 15

1. Розкласти в ряд за степенями $z+2$, функцію $f(z)=e^{2z-1}$.

2. Визначити характер особливій точці $\sin\frac{\pi}{z+1}$.

3. Знайти лишок в особливій точці $z^3 e^{\frac{1}{z}}$, $z=0$.

4. Обчислити $\int\limits_C \frac{\sin z\pi}{\left(z^2-1\right)}dz$, $C: \frac{x^2}{4+y^2}=1$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{z}{1+z^2}$, $|z|=1,5$.

Варіант № 16

1. Розкласти функцію $\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$ в ряд Лорана в околі точки $z=1$.
2. Визначити характер особливої точки $\frac{z}{z^5+2z^4+z^3}$, $z=0$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{2z-5}{z^2+2z+1}$, $z=-1$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z|=1} z^2 \sin dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\sin z$, $|z|=3$.

Варіант № 17

1. Розкласти функцію $f(z)=\frac{1}{z(z-3)}$ в ряд в крузі $|z|<1$.
2. Визначити характер особливої точки $\frac{(z^2-1)}{z^6+2z^5+z^4}$, $z=0$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{(z+3)(z-1)^2}$, $z=0$.
4. Обчислити $\int\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.
5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{chz}{z^2}$, $|z|=1$.

Варіант № 18

1. Розкласти функцію $\frac{1}{z+4}$ в ряд в крузі $|z|<1$.
2. Визначити характер особливої точки $\cos\left(\frac{1}{z+\pi}\right)$, $z=-\pi$.
3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{(z-1)^2(z+3)}$, $z=1$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z+2|=1} \frac{tgz}{z+2}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\frac{z^4}{\sin z}$, $|z|=1$.

Варіант № 19

1. Розкласти за степенями z, $f(z)=\frac{1}{(z-3)^2}$ в крузі $|z|<3$.

2. Визначити характер особливої точки $\frac{1-\sin z}{\cos z}$, $z=\frac{\pi}{2}$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{1}{z^2(z^2+4)}$, $z=2i$.

4. Обчислити $\int\limits_C \frac{1}{(z^4+1)}dz, C: x^2+y^2=2x$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\cos^3 z$, $|z|=1$.

Варіант № 20

1. Розкласти функцію $\cos\left(\frac{1}{(z-i)^2}\right)$ в ряд Лорана в околі точки $z=i$.

2. Визначити характер особливої точки $e^{\frac{1}{z+2}}$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\frac{\cos 2z}{(z-\pi)\left(z-\frac{\pi}{6}\right)}$, $z=\pi$.

4. Обчислити $\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^2}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=(e^z-2)^2$, $|z|=8$.

Варіант № 21

1. Розкласти функцію $\dfrac{1}{z(z-2)}$ в ряд в крузі $|z|<2$.

2. Визначити характер особливої точки $\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z=0$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\dfrac{1}{\cos z+\dfrac{1}{2}}$.

4. Обчислити $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{z}{\sin z}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(x)=\dfrac{\sin z}{z^3}$, $|z|=2$

Варіант № 22

1. Розкласти функцію $\dfrac{1}{z(z-3)}$ в ряд в кільці $0<|z-3|<3$.

2. Визначити характер особливої точки $\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z=\pi$.

3. Знайти лишок в особливій точці $f(z)=z^3\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$, $z=0$.

4. Обчислити $\displaystyle\int_{|z+2i|=3}\frac{z^2}{z^2+4}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2+1}$, $|z|=2$.

Варіант № 23

1. Розкласти функцію в ряд $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$ в крузі $|z|<1$.

2. Визначити характер особливої точки $\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z=0$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\dfrac{\sin 2z}{(z-\pi)^2\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)}, \quad z=\pi$.

4. Обчислити $\displaystyle\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ch2z}{z^2(z-1)}dz$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\dfrac{z^2}{z-1}, \quad |z|=2$.

Варіант № 24

1. Розкласти функцію $\cos 3z$ в ряд за степенями z.

2. Визначити характер особливої точки $ch\left(\dfrac{1}{z}\right), \quad z=0$.

3. Знайти лишок в особливій точці $\dfrac{z}{\sin z}, \quad z=0$.

4. Обчислити $\displaystyle\int\limits_C \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz, \quad C: x^2+y^2=16$.

5. Знайти логарифмічний лишок $f(z)=\sin z, \quad |z|=2$.

Література

1. Давидов М. О. Елементи теорії функцій комплексної змінної. – К.: Радянська школа, 1968 р.
2. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976 г.
3. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1974 г.
4. Чинаев П. И., Минин Н. А., Перевозников А. Ю., Черенков А. А. Высшая математика. Специальные главы. – К.: Вища школа, 1981 г.
5. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1981 г.

Міністерство освіти України

Вінницький державний технічний університет

Навчальне видання

Галина Григорівна Кашканова

Віра Андріївна Петрук

Теорія функцій комплексної змінної

Навчальний посібник

Редактор В. О. Дружиніна

Тираж 30 прим. Зам № КІВЦ ВДТУ. Зам. № 99-010

ВДТУ. 286021, м. Вінниця, Хмельницьке шоссе 95.