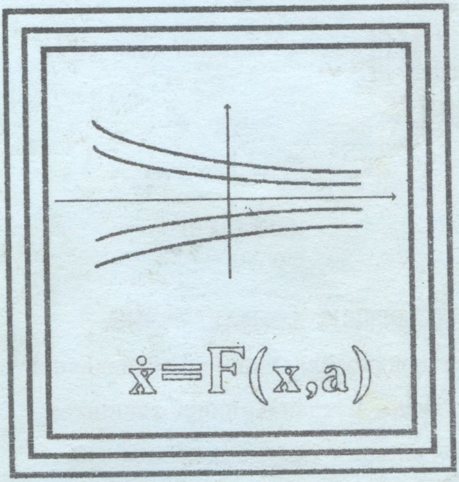
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ І МЕТОДІВ НАВЧАННЯ
ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.І. Клочко



Практикум з диференціальних рівнянь

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ЗМІСТУ І МЕТОДІВ НАВЧАННЯ

Вінницький державний технічний університет

ISBN 5 - 7763 - 8646 - 2

В.І.Клочко

ПРАКТИКУМ

З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів України

Рекомендовано Міністерством освіти України

Вінниця ВДТУ 1997

УДК 517.91

Клочко В.І. "Практикум з диференціальних рівнянь": Навчальний посібник. /В.: ВДТУ, 1997. - 182 с. Укр. мовою/.

Розглянуті основні поняття диференціальних рівнянь і систем. Викладена методика проведення практичних занять до теми з використанням комп'ютерів. Наводяться завдання для самостійної роботи та для контролю знань а також завдання, характерні для комп'ютеризованої технології навчання, з використанням програмного забезпечення, розробленого у ВДТУ.

Розраховано на студентів всіх спеціальностей ступеневої підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою, а також буде корисним викладачам.

Іл. 26. Табл. 2. Бібліогр.: 11 назв

Рецензенти: М.І.Сметанський, доктор педагогічних наук, професор
М.М.Шкодін, доктор педагогічних наук, професор
В.Л.Карпенко, професор

ISBN 5 - 7763 - 8646 - 2

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння займають значне місце у курсі вищої математики технічного вузу. Це обумовлено тим, що математичні моделі на основі диференціальних рівнянь мають широке застосування. Тому перед студентом ставиться завдання глибокого опанування матеріалом цього розділу. Метою навчального посібника є допомога студентам у самостійній роботі над навчальним матеріалом, викладачам – в управлінні процесом здобуття умінь та навичок у складанні диференціальних рівнянь, які моделюють явища, та розв'язуванні рівнянь.

Посібник складається з шести розділів та додатку. Структура кожного розділу така. Спочатку подається теоретичний матеріал та вправи, які пояснюють окремі положення теорії. Далі наводяться алгоритми розв'язування типових задач та приклади реалізації цих алгоритмів. Початок та кінець розв'язування прикладів і задач відмічено знаком #. Завдання для самостійної роботи супроводжуються вказівками та відповідями. Рекомендуємо також опрацювати завдання для самоконтролю і поглиблення знань. Ці завдання містять теоретичні питання та вправи, що потребують для свого розв'язування значно більших зусиль.

У додатку наведені типові завдання, які використовувались при розробці автоматизованих навчальних курсів з диференціальних рівнянь. Досвід показав ефективність навчальних програм при вивченні теоретичного матеріалу, при опануванні поняттями та методами розв'язування рівнянь. Методичною основою побудови посібника стали результати досліджень по визначенню та науковому обгрунтуванню методів і засобів навчання студентів в умовах перебудови структури і змісту вищої освіти.

Посібник не може змінити підручника, він лише доповнює його. Тому студент обов'язково повинен працювати з підручником та іншими методичними матеріалами.

Матеріал посібника може бути використаний для самостійної роботи, побудови типових завдань, розробки навчальних програм.

ВСТУП

Різні задачі науки, техніки, виробництва зводяться до пошуку невідомої функції за даними співвідношеннями між цією функцією і її похідними. Такі співвідношення називаються диференціальними рівняннями.

Якщо невідома функція є функцією однієї змінної, то диференціальне рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням. Якщо ж вона є функцією багатьох змінних, то – диференціальним рівнянням в частинних похідних. У посібнику розглядаються тільки звичайні диференціальні рівняння. Далі їх будемо називати диференціальними рівняннями (ДР).

Введемо означення основних понять.

Диференціальним рівнянням n-го порядку $n \in N$ називається рівняння вигляду

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0, \tag{1.0}$$

де $x \in (a,b)$ – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція змінної x, а $y',y'',\dots,y^{(n)}$ – похідні шуканої функції, F – неперервна функція $n + 2$ змінних.

Розв'зком рівняння (1.0) називається функція $y=\varphi(x), x\in(a,b)$, яка при підстановці у це рівняння перетворює його в тотожність, тобто $F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$.

<u>ПРИКЛАД.</u> Довести, що функція $y = \sin 2x$ є розв'язком рівняння

$$y'' + 4y = 0.$$

\# Дійсно. Знаходимо $y' = 2\cos 2x$, $y'' = -4\sin 2x$, тоді

$$y'' + 4y = -4\sin 2x + 4\sin 2x = 0.$$

Переконайтесь в тому, що функція $y = 3\cos 2x + 5\sin 2x$ теж є розв'язком диференціального рівняння $y'' + 4y = 0$. Наведіть ще приклади функцій, які б були розв'язками цього диференціального рівняння. #

Розв'язок диференціального рівняння, який заданий неявно відносно x і y, тобто у вигляді $\Phi(x,y) = 0$, називається <u>інтегралом рівняння</u>. Графік розв'язку ДР називається його <u>інтегральною кривою</u>.

Розділ I. ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ У ВИГЛЯДІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

<u>ПРИКЛАД</u> <u>I</u>. Скласти рівняння руху фізичного маятника.

\# Фізичний маятник - це абсолютно тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої осі під дією сили тяжіння (Рис. I). Розглянемо переріз цього тіла площиною перпендикулярною до нерухомої осі.

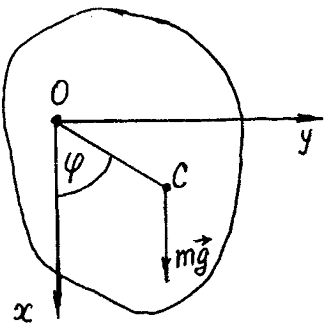


Рис. I

Нехай C - центр ваги маятника. Вісь OZ - вісь обертання, яка перпендикулярна до площини рисунка.

Скористаємось рівнянням руху твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_i mom_z \vec{F_i} \ ,$$

де J_z - момент інерції тіла відносно осі OZ, $mom_z \vec{F_i}$ - момент інерції активної сили обертання F_1, $\varphi(t)$- кут відхилення центра ваги від OX.

Активною силою обертання є сила тяжіння.

Тоді, як відомо з механіки,

$$mom_z \vec{mg} = Пр_z (mom_c \vec{mg}).$$

Відомо, що $mom_o \vec{mg} = \vec{OC} \times \vec{mg} = \vec{r} \times \vec{mg} = r_z mg \vec{j} - r_y mg \vec{k}$.

Тоді

$$Пр_z (mom_o \vec{mg}) = -mg\, r_y \ , \text{ тобто } mom_z \vec{mg} = - r_y \vec{mg} =$$

$$= - mg\, |\vec{r}| \sin\varphi = -a\, mg \sin\varphi, \ a = |\vec{OC}|.$$

Таким чином, диференціальне рівняння руху фізичного маятника має вигляд:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -a\, mg \sin\varphi, \tag{I.I}$$

де $a = |\vec{r}| = OC$.

Розглянемо малі коливання маятника, тобто такі, що $\sin\varphi \approx \varphi$.

Тоді одержимо рівняння:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = - \frac{amg}{J_z} \varphi. \tag{I.2}$$

Перевірте, що функція

$$\varphi(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{amg}{J_z}}\cdot t + B\right), \tag{I.3}$$

де A,B – сталі, є розв'язком рівняння (I.2). У розділі 3 переконаємось в тому, що розв'язок (I.3) охоплює всі можливі розв'язки диференціального рівняння (I.2).

Таким чином, малі коливання фізичного маятника є гармонічними коливаннями, що не відповідає реальності, бо при складанні рівняння /I.I/ не враховані інші сили (опір повітря, тертя тощо). #

ПРИКЛАД 2. Скласти диференціальне рівняння, якому задовольняє струм у колі, що складається з послідовно з'єднаних елементів: опору R, індуктивності L та ємності C. Коло під'єднано до е.р.с. E(t) (Рис.2).

Розглянемо випадок, коли в початковий момент струм у колі та заряд конденсатора дорівнюють нулеві. Відповідно до другого закону Кірхгофа маємо $E(t) = U_L + U_R + U_C$, де U_L, U_R, U_C – падіння напруги на індуктивності, опорі та ємності.

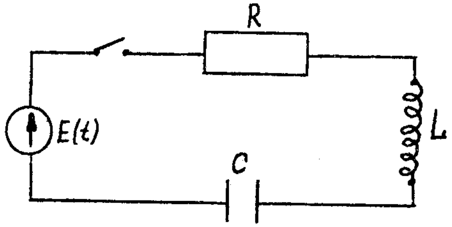


Рис. 2

Нехай струм залежить від t, тобто $J = J(t)$.

Тоді мають місце співвідношення

$$U_L = L\frac{dJ}{dt}, \; U_R = RJ,$$

$$U_C = \frac{1}{C}\int_0^t J(x)dx.$$

Таким чином, одержуємо рівняння відносно функції $J(t)$:

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C}\int_0^t J(x)dx = E(t). \tag{I.4}$$

Продиференціювавши його, перейдемо до рівняння, яке містить лише похідні:

$$L\cdot\frac{d^2J}{dt^2} + R\frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{C}J(t) = \frac{dE(t)}{dt} \tag{I.5}$$

Методи розв'язування таких рівнянь розглянемо у п.4.3 та п.4.4. #

Зауваження. Математичну модель зміни струму у електричному колі можна подати у іншому вигляді.

Скористаємось співвідношення

$$U_C = \frac{1}{C}\int_0^t J(x)dx.$$

Продиференціювавши його, дістанемо рівняння $C\frac{dU_C}{dt} = J(t)$.

Тоді математична модель у вигляді диференціального рівняння /І.5/ зводиться до моделі у вигляді двох диференціальних рівнянь, тобто системи

$$\begin{cases} L\,\dfrac{dJ(t)}{dt} + R\,J(t) + U_c(t) = E(t), \\ C\,\dfrac{dU_c(t)}{dt} - J(t) = 0. \end{cases} \qquad (I.6)$$

#

ПРИКЛАД 3. Знайти закон руху матеріальної точки масою m під дією сили опору F_1, що пропорційна швидкості руху, сили F_2, направленої до центра O, та зовнішньої сили F_3 (Рис.3).

Нехай в момент часу t точка M знаходиться на віддалі S.

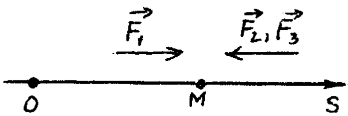


Рис. 3

Тоді можна виразити вказані в умові задачі сили через S:

$$F_1 = k_1 v = k_1 \frac{dS}{dt}, \quad F_2 = k_2 S$$

Крім того припустимо, що закон дії зовнішньої сили має вигляд $F_3 = at^2$.

За другим законом Ньютона $m\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$. Переходимо до проекції цих сил на вісь OS. Якщо $k_1>0$, $k_2>0$, то $m\ddot{S} = -k_1\dot{S} - k_2 S + at^2$, або

$$m\frac{d^2S}{dt^2} + k_1\frac{dS}{dt} + k_2 S = at^2. \qquad (I.7)$$

Отже, одержали диференціальне рівняння другого порядку.

Звернемо увагу на те, що різні фізичні явища можуть описуватися однаковими математичними моделями. Так рівняння /І.5/ є математичною моделлю електричного кола. Модель дозволяє розв'язати задачу про знаходження струму в колі. Аналогічні ДР другого порядку /І.2/ і /І.7/ дають моделі механічних систем, але коефіцієнти мають уже інший зміст.

Приклад 4. Скласти диференціальне рівняння об'єму правильної трикутної піраміди як функції висоти піраміди.

Нехай шукана функція V(x) - об'єм піраміди, висота якої x /Рис.4/, а стороною основи /правильний трикутник/ є a(x). Складемо рівняння приросту об'єму на інтервалі $(x, x+\Delta x)$, надавши висоті x приріст Δx. Позначимо об'єм піраміди, висота якої дорівнює $x+\Delta x$, через $V(x+\Delta x)$, а сторону основи $-\,a(x+\Delta x)$. Тоді приросту висоти Δx відповідає приріст об'єму

$$\Delta V(x) = V(x+\Delta x) - V(x).$$

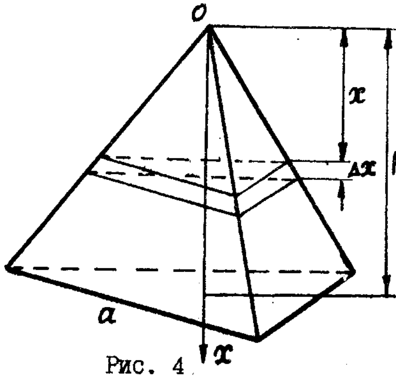


Рис. 4

Одержимо оцінку приросту об'єму $\Delta V(x)$. Площа основи піраміди з висотою x дорівнює

$$S(x)=\frac{1}{4}a^2(x)\sqrt{3},$$

а з висотою $x+\Delta x$ –

$$S(x+\Delta x)=\frac{1}{4}a^2(x+\Delta x)\sqrt{3}.$$

Отже, об'єм $\Delta V(x)$ більший за величину $\frac{1}{4}a^2(x)\sqrt{3}\cdot\Delta x$ (об'єм призми з висотою Δx і площею основи S(x)) та менший об'єму призми $\frac{1}{4}a^2(x+\Delta x)\sqrt{3}\Delta x$ висотою Δx і площею основи $S(x+\Delta x)$, тобто

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(x)\Delta x\le\Delta V\le\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(x+\Delta x)\Delta x.$$

Поділивши обидві частини нерівностей на Δx, матимемо

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(x)\le\frac{\Delta V}{\Delta x}\le\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(x+\Delta x).$$

Перейшовши до границі, вважаючи, що виконуються відповідні умови (існує похідна функції $V(x)$, $a(x)$ – неперервна), дістанемо

$$\frac{dV(x)}{dx}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2(x).$$

Це і є диференціальне рівняння відносно функції V(x). Щоб проінтегрувати рівняння і дістати формулу для об'єму, скористаємось додатковими умовами.

Припустимо, що при x = H, V(x) = V, a(x)=a. Знайдемо вираз для сторони a(x). З подібності трикутників дістанемо
a(x)/a = x/H, a(x) = (a/H)x. Отже,

$$V'(x)=\frac{a^2x^2}{4H^2}\sqrt{3}.$$

Можна переконатись у тому, що функція $V(x)=\frac{a^2x^3}{12H^2}\sqrt{3}+A$, де A-стала, також задовольняє це ДР. Знайдемо A з очевидної умови V(0) = 0 (об'єм піраміди, висота якої дорівнює нулеві). Якщо x =0, то A = 0. Тоді остаточно маємо

$$V(x)=\frac{a^2x^3}{12H^2}\sqrt{3}\quad,\text{ а }\quad V=\frac{a^2H}{12}\sqrt{3}\quad.\ \#$$

<u>ПРИКЛАД</u> <u>5</u>. Знайти рівняння плоских кривих, у яких радіус кривини пропорційний кубові довжини нормалі між точками дотику та віссю абсцис (Рис.5).

#Скористаємось геометричним змістом першої та другої похідної.

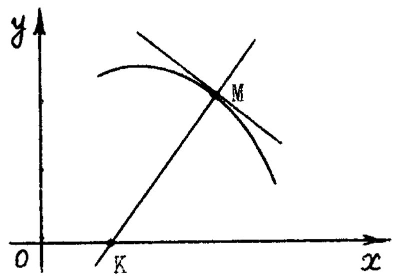


Рис. 5

Радіус кривини R кривої $y=f(x)$ знаходиться за формулою

$$R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{|y''|} .$$

Нехай $M(x,y)$ - довільна точка кривої $y = f(x)$. За умовою

$$R = k(MK)^3.$$

Для обчислення довжини MK скористаємось рівнянням нормалі

$$Y - y = -(X - x)/y'.$$

Знайдемо координату X_k точки $K(X_k,0)$: $-y = -(X_k - x)/y'$. Звідси одержуємо $X_k = x + y/y'$, тоді

$$MK = \sqrt{(x - x - y/y')^2 + (y-0)^2}.$$

Отже, диференціальне рівняння шуканої сім'ї кривих має вигляд

$$\frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{|y''|} = k\left(\sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}}\right)^3.$$

Спростивши його, дістанемо $\quad y'' = \dfrac{y'^3}{k y^3}$.

Рівняння такого типу розглядаються у розділі 3.

Зінтегрувавши його, дістанемо рівняння такої сім'ї кривих:

$$y^2 = C_1(x + C_2) + \frac{1}{k C_1} .$$ #

<u>ПРИКЛАД</u> 6. У приміщенні цеху, об'єм якого v , повітря містить a % вуглекислоти. Свіже повітря, яке доставляють вентилятори в кількості ρ $м^3$/хв, містить b % вуглекислоти. Яку потужність повинні мати вентилятори, щоб протягом t_0 хв вміст вуглекислоти зменшився у n разів. Розв'язати задачу за таких умов. Концентрація вуглекислоти у приміщенні цеху у кожний момент часу розподілена рівномірно. Змішування чистого повітря у приміщенні проходить негайно.

Диференціальне рівняння складемо на основі підрахунку балансу зміни кількості вуглекислоти при вентиляції.

Нехай в момент часу t у повітрі міститься x % вуглекислоти. Розглянемо досить малий проміжок часу Δt , що пройшов з моменту t, і підрахуємо зміну кількості вуглекислоти.

За час Δt вентилятори подали у цех $\frac{p b \Delta t}{100}$ м^3 вуглекислоти, а зменшилось її у приміщенні на $\frac{x b \Delta t}{100}$ м^3. Таким чином, за Δt хв. кількість вуглекислоти у приміщенні зменшилась на $\left(\frac{xb}{100} - \frac{pb}{100}\right)\Delta t$ м^3. Зміну кількості вуглекислоти обчислимо іншим шляхом. Нехай Δx – зменшення /у процентах/ вмісту вуглекислоти /$\Delta x < 0$/ за час Δt, причому $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$. Тоді кількість вуглекислоти зменшиться на $-\frac{v \Delta x}{100}$ м^3.

Складемо рівняння балансу зміни вуглекислоти.

$$\frac{(x-p)b}{100}\Delta t = -\frac{v}{100}\Delta x.$$

Звідси одержуємо $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(p-x)b}{v}$. Перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$ і, допускаючи існування похідної, дістанемо диференціальне рівняння $\frac{dx}{dt} = \frac{b(p-x)}{v}$. Можна переконатися в тому, що його розв'язком є функція $x(t) = b + c e^{-\frac{p}{v}t}$ /див.2.I/. Для знаходження сталої скористаємось тією умовою, що в початковий момент t = 0 процент вмісту вуглекислоти дорівнює a %, тобто x(0) = a. Тоді C = a – b і $x(t) = b + (a-b)e^{-\frac{p}{v}t}$.

Далі знайдемо потужність вентиляторів P. Через t_0 хв у повітрі приміщення повинно бути $x(t_0) = \frac{a}{n}$ % вуглекислоти. Тоді з рівняння $\frac{a}{n} = b + (a-b)e^{-\frac{p}{v}t_0}$ знаходимо P:

$$p = -\frac{v}{t_0}\ln\frac{a-nb}{n(a-b)}.$$ #

Розглянуті приклади дають можливість сформулювати алгоритм побудови математичної моделі процесу у вигляді диференціального рівняння.

I. Необхідно визначити закони тієї області знань, які можуть бути використані при розв'язуванні задачі /закони Ньютона, Кірхгофа і т.д./. Чітко визначити умови, при яких складається рівняння, та фактори, на які треба звернути увагу.

2. Ввести незалежну змінну та шукану функцію.

3. Якщо можливо, то безпосередньо використати фізичний чи геометричний зміст похідної для побудови диференціального рівняння.

4. Скласти рівняння балансу зміни шуканої функції за малий проміжок часу, чи зміни іншої незалежної змінної /наприклад, рівняння балансу енергії/.

5. Зінтегрувати одержане диференціальне рівняння.

6. Визначити параметри, які містяться у розв'язку, скориставшись додатковими умовами.

7. Провести математичний аналіз та обгрунтувати, що одержаний розв'язок відповідає меті побудови математичної моделі. Якщо модель неадекватно описує процес, то знову повертаємось до п.І алгоритму.

Розділ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.І. Основні поняття

Звичайним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду

$$F(x,y,y') = 0, \qquad (2.I)$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція, y' – похідна функції $y(x)$. Крім того, функція F розглядається як неперервна функція трьох аргументів і обов'язково повинна залежати від аргументу y'.

Наприклад, рівняння $x^2y' + \sin x = 0$, $(x^3 + y^3)y' = y$, $(y')^2 + y' = 1$ є диференціальними, а рівняння $x^2 + y^2 = y$ – ні /чому?/.

Розв'язком диференціального рівняння /2.І/ називається диференційовна функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці перетворює ДР в тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0.$$

Так, функція $y=x^3$ є розв'язком рівняння $xy'-3y=0$. Дійсно, $y'=3x^3$. Підставивши y та y' у диференціальне рівняння дістанемо тотожність $x*3x^2 - 3x^3 = 0$.

На практиці найчастіше зустрічаються рівняння, розв'язані відносно похідної. Тобто, будемо розглядати такі рівняння /2.І/, які можна записати у вигляді

$$y' = f(x,y). \qquad (2.2)$$

Рівняння /2.2/ можна записати ще в деяких інших формах. Якщо похідну записати як відношення диференціалів $y' = dy/dx$, то рівняння $y' = f(x,y)$ набуде вигляду $dy = f(x,y)dx$. Інколи зручно вважати невідомою змінну x як функцію змінної y , $x = \varphi(y)$. В тій області, де $f(x,y) \neq 0$, рівняння /2.2/ матиме вигляд $dx/dy = 1/f(x,y)$.

Якщо права частина рівняння /2.2/ має вигляд

$$f(x,y) = -M(x,y)/N(x,y)$$

то його можна подати у диференціальній формі:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Як уже ми бачили, диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків. Але розв'язок, що моделює деякий фізичний процес, повинен бути єдиним. Тому, розв'язуючи прикладну задачу, як правило, знаходимо не всі розв'язки диференціального рівняння, а якийсь один розв'язок, обумовлений додатковими умовами.

В теорії диференціальних рівнянь пошук єдиного розв'язку ДР першого порядку зводиться до розв'язування задачі Коші, якщо додаткові умови задаються значенням шуканої функції в одній точці. Це - задача з початковими умовами. Якщо ж додаткові умови задаються у двох точках, то задача називається крайовою. Будемо розглядати лише задачу Коші. Отже, сформулюємо її.

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{2.2}$$

який задовольняє початковій умові

$$y(x_0) = y_0, \tag{2.3}$$

де x_0, y_0, - деякі дійсні числа.

Дамо геометричну інтерпретацію задачі Коші.

Нехай $y = \varphi(x)$ деякий розв'язок рівняння (2.2), назовемо його частинним розв'язком, а графік цієї функції - інтегральною кривою рівняння (2.2). Отже, геометричний зміст задачі Коші полягає в тому, що треба знайти інтегральну криву диференціального рівняння (2.2), яка проходить через точку (x_0, y_0) (умова /2.3/).

Виникає питання, а чи єдина крива проходить через задану точку і чи взагалі існує розв'язок задачі (2.2) - (2.3)? На ці питання дає відповідь <u>теорема Коші:</u>

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в деякій області D площини XOY і має в цій області неперервну частинну похідну $\frac{\partial f}{\partial y}$, то через кожну точку (x_0, y_0) області D проходить тільки одна інтегральна крива рівняння (2.2).

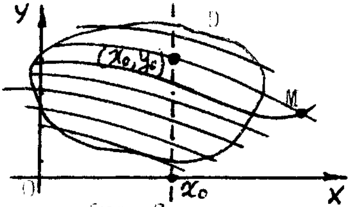


Рис. 6

Із теореми Коші випливає, що рівняння $y'= f(x,y)$ має нескінченну множину розв'язків в області D (Рис.6), оскільки на прямій $x = x_0$ можна вказати безліч точок (x_0,y), які лежать в області D.

Приклад. Користуючись теоремою існування і єдиності знайти область, де рівняння $y'=\sqrt{x-y}$ має єдиний розв'язок.

Права частина рівняння є функцією $f(x,y)=\sqrt{x-y}$, неперервною в області $y\le x$. Частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}=-1/2\sqrt{x-y}$ існує в області $y<x$. Отже, умова теореми порушується на прямій $y = x$.

Введемо поняття загального розв'язку, яке опише всю множину розв'язків диференціального рівняння першого порядку.

Загальним розв'язком рівняння (2.2) називається функція $y=\varphi(x,c)$, яка залежить від довільної сталої C і в деякій області D задовольняє умовам:

а) $\varphi(x,c)$ є розв'язком рівняння (2.2) при довільному C (C може належати деякій множині);

б) довільний розв'язок рівняння може бути записаний у вигляді $y=\varphi(x,c)$ при деякому конкретному значенні C.

Якщо загальний розв'язок рівняння (2.2) заданий в неявному вигляді $F(x,y,C) = 0$, то він називається загальним інтегралом диференціального рівняння (2.2).

Розв'язок $F(x,y,C_0) = 0$, де C_0-конкретне значення довільної сталої C, обумовлений початковою умовою (2.3), називається частинним інтегралом.

На рис.6 показана множина інтегральних кривих, що відповідає загальному розв'язку та частинна інтегральна крива, яка проходить через точку (X_0,Y_0).

Приклад. Перевірити, що функція $y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ є розв'язком рівняння $xy' = y + x\sin x$.

Дійсно. Знаходимо $y'=\left(x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right)'_x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt+\sin x.$

Підставимо знайдені y і y' в дане рівняння, дістанемо:

$$x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt+x\sin x\equiv x\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt+x\sin x.$$

Тотожність доводить твердження. #

Приклад. Довести, що функція $y = Cx^m$ є загальним розв'язком диференціального рівняння $xy' - my = 0$.

Для доведення потрібно перевірити, що функція $y=cx^m$ задовольняє рівнянню при довільному C. Знайдемо $y' = Cmx^{m-1}$, тоді
$xCmx^{m-1} - mCx^m = 0$, отже, $cmx^m - mcx^m \equiv 0$.

Розглянемо початкові умови $y(x_0) = y_0$, x_0 - не дорівнює нулеві. Покажемо, що цим умовам відповідає єдине значення сталої C. Нехай
$x = x_0$, тоді $y_0 = Cx_0^m$, звідси знаходимо $C = y_0 x_0^{-m}$. Тоді функція $y = Cx^m = y_0 x_0^{-m} x^m$ задовольняє початковим умовам: $y = y_0 x_0^{-m} x_0^{m} = y_0$. Отже, довільний частинний розв'язок даного рівняння може бути описаний функцією $y = Cx^m$. Тому ця функція є загальним розв'язком рівняння. #

2.1.1. Геометричний зміст рівняння першого порядку

Розглянемо геометричний зміст рівняння (2.2). Нехай $y=\varphi(x)$ його розв'язок, x, y - прямокутні декартові координати. Тоді графік функції $y=\varphi(x)$ має в кожній точці дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює y' або, що випливає з рівняння (2.2), дорівнює $f(x,y)$. Отже, рівняння $y' = f(x,y)$ визначає зв'язок між координатами точки області D та кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої у цій точці.

Іншими словами, диференціальне рівняння першого порядку визначає в кожній точці області існування розв'язку напрям дотичної, проведеної до інтегральної кривої. А в цілому в області D рівняння $y' = f(x,y)$ задає поле напрямів. Його можна побудувати таким чином. Задаємо точку (x_1,y_1), знаходимо $f(x_1,y_1)$, тобто обчислюємо y'. В області D будуємо точку з координатами (x_1,y_1) і відрізок дотичної з центром у цій точці, тангенс кута нахилу якого до осі абсцис дорівнює $f(x_1,y_1)$. Множина точок і відрізків дотичних є поле напрямів (Рис.7).

Але зручніше поле напрямів будувати таким чином. Будуються лінії, у яких напрям поля в кожній точці однаковий, тобто $y' = k$, або $f(x,y) = k$.

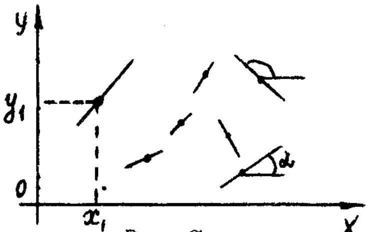


Рис. 7

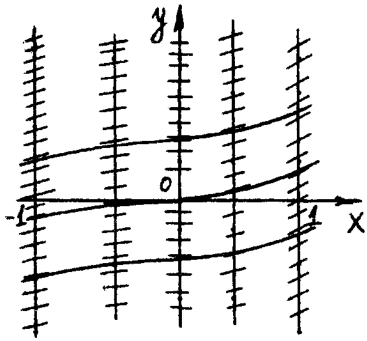


Рис. 8

Такі лінії називають ізоклінами. Розглянемо приклад. Побудуємо поле напрямів рівняння $y' = x^2$. Скористаємось поняттям ізокліни. Рівняння ізокліни $x^2 = k$. Надаємо k значення, наприклад I, I/4,0 і т.д. Якщо $x^2 = I$, то це - рівняння двох прямих $x = -1$ і $x = 1$. У кожній точці цих прямих відрізок дотичної до інтегральної кривої нахилений до осі ОХ під кутом 45°. Якщо $k = 0$, то ізокліна $x = 0$ є віссю OY. Побудувавши достатню кількість ізоклін, можна провести інтегральну криву так, щоб в кожній точці області D дотична до кривої співпадала з напрямом поля (Рис. 8).

Отже, метод ізоклін можна використати при побудові наближених графічних розв'язків диференціального рівняння. Розглянемо ще один приклад побудови поля напрямів та аналізу розв'язків рівняння.

Приклад. Побудувати поле напрямів та накреслити схематично інтегральні лінії рівняння $y' = y - x$.

Нехай $y' = k$, де k-стала. Запишемо рівняння ізоклін $y - x = k$ або $y + x = k$. Ізокліни цього рівняння є паралельні прямі. Надаємо значення параметру k. Якщо $k=0$, то рівняння ізокліни $y - x = 0$. Ізокліну перетинаємо відрізками з кутом нахилу до додатного напряму осі абсцис рівному нулеві (див. Рис. 9). Далі надамо k значення -2,-I,I,2. Рівняннями відповідних ізоклін будуть прямі $y = x - 2$, $y = x - 1$, $y = x + 1$, $y = x + 2$.

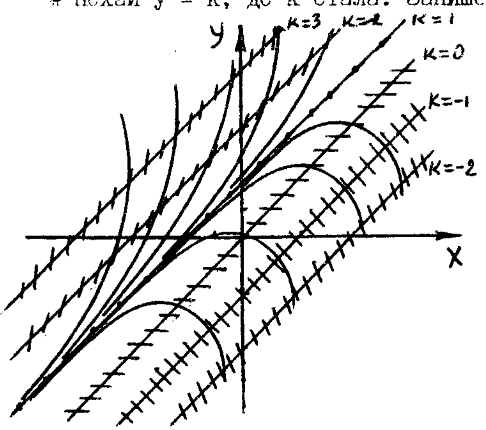


Рис. 9

Ізокліни перетинаємо відрізками з кутами нахилу відповідно $\alpha_1 = \pi - \operatorname{arctg} 2$, $\alpha_2 = \frac{3}{4}\pi$, $\alpha_3 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_4 = \operatorname{arctg} 2$.

Отже, побудовано поле напрямів. Далі за допомогою поля напрямів будуємо схематично інтегральні криві. Хоча вони побудовані наближено, але дозволяють уявити та проаналізувати поведінку інтегральних кривих. Так, ізокліна $y = x + 1$ є інтегральною кривою, яка ділить площину на дві сім'ї інтегральних кривих, які асимптотично наближаються до прямої $y = x + 1$. Інтегральні криві, які лежать нижче прямої $y = x + 1$, мають екстремуми, яким відповідають точки, що лежать на прямій $y = x$. Цей аналіз можна продовжити, враховуючи інші особливості розв'язків рівняння. #

2.1.2. Метод Ейлера

Розглянемо ще один метод наближеного розв'язування ДР першого порядку, який нагадує метод ізоклін, це метод ламаних Ейлера. Розглянемо чисельний варіант цього методу.

Наближений розв'язок рівняння $y' = f(x,y)$ шукаємо на відрізку $[a,b]$, крім того, нехай виконується початкова умова $y(a) = y_0$. Відрізок $[a,b]$ ділимо на n рівних частин:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

Отже, $x_k = x_{k-1} + k*h$, де $h = (b-a)/n$, $k = 1,2,3,\ldots,n$.

Через точку (x_0,y_0) проведемо дотичну до шуканої інтегральної кривої

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

але $k = y'(x_0) = f(x_0,y_0)$, тоді рівняння дотичної матиме вигляд

$$y - y_0 = f(x_0,y_0)(x - x_0).$$

Покладемо $x = x_1$ і дістанемо наближене значення y_1 ординати точки інтегральної кривої. Тоді

$$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)(x - x_0),$$

або

$$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)*h.$$

Через одержану точку (x_1,y_1) проводимо дотичну до тієї інтегральної кривої, яка проходить через дану точку. Її рівняння має вигляд $y = y_1 = f(x_1,y_1)(x - x_1)$. Покладемо $x = x_2$, дістанемо наближене значення ординати y_2

$$y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)h$$

і точку (x_2,y_2).

У загальному випадку маємо

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h_1, \qquad (2.4)$$

де $k = 1,2,\ldots,n$.

За допомогою формули (2.4) одержуємо множину точок

$$(x_0,y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_k,y_k), \ldots, (x_n,y_n),$$

яка належить кривій, що визначає наближений розв'язок ДР.

Його можна подати у вигляді таблиці чисел:

x	x_0	x_1	x_k	x_n
y	y_0	y_1	y_k	x_n

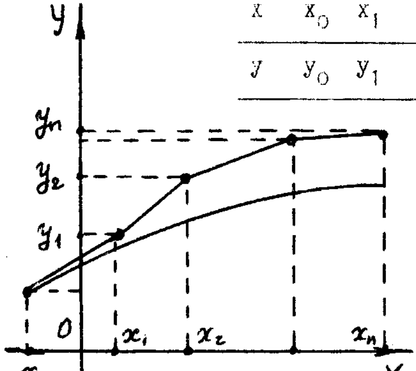


Рис. 10

На рис. 10 показано ламану Ейлера та інтегральну криву рівняння, яку ламана наближає.

Метод Ейлера досить простий для реалізації на ЕОМ, але точність його невелика, щоб можна було розв'язувати будь-які ДР. Якщо врахувати похибку обчислення $f(x_k,y_k)$, похибку заміни рівняння (2.2) формулою (2.4), то можна довести, що похибка методу має порядок $O(h)$.

Якщо в деякій області функція $f(x,y)$ – права частина рівняння (2.2)–задовольняє умовам:

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| \le N|y_2-y_1|, \qquad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \le M$$

при $x \in [x_0, x_m]$, то похибка методу Ейлера матиме вигляд

$$|y_m - y(x_m)| \le \frac{hM}{2N}\left(e^{N(x_m-x_0)} - 1\right),$$ де M і N – сталі.

Приклад. Застосовуючи метод Ейлера, знайти наближений розв'язок рівняння $y' = y - x$ на відрізку $[0,2]$, якщо $y(0) = 2$.

Нехай крок інтегрування $h = 0.2$, тоді вузлами інтегрування будуть точки $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_{10} = 2$.

Знайдемо наближені значення розв'язку $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2, \ldots, y(x_{10})=y_{10}$. Обчислюємо їх за формулою (2.4). Для даного рівняння ця формула набуває вигляду

$$y_k = y_{k-1} + (y_{k-1} - x_{k-1})h.$$

Так, наприклад, $y_1 = y_0 + (y_0 - x_0)h = 2 + (2 - 0)*0.2 = 2.4$. Аналогічно обчислюються інші значення, які зведені в таблицю:

x_k	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y_k	2	2.4	2.84	3.33	3.87	4.51	5.21	6.01	6.93	8.00	9.24
$y(x_k)$	2	2.44	2.89	3.42	4.02	4.72	5.52	6.46	7.55	8.85	10.39

У другому рядку таблиці приведені наближені значення розв'язку $y(x)$ у точках x_k. Для порівняння у третьому рядку приведені точні значення розв'язку, який має вигляд $y = 1 + x + e^x$.

Як видно, найбільша відносна похибка у точці $x = 2$, вона приблизно рівна 11%.

Для того щоб зменшити похибку, треба зменшити крок інтегрування h. Але не можна зменшувати h як завгодно. Існує деякий крок h_0, після якого похибка збільшується. Для кожної задачі Коші це своє h_0.

Інші наближені методи розглядаються у розділі 6. Більш детально наближені методи досліджуються в роботах [1,7,9]. #

2.1.3. Поняття про особливі точки і розв'язки рівняння

Диференціальне рівняння крім розв'язків, які входять у загальний розв'язок, можуть мати інші розв'язки. За допомогою теореми Коші відділити їх не можемо, бо умови теореми Коші є достатніми, тобто можуть існувати єдині в деякому околі точки розв'язки, а умови теореми на виконуються. Розв'язок, у кожній точці якого порушується умова єдиності теореми Коші, називається <u>особливим розв'язком</u> рівняння. Особливий розв'язок не належить області існування загального розв'язку, тому не міститься у формулі загального розв'язку ні при яких значеннях довільної сталої, навіть, коли $C \to \pm\infty$. Особливі розв'язки можна виявити у процесі інтегрування рівняння. Це ті криві, рівняння яких можуть бути втраченими при перетворенні рівняння або його загального інтеграла.

Якщо диференціальне рівняння має частинні і особливі розв'язки, то можуть бути побудовані розв'язки шляхом склеювання дуг частинних і особливих, які не є ні частинними, ні особливими.

Приклад. Знайти особливі розв'язки рівняння

$$y' = \sqrt{y^2 - 1}.$$

Використовуємо умови теореми Коші. Знаходимо точки, в яких не існує $\partial f/\partial y$, яка дорівнює $\frac{\partial f}{\partial y} = y/\sqrt{y^2-1}$. Похідна не існує в точках на прямих y = 1 і y = -1. Підставивши ці функції у рівняння, переконуємось в тому, що особливі розв'язки не містяться у загальному розв'язку $y = \pm ch(x + C)$. Як знайти цей розв'язок, буде показано у пункті 2.2. Розглянемо розв'язок y = 1. Очевидно, що ні при якому значенні довільної C функція y = ch(x + C) тотожно не дорівнює одиниці, отже, розв'язок y = 1 не належить до загального. На рис.II суцільними лініями показані інтегральні криві рівняння для y'>0.

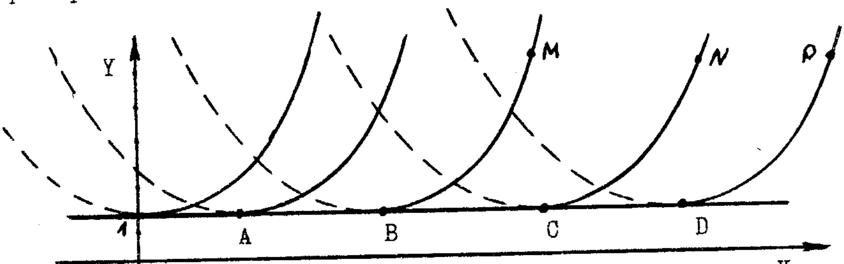


Рис. II

Відмітимо, що через дві точки прямої y=1 проходить також безліч розв'язків, які не є ні частинними (наприклад, вітки BM, CN, і т.д. функції y = ch(x + C)), ні особливим (пряма y=1). Це - розв'язки типу MBA, NCA, PDA і т.д.). #

Особливою називається точка(x_0,y_0), в досить малому околі якої права частина рівняння (2.2) не задовольняє умовам теореми існування і єдиності розв'язку. Поведінка інтегральних кривих в околі цієї точки може бути довільною, через особливу точку може не проходити ні жодної інтегральної кривої, може проходити одна, декілька або безліч інтегральних кривих. Як показали дослідження в теорії диференціальних рівнянь, знання про розподіл особливих точок, про характер поведінки інтегральних кривих в околі цих точок дають можливість зробити висновки про поведінку інтегральних кривих в області задання диференціального рівняння.

Якщо рівняння (2.2) можна записати у вигляді $y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервно диференційовні функції, то точка (x_0,y_0) буде особливою, коли $P(x_0,y_0)=0$, $Q(x_0,y_0)=0$.

Приклад. Дослідити особливі точки рівняння

$$y' = y/x.$$

\# Із означення випливає, що точка (0,0) є особливою точкою даного рівняння. Крім того, особливими точками рівняння є точки осі OY, де $x = 0$ (Рис. 12).

Детальніше проаналізуємо характер поведінки інтегральних кривих в околі точки (0,0). Як можна переконатись, функція $y = Cx$, де C - довільна стала, є загальним розв'язком рівняння. Прямі $y = Cx$ проходять через початок коодинат. Тобто, через особливу точку проходить безліч інтегральних кривих. Така особлива точка називається вузлом. Слід зауважити, що через особливі точки з абсцисою $x = 0$ не проходить жодної інтегральної кривої.

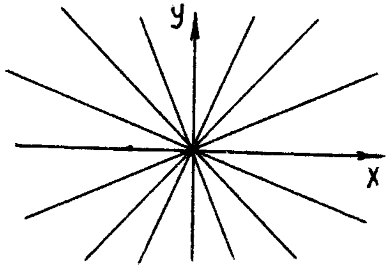


Рис. 12

У п.4.4. розглядаються інші типи особливих точок а також проводиться на їх основі аналіз процесу зміни струму у електричному колі.

Детальніше про особливі точки викладено у підручнику [I] розділ XIII.

Завдання для самостійної роботи

1. Переконатися у тому, що функція $y = \operatorname{ch} x$ є розв'язком рівняння $y'^2 - y^2 + 1 = 0$.

2. Переконатися у тому, що функція $y = \sin(x + c)$ є розв'язком рівняння $y'^2 + y^2 - 1 = 0$.

3. Довести, що функція $y = C/x$ є загальним розв'язком рівняння $xy' + y = 0$.

4. Знайти область, у якій рівняння $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$ має єдиний розв'язок.

5. Довести, що функція $y = \operatorname{ch}(x + C)$ є загальним розв'язком рівняння $y' = \sqrt{y^2 - 1}$, $y' > 0$.

Рекомендована література

[1, розділ XIII, § I-3; § 32; 2, § I.I; I.2; I.4; I.7; 6, § 3.I; 3.2].

Завдання для самоперевірки та систематизації знань

I. В чому відмінність диференціальних і алгебраїчних рівнянь ?
Приведіть приклад диференціального рівняння третього порядку і алгебраїчного рівняння третього степеня.

2. Як визначається порядок диференціального рівняння ?

3. Дайте означення розв'язку, загального розв'язку, загального інтеграла диференціального рівняння.

4. Сформулюйте задачу Коші для рівняння $y' = f(x,y)$.

5. В чому відмінність розв'язку диференціального рівняння від розв'язку алгебраїчного рівняння ?

6. В чому полягає геометричний зміст задачі Коші ?

7. Розкрийте геометричний зміст диференціальнгого рівняння першого порядку.

8. Сформулюйте означення ізокліни.

9. В чому полягає геометричний зміст загального та частинного розв'язків ДР ?

IO. Сформулюйте теорему існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку. Які умови (необхідні, достатні, чи необхідні і достатні) формулюються теоремою Коші?

II. Де порушуються умови теореми Коші рівняння $y' = \sqrt[4]{y}$?

I2. Розкрийте аналітичний та геометричний зміст процесу "розв'язування диференціального рівняння".

I3. Приведіть приклад функції $f(x,y)$ (права частина рівняння $y' = f(x,y)$) такої, щоб завжди виконувались умови теореми Коші.

I4. Доведіть, що всі розв'язки рівняння $y' = f(y)$ монотонні.

15 Чому ліві симетричні вітки функції $y = ch(x + C)$ (пунктирні лінії на рис. 11) не є інтегральними кривими рівняння $y' = \sqrt{y^2 - 1}$? Як можна змінити дане рівняння, щоб ці вітки були інтегральними кривими одержаного рівняння ? А праві вітки функції $y = ch(x + C)$ будуть інтегральними кривими нового рівняння ?

2.2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Розглянемо рівняння (2.2), у яких права частина $f(x,y)$ може бути представлена у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга - від y, тобто $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f_1(x)f_2(y) \qquad (2.5)$$

називається рівнянням з <u>відокремлюваними змінними</u>.

Рівняння (2.5) можна подати у вигляді:

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx + \varphi_2(x)\psi_2(y)dy = 0.$$

Приклади рівнянь з відокремлюваними змінними.

$y' = \sin x \cos y$; $y' = x^3$; $dy = x\sqrt{1+y^2}dx$,

$$x(y+1)dx + (x-1)(y^2+1)dy = 0.$$

Для того щоб розв'язати рівняння (2.5) помножимо його на dx і поділимо на $f_2(y) \neq 0$,таким чином відокремимо змінні. $dy/f_2(y) = f_1(x)dx$. Зінтегруємо одержане рівняння

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C. \qquad (2.6)$$

Співвідношення (2.6) визначає розв'язок рівняння (2.5). Можна переконатись у тому, що (2.6) є загальним інтегралом рівняння (2.5) (зробіть самостійно).

<u>Зауваження</u>. 1. Якщо $f_2(y) = 0$ при $y = y_1$, то ця константа теж є розв'язком рівняння. Але цей розв'зок не входить у співвідношення (2.6).

2. Розв'язок рівняння (2.5) існує і єдиний в околі точки (x_0, y_0), якщо в цьому околі функції $f_1(x)$ і $f_2(y)$ неперервні і $f_2(y_0) \neq 0$.

Нижче наведено алгоритм розв'язування ДР з відокремлюваними змінними та приклади розв'язування рівнянь.

Алгоритм розв'зування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

1. Поділити обидві частини рівняння на функцію

$$\psi_1(y)\cdot\varphi_2(x)\neq 0.$$

Одержати рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx+\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy=0.$$

2. Почленно зінтегрувати диференціальне рівняння з відокремленими змінними.

3. Знайти довільну сталу, якщо є початкова умова.

4. Записати відповідь.

Приклад 1.

Зінтегрувати диференціальне рівняння.

$$(1+y^2)dx-xydy=0, \quad \text{якщо} \quad y(2)=1.$$

Дане рівняння припускає відокремлення змінних, бо воно має вигляд:

$$\psi_1(y)dx+\varphi_2(x)\psi_2(y)dy=0,$$

де $\varphi_1(x)\equiv 1$.

Поділивши ліву і праву частини рівняння на $(1+y^2)x$, дістанемо $dx/x-ydy/(1+y^2)=0$.

Змінні відокремлені.

Почленно зінтегруємо диференціальне рівняння з відокремленими змінними: $\int\frac{dx}{x}-\int\frac{ydy}{1+y^2}=\int 0dx.$

Дістанемо: $\ln|x|-0.5*\ln(1+y^2)=\ln C$.

Після перетворення одержуємо загальний інтеграл ДР

$$x^2=C(1+y^2).$$

Зауваження. Довільну сталу інтегрування вибирають таким чином, щоб розв'язок мав простіший вигляд. У даному випадку довільна стала вибрана у вигляді .

Далі використовуємо початкову умову: $y(2)=1$.

Дістанемо: $4=C(1+1)$, звідки одержуємо $C=2$.

Запишемо розв'язок у вигляді частинного інтеграла

$$x^2 = 2(1 + y^2).$$

Відповідь: $x^2 = 2(1 + y^2)$.

Приклад 2. Швидкість охолодження тіла у повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Температура повітря 20^0C, тіло протягом 20 хвилин охолджується від 100^0 до 60^0C. Знайти залежність температури від часу, та час, через який температура тіла знизиться до 30^0C.

Позначимо через T - температуру тіла в момент часу t, а через T_n - температуру повітря ($T_n<T$). Тоді за законом Ньютона $dT/dt = -k(T - T_n)$, де k - коефіцієнт пропорційності, $k>0$. Дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і інтегруємо. $dT/(T-T_n) = -kdt$,

$$\int \frac{dT}{T-T_n} = -k\int dt + \ln C.$$

Одержуємо $\ln(T - T_n) - \ln C = -kt$, або $(T - T_n)/C = e^{-kt}$. Звідси одержуємо залежність температури тіла від часу t:

$$T = Ce^{-kt} + T_n.$$

Знайдемо сталу C і коефіцієнт пропорційності k. За умовою задачі температура повітря $T_n = 20^0$C, коли $t = 0$, то температура тіла $T = 100^0$C, а коли $t = 20$ хв, то $T = 60^0$C.

Використовуючи ці початкові умови дістанемо: $100 = Ce^0 + 20$, $60 = Ce^{-k/3} + 20$. Отже, стала $C = 80$, а коефіцієнт пропорційності $k = (\ln 2)/20$.

Тоді залежність температури тіла від часу буде мати вигляд:

$$T = 80e^{-(\ln 2)t/20} + 20.$$

Знайдемо тепер, через який час температура тіла знизиться до 30^0C. Тобто, потрібно знайти t_0, якщо $T_0 = 30^0$. Підставимо ці значення в одержану формулу для T, тоді маємо:

$$30 = 80e^{-(\ln 2)t_0/20} + 20, \quad \text{або} \quad 60*\ln 2 = t_0*\ln 2.$$

Звідси одержуємо $t_0 = 60$ хв.

Відповідь: $T = 80e^{-(\ln 2)t/20} + 20$, $t_0 = 60$ хв. #

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний або частинний розв'язки ДР.

1. $y' = x$.
2. $2xyy' = y^2 - 1$.
3. $(x-1)dy - 2ydx = 0$.
4. $x^2y' + y = 0$.
5. $y' + 2\sqrt{y}\ln x = 0,\ y(e) = 1$.
6. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.
7. $(1 + e^x)yy' = e^x,\ y(0) = 1$.
8. $y'\sin x = y\ln y,\ y(\pi/2) = e$.
9. $y' = 10^{x+y}$.
10. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0,\ y(0) = 1$.
11. $y' + y\operatorname{tg}x = y/x$.
12. $2x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0,\ y(1) = 0$.

13. Знайти криву, піддотична якої дорівнює a (a = const).

14. Знайти криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них з будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1.

15. Рух пароплава уповільнюється силою опору води пропорційно швидкості пароплава V. Початкова швидкість пароплава V_0 = 10 м/с, через 5с швидкість V падає до 8 м/с. Через який час швидкість пароплава V зменшиться від 20 м/с до 1 м/с ?

16. Посудину, що має форму півкулі радіуса 2м, наповнено водою. За який час вода витече крізь круглий отвір радіуса 0.1 м, вирізаного у дні посудини ?

17. В чан налито 100 л розчину, що містить 10 кг розчиненої солі. Зі швидкістю 3 л за хвилину в чан вливається вода, а суміш з такою ж швидкістю витікає із чана. Перемішуючи воду, в чані підтримують рівномірну концентрацію. Скільки солі залишиться в чані через годину ?

Відповіді: 1. $y = x^2 + C$. 2. $y = xC + C$. 3. $y = C(x - 1)^2$. 4. $y = Ce^{1/x}$. 5. $\sqrt{y} = x\ln|x| - x + C$, $\sqrt{y} = x\ln|x| - x + 1$. 6. $\sqrt{1-y^2} = \arcsin x + C$. 7. $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}\,(1+e^x)$.

8. $y = e^{\operatorname{tg} x/2}$. 9. $10^x + 10^{-y} = C$. 10. $1 + y^2 = 2/(1 - x^2)$.
11. $y = \arccos x$. 12. $(1+x^2)\sqrt{1+y^2} = C$, $(1+x^2)\sqrt{1+y^2} = 2$.
13. $y = Ce^{x/a}$
14. $y^2 = Cx$. Вказівка: $2xy = 3\int_0^x y\,dx$.
15. $t = 36c$, $t = 51c$.
16. 3 хв., 20 с. Вказівка: $V = 0{,}6\sqrt{2gh}$, де h - глибина.
17. $a = 1.653$ кг. Вказівка: $dx = -0.03x\,dt$, якщо x - кількість солі в чані через t хв.

Рекомендована література

[1, розділ XIII, § 4; 2, § I.3; 6, § 3.3].

Питання для самоперевірки та систематизації знань

1). За яких умов існує розв'язок рівняння (2.5) ?

2). Зробіть аналіз розв'язків рівняння (2.5) у випадку $f_2(y) = 0$.

3). За допомогою якої підстановки рівняння $y' = f(ax+by)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними ?

4). Сформулюйте алгоритм розв'язування рівняння з відокремлюваними змінними.

5). За яких умов при відокремленні змінних можуть втрачатися розв'язки диференціального рівняння ?

2.3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ОДНОРІДНІ ВІДНОСНО ЗМІННИХ

Функція двох змінних $\varphi(x,y)$ називається однорідною функцією m-го виміру, якщо для будь-якого $t \neq 0$ справедлива тотожність

$$\varphi(tx, ty) = t^m \varphi(x,y).$$

Наприклад, функція $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ однорідна другого виміру, бо $\varphi(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2\varphi(x,y)$.

Перевірте, що функція $\varphi(x,y) = ax + by$ - однорідна функція першого виміру, а $\varphi(x,y) = \sin\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ - нульового виміру.

Справедливі твердження: сума, добуток та частка від ділення однорідних функцій є функцією однорідною.

Важливим для подальшого вивчення матеріалу є твердження про те, що однорідну функцію $\varphi(x,y)$ нульового виміру можна представити у вигляді $\varphi(x,y)=\psi(y/x)$.

\# Дійсно, $\varphi(tx,ty)=t^0\varphi(x,y)$, тобто $\varphi(x,y)=\varphi(tx,ty)$.

Нехай t = 1/x, тоді $\varphi(x,y)=\varphi(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y)=$

$=\varphi(1,y/x)=\psi(y/x)$.

\#

Приклад: $f(x,y) = \sin((x^2+y^2)/2xy) = \sin(1+(y/x)^2)/2(y/x)$. Шляхом ділення чисельника і знаменника на x^2 одержано функцію, яка залежить лише від відношення y/x.

Переходимо до розгляду однорідних диференціальних рівнянь.

Рівняння $y' = f(x,y)$ називається однорідним, якщо його права частина однорідна функція нульового виміру, тобто, якщо його можна представити у вигляді

$$y'=\varphi(y/x). \qquad (2.7)$$

Розв'язування рівняння зводиться до пошуку розв'язку рівняння з відокремлюваними змінними. Для цього введемо функцію

$U(x) = y(x)/x$, тобто введемо заміну $y = Ux$.

Перетворимо рівняння (2.7) за допомогою підстановки $y = Ux$. Для цього знайдемо похідну $y' = U + U'x$ і підставимо вирази для y і y' у рівняння (2.7), дістанемо

$$u+xu'=\varphi(u),$$

або

$$x\,du=[\varphi(u)-u]dx\ ,\ \varphi(u)-u\neq 0.$$

Одержане рівняння є ДР з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції U(x). Відокремлюємо змінні

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

Зінтегруємо одержане рівняння

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C,\ \psi(u)=\ln|x|+C.$$

Замінивши функцію U через x і y знаходимо загальний інтеграл даного рівняння $\psi(y/x)=\ln|x|+C$.

Зауваження.

I. Рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ є однорідним, якщо функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ – однорідні одного виміру.

2. Якщо $\varphi(u)-u\equiv 0$, то рівняння (2.7) набуває вигляду $y' = -\frac{y}{x}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними.

3. Деякі однорідні рівняння доцільно розв'язувати за допомогою підстановки $U = x/y$.

Алгоритм розв'язування однорідного диференціального рівняння

I. Застосувати підстановку

$$y = U(x)*x$$

$$y' = U'(x)x + U(x)$$

2. Підставити вирази $y = Ux$ і $y' = U'x + U$ у дане диференціальне рівняння. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними.

3. Розв'язати одержане диференціальне рівняння.

4. Застосувати підстановку $U = y/x$ і спростити одержаний розв'язок.

5. Знайти довільну сталу, якщо є початкова умова.

6. Записати відповідь.

Приклад I. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0 \qquad (1)$$

\# Переконаємось в тому, що дане диференціальне рівняння є однорідним. Для цього перепишемо рівняння у вигляді

$$y' = (3y - 4x)/(2y - 3x),$$

або

$$y' = (3(y/x) - 4)/(2(y/x) - 3) \qquad (2)$$

Права частина рівняння (2) є однорідною функцією нульового його виміру, тобто його можна записати у вигляді $y'=\varphi(y/x)$. Отже, дане диференціальне рівняння однорідне. Робимо заміну $y = Ux$, $y' = U'x + U$. Підставляємо y і y' у дане рівняння (2), дістанемо:

$$U'x + U = \frac{3U-4}{2U-3}, \text{ або } U'x = \frac{3U-4}{2U-3} - U$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$$\int \frac{2u-3}{-2u^2+6u-4}\,du = \int \frac{dx}{x} + C_1$$

Одержуємо:

$$-\frac{1}{2}\ln|-2U^2+6U-4| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|C|.$$

Одержаний вираз помножимо на (-2) і спростимо:

$$\ln|-2U^2+6U-4| + 2\ln|x| = \ln|C|,$$

або

$$\ln|(-2U^2+6U-4)x^2| = \ln|C|.$$

Потенціюємо:

$$(-2U^2+6U-4)x^2 = C$$

Замість U підставляємо y/x і одержуємо:

$$[-2(y/x)^2 + 6(y/x) - 4]x^2 = C,$$

або

$$-2y^2 + 6xy - 4x^2 = C, \quad \text{або} \quad 2y^2 - 6xy + 4x^2 = C_1,$$

де $C_1 = -C$.

Відповідь: $2y^2 - 6xy + 4x^2 = C_1$. #

Приклад 2. Визначити криву, яка проходить через точку A(0,1) і для якої трикутник, утворюваний віссю Oy, дотичною до кривої та радіусом-вектором точки дотику, є рівнобедреним (причому основою його є відрізок дотичної від точки дотику до осі Oy) (див. рис. 13).

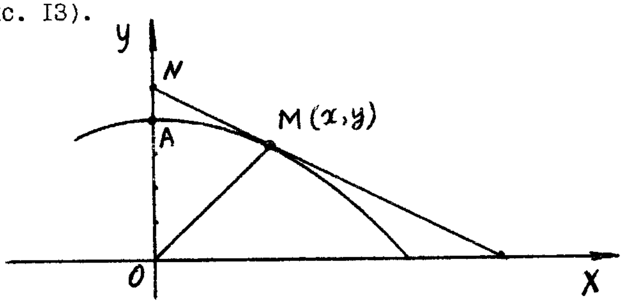


Рис. 13

Нехай рівняння кривої буде $y = f(x)$. Проведемо дотичну MN у довільній точці кривої M(x,y), N – точка перетину дотичної з віссю Oy. За умовою задачі ON = OM, де

$$OM = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Із рівняння дотичної $Y - y = y'(X - x)$, поклавши $X = 0$, знаходимо довжину сторони ON, $Y = ON = y - xy'$.

Оскільки за умовою ON = OM, то одержуємо диференціальне рівняння, однорідне відносно змінних x і y:

$$\sqrt{x^2+y^2} = y - xy'.$$

Поклавши y=Ux дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\sqrt{x^2+u^2x^2} = ux - x(u'x+u), \quad \sqrt{1+u^2} = -u'x.$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{dx}{x},$$

Звідки: $\ln|u+\sqrt{1+u^2}| = \ln C - \ln|x|.$

Замість U підставимо y/x і дістанемо $x^2 = C(C-2y)$.

Для знаходження сталої C використаємо початкову умову y=1, якщо x=0. Тоді маємо рівняння $0 = C(C-2)$. Звідси знаходимо $C_1=0$, $C_2 = 2$. Із двох значень C ($C_1 = 0$, $C_2 = 2$) умові задачі задовольняє лише $C_2 = 2$ (при $C_1 = 0$ крива співпадає з віссю Oy). Таким чином, шукана крива $y = f(x)$ є параболою $y = 1 - 1/4x^2$.

Відповідь: $y = 1 - 1/4x^2$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти розв'язки рівнянь:

1. $y' = y^2/x^2 - 2$.
2. $(x - y)dx + xdy = 0$.
3. $xdy/dx = y\ln y/x$, $y(1) = 1$.
4. $xdy = (y+\sqrt{x^2+y^2})dx.$
5. $y^2 + x^2y' = xyy'$, $y(3) = 4$.
6. $(\sqrt{xy}-x)dy - ydx = 0, \; y(1)=1.$
7. $(y+\sqrt{x^2-y^2})dx - xdy = 0.$
8. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.
9. $2xydy - (y^2-x^2)dy = 0$, $y(1) = 1$.
10. $(xye^{x/y} + y^2)dx - x^2e^{x/y}dy = 0$.
11. $(x - y\cos y/x)dx - x^2e^{x/y}dy = 0$.
12. $(3x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$, $y(1) = 2$
13. $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, \; y(1)=1.$

Розв'язати задачі:

14. Знайти криву, що має таку властивість: відстань будь-

якої дотичної до початку координат дорівнює абсцисі точки дотику.

15. Визначити криву, знаючи, що піднормаль будь-якої точки кривої – середнє арифметичне між координатами точки.

16. Знайти форму дзеркала, що відбиває всі промені, які виходять з однієї точки O, рівнобіжно даному напрямку.

17. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

18. Дві рідини X, Y піддають дистилюванню. Відомо, що в будь-який момент цього процесу відношення кількостей рідин, які перетворюються в пару, пропорціональне відношенню кількостей, які знаходяться ще в рідинному стані. Визначити залежність між X та Y.

Відповіді:

1. $y - 2x = Cx^2(y + x)$.
2. $xe^{y/x} = C$, $x = 0$.
3. $y = xe^{Cx+1}$, $y = xe^{1-x}$.
4. $Cx^2 = y + \sqrt{x^2+y^2}$.
5. $y=4e^{(3y-4x)/3x}$.
6. $\ln|y| = 2\left(1-\sqrt{x/y}\right)$.
7. $\arcsin(\frac{y}{x}) - \ln x = C$.
8. $y = xe^{Cx}$.
9. $x^2 + y^2 = Cx$, $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
10. $\ln|x| + e^{x/y} = C$.
11. $Cx = e^{-\sin(y/x)}$.
12. $xy^2 - x^3 = C$, $xy^2 - x^3 = 1$.
13. $2\sqrt{xy} - y = 1$
14. $x^2+y^2 = Cx$. Вказівка: скористатися рівнянням дотичної у нормальному вигляді: $\frac{xy'-y}{\sqrt{(y')^2+1}} + \frac{y_0 - x_0y'}{\sqrt{(y')^2+1}} = 0$.
15. $(x - y)^2(x + 2y) = C$.
16. $y^2 = C^2 + 2Cx$.
17. $y = Ce^{x/y}$.
18. $y = Cx^k$.

Рекомендована література

[1] Гл. XIII, § 5; [2] § 1.3; [6] § 3.5.

Завдання для самоперевірки та систематизації знань

1. Якою підстановкою однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними ?

2. Які лінії є ізоклінами однорідного рівняння ?

3. Чи може ізокліна однорідного рівняння бути інтегральною кривою ?

4. При яких α і β рівняння $y'=ay^{\alpha}+bx^{\beta}$ зводиться до однорідного за допомогою підстановки $y=z^m$?

5. Дослідити розв'язки однорідного рівняння у випадку, коли $\varphi(u)-u\equiv 0$ (дивитись п.2.3).

6. Рівняння $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$ підстановкою $y=z^m$ звести до однорідного.

7. При якому співвідношенні між коефіцієнтами a_1, b_1, a_2, b_2 рівняння

$$y'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

зводиться заміною $x=u+\alpha, y=v+\beta$, де α,β - сталі, до однорідного ?

2.4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ

Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається лінійним, якщо воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y', тобто має вигляд

$$y'+P(x)y=Q(x). \qquad (2.7_1)$$

Вважаємо, що функції $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні при $a < x < b$

Наприклад, рівняння $y'+y\sin x=x^2$, $y'+xy=0$ є лінійними.

Рівняння $y'+xy^2=\cos x$, $(y')^2+xy=x^3$ не є лінійними (чому ?).

Якщо права частина $Q(x)$ рівняння (2.7_1) не дорівнює тотожно нулю, то це рівняння називається лінійним неоднорідним рівнянням. Якщо ж $Q(x)\equiv 0$, то рівняння $y'+P(x)=0$ називається лінійним однорідним рівнянням.

Розглянемо методи розв'язування лінійних рівнянь.

Метод Лагранжа. Розглянемо лінійне однорідне рівняння $y'+P(x)y=0$ -відповідне неоднорідному рівнянню (2.7_1). Наприклад, рівняння $y'+y\sin x=0$ буде відповідним лінійним однорідним рівнянням неоднорідному $y'+y\sin x = x^2$.

Рівняння $y'+P(x)y=0$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв'язок.

$dy/dx = -P(x)y$; $dy/y = -P(x)dx$;

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|, \quad y = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{2.8}$$

де С-довільна постійна і $C \neq 0$.

Розв'язок (2.8) є загальним розв'язком однорідного рівняння. А загальний розв'язок неоднорідного рівняння(2.7_1) шукаємо методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).Тобто загальний розв'язок рівняння (2.7_1) має той же вигляд (2.8), що і однорідного, але замість довільної сталої розглядається функція С(х), тобто вважається, що загальний розв'язок рівняння (2.7_1) має вигляд:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{2.9}$$

Знайдемо функцію С(х). Для цього вираз (2.9) підставляємо у рівняння (2.7_1)

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx},$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

Отже, функція С(х) знаходиться із рівняння

$$C'(x) = Q(x)\,e^{\int P(x)dx}.$$

Звідси, зінтегрувавши рівняння, знаходимо функцію С(х).

Тоді загальний розв'язок (2.9) набуває вигляду

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right). \tag{2.10}$$

Дійсно, вираз (2.10) є розв'язком рівняння (2.7_1) при довільному С. Це випливає із попередніх перетворень. Можна показати, що довільний розв'язок рівняння (2.7_1) можна записати у вигляді (2.10) при деякому значенні сталої С.

<u>Зауваження</u>. Перепишемо розв'язок (2.10) у вигляді

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Тоді можна зробити висновок, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює сумі двох доданків, з яких перший доданок $Ce^{-\int P(x)dx}$ є загальним розв'язком відповідного однорідного лінійного рівняння, а другий доданок є частинним розв'язком даного неоднорідного рівняння (одержуємо з (2.10) при C = 0).

<u>Метод Бернуллі</u>. Розв'язок рівняння (2.7$_1$) шукаємо у вигляді добутку двох функцій, тобто

$$y = U(x)*V(x) \qquad (2.11)$$

В результаті розв'язування рівняння (2.7$_1$) зводиться до розв'язування двох рівнянь з відокремлюваними змінними відносно функцій U(x) і V(x).

Підставимо вираз (2.11) у рівняння (2.7$_1$):

$y' = U'V + UV', \quad U'V + UV' + PUV = Q.$

У лівій частині останнього рівняння згрупуємо перший і третій доданки або другий і третій. Виносимо спільний множник за дужки.

$$VdU/dx + U(dV/dx + PV) = Q.$$

Вибираємо функцію V(x) так, щоб вираз в дужках перетворювався в нуль: $\frac{dV}{dx} + PV = 0.$

Це рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо V(x)

$$\frac{dV}{V} = - P(x)dx.$$

Зінтегрувавши рівняння, одержуємо $\ln|V| = -\int P(x)dx + C$,

або $|V| = e^{-\int P(x)dx + C}$, $V = \pm e^{-\int P(x)dx + C}$.

Вибираємо найпростіший вигляд функції V(x); тобто покладемо

$$V = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляємо V(x) у (2.12) і одержуємо

$$\frac{du}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Це теж рівняння з відокремлюваними змінними. Звідси знайдемо функцію U(x)

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \quad u(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Отже, функції $U(x)$ і $V(x)$ знайдено, перемноживши їх, одержимо розв'язок рівняння (2.7)

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right).$$

Одержаний розв'язок співпадає з розв'язком (2.10), який був знайдений методом Лагранжа.

Зауваження. При інтегруванні лінійного рівняння (2.7) можна користуватися формулою загального розв'язку (2.10), але доцільніше загальний розв'язок знаходити, користуючись методом Лагранжа або методом Бернуллі.

2.4.1. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Зустрічаються рівняння, які не є лінійними, але які відповідними перетвореннями можуть бути зведені до лінійних. Розглянемо одне з таких рівнянь.

Рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$

де $n \neq 0$, $n \neq 1$, називається рівнянням Бернуллі. Якщо $n = 0$ або $n = 1$, то це рівняння лінійне.

Розділимо обидві частини на y^n:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

Зробимо заміну $z = y^{1-n}$ $(n = 1)$. Знаходимо похідну z', $z' = (1 - n)y^{-n}y'$. Звідси одержуємо

$$y^{-n}y' = z'/(1 - n).$$

Отже рівняння Бернулі в результаті заміни набуває вигляду

$$z'/(1 - n) + P(x)z = Q(x)$$

або

$$z' + (1 - n)P(x)z = (1 - n)Q(x).$$

Одержане рівняння є лінійним відносно z

В області, де $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні, воно інтегрується в квадратурах. Знайшовши розв'язок відносно z, враховуючи підстановку $z = y^{1-n}$, знаходимо розв'язок рівняння Бернуллі.

Зауваження. 1. Рівняння Бернуллі можна не зводити до лінійного, а розв'язувати за допомогою підстановки $y = uv$

2. Якщо $n>0$, то до одержаного розв'язку треба приєднати і розв'язок $y = 0$ (чому цей розв'язок втрачається, коли застосовується вказаний метод?).

Алгоритми розв'язування лінійного диференціального рівняння

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

I. Метод Бернуллі

1. Застосувати підстановку

$$y = U(x)V(x) \qquad (2)$$

2. Знайти похідну функції $y(x)$, тобто

$$y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x) \qquad (3)$$

3. Перетворити лінійне рівняння (I), підставивши в нього вирази (2) і (3). Дістати рівняння:

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) + P(x)U(x)V(x) = Q(x). \qquad (4)$$

4. Згрупувати перший та третій (або другий та третій) доданки рівняння (4).

Тобто одержати перетворене рівняння:

$$[U'(x)V(x) + P(x)U(x)V(x)] + U(x)V'(x) = Q(x) \qquad (5)$$

або:

$$U'(x)V(x) + [U(x)V'(x) + P(x)U(x)V(x)] = Q(x) \qquad (6)$$

5. Покласти:

$$U'(x)V(x) + P(x)U(x)V(x) = 0,$$

тобто

$$U'(x) + P(x)U(x) = 0. \qquad (7)$$

Або в другому випадку:

$$U(x)V'(x) + P(x)U(x)V(x) = 0,$$

тобто

$$V'(x) + P(x)V(x) = 0. \qquad (8)$$

Рівняння (7) і (8) - диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

6. Розв'язати рівняння (7) і (8), знайти функцію $U(X)$ (або функцію $V(x)$), поклавши сталу C рівну нулеві.

7. Знайти функцію $V(x)$, використавши рівняння (5), (або функцію $U(x)$, використавши рівняння (6)).

8. Записати загальний розв'язок рівняння (I), підставивши $U(x)$ і $V(x)$ у вираз (2).

9. Знайти значення довільної сталої C, якщо є початкова умова.

10. Записати відповідь.

2. Метод варіації сталої (Метод Лагранжа)

I. Дістати відповідне лінійне рівняння

$$y' + P(x)y = 0. \qquad (9)$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

2. Відокремити змінні рівняння (9).

3. Зінтегрувати рівняння (9). Дістати загальний розв'язок:

$$y_{oдн} = Ce^{-\int P(x)dx}. \qquad (10)$$

4. У рівнянні (10) покласти $C = C(x)$. Записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \qquad (11)$$

5. Знайти похідну y' розв'язку (11).

6. Підставити вирази y і y', одержані в пунктах 4 і 5, у рівняння (I). Дістати диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$.

$$C'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}. \qquad (12)$$

7. Зінтегрувати рівняння (12). Дістати функцію $C(x)$.

8. Підставити $C(x)$ у рівняння (11). Знайти загальний розв'язок рівняння (I).

9. Знайти значення довільної сталої C, якщо є початкова умова.

10. Записати відповідь.

Приклад 1. Знайти інтегральну криву рівняння $y' + xy = x^3$, яка проходить через точку $M(0;-2)$.

Це рівняння лінійне, тут $P(x) = x$, $Q(x) = x^3$.

I. Застосуємо підстановку $y = U(x)V(x)$.

2. Запишемо вираз для похідної $y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$.

3. Підставимо y і y' у вихідне рівняння

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) + xU(x)V(x) = x^3. \qquad (I)$$

Згрупуємо перший та третій доданки лівої частини, множник $V(x)$ виносимо за дужки

$$[U'(x) + U(x)x]V(x) + U(x)V'(x) = x^3. \qquad (2)$$

5. Вираз у квадратних дужках прирівнюємо до нуля

$$U'(x) + U(x) = 0.$$

6. Функцію $U(x)$ знаходимо з рівняння, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

$$dU/dx = -xU, \quad dU/U = -xdx,$$

Дістанемо $\ln|U(x)| = -x^2/2 + C$, $C = 0$, $U = e^{-x^2/2}$

7. Фунцію $U(x)$ підставимо у рівняння (2)
$U(x)V'(x) = x^3$. Тобто:

$$e^{-x^2/2}V'(x) = x^3.$$

Дістали рівняння з відокремлюваними змінними.

Відокремлюємо змінні.

$$dV(x) = x^3e^{x^2/2}dx.$$

Інтегруємо рівняння і знаходимо функцію $V(x)$.

$$V(x) = x^2e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C.$$

8. Записуємо загальний розв'язок даного рівняння:

$$y = U(x)V(x) = e^{-x^2/2}(x^2e^{x^2/2} - 2e^{x^2/2} + C) = Ce^{-x^2/2} + x^2 - 2.$$

9. Використаємо початкову умову:

$$y(0) = -2, \quad -2 = -2 + C, \text{ або } C = 0.$$

Відповідь: $y = x^2 - 2$. #

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y' = y\,tgx + \cos x.$$

Запишемо рівняння у вигляді:

$$y' - y\,tgx = \cos x.$$

Це лінійне рівняння. $P(x) = -tgx$, $Q(x) = \cos x$. Застосуємо метод варіації довільної сталої. Розглянемо відповідне лінійне однорідне рівняння: $y' - y\,tgx = 0$. Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і інтегруємо.

$$\frac{dy}{dx} = tgxdx, \qquad \int\frac{dy}{y} = \int tg\,x\,dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln C, \text{ або } y = \frac{C}{\cos x} \qquad (2)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (I) шукаємо у такому ж вигляді, але сталу C замінимо функцією $C(x)$. Тоді $y = \frac{C(x)}{\cos x}$.
Щоб знайти $C(x)$, підставимо $y = \frac{C(x)}{\cos x}$ у рівняння (I). З цією метою знаходимо y':

$$y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

Функції y і y' підставимо у рівняння (I):

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{C(x)}{\cos x}\operatorname{tg}x + \cos x, \text{ або } \frac{C'(x)}{\cos x} = \cos x$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо рівняння $dC = \cos^2 x dx$.
Звідси одержуємо $C(x)=\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

Отже, загальний розв'язок рівняння (I) має вигляд:

$$y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C)*\frac{1}{\cos x}$$

Відповідь: $y = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C)*\frac{1}{\cos x}$. #

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = axy^2.$$

Запишемо дане рівняння у вигляді:

$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x^2}*y = \frac{ax}{1-x^2}*y^2$. Це рівняння Бернуллі.

Поділимо обидві частини на y^n,тобто на $y^2 \neq 0$. Дістанемо:

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1-x^2}*y^{-1} = \frac{ax}{1-x^2}$$

Зробимо заміну $z = y^{1-n} = y^{-1}$,

$\frac{dz}{dx} = y^{-2}\frac{dy}{dx}$ перетворюємо це рівняння у лінійне:

$$\frac{dz}{dx} + \frac{x}{1-x^2}z = -\frac{ax}{1-x^2}.$$

Розв'яжемо його за допомогою підстановки $z = U(X)V(x)$

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) + \frac{x}{1-x^2}U(x)V(x) = -\frac{ax}{1-x^2},$$

$$[U'(x)V(x) + \frac{x}{1-x^2}U(x)V(x)] + U(x)V'(x) = -\frac{ax}{1-x^2}.$$

Знайдемо функцію $U(x)$

$$U'(x) + \frac{x}{1-x^2}U(x) = 0,$$

$$\frac{dU(x)}{U(x)} = -\frac{x}{1-x^2}dx.$$

Розв'язавши це рівняння, дістанемо $u(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Далі знаходимо функцію V(x). З цією метою розв'язуємо рівняння

$$\sqrt{1-x^2}\cdot V'(x) = -\frac{dx}{1-x^2}, \quad V(x) = c - \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тоді:

$$z = u(x)\cdot V(x) = \sqrt{1-x^2}\left(c - \frac{a}{\sqrt{1-x^2}}\right) = c\sqrt{1-x^2} - a.$$

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{c\sqrt{1-x^2}-a}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{c\sqrt{1-x^2}-a}$. #

Приклад 4. Зінтегрувати диференціальне рівняння:

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$$

Розділимо обидві частини рівняння на 3x і одержимо:

$$y' - \frac{2}{3x}y = \frac{x^2}{3y^2}$$

або

$$y' - \frac{2}{3x}y = \frac{x^2}{3}*y^{-2}.$$

Це рівняння Бернуллі.

Застосуємо підстановку: $y = U(x)V(x)$

$$y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$$

$$U'(x)V(x) + U(x)V'(x) - 2/3xU(x)V(x) = x^2/(3U^2(x)V^2(x)).$$

$$U'(x)V(x) + U(x)[V'(x) - 2/3xV(x)] = x^2/(3U^2(x)V^2(x)).$$

$$V'(x) - 2/3xV(x) = 0. \qquad dV(x)/dx = 2V/3x.$$

Дістанемо: $V(x) = x^{2/3}$.

Знайдемо функцію U(x).

З цією метою функцію V(x) підставимо в (I).

$$U'(x)x^{2/3} = x^2/(3U^2(x)x^{4/3}),$$

$$dU/dx\ x^{2/3} = x^{2/3}/(3U^2(x)),$$

або

$$3U^2(x)dU = dx,$$

$$U^3(x) = x + C, \qquad U(x) = (x + C)^{1/3}$$

Отже: $y = (x + C)^{1/3}*x^{2/3}$,

або

$$y^3 = x^3 + Cx^2$$

Відповідь: $y^3 = x^3 + Cx^2$. #

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння.

1. $y' + y/x = x^2$.
2. $dy = (x^2 + 2x - 2y)dx$.
3. $dy/dx - y = 2x - x^3$.
4. $dy/dx - y = x - 1$, $M(0,1)$.
5. $y' - y\,ctgx = 2x - x^2 ctgx$.
6. $dy/dx + 3y = x^2 - 1$.
7. $y' + 2y = x^3$.
8. $y' - 2/xy = (x + 1)/x$
9. $y' = 2y + e^x - x$, $\quad y(0) = 1/4$.
10. $y' = y/2y\ln y + y - x$; $\quad y(1) = 1$.
11. $dy/dx + y\cos x = \sin x\cos x$.
12. $y' + y = \sin x + \cos x$.
13. $x\ln x\, dy/dx + y = 2\ln x$, $\quad M(1,0)$.
14. $y' + y\,tgx = x\cos^2 x$, $\quad M(0,1)$.
15. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.
16. $y' + xy/(1 - x^3) = xy^{1/2}$.
17. $x\,dy/dx + y = y^2\ln x$, $\quad M(1,1)$.
18. $y' + 2y/x = 2y^{1/2}/\cos^2 x$.
19. $\cos x\, dy/dx - y\sin x = y^4$.
20. $y' - y\,tgx = -y^2\cos x$.

Відповіді:

1. $y = 1/4x^3 + C/x$.
2. $y = Ce^{-2x} + 1/4(2x^2 + 2x - 1)$.
3. $y = Ce^x + x^2$.
4. $y = Ce^x - x$, $\quad y = e^x - x$.
5. $y = C\sin x + x^2$.
6. $y = Ce^{-3x} + 1/27(9x^2 - 6x + 11)$
7. $y = Ce^{-2x} + 1/8(4x^3 - 6x^2 + 6x - 3)$.
8. $y = Cx^2 - (2x + 1)/2$
9. $y = e^{2x} - e^x + 1/2x + 1/4$.
10. $x = y\ln y + 1/y$.
11. $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.
12. $y = Ce^{-x} + \sin x$.
13. $y = C/\ln x + \ln x$, $y = \ln x - 1/\ln x$
14. $y = C\cos x + \cos x(x\sin x + \cos x)$, $\quad y = x/2\sin 2x + \cos^2 x$.
15. $y = ce^{-\sin x} + xe^{-\sin x}$.
16. $y^{1/2} = C(1 - x^2)^{1/4} + (1 - x^3)/3$.
17. $y(Cx + \ln x + 1) = 1$.
18. $y^{1/2} = C/x + (\ln\cos x)/x + tgx$.
19. $y^3 = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x$.
20. $y(x + C) = \sec x$.

Рекомендована література

[1] Гл.XIII, §7, §8;   [2] §1.3;   [6] §3.3.

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

I. Нехай відомий ненульовий частинний розв'язок y_1, лінійного однорідного диференціального рівняння. Знайдіть загальний розв'язок цього рівняння.

2. Сформулюйте умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння.

3. Вкажіть інтервали зміни x, де існує розв'язок лінійного рівняння.

4. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного рівняння, якщо відомі частинний розв'язок y_1 цього рівняння і загальний розв'язок y_2 відповідного однорідного рівняння?

5. Знайдіть загальний розв'язок лінійного рівняння, якщо відомі два його частинних розв'язки y_1 і y_2.

6. Доведіть, що лінійне рівняння залишається лінійним при заміні незалежної змінної.

7. Доведіть, що лінійне рівняння (2.7) при перетворенні $y=\alpha(x)z+\beta(x)$, де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - неперервно диференційовні функції, залишається лінійним відносно функції $z(x)$.

8. Загальний розв'язок (2.10) лінійного рівняння (2.7) можна подати у вигляді $y = A(x)C + B(x)$, де C - довільна стала. Доведіть, що диференціальним рівнянням будь-якої сім'ї кривих $y=A(x)C+B(X)$ є лінійне рівняння.

9. Розв'яжіть рівняння $y' = y/x + x$. Побудуйте інтегральні криві, що проходять через точки $M_1(1,0)$, $M_2(1,1)$, $M_3(1,2)$. Проведіть дотичні до інтегральних кривих у цих точках. Переконайтесь в тому, що ці дотичні перетинаються у спільній точці.

10. Доведіть, що дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою $x = x_0$, перетинаються в одній точці або паралельні.

2.5. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Розглянемо диференціальну форму рівняння $y' = f(x,y)$:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.13)$$

В деяких випадках ліва частина рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ є повним диференціалом функції двох змінних $U(x,y)$ в деякій об- області D, тобто, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y)$. Тоді рівняння (2.13) зветься рівнянням в повних диференціалах в області D, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції. Отже, рівняння (2.13) запишеться у вигляді

$$dU(x,y) = 0.$$

Нехай функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ а також їх частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ неперервні в області D. В математичному аналізі доводиться, що для того, щоб вираз $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ був повним диференціалом, необхідно і достатньо, щоб в області D виконувалась умова

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (2.14)$$

<u>Приклад</u> 1. Рівняння $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах, бо виконується умова (2.14):

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2, \; \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2.$$

<u>Приклад</u> 2. Рівняння $(xy + y^4)dx + (x^2 - xy^3)dy = 0$ не є рівнянням в повних диференціалах, бо умова (2.14) не виконується:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy + y^4) = x + 4y^3; \; \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy^3) = 2x - y^3.$$

Якщо рівняння (2.13) можна записати у вигляді $dU(x,y) = 0$, то звідси випливає, що $U(x,y) = C$.

Якщо функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (2.13), то вона задовольняє рівняння $U(x,y) = C$ при деякому конкретному значенні C.

Справедливе і обернене твердження, якщо деяка функція $y(x)$ задовольняє рівняння $U(x,y) = C$ при деякому C, то вона є розв'язком рівняння (2.13) (довести самостійно).

Отже, співвідношення $U(x,y) = C$, де C - довільна стала, є загальним інтегралом рівняння (2.13) в області D.

Для знаходження функції U(x,y) скористаємось формулою із математичного аналізу (тема: інтегрування повного диференціала за допомогою криволінійного інтеграла)

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy .$$

Тоді загальний інтеграл рівняння (2.13) можна записати у вигляді

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \qquad (2.15)$$

або

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x,y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C. \qquad (2.16)$$

де x_0, y_0 - деякі фіксовані числа.

<u>Зауваження</u>. У випадку, коли ліва частина рівняння (2.13) не є повним диференціалом, інколи множення рівняння на функцію $m(x,y)$ дозволяє одержати рівняння $m(x,y)M(x,y)dx + m(x,y)N(x,y)dy = 0$ в повних диференціалах (дивитись [4,7]).

<u>Алгоритм розв'язування рівняння в повних диференціалах</u>

Розглянемо рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \qquad (1)$$

Для його розв'язання необхідно.

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$. Якщо виконується тотожність $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, то перейти до пункту 2, якщо ні - застосувати інші методи інтегрування.

2. Рівняння $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$ зінтегрувати по змінній x, вважаючи y сталою, а сталу інтегрування позначити $\varphi(y)$

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (2)$$

3. Знайти функцію $\varphi(y)$. Для цього вираз (2) підставити у рівняння $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$.

4. Підставити функцію $\varphi(y)$ у вираз (2). Одержане співвідношення $U(x,y) = C$ є загальним інтегралом рівняння (1).

5. Розв'язати задачу Коші, якщо є початкова умова.

6. Зробити аналіз розв'язку з урахуванням умов теореми Коші про існування та єдиність розв'язку.

7. Записати відповідь.

Зауваження. Загальний розв'язок рівняння (I) можна знаходити також за формулами (2.I5) або (2.I6).

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0. \qquad (I)$$

Нехай $M(x,y) = 2x + 3x^2y$, $N(x,y) = x^3 - 3y^2$.

Знайдемо $\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$. Оскільки $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$, то це рівняння в повних диференціалах.

Позначимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) = 2x + 3x^2y, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = x^3 - 3y^2. \qquad (3)$$

Зінтегруємо рівняння (2) по змінній x вважаючи y сталою, при цьому сталою інтегрування є функція $\varphi(y)$:

$$u(x,y) = \int(2x + 3x^2y)dx = x^2 + x^3y + \varphi(y). \qquad (4)$$

Підставляючи вираз (4) у рівняння (3) знайдемо функцію $\varphi(y)$.

Так як $\frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3y^2$, то одержимо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + x^3y + \varphi(y)\right) = x^3 + \varphi'(y), \quad x^3 + \varphi'(y) = x^3 - 3y^2,$$

або $\varphi'(y) = -3y^2$.

Звідси знаходимо функцію $\varphi(y)$: $\varphi(y) = -y^3 + C$.

Отже, $U(x,y) = x^2 + x^3y - y^3$, тоді загальний інтеграл рівняння (I) має вигляд: $x^2 + x^3y - y^3 = C$.

Зауваження. Загальний інтеграл рівняння (I) можна знайти іншим шляхом, використовуючи формулу (2.I5).

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}(2x + 3x^2y_0)dx + \int_{y_0}^{y}(x^3 - 3y^2)dy =$$

$$x^2 + x^3y - y^3 - x_0^2 - x_0^3y_0 + y_0^3, \quad x^2 + x^3y - y^3 - x_0^2 - x_0^3y_0 + y_0^3 = C_1,$$

або

$$x^2 + x^3y - y^3 = C, \text{ де } C = C_1 + x_0^2 + x_0^3y_0 + y_0^3.$$

Відповідь: $x^2 + x^3y - y^3 = C$. #

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$
2. $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0.$

3. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0.$

4. $(2x - y)dx - xdx = 0.$

5. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0.$

6. $(2x + e^{x/y})dx + (1 - x/y)e^{x/y}dy = 0.$

7. $\dfrac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0,$ $\quad y(0) = 1.$

8. $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{(y^2-3x^2)dy}{y^4} = 0,$ $\quad y(1) = 1.$

9. $\sin xydx + \cos xy(xydx + x^2dy) = 0.$

Відповіді:

1. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$
2. $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2y^2 + \dfrac{y^4}{4} = C.$
3. $(x + y)(x^2 - 7xy + y^2) = C.$
4. $x^2 - xy = C.$
5. $x^2 + xy + y^2 = C.$
6. $x^2 + ye^{x/y} = C.$
7. $\ln|x + y| - \dfrac{y}{x+y} = 0.$
8. $y = x.$
9. $x\sin xy = C.$

Рекомендована література

[1], Гл. XIII, §9; [2], §1.3; [6], §3.3.

Завдання для самоперевірки та систематизації знань

1. Довести, що коли функція y(x) є розв'язком рівняння (2.13), то вона задовольняє неявному рівнянню U(x,y) = C при деякому значенні довільної сталої. U(x,y) - функція, повним диференціалом якої є ліва частина рівняння (2.13).

2. Нехай U(x,y) - функція, означена у попередньому завданні. Довести, що функція y(x), яка задовольняє рівняння U(x,y) = C при деякому C, є розв'язком рівняння (2.13).

3. Сформулюйте необхідну умову того, щоб рівняння (2.13) було рівнянням в повних диференціалах.

4. Запишіть загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах.

5. Сформулюйте достатню умову того, щоб рівняння (2.13) було рівнянням в повних диференціалах.

Розділ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

3.I. Загальні поняття

Нагадаємо, що диференціальним рівнянням n-го порядку називається співвідношення вигляду

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0, \qquad (3.1)$$

де x - незалежна змінна, $x \in (a,b)$, $y(x)$ - шукана функція, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ - похідні шуканої функції.

Наприклад, рівняннями вищих порядків є:

$y'' + (y')^3 + \sin x = 0$ - рівняння другого порядку,

$(y'''')^2 + x^3y'' - (y')^5 = 0$ - рівняння четвертого порядку.

Функція $y=\varphi(x)$, яка має похідну n-го порядку, називається розв'язком рівняння (3.I), якщо при підстановці її в рівняння (3.I) вона перетворює його у тотожність, тобто

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

Наприклад, функція $y = x^3$ є розв'язком рівняння

$x^3y''' - x^2y'' - xy' + 3y = 0, \qquad x^3 6 - x^2 6x - x 3x^2 + 3x^3 = 0.$

Як і диференціальні рівняння першого порядку, рівняння (3.I) має нескінченну множину розв'язків, яку можна записати у вигляді загального розв'зку.

Функція $y = \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$, де $C_1,C_2,\ldots,C_n$ - довільні сталі, називається загальним розв'язком рівняння в області D, якщо:

1. При довільних значеннях $C_1,C_2,\ldots,C_n$ функція $y = \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ є розв'язком рівняння (3.I).

2. Довільний розв'язок рівняння, який лежить в області D, може бути записаний у вигляді $y = \varphi(x,C_1^*,C_2^*,\ldots,C_n^*)$, де $C_1^*,C_2^*,\ldots,C_n^*$ довільні константи, що відповідають розв'язку.

Розв'язок $y = \varphi(x,C_1^*,C_2^*,\ldots,C_n^*)$, тобто розв'язок, одержаний із загального при конкретних значеннях $C_1,C_2,\ldots,C_n$, називається частинним розв'язком рівняння (3.I).

Якщо загальний розв'язок $y = \varphi(x,C_1,C_2,\ldots,C_n)$ рівняння в області D задано співвідношенням $\Phi(x,y(x),C_1,C_2,\ldots,C_n)=0$, то останнє називається загальним інтегралом.

Частинний розв'язок (або інтеграл) одержується із загального розв'язку (інтеграла) шляхом задання додаткових умов, які для рів-

няння n-го порядку мають вигляд:
$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$
Отже, і для рівняння n-го порядку можна розглядати задачу Коші, яка формулюється так:

Знайти розв'язок рівняння

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0, \qquad (3.I)$$

який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (3.2)$$

Якщо початковим умовам (3.2) відповідає єдиний розв'язок рівняння (3.I), то значення параматрів $C_I, C_2, \ldots, C_n$ знаходяться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Приклад I. # Функція $y = x^4/24 + C_I x^2 + C_2 x + C_3$ є загальним розв'язком рівняння $y''' = x$ (пізніше будуть розглянуті деякі методи розв'язування рівнянь). Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння за даними початковими умовами: $y(1) = 25/24$, $y'(1) = -5/6$, $y''(1) = 5/2$.

Використовуємо початкові умови. Для цього знаходимо першу та другу похідні загального розв'язку.

$y' = x^3/6 + 2C_I x + C_2$, $y'' = x^2/2 + 2C_1$. Підставивши $x = 1$ у вирази для $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, дістанемо систему рівнянь для визначення сталих $C_I, C_2, \ldots, C_n$:

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1,$$
$$2C_1 + C_2 = -1,$$
$$2C_1 = 2.$$

Звідси знаходимо $C_1 = 1$, $C_2 = -3$, $C_3 = 3$.
Отже, маємо розв'язок задачі Коші

$$y = x^4/24 + x^2 - 3x + 3. \qquad (I)$$

Якщо задати початкові умови $y(1) = 25/24$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$, то одержимо частинний розв'язок

$$y = x^4/24 + 3x^2/4 + x/12 + 1/6. \qquad (2)$$

Інтегральні криві (I) і (2) проходять через одну і ту ж точку (I;25/24). Чи порушуються умови єдиності розв'язку? Які пояснення тут можуть бути? #

Щоб дати відповіді на останні запитання, сформулюємо теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Розглянемо той випадок рівняння (3.1), коли воно розв'язане відносно старшої похідної $y^{(n)}(x)$:

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}). \qquad (3.3)$$

Теорема Коші.

Якщо функція f від $n + 1$ змінної рівняння (3.3) неперервна в замкнутому околі точки $(x_0,y_0,y_1,y_2,\dots,y_{n-1})$ і має там обмежені частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то існує єдиний розв'язок задачі (3.3)-(3.2), визначений в деякому околі точки x_0.

\# Звернемось до попереднього прикладу. Задамо нові початкові умови $y(1) = 25/24$, $y'(1) = -5/6$, $y''(1) = 2$. Одержимо частинний розв'язок рівняння $y''' = x$, який задовольняє ці умови,

$$y = x^4/24 + 3x^2/4 - 5x/2 + 11/4 \qquad (3)$$

Ця інтегральна крива теж проходить через точку (1;25/24).

Отже, через вказану точку площини XOY проходить безліч інтегральних кривих рівняння. Чи не порушуються умови теореми Коші? Ні, тому що умова єдиності розв'язку рівняння n-го порядку (у даному випадку третього порядку) відрізняється від умови існування та єдиності розв'язку рівняння першого порядку. Якщо, наприклад, розглядати рівняння $y''' = x$, то різними вважаються інтегральні криві, які мають в точці (x_0,y_0) різну кривину. Інтегральні криві можуть проходити через одну точку (наприклад, через точку (1;25/24)), мати спільну дотичну (наприклад, кутовий коефіцієнт $k = = y'(1) = -5/6$, для інтегральних кривих (I) і (3)), але відрізнятимуться кривиною. Так, радіуси кривини (обчислюються за формулою $R = (1 + (y')^2)^{3/2}/|y''|$) інтегральних кривих (I) і (3) в точці (1;25/24) різні (чому?), отже, ці інтегральні криві різні. #

Задача інтегрування диференціальних рівнянь вищих порядків більш складна, ніж задача інтегрування рівнянь першого порядку. Розглянемо метод розв'язування рівнянь n-го порядку - зниження порядку. Лінійні рівняння n-го порядку розглядатимуться окремо (див. п. 3.3).

3.2. Рівняння, які допускають зниження порядку

Метод зниження порядку рівнянь полягає у зведенні диференціального рівняння n-го порядку до рівняння нижчого порядку шляхом заміни змінних даного рівняння.

3.2.I. Рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$

Оскільки $y^{(n)} = dy^{(n-1)}/dx$, то дане рівняння можна переписати у вигляді $dy^{(n-1)} = f(x)dx$.

Звідси, інтегруючи ліву і праву частини, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Це рівняння (n-I)-го порядку. Знову знижуємо порядок шляхом інтегрування:

$y^{(n-1)} = dy^{(n-2)}/dx$, $\quad d(y^{(n-2)}) = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx$

Інтегруючи, дістанемо рівняння (n-2)-го порядку

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Продовжуючи цей процес, дістанемо

$$y = \underbrace{\int\cdots\int}_{n} f(x)\underbrace{dx\ldots dx}_{n} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \quad (3.4)$$

Розв'язок (3.4) буде загальним в області, де функція $f(x)$ є неперервною.

3.2.2. Рівняння вигляду $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)}) = 0$.

Рівняння не містить у явному вигляді шукану функцію $y(x)$ та її похідні до (k-I)-го порядку.

Шляхом заміни змінної $y^{(k)} = z$ порядок рівняння знижується на k одиниць. Дійсно, $z' = y^{(k+1)}$, $z'' = y^{(k+2)}$, ..., $z^{(n-k)} = y^{(n)}$. Тоді рівняння набуває вигляду

$$F(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)}) = 0.$$

Це рівняння (n-k)-го порядку відносно шуканої функції $z(x)$. Нехай його загальний розв'язок має вигляд $z=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, де $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$ -довільні сталі, то одержимо диференціальне рівняння відносно функції $y(x)$.

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$$

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

<u>Зауваження</u>. Розглянемо частинний випадок рівняння при $n = 2$

$$F(x,y',y'')=0.$$

Це рівняння не містить у явному вигляді шукану функцію y. Заміною $z = y'(x)$ воно зводиться до рівняння першого порядку

$$F(x,z,z') = 0.$$

3.2.3. Рівняння вигляду $F(y,y',y'') = 0$

Рівняння не містить явно незалежну змінну.

Наприклад, рівняння $y'' = y' + y^2$. Порядок рівняння можна знизити на одиницю заміною $y' = z(y)$, тобто, вважати, що нова функція залежить від y, і ця змінна є незалежною.

Перетворимо похідну y'':

$$y'' = dy'/dx = (dy'/dy)(dy/dx) = (dz/dy)z.$$

Отже, при розв'язуванні рівняння використовуємо дві формули

$$y' = z \quad \text{і} \quad y'' = z(dz/dy).$$

Тоді дане рівняння набуває вигляду

$$F(y,z(y),z(y)dz(y)/dy) = 0.$$

Дістали рівняння першого порядку відносно функції $z(y)$. Нехай $\Phi(y,z,C_1) = 0$ – загальний інтеграл рівняння. Тоді шукану функцію $y(x)$ знаходимо, інтегруючи рівняння першого порядку $\Phi(y,z,C_1) = 0$.

Зауваження. Диференціальне рівняння $F(y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ заміною $z(y) = y'$ зводиться до рівняння (n-I)-го порядку.

Алгоритм розв'язування диференціального рівняння

$$y^{(n)} = f(x) \tag{1}$$

I. Записати рівняння (I) у вигляді:

$$d(d^{(n-1)}y/dx^{n-1})/dx = f(x) \tag{2}$$

2. Домножити обидві частини на dx:

$$d(d^{(n-1)}y/dx^{n-1}) = f(x)dx \tag{3}$$

3. Зінтегрувати рівняння (3).

Одержати рівняння (n-1)-го порядку:

$$\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx + C_1. \tag{4}$$

4. До рівняння (4) застосувати кроки I,2,3 алгоритму. Одержажати диференціальне рівняння (n-2)-го порядку:

$$\frac{d^{(n-2)}y}{dx^{n-2}} = \int\left(\int f(x)dx\right) + C_1x + C_2. \tag{5}$$

5. Застосувати до рівняння (5) (n-2) рази кроки I,2,3 алгоритму. Одержати загальний розв'язок рівняння (I):

$$y(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

який можна також записати у вигляді (3.4).

6. Знайти сталі $C_I, C_2, C_3, \ldots, C_n$, якщо задано початкові умови.

7. Записати відповідь.

ПРИКЛАД 2. Зінтегрувати рівняння

$$2\cos x (d^5y)/dx^5 = \sin 2x.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $2\cos x = 0$ дістанемо:

$$d^5y/dx^5 = \sin 2x/2\cos x = \sin x.$$

Запишемо це рівняння у вигляді:

$$d(d^4y/dx^4)/dx = \sin x.$$

Домножимо обидві частини рівняння на dx, дістанемо:

$$d(d^4y/dx^4) = \sin x dx.$$

Зінтегрувавши, дістанемо:

$$d^4y/dx^4 = -\cos x + C_1.$$

Звідки, застосувавши I-й, 2-й, 3-й кроки алгоритму, одержуємо:

$$d(d^3y/dx^3)/dx = -\cos x + C_1,$$

$$d(d^3y/dx^3) = (-\cos x + C_1)dx,$$

$$d^3y/dx^3 = -\sin x + C_1x + C_2.$$

Знову виконуємо ті ж самі операції.

$$d(d^2y/dx^2)/dx = -\sin x + C_1x + C_2,$$

$$d(d^2y/dx^2) = (-\sin x + C_1x + C_2)dx,$$

$$d^2y/dx^2 = \cos x + C_1x^2/2 + C_2x + C_3,$$

$$d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\cos x + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3\right)dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + \frac{C_1x^3}{6} + \frac{C_2x^2}{2} + C_3x + C_4$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = -\cos x + \frac{C_1x^4}{24} + \frac{C_2x^3}{6} + \frac{C_3x^2}{2} + C_4x + C_5.$$

Відповідь:

$$y = -\cos x + \frac{C_1 x^4}{24} + \frac{C_2 x^3}{6} + \frac{C_3 x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

#

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y''' = x, \text{ якщо } y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3.$$

Дане рівняння запишемо у вигляді

$\frac{d}{dx}(y') = x$, або $d(y'') = xdx$

Зінтегруємо це рівняння

$$\int d(y'') = \int x\,dx, \qquad y'' = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Далі $\frac{d}{dx}(y') = \frac{x^2}{2} + C_1$ або $\qquad d(y') = (\frac{x^2}{2} + C_1)dx.$

Зінтегруємо одержане рівняння.

$$y' = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \text{ або } dy = (\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2)dx.$$

Зінтегрувавши останнє рівняння, дістанемо загальний розв'язок:

$$y = \frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Знайдемо сталі C_I, C_2, C_3, використовуючи початкові умови.

$$y(0) = (0^4/24 + C_1 0^2/2 + C_2 0 + C_3) = 1, \quad C_3 = 1.$$
$$y'(0) = (0^3/6 + C_1 0 + C_2) = 2, \quad C_2 = 2.$$
$$y''(0) = (0^2/2 + C_1) = 3, \quad C_1 = 3.$$

Отже, $C_1 = 3$; $C_2 = 2$, $C_3 = 1$.

Підставивши значення C_I, C_2, C_3 у загальний розв'язок рівняння, дістанемо розв'язок задачі Коші.

$$y = \frac{x^4}{24} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1.$$

Відповідь: $\qquad y = \frac{x^4}{24} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1.$ #

Алгоритм розв'язування диференціального рівняння вигляду

$$F(x,y',y'') = 0 \qquad (1)$$

I. Покласти $y' = z(x)$.

Тоді $y'' = z'(x)$.

2. Записати рівняння (I) у вигляді:

$$F(x,z,z') = 0. \qquad (2)$$

3. Визначити тип диференціального рівняння (2).

4. Зінтегрувати рівняння (2).

Дістати розв'язок $z = \varphi(x, c_1)$.

5. Використати заміну $z = y' = \dfrac{dy}{dx}$, одержати рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, c_1) \qquad \text{або} \qquad dy = \varphi(x, c_1)dx. \qquad (3)$$

6. Зінтегрувати рівняння (3).

Дістати загальний розв'язок рівняння (I).

7. Розв'язати задачу Коші, якщо є початкові умови.

8. Записати відповідь.

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння $y''(x^2+1) = 2xy'$, якщо

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

#Покладемо: $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння:

$$z'(x^2 + 1) = 2xz.$$

Це рівняння першого порядку, яке допускає відокремлення змінних. Відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{1+x^2}dx.$$

Одержуємо: $\ln|z| = \ln|x^2+1| + \ln|C_1|$ або $z = C_1(x^2 + 1)$.

Але $z = y' = dy/dx$. Тоді $dy/dx = C_1(x^2 + 1)$

або $dy = C_1(x^2 + 1)dx$.

Зінтегрувавши останнє рівняння, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1(x^3/3 + x) + C_2.$$

Виберемо сталі так, щоб виконувалися початкові умови.

$y(0) = C_1(0^3/3 + 0) + C_2 = 1,$ $\qquad C_2 = 1.$

$y'(0) = C_1(0^2 + 1) = 3,$ $\qquad C_3 = 3.$

Отже, $C_1 = 3$, $C_2 = 1$.

Тоді розв'язок задачі Коші даного рівняння має вигляд:

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

Відповідь: $y = x^3 + 3x + 1.$ #

Алгоритм розв'язування диференціального рівняння вигляду

$$F(y,y',y'') = 0. \qquad (1)$$

I. Покласти $y' = z(y)$

Тоді $y'' = z(dz/dy)$.

2. Записати рівняння (I) у вигляді:

$$F(y,z(y),z(dz/dy)) = 0. \qquad (2)$$

3. Визначити тип диференціального рівняння (2).

4. Зінтегрувати рівняння (2).

Дістати $z = \varphi(y, C_1)$.

5. Використати заміну $z = y' = dy/dx$, дістати рівняння:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1). \qquad (3)$$

6. Зінтегрувати рівняння (3). Одержати загальний розв'язок рівняння (I). $\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$.

7. Якщо є початкові умови, знайти значення сталих C_1 і C_2, тобто розв'язати задачу Коші.

8. Записати відповідь.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y''y^3 + 1 = 0, \qquad y(1) = y'(1) = 1.$$

Покладемо $y' = z(y)$. Тоді $y'' = zz'$.

Дістанемо рівняння: $zz'y^3 + 1 = 0$.

Це рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Відокремлюємо змінні і інтегруємо рівняння.

$$\int z\,dz = -\int \frac{1}{y^3}\,dy,$$

$z^2/2 = 1/2y^2 + C_1/2$, тобто $z^2 = 1/y^2 + C_1$.

Але $z = y'$, отже, $(y')^2 = 1/y^2 + C_1$.

Зручно знайти сталу C_1, використавши початкову умову $y'(1)=1$. $1 = 1/1 + C_1$. Отже, $C_1 = 0$. Тоді $(y')^2 = 1/y^2$. Звідси знаходимо $y' = \pm 1/y$. Це диференціальне рівняння першого порядку.

Відокремлюємо змінні і інтегруємо:

$\int y dy = \pm \int dx$, $\quad y^2/2 = C_2 \pm x$, $y^2 = 2C_2 \pm 2x$.

Або а) $y^2 = 2C_2 + 2x$ і б) $y^2 = 2C_2 - 2x$. Знайдемо довільну сталу C_2, використовуючи умову $y'(1) = 1$. а) $1 = 2C_2 + 1$. Звідси $C_2 = -1/2$. б) $1 = 2C_2 - 2$. Звідси $C_2 = 3/2$.

Запишемо частинний розв'язок рівняння:

а) $y^2 = 2x - 1$ і б) $y^2 = 3 - 2x$. На рис.І4 показано графіки розв'язків рівняння. Звертаємо увагу на те, що інтегральні криві

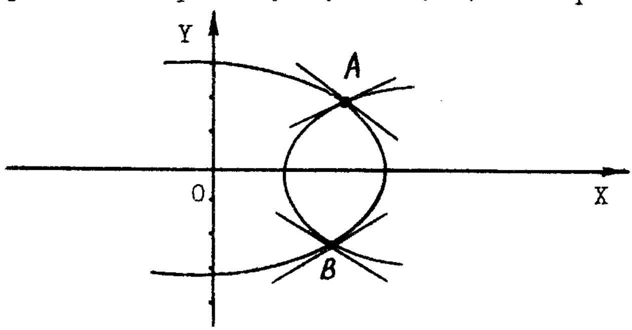


Рис. І4

$y = (2x - 1)^{1/2}$ та $y = (3 - 2x)^{1/2}$ перетинаються (це неможливо у випадку рівняння першого порядку).Відмінність цих розв'язків полягає в тому, що у точках A і B різні кути нахилу дотичних.

Відповідь: $y^2 = 2x - 1$, $y^2 = 3 - 2x$.

Приклад 6. Куля входить у дошку, товщина якої І0см, із швидкістю 200 м/с, а вилітає з дошки, пробивши її, із швидкістю 50 м/с. Визначити час руху кулі у дошці, якщо опір кулі пропорціональний квадрату її швидкості.

Нехай m-маса кулі, S-шлях, пройдений кулею за час t, відрахований від моменту входу її у дошку. Використаємо закон Ньютона $F = am$. За умовою $F = -kv^2$. Крім того, $a = d^2/s$, $v = ds/dt$.

Тоді диференціальне рівняння руху кулі через дошку буде мати вигляд

$$md^2s/dt^2 = -k^2(ds/dt)^2, \text{ або } d^2s/dt^2 = -b(ds/dt)^2,$$

де $b = k^2/m$.

Це рівняння типу $F(x,y',y'') = 0$. Позначивши $ds/dt=v$, дістанемо рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними:

$$dv/dt = -bv^2, \quad dv/v^2 = -bdt,$$

Зінтегрувавши його, одержимо:

$$1/v = bt + C_1 \quad \text{або} \quad v = 1/bt + C_1.$$

Використовуючи початкову умову $v = 200$ м/с при $t = 0$, знайдемо сталу C_1: $200 = 1/C_1$, $C_1 = 1/200$. Отже, одержали залежність швидкості руху кулі через дошку від часу t: $v = 200/(1 + 200bt)$ або $ds/dt = 200/(1 + 200bt)$.

Відокремлюємо змінні і інтегруємо рівняння:

$$\int dS = \int \frac{200\,dt}{1+200bt}, \quad S = \ln(1+200bt)/b + C_2.$$

Використовуючи початкову умову $S = 0$, коли $t = 0$, знайдемо сталу C_2, $C_2 = 0$.

Отже, маємо залежність віддалі від часу $S = \ln(1 + 200bt)/b$.

Використовуючи додаткові умови $v = 50$ м/с і $S = 0.1$ м, дістанемо систему рівнянь відносно невідомих t і b:

$$50 = 200(1 + 200bt),$$
$$0.1= \ln(1 + 200bt)/b.$$

Розв'язавши систему, дістанемо: $b = 10\ln 4$, $t = 0.001$с.

Відповідь: $t = 0.001$ с. #

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння.

I. $y'''= 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; $y''(0) = 2$.

2. $y'' = x + \sin x$.

3. $y'''= 6/x^3$, $y(1) = 2$, $y'(1) = y''(1) = 1$.

4. $y'' = \ln x$.

5. $y''= 4\cos 2x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

6. $y'' = x\sin x$.

7. $y''= 1/x$, $y(1) = y'(1) = 1$.

8. $y'''= x + \cos x$.

9. $y''= e^x\cos x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1.5$.

10. $xy'' = y'$.

11. $y''x \ln x = y'$.

12. $xy'' + y' = 0$.

13. $xy'' + y' + x = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

14. $x + y'' + x(y')^2 - y' = 0,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1.$
15. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$
16. $xy'' = y' \ln y'/x.$
17. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0.$
18. $y'' + 2y(y')^3 = 0.$ 19. $2yy'' - y'^2 = 1.$
20. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0,\ y(1) = 1;\ y'(1) = -1.$
21. $(y - 1)y'' - 2(y')^2 = 0,\ y(0) = 2;\ y'(0) = 3.$

Розв'язати задачі геометричного та фізичного змісту.

22.Знайти інтегральну криву, що проходить через точку $M(0;0)$ і дотикається до прямої $y = -x$.

23.Обчислити швидкість, з якою впаде на землю (під дією земного тяжіння) тіло, яке в початковий момент знаходиться на орбіті Місяця в стані спокою. Тут прискорення земного тяжіння обернено пропорціональне квадрату відстані рухомого тіла від центра Землі.

24.Обчислити прогин балки, один кінець якої нерухомо замурований у стіні, а на другий діє вертикальна сила P. Довжина балки дорівнює l (вагою балки знехтувати).

25.Знайти інтегральну криву, знаючи, що радіус її кривини пропорційний квадратові абсциси (коефіцієнт пропорційності $1/a$) та справедлива умова $y(a) = -a/3,\ y'(a) = 0$.

26.Знайти криву, у якої проекція радіуса кривини на вісь OY величина стала.

Відповіді:

1. $y = C_1x^2 + C_2x + C_3,\ y = x^2 + 1.$
2. $y = x^3/6 - \sin x + C_1x + C_2.$
3. $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$ 4. $y = 1/2x^2(\ln x - 3/2) + C_1x + C_2.$
5. $y = -\cos 2x + C_1x + C_2.$ 6. $y = -x\sin x - 2\cos x + C_1x + C_2.$
7. $y = x\ln x - x - C_1x + C_2,\ y = x\ln x + 1.$
8. $y = x^4/41.$
9. $y = 1/2e^x\sin x + C_1x + C_2,\ y = 1/2e^x\sin x + x.$
10. $y = C_1x^2 + C_2.$ 11. $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2.$
12. $y = C_1\ln x + C_2.$ 13. $y = -1/4x^2.$
14. $y = \ln x^2 + 2(1 - \ln 2).$

15.$y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_1$, $y = 2\ln|x + 1| - x + 1$.

16.$y = (C_1x - C_1^3)e^{1+x/C_1} + C_2$.

17.$y = 1/9x^3 + x + C_1\ln x + C_2$.

18.$y = C$, $y^3 = 3x + C_1y + C_2$.

19.$(x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.

20.$y - x = 2\ln y$.

21.$y = 3x - 2/3x - 1$.

22.$y = C_1 + C_2e^{C_1x}$, $y = 1 - e^x$, $y = e^{-x} - 1$.

23.$V = 11{,}08$ км/с.

Вказівка. Рівняння руху $dv/dt=gr^2/(R-x)^2$, де x-пройдений тілом шлях за t с, $g = 9{,}8$ m/c^2, $r = 6400$ km, $R = 384000$ km, $v = \frac{dx}{dt}$

24. $H = y(1)= \frac{Pl^3}{3EI}$, де E - модуль Юнга , I - момент інерції площі поперечного перерізу балки відносно нейтральної лінії.

Вказівка. Скористатися рівнянням Бернулі - Ейлера для малих згинів $EIy''= M(x)$, де $M(x) = P(l-x)$ - згинальний момент.

25.$3y = (x - 2a)((2x - a)/a)^{1/2}$. 26.$y = C_2 - a\ln\cos(\frac{x}{a} + C_1)$.

Рекомендована література

[1] Гл.XIII, §§ 16,17,19; [2] §§1.11,1.13,1.14; [6] § 3.5.

Завдання для самоконтролю та систематизації знань

1. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння другого порядку.

2. Сформулюйте задачу Коші для рівняння другого порядку.

3. Як узгоджується з теоремою Коші те, що через точку області проходить більше, ніж одна інтегральна крива рівняння вищого порядку.

4. Дайте означення загального розв'язку рівняння n-го порядку. Що називається загальним інтегралом цього рівняння?

5. Якою підстановкою знижується порядок рівняння, яке не містить шуканої функції?

6. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння $y^{(n)}= F(x)$?

7. Як знижується порядок рівняння, яке не містить незалежної змінної?

8.Вкажіть підстановку, якою знижується порядок рівняння, яке не містить шуканої функції та її послідовних перших похідних?

9. Визначіть тип рівняння відносно функції z, до якого зводиться рівняння $x^2yy'' = (y - xy')^2$ заміною $y' = yz$.

РОЗДІЛ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ n-го ПОРЯДКУ

4.І.Загальні поняття

Якщо рівняння n-го порядку $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ лінійно залежить від шуканої функції $y(x)$ та її похідних $y',y'',\dots,y^{(n)}$ то воно зветься лінійним.

Отже, диференціальне рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} +\dots+ a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку. Вважається, що $a_0(x)\not\equiv 0$.

Функції $a_0(x),a_1(x),\dots,a_n(x)$ називаються коефіцієнтами рівняння.

Для тих x, де $a_0(x) \neq 0$ рівняння зводиться до еквівалентного шляхом ділення на $a_0(x)$, тоді дістанемо

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} +\dots+ p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x). \qquad (4.1)$$

Вважаємо, що коефіцієнти $p_1(x)$, $p_2(x),\dots,p_n(x)$ а також права частина рівняння $g(x)$ неперервні на інтервалі (a,b). Тоді в деякій області $\{a<x<b, -\infty<y<+\infty, -\infty<y'<+\infty,\dots,-\infty<y^{(n-1)}<+\infty\}$ рівняння (4.I) задовольняє умови теореми Коші. Дійсно, рівняння (4.I) перепишемо у вигляді

$$y^{(n)} = g(x) - p_1(x)y^{(n-1)} -\dots- p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y.$$

Права частина рівняння - неперервна функція (чому?), частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y} = -p_n(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = -p_{n-1}(x),\dots,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -p_1(x)$ теж неперервні функції. Отже, задовольняються умови теореми Коші і в точках x інтервалу a<x<в існує єдиний розв'язок, який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \dots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Якщо права частина рівняння (4.I) $g(x) \not\equiv 0$, то воно називається лінійним неоднорідним рівнянням (або лінійним рівнянням з правою частиною).

Якщо $g(x) \equiv 0$, то рівняння (4.I) називається лінійним однорідним рівнянням (або лінійним рівнянням без правої частини).

Як відмічалось у п.I.2. Лінійні диференціальні рівняння можуть бути математичними моделями різних за природою явищ і процесів механіки, електротехніки, біології і т.п. Отже, постійний інтерес практики, з одного боку, особливості лінійних рівнянь, які дозволяють заглибитись в теорію, з другого, спонукали розвиток теорії лінійних диференціальних рівнянь, і вони є найбільш розробленим типом диференціальних рівнянь.

4.2. Лінійні однорідні рівняння

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \qquad (4.2)$$

Нехай його коефіцієнти неперервні функції при $a<x<b$.

4.2.I. Властивості розв'язків лінійного однорідногно рівняння

Для зручності розгляду теорії лінійних рівнянь ліву частину рівняння (4.2) позначимо через $L(y)$, тобто

$$L(y) = y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y \qquad (4.3)$$

Отже, $L(y)$ – результат застосування до функції $y(x)$ сукупності операцій, які здійснюються в лівій частині рівняння (4.2), а саме: диференціювання, множення на функції $P_1(x), \dots, P_n(x)$, додавання.

Вираз $L(y)$ називається лінійним диференціальним оператором від функції $y(x)$.

Приклад I. Нехай $L(y) = (1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y$.

Тоді функції $y = x^2$ даний лінійний оператор ставить у відповідність функцію $L(y) = 2$. Дійсно,

$L(x^2) = (1 + x^2)(x^2)'' - 2x(x^2)' + 2(x^2) = (1 + x^2)*2 - 2x*2x + 2x^2 = 2.$

Функції $y = x$ оператор ставить у відповідність нуль.

$L(x) = (1 + x^2)(x)'' - 2x(x)' + 2x = (1 + x^2)*0 - 2x + 2x = 0.$

Знайдемо функцію , яку оператор ставить у відповідність функції $y = \sin x$.

$L(\sin x) = (1+x^2)(\sin x)'' - 2x(\sin x)' + 2\sin x =$
$= (1+x^2)(-\sin x)' - 2x\cos x + 2\sin x = \sin x - x^2\sin x - 2x\cos x.$ #

Розглянемо властивості оператора $L(y)$.

I. Властивість однорідності

Сталий множник можна виносити за знак оператора, тобто, якщо функція $y(x)$ n разів диференційовна, то справедлива рівність:
$L(cy) = cL(y)$, де c – стала.

#Знайдемо $L(cy)$.

$L(cy) = (cy)^{n} + P_1(x)(cy)^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)(cy)' + p_n(x)(cy) =$
$= cy^{(n)} + P_1(x)cy^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)cy' + p_n(x)cy =$
$= c(y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n(x)y) = cL(y).$#

2.Властивість адитивності

Результат дії оператора на суму двох функцій дорівнює сумі результатів дії оператора на кожний доданок окремо, тобто, якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ n разів диференційовні, то має місце рівність: $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Доводиться як і перша властивість. Тому пропонуємо довести самостійно.

За допомогою оператора рівняння (4.2) набуває скороченого вигляду

$$L(y)=0. \qquad (4.4)$$

Розглянемо властивості розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння.

Теорема I. Якщо функція y є розв'язком рівняння (4.2), то функція cy, де $c = \text{const}$, теж є розв'язком цього рівняння.

Оскільки y_I розв'язок рівняння (4.2) або, що те саме, рівняння (4.4), то $L(y_1) = 0$. Переконаємося в тому, що cy_I теж є розв'язком. Підставимо cy_I, замість y в ліву частину рівняння (4.4). Тоді $L(cy_1) = cL(y_1) = c*0 = 0$. Отже, cy_I є розв'язком рівняння (4.2).

Пропонуємо самостійно довести такі властивості.

Теорема 2. Якщо функції y_1 і y_2 є розв'язками рівняння (4.2), то їх сума $y_1 + y_2$ теж є розв'язком цього рівняння.

Теорема 3. Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ –частинні розв'язки рівняння (4.2), то їх лінійна комбінація $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$, де $c_1, c_2, \ldots c_n$ – сталі, є також розв'язком цього рівняння.

Зауваження. Вираз $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ задовольняє рівняння (4.2), порядок якого дорівнює n, і містить n сталих. Отже, можна сподіватись на те, що цей вираз і є загальним розв'язком лінійного рівняння (4.2). Це твердження справедливе не завжди. Тому переходимо до виявлення умов, коли функція

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$$

буде загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.

4.2.2. Лінійна залежність функцій. Детермінант Вронського

Нехай функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a,b]$.

Означення. Функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ називаються лінійно залежними при $x \in [a,b]$, якщо існують n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ таких, що лінійна комбінація цих функцій тотожно дорівнює нулеві

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0$$

і хоча б одно α_i не дорівнює нулеві, тобто $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Зауваження: Із лінійної залежності функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ випливає, що одна із функцій завжди є лінійною комбінацією решти, тобто, наприклад, $\varphi_1(x) = \beta_2\varphi_2(x) + \ldots + \beta_n\varphi_n(x)$.

Якщо ж $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0$ лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, то функції $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ називаються лінійно незалежними на відрізку $[a,b]$.

Приклад 2. #Функції $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = x^3$ неперервні при $x \in R$. Розглянемо лінійну комбінацію $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 x^2$. Очевидно, що ця комбінація тотожно рівна нулю лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Вираз $\alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_1$ може перетворюватись в нуль лише при двох значеннях x. Означення вимагає тотожної рівності. Отже, функції $\varphi_1 = 1$; $\varphi_2 = x$; $\varphi_3 = x^3$ лінійно незалежні при $x \in R$. #

Приклад 3. Функції $\varphi_1 = 3$, $\varphi_2 = \cos^2 x$, $\varphi_3 = \sin^2 x$ неперервні при $x \in R$.

Нехай $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$. Тоді очевидна тотожність $\alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \sin x$ при будь-яких x. Отже, ці функції лінійно залежні.

Чи будуть лінійно залежними функції $\varphi_1 = 2$, $\varphi_2 = \cos^2 3x$, $\varphi_3 = \cos^2 4x$, $\varphi_4 = \sin^2 3x$, $\varphi_5 = \sin x$?

Зауваження. Розглядаючи попередні два приклади, можна зробити висновок про неконструктивність означення лінійної залежності. Потрібен критерій визначення лінійної залежності (або лінійної незалежності) функцій.

Розглянемо n функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, які мають n-I похідну.

Означення. Детермінант вигляду

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

називається детермінантом Вронського (вронскіаном).

Має місце теорема.

Теорема 4. Якщо функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ лінійно залежні, то детермінант W(x) цієї системи функцій тотожно дорівнює нулю.

\# Оскільки $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ лінійно залежні, то існує $\alpha_i \neq 0$ і $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n = 0$. Нехай $\alpha_1 \neq 0$. Тоді

$$\varphi_1(x) = \beta_2\varphi_2(x) + \dots + \beta_n\varphi_n(x), \qquad (I)$$

де $\beta_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_1}$. Розглянемо детермінант W(x) і замість функції $\varphi_1(x)$ підставимо (I), тоді матимемо:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2\varphi_2 + \dots + \beta_n\varphi_n, & \varphi_2, \dots, \varphi_n \\ \beta_2\varphi_2' + \dots + \beta_n\varphi_n', & \varphi_2', \dots, \varphi_n' \\ \dots & \dots \\ \beta_2\varphi_2^{(n-1)} + \dots + \beta_n\varphi_n^{(n-1)}, & \varphi_2^{(n-1)}, \dots, \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \beta_2\varphi_2 & \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_n \\ \beta_2\varphi_2' & \varphi_2' & \varphi_3' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_2\varphi_2^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \beta_n\varphi_n & \varphi_2 & \varphi_3 & \dots & \varphi_n \\ \beta_n\varphi_n' & \varphi_2' & \varphi_3' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_n\varphi_n^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Вронскіан тотожно дорівнює нулеві, бо у кожному детермінанті є пропорціональні стовпці. #

Без доведення сформулюємо важливу теорему (див [2,8]).

Теорема 5. Для того щоб n розв'язків рівняння (4.2) були лінійно незалежними в інтервалі (a,b) необхідно і достатньо, щоб їх вронскіан не перетворювався в нуль в жодній точці цього інтервалу.

Зауваження I. У випадку лінійного рівняння другого порядку умова лінійної незалежності частинних розв'язків має вигляд $y_1(x)/y_2(x) \equiv \mathrm{const}$. Дійсно, якщо y_I і y_2 - лінійно залежні, то $W[y_1 y_2] \equiv 0$, тобто $y_1 y_2' - y_2 y_1' \equiv 0$, розділимо ліву і праву частину на $y_I^2(x)$ тоді одержимо $(y_1 y_2' - y_2 y_1')/(y_1)^2 \equiv 0$, або $(y_2/y_1)' \equiv 0$, тобто $y_1(x)/y_2(x) \equiv \mathrm{const}$.
(Одержіть цей результат, користуючись означенням лінійної залежності).

2. На прикладі рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

виведемо формулу

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}. \tag{4.4}$$

Нехай y_I і y_2 частинні розв'язки рівняння, тоді

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0, \qquad y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0.$$

Помножимо першу тотожність на $y_2(x)$, другу на $y_1(x)$ і віднімемо результати, тоді

$$y_1'' y_2 - y_1 y_2'' + p_1(x)(y_1' y_2 - y_1 y_2') \equiv 0.$$

Скористаємось тим, що $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, а $W'(x) = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$ (переконайтесь у цьому самостійно). Тоді одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними відносно $W(x)$

$$W(x) + p_1(x)W(x) \equiv 0.$$

Звідси

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)dx}.$$

4.2.3. Структура загального розв'язку лінійного однорідного рівняння

Розглянемо принципове питання теорії лінійних однорідних диференціальних рівнянь - побудову загального розв'язку.

Система n лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зветься фундаментальною системою.

Доводиться [7], що фундаментальна система диференціального рівняння n-го порядку містить n функцій. Можна довести, що довільне рівняння (4.6) має нескінченну множину фундаментальних систем.

Має місце основна теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку.

Теорема 6. Якщо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ система n лінійно незалежних розв'язків рівняння (4.2), то їх лінійна комбінація

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{4.5}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння.

Доведення базується на понятті загального розв'язку. Тобто, треба довести, що (4.5) задовольняє рівняння (4.2) при довільних $C_1, C_2, \ldots, C_n$ і що заданим початковим умовам завжди можна знайти відповідні значення сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, тобто (4.5) може описати довільний частинний розв'язок.

Той факт, що вираз (4.5) є розв'язком рівняння (4.2), випливає із теореми 5.

Покажемо, що за довільно заданими початковими умовами

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_{01},\ y''(x_0) = y_{02}, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1},$$

можна знайти єдину множину сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Використаємо першу початкову умову

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0.$$

Продиференціюємо (4.5) і задовольняємо другу початкову умову

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_{01},$$

і так далі, задовольняємо (n-1) умову

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}.$$

Одержимо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0,$$

$$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) = y_{01},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}.$$

Детермінант цієї системи (вронскіан) не дорівнює нулеві, тому що $y_1, y_2, \ldots, y_n$ лінійно незалежні функції. А така система має єдиний розв'язок відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Отже, вираз (4.5) є загальним розв'язком рівняння (4.2). #

Приклад 4. Функції $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{12x}$ є розв'язками рівняння

$$y''' - 13y'' + 12y' = 0 \qquad \text{(доведіть).}$$

Покажемо, що ці функції лінійно незалежні. Скористаємось вронскіаном

$$W[1,\ e^x,\ e^{12x}] = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{12x} \\ 0 & e^x & 12e^{12x} \\ 0 & e^x & 144e^{12x} \end{vmatrix} = 132e^{13x} = 0.$$

Отже функції $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{12x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тоді за теоремою 6 загальний розв'язок рівняння $y''' - 13y'' + 12y' = 0$ має вигляд

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}. \quad \#$$

4.2.4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами

Якщо коефіцієнти $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ рівняння (4.2) сталі, то воно зветься лінійним однорідним диференціальним рівнянням із сталими коефіцієнтами. Його можна записати у вигляді

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \qquad (4.6)$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі.

Із структури рівняння (4.6) видно, що розв'язком може бути функція, похідні якої є подібними (в алгебраїчному розумінні) функціями.

Наприклад, $y = ae^{bx}$, $y = a\sin bx$.

Отже, розв'язок рівняння (4.6) шукаємо у вигляді $y = e^{rx}$. Знаходимо похідні $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$. Зробимо підстановку у рівняння (4.6).

$$r^ne^{rx} + a_1r^{n-1}e^{rx} + \ldots + a_{n-1}re^{rx} + a_ne^{rx} = 0.$$

Виносимо e^{rx} за дужки.

$$e^{rx}(r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n) = 0.$$

Оскільки $e^{rx} = 0$, то

$$r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0. \qquad (4.7)$$

Отже, функція $y = e^{rx}$ буде розв'язком рівняння (4.6) в тому випадку, коли коефіцієнт r задовольняє рівняння (4.7).

Рівняння (4.7) зветься характеристичним рівнянням диференціального рівняння (4.6).

Приклад 5. Скласти характеристичні рівняння диференціальних рівнянь а) $y''' - 4y'' = 0$, b) $y'' + 4y = 0$,

в) $y'''' - 4y'' + 3y' + 8y = 0$.

Замінимо y на 1, y' на r, y'' на r^2, y''' на r^3, y'''' на r^4. Тоді одержимо відповідні характеристичні рівняння:

а) $r^3 - 4r^2 = 0$, б) $r^2 + 4 = 0$, в) $r^4 - 4r^2 + 3r + 8 = 0$. #

Розглянемо побудову фундаментальної системи розв'язків рівняння (4.6) в залежності від коренів рівняння (4.7).

Нехай корені характеристичного рівняння дійсні різні.

Розглянемо випадок рівнянь другого порядку

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

Йому відповідає характеристичне рівняння

$$r^2 + a_1r + a_2 = 0.$$

Якщо його корені r_1 і r_2 дійсні різні, то можна записати два різні розв'язки $y_1 = e^{r_1x}$ і $y_2 = e^{r_2x}$. Доведемо, що вони утворюють фундаментальну систему.

$$W[e^{r_1x}, e^{r_2x}] = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & e^{r_2x} \\ r_1e^{r_1x} & r_2e^{r_2x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_2+r_1)x} = 0.$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}. \qquad (4.8)$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння $r^2 - 3r + 2 = 0$. Його корені $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Отже, $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Зауваження. Нехай $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – різні корені рівняння (4.7). Можна довести, що в цьому випадку фундаментальною системою є функції $y_1 = e^{r_1x}$, $y_2 = e^{r_2x}, \ldots, y_n = e^{r_nx}$.

Тоді загальний розв'язок рівняння (4.6) має вигляд

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}. \tag{4.9}$$

Розглянемо випадок, коли серед <u>коренів</u> <u>характеристичного рівняння</u> <u>є</u> <u>кратні</u> <u>корені</u>.

Знову розглянемо диференціальне рівняння другого порядку і нехай $r_1 = r_2 = r$. Тоді одержуємо один частинний розв'язок $y_1 = e^{rx}$. Знайдемо другий розв'язок.

Скористаємось формулою (4.4) при $y_1 = e^{rx}$, $p_1(x) = -2r$. Тоді,

$$y_1y_2' - y_2y_1' = W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x} 2r\,dx}, \quad e^{rx}y_2' - y_2y_1' = W(x_0)e^{2r(x-x_0)}.$$

Розділимо ліву і праву частини на e^{2rx}, $(e^{rx}y_2' - y_2re^{rx})/e^{2rx} = C$, де $C = W(x_0)e^{-2rx_0}$. Тоді в лівій частині одержимо похідну дробу $(y_2/e^{rx})' = C$. Зінтегрувавши цей вираз, дістанемо $y_2 = (Cx + C_1)e^{rx}$. Вибираємо найпростіший випадок $C = 1$, $C_1 = 0$. Отже, $y_2 = xe^{rx}$.

Фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння другого порядку у випадку кратних коренів характеристичного рівняння має вигляд

$$y_1 = e^{rx}, \quad y_2 = e^{rx}.$$

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0$$

у випадку, коли $r_1 = r_2$, має вигляд

$$y = (C_1x + C_2)e^{rx} \tag{4.10}$$

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

#Складемо характеристичне рівняння $r^2 - 6r + 9 = 0$. Його корені $r_1 = r_2 = 3$. Отже, $y = (c_1x + c_2)e^{3x}$.#

Зауваження. Можна довести, що у випадку, коли характеристичне рівняння (4.7) має k рівних коренів $r_{i_1} = r_{i_2} = r_{i_3} = \ldots = r_{i_k} = r$, то їм відповідає k лінійно незалежних розв'язків, які мають вигляд

$$y_1 = e^{rx}, \; y_2 = xe^{rx}, \; y_3 = x^2e^{rx}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{rx},$$

тобто у загальному розв'язку рівняння (4.6) k - кратному кореню відповідає доданок

$$(C_1 + C_{1+1}x + C_{1+2}x^2 + \ldots + C_{1+k-1}x^{k-1})e^{rx} \tag{4.11}$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{V} - 2y^{IV} + y''' = 0.$$

#Складемо характеристичне рівняння $r^5 - 2r^4 + r^3 = 0$. Його корені $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, $r_4 = r_5 = 1$. Тоді кореню $r = 0$ відповідає доданок $(C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{0x}$, а кореню $r=1$ відповідає доданок $(C_4 + C_5x)e^x$. Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)e^x.$$ #

Розглянемо випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння є комплексні. Спочатку побудуємо загальний розв'язок для рівняння другого порядку. Коефіцієнти a_1 і a_2 характеристичного рівняння $r^2 + a_1r + a_2 = 0$ дійсні числа.

В курсі вищої алгебри доводиться, що в рівнянні з дійсними коефіцієнтами комплексні корені завжди спряжені, тобто, коли $\alpha+\beta i$ корінь рівняння, то комплексне число $\alpha-\beta i$ теж є коренем рівняння тієї ж кратності, що і $\alpha+\beta i$.

Отже, комплексними коренями квадратного рівняння будуть числа $r_1 = \alpha+\beta i$, $r_2 = \alpha-\beta i$.

Тоді розв'язками диференціального рівняння $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ будуть функції $\tilde{y}_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$, $\tilde{y}_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$. Скориставшись формулою Ейлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, функції $\tilde{y}_1$ і $\tilde{y}_2$ подамо у вигляді:

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad \tilde{y}_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Комплекснозначні функції $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ дійсної змінної x можна записати у вигляді суми дійсної частини U(x) та уявної частини V(x) U(x) + iV(x).

Доведіть, що коли функція U(x) + iV(x) є розв'язком рівняння (4.6), то і функції U(x) і V(x) теж розв'язки рівняння (4.6). Отже, функції

$$\tilde{y}_{11} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \tilde{y}_{12} = e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \tilde{y}_{21} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \tilde{y}_{22} = -e^{\alpha x}\sin\beta x$$

є частинними розв'язками заданого диференціального рівняння другого порядку.

Серед цих чотирьох розв'язків лінійно незалежними є такі пари $\tilde{y}_{11}$ і $\tilde{y}_{12}$, $\tilde{y}_{21}$ і $\tilde{y}_{22}$, $\tilde{y}_{11}$ і $\tilde{y}_{22}$. Доведемо лінійну незалежність, наприклад, розв'язків $\tilde{y}_{11}$ і $\tilde{y}_{12}$.

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}=\beta e^{\alpha x}\neq 0,$$

тому що $\beta\neq 0$ (чому?).

Отже, фундаментальною системою розв'язків рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$ у випадку комплексних коренів є функції

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \tag{4.12}$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+4y'+13y=0.$$

#Складемо характеристичне рівняння $r^2+4r+13=0$. Його корені $r_{1/2}=-2\pm 3i$, а $\alpha=-2$, $\beta=3$. Загальний розв'язок має вигляд

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).\quad \#$$

Зауваження. Кожній парі комплексних спряжених коренів $r=\alpha\pm\beta i$ кратності m відповідає 2m частинних розв'язків рівняння (4.6). У загальному розв'язку рівняння цим кореням відповідає доданок

$$e^{\alpha x}\left((C_{i1}+C_{i2}x+\dots+C_{im}x^{m-1})\cos\beta x+(C_{i,m+1}+\dots+C_{i,2m}x^{m-1})\sin\beta x\right) \tag{4.13}$$

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{VI}+12y^{IV}+48y''+64y''=0.$$

#Характеристичне рівняння має вигляд $r^6+12r^4+48r^2+64=0$. Корені $r_1=2i$, $r_2=-2i$ мають кратність три $r_1=r_3=r_5=2i$, $r_2=r_4=r_6=-2i$. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2)\cos 2x+(C_4+C_5x+C_6x^2)\sin 2x.\quad \#$$

Алгоритм розв'язування лінійного однорідного рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{1}$$

1. Записати характеристичне рівняння диференціального рівняння (I)

$$a_0r^n + a_1r^{n-1}+\ldots+ a_{n-1}r + a_n = 0 \qquad (2)$$

2. Знайти корені рівняння (2).

3. Записати загальний розв'язок рівняння (I)

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 +\ldots+ C_ny_n.$$

Причому, якщо:

а) корені рівняння (2) різні і дійсні, то скористатись формулами (4.9);

б) є корені кратні, то кожному кратному кореню кратності k у загальному розв'язку відповідають доданки, які знаходяться за формулою (4.II);

в) є комплексні корені, тоді кожній парі спряжених комплексних коренів кратності m відповідають доданки, які знаходяться за формулою (4.I3).

4. Знайти сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$, якщо задано початкові умови.

5. Записати відповідь.

Зауваження. В таблиці I приведені частинні розв'язки рівняння (I), які входять у фундаментальну систему розв'язків і відповідають кореням характеристичного рівняння (2).

Таблиця I.

Корені характеристичного рівняння	Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння
r_1 - простий дійсний корінь	e^{r_1x}
r_1 - дійсний корінь кратності m	$e^{r_1x},\ xe^{r_1x},\ x^2e^{r_1x}, \ldots, x^{m-1}e^{r_1x}$
$\alpha \pm \beta i$ - пара комплексних спряжених коренів	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$
$\alpha \pm \beta i$ - пара комплексних спряжених коренів кратності m	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Приклад 11. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''- 4y'+ 3y = 0$ при початкових умовах $y(0)=6$, $y'(0)= 10$.

Складемо характеристичне рівняння

$$r^2 - 4r + 3 = 0.$$

Його корені $r1 = 1$, $r2 = 3$ дійсні і різні. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1e^x + C_2e^{3x}.$$

Знайдемо частинний розв'язок при початкових умовах:
$y(0)=6$, $y'(0)=10$.
Для цього підставимо значення $x = 0$, $y = 6$, $y' = 10$ у вирази для y і y'
$y' = C_1e^x + 3C_2e^{3x}$, $C_1 + C_2 = 6$, $C_1 + 3C_2 = 10$.
Звідки $C_1 = 4$, $C_2 = 2$.
Шуканий частинний розв'язок рівняння

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

Відповідь: $y = 4e^x + 2e^{3x}$. #

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^V- y^{1V} + 2y''' - 2y'' + y' - y = 0.$$

#Складемо характеристичне рівняння

$$r^5 - r^4 + 2r^3 - 2r^2 + r = 0.$$

Знайдемо його корені. Характеристичне рівняння можна подати у вигляді: $(r - 1)(r^2 + 1)^2 = 0$.
Звідси $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = i$, $r_4 = r_5 = -i$.
Отже, ми маємо один дійсний корінь ($r=1$) і пару комплексних спряжених коренів кратності два ($r = \pm i$). Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x + x(C_4\cos x + C_5\sin x).$$

Відповідь: $y = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x + x(C_4\cos x + C_5\sin x)$.#

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний або частинний розв'язки рівнянь:
1. $y'' + 9y = 0$. 2. $y''- 4y' + 4y = 0$. 3. $y''' - 3y' - 2y = 0$.
4. $y'''+ 2y''+ 10y' = 0$, $y(0) = 2$; $y'(0) = y''(0) = 1$.

5. $4y''- 8y'+ 5y = 0$. 6. $y''- 5y'+ 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$.
7. $y''+ 4y = 0$, $y = 0$, $y' = 2$, $x = 0$.
8. $y^{V} - 9y'''= 0$.

9. Відома фундаментальна система розв'язку лінійного диференціального рівняння e^{x}, e^{2x}, e^{3x}. Знайти його частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови : $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$; $y''(0) = 36$.

10. Відома фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння: e^{x}, $\cos x$, $\sin x$. Знайти його частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови : $y(0) = 3$; $y'(0) = 4$; $y''(0) = -1$.

Відповіді:

1. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$. 2. $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.
3. $y = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3x)e^{-x}$.
4. $y = 2.3 + e^{-x}(-0.3\cos 3x + 7/30\sin 3x)$.
5. $y = e^{x}(C_1\cos(x/2) + C_2\sin(x/2))$.
6. $y = 4e^{x} + e^{4x}$.
7. $y = \sin 2x$. 8. $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$.
9. $y = e^{x} + 2e^{2x} + 3e^{3x}$.
10. $y = e^{x} + 2\cos x + 3\sin x$.

Рекомендована література

[1], Гл. XIII, §20, §21, §22; [2] §1.16; [6] §3.6, §3.7.

4.3. Лінійні неоднорідні рівняння

Як уже відмічалось, лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку зветься рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (4.14)$$

або, користуючись лінійним оператором $L(y)$, його можна записати у вигляді

$$L(y) = f(x). \qquad (4.15)$$

Якщо коефіцієнти рівняння $L(y)=0$ ті ж, що і рівняння $L(y)=f(x)$, то однорідне рівняння $L(y) = 0$ зветься відповідним даному неоднорідному рівнянню.

4.3.1. Властивості розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння

Теорема 7. Якщо $\tilde{y}$ розв'язок рівняння (4.15), а y_1 - розв'язок відповідного однорідного рівняння $L(y) = 0$, то їх сума є розв'язком неоднорідного рівняння (4.15).

Оскільки $\tilde{y}$ розв'язок рівняння (4.15), то $L(\tilde{y}) \equiv f(x)$, аналогічно $L(y_1) \equiv 0$. Підставимо їх суму у рівняння (4.15) $L(\tilde{y}+y_1) = L(\tilde{y})+L(y_1) = f(x)+0 = f(x)$. Отже, $\tilde{y}+y_1$ є розв'язком рівняння (4.15).

Теорема 8. Якщо y_1 - розв'язок рівняння $L(y) = f_1(x)$, а y_2 - розв'язок рівняння $L(y) = f_2(x)$, то функція $ay_1 + by_2$ є розв'язком рівняння $L(y) = af_1(x) + bf_2(x)$, де $a,b = const$.

Довести самостійно.

4.3.2. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

Розглянемо одну з основних теорем теорії лінійних рівнянь, яка дає можливість будувати загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Теорема 9. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.15) дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $L(y) = 0$ і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (4.15), тобто $y = y_{одн} + y_{чн}$, або

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_{чн} . \qquad (4.16)$$

Схема доведення така ж, як і теореми 6. Нехай $y_{чн}$ - частинний розв'язок рівняння (4.15): $L(y_{чн}) \equiv f(x)$, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ - фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння $L(y) = 0$, тоді $y_{одн} = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ - загальний

розв'язок цього рівняння. Покажемо, що

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_{чн}$$

є загальним розв'язком неоднорідного рівняння.

Спершу переконаємось у тому, що вираз (4.16) задовольняє рівняння (4.15): $L(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n + y_{чн}) = $
$= C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + \ldots + C_nL(y_n) + L(y_{чн}) = f(x)$.

Далі доведемо, що початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ можна єдиним чином підібрати значення сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, щоб розв'язок (4.16) описував шуканий частинний розв'язок. Задовольняємо початкові умови. З цією метою підставляємо $x = x_0$ у функцію (4.16) та її похідні.

$$\begin{aligned}
y_0 &= C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0),\\
y_1 &= C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1} &= C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0).
\end{aligned}$$

Отже сталі $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можна знайти, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) &= y_0 - y_{чн}(x_0),\\
C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \ldots + C_ny_n'(x_0) &= y_1 - y_{чн}'(x_0),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\\
C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} - y_{чн}^{(n-1)}(x_0)
\end{aligned}$$

Детермінантом системи є вронскіан $W(x_0) \neq 0$, тобто система має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$. Отже, вираз (4.16) згідно з означенням (див.п.3.1) є загальним розв'язком неоднорідного рівняння. #

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 5x.$$

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$ та будь-який частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння знайдено при розв'язуванні прикладу 1 п.4.2.4

$$y_{одн} = (C_1x + C_2)e^{3x}.$$

Переконайтесь у тому, що функція $y_{чн} = 5x/9 + 10/27$ є розв'язком неоднорідного рівняння. Тоді загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = (C_1x + C_2)e^{3x} + 5x/9 + 10/27.$$

Вище були розглянуті методи розв'язування однорідних рівнянь. Для побудови загального розв'язку неоднорідного рівняння необхідно знати який-небудь частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Тому розглянемо задачу знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

4.3.3. Методи знаходження частинних розв'язків лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь

На прикладі диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x). \qquad (1)$$

покажемо застосування методу варіації довільних сталих.

Відповідне однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Його загальний розв'язок має вигляд $y_o = C_1y_1 + C_2y_2$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) знаходимо за формулою

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Визначимо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Знаходимо похідну y'.

$$y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2' + C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2.$$

Покладемо тут, що $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$. Це перша умова для визначення $C_1(x)$ і $C_2(x)$. Друге співвідношення дістанемо з умови, що y задовольняє дане неоднорідне рівняння. Знайдемо y''.

$$y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y''.$$

Тоді:

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y'' + p_1(x)(C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2') +$$
$$+ p_2(x)(C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2) = f(x).$$ Згрупуємо: $C_1(x)$ і $C_2(x)$

$$C_1(x)[y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1] + C_2(x)[y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2] +$$
$$+ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Оскільки вирази у квадратних дужках дорівнюють нулеві /чому?/, то одержуємо другу умову для визначення функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$

$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x)$. Об'єднавши першу та другу умови, одержуемо систему рівнянь для знаходження $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (4.17)$$

Детермінантом системи є вронскіан $W(x)$ фундаментальної системи розв'язків y_1 і y_2, а, отже, $W(x) = 0$.
Нехай $C_1'(x) = \varphi_1(x)$, $C_2'(x) = \varphi_2(x)$ – розв'язок системи (4.17). Тоді, зінтегрувавши диференціальні рівняння $dC_1(x) = \varphi_1 dx$ і $dC_2(x) = \varphi_2 dx$, одержуємо функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + c_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + c_2.$$

Запишемо загальний розв'язок рівняння (1)

$$y = \left(\int \varphi_1(x)dx + c_1\right)y_1 + \left(\int \varphi_2(x)dx + c_2\right)y_2,$$

або

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx. \qquad (4.18)$$

Таким чином, лінійне неоднорідне диференціальне рівняння можна зінтегрувати методом варіації довільних сталих, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння.

Але в деяких випадках частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти простіше. Це випадок неоднорідного рівняння із сталими коефіцієнтами, коли права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд. А саме,

$$f(x) = P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m,$$

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}, \quad f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x,$$

або взагалі

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_s(x)\sin\beta x\right],$$

де $P_m(x)$, $Q_s(x)$ – многочлени степеня відповідно m і s.

У випадку спеціального вигляду функції $f(x)$ частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння знаходиться методом невизначених коефіцієнтів, який не потребує інтегрування. Основою цього методу є те, що розв'язок диферецiального рівняння відображає не тільки структуру лівої частини рівняння, а й вплив зовнішньої дії правої частини $f(x)$.

Розглянемо окремі випадки побудови частинного розв'язку. Нехай f(x) - многочлен степеня m, тобто,

$$f(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m,$$

причому $b_0 \neq 0$. Крім того, нехай $a_n \neq 0$ (4.6) , тобто число нуль не є коренем характеристичного рівняння. Тоді має місце теорема.

Теорема. Якщо у рівнянні $L(x) = P_m(x)$ $a_m \neq 0$,то існує частинний розв'язок $y_ч$, який має вигляд многочлена, степінь якого співпадає із степенем многочлена $P_m(x)$, тобто

$$y_ч = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m,$$

де $A_0, A_1, \dots, A_m$ - невизначені коефіцієнти.

Для доведення підставимо $y_ч$ у рівняння $L(x) = P_m(x)$

$$a_n(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m) + a_{n-1}(mA_0x^m + (m-1)A_1x^{m-1} + \\ + \dots + A_{m-1}) + a_0(m(m-1)\dots(m-n+1)A_0x^{m-n} + \dots) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \\ + \dots + b_{m-1}x + b_m.$$

В одержаній тотожності прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x правої і лівої частини і формуємо лінійну систему рівнянь відносно невизначених коефіцієнтів $A_0, A_1, \dots, A_m$:

$$\begin{aligned} &a_nA_0 = b_0, \\ &a_nA_1 + a_{n-1}mA_0 = b_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_nA_m + a_{n-1}A_{m-1} + \dots = b_m. \end{aligned}$$

Послідовно розв'язуючи рівняння системи, знаходимо коефіцієнти $A_0, A_1, \dots, A_m$.#

Розглянемо випадок, коли <u>число</u> <u>нуль</u> <u>є</u> <u>s-кратним</u> <u>коренем</u> характеристичного рівняння.

$$r^n + a_1r^{n-1} + \dots + a_{n-1}r + a_n = r^s(r^{n-s} + a_1r^{n-s-1} + \dots + a_{n-s}) = 0$$

Теорема. Якщо коефіцієнти рівняння $L(x) = P_m(x)$ $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-s+1} = 0$, але $a_{n-s} \neq 0$, тобто число нуль є s-кратним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y_ч = x^s(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m).$$

<u>Приклади</u>. 1. Частинний розв'язок рівняння $y'' + y = x^3 + 1$ знаходимо у вигляді $y_ч = A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$.

2. Частинний розв'язок рівняння $y''' - y'' = x$ знаходимо у вигляді $y_ч = x^2(A_0x + A_1)$, бо нуль корінь характеристичного рівняння $r^3 - r^2 = 0$ кратності два.

Нехай права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд

$$f(x) = e^{ax}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m).$$

Заміною $y = e^{ax}z$ рівняння $L(x) = e^{ax}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m)$ зводиться до рівняння $L(z) = P_m(x)$. Доведіть самостійно.

Використавши цей результат та попередню теорему, можна довести, що у випадку, коли a не є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок рівняння

$$L(x) = e^{ax}(b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m)$$

необхідно шукати у вигляді

$$y_ч = e^{ax}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m).$$

Якщо a є s-кратним коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y_ч = x^s e^{ax}(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m).$$

<u>Приклади</u>. 1. Частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' = e^x x$ шукаємо у вигляді $y_ч = e^x(A_0x + A_1)$.

2. Частинний розв'язок рівняння $y'' - 2y' = e^{2x}x$ має вигляд $y_ч = xe^{2x}(A_0x + A_1)$, бо число $a = 2$ є коренем характеристичного рівняння $r^2 - 2r = 0$. Кратність кореня дорівнює одиниці, тому у порівнянні з попереднім прикладом у частинному розв'язку з'явився множник x.

<u>Права частина рівняння має вигляд</u> $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$.
Скористаємось формулами Ейлера $\cos\beta x = \frac{1}{2}(e^{\beta x i} + e^{-\beta x i})$, $\sin\beta x = -\frac{i}{2}(e^{\beta x i} - e^{-\beta x i})$.

Тоді f(x) виражатиметься через $e^{\beta x i}$, $e^{-\beta x i}$. Використовуючи теорему 8 а також вираз частинного розв'язку для попереднього випадку, можна довести, що частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$y_ч = A_0 \cos\beta x + A_1 \sin\beta x,$$

коли числа $\pm\beta i$ не є коренями характеристичного рівняння, і у вигляді

$$y_ч = x^s(A_0 \cos\beta x + A_1 \sin\beta x),$$

якщо числа $\pm\beta i$ – корені характеристичного рівняння кратності s.

Зауваження. Якщо права частина рівняння (1) має вигляд $f(x) = a\cos\beta x$ або $f(x) = b\sin\beta x$, то його частинний розв'язок також має вигляд

$$y_ч = A_0 \cos\beta x + A_1 \sin\beta x.$$

Приклади. 1. Частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y' = 5\cos 2x$$

шукаємо у вигляді $y_ч = A_0\cos 2x + A_1\sin 2x$.

2. Частинний розв'язок рівняння $y'' + 4y = 3\sin 2x$ шукаємо у вигляді $y_ч = (A_0\cos 2x + A_1\sin 2x)x$, бо числа $r = 2i$ є коренями характеристичного рівняння $r^2 + 4 = 0$.

Розглянемо загальний вигляд правої частини

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x],$$

коли застосовується метод невизначених коефіцієнтів.

Частинний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$y_ч = x^s e^{\alpha x}[M_\ell(x)\cos\beta x + N_\ell(x)\sin\beta x],$$

де s – кратність кореня характеристичного рівняння, який співпадає з числом $\alpha + \beta i$,

$M_\ell(x)$, $N_\ell(x)$ – многочлени степеня ℓ з невизначеними коефіцієнтами /скільки всього коефіцієнтів?/

Алгоритми розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Розглянемо диференціальне рівняння

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x), \quad (1)$$

у якого коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ –сталі.

Метод варіації довільних сталих

1. Записати відповідне лінійне однорідне рівняння

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \quad (2)$$

2. Знайти фундаментальну систему розв'язків рівняння (2):

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n.$$

3. Записати загальний розв'язок рівняння (1) за формулою:

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+C_3(x)y_3+\ldots+C_n(x)y_n \quad (3)$$

4. Знайти $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)y_3$, ... , $C_n(x)$, розв'язавши систему рівнянь:

$$C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+C_3'(x)y_3+\ldots+C_n'(x)y_n=0,$$

$$C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+C_3'(x)y_3'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2'(x)y_2^{(n-2)}+C_3'(x)y_3^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0,$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+C_3'(x)y_3^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x).$$

5. Записати загальний розв'язок рівняння (1), підставивши у формулу (3) знайдені функції $C_1(x)=g_1(x)+C_1$, $C_2(x)=g_2(x)+C_2$, $C_3(x)=g_3(x)+C_3, \ldots, C_n(x)=g_n(x)+C_n$.
6. Знайти сталі, якщо є початкові умови.
7. Записати відповідь.

Метод невизначених коефіцієнтів

1. Записати лінійне однорідне рівняння (2).
2. Записати загальний розв'язок рівняння (2):

$$y_0=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\ldots+C_ny_n$$

3. Знайти частинний розв'язок рівняння (1) $y_ч$ методом невизначених коефіцієнтів, скориставшись таблицею 2.

Таблиця 2

	Вид правої частини диференціального рівняння (1)	Корені характеристичного рівняння диференціального рівняння (2)	Вид частинного розв'язку рівняння (1)
1.	$f(x)=P_m(x)$, де $P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+$ $+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m$ поліном степеня m	а) Число 0 не є коренем характеристичного рівняння	$y_ч=Q_m(x)=A_0x^m+$ $+A_1x^{m-1}+\ldots+$ $+A_{m-1}x+A_m$ – поліном степеня m
		б) Число 0 є коренем характеристичного рівняння кратності s	$y_ч=x^sQ(x)=$ $=x^s(A_0x^m+A_1x^{m-1}+$ $+\ldots+A_{m-1}x+A_m)$
2.	$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$, де α-дійсне число	а) Число α не є коренем характеристичного рівняння.	$y_ч=e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)$
		б) Число α-є коренем характеристичного рівняння кратності s	$y_ч=x^se^{\alpha x}Q_m(x)$
3.	$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x]$ де $P_m(x)$, $Q_m(x)$ поліноми степеня m або принаймні один з них має степінь m	а) Число $\alpha\pm\beta i$ – не є коренем характеристичного рівняння	$y_ч=e^{\alpha x}[M_m(x)\cos\beta x+$ $+N_m(x)\sin\beta x]$, де $M_m(x), N_m(x)$ – поліноми степеня m
		б) Число $\alpha\pm\beta i$ є коренем характеристичного рівняння кратності s.	$y_ч=x^se^{\alpha x}[M_m(x)\cos\beta x+$ $+N_m(x)\sin\beta x]$.

4. Записати загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді:

$$y = y_0 + y_ч .$$

5. Знайти сталі, якщо є початкові умови.

6. Записати відповідь.

Зауваження. Якщо права частина рівняння (1) є сумою кількох функцій $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, то для знаходження частинного розв'язку слід скористатись принципом суперпозиції (теорема 8).

Приклад. 1. Зінтегрувати рівняння:

$$y'' - y = 2e^x/(e^x - 1).$$

Запишемо відповідне лінійне однорідне рівняння: $y'' - y = 0$. Складемо характеристичне рівняння $r^2-1=0$. Його корені $r_1=1, r_2=-1$. Тоді фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння матиме вигляд

$$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}.$$

Для цього складемо систему рівнянь відносно $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0,$$

$$C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} = 2e^x/(e^x - 1).$$

Звідси знаходимо $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$C_1'(x) = 1/(e^x - 1), \quad C_2'(x) = e^{2x}(e^x - 1).$$

Зінтегрувавши одержані диференціальні рівняння першого порядку, знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$:

$C_1(x) = \ln(1 - e^x) + C_1$, $C_2(x) = x + e^x + \ln(1 - e^x) + C_2$.

Отже, загальний розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$y = (\ln(1 - e^x) + C_1)e^x + (x + e^x + \ln(1 - e^x) + C_2)e^{-x},$$

або після спрощення:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + 1 + e^x\ln(1 - e^x) + xe^{-x} + e^{-x}\ln(1 - e^x).\#$$

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $2y''+ 5y' = 5x^2-2x-1$, якщо $y'(0) = y(0) = 1$.

#Відповідне лінійне однорідне рівняння має вигляд $2y''+5y'=0$.

Складемо характеристичне рівняння $2r^2 + 5r=0$. Його корені $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{5}{2}$. Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння матиме вигляд $y_o= C_1 + C_2e^{-2.5x}$. Права частина рівняння $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ є поліномом другого степеня. Число 0 є коренем характеристичного рівняння. Отже, згідно з таблицею 2/тип 2, випадок б/ частинний розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y_ч = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Знайдемо $y_ч'$ і $y_ч''$ і підставимо їх у дане рівняння:

$$y_ч' = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ y_ч'' = 6Ax + 2B,$$

$$12Ax + 4B + 15Ax^2 + 30Bx + 5C = 5x^2 - 2x - 1,$$

або

$$15Ax^2 +(12A + 10B)x +(4B + 5C) = 5x^2 - 2x - 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^2, x та вільні члени, дістанемо систему рівнянь відносно A,B і C:

$$15A=5,$$

$$12A+10B=-2,$$

$$4B+5C=-1.$$

Звідси знаходимо: $A =1/3$, $B = -3/5$ і $C = 7/25$.

Тоді: $y_ч = x(x^2/3 - 3x/5 + 7/25)$.

Загальний розв'язок даного рівняння буде мати вигляд:

$$y = y_o+ y_ч = C_1 + C_2e^{-2.5x}\ x(x^2/3 - 3x/5 + 7/25).$$

Знайдемо сталі C_1 і C_2, використавши умови: $y'(0) = y(0) = 1$.

$$1 = C_1 + C_2,$$

$$1 = \frac{7}{25} - \frac{5}{2}C_2.$$

Звідси: $C_1 = 1\frac{36}{125}$, $C_2 = -\frac{36}{125}$.

Отже, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y = 1\frac{36}{125} - \frac{36}{125}e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$$

Відповідь: $y=1\frac{36}{125} - \frac{36}{125}e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3- \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x.$ #

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y''+ y = 2\cos x.$$

#Загальний розв'язок запишемо у вигляді $y = y_o+ y_ч$. Знайдемо y_o. Складемо характеристичне рівняння $r^2+1=0$, його корені

$r_1 = i$, $r_2 = -i$. Тоді: $y_o = C_1\cos x + C_2\sin x$, тому що $\alpha = 0$, $\beta = 1$.
Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$ /див. табл.2, тип.3 випадок б/. Знайдемо $y_ч'$ і $y_ч''$.

$y_ч' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$,

$y_ч'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$.

Підставивши вирази $y_ч'$ і $y_ч''$ у рівняння одержимо тотожність:
$-2A\sin x + 2B\cos x = 2\cos x$. Прирівнявши коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержимо $A = 0$; $B = 1$. Отже, $y_ч = x\sin x$.
Тоді $y = y_o + y_ч = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x$.
Відповідь: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x$. #

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння.

1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.
2. $y'' - 3y' + 2y = e^x$.
3. $y'' - 7y' + 6y = (x - 1)\cos x + 2\sin x$.
4. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}\cos x$.
5. $y'' + y = -\sin 2x$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.
6. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = y'(0) = 1$.
7. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$, $y'(0) = y''(0) = 1$, $y(0) = 2$.
8. $y'' - 4y' + 4y = x^2$.
9. $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$.
10. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.
11. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x\cos x$, $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.
12. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.
13. $y'' + y = 4\cos x + (x^2 + 1)e^x$.
14. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x} + e^{-2x}$.
15. $y'' + 7y' + 6y = e^{-6x}$.

<u>Відповіді</u>. 1. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + (\ln|\sin x|)\sin x$.

2. $y = C_1e^{2x} + (C_2 - x)e^x$.

3. $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + \frac{1}{74}[(37 + 5x)\cos x - (30 + 7x)\sin x]$.

4. $y = e^{-x}[4x\sin x - x^2\cos x + 6\cos x + C_1 + C_2x]$.

5. $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

6. $y = e^x + x^2$.

7. $y = 4 - 3e^{-x} + e^{-2x}$.

8. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$.

9. $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + x^2(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{6}x - 1)$.

10. $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

11. $y = e^x((2x - \pi - 1)\sin x - \pi\cos x)$.

12. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x$.

13. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x\sin x + e^x(1 - x + \frac{1}{2}x^2)$.

14. $y = C_2e^{-3x} + e^{-2x}(C_1 + x) + \frac{1}{2}e^{-x}$.

15. $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{-x} - \frac{3}{5}xe^{-6x}$.

Рекомендована література

[1] Гл.XIII, §§ 23-25; [2] №1.15, § 18; [6] § 3.9.

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

1. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку.

2. Дайте означення лінійної незалежності та лінійної залежності функцій.

3. Сформулюйте задачу Коші для лінійного рівняння другого порядку.

4. Чому однорідне лінійне рівняння не має інших розв'язків крім нульового, які б задовольняли нульові початкові умови
$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0,\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0)=0$?

5. Дайте означення фундаментальної системи розв'язків лінійного однорідного рівняння 3-го порядку.

6. Як знайти другий лінійно незалежний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку, якщо відомий перший розв'язок ?

7. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння n-го порядку.

8. Запишіть фундаментальні системи розв'язків лінійного одно-

рідного диференціального рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами у випадку:

а) дійсних різних коренів характеристичного рівняння;

б) дійсних рівних коренів;

в) комплексних коренів. Запишіть відповідні загальні розв'язки.

9. Доведіть, що рівняння Ейлера $x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$ заміною змінної $x = e^t$ зводиться до рівняння із сталими коефіцієнтами.

10. Сформулюйте теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку.

11. Доведіть властивості розв'язків лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

12. В чому полягає метод варіації довільних сталих ?

13. Як знаходяться частинні розв'язки лінійного неоднорідного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами у випадку спеціального вигляду правої частини ?

14. Скориставшись формулами Ейлера, доведіть, що частинний розв'язок рівняння $y'' + a_1y' + a_2y = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ слід шукати у вигляді $y_ч = A_1\cos\beta x + A_2\sin\beta x$, якщо $\pm\beta i$ не є коренем характеристичного рівняння.

15. При яких значеннях α загальний розв'язок рівняння

$$y'' + a^2y = \cos 2x$$

не містить добутку періодичної функції на степінь незалежної змінної ?

16. Знайдіть вигляд лінійного однорідного рівняння другого порядку $y''+ p(x)y' + q(x)y = 0$, яке б зводилось до рівняння першого порядку $z' + Az^2 = Bx^m$. /Використати заміну $y' = yz$/.

17. Доведіть, що рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ лінійною заміною шуканої функції може бути зведене до рівняння $z''+R(x)z = 0$.

4.4. Застосування методу ізоклін до розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку

У тому випадку, коли рівняння другого порядку зводиться до диференціального рівняння першого порядку, наближений розв'язок його можна одержати за допомогою методу ізоклін. До таких рівнянь відносяться рівняння:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(\frac{dy}{dx},y) \qquad (4.19)$$

Тобто, у рівняння аргумент x не входить у явному вигляді. Для зручності використання механічної інтерпретації похідних першого та другого порядків позначимо незалежну змінну через t. Тоді рівняння (4.19) матиме вигляд

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(\frac{dy}{dt},y) \qquad (4.20)$$

Понизимо порядок рівняння. Нехай $\frac{dy}{dx} = V$, тоді $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dt}) = \frac{dV}{dt}\frac{dy}{dy} = \frac{dy}{dt}\frac{dV}{dy} = V\frac{dV}{dy}$. Рівняння (4.20) набуває вигляду

$$V\frac{dV}{dy} = f(V,y)$$

або

$$\frac{dV}{dy} = \frac{f(V,y)}{V} \qquad (4.21)$$

Це рівняння першого порядку, до якого можна застосувати метод ізоклін на площині OYV. Ця площина називається фазовою площиною. Якщо y - шлях рухомої точки, V - швидкість руху, то рівняння (4.21) визначає залежність швидкості руху від шляху. Інтегральна крива рівняння (4.21) називається фазовою траєкторією руху, а сукупність цих траєкторій - фазовим портретом.

Точка фазової траєкторії, координатами якої є миттєві значення шляху та швидкості, називається зображаючою точкою. Якщо швидкість руху V>0, то зображаюча точка може рухатись тільки вправо ($V>0$, $\frac{dy}{dt}>0$, що означає зростання y). Отже, у верхній півплощині можливий рух тільки зліва направо. У нижній півплощині, де $V<0$, зображаюча точка рухається тільки вліво. Отже, рух зображаючої точки відбувається за годинниковою стрілкою. Якщо процес описується диференціальним рівнянням першого порядку, то фазові траєкторії лежать на одній кривій і зображаюча точка рухається по цій лінії. Коли ж процес описується рівнянням другого порядку, то зображаюча точка, в залежності від початкових умов, може бути в будь-якій точці фазової площини.

Застосуємо метод ізоклін до побудови фазових траєкторій перехідного процесу у електричному колі. Нехай маємо RLC-коло (див. приклад 2., рис. 2). Диференціальне рівняння такого кола має вигляд

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

Розглянемо деякі випадки побудови траєкторій.

а). Нехай $E(t) = const$, $R = 0$. Тоді маємо рівняння

$$L\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0 \qquad (4.22)$$

Зведемо його до рівняння першого порядку. Позначимо $I(t)=y$, тоді

$$\frac{d^2I}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(V)}{dt} = V\frac{dV}{dy}.$$

Рівняння (4.22) набуде вигляду

$$LV\frac{dV}{dy} + \frac{1}{C}y = 0$$

Звідси

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{1}{LC}\frac{y}{V} \qquad (4.23)$$

До рівняння (4.23) застосуємо метод ізоклін, побудувавши їх у системі координат YOV. Рівняння ізоклін має вигляд $\frac{L}{C}\frac{y}{V} = -k$, або $V = -\frac{L}{kC}y$. Якщо $k \neq 0$, то це прямі з кутовим коефіцієнтом $-\frac{L}{kC}$, якщо ж $k=0$, то це пряма $y=0$, тобто вісь OV.

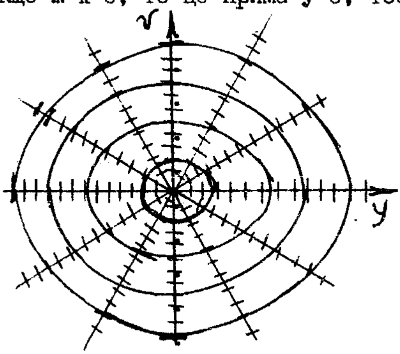


Рис.15

Надаємо k значень 0,1, -1 та інших, будуємо поле напрямків (рис. 15). Користуючись побудованими траєкторіями, можна провести аналіз процесу. В теорії стійкості точки, поведінка траєкторій навколо якої має такий характер, як показано на рис.15, називається стійкою точкою спокою або центром.

У даному випадку такою точкою є початок координат. Якщо зінтегрувати рівняння (4.23), одержимо рівняння траєкторій, які є еліпсами

$$V^2 + \frac{y^2}{LC} = A^2, \text{ де } A \text{ - довільна стала.}$$

Це відповідає незатухаючим синусоїдальним коливанням. Наближено можна знайти амплітуду та частоту коливань струму. Ці висновки можна зробити проаналізувавши загальний розв'язок рівняння (4.22), який має вигляд

$$I(t) = A_1\cos((LC)^{-0.5}t) + A_2\sin((LC)^{-0.5}t),$$

де A_1, A_2 - довільні сталі.

б). Розглянемо випадок, коли $E(t) \equiv const$. Тоді маємо рівняння RLC-кола.

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL}I = 0 \qquad (4.24)$$

Перетворимо його, як і у попередньому випадку. Дістанемо

$$V\frac{dV}{dy} + \frac{R}{L}V + \frac{1}{CL}y = 0$$

Звідси одержуємо

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{R}{L} - \frac{1}{CL}\frac{y}{V}$$

Це рівняння є однорідним відносно змінних y і V. На характер його розв'язків, як можна переконатись (зробіть самостійно), впливає знак величин CR^2-4L. Окремо розглянемо випадки $CR^2-4L<0$ тобто, $0<R<2(L/C)^{0.5}$, і коли $CR^2-4L \geqslant 0$, тобто $R \geqslant 2(L/C)^{0.5}$. На рис. 16 і 17 побудовано ізокліни і поле напрямків згідно з цими умовами.

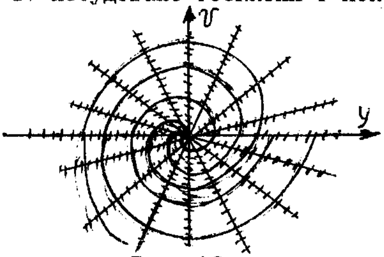


Рис. 16

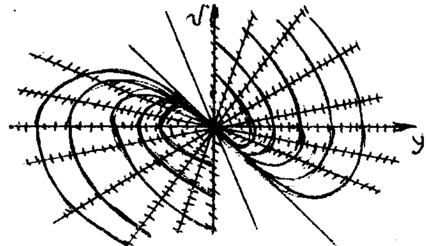


Рис. 17

Ми розглянули приклади застосування методу ізоклін до розв'язування лінійних рівнянь. Особливо ефективний метод у випадку нелінійності рівняння (4.20).

Для електричного кола, наприклад, зображеного на рис. 2, це випадок нелінійності його елементів.

РОЗДІЛ 5. ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як ми уже бачили у розділі 1, математичні моделі можуть бути подані у вигляді кількох диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій. Такі співвідношення називаються системами диференціальних рівнянь.

5.1. Основні поняття

Системою n диференціальних рівнянь першого порядку відносно шуканих функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ називаються співвідношення

$$
\begin{aligned}
&F_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0,\\
&F_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \qquad (5.1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&F_1(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0,
\end{aligned}
$$

де x - незалежна змінна

Розв'язком системи (5.1) називається система n функцій $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, які в результаті підстановки в усі рівняння (5.1) перетворюють їх у тотожності.

Приклад 1.# Система двох диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями y_1 і y_2 :

$$
y_1' = \frac{y_1}{x},
$$

$$
y_2' = \frac{x+y_1}{x},
$$

має розв'язок $y_1=2x$, $y_2=3x-3$. Дійсно, знаходимо $y_1'=2$, $y_2'=3$ а, отже, $2 \equiv \frac{2x}{x}$; $3 \equiv \frac{x+2x}{x}$. #

Далі будемо розглядати системи, розв'язані відносно похідних $y_1', y_2', \dots, y_n'$, такі системи диференціальних рівнянь називаються нормальними системами. Загальний вигляд нормальної системи диференціальних рівнянь такий:

$$
\begin{aligned}
&y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),\\
&y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (5.2)\\
&y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).
\end{aligned}
$$

Дамо геометричну інтерпретацію розв'язку нормальної системи у випадку, коли n = 2. Система (5.2) набуває вигляду:

$$
\begin{aligned}
&y_1' = f_1(x, y_1, y_2),\\
&y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

Нехай розв'язком системи будуть функції $y_1=\varphi_1(x)$ і $y_2=\varphi_2(x)$. Якщо ввести тривимірний простір $X\,Y_1Y_2$, то ці дві функції разом визначають деяку криву у просторі. Ця крива називається інтегральною кривою системи (5.3) у просторі XY_1Y_2.

Розв'язком системи рівнянь, наведеної у прикладі 1, є функції $y_1 = 2x$, $y_2 = 3x - 3$. Це рівняння площин у просторі XY_1Y_2. Лінією перетину цих площин є пряма. Канонічні рівняння прямої мають вигляд:

$$\frac{x}{1} = \frac{y_1}{2} = \frac{y_2+3}{3}.$$

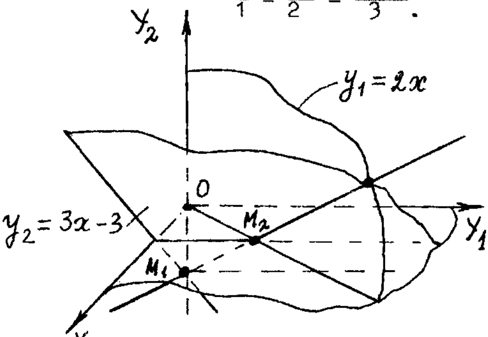


Рис. 18

На рис. 18 ця пряма проходить через точки M_1 і M_2.

Якщо $n>2$, то уже не можна побудувати інтегральну криву. Тоді будемо вважати, що розв'язок системи (5.2) є інтегральною кривою, яка лежить в $(n+1)$-вимірному просторі змінних x, y_1, y_2, ... , y_n.

Інтегруючи систему диференціальних рівнянь, одержуємо нескінченну множину розв'язків. Початкові умови дають можливість знайти один розв'язок.

Розглянемо точку $(x_o,\ y_{1o},\ \dots\ ,\ y_{no})$ $(n+1)$-вимірного простору. Початкові умови задаються таким чином: $y_1(x_o)=y_{1o}$, $y_2(x_o)=y_{2o}$, ... , $y_n(x_o)=y_{no}$. Тоді можна сформулювати <u>задачу Коші</u> для нормальної системи.

Знайти розв'язок системи (5.2), який задовольняє початкові умови $y_1(x_o)=y_{1o}$, ... , $y_n(x_o)=y_{no}$.

Таким чином розв'язок задачі Коші геометрично визначає інтегральну криву, яка проходить через точку $(x_o,\ y_{1o},\ \dots\ ,\ y_{no})$ $(n+1)$-вимірного простору.

Достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші задаються відповідною теоремою. Наведемо її формулювання.

<u>Теорема Коші</u>. Якщо функції $f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \dots\ ,\ y_n)$, $f_2(x,\ y_1,\ \dots\ ,\ y_n)$, ... , $f_n(x,\ y_1,\ \dots\ ,\ y_n)$, що визначаються системою (5.2), у деякій області D $(n+1)$-вимірного простору неперервні і мають неперервні частинні похідні по змінних y_1, y_2, ..., y_n, то для довільної точки $(x_o,\ y_{1o},\ \dots\ ,\ y_{no})$ області D існує і

причому единий розв'язок системи (5.2), визначений в околі точки x_o і який задовольняє початкові умови x_o, y_{1o}, ... , y_{no}.

Отже, існує нескінченна множина розв'язків (чому?), яка зветься загальним розв'язком системи. Дамо означення.

<u>Загальним</u> <u>розв'язком</u> <u>системи</u> диференціальних рівнянь (5.2) називаються n функцій

$$y_1 = \varphi_1(x,C_1,C_2,\ldots,C_n),\ y_2 = \varphi_2(x,C_1,C_2,\ldots,C_n),\ \ldots ,\quad y_n = \varphi_n(x,C_1,C_2,\ldots,C_n), \tag{5.4}$$

якщо в деякій області D_1 (n+1)-вимірного простору вони задовольняють систему (5.2) при довільних C_1, C_2, ..., C_n (із деякої множини) і якщо довільний розв'язок системи, що належить області D_1, може бути описаний функціями (5.4) при деяких значеннях сталих C_1, C_2, ..., C_n.

Розв'язок, одержаний із (5.4) при конкретних значеннях C_1, C_2, ..., C_n, називається частинним розв'язком системи (5.2).

Дамо механічну інтерпретацію нормальної системи трьох рівнянь. Для зручності незалежну змінну позначимо через t і вважатимемо, що вона виражає час, а змінні y_1, y_2 і y_3 позначимо відповідно через x, y і z. Тоді функції x(t), y(t) і z(t) можна інтерпретувати як координати рухомої точки. Тоді система (5.2) матиме вигляд (n=3):

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t,x,y,z),\qquad \frac{dy}{dt} = f_2(t,x,y,z),\qquad \frac{dz}{dt} = f_3(t,x,y,z). \tag{5.2^1}$$

Розв'язок системи (5.2) $x=\varphi_1(t)$, $y=\varphi_2(t)$ і $z=\varphi_3(t)$ визначає закон руху точки. Так, траєкторією руху точки, координати якої визначаються системою прикладу 1, є пряма $y_2 = \frac{3}{2}y_1 - 3$ (одержіть самостійно). Похідні $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ є координатами вектора швидкості рухомої точки.

Отже, система (5.2^1) задає у просторі XYZ (або у деякій області простору) в кожний момент часу t вектор швидкості $\{\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\}$, тобто, як і у випадку рівняння другого порядку (4.4), система задає поле швидкостей. Простір XYZ називають фазовим.

Розглянемо методи розв'язку деяких видів систем диференціальних рівнянь.

5.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Нормальна система диференціальних рівнянь (5.2) називається лінійною, якщо функції f_1, f_2, ..., f_n лінійні відносно шуканих функцій y_1, y_2, ..., y_n. Така система має вигляд:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= p_{11}(x)y_1 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x),\\
y_2' &= p_{21}(x)y_1 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + q_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.5)\\
y_n' &= p_{n1}(x)y_1 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x).
\end{aligned}
$$

Якщо функції $p_{11}(x)$, $p_{12}(x)$, ..., $p_{nn}(x)$, $q_1(x)$, ..., $q_n(x)$ неперервні на інтервалі (a,b), то згідно з теоремою Коші існує розв'язок системи(5.5).

Якщо функції $q_1(x)=q_2(x)=\ldots=q_n(x)=0$, то система (5.5) зветься однорідною, якщо ж хоч одна із функцій $q_1(x)$, ..., $q_n(x)$ не дорівнює тотожно нулеві, то система називається лінійною неоднорідною.

Далі розглянемо системи лінійних рівнянь, коефіцієнти яких є сталі, тобто $p_{ij}(x)=const$, для $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$,

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + q_1(x),\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + q_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5.6)\\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + q_n(x).
\end{aligned}
$$

Один із методів розв'язування системи (5.6) полягає у зведенні системи до одного рівняння n-го порядку відносно однієї шуканої функції. Потім послідовними перетвореннями знаходять решту функцій.

Розглянемо на прикладі системи з двома невідомими функціями.

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + q_1(x),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + q_2(x), \qquad (5.7)$$

Якщо $a_{12}=0$, то з першого рівняння знаходимо $y_1(x)$, а потім з другого рівняння знаходимо $y_2(x)$.

Нехай $a_{12}\neq 0$, тоді із першого рівняння одержуємо

$$y_2 = \frac{1}{a_{12}}\left(\frac{dy_1}{dx} - a_{11}y_1 - q_1(x)\right).$$

Підставивши y_2 у друге рівняння системи (5.7) одержимо рівняння другого порядку відносно функції $y_1(x)$:

$$y_1'' - (a_{11}-a_{12})y_1' + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_1 = a_{12}q_2 - a_{22}q_1 + q_1'$$

Розв'язавши це рівняння, знаходимо $y_1(x)$, а далі y_2.

<u>Зауваження</u>. Зведення нормальної системи рівнянь до одного рівняння n-го порядку можливе лише при певних умовах [8]. Як ми бачили, система (5.7) не зводиться до рівняння другого порядку відносно y_1 при $a_{12}=0$, але коли $a_{21}\neq 0$, то це можна зробити відносно функції y_2.

Розглянемо <u>метод Ейлера</u> розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь із сталими коефіцієнтами, тобто системи вигляду

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Ті ж міркування, що і в п.4.2.4, приводять до висновку, що ненульові розв'язки системи (5.8) слід шукати у вигляді

$$y_1 = \alpha_1 e^{rx},\ y_2 = \alpha_2 e^{rx},\ \ldots,\ y_n = \alpha_n e^{rx} \qquad (5.9)$$

Підставимо (5.9) у (5.8), зведемо подібні і одержимо (після скорочення на e^{rx}) систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь.

$$\begin{aligned} (a_{11} - r)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{12}\alpha_1 + (a_{22} - r)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - r)\alpha_n &= 0. \end{aligned} \qquad (5.10)$$

Для того, щоб ця система мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб детермінант системи дорівнював нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-r) & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & (a_{nn}-r) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.11)$$

Таким чином число r знаходимо з рівняння (5.11), яке зветься <u>характеристичним рівнянням</u> системи (5.8). Це рівняння n-го степеня відносно r. У загальному випадку відсутні методи його розв'язання, тому, як і у розділі 4, обмежимось випадком, коли $n=2$. Тоді маємо рівняння

$$r^2 - (a_{11}+a_{22})r + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \qquad (5.12)$$

Розглянемо різні випадки коренів рівняння (5.12). Якщо <u>корені дійсні різні</u> $r_1 \neq r_2$, тоді коефіцієнти α_1 і α_2 знаходяться з системи ($r=r_1$, підставляємо у систему (5.10) при $n=2$)

$$(a_{11}-r_1)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0,$$
$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-r_1)\alpha_2 = 0.$$

Нехай ненульовими розв'язками системи є числа $\alpha_1^{(1)}$ і $\alpha_2^{(1)}$. Підставивши $r = r_2$ у систему (5.10) (при $n=2$), знаходимо відповідно $\alpha_1^{(2)}$ і $\alpha_2^{(2)}$. Таким чином, одержуємо фундаментальну систему розв'язків системи двох диференціальних рівнянь відносно функцій y_1 і y_2.

$$y_{11}(x) = \alpha_1^{(1)}e^{r_1x}, \quad y_{12}(x) = \alpha_2^{(1)}e^{r_1x},$$

$$y_{21}(x) = \alpha_1^{(2)}e^{r_2x}, \quad y_{22}(x) = \alpha_2^{(2)}e^{r_2x}.$$

Тоді загальний розв'язок системи

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{aligned} \qquad (5.13)$$

має вигляд

$$y_1 = C_1\alpha_1^{(1)}e^{r_1x} + C_2\alpha_1^{(2)}e^{r_2x},$$

$$y_2 = C_1\alpha_2^{(1)}e^{r_1x} + C_2\alpha_2^{(2)}e^{r_2x}.$$

Якщо <u>корені характеристичного рівняння дійсні рівні</u>, тобто $r_1=r_2=r$, то їм відповідають розв'язки

$$y_1 = (A_1 + B_1x)e^{rx}, \quad y_2 = (A_2 + B_2x)e^{rx}.$$

Підставивши y_1 і y_2 у перше та друге рівняння системи (5.13), одержимо

$$B_1e^{rx}+(A_1+B_1x)re^{rx}=a_{11}(A_1+B_1x)e^{rx}+a_{12}(A_2+B_2x)e^{rx},$$

$$B_2e^{rx}+(A_2+B_2x)re^{rx}=a_{21}(A_1+B_1x)e^{rx}+a_{22}(A_2+B_2x)e^{rx}.$$

Скоротимо на e^{rx} і прирівняємо коефіцієнти при x та вільні члени і одержуємо систему:

$$\begin{aligned} B_1r &= a_{11}B_1 + a_{12}B_2,\\ B_1 + rA_1 &= A_1a_{11} + a_{12}A_2,\\ B_2r &= a_{21}B_1 + a_{22}B_2,\\ B_2 + rA_2 &= A_1a_{21} + a_{22}A_2, \end{aligned}$$

Звідси

$$B_1=\frac{a_{12}}{r-a_{11}}B_2, \quad A_1= - \frac{a_{12}}{(r-a_{11})^2}B_2 + \frac{a_{12}}{r-a_{11}}A_2$$

або

$$B_1=\frac{r-a_{22}}{a_{21}}B_2, \quad A_1= \frac{1}{a_{21}} B_2 + \frac{r-a_{22}}{a_{21}}A_2.$$

Замінивши A_2 на C_1, B_2 на C_2 одержимо розв'язок системи.

Звідси

$$y_1 = \left(\frac{a_{12}}{r-a_{11}}C_1 - \frac{a_{12}}{(r-a_{11})^2}C_2 + \frac{a_{12}}{r-a_{11}}C_2x\right) e^{rx}$$

$$y_2 = (C_1+C_2x)e^{rx}.$$

Розглянемо випадок, коли <u>серед</u> <u>коренів</u> <u>характеристичного</u> <u>рівняння</u> <u>є</u> <u>комплексні</u>. Оскільки розглядаємо випадок n=2, то характеристичне рівняння має тільки комплексні корені $r_{1/2} = \alpha \pm \beta i$. Побудуємо комплексні розв'язки вигляду

$$y_1 = \gamma_1e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_2 = \gamma_2e^{(\alpha+\beta i)x},$$

які відповідають кореню $\alpha+\beta i$. Щоб визначити γ_1 і γ_2 підставимо y_1 і y_2 в систему рівнянь (5.13). Тоді одержуємо

$$\gamma_1(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x} = a_{11}\gamma_1e^{(\alpha+\beta i)x} + a_{12}\gamma_2e^{(\alpha+\beta i)x},$$

$$\gamma_2(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x} = a_{21}\gamma_1e^{(\alpha+\beta i)x} + a_{22}\gamma_2e^{(\alpha+\beta i)x}.$$

Звідси одержуємо систему рівнянь відносно γ_1 і γ_2:

$$\gamma_1(\alpha+\beta i) = a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2,$$
$$\gamma_2(\alpha+\beta i) = a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2.$$

Розв'язуємо систему відносно γ_2:

$$\gamma_2 = \frac{1}{a_{12}}(\alpha+\beta i-a_{11})\gamma_1.$$

Покладемо, наприклад, $\gamma_1=1$, тоді $\gamma_2 = \frac{1}{a_{12}}(\alpha+\beta i-a_{11})$.

Отже,

$$y_1^{(1)} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),$$

$$y_2^{(1)} = \left(\frac{\alpha-a_{11}}{a_{12}} + \frac{\beta}{a_{12}}i\right)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

При $r_2 = \alpha - \beta i$ коефіцієнти γ_1 і γ_2 знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь:

$$\gamma_1(\alpha-\beta i) = a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2,$$
$$\gamma_2(\alpha-\beta i) = a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2.$$

Розв'язуємо систему відносно γ_2:

$$\gamma_2 = \frac{1}{a_{12}}(\alpha-\beta i-a_{11})\gamma_1.$$

Покладемо, наприклад, $\gamma_1=1$, тоді $\gamma_2 = \frac{1}{a_{12}}(\alpha-\beta i-a_{11})$.

Отже, одержуємо частинні розв'язки

$$y_1^{(2)} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x),$$

$$y_2^{(2)} = \left(\frac{\alpha-a_{11}}{a_{12}} - \frac{\beta}{a_{12}}i\right)e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Для одержання розв'язків, які б були дійсними функціями, використовуємо формули Ейлера і відділяємо уявні і дійсні частини комплексного розв'язку. Так, як і в п. 4.2.4, можна обгрунтувати, що уявні і дійсні частини є розв'язками.

$$y_{11}^{(1)} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_{12}^{(1)} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_{21}^{(1)} = e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha-a_{11}}{a_{12}}\cos\beta x - \frac{\beta}{a_{12}}\sin\beta x\right),$$

$$y_{22}^{(1)} = e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha-a_{11}}{a_{12}}\sin\beta x + \frac{\beta}{a_{12}}\cos\beta x\right),$$

$$y_{11}^{(2)} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_{12}^{(2)} = -e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_{21}^{(2)} = e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha-a_{11}}{a_{12}}\cos\beta x - \frac{\beta}{a_{12}}\sin\beta x\right),$$

$$y_{22}^{(2)} = -e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha-a_{11}}{a_{12}}\sin\beta x + \frac{\beta}{a_{12}}\cos\beta x\right).$$

Так, як і в п. 4.2.4, можна обгрунтувати, що одержані уявні і дійсні частини комплексного розв'язку є розв'язками. Серед них лінійно незалежними будуть (довести самостійно):

$$y_{11} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{12} = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_{21} = e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha - a_{11}}{a_{12}}\cos\beta x - \frac{\beta}{a_{12}}\sin\beta x \right),$$

$$y_{22} = e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha - a_{11}}{a_{12}}\sin\beta x + \frac{\beta}{a_{12}}\cos\beta x \right),$$

Загальним розв'язком системи буде

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{21} = e^{\alpha x}\left(\left(C_1 + \frac{\alpha - a_{11}}{a_{12}}\right)\cos\beta x - \frac{\beta}{a_{12}}C_2\sin\beta x\right),$$

$$y_2 = C_1 y_{12} + C_2 y_{22} = e^{\alpha x}\left(\left(C_1 + \frac{\alpha - a_{11}}{a_{12}}C_2\right)\sin\beta x + \frac{\beta}{a_{12}}C_2\cos\beta x\right).$$

Про інші методи розв'язування систем диференціальних рівнянь дивіться [6,8].

Алгоритми розв'зування нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку

<u>Метод виключення</u>. Розглянемо систему диференціальних рівнянь (5.3).

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\ y_1,\ y_2), \\ y_2' &= f_2(x,\ y_1,\ y_2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

1. Продиференціювати перше рівняння системи (5.3).

2. Виключити з нього $\frac{dy_2}{dx}$, використавши друге рівняння системи (5.3).

3. Із першого рівняння системи (5.3) виключити функцію y_2, $y_2 = f(x, y_1, y_1')$ і підставити у рівняння, яке одержано у пункті 2. В результаті перетворення одержати рівняння другого порядку.

4. Знайти загальний розв'язок цього рівняння $y_1 = h(x, C_1, C_2)$

5. Знайти функцію $y_2(x)$.

6. Знайти C_1, C_2, якщо є початкові умови.

7. Записати відповідь.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y; \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y, \ x(0) = 0, \ y(0) = 1.$$

Диференціюємо перше рівняння системи.

$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}$. В одержане рівняння підставимо похідну $\frac{dy}{dt}$, яку знаходимо з другого рівняння системи і дістанемо $\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} -x-2y$. Із одержаного рівняння виключаємо y, яке знаходимо з першого рівняння системи

$$y = 4x - \frac{dx}{dt} \qquad (3)$$

Отже, маємо лінійне однорідне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} - x - 2(4x - \frac{dx}{dt})$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x = C_1e^{3t} + C_2te^{3t}.$$

Підставивши функцію $x(t)$ у рівняння (3), знаходимо $y(t)$

$$y = 4(C_1e^{3t} + C_2te^{3t}) - 3C_1e^{3t} - C_2e^{3t} - 3C_2te^{3t},$$

$$y = (C_1 - C_2)e^{3t} + C_2te^{3t}.$$

Знайдемо C_1 і C_2, використовуючи початкові умови $x(0)=0$, $y(0)=1$, $0=C_1$, $1=C_1-C_2$. Отже $C_1=0$, $C_2=-1$.

Розв'язок даної системи має вигляд:

$x = -te^{3t}$, $y = e^{3t} - te^{3t} = e^{3t}(1 - t)$.

Відповідь: $x = -te^{3t}$, $y = e^{3t}(1 - t)$. #

Метод Ейлера. Розглянемо алгоритм розв'язування системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами цим методом на прикладі системи трьох рівнянь.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{aligned} \qquad (1)$$

1. Скласти характеристичне рівняння системи (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-r & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-r \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

2. Знайти корені характеристичного рівняння (2).

3. Записати вид розв'язку системи:

а). Якщо корені рівняння (2) дійсні і різні, то

$$x = \alpha_1 e^{rt},\ y = \alpha_2 e^{rt},\ z = \alpha_3 e^{rt}. \qquad (3)$$

б). Якщо серед коренів рівняння (2) є комплексні, тобто $r = \alpha \pm \beta i$, то $x = \gamma_1 e^{(\alpha+\beta i)t}$, $y = \gamma_2 e^{(\alpha+\beta i)t}$, $z = \gamma_3 e^{(\alpha+\beta i)t}$.

в). Якщо серед коренів рівняння (2) є дійсні і $r_1 = r_2$, то розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$x=(A_1+B_1 t)e^{r_1 t},\ y=(A_2+B_2 t)e^{r_1 t},\ z=(A_3+B_3 t)e^{r_1 t}, \qquad (4)$$

якщо $r_1=r_2=r_3$, то розв'язок системи шукаємо у вигляді:

$$x=(A_1+B_1 t+C_1 t^2)e^{r_1 t},\ y=(A_2+B_2 t+C_2 t^2)e^{r_1 t},\ z=(A_3+B_3 t+C_3 t^2)e^{r_1 t}. \qquad (5)$$

4. Побудувати фундаментальну систему розв'язків.

а). Якщо корені характеристичного рівняння (2) дійсні і різні, то α_1, α_2, α_3 знаходимо, розв'язавши систему рівнянь:

$$(a_{11}-r_i)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 = 0,$$

$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-r_i)\alpha_2 + a_{23}\alpha_3 = 0,$$

$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + (a_{33}-r_i)\alpha_3 = 0,$$

де $i=1,2,3$.

Фундаментальна система розв'язків має вигляд:

$$x^{(1)}=\alpha_1^{(1)} e^{r_1 t},\quad y^{(1)}=\alpha_2^{(1)} e^{r_1 t},\quad z^{(1)}=\alpha_3^{(1)} e^{r_1 t},$$

$$x^{(2)}=\alpha_1^{(2)} e^{r_2 t},\quad y^{(2)}=\alpha_2^{(2)} e^{r_2 t},\quad z^{(2)}=\alpha_3^{(2)} e^{r_2 t},$$

$$x^{(3)}=\alpha_1^{(3)} e^{r_3 t},\quad y^{(3)}=\alpha_2^{(3)} e^{r_3 t},\quad z^{(3)}=\alpha_3^{(3)} e^{r_3 t}.$$

б). Якщо корені характеристичного рівняння (2) комплексні, то для знаходження γ_1, γ_2, γ_3 потрібно підставити вирази $x=\gamma_1 e^{(\alpha+\beta i)t}$, $y=\gamma_2 e^{(\alpha+\beta i)t}$, $z=\gamma_3 e^{(\alpha+\beta i)t}$ в одне з рівнянь системи (1), одержати і розв'язати систему алгебраїчних рівнянь відносно γ_1, γ_2, γ_3. Записати розв'язок системи $x = \gamma_1 e^{(\alpha+\beta i)t}$, $y = \gamma_2 e^{(\alpha+\beta i)t}$, $z = \gamma_3 e^{(\alpha+\beta i)t}$. Відокремити дійсні і уявні частини і одержати лінійно незалежні частинні розв'язки системи. Записати фундаментальну систему розв'язків.

в). Якщо $r_1=r_2$, то підставити вирази (4) в одне з рівнянь системи.

Одержати і розв'язати рівняння відносно A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

Якщо $r_1=r_2=r_3$, то підставити вирази (5) у два рівняння системи, наприклад, у перше і друге рівняння системи (1).

Дістати і розв'язати рівняння відносно A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3. Записати фундаментальну систему розв'язків системи (1).

5. Записати загальний розв'язок системи:

$$\begin{aligned} x&=C_1x^{(1)} + C_2x^{(2)} + C_3x^{(3)},\\ y&=C_1y^{(1)} + C_2y^{(2)} + C_3y^{(3)},\\ z&=C_1z^{(1)} + C_2z^{(2)} + C_3z^{(3)}. \end{aligned} \tag{6}$$

6. Знайти сталі C_1, C_2, C_3, якщо є початкові умови.

7. Записати відповідь.

<u>Приклад</u> 3. Зінтегрувати систему рівнянь.

$$\frac{dx}{dt} = y + z,$$
$$\frac{dy}{dt} = 3x + z,$$
$$\frac{dz}{dt} = 3x + y.$$

Складемо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 3 & -r & 1 \\ 3 & 1 & -r \end{vmatrix} = 0,$$

тобто $r^3-7r-6=0$. Розв'язавши це рівняння, дістанемо:

$$r_1 = -1,\ r_2 = 3,\ r_3 = -2.$$

Отже, корені характеристичного рівняння дійсні і різні. Розв'язок системи шукаємо у вигляді $x = \alpha_1e^{rt}$, $y = \alpha_2e^{rt}$, $z = \alpha_3e^{rt}$.

Знайдемо відповідні значення α_1, α_2, α_3 для коренів r_1, r_2 і r_3.

Якщо $r_1=-1$, то для знаходження $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$ дістанемо систему рівнянь.

Замість r підставимо r=-1 у алгебраїчну систему (5.10) (n=3), коефіцієнтами якої є коефіцієнти даної системи диференціальних рівнянь.

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 0,$$

$$3\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 0,$$

$$3\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + \alpha_3^{(1)} = 0.$$

Звідси знаходимо $\alpha_1^{(1)} = 0$, $\alpha_2^{(1)} = -\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)} = \alpha_3$.

Якщо $r_2=3$, то $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}$ знаходимо із системи.

$$-3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 0,$$

$$3\alpha_1^{(2)} - 3\alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 0,$$

$$3\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} - 3\alpha_3^{(2)} = 0.$$

Розв'язавши систему, одержуємо $\alpha_1^{(2)}=\frac{2}{3}\alpha_3^{(2)}$, $\alpha_2^{(2)}=\alpha_3^{(2)}$, $\alpha_3^{(2)}=\alpha_3^{(2)}$.

Якщо $r_3=-2$, то для знаходження $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$ дістанемо систему:

$$2\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} = 0, \qquad \alpha_1^{(3)} = -\alpha_3^{(3)},$$

$$3\alpha_1^{(3)} + 2\alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)} = 0, \qquad \alpha_2^{(3)} = \alpha_3^{(3)},$$

$$3\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} + 2\alpha_3^{(3)} = 0, \qquad \alpha_3^{(3)} = \alpha_3^{(3)}.$$

Розв'язком системи є числа $\alpha_1^{(3)} = -\alpha_3^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)} = \alpha_3^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)} = \alpha_3^{(3)}$.

Запишемо фундаментальну систему розв'язків даної системи диференціальних рівнянь.

$$x^{(1)}=0, \qquad y^{(1)} = -\alpha_3^{(1)}e^{-t}, \qquad z^{(1)}=\alpha_3^{(1)}e^{-t},$$

$$x^{(2)}=\frac{2}{3}\alpha_3^{(2)}e^{3t}, \qquad y^{(2)} = -\alpha_3^{(2)}e^{3t}, \qquad z^{(2)}=\alpha_3^{(2)}e^{3t},$$

$$x^{(3)}=-\alpha_3^{(3)}e^{-2t}, \qquad y^{(3)} = -\alpha_3^{(3)}e^{-t}, \qquad z^{(3)}=\alpha_3^{(3)}e^{-2t}.$$

Тоді загальний розв'язок системи згідно з формулами (6) буде мати вигляд:

$$x = \frac{2}{3}C_2e^{3t} - C_3e^{-2t},$$
$$y = -C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + C_3e^{-2t},$$
$$z = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + C_3e^{-2t},$$

де $C_1=\alpha_3^{(1)}$, $C_2=\alpha_3^{(2)}$, $C_3=\alpha_3^{(3)}$.

Відповідь:
$$x = \frac{2}{3}C_2e^{3t} - C_3e^{-2t},$$
$$y = -C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + C_3e^{-2t},$$
$$z = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + C_3e^{-2t}. \quad \#$$

<u>Приклад</u> 4. Зінтегрувати систему

$$\frac{dx}{dt} = -y+z,$$
$$\frac{dy}{dt} = z,$$
$$\frac{dz}{dt} = -x+z, \qquad x(0) = 1,\ y(0) = \frac{1}{2};\ z(0) = \frac{1}{2}.$$

\# Записуємо характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix} -r & -1 & 1 \\ 0 & -r & 1 \\ -1 & 0 & 1-r \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язавши його рівняння, дістанемо корені: $r_1=1$, $r_{2/3}=\pm i$.

Знаходимо частинний розв'язок системи у вигляді $x^{(1)}=\alpha_1e^{r_1t}$, $y^{(1)}=\alpha_2e^{r_1t}$; $z^{(1)}=\alpha_3e^{r_1t}$, який відповідає дійсному кореню $r_1=1$.

Коефіцієнти α_1, α_2, α_3 знаходимо з системи

$$-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0, \qquad \alpha_1=0,\ \alpha_2=\alpha_3.$$
$$-\alpha_2+\alpha_3=0,$$
$$-\alpha_1 \qquad =0,$$

Частинний розв'язок системи має вигляд $x^{(1)}=0$, $y^{(1)}=\alpha_3e^t$; $z=\alpha_3e^t$, $x^{(1)}=0$, $y^{(1)}=C_1e^t$, $z^{(1)}=C_1e^t$, де $C_1=\alpha_3$.

Тепер побудуємо розв'язки вигляду:

$x=\gamma_1e^{(\alpha+\beta i)t}$, $y=\gamma_2e^{(\alpha+\beta i)t}$, $z=\gamma_3e^{(\alpha+\beta i)t}$, які відповідають кореню $r_{2/3}=\pm i$.

Знайдемо γ_1, γ_2, γ_3, підставивши вирази $x=\gamma_1e^{it}$, $y=\gamma_2e^{it}$, $z=\gamma_3e^{it}$ у перше і друге рівняння системи:

$$\gamma_1ie^{it}=-\gamma_2e^{it}+\gamma_3e^{it}, \qquad \text{або} \qquad \gamma_1i=-\gamma_2+\gamma_3,$$
$$\gamma_2ie^{it}=\gamma_3e^{it}. \qquad\qquad \gamma_2i=\gamma_3.$$

Нехай $\gamma_3=1$, тоді $\gamma_2=-i$; $\gamma_1=1-i$.

Отже $x=(1-i)e^{it}=(1-i)(\cos t+i\sin t)=(\cos t+\sin t)+i(\sin t-\cos t)$.

$y=-ie^{it}=-i(\cos t+i\sin t)=\sin t-i\cos t$.

$z=e^{it}=\cos t+i\sin t$.

Відокремивши дійсну і уявну частини, одержимо лінійно незалежні частинні розв'язки:

$x^{(2)}=\cos t+\sin t$, $y^{(2)}=\sin t$, $z^{(2)}=\cos t$,

$x^{(3)}=\sin t-\cos t$, $y^{(3)}=-\cos t$, $z^{(3)}=\sin t$.

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$x=C_1x^{(1)}+C_2x^{(2)}+C_3x^{(3)}=C_2(\cos t+\sin t)+C_3(\sin t-\cos t)=$
$=(C_2-C_3)\cos t+(C_2+C_3)\sin t.$

$y=C_1y^{(1)}+C_2y^{(2)}+C_3y^{(3)}=C_1e^t+C_2\sin t-C_3\cos t.$

$z=C_1z^{(1)}+C_2z^{(2)}+C_3z^{(3)}=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t.$

Використовуючи початкові умови, знайдемо C_1, C_2, C_3, тобто:

$1=C_2-C_3$,

$\frac{1}{2}=C_1-C_3$, Звідси: $C_1=0$, $C_2=0{,}5$, $C_3=-0{,}5$.

$\frac{1}{2}=C_1+C_2$.

Тоді частинний розв'язок має вигляд

$x=\cos t$, $y = 0{,}5\sin t + 0{,}5\cos t$, $z = 0{,}5\cos t - 0{,}5\sin t$.

Відповідь: $x=\cos t$, $y=0{,}5(\sin t+\cos t)$, $z=0{,}5(\cos t-\sin t)$.

Приклад 5. Зінтегрувати систему:

$$\frac{dx}{dt} = x - z,$$
$$\frac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z,$$
$$\frac{dz}{dt} = 4x - y - 4z.$$

Записуемо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 0 & -1 \\ -6 & 2-r & 6 \\ 4 & -1 & -4-r \end{vmatrix} =0,$$

Його корені $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = 1$.

Знайдемо лінійно незалежні частинні розв'язки, які відповідають кратному кореневі $r_1=r_2=0$. В цьому випадку розв'язок системи шукаємо у вигляді

$x = A_1 + B_1t$, $y = A_2 + B_2t$, $z = A_3 + B_3t$.

Знайдемо A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3. Для цього вирази y, x, z підставимо у систему, дістанемо:

$B_1= A_1-A_3+(B_1-B_3)t,$

$B_2=-6A_1+2A_2+6A_3+(2B_2-6B_1+6B_3)t,$

$B_3= 4A_1-A_2-4A_3+(4B_1-B_2-4B_3)t.$

Прирівняемо коефіцієнти при t і вільні члени, одержимо систему алгебраїчних рівнянь:

$$B_1-B_3=0,$$
$$A_1-A_3=B_1,$$
$$2B_2-6B_1+6B_3=0,$$
$$-6A_1+2A_2+6A_3=B_2,$$
$$4B_1-B_2-4B_3=0,$$
$$4A_1-A_2-4A_3=B_3.$$

Нехай $A_1=1$, $A_3=1$, тоді $A_2=0$, $B_1=B_2=0$, $B_3=1$. Частинні розв'зки, які відповідають цим коефіцієнтам, мають вигляд:

$x^{(1)}=1$, $y^{(1)}=0$, $z^{(1)}=1$,

Якщо $A_1=1$, $A_3=0$, то $B_1=1$, $B_2=0$, $B_3=1$, $A_2=3$, і частинні розв'язки системи будуть такими:

$x^{(2)}=t+1$, $y^{(2)}=3$, $z^{(2)}=t$.

Знаходимо частинний розв'язок системи, який відповідає кореню $r_3=-1$, у вигляді:

$x^{(3)}=\alpha_1 e^{-t}$, $y^{(3)}=\alpha_2 e^{-t}$, $z^{(3)}=\alpha_3 e^{-t}$.

Для знаходження коефіцієнтів α_1, α_2, α_3 побудуемо систему:

$$\begin{aligned} &2\alpha_1-\alpha_3=0,\\ &-6\alpha_1+3\alpha_2+6\alpha_3=0,\\ &4\alpha_1-\alpha_2-3\alpha_3=0. \end{aligned} \quad \text{або} \quad \begin{aligned} &2\alpha_1-\alpha_3=0,\\ &-2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0. \end{aligned}$$

Нехай $\alpha_1=1$; $\alpha_2=-2$, тоді $\alpha_3=2$. Частинний розв'язок системи, який відповідає кореню $r_3=-1$, має вигляд

$x^{(3)}= e^{-t}$, $y^{(3)}= -2e^{-t}$, $z^{(3)}= 2e^{-t}$.

Підставивши частинні розв'язки $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $z^{(1)}$, $z^{(2)}$ і $z^{(3)}$ у систему (5), одержимо загальний розв'язок системи.

$$x = C_1 + C_2(t + 1) + C_3e^{-t},$$
$$y = 3C_1 -2C_3e^{-t},$$
$$z = C_1 + C_2t + 2C_3e^{-t}.$$

Відповідь:

$x = C_1 + C_2(t+1) + C_3e^{-t}$, $y = 3C_1 -2C_3e^{-t}$, $z = C_1 + C_2t +2C_3e^{-t}$.

Завдання для самостійної роботи

Зінтегрувати системи диференціальних рівнянь.

1. $\frac{dx}{dt}=3-2y,$
$\frac{dy}{dt}=2x-2y.$

2. $\frac{dx}{dt}=x-2y,$
$\frac{dy}{dt}=x+3y.$

3. $\frac{dx}{dt}+3x+y=0,$
$\frac{dy}{dt}=-x+y=0.$

4. $\frac{dx}{dt}=-7x+y,$
$\frac{dy}{dt}=-5y-2x.$

5. $\frac{dx}{dt}=2x-9y,$
$\frac{dy}{dt}=x+8y.$

6. $\frac{dx}{dt}=y,$
$\frac{dy}{dt}=-x,\quad x(0)=y(0)=1.$

7. $\frac{dx}{dt}=-4(x+y),$
$\frac{dy}{dt}=x,\ x(0)=0,\ y(0)=1.$

8. $\frac{dx}{dt}=x+5y,$
$\frac{dy}{dt}=-3y-x,\quad x(0)=-2,\ y(0)=1.$

9. $2\frac{dx}{dt}=6x-y-6t^2-t+3,$
$\frac{dy}{dt}=2y-2t-1,\quad x(0)=2;\ y(0)=3.$

10. $\frac{dy}{dx}=y+z,$
$\frac{dz}{dt}=-2y+4z,\quad y=0,\ z=-1,$ при $x=0.$

11. $\frac{dx}{dt}=-x+y+z,$
$\frac{dy}{dt}=x-y+z,$
$\frac{dz}{dt}=x+y-z.$

12. $\frac{dx}{dt}=y+z,$
$\frac{dy}{dt}=x+z,$
$\frac{dz}{dt}=x+y,\ x(0)=-1,\ y(0)=1,\ z(0)=0.$

13. $\frac{dx}{dt}=-y+z+2x,$
$\frac{dy}{dt}=x+2y-z,$
$\frac{dz}{dt}=x+2z-y.$

14. $\frac{dx}{dt}=3x-y+z,$
$\frac{dy}{dt}=x+y+z,$
$\frac{dz}{dt}=4x-y+4z.$

15. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-4x+2y+5z, \\ \frac{dy}{dt}=6x-y-6z, \\ \frac{dz}{dt}=-8x+3y+9z. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=2y-z, \\ \frac{dz}{dx}=y+2z. \end{cases}$

Відповіді

1. $x=t+C_1\cos 2t+C_2\sin 2t;$
$y=1+C_1\sin 2t-C_2\cos 2t.$

2. $x=(C_1-C_2)e^{2t}\cos t-(C_1+C_2)e^{2t}\sin t;$
$y=(C_1\sin t+C_2\cos t)e^{2t}.$

3. $x=e^{-2t}(1-2t);$
$y=e^{-2t}(1+2t).$

4. $x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t);$
$y=e^{-6t}[(C_1+C_2)\cos t-(C_1-C_2\sin t)].$

5. $x=(C_1-3C_1t-3C_2)e^{5t};$
$y=(C_1t+C_2)e^{5t}.$

6. $x=\cos t+\sin t;$
$y=\cos t-\sin t.$

7. $x=(1-2t)e^{-2t};$
$y=te^{-2t}.$

8. $x=(\sin t-2\cos t)e^{-t};$
$y=e^{-t}\cos t.$

9. $x=e^{2t}+e^{3t}+t^2+1;$
$y=2e^{2t}+t+1.$

10. $y=e^{2x}-e^{3x};$
$z=5e^{-2x}.$

11. $x=C_1e^{t}+C_2e^{-2t};$
$y=C_1e^{t}+C_2e^{-2t};$
$z=C_1e^{t}-(C_2+C_3)e^{-2t}.$

12. $x=-e^{-t};$
$y=e^{-t}$
$z=0.$

13. $x=C_2e^{2t}+C_3e^{3t};$
$y=C_1e^{t}+C_2e^{2t};$
$z=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}.$

14. $x=C_1e^{t}+C_2e^{2t}+C_3e^{5t};$
$y=C_1e^{t}-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t};$
$z=-C_1e^{t}-3C_2e^{2t}+3C_3e^{5t}.$

15. $x=(C_1t+C_1+C_2)e^t$; $y=3C_1e^t$; $z=(C_1t+C_2)e^t$.

16. $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$; $z=e^{2x}(C_1\sin x-C_2\cos x)$.

Рекомендована література

[1] Гл.XIII, §§ 29-30; [2] §§ 1.19-1.22; [6] § 4.2, § 4.4.

Завдання для самоперевірки та систематизації знань

1. Дайте означення нормальної системи диференціальних рівнянь.

2. В чому суть методу виключення при знаходженні загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку?

3. Як знаходиться загальний розв'язок системи двох лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами у випадку простих коренів характеристичного рівняння?

4. Дайте геометричну інтерпретацію розв'язку нормальної системи двох диференціальних рівнянь першого порядку.

5. У якому випадку нормальну систему двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку із сталими коефіцієнтами можна звести до одного рівняння другого порядку?

РОЗДІЛ 6. ДЕЯКІ НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У п.п. 2.1.1, 2.1.2, 4.3 розглянуто геометричні ідеї наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь. Нижче познайомимось з деякими наближеними аналітичними методами.

6.1. Метод послідовних наближень

Нехай дано диференціальне рівняння

$$y'=f(x,y). \tag{6.1}$$

Треба знайти розв'язок рівняння (6.1), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.2}$$

Відповідно до теореми Коші у деякому околі точки (x_0,y_0) існує єдиний розв'язок задачі Коші (6.1)-(6.2).

Метод послідовних наближень полягає у побудові послідовності функцій $\{y_n\}$, яка збігається до функції $y(x)$ і є розв'язком задачі (6.1)-(6.2).

Побудуемо цю послідовність. Проінтегруемо рівняння (6.1) на проміжку $[x_0,x]$, вважаючи, що $x_0 \leqslant x$.

$$dy = f(x,y)dx,$$

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx,$$

$$y - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx,$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx. \tag{6.3}$$

У рівності (6.3) шукана функція $y(x)$ входить також під знак інтеграла. Такі рівності називаються інтегральними рівняннями.

Розв'язок рівняння (6.3) є також розв'язком задачі (6.1)-(6.2). Дійсно, якщо $y(x)$ розв'язок (6.3), то

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx.$$

Продиференціюемо тотожність

$$y'(x) \equiv \left(\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx\right)'_x,$$

$$y'(x) = f(x,y(x)).$$

Крім того $y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x,y(x))dx = y_0$.

Отже, функція $y(x)$ задовольняє рівняння (6.1) і початкову умову (6.2). Таким чином, для побудови розв'язку задачі (6.1)-(6.2) досить знайти розв'язок рівняння (6.3). Пошук його здійснюємо методом послідовних наближень. За нульове наближення можна взяти довільну функцію. Зручніше вибрати початкову умову y_0, тобто $y_0(x)=y_0$. Далі знаходимо $y_1(x)$ скориставшись (6.3).

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx.$$

Друге наближення знаходимо таким же чином

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1(x))dx,$$

і так далі

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1}(x))dx. \tag{6.4}$$

Отже, рекурентна формула (6.4) дає можливість побудувати послідовність $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$,...

Можна довести, що при всіх x з деякого околу точки x_0 існує границя

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x), \tag{6.5}$$

причому, границя $y(x)$ є розв'язком задачі (6.1)-(6.2).

Оцінку похибки можна одержати за таких умов. Якщо функція $f(x,y)$ досягає максимуму M у деякому прямокутнику $R\{|x-x_0|\leqslant a, |y-y_0|\leqslant b\}$ а також на R задовольняє умові Ліпшиця по y: $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|$, $N=const$, то має місце оцінка

$$|y(x)-y_n(x)|\leqslant M\ N^n\ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

при $x \in [x_0,\ x_0+h]$, $h=\min(a,\frac{b}{M})$.

Розглянемо приклади.

<u>Приклад 1</u>. Методом послідовних наближень знайти n-е наближення розв'язку задачі Коші

$$y' = y - x,\ y(0) = 1.$$

\# Нехай $y_0(x)=1$. Побудуємо послідовність $y_n(x)$.

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x (y_0 - x)dx = 1 + \int_0^x (1 - x)dx = 1 + x - \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + x - \frac{x^2}{2} - x)dx = 1 + x - \frac{x^3}{3!},$$

$$y_3(x) = 1+\int_0^x (1+ x-\frac{x^3}{3!} -x)dx =1 +x - \frac{x^4}{4!},$$

....,

$$y_n(x) = 1 + \int_0^x (1 + x - \frac{x^n}{n!} - x)dx = 1 + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

....

Оцінимо похибку.

Функція $f(x,y) = y - x$ і її похідна $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ неперервні в довільному прямокутнику $|x|<a$, $|y-1|<b$. Нехай $a = 1$, $b = 1$. Знайдемо M і N. $M = \max|f(x,y)| = \max|y - x| = 3$, із умови Ліпшиця одержуємо $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - x - (y_2 - x)| = |y_1-y_2|$ і тоді $|y_1-y_2| \leqslant N|y_1-y_2|$, звідси приймемо $N = 1$, $h=\min(1,\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$. Отже, на відрізку $[0;\frac{1}{3}]$ одержуємо

$$|y(x) - y_4(x)| = |y(x) - (1 + x - \frac{x^5}{5!})| \leqslant 3\ 1^4\ \frac{x^5}{5!},$$

$$\max\ |y(x) - y_4(x)| \leqslant 3\ \frac{(\frac{1}{3})^5}{5!} \approx 0{,}0001,\ x\in[0;\frac{1}{3}].$$

Фактично розв'язком даної задачі є функція $y=1+x$. Диференціальне рівняння розв'язувалось методом ізоклін у п. 2.1.1 (див. приклад 5, рис. 9).

У даному випадку розв'язок одержимо, знайшовши границю

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 1+x,$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ при довільному $x \in (-\infty;\infty)$.

Крім того, зауважимо, що це лінійне рівняння і його загальний розв'язок $y = 1 + x + Ce^x$. #

6.2. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

Нехай розв'язок $y(x)$ задачі (6.1)-(6.2) розкладається в степеневий ряд Тейлора

$$y(x)=y_0+ \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +\ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Початкова умова задає перший член ряду y_0, похідна $y'(x_0)$ знаходиться з рівняння (6.1). Для того, щоб знайти наступні похідні $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, ..., послідовно диференціюємо рівняння (6.1) і в одержані вирази підставляємо $x = x_0$. Можна довести, що при певних умовах, пов'язаних з властивостями функції $f(x,y)$, в околі точки (x_0,y_0) при x досить близьких до x_0 існує єдиний розв'язок задачі Коші (6.1)-(6.2) у вигляді ряду Тейлора.

Таким же чином будується розв'язок задачі Коші диференціального рівняння n-го порядку:

$$y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}) \qquad (6.6)$$

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n-1. \qquad (6.7)$$

У цьому випадку початкові умови дають можливість знайти перші n коефіцієнтів. Далі, скориставшись рівнянням (6.6), знаходимо $y^{(n)}_{(x_0)}$. Значення наступних похідних в точці x_0 знаходимо шляхом диференціювання рівняння (6.6).

<u>Приклад 2</u>. Побудувати розв'язок рівняння (1.1) у вигляді ряду Тейлора, якщо $\varphi(0)=\frac{\pi}{4}$; $\varphi'(0)=1$.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin\varphi = 0 \qquad (6.8)$$

Розв'язок рівняння (6.8) шукаємо у вигляді ряду

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \ldots,$$

де $\varphi(0)=\frac{\pi}{4}$; $\varphi'(0)=1$.

З рівняння (6.8) знаходимо $\varphi''(0)$; $\varphi''(t) = -\sin\varphi(t)$, $\varphi''(0)=-\sin\varphi(0)$, $\varphi''(0)= -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Далі диференціюємо послідовно рівняння (6.8) і знаходимо $\varphi'''(0)$, $\varphi^{(4)}(0)$, ...

$\varphi'''(t)=-\cos\varphi(t)\ \varphi'(t);\quad \varphi'''(0)= -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi^{(4)}(t)=[\varphi'(t)]^2 \sin\varphi - \cos\varphi(t)\ \varphi''(t);\quad \varphi^{(4)}(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

$\varphi^{(5)}(t)=3\varphi'(t)\varphi''(t)\sin\varphi(t) + ((\varphi'(t))^2 - \varphi''(t)\cos\varphi(t)$,

$\varphi^{(5)}(0) = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Обмежимось многочленом п'ятого степеня. Отже, наближений розв'язок має вигляд:

$$\varphi(t)\approx \frac{\pi}{4} + t - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}t^3 + \frac{\sqrt{2}}{4\cdot 4!}t^4 - \frac{2-\sqrt{2}}{2\cdot 5!}t^5. \quad \#$$

Інколи метод степеневого ряду Тейлора використовують у поєднанні з методом послідовних наближень, використовуючи декілька перших членів ряду за нульове наближення.

Розглянемо застосування методу невизначених коефіцієнтів до побудови розв'язку задачі Коші у вигляді степеневого ряду. Крім того побачимо, яким шляхом можуть вводитись нові функції.

Приклад 3. Рівняння $y''+\frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y=0$, (6.9)

або

$$x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y=0 \qquad (6.10)$$

називається диференціальним рівнянням Бесселя ν-го порядку. Знайти загальний розв'язок рівняння (6.9).

Для побудови загального розв'язку знайдемо лінійно незалежні частинні розв'язки. Спробуємо знайти розв'язок рівняння у вигляді степеневого ряду

$$y= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} \qquad (6.11)$$

де p-параметр, який треба буде визначити.

Підставимо (6.11) у (6.10). Для цього знаходимо y', y'', вважаючи, що це допустимо. Умови можливості цього сформулюємо пізніше.

$$y'= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p+k)x^{k+p-1}.$$

$$y''= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p+k)(p+k-1)x^{k+p-2}.$$

Тоді дістанемо $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(p+k)(p+k-1)x^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(p+k)x^{k+p} + (x^2-\nu^2)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p}=0.$

Звідси $\sum_{k=0}^{\infty} [a_k(p+k)(p+k-1) + a_k(p+k) + (x^2-\nu^2)a_k]x^{p+k}=0.$

Отже, прирівнявши до нуля коефіцієнти при x^p, x^{p+1}, ..., складемо нескінченну систему рівнянь

$$
\begin{array}{lll}
a_0[p(p-1)+p-\nu^2]=0, & & a_0[p^2-\nu^2]=0,\\
a_1[p(p+1)+p+1-\nu^2]=0, & \text{або} & a_1[(p+1)^2-\nu^2]=0,\\
a_2[(p+2)(p+1)+p+2-\nu^2]+a_0=0, & & a_2[(p+2)^2-\nu^2]+a_0=0.\\
\dots\dots\dots & & \\
a_k[(p+k)(p+k-1)+p+k-\nu^2]+a_{k-2}=0, & & a_k[(p+k)^2-\nu^2]+a_{k-2}=0.
\end{array}
$$

Оскільки параметр ρ довільний, то вважаємо, що $a_0\neq0$. Тоді з першого рівняння системи випливає, що $p^2-\nu^2=0$ або $p=\pm\nu$. Нехай $\nu\geqslant0$. Із решти рівнянь системи знаходимо a_1, a_2, ..., a_n,...

$$
\begin{array}{lll}
a_1[(\nu+1)^2-\nu^2]=0, & a_1[2\nu+1]=0, & a_1=0,\\
a_2[(\nu+2)^2-\nu^2]+a_0=0, & a_2[4\nu+4]+a_0=0, & a_2=-\dfrac{a_0}{2^2(\nu+1)},\\
a_3[(\nu+3)^2-\nu^2]+a_1=0, & a_3[6\nu+9]+a_1=0, & a_3=0,\\
\dots\dots\dots & & \\
a_{2k-1}[(\nu+2k-1)^2-\nu^2]+a_{2k-3}=0, & & a_{2k-1}=0.\\
a_{2k}[(\nu+2k)^2-\nu^2]+a_{2k-2}=0, & & a_{2k}=\dfrac{(-1)^k a_0}{2^{2k}\cdot k!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}.
\end{array}
$$

При цьому повинна виконуватись умова $\nu+k\neq0$, $k=1,2,\dots$

Отже розв'язок рівняння має вигляд

$$y=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k}\cdot k!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \qquad (6.12)$$

Перетворимо цей вираз за рахунок вибору a_0. Скористаємося функцією Ейлера $\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dx$. Вона має важливу властивість, при $x>0$ $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$, $\Gamma(0)=1$, $\Gamma(1)=1$.

Нехай $a_0=\dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$. Тоді:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+1}\cdot k!\Gamma(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}$$

або

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}. \qquad (6.13)$$

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, можна довести, що цей ряд збігається при довільному x.

Розв'язок рівняння (6.9) у вигляді степеневого ряду (6.13) називають функцією Бесселя першого роду порядку ν, позначають її символом $J_\nu(x)$.

Якщо покласти $p=-\nu$ і вибрати $a_0=\frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}$, то дістанемо другий розв'язок, функцію Бесселя першого роду порядку $-\nu$:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(k+1-\nu)}. \qquad (6.14)$$

Якщо $\nu\neq n$, $n=1,2,\ldots$, то $J_\nu(x)$ і $J_{-\nu}(x)$ лінійно незалежні і загальний розв'язок рівняння Бесселя можна записати у вигляді

$$y=C_1J_\nu(x) + C_2J_{-\nu}(x).$$

Якщо $\nu=n$, то має місце співвідношення $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$, тобто, розв'язки $J_{-n}(x)$ і $J_n(x)$ лінійно залежні. Щоб знайти другий лінійно незалежний розв'язок, скористуємося формулою (4.4), як це раніше зроблено у п.4.2.4. Нехай $y_1(x)=J_n(x)$, тоді $y_2(x)=J_n(x)=\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}$. Отже загальний розв'язок рівняння Бесселя має вигляд $y=C_1J_n(x)+C_2J_n(x)\int\frac{dx}{xJ^2(x)}$. #

Зауваження. Із формули (6.12) при $\nu=-1/2$ одержуємо

$$y=a_0x^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k)!} = a_0x^{-\frac{1}{2}}\cos x.$$

Тобто функція Бесселя при деяких ν виражається через тригонометричні функції $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}\cos x$.

6.3. Метод лінеаризації

Як ми уже бачили, моделі деяких процесів описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Особливо це стосується дослідження систем автоматичного управління, які описуються нелінійними математичними моделями. Тому для одержання характеристик динамічної системи часто перетворюють рівняння. Одним із методів перетворення рівнянь є метод лінеаризації. Він полягає у послідовному перетворенні нелінійного рівняння, в результаті чого одержується лінійне рівняння, яке відповідає заданому нелінійному. Розглядають повну лінеаризацію, коли рівняння зводиться до такого, в якому міститься менша кількість нелінійностей або спрощені нелінйності. Наприклад, коли функція $y = e^x$ заміняється першими членами ряду Тейлора $1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Розглянемо задачу Коші. Знайти розв'язок рівняння $y'=f(x,y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Нехай функція $f(x,y)$ має похідну другого порядку по аргументу y. Якщо $y_0(x)$ нульове наближення розв'язку $y(x)$, то функцію $f(x,y)$ замінимо першими двома членами ряду Тейлора

$$f(x,y) \approx f(x,y_0(x)) + \frac{\partial f(x,y_0(x))}{\partial y}(y(x)-y_0(x)).$$

Тоді перше наближення $y_1(x)$ розв'язку $y(x)$ одержуємо з лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x,y_0(x)) + \frac{\partial f(x,y_0(x))}{\partial y}(y_1(x)-y_0(x))$$

за умови, що $y_1(x_0)=y_0$.

Далі знаходимо друге наближення $y_2(x)$ і т.д., n-м наближенням буде розв'язок рівняння

$$\frac{dy_n(x)}{dx} = f(x,y_{n-1}(x)) + \frac{\partial f(x,y_{n-1}(x))}{\partial y}(y_n(x)-y_{n-1}(x)),$$

$$y_n(x_0)=y_0.$$

Обчислення закінчуються, коли досягається умова

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_m} |y_{n-1}(x)-y_n(x)| \leqslant \xi,$$

де ξ-похибка розв'язку на відрізку $[x_0,x_m]$.

Розв'язком вихідного диференціального рівняння вважається функція, яка задовольняє вказану умову.

На практиці в основному розглядається перше наближення. Але при цьому повинно бути обгрунтовано, що відхилення змінних від значень, які характеризують процеси, що установилися, достатньо малі.

Приклад. Знайти перше наближення задачі Коші

$$y'=\sqrt{y^2-1}, \quad y(0)=2.$$

За нульове наближення $y_0(x)$ візьмемо початкову умову, тобто $y_0(x)=2$. Тоді перше наближення знаходимо з рівняння

$$y_1'=\sqrt{2^2-1} + \frac{2}{\sqrt{2^2-1}}(y_1(x)-2)$$

або $y_1' - \frac{2}{\sqrt{3}} y_1(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Розв'язком рівняння буде функція $y_1(x)=\frac{3}{2} e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x} + \frac{1}{2}$, яка задовольняє також умову $y_1(0)=2$. Отже, вважаємо

$$y(x) \approx \frac{3}{2}\, e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x} + \frac{1}{2}.$$

Розв'язком даного рівняння є функція $y = ch(x + C)$ (див. п. 2.1.3). Якщо ж скористатися початковою умовою $y(0)=2$, то одержимо частинний розв'язок $y=ch(x+1,317)$, а його першим наближенням є функція $y_1(x)$.

Максимальна відносна похибка наближення розв'язку $y=ch(x+1,317)$ функцією $y_1 = \frac{3}{2}\, e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x} + \frac{1}{2}$ на відрізку $[-1,1]$ складає 0,078. Якщо така точність наближення задовольняє, то функцію $y= \frac{3}{2}\, e^{\frac{2}{\sqrt{3}}x} + \frac{1}{2}$ вважаємо розв'язком задачі. В противному разі продовжуємо пошук точнішого розв'язку, розв'язуючи рівняння

$$y_n'=\sqrt{y_{n-1}^2-1} + y_{n-1}(y_n-y_{n-1})/\sqrt{y_{n-1}^2-1}$$

при $n=2,3,\ldots$

Але можна переконатися у тому, що пошук уже другого наближення з відповідного диференціального рівняння можливий зі значними труднощами. #

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти n-е наближення розв'язку задачі Коші методом послідовних наближень.

а). $y'=y-x$, $y(0)=2$; б). $y'=y-x$, $y(2)=0$.

Порівняйте з відповідними наближеними розв'язками, які одержані методом ізоклін (рис. 9).

2. Знайти наближені розв'язки задачі Коші для рівнянь, наведених у попередній задачі, за допомогою ряду Тейлора.

3. Зінтегрувати за допомогою степеневого ряду рівняння

а). $y'-2xy=0$, $y(0)=1$; б). $xy''-(2+x)y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

4. Знайти перші чотири члени розкладу в ряд Тейлора розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння

а). $y''+y'-x^2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;

б). $y''=x^2y$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Рекомендована література:

[1] Гл. XIII.; [2] § 1.24.

Додаток

Нові інформаційні технології вивчення диференціальних рівнянь (методичні рекомендації)

І. Психолого-педагогічні передумови використання комп'ютеризованих технологій

Однією із істотних особливостей сучасних занять з математики є його багатоплановість. На одному і тому самому занятті, як правило, викладачеві доводиться розв'язувати не одну дидактичну задачу, а декілька. Відповідно до кожної конкретної задачі викладач визначатиме найдоцільніший з його точки зору метод навчання.

У кожному конкретному випадку, розв'язуючи проблему вибору методу або кількох методів, викладач використовує всі можливості для активізації пізнавальної діяльності студентів, для виховання в них самостійності в оволодінні новими знаннями, уміннями та навичками.

Включення в методичну систему комп'ютерних засобів навчання вимагає розробки методики використання таких принципово нових дидактичних засобів навчання, як педагогічні програмні засоби, а також математичних пакетів програм.

Це дозволяє частково ліквідувати розрив між математикою, яка викладається у вузі, та тією, яка "працює" на робочому місці інженера. При викладанні математики не можна не враховувати інтенсивного розвитку різних галузей математики, її ідей, понять та методів. Комп'ютерна техніка створює передумови до автоматизації процесу розв'язування цілих класів задач. Існуючі математичні професійно-орієнтовані пакети програм (ППП) акумулюють методи розв'язування задач у формі, доступній широким колам користувачів. Маніпулювання невеликою кількістю клавіш чи іншими засобами допомагає реалізувати процес розв'язування задачі. Спілкування користувача відбувається на підмножині природної мови, команди якої або близькі до природної мови, або є послідовністю відносно простих кодів. На основі цих кодів та алгоритму розв'язування задачі генерується ланцюг підпрограм для виконання завдання.

Традиційна дидактика при вивченні дисципліни рекомендує жорстку послідовність вивчення розділів навчального предмету (принцип систематичності та послідовності у навчанні), до вивчення наступної частини курсу слід переходити лише тоді, коли досконало буде вивчена попередня частина.

Ми виходимо із експериментально одержаного результату про те, що пізнання кожного елементу знань весь час прогресує в міру оволодіння іншими, наступними елементами навчального предмету аж до повного вивчення дисципліни.

Ефективна реалізація такого підходу, або принципу залучення студентів до навчальної діяльності незалежно від рівня їхніх попередніх знань з деяких розділів курсу математики, можлива на базі застосування пакетів прикладних програмованих засобів. Незважаючи на прогалини в знаннях, наявність яких пояснюється або відношенням до навчання, або психофізіологічними характеристиками (наприклад, інтенсивністю забування чи відновлення знань), застосування ППП дає можливість менш підготовленим студентам на рівні з іншими включатися в процес навчання і будувати взаємодії з математичним середовищем через свою інтерпретацію навчального матеріалу (свій рівень пізнання, своє розуміння навчального матеріалу), і, в решті-решт, оволодіти матеріалом теми. Деякі студенти мають навички роботи з комп'ютером, можуть застосувати свої знання, допомогти викладачеві в організації заняття і підвищити свій рейтинг серед однокурсників.

Використання пакетів прикладних програм (ППП) знімає психологічне навантаження, невпевненість студентів при оволодінні деякими розділами курсу. Якщо студент з деяких причин вчасно не засвоїв, наприклад, тему "Невизначений інтеграл", то можна вважати, що на певному рівні не будуть засвоєні такі розділи, як диференціальні рівняння, інтегральне числення функцій багатьох змінних та інші. В цьому випадку викладач змушений на занятті розглядати простіші задачі, а при індивідуальному підході все одно виникає проблема прогалин в знаннях студентів із вказаних розділів. Таким чином, потреба у необхідному рівні техніки диференціювання, інтегрування чи обчислення границь заважає таким студентам сприймати глибше поточний матеріал (ряди Фур'є, теорію поля, диференціальні рівняння тощо). За рахунок цього їх рівень знань стає ще нижчим. Навіть сильні студенти з меншим ентузіазмом розв'язують або навіть не бажають розв'язувати задачі, в яких потрібно виконувати технічно складні перетворення, що заважає акцентувати увагу на важливих ідеях даного розділу.

Урівняти до деякої міри можливості вивчення вказаних тем можна, використавши пакети Maple, DERIVE, MathCAD, MATHEMATICA та інші. Вони можуть бути використані як для одержання кінцевого, так і проміжного результатів.

В середовищі пакету MathCAD викладач може провести обчислювальні експерименти. При наявності оболонки TASK, на перехід в середовище іншого пакету витрачається до 20 с. Обчислювальний експеримент у середовищі MathCAD дозволяє студентові "руками дійти до математики", прослідкувати за процесом обчислення, знайомить студента з проблемою оптимізації процесу обчислення на ЕОМ, сприяє формуванню математичної та інформаційної культури майбутнього фахівця.

Передбачивши ці моменти, викладач, поєднавши переваги традиційної та інформаційної технологій, може досягти бажаного педагогічного результату.

Відмітимо деякі особливості використання пакетів. Перш за все збільшується кількість завдань, які можна розв'язати на занятті, що дає можливість глибше розкрити основні ідеї теми. Плануючи застосування ППП на занятті, викладач може включити складніші завдання, урізноманітнити їхній зміст, глибше проаналізувати розв'язки диференціального рівняння.

Завдання типового розрахунку та їх виконання при застосуванні ППП можуть відрізнятися від традиційних. По-перше, майже в десять разів скорочується час розв'язання однієї задачі (мається на увазі, що студенти знайомі з особливостями виконання розрахунків в середовищі пакета). Отже, викладач може урізноманітнити завдання та збільшити їх кількість, а студент - поглибити знання даної теми, провівши обчислювальні експерименти. По-друге, з метою професійної спрямованості математичних знань при виконанні типового розрахунку можуть використовуватись незнайомі для студента математичні поняття, методи, якими він може оволодіти у випадку необхідності.

Організація навчання з використанням ППП стимулює мислення студента, знайомить його із сучасним програмним забезпеченням, зберігає час при розв'язуванні навчальних задач, поглиблює рівень оволодіння навчальним матеріалом за рахунок використання графічних можливостей пакетів. Виникають нові задачі, пов'язані із раціональним розбиттям алгоритму на частини, які виконуються студентом та комп'ютером. При цьому студент знайомиться із технологією використання діалогових систем, в яких він як активна ланка бере на себе відповідальність за оцінку проміжних результатів розв'язування задачі, за прийняті логічні рішення про кінцевий результат. Викладач може із значно меншими витратами часу перевірити цей результат чи результати виконання домашніх завдань, типових розрахунків тощо.

Використання пакетів виховує у студентів чіткість виконання дій, допомагає оптимізувати шлях виконання завдання, вимагає від користувача зменшувати час на обмірковування власних дій та кроків розв'язування задачі, глибше та точніше сприймати ідеї, методи розв'язування задачі, з меншими затратами часу оволодіти важливим для спеціальності студента математичним матеріалом, зміст якого він не зміг би зрозуміти через те, що своєчасно не засвоїв на відповідному рівні техніку обчислення границь, диференціювання, інтегрування та інший математичний апарат.

Діяльність студента при застосуванні пакетів є новою у порівнянні з уже засвоєною діяльністю вивчення курсу вищої математики. Включення нової діяльності здійснюється у відповідності з принципами:

- додаткове включення будь-якої компоненти, але у формі, яка відповідає новій діяльності, і встановлюється певний зв'язок між нею та відповідною компонентою діяльності, яка склалася при вивченні даної теми;

- компоненти нової діяльності включаються в уже засвоєну у певній послідовності, що обумовлено консервативністю одних компонент та динамічністю інших.

Діяльність студента при роботі з пакетами полягає в оволодінні навичками, які допомагають студентові у діяльності по вивченню математики, й забезпечує інтеграцію цих навичок у більш широку систему діяльності, майбутньої фахової діяльності. Студент набуває навичок точнішого виконання дій, усвідомлення важливості точного дотримання приписів математичних операцій, математичної символіки, розуміння змісту математичних операцій. За допомогою пакета студент може самостійно виявити помилки при виконанні математичних операцій. Засоби пакета DERIVE дозволяють оперативно здійснювати аналітичні перетворення та проміжні обчислення. Дидактично цінним є те, що за допомогою цих засобів студент може знайти логічно вірні кроки розв'язування завдання, які йому самостійно здійснити складніше.

Проте використання пакетів дає можливість викладачеві розв'язати лише деякі дидактичні задачі. Так, процес розв'язування задачі за допомогою пакета має неявний характер, він схований від користувача, не пояснюється шлях, що веде до одержання результату, а це важливо у навчанні. Використання пакетів веде до втрати навичок побудови загальних розв'язків задачі (побудова загального розв'язку диференціального рівняння тощо). Тому дидактична ефективність використання ППП зростає на етапах закріплення та застосування знань, що дає можливість в різних аспектах опрацювати навчальний матеріал.

Технологія роботи з пакетами, як уже відмічалось, передбачає організацію викладачем всіх компонент навчальної діяльності: системи навчальних задач, відповідних навчальних дій. Студентові необхідно засвоїти певні навички користувача ЕОМ і навички використання математичного апарату, а в деяких випадках використання навіть глибоких знань з математики. Через ППП ці знання передаються студентам ніби самі по собі. У студентів, а в майбутньому і у фахівців, виникає запитання "Для чого вивчати цей предмет, витрачати час, якщо комп'ютер підкаже розв'язок?". Це може знижувати мотивацію навчання. Як підкреслює Р.Хеммінг [II ,с. 397], потрібне розуміння задачі і процесу розв'язування, якщо користувач не буде розуміти того, що виконує машина, то він не тільки не зможе добути із машини максимум користі, а й не зрозуміє змісту навіть вірно виконаних обчислень. Тому при застосуванні нових інформаційних технологій навчання (НІТН) перед викладачем виникає проблема добору навчального матеріалу для вправ на комп'ютері та без нього, оволодіння студентами фундаментальними знаннями.

Застосування ППП у навчальному процесі сприяє знайомству студентів з новими способами дослідження та проникнення у суть явищ, процесів. Ефективність їх застосування залежить від рівня реалізації принципу конструювання нових задач, які б відповідали комп'ютеризованій технології навчання.

Проте, студенти повинні знати, що пакети не мають універсальних засобів організації довільного обчислювального процесу чи алгоритму, для багатьох таких пакетів характерний вузький клас вбудованих математичних операцій. Але засоби пакетів дають можливість використовувати у випадку необхідності програмні засоби для виконання тих частин алгоритму, які доцільніше реалізувати зовні середовища пакету. Так, наприклад, з метою зменшення часу обчислення та обсягу необхідної пам'яті, окремі процедури у середовищі MathCAD можуть реалізуватись мовою PASCAL. При цьому використовуються стандартні програми або програми, створені студентами.

Така технологія застосування розширює можливості пакета і формує комп'ютерне середовище, в якому сполучаються його переваги та інших програмних продуктів. Це сприяє розширенню дидактичних задач, які може розв'язувати викладач за допомогою НІТН.

До недоліків ППП відноситься те, що вони не є педагогічними програмними засобами (ПІЗ) і за їх допомогою не можна розв'язати багато дидактичних задач.

Принцип комунікативності системи педагогічної діяльності забезпечує реалізацію складних комунікативних систем діяльності викладача. Студента необхідно зорієнтувати на те, що проблема розуміння інформації (навчального тексту, наукового тексту) може залежати не тільки від інформації про об'єкт, але і від того, в якій формі вона виражена відповідно до логіки та граматики. Тобто, студент повинен знати, що напрямок пошуку відповіді на запитання конкретної дисципліни він може знайти не тільки за допомогою предметних знань, але також і за допомогою гуманітарного знання.

Вимоги цього принципу передбачають формулювання завдань, вірних з синтаксичної і семантичної точок зору, у потрібний момент згенерованих за мінімальний проміжок часу.

На різних етапах вивчення теми, в міру зростання рівня знань студента, міняється формулювання завдань. Наприклад, на початку вивчення теми завдання формулюється таким чином:

"Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння (ДР)

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$ ".

Надалі це формулювання трансформується до вигляду:

"Знайти функцію, яка перетворює в нуль вираз

$y'' + 3y' + 2y$ ".

З психолого-педагогічної точки зору наведені формулювання не рівнозначні.

Краще запам'ятовується виділена інформація, тому слід виділяти узагальнення, кінцеві формули, висновки та інші важливі поняття диференціальних рівнянь шляхом використання кольору, рамок тощо (Рис. 19).

ЛІНІЙНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ

$$\boxed{y' + P(x)\cdot y = Q(x)}$$

Рис. 19 . Приклад виділення інформації на моніторі

Відомо, що природа і людський мозок працюють за принципом мінімуму: мінімум затрат речовини, енергії, часу і інформації для досягнення максимальної стабільності системи. З цього принципу випливає психологічний закон розробки завдань та іншої методичної інформації в ІТН: чим меншою кількістю слів, літер, знаків виражається інформація, тим краще вона засвоюється.

Отже, при вивченні диференціальних рівнянь найбільш ефективно за допомогою комп'ютера реалізуються такі функції графіки: пред'являюча, інформативна, ілюстративна, моделююча та демонстраційна.

2. Характеристика програмного забезпечення занять

Програмне забезпечення (ПЗ) НІТН включає комплекс педагогічних програмних засобів - навчальні програми, генеруючі, контролюючі та інші програми, пакети професійно-орієнтованих прикладних програм, які дають можливість викладачеві розв'язувати дидактичні задачі.

Майбутній фахівець в сучасних умовах повинен бути знайомим з програмуванням та вміти використовувати ППП, оскільки в багатьох видах інженерної діяльності використовуются автоматизовані робочі місця (АРМ) на базі персональних ЕОМ. Необхідність наблизити навчальний процес до набуття практичних навичок вимагає відпрацювання таких елементів, як підготовка даних, використання режимів меню та ін.

Пакети математичних програм (DERIVE, Maple V, MATHEMATICA, MathCAD, GRAN1 та ін.), у яких взаємодія користувача та ЕОМ реалізована у досить зручному режимі діалогу, з використанням близької до загальноприйнятої математичної форми запису, дають можливість розв'язувати певні дидактичні задачі, інтенсифікувати навчання, дають практичні навички спілкування з ППП майже з перших днів навчання. В деяких випадках (при проведенні лабораторного практикуму, перевірці індивідуальних завдань тощо) доцільніше використовувати пакети програм, ніж самостійно створювати програми.

Пакети можна використовувати не тільки на заняттях з математики, а й з фізики, де за їх допомогою розв'язуються задачі наближених обчислень, оцінки похибок фізичного експерименту.

Структура програмного забезпечення

ПРОГРАМИ DOVID	ПАКЕТ DIFUR	ПРОГРАМИ DFSCTCH
TEST	ОБОЛОНКА TASK	SPECIAL
DFRAD	ПАКЕТИ Mapl V GRAN1 MathCAD DERIVE	INTEGR TABIN

2.I. ПАКЕТ D I F U R

DFDOVID	DFGEO	DFELER	DFGEN
	DFPHI	IZOKLIN	DFCON1
	DFMACH	RUNGE	DFCON2
		ELRRK	DFTEXT

Пакет програмних продуктів DIFUR розроблено для комп'ютерної підтримки розділу курсу вищої математики "Диференціальні рівняння", а тренажер TABINT - для оволодіння навичками безпосереднього інтегрування функцій однієї змінної та повторення методів інтегрування при розв'язуванні диференціальних рівнянь.

Пакет DIFUR утворює навчальне гіперсередовище, що містить базу даних з теми та навчальні курси. Він може бути використаний як для індивідуальної, так і для групової форм навчання. Пакет може використовуватись як елемент оболонки TASK MANAGER, за допомогою якої викладач має можливість оперативно звертатись до пакета, досить легко запускати необхідні навчальні програми. Потрібний файл завантажується у вікно для огляду. Оболонка TASK MANAGER розроблена для ПЕОМ типу IBM. Вона дає можливість завантажувати файли різних типів: текстові, графічні, гіпертекстові.

Перед проведенням навчального діалогу необхідно включити ПЕОМ чи мережу; завантажити MS-DOS версії 2.0 і вище, або ФОДОС, якщо заняття проводиться у дисплейному класі УК-НЦ "Электроника МС 05II". Далі запускається на виконання програма DOVID. Вибравши режим роботи "Повторення навчального матеріалу" за допомогою клавіш < N > та < Y >, студент знайомиться із текстом. Повернення до меню здійснюється шляхом натиснення клавіші < M >. Режим з меню-путівником вимагає лише мінімальної підготовки студента і дає можливість здійснювати основні функції.

У процесі перегляду студент має можливість викликати на виконання якусь іншу програму, пов'язану з даним матеріалом, або скористатись вмонтованим калькулятором. У тексті може бути підказка про можливість використання програми або посилання на неї. Клавішами управління студент підводить курсор до рядка з найменуванням потрібної програми. Після закінчення виконання програми здійснюється повернення до місця перегляду матеріалу. Після проробки навчального матеріалу студент повертається до головного меню.

Якщо заняття проводиться в класі УК-НЦ "Электроника МС 0511", то повернення до того місця, з якого був здійснений вихід, не завжди можливе. Тому передбачено перезавантаження програми, з якої здійснювався вихід на підпрограму.

Робота з пакетом в режимі " Консультація " дає можливість одержати відповіді на можливі запитання з курсу ДР. Студент може вибрати вузлове поняття, з якого він бажає проконсультуватись. Після вибору вузлового питання на екрані з'явиться порція навчального матеріалу. Після проробки (перегляду, вивчення, конспектування) цієї порції студент, скориставшись меню, може вибрати необхідний режим перегляду матеріалу: перегляд курсу у зворотньому напрямку, продовжувати послідовний перегляд чи перейти до наступної порції матеріалу. В останньому випадку здійснюється перехід до іншого вузлового поняття або до допоміжних підпрограм.

Якщо студент повинен працювати в режимі "Контроль",то в залежності від теми він звертається до підпрограм DR5KR, DIFKON, DRGEN, DR1KR. Після завантаження програми на екрані з'являється запитання, на яке необхідно дати відповідь. Можливі два варіанти відповіді. У першому випадку студент клавішами управління курсором вибирає одну із запропонованих відповідей і натискує клавішу <Enter>. На екрані з'являється повідомлення чи правильною є відповідь на запитання. У другому-студент самостійно конструює відповідь із запропонованих елементів.

Подальший перехід у програмі можливий двома шляхами, про що з'являється додаткова інформація. Або студентові пропонується виконати певну кількість завдань, і він не може вийти з режиму, не відповівши на запитання, або пропонується меню:

1. Продовження контролю.
2. Перехід до перегляду курсу.
3. Допомога.
4. Вихід з контролю.

Якщо обрано режим I, то продовжується контроль, на екрані з'являється наступне запитання. В режимах 2 і 3 здійснюється вихід до наступних режимів навчання. Обравши режим 4, студент одержить допомогу з матеріалу, недостатньо пропробленого.

Програма DFGEN призначена для генерування диференціальних рівнянь: лінійних однорідних та неоднорідних із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, систем ДР.

Пакет використовується при розв'язуванні таких дидактичних задач: мотивації, актуалізації знань, формування понять, діагностики та контролю знань, індивідуалізації навчання та ін. Пакет дає можливість автоматизувати рутинні операції викладача по підготовці інформаційно-методичних матеріалів, підвищити їх якість, спростити процес синтезу різноманітних завдань для організації контролю і корекції процесу навчання, самоконтролю навчальної діяльності студентів. Запропонована система зворотнього зв'язку і корекції, забезпечує формування регуляторних компонентів навчання і дозволяє значно розширити дидактичні можливості пакету.

На етапі підготовки до заняття викладач формує пакет навчальних програм, які будуть використані на занятті. З цією метою використовується оболонка TASK MANAGER, яка дає можливість на занятті оперативно звертатись до пакета та з малими затратами часу запускати потрібні файли різних типів: текстові, графічні, гіпертекстові. Комплекс програмних засобів повинен бути глибоко структурованим. Критерії можуть бути різними. На прикладі теми "Формування поняття диференціального рівняння" розглянемо структуризацію програмного забезпечення за циклами заняття (мотивація, пред'явлення навчального матеріалу, засвоєння його, контроль і корекція навчання, самостійна робота студентів).

На першому (мотиваційному) етапі актуалізуються знання студентів, активізується пізнавально-логічна та практична сфери. Застосовуються навчальні програми, в яких зміст навчальної інформації відображає внутрішньосистемні та міжсистемні взаємозв'язки. Викладач використовує такі програми.

DOVID - довідник з математики, деякі теми з фізики, хімії, спецдисциплін.

DFSCTCH - програма, в якій моделюється процес обробки металу, математична модель - звичайне диференціальне рівняння другого порядку.

DFGEO - геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку, застосування рівнянь до розв'язування геометричних задач.

DFPHI - програма-тренажер для оволодіння навичками розв'язування фізичних задач, математичними моделями яких є диференціальні рівняння.

DFMACH - демонстраційно-моделююча програма "Рух м'яча, кинутого під кутом до горизонту".

SPECIAL - довідково-ілюстративна програма математичних моделей, які використовуються у спеціальних дисциплінах.

Засобами пред'явлення навчального матеріалу є банки та бази знань, дидактичні тексти; фрагменти програм містять концентровані знання, алгоритми їх вивчення, методи застосування. На даному етапі використовуються програми DOVID, DFGEO, DFPHI, а також:

DFDOVID - довідник з диференціальних рівнянь;

IZOKLIN - побудова поля напрямків та ізоклін диференціального рівняння першого порядку, побудова наближених розв'язків рівнянь та порівняння з аналітичним розв'язком, тренувальні вправи;

DFTEXT - навчальна програма для комп'ютерної підтримки практичних занять з теми "Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідні відносно змінних X і Y, лінійні, рівняння Бернуллі", які проводяться за інформаційною технологією з використанням дидактичних текстів.

Дидактичні тексти (ДТ) є одним із засобів керування навчально-пізнавальною діяльністю студентів, в процесі якої студент засвоює навчальний матеріал.

За допомогою ДТ можуть бути реалізовані розвивальна, виховна функції навчання.

ДТ містять мету вивчення навчального матеріалу, пояснення, коментарі, алгоритми розв'язування типових задач, завдання для самостійної роботи, взірці правильних та раціональних розв'язків, відповіді та інші засоби, за допомогою яких організовується процес навчання, цілеспрямована робота студентів з метою досягнення запланованих результатів навчання.

Виходячи з того, що ДТ плануються та конструюються як засіб педагогічного керування навчанням студентів, їх можна представити у вигляді двох складових: того, що повинно бути засвоєне, і того, що забезпечує процес засвоєння. Форми представлення навчального матеріалу в ДТ є кодом, який використовується для керування пізнавальною діяльністю студентів, в них цілеспрямовано закладені певні дидактичні схеми. Наприклад, таблиці в тексті можуть мати лише інформаційний зміст, а можуть виступати і засобом систематизації знань студентів або засобом розвитку їх логічного мислення, підпорядковуватись цілям адаптації, схематизації змісту. Робота з ДТ стимулює пізнавальну активність студентів, викликає у них пізнавальні мотивації за рахунок вибору рівня трудності навчального тексту, що дозволяє в свою чергу реалізувати принцип усвідомлення студентами процесу навчання.

При вивченні матеріалу, що міститься у ДТ, за допомогою комп'ютера активне сприйняття навчального матеріалу досягається шляхом постановки запитань, спеціальних вправ, завдань, додаткових пояснень та ін. Це дозволяє сформувати у студента більш різнобічне уявлення про поняття, точніше встановити зв'язок між окремими ознаками і властивостями об'єкту, що сприяє глибшому засвоєнню навчального матеріалу.

Навчальний матеріал ДТ з математики можна поділити на такі категорії:

- означення понять, правила, формули, формулювання теорем (для доведення, запам'ятовування);
- доведення теорем, виведення формул, розв'язування задач;
- ілюстративний матеріал, довідки.

Оволодіння структурованим особливим чином навчальним матеріалом за допомогою комп'ютера дозволяє розвинути у студента комплекс умінь. Це - уміння осмислити прочитаний фрагмент, навчальна програма допомагає студентові виділити головне у цьому фрагменті, сформувати уміння оцінювати різні аспекти теми, яка вивчається, в умовах обмеженості у часі, будувати логічну структуру матеріалу, на основі якої робляться висновки, доводяться твердження. У програмі, яка використовується при вивченні навчального тексту, передбачається формування умінь виділяти ознаки, властивості об'єктів і їх комбінації, уміння конструювати ті чи інші сукупності їх ознак і властивостей.

Наведемо приклад модуля дидактичного тексту для вивчення теми " Диференціальні рівняння, однорідні відносно змінних X та У". До фрагментів AI-A7 студент звертається за допомогою, якщо у нього з'явились труднощі при розв'язанні прикладів. До цих же фрагментів може звертатись комп'ютер у випадку, коли навчальна програма надає допомогу самостійно.

Наведені приклади використовуються при контролі результатів навчання.

МОДУЛЬ 2

Диференціальні рівняння, однорідні відносно X та У.

Мета заняття. Сформувати у студентів навички розв'язування однорідних відносно X і Y диференціальних рівнянь (ОДР).

Що повинен знати студент. Означення ОДР, метод інтегрування.

Що повинен уміти студент. Знаходити загальний та частинний розв'язки ОДР.

Послідовність вивчення матеріалу.

Поняття однорідної функції - фрагмент AI - A3.

Означення ОДР - фрагмент A4.

Метод інтегрування ОДР - фрагмент A5.

Алгоритм розв'язування ОДР - фрагмент A6.

Приклад розв'язування ОДР - фрагмент A7.

Вправи і відповіді.

AI. Однорідною функцією k-го порядку відносно змінних X та У називається функція f(x,y), для якої при будь-якому $t \neq 0$ справедлива тотожність: $f(tx,ty)=t^m f(x,y)$.

Приклади: I) Функція $f(x,y)=x^2 + y^2$ однорідна другого порядку.

2) Функція $f(x,y)=\sin((x^2 + y^2)/2xy)$ однорідна нульового порядку.

A2. Сума, добуток та частка від ділення однорідних функцій є функція однорідна.

A3. Однорідну функцію f(x,y) нульового порядку можна представити у вигляді $f(x,y) = \varphi(y/x)$, або $\phi(x/y)$.

А4. Диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ називається однорідним відносно x і y, якщо його права частина є однорідна функція нульового порядку, тобто якщо його можна представити у вигляді :

$$y'=\varphi(y/x)$$

А5. Однорідне рівняння першого порядку зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $y=u(x)x$, або $y/x=u$, де u – нова функція від x, яку треба знайти.

А6. Алгоритм розв'язування однорідного диференціального рівняння $y' = f(x,y)$.

1. Переконатись, що функція $f(x,y)$ однорідна нульового порядку.
2. Застосувати підстановку $y = u(x)x$, $y' = u'(x)x + u(x)$.
3. Підставити вирази $y=ux$ і $y=u'x+u$ у диференціальне рівняння. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними.
4. Розв'язати одержане диференціальне рівняння.
5. Застосувати підстановку $u = y/x$ і спростити рівняння.
6. Знайти значення довільної константи C, якщо розв'язується задача Коші.
7. Записати відповідь.

А7. <u>Приклад</u>

Зінтегрувати ДР.

$$(4x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0,\ y(2)=1 \qquad (1)$$

<u>Розв'язування.</u>

Перевіримо, чи буде диференціальне рівняння однорідним. Перепишемо рівняння (I) у вигляді

$$y' = (3y-4x)/(2y-3x), \text{ або } y' = (3y/x-4)/(2y/x-3) \qquad (2)$$

Права частина рівняння (2) є однорідною функцією нульового порядку:

$$f(x,y) = (3y-4x)/(2y-3x)$$

$$f(tx,ty)=(3ty-4tx)/(2ty-3tx)=t(3y-4x)/t(2y-3x)=tf(x,y)=f(x,y).$$

Далі робимо підстановку $y=ux$, і одержуємо:

$u'x + u = (3u-4)/(2u-3)$. Звідки $u'x = (3u-4)/(2u-3) - u$,

або $xdu/dx = (-2u+6u-4)/(2u-3)$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Відокремлюємо змінні і інтегруємо

$$((2u-3)/(-2u+6u-4))du = dx/x,$$

$$-0.5\ln(-2u + 6u - 4) + 2\ln x = \ln C.$$

Потенціюємо: $(-2u + 6u - 4)/x = C$.
Замість u підставляємо y/x:
$(-2(y/x)+6(y/x)-4)x = C$, або $-2y+6yx-4x = -C$, тобто:

$$2y - 6yx + 4x = -C.$$

Використовуючи початкову умову $y(2)=1$,
знаходимо C: $2*1 - 6*1*2 + 4*4 = -C$, тоді $C=-6$.
Розв'язком рівняння, який відповідає початковій умові, буде функція: $2y - 6yx + 4x = 6$, $y - 3yx + 2x = 3$.
Відповідь: $y - 3yx + 2x = 3$.

ВПРАВИ ДО МОДУЛЯ 2

Встановити чи будуть функції однорідні.
Якщо так, то якого порядку виміру відносно x і y вони однорідні.

1) f(x,y)=(x+y-2)/(3x-y-2);
2) f(x)=(x+y)/(x-y);
3) f(x,y)=xy+x+y;
4) f(x,y)=2x^3-y(2x^2-xy);
5) f(x,y)=y^3+y/x;
6) f(x,y)=2xy-xy^2;
7) f(x,y)=(x^2+y^2)/(x-y);
8) f(x,y)=(ycosy/x)/x;
9) f(x,y)=3x^2y+2x;
10) f(x,y)=e^y/x+2;
11) f(x,y)=y/x+e^(y+2x)/x;
12) f(x,y)=2y+x+lny/x.

Відповіді до вправ 1-12.

1. Однорідна, нульового виміру.
2. Однорідна, 1-го виміру.
3. Однорідна, 2-го виміру.
4. Однорідна, 3-го виміру.
5. Не є однорідною функцією.

Зінтегрувати диференціальні рівняння:

30. y' = y/x + y, y(1) = 1.

Маємо дві вірні відповіді.

1) ye = e^x/y;
2) y/e = e^x/y;
3) ln |u| + ln|x| - ln|C| = 1/4;
4) lny/x = x/y -1 - ln|x|;
5) y^2/x^2 - y/x - ln|y/x| + ln|x| = 0.

Головним завданням третього етапу (діяльність студентів по засвоєнню навчального матеріалу) є виділення провідних ідей, фактів, принципових положень з метою упорядкування та закріплення і формування фундаментальних знань. Використовуються програми DOVID, DFGEO, DFPHI, DFDOVID, DFTEXT.

На етапі перевірки знань, корекційно-контролюючих дій викладач виявляє прогалини у знаннях студентів, за допомогою статистичних методів одержує числові значення навчальних характеристик студентів та ефективності навчання. Використовуючи комп'ютер, студент виконує вправи, спрямовані на ліквідацію прогалин у знаннях та уміннях. Використовуються програми DOVID, DFDOVID, DFTEXT, а також:

DFCON1 - контроль знань з теми "Застосування диференціальних рівнянь до розв'язування геометричних та фізичних задач".

DFCON2 - навчальна програма для комп'ютерної підтримки практичного заняття з теми " Диференціальні рівняння першого порядку, поняття загального та частинного розв'язків, геометрична інтерпретація", тренувально-контрольні завдання з оцінюванням знань.

На етапі самостійної роботи створюються умови для формування та розвитку розумової діяльності за рахунок виконання відповідних завдань. Студенти використовують програмні засоби: DOVID, DFGEO, DFPHI, DFDOVID, DFTEXT SPECIAL.

INTEGR - тренажер з інтегрування функцій; оволодіння наближеними методами обчислення інтегралів, застосування інтегралів, генерування індивідуальних завдань.

При самостійній роботі студентові може бути надана можливість вибрати шлях проходження програми, або вибрати один із видів контролю, або звернутися до тренувального фрагменту. В останньому випадку студент відпрацьовує дії, передбачені метою навчальної програми. Так, при розв'язуванні лінійних однорідних рівнянь студенти часто припускаються помилки при розв'язуванні квадратних рівнянь, корені яких комплексні. Тому фрагмент тренувальної програми містить кадри, в яких наводиться функціонально-семантична сіть вивчення комплексних чисел, і студент може звернутись до цих кадрів. При таким чином організованому навчанні дії студента більш усвідомлюються і перетворюються в операції.

На наступних заняттях використовуються програми:

DFELER - метод Ейлера, його геометрична інтерпретація, приклади, порівняння деяких модифікацій даного методу.

DFGEN - програма генерування завдань та контролю знань з теми "Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків". Розглядається алгоритм генерування однорідних диференціальних рівнянь

$$ay'' + by' + cy = 0$$

та неоднорідних ДР з правою частиною

f(x) = exp(ax)*(P(x)*cos(bx) + Q(x)*sin(bx)).

Для генерування відповідного типу ДР (характеристичне рівняння має дійсні різні, дійсні рівні та комплексні корені). Для автоматизованої перевірки розв'язків рівняння обчислюються корені характеристичного рівняння. Окремо розглядається випадок, коли корінь характеристичного рівняння нульовий. Розглядаються два випадки генерування рівнянь із комплексними коренями, частинний випадок уявних коренів та загальний випадок. За допомогою програми генеруються системи лінійних диференціальних рівнянь.

RUNGE - навчальна програма "Метод Рунге-Кутта".

ELRRK - навчальна програма "Методи Ейлера, Рунге-Кутта", порівняння методів, порівняння з іншими наближеними методами розв'язування диференціальних рівнянь.

DFRAD - навчальна програма для комп'ютерної підтримки практичного заняття з теми " Лінійні диференціальні рівняння другого порядку".

2.2. ПАКЕТ G R A N 1

Пакет призначений для використання при вивченні багатьох розділів курсу вищої математики. Звернення до послуг, що надаються системою, здійснюється за допомогою меню. При необхідності студент може одержати довідки та допомогу. За допомогою пакета можна будувати графіки функцій. На одному екрані можна будувати до п'яти графіків функції однієї змінної, розв'язувати рівняння, нерівності тощо.

Пакет GRAN1 може використовуватись для підготовки методично-інформаційних матеріалів, контролю знань, проведення лабораторного практикуму з теми тощо. Він застосовується для узагальнення і систематизації знань. Сприяє активізації самостійної та творчої роботи студентів, підвищує практичну значимість результатів навчання. Відомо, що студенти часто не вміють визначати значення функції за даним її графіком, не вміють розкрити зміст, властивості явища за графічним його зображенням. Важливою дидактичною задачею є опанування студентом уміннями визначати властивості графіків та функцій відносно систем координат з різними масштабами по осях та побудова відповідних графіків у системі координат з рівномірним масштабом. Для навчання розумінню змісту графіка, формування навичок схематичного зображення графіків доцільно використовувати подібні програмні педагогічні засоби. Вони дають можливість будувати графіки в декартовій та полярній системах координат.

Студенти багатьох спеціальностей повинні набувати навичок перетворень графіків. У загальному курсі математики цьому питанню приділяється недостатньо уваги. Пакет GRAN1 може бути використаний в самостійній роботі студентів при виконанні відповідних типових розрахунків з теми "Диференціальні рівняння" а також як довідник і тренажер для студентів старших курсів.

2.3. Пакети MathCAD, Maple V і DERIVE

За допомогою ППП MathCAD можна обчислювати похідні (звичайні і частинні), інтеграли (визначені, багатомірні, контурні), розв'язувати системи рівнянь, нерівностей, здійснювати операції матричної алгебри тощо. Пакет орієнтований на розв'язування складних обчислювальних задач.

В середовищі пакета MathCAD 2.5 можна одержати з високою точністю наближений розв'язок диференціального рівняння, використовуючи складні алгоритми і вбудовані математичні функції та комп'ютерну графіку.

Пакет Maple V має високі функціональні можливості. Він охоплює майже всі розділи курсу вищої математики, виконує близько 2500 функцій. Зокрема - дії над матрицями та векторами, обчислення границь та інтегралів, побудову графіків функції однієї та двох змінних тощо. Передбачена можливість програмування власних алгоритмів розв'язування задач. Прикладних програм, які додаються до пакета, достатньо для того, щоб оволодіти навичками використання процедури.

Внутрішня структура Maple V складається з трьох компонент: ядра, бібліотеки і інтерфейсу.

Інтерфейс визначає, як користувач взаємодіє з командами і процедурами. В залежності від типу комп'ютера і версії Maple V, інтерфейс може бути простим або складним (worksheets), що містить текст і графіку. Help пакету Maple містить розділ browser, який дозволяє зробити інтерфейс більш доступним, тобто дає змогу оволодіти ним за короткий час.

Однією з найбільш важливих особливостей Maple V є графіка, яка дає можливість користувачеві одержати більший діапазон візуальних розв'язків тієї чи іншої задачі.

Вхід в пакет здійснюється з файла Wmaple 35.exe, який знаходиться в директорії BIN:

C: \ MAPLEV3\BIN\Wmaple 53.exe.

Бібліотека Maple містить велику кількість вмонтованих процедур, які написані на мові програмування Maple.

Якщо користувач володіє англійською мовою на середньому рівні, то інтерфейс для нього може бути дуже зручним.

Наявність процедури обчислення експонент матриці (e^A, де A-матриця, команда: exponential(A);) дозволяє застосовувати матричний метод до розв'язування систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

До недоліків пакета можна віднести, на наш погляд, низьку якість допоміжної інформації. Незручністю є те, що редактор пакета має лише одне вікно, тобто користувач може працювати лише з однією програмою, а при побудові графіків на кожний графік автоматично відкривається нове вікно.

Пакет DERIVE використовується при інтегруванні ДР з відокремленими змінними, перевірці результатів розв'язування рівнянь, розв'язуванні алгебраїчних рівнянь тощо.

Певною мірою можливості аналітичних перетворень за допомогою пакета DERIVE і обчислень в середовищі пакету MathCAD об'єднані у пакеті MATHEMATICA, який використовується для проробки всіх етапів аналітичного розв'язування диференціальних рівнянь, інтегрування функцій тощо.

3. Методичні вказівки до проведення занять

3.1. Формування поняття диференціального рівняння

Сучасна дидактика розглядає навчання як двосторонній процес діяльності викладача і навчальної діяльності учня, спрямований на розв'язування відповідних педагогічних задач.

Такий погляд на навчання ставить рівні вимоги до методики проведення занять. На етапі підготовки до заняття та безпосередньо на ньому враховується, в першу чергу, діяльність студента.

Під діяльністю розуміється такий процес розв'язування людиною задач, що перед нею ставляться, який спонукається тією метою, на досягнення якої процес спрямований. З діяльністю пов'язані поняття дії і операції. Дія - це складова частина діяльності, вона спонукається не самою метою, а мотивом тієї діяльності, до складу якої вона входить. Операція - це складова частина дії, вона характеризує засоби, якими здійснюється дія.

Отже, засвоєння поняття студентом свідчить про його уміння виконувати дії з цим поняттям.

Узагальненість у виконанні дій по розпізнанню понять вимагає від студента уміння відокремлювати істотні ознаки понять від неістотних. Так, суттєвими ознаками поняття диференціального рівняння є наявність похідної, рівність лівої частини правій. Неістотними ознаками є позначення функціональної залежності, наявність функції чи аргументу та інші.

Ступінь розгорнутості дій характеризується кількістю операцій, які здійснює студент для того, щоб розпізнати поняття. В міру засвоєння поняття дії щодо розпізнання стають згорнутими. І, в решті-решт, студент користується однією, необхідною для даної задачі ознакою.

Засвоєність дії характеризується швидкістю виконання кожної операції, що входять до складу дії. І чим швидше виконуються операції, тим швидше виконується дія.

В процесі навчання характеристики дії розвиваються і ними керувати повинен викладач. Він повинен розв'язувати такі складні дидактичні задачі, як скеровувати розвиток дій студента від матеріальної форми до розумової, від розгорнутих - до згорнутих, підвищувати рівні узагальнення, оволодіння поняттям.

Ці дидактичні задачі важко, або майже неможливо розв'язати традиційними методами навчання.

При формуванні дій на розпізнання математичного поняття слід мати на увазі, що будь-яка дія, незалежно від її конкретного змісту, складається із трьох частин: орієнтовної, виконавчої і контролюючої.

Розглянемо процес складання орієнтовної основи дій. При розв'язуванні завдання на розпізнання поняття необхідно визначити, яке поняття необхідно розпізнати. Далі необхідно пригадати ознаки даного поняття і його логічну структуру. У відповідності з цим студент пригадує правило, алгоритм розпізнання та послідовність операцій, які при цьому виконуються.

Орієнтовну основу дій (ООД) виведення наслідків можна подати у вигляді приблизно такої евріствчної схеми:

- виділити основні поняття в умові та вимозі задачі (теореми);
- дати означення цих понять, пригадати ознаки, які доводяться (якщо вони існують);
- пригадати властивості понять, які доводяться;
- поміркувати, які ще властивості поняття можна назвати на основі його зв'язку з іншими поняттями.

У випадку труднощів студенти можуть скористатися підручником, конспектом, довідником.

Після складання орієнтовної основи дій (ООД) студент розпочинає виконувати дії. Тобто, здійснюється пошук ознак поняття у відповідності з вибраним алгоритмом розпізнання, тобто здійснюється дія підведення під поняття. Хід виконання цих операцій контролює викладач, або комп'ютер.

Приклад. Визначити, до якого типу відноситься ДР

$$y'' + \sin(y'/x) = 1.$$

Орієнтовна основа дій

I. Визначити тип ДР.

2. Розглянути типи ДР: першого, другого порядку.

3. Розглянути типи ДР другого порядку: лінійні, рівняння, які

допускають зниження порядку.

4. Врахувати ознаки, характерні для кожного типу рівнянь.

4.1. Лінійні ДР другого порядку:

O_1 – похідна першого порядку, входить у рівняння в першому степені (лінійно);

O_2 – похідна другого порядку, входить лінійно в рівняння;

O_3 – невідома функція, входить в рівняння лінійно.

4.2. ДР, які допускають зниження:

O_1 – порядок старшої похідної дорівнює 2;

O_2 – відсутність аргументу x;

O_3 – відсутність невідомої функції y;

O_4 – рівняння містить x і y.

5. В результаті виконання операцій орієнтовної частини дії студент може сформулювати висловлення:

$$B = \bar{O}_1;$$

а на основі аналізу п.4.2:

$$B = O_1 \wedge \bar{O}_2 \wedge O_3 \wedge \bar{O}_4$$

зробити висновок: для розпізнання поняття ДР, які допускають зниження порядку, застосовують логічне правило – поняття має місце тоді і тільки тоді, коли мають місце ознаки O_1, O_2 і не мають місце ознаки O_2 і O_4.

6. Зробити висновок: із всіх ознак типу ДР доцільніше використовувати в першу чергу дві: про наявність x і y.

7. Продовжити аналіз.

Контрольна частина дії розпізнання типу ДР проходить паралельно формуванню орієнтовної основи дії та її виконавчої частини. Оперативний контроль дає можливість здійснювати корекцію процесу формування поняття. За допомогою комп'ютера, в режимі діалогу, студенти мають можливість скласти орієнтовну основу дій та одержати допомогу при корекції помилок.

Методика формування поняття диференціального рівняння будується на основі конкретно-індуктивного методу навчання на частково-пошуковій основі.

Перш за все організується підготовча робота, яка передбачає:

– визначення раціонального підходу до ознайомлення студентів з поняттям;

– визначення системи істотних і неістотних ознак поняття;

- аналіз зв'язків нового поняття з іншими поняттями математики та інших дисциплін;

- вибір методу та засобів, необхідних при введенні поняття;

- формування системи вправ для застосування поняття;

- підбір системи контрприкладів для поглиблення засвоєння поняття;

- контроль рівня засвоєння поняття.

Розглядаються приклади, взяті з суміжних дисциплін. Пакет програм, що підтримує дану тему, містить навчальні задачі виробничого змісту, в яких застосовується означуване поняття. Знайомлячись із задачами, студенти роблять висновок про необхідність введення в математиці узагальненого поняття.

Далі під керівництвом викладача, із застосуванням програми, студенти виділяють спільні, суттєві і несуттєві властивості математичного об'єкта, а потім абстрагуються від несуттєвих властивостей.

Означення понять тісно зв'язано з їх класифікацією. Тому означення поняття доцільно давати з іншими поняттями, які еквівалентні даному поняттю або входять до складу системи класифікації.

Наприклад, коли дано означення звичайного ДР, то бажано, щоб викладач дав і означення ДР в частинних похідних та інтегрального рівняння.

3.І.І. Навчальні задачі, які розв'язуються при формуванні понять

I. Вивчення математичних об'єктів шляхом спостереження чисельного експерименту.

2. Виділення спільних, відмінних, суттєвих і несуттєвих властивостей об'єкта.

3. Абстрагування від різних або несуттєвих властивостей об'єкта.

4. Синтез властивостей об'єкта.

5. Узагальнення, формулювання судження про загальні суттєві ознаки об'єкта, введення терміну поняття.

6. Означення поняття, тобто введення висловлення, яке містить всі ознаки поняття.

7. Введення відповідних теорем існування, розкриття поняття

на прикладах, розв'язування контрприкладів.

8. Виведення наслідків із означення поняття.

9. Введення інших формулювань означень розглядуваного поняття. Доведення еквівалентності різних означень поняття.

10. Використання введеного поняття до розв'язування певного класу задач.

11. Встановлення зв'язків поняття з іншими поняттями.

12. Ілюстрація можливостей поняття при розв'язуванні практичних задач, його обмеженість.

13. Можливі шляхи узагальнення поняття. Розгляд цих узагальнень.

14. Розробка дидактичних матеріалів для оволодіння поняттям, його запам'ятовуванням, контролю за засвоєнням.

3.1.2. Використання графіки при оволодінні поняттям

Геометрична модель є геометричним аналогом математичного поняття. Відомі такі етапи у використанні наочних моделей:

- переведення задачі на мову наочної моделі, простішої для сприйняття;
- знаходження розв'язку проблеми за допомогою міркувань у зручній моделі;
- переведення одержаної відповіді з мови наочної моделі на мову вихідної задачі.

Використовуючи діалогову форму спілкування з комп'ютером, вивчаються властивості графіка частинного розв'язку рівняння. Далі, скориставшись "Довідником" а також продовжуючи діалог, студент переводить ці властивості на аналітичну мову.

Наші дослідження та практика викладання вищої математики а також дослідження інших авторів показують, що наочні образи можуть мати і негативний вплив на формування понять. Студенти з недостатньою математичною підготовкою перш за все звертають увагу не на суть питання, а на те, що більше привертає їх увагу, на неістотні ознаки. Все ще значна кількість студентів, незважаючи на те, що похідна вивчається в школі, основні поняття поглиблюються у вузі, поняття похідної пов'язують з дотичною, або кутом нахилу дотичної. Образ дотичної, як психологічної опори поняття похідної, може у деяких студентів гальмувати процес узагальнення способів розв'язування певного класу задач, побудованих на математичній операції

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Графік є носієм поняття розв'язку, загального розв'язку диференціального рівняння, бо за його допомогою розчленовуються деякі істотні і неістотні ознаки розв'язку, частинного і загального розв'язків.

Так, істотними ознаками частинного розв'язку ДР є те, що його графік належить до сім'ї ліній, які визначають загальний розв'язок рівняння, і те, що він проходить через задану точку. До неістотних ознак можна віднести, наприклад, його монотонність чи розміщення відносно осі координат.

3.1.3. Практичне заняття

Тема заняття. Основні поняття диференціального рівняння.

Мотиваційний етап заняття. Викладач підкреслює, що використання математичного апарату у вигляді інтегральних характеристик деякого явища обмежується його застосування лише тривіальними, простими випадками. Відомі інтегральні характеристики досліджуваного явища використовуються рідко. Найчастіше фахівець має справу з локальними характеристиками явищ. А це приводить до використання похідної функції, за допомогою якої описується цей процес. Таким чином, приходимо до необхідності введення таких співвідношень, які б містили похідну, тобто до вивчення поняття диференціального рівняння (ДР).

Далі розглядаються приклади побудови ДР, які описують різні процеси.

Дидактична мета. Дати поняття про ДР, його загальний та частинний розв'язки. Дати геометричну інтерпретацію цих розв'язків.

Виховна мета. Сформувати уміння правильно аналізувати практичні задачі. Активізувати навчальну діяльність студентів. Розвинути пізнавальну активність студентів.

Основні знання і уміння. Знати означення диференціального рівняння, його порядку, загального і частинного розв'язків. Вміти розв'язувати задачу Коші, геометрично ілюструвати розв'язки диференціального рівняння.

Комп'ютерна підтримка. Програмне забезпечення: пакети GRAN1 DIFUR, DERIVE.

Тип заняття. Засвоєння нових знань.

Мотивація пізнавальної діяльності студентів. ДР використовуються при побудові математичних моделей у багатьох галузях знань: техніці, медицині, біології та ін. Тому ця тема набуває особливого значення в математичній освіті фахівця. Обчислювальний експеримент дозволить переконати в цьому студентів.

Послідовність оволодіння новим матеріалом

1. Використовуючи комп'ютер, ознайомити студентів із задачами, які приводять до поняття ДР.

2. Організувати роботу студентів з пакетами, за допомогою яких моделюються деякі фізичні процеси.

3. Розглянути основні поняття та означення ДР.

4. Використати програми для контролю якості засвоєння навчального матеріалу.

План заняття

I. Актуалізація знань. Повторення таблиці похідних, фізичного і геометричного змісту похідної, поняття диференціалу.

2. Вивчення нового матеріалу. Введення поняття ДР починається із розв'язування задач.

Задача геометричного змісту:

Скласти рівняння лінії, яка проходить через точку (a,a/2) і має ту властивість, що відрізок будь-якої її дотичної, який лежить між координатними осями, ділиться навпіл у точці дотику.

Значення параметра a = 2,7,I2,I7...

Задача фізичного змісту:

В кімнаті, де $t = 20^{o}C$, деяке тіло охололо за 2 хв від $100^{o}C$ до $50^{o}C$. Знайти закон охолодження тіла. Через скільки хвилин його температура дорівнюватиме кімнатній?

Використовуючи навчальні програми, в яких моделюється рух кинутого м'яча, (навчальна програма DFMACH), обробка металевих деталей (навчальна програма DFSCTCH) та ін., студенти переконуються у необхідності вивчення даної теми, її важливості для їхньої спеціальності.

Далі повторюються поняття, які розглядались на лекції: означення ДР, порядок ДР, розв'язок, частинний розв'язок, загальний розв'язок, задача Коші. Розв'язуються задачі.

3. Вказати порядок ДР :
   $y''' - y' = \sin 3x$, $(y')^2 + y' = 1$, та інші.
4. Чи є функція $y = \cos x - 1$ розв'язком ДР $y'\mathrm{ctg}x + y + 1 = 0$?
5. Загальним розв'язком ДР $y' + xy = x$ є функція $y = Ce^x + x + 1$. Знайдіть частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 5$.

За допомогою пакета програм GRAN1 будується множина графіків, які належать до загального розв'язку, і виділяєтся графік частинного розв'язку ДР.

Використання навчальних програм (НП) дає змогу унаочнити процес формування поняття ДР та його розв'язків, показати можливість ефективного моделювання за допомогою ДР, проводити оперативний контроль рівня засвоєння понять, здійснити узагальнення і систематизацію знань.

Для визначення рівня засвоєння знань пропонуються запитання:

1. Визначіть порядок ДР.
2. Скільки довільних сталих містить загальний розв'язок ДР другого порядку, четвертого порядку?
3. Вкажіть частинні розв'язки та загальний розв'язок ДР серед заданих функцій.
4. Яке з наведених висловлень є формулюванням задачі Коші для ДР першого порядку?
5. Вкажіть графіки частинних розв'язків ДР, які задовольняють задані початкові умови.

Домашнє завдання. Студенти одержують завдання для самостійної роботи. Можуть бути використані програми DFGEN, DFRAD для генерування індивідуальних завдань.

3.2. Практичне заняття 3

Тема заняття. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку, рівняння Бернуллі.

Дидактична мета. Дати поняття про лінійні ДР першого порядку та рівняння, що зводяться до них; засвоїти методи розв'язування ДР даного типу; продемонструвати студентам доцільність використання комп'ютерів з метою ефективнішого засвоєння матеріалу; продовжити формування у студентів навичок використовування ППП.

Виховна мета. Сформувати уміння правильно аналізувати практичні задачі, використовувати такі методи наукового пізнання, як порівняння, узагальнення та інші. Активізувати навчально-пізнавальну діяльність студентів.

Основні знання і уміння. Знати означення лінійного диференціального рівняння першого порядку, методи підстановки та варіації довільної сталої. Вміти визначати і розв'язувати лінійні ДР та рівняння, які зводяться до них, використовувати ППП.

Комп'ютерна підтримка. Програмне забезпечення: пакети GRAN1, DIFUR, DERIVE.

Тип заняття. Засвоєння нових знань.

Мотивація пізнавальної діяльності студентів. Активізувати сприйняття нового матеріалу шляхом розв'язування з моделюванням задач прикладного змісту, переконанням студентів у необхідності оволодіння методами розв'язування ДР, які зустрічаються у спеціальних дисциплінах.

Послідовність оволодіння новим матеріалом

1. За допомогою комп'ютера ознайомити студентів із задачами, при розв'язуванні яких необхідно знати методи розв'язування лінійних ДР першого порядку.

2. Організувати роботу студентів з програмами, в яких моделюються деякі процеси.

3. Розглянути означення лінійного ДР та рівняння Бернуллі, методи їх розв'язування.

4. Організувати роботу студентів з програмами DFTEXT, DOVID.

5. Використати програми для контролю якості засвоєння навча-

льного матеріалу DFCON2, DFCON1.

План заняття

1. Актуалізація знань. Повторення таблиці похідних, фізичного і геометричного змісту похідної, поняття диференціалу, таблиці інтегралів.

2. Вивчення нового матеріалу. Оволодіння поняттям лінійного ДР починається із розв'язування задач.

Задача I (геометричного змісту):

Скласти рівняння лінії, в якої площа трапеції, утвореної дотичною до кривої, осями координат та ординатою точки дотику, є величина стала - a^2.

Завдання I: скласти диференціальне рівняння.

Завдання 2: використовуючи пакет DERIVE, переконатися в тому, що функція $y = C*x^2 + (2*a^2)/(3*x)$ є розв'язком складеного ДР.

Задача 2 (фізичного змісту):

Електрорушійна сила E у ланцюгу із струмом I, опором R, індуктивністю L складається із напруги R*I та електрорушійної сили самоіндукції L*(dI/dt). Визначити струм I в момент t, якщо $E = E_0*\sin(wt)$, (E_0,w - сталі) і I = 0 при t = 0.

Завдання I: скласти диференціальне рівняння.

Далі повторюються поняття, які розглядались на лекції: означення лінійного ДР, метод розв'язування (підстановка y=u(x)*v(x)) ДР. Розв'язуються завдання:

1. Вказати порядок ДР :
   $y'' - y' = \cos^2 x$, $(y')^2 + y' = \ln x$ та інші.
2. Загальним розв'язком лінійного ДР $y' + xy = x$ є функція $y = Ce^x + x + 1$. Знайдіть частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові $y(0) = 5$.

   За допомогою пакета програм GRAN1 побудувати множину графіків, які належать до загального розв'язку, і виділити графік частинного розв'язку ДР. Знайти координати якої-небудь точки, через яку проходить задана інтегральна крива; провести дотичну до графіка інтегральної кривої в знайденій точці; за допомогою послуг "Похідна","Графік" обчислити значення похідної частинного розв'язку; порівняти одержане значення похідної із значенням функції в правій частині рівняння $y' = f(x,y)$.

3. Знайти загальні розв'язки ДР:
   1) $xy' - 2y = 2x^4$; 2) $y' + y/x = (\sin x)/x$.
4. Знайти частинний розв'язок ДР:
   $xy' + y - e^x = 0$, $y(1) = 2$.

Далі повторюється лекційний матеріал, що стосується методу варіації довільної сталої. Розв'язуються завдання:

5. Записати однорідне ДР, яке відповідає лінійному рівнянню
$$y' + 2xy - 2x\exp(-x^2) = 0.$$
6. Методом варіації довільної сталої розв'язати ДР:
$$y' + 2xy - 2x\exp(-x^2) = 0.$$

Розв'язування рівняння Бернуллі. За допомогою програми DFTEXT студенти повторюють означення і метод розв'язування рівняння Бернуллі.

Завдання I: Які із наведених рівнянь є рівняннями Бернуллі ? (завдання знаходиться в програмах DFTEXT, DFCON2).

Завдання 2: Знайти частинний розв'язок ДР:
$$y' + 2*y = y^3, \quad y(0) = 1.$$
При інтегруванні функцій та перетворенні алгебраїчних виразів використовується пакет DERIVE.

Використання НП дає змогу унаочнити процес розв'язування ДР та аналізу його розв'язків, показати можливість ефективного моделювання за допомогою ДР, проводити оперативний контроль рівня засвоєння понять, здійснити узагальнення і систематизацію знань, одержати нові знання.

Завдання творчого характеру. За допомогою послуг пакета GRAN1 побудувати інтегральні криві ДР
$$y' + 2xy - 2x\exp(-x^2) = 0,$$
загальний розв'язок якого $y = \exp(-x^2)(C + x^2)$ одержано на занятті. Покласти $C = 0.5; 1.0; 2.0$. Вибрати відрізок $[0.5; 3]$. Побудувати дотичні до графіків у точках з абсцисами $x = 1;\ 1.5;\ 0$. Проаналізувати розміщення дотичних. Дотичні претинаються в одній точці. Якщо вибрати інший відрізок, то можна побудувати паралельні дотичні. Викладач допомагає сформулювати властивість розв'язків лінійного диференціального рівняння першого порядку: дотичні до інтегральних кривих лінійного ДР, які проведені в точках перетину цих кривих і прямих, паралельних осі ОУ, або перетинаються в одній точці, або паралельні (рис. 20).

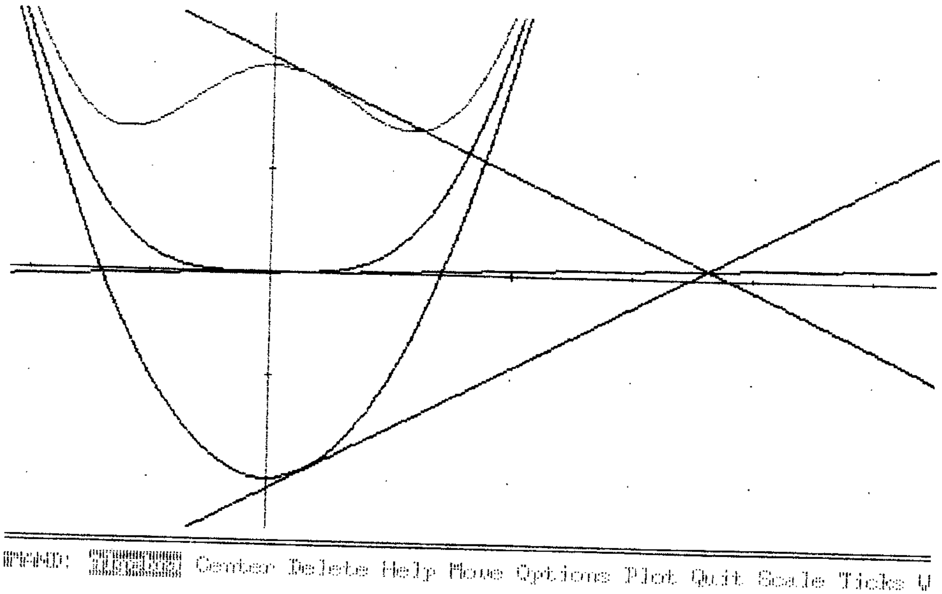


Рис. 20. Дотичні до інтегральних кривих лінійного диференціального рівняння

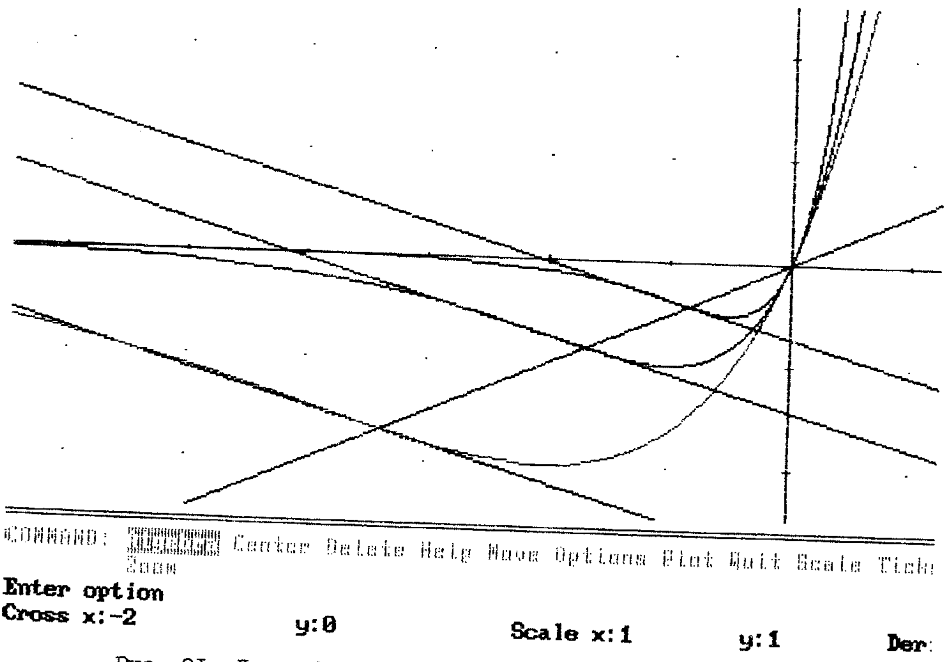


Рис. 2I. Дотичні до інтегральних кривих однорідного диференціального рівняння

Для визначення рівня засвоєння знань пропонуються запитання:

1. Визначіть порядок ДР.
2. Скільки довільних сталих містить загальний розв'язок ДР другого порядку, четвертого порядку?
3. Вкажіть частинні розв'язки та загальний розв'язок ДР серед заданих функцій.
4. Яке з наведених висловлень є формулюванням задачі Коші для ДР першого порядку?
5. Які з наведених ДР відносяться до рівнянь з відокремленими змінними; відокремлюваними змінними; однорідних відносно змінних x, y; лінійних; рівнянь Бернуллі.

Підсумок заняття. Засвоєні методи розв'язування лінійних ДР та рівняння Бернуллі. За допомогою пакета GRAN1 зробили попередній висновок відносно властивості розв'язків лінійного ДР першого порядку.

Домашнє завдання. Студенти одержують завдання для самостійної роботи. Можуть бути використані програми для генерування індивідуальних завдань.

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

y' - (2y)/(x + 1) = (x +1)^2.

2. Знайти частинний розв'язок рівняння:

$$y' = xy + x^3y^3, \quad y(0) = 0.5.$$

3. В середовищі пакетів DERIVE, GRAN1 або інших пакетів побудувати інтегральні криві

$$y = f(x,C_1), \; y = f(x,C_2), \; y = f(x,C_3)$$

диференціального рівняння dy = (x^2 + 2*x - 2*y)*dx при $C_1 = 0.1N$, $C_2 = 0.2N$, $C_3 = 0.4N$, де N - номер варіанта. При $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$ обчислити відношення

$$\frac{f(x_1,C_3) - f(x_1,C_2)}{f(x_1,C_2) - f(x_1,C_1)}, \quad \frac{f(x_2,C_3) - f(x_2,C_2)}{f(x_2,C_2) - f(x_2,C_1)}$$

Порівняти результати, зробити попередній висновок.

3.3. Організація лабораторного практикуму

Метою проведення лабораторного практикуму є практичне засвоєння студентами науково-теоретичних положень дисципліни, оволодіння методами обробки експериментальних даних та побудови математичних моделей, тобто перетворення одержаних знань у засоби для розв'язування навчально-дослідницьких та реальних експериментальних та практичних задач, близьких до виробничих. Іншими словами, метою лабораторного практикуму з математики є включення більшої кількості рецепторів студента в процес пізнання математичних об'єктів.

Застосування НІТН дозволяє глибше розкрити цілі навчання та виділити окремі їх елементи у самостійні цілі, а саме:

а) формування умінь самостійно одержувати нові знання та оволодівати засобами дій, тобто розвивати творче мислення;

б) розвиток індивідуальних здібностей студентів;

в) розробка завдання для програмування конкретних алгоритмів при виконанні ЛР з наближеного обчислення визначених інтегралів, розв'язуванні ДР в частинних похідних чисельними методами тощо;

г) використання стандартних бібліотек програм;

д) формування умінь і навичок спряження найпростіших програм чисельних методів у більш складні структури.

З математичними моделями, які описують реальні виробничі процеси, можна знайомити студентів у всіх розділах курсу вищої математики. Найбільший інтерес викликають задачі, розв'язок яких містить якісну характеристику явища, яке розглядається. Розв'язування будь-якої прикладної задачі математичними методами, взагалі кажучи, є математичне моделювання, оскільки, записуючи умову за допомогою математичних виразів, ми по суті будуємо математичну модель реального фізичного процесу. При складанні та розв'язуванні рівнянь виникає необхідність робити деякі припущення відносно параметрів. Тому будь-яка модель має деякий степінь наближення та похибки при розрахунках.

Лабораторна робота N 2

Мета роботи. Ознайомити студентів з математичною моделлю реального процесу; навчити виконувати розрахунки за даною програмою; формувати уміння самостійно одержувати нові результати, аналізувати їх, розвивати творче мислення; поглибити знання з чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь.

Комп'ютерна підтримка - програмне забезпечення: пакети GRAN1 DIFUR, DERIVE, MathCAD, Maple V.

Розглядається задача практичного змісту до розділу "Диференціальні рівняння".

ЗАДАЧА. Розглядається схема динамічного моделювання процесу поверхневого пластичного деформування деталі із закріпленим гідравлічним демпфером у центрі при механічній обробці (рис. 22) [10].

Диференціальне рівняння, яке описує процес поверхневого пластичного деформування деталі, закріпленої в центрах з биттям в, має вигляд :

$$mx''=Cx'-k(B+x+b\sin(wt))+E\,S(B_1-x-b\sin(wt))\ \mathrm{sgn}(B_1-x-b\sin(wt)),$$

де

m - приведена маса інструменту, кг;

b - биття деталі, мм;

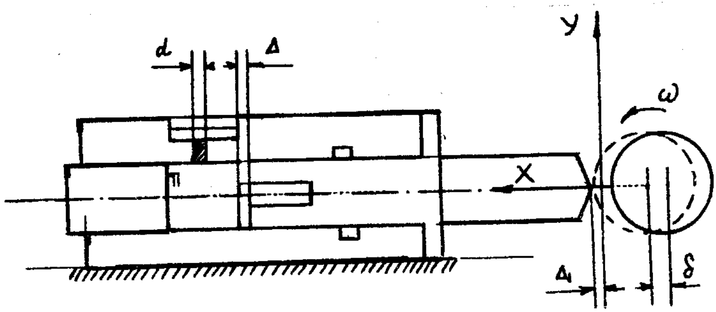


Рис. 22. Схема динамічного моделювання процесу поверхневого пластичного деформування з гідравлічним демпфером

C - коефіцієнт демпферування, Н/(мм/с);

k - жорсткість пружини, Н/мм;

B - попередній натяг пружини, мм;

w - кутова швидкість деталі, рад/с;

E - жорсткість матеріалу, $Н/мм^2$;

S - площа плями контакту, $мм^2$;

B_1 - попередній статичний натяг інструменту в деталь, мм.

У програмі DFSCTCH наводиться схема розміщення інструменту для динамічного моделювання процесу поверхневого пластичного деформування із гідравлічним демпфером. Студенти знайомляться із математичними моделями, які відповідають елементам схеми та її можливим спрощенням, а також із математичними моделями, які відповідають спрощеним схемам даного процесу. У вищенаведеному рівнянні функція Sgnx описує силову дію поверхні деталі на інструмент у випадку наявності контакту та відсутності його.

Наявність підпрограми розв'язування рівняння дає можливість двом підгрупам студентів провести аналіз цих режимів і порівняти результати.

Завдання: 1. Вибрати такий крок інтегрування, щоб був найбільш інформативним розв'язок;

2. Дослідити динаміку зміни натягу, для w = 10 рад/с; 100 рад/с. Зробити висновок про неможливість роботи на деяких частотах, знайти оптимальну частоту (див. рис. 23 і 24);

3. Провести дослідження при заміні C*x' на $C*x'^2$ (тобто використовуються гідравлічні демпферні пристрої);

4. Дослідити випадок, коли деталь обробляється тороїдальним або сферичним інструментом з невеликим радіусом (r<= 3 мм), прийняти:

$$S= k_1*(1+ B_1- x- b*\sin(w*t))^3,$$

де $(k_1 = 1)$, k = 1000 h/мм^2, w = 100 рад/с, b = 0.01 мм, C = 200 Н(мм/с), B_1 = 0.01 мм, ES=100 kH/мм, B = 1 мм.

Домашнє завдання - виконати підготовчу роботу, виконати ЛР у дисплейному класі; основні та додаткові завдання:

1. Вибрати модельне рівняння, щоб одержати:
   а) монотонний розв'язок;
   б) осцилюючий розв'язок.
2. Знайти розв'язки:
   а) аналітичний (для перетвореного рівняння);
   б) за формулою Тейлора;
   в) за методом Пікара для рівняння 1-го порядку.
3. Побудувати їх графіки та оцінити похибки в точках, далеких від X0. Проаналізувати наближення, похибки.
4. Розв'язати рівняння чисельними методами:
   а) Ейлера; б) Рунге-Кутта.

5. Для порівняння результатів скористатись методом ізоклін (використати програму IZOKLIN).

6. Провести обчислювальні експерименти:

а) змінити крок інтегрування;

б) змінити початкові умови;

в) змінити значення параметрів рівняння.

7. Побудувати графік зміни похибки в залежності від кроку інтегрування.

8. Зробити висновки. Підготуватись до контролю.

Аналізуючи криві натягу при різних значеннях w, студенти роблять висновки відносно динаміки процесу. Аналіз зміни натягу в процесі механічної обробки з кутовою швидкістю w = 100 рад/с (рис. 23) вказує на неможливість роботи при таких частотах обертання деталі, оскільки контакт інструменту та деталі не постійний, а періодично повторюється. На рисунках 23 і 24 показано траєкторію вершини інструменту, натяг інструменту при обертанні деталі, траєкторію кайми деталі, попередній натяг (статичний). Якщо w = 20 рад/с (рис.24), натяг існує постійно, але максимальне значення натягу зміщено по фазі від максимального наближення поверхні деталі до інструменту. Це викликано інерційністю системи установки інструменту. Такі та інші висновки можуть зробити студенти, одержавши консультацію на спеціальній кафедрі. Отже, змінюючи параметри диференціального рівняння, можна змінити зсув цих кривих і таким чином безпосередньо впливати на зміну форми деталі.

Аналіз експериментальних даних та результатів обчислювальних експериментів з даним диференціальним рівнянням дозволяє створити комп'ютерну модель, адекватну до реальної.

Порівняємо традиційну та інформаційну технології проведення лабораторних робіт з теми "Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь першого та другого порядків".

За традиційною технологією лабораторна робота проводиться в два етапи. На першому етапі студент самостійно готується до проведення роботи. Він сприймає завдання, вивчає необхідний теоретичний матеріал. Викладач дає завдання, формулює цілі та їх мотивацію.

Другий етап - безпосереднє виконання роботи, захист їх результатів. Студент за допомогою обчислювальних засобів розв'язує рівняння за вказаним методом. Дії викладача полягають у контролі

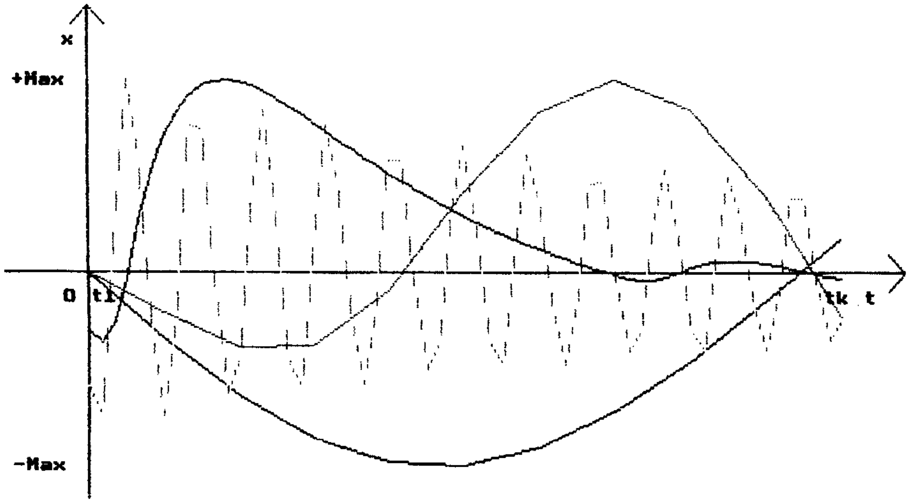


Рис. 23. Графічний розв'язок рівняння при w = 100 рад/с

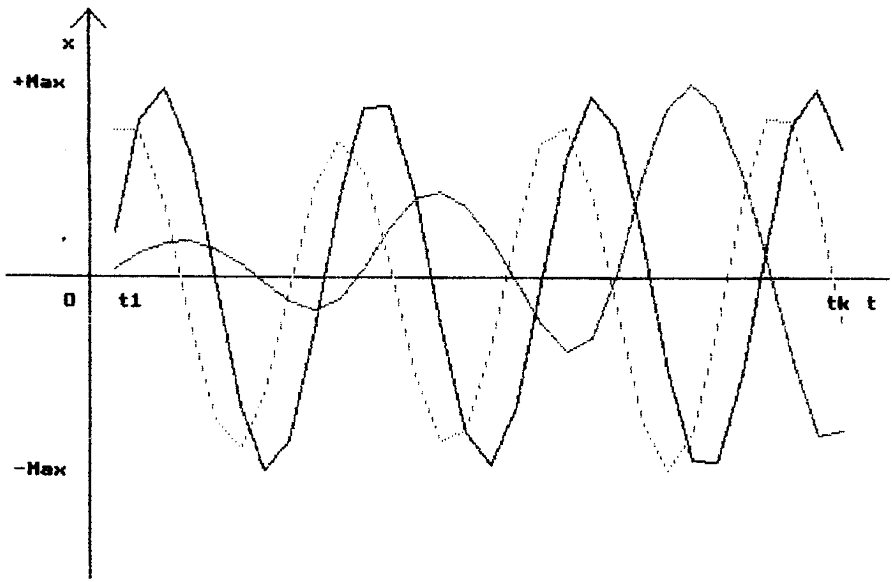


Рис. 24. Графічний розв'язок рівняння при w = 20 рад/с

ходу виконання роботи, консультації та оцінці результатів, формуванні умінь та навичок самостійного аналізу одержаних даних.

Проаналізуємо технологію виконання лабораторних робіт із використанням технічних та програмних засобів НІТН.

На першому етапі студент самостійно готується до виконання роботи. Він сприймає задачу, вивчає теоретичний матеріал, виконує попередні обчислення, одержує точний розв'язок рівняння. Викладач робить постановку задачі, формулює цілі роботи та їх мотивацію. Функції комп'ютера полягають у генеруванні індивідуального завдання, перевірці знань студента, необхідних для проведення лабораторної роботи.

На другому етапі здійснюється машинний контроль виконання вправ першого етапу. Студент вводить результати розрахунків, проведених на першому етапі, одержує наближений розв'язок рівняння, оцінює похибку. Викладач контролює хід виконання роботи, консультує студентів. Комп'ютер на запит студента подає розв'язки рівняння заданим методом та іншими методами, друкує результати обчислень.

На третьому етапі проводиться дослідження одержаних наближених розв'язків, порівняння з точними розв'язками. Викладач формує уміння та навички студентів самостійного аналізу результатів, розвиває навички творчого мислення. Комп'ютер генерує запитання проблемного характеру, друкує графік зміни похибки. Студент в режимі діалогу вводить відповіді на запитання, з метою проведення досліджень змінює значення параметрів завдання, аналізує результати обчислень, робить висновки.

Співставлення технологій дає можливість зробити такий висновок. При виконанні лабораторної роботи за новою технологією зростає кількість елементів знань, якими оволодіває студент. Студент набуває навичок порівняння експериментально одержаних залежностей з відомими прийнятими математичними моделями для даного процесу. Особливістю використання НІТН при проведенні ЛР є те, що студент має можливість на занятті одержати результати застосування різних методів, співставити їх, оцінити похибки, а застосування методів математичної статистики (комп'ютер дозволяє це зробити оперативно) дає змогу студентові відповісти на проблемне запитання, якими обставинами зумовлюються похибки вимірів.

3.4. Самостійна робота студентів

Термін "самостійна робота" вживається у різних значеннях. Розглядаємо її як метод навчання, виділивши при цьому такі переважаючі визначальні ознаки, як спосіб організації і керівництва викладачем пізнавальною діяльністю студентів та засоби, за допомогою яких студенти під керівництвом викладача йдуть від незнання до знання, від неповного і неточного знання - до повнішого і точнішого. Самостійна робота розширює і збагачує знання, уміння і навички, одержані студентом як на занятті, так і поза ним, є важливою формою виховання через предмет, формує навички самоконтролю, самооцінки, формує саморегульоване навчання.

Однією з форм самостійної роботи є виконання розрахункових завдань. Виконуючи їх із застосуванням комп'ютера, студент може самостійно проконтролювати хід розв'язування шляхом порівняння основних проміжних та кінцевого результатів. Етап самоконтролю до визначеного викладачем терміну захисту роботи змушує студента глибше вникати в зміст завдання, алгоритм розв'язування задачі. Комп'ютер реєструє відповіді студента та час роботи за дисплеєм, за його допомогою студент може виконати великий обсяг обчислень, результати яких можуть бути основою для аналізу розв'язку задачі. А в деяких випадках лише за умови використання комп'ютера можливе виконання завдання у визначений термін. На основі протоколу викладач оцінює діяльність студента.

Використання математичних пакетів (DERIVE, GRAN, MathCAD та інших) дає можливість урізноманітнити завдання типового розрахунку з математики. Методика може бути, наприклад, такою. Студент самостійно виконує частину аналітичних перетворень, графіку, а певні числові та аналітичні розв'язки одержує за допомогою пакета. Застосовуючи ці засоби НІТН, викладач реалізує найбільш повно принцип діяльності у СРС. Студент має можливість вільного вибору (в певних межах) стратегії розв'язування задачі, а, отже, і навчання. Працюючи в середовищі математичних пакетів, студент повністю зосереджується на постановці задачі та аналізові одержаних результатів і уникає труднощів, пов'язаних з обчисленням. Обчислювальний алгоритм та результати виконання типового розрахунку студент може оформити у вигляді окремого файла.

Така форма самостійної роботи підвищує відповідальність студентів за термін виконання завдань, які мають індивідуальну спрямованість, скорочує витрати часу на контроль та збільшує можливості викладача для надання консультацій.

Відмітимо методичні аспекти застосування НІТН при організації СРС на різних етапах заняття.

На етапі актуалізації знань і умінь СРС організується в таких напрямках:

- в процесі встановлення зв'язку нового навчального матеріалу із уже вивченим студенти, використовуючи інформаційно-довідкові, демонстраційні, тестові програми, повторюють необхідні означення, формули, методи тощо;

- при створенні пошукових ситуацій викладач застосовує навчальні програми моделюючого типу, програму в режимі калькулятора, демонстраційні програми чи пакети;

- формування потреби в знаннях з математики як компоненти готовності до майбутньої професійної діяльності (у віповідності з принципом професійної спрямованості курсу) організується за допомогою пакетів, програм моделюючого, демонстраційного типів.

На етапі формування нових знань та їх поглиблення застосовуються частково-пошукові та дослідницькі самостійні роботи. При вивченні математики такий шлях вимагає значних витрат часу. Проте його можна практикувати при вивченні деяких тем (наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь) та в групах, потоках, студенти яких мають певну базу знань та умінь. У випадку недостатнього рівня знань студентів викладач вимушений СРС проводити на репродуктивному рівні. В такому випадку часу витрачається менше, але розвиток самостійності мислення можливий лише на низькому рівні. На цьому етапі заняття СРС організовується після того, як сформовані основні поняття теми.

Одним із прийомів організації самостійної роботи під керівництвом викладача може бути таким: спочатку демонструється НП, потім організовується пошукова діяльність студентів шляхом самостійного спостереження в процесі оволодіння знаннями.

Студенти міцніше засвоюють нові знання, якщо їм зрозуміла мета їх вивчення, зв'язок з раніше вивченим матеріалом. Тому важлива роль відводиться мотивації пізнавальної діяльності.

Обсяг СРС збільшується на етапі закріплення навчального матеріалу. На основі рівня готовності студента, його знань, навичок самостійної роботи, здібностей викладач визначає кількість та рівень складності тренувальних вправ. Програмовані засоби НІТН на даному етапі заняття включають тренажери, довідкові та генеруючі програми. З метою підвищення ефективності закріплення вивченого матеріалу в навчальні програми включаються фрагменти, в яких наводяться приклади зв'язку з пройденим матеріалом, практичного застосування.

3.5. Контроль і оцінка знань студентів

Контроль є складовою частиною навчального процесу. В теорії і практиці навчання розроблені педагогічні вимоги до проведення контролю у конкретних умовах навчання (індивідуальний характер, систематичність та регулярність проведення, всебічність охоплення навчального матеріалу, дотримання єдиних вимог тощо). Розглянемо приклади класифікації контролю.

За дидактичним призначенням розрізняють такі види контролю: поточний, періодичний, вхідний, підсумковий, тематичний.

За ступенем систематизації навчального матеріалу – контрольна, самостійна робота, залік, колоквіум, іспит.

За оснащенням технічними засобами – комп'ютеризований (стандартизований), традиційний.

Поточний контроль використовується для оцінки ефективності навчання, оцінки результатів вивчення дисципліни, стимулювання навчальної діяльності студентів. Використання НІТН надає можливість викладачеві своєчасно коригувати процес навчання, а студентам своєчасно ліквідовувати прогалини у заняттях. Викладач виявляє теми, поняття, методи, важкі для опанування.

Завдання для поточного контролю

Розв'язати диференціальне рівняння $y''+Ny'-(N-1)y/2=0$, (N – номер варіанта), $y'(0)=0$, $y(0)=N$.

Проміжні питання	Штрафні бали
I. Скласти характеристичне рівняння	–I

2. Розв'язати його -0.5
3. Записати фундаментальну систему розв'язків -I
4. Записати загальний розв'язок -0.5
5. Знайти сталі C_1, C_2 -1
6. Записати частинний розв'язок диференціального рівняння -I

Шкала оцінок	5	4	3	2
Шкала балів	5	4.5-4	3.5-3	2.5-0

Оцінка.

Завдання для підсумкового контролю знань з теми

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

I. y''+Ay'+By=exp(Cx)*(x^2+Dx+K), якщо y(0)=0, y'(0)=1;

Проміжні питання — Штрафні бали

I). Записати вигляд загального розв'язку неодн. рівняння -0.5
2). Записати однорідне рівняння, яке відповідає неоднорідн.-0.5
3). Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння -1
4). Знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння -1
5). Записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння -0.5
6). За даними початковими умовами знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння -1
7). Записати відповідь -0.5

Шкала оцінок	5	4	3	2
Шкала балів	20-I8	I7-I4	I3-II	I0

Оцінка.

2. y''+Ay=B/(x^3*(x^2-1)), якщо y(A)=y'(A)=0.

Проміжні питання — Штрафні бали

I). Записати однорідне рівняння, яке відповідає неоднорідн.-0.5
2). Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння -1
3). Записати систему рівнянь для визначення функцій $C_1(x)$ та $C_2(x)$ -0.5
4). Знайти $C_1(x)$ та $C_2(x)$ -1
5). Записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння -0.5
6). За даними початковими умовами знайти частинний розв'язок неодн. рівняння -1
7). Записати відповідь -0.5

Шкала оцінок	5	4	3	2
Шкала балів	20-18	17-14	13-11	10

Оцінка.

Підсумковий контроль знань практикується після завершення розділу чи теми. Метою його є виявлення якості засвоєння програмного матеріалу за певний період, оцінка ступеня досягнення навчальних цілей. Одержана інформація використовується для удосконалення навчального процесу, оцінки ступеня відповідності між одержаними знаннями, уміннями та вимогами до підготовки фахівців.

У підготовці інженерів важливим є оволодіння умінням розпізнавати схеми, взаємозв'язки між елементами схеми, будову об'єкта. З цією метою в процесі навчання у студентів формуються уміння виявляти логічну структуру навчального матеріалу. Крім того, на занятті студенти вчаться розпізнанню елементів структури навчального матеріалу, визначенню наявності зв'язків між елементами структури. Викладач використовує тести, в яких об'єкти однієї або декількох множин співставляються із елементами відповідно однієї або декількох множин. Наведемо приклад такого тесту.

Завдання. Дайте класифікацію наведених нижче диференціальних рівнянь (ДР) за такими основами:

1. Кількістю аргументів функції, яка є розв'язком рівняння.
2. Кількістю невідомих функцій.
3. Максимальним порядком похідної.
4. Розв'язані рівняння чи ні відносно старшої похідної.

Перелік можливих відповідей:

а) рівняння пешого порядку; б) звичайні ДР; в) одне рівняння; г) рівняння в частинних похідних; д) система ДР; е) рівняння вищих порядків; є) ДР 2-го порядку; ж) розв'язані відносно похідної; з) не розв'язані відносно похідної.

Застосування комп'ютера дає можливість підвищувати ефективність тестування знань студентів за рахунок використання тестів, які за певними критеріями адаптуються до діяльності студентів. Для функціонування процесу діагностики знань використовуються математичні моделі діяльності студента.

Перевірка знань з теми здійснюється за допомогою завдань $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_m$. Кожному завданню надається вага (складність завдання) $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_m$. Пропонується складність завдання оцінювати кількістю елементів знань, якими повинен володіти студент, щоб його виконати.

Структура завдання визначається характером внутрішніх логічних залежностей між даними завдання та шуканими величинами. У відповідності з цим виділимо такі рівні складності:

- перший рівень складності - завдання містять 3-5 елементів знань;
- другий рівень складності - 6-8 елементів знань;
- третій рівень складності - 8-10 елементів знань;
- четвертий рівень - більше 10 елементів знань.

Уміння розв'язувати завдання першого та другого рівнів складності визначає мінімально необхідний рівень знань студента; третього - характеризується як міцний рівень засвоєння навчального матеріалу; четвертого - характеризує не тільки рівень глибокого, грунтовного засвоєння програмного матеріалу, а і рівень творчого підходу до розв'язування завдань та високий рівень логічного мислення.

Студентові пропонується завдання j_k, складність якого q_k відповідає рейтингові студента з даної дисципліни. В залежності від результату наступне завдання має вищий або нижчий рівень складності з урахуванням процесу забування.

Процес тестування закінчується у відповідності з прийнятим критерієм. Введемо коефіцієнт рівня засвоєння навчального матеріалу з теми k_r - відношення суми балів, одержаних при розв'язуванні тестових завдань, до можливої суми балів. Якщо k_r менше заданого рівня (наприклад, 0.5), то тестування закінчується мотивованим поясненням та рекомендаціями щодо вивчення теми. Іншими критеріями, наприклад, можуть бути вимоги виконання студентом завдання або деякої сукупності завдань найнижчого рівня.

Одними із вхідних параметрів адаптивної системи тестування є координати вектора P - стану навчання,

$$P = (p_1, p_2, p_3, \ldots, P_m),$$

де P_1 - імовірність незнання студентом j_1-ї вправи.

На початковому етапі організації контролю знань з теми величинам P_1 приписують імовірності виконання студентом завдань контрольних заходів попереднього етапу навчання.

Критерій продовження чи зупинки адаптивного тестування може бути визначений таким чином.

Використовується щільність імовірності часу забування знань, побудованої на основі таких допущень. Якщо деяку тему чи поняття студент повинен пам'ятати протягом певного періоду до t_m, то щільність розподілу має вигляд:

$$P(t)= \frac{a\exp(-at)}{1-\exp(-at_m)},$$

для $0<t<t_m$.

Виходячи з прийнятого закону розподілу, в роботі алгоритм адаптації реалізується за формулою:

$$P_i^{N+1}=P_i^N\frac{1-a_i dt-\exp(-a_i t_m)}{1-\exp(-a_i t_m)} + \frac{a_i}{1-\exp(-a_i t_m)}dt,$$

де a_i швидкість забування знань за проміжок часу dt.

Значення параметрів a_i обчислюються за результатами експериментів. Оскільки в групі спостерігаються значні коливання значень параметра a_i, то на початковій фазі адаптивного тестування приймається середнє значення параметра a_i по групі. А в подальшому пропонується враховувати і адаптацію цих параметрів, які, взагалі кажучи, є змінними.

Комп'ютеризоване тестування накладає певні вимоги до програмного забезпечення: відсутність дидактичних, програмних помилок та помилок у змісті предметної області, обмежений час реакції програми, програма повинна ініціювати дії студента та ін.

База знань системи адаптивного тестування складається із завдань з даної теми чи розділу, які організовані у вигляді семантичної мережі показників складності завдань, відповідного рейтингу знань студента, підсистеми обробки результатів тестування.

Система дозволяє змінювати або коректувати базу тестових запитань. Вона дозволяє як текстове, так і графічне представлення інформації, дозволяє також змінювати режим тестування. Формування бази тестових завдань здійснюється у відповідності із складністю завдання, що дозволяє оцінювати рівень знань студента: рівень розпізнання і відтворення обов'язкового мінімума навчальної інформації, продуктивний чи творчий рівень.

Система допускає комплектування тестів як комбінації запитань із різних тем або розділів. Вибір завдань візуалізовано. Реалізується формулювання завдань чотирьох типів: з альтернативною відповіддю; з вибором відповіді із множини запропонованих (пряма форма вибіркової відповіді); конструйованою числовою, текстовою чи графічною відповіддю; на встановлення відповідності між запитанням та запропонованими відповідями (спосіб незакріплених відповідей).

Треба мати на увазі, що найчастіше використовувана форма вибіркової відповіді поряд із позитивними якостями має ряд недоліків. Так, за допомогою таких завдань не можна визначити рівень запам'ятовування, ступінь володіння умінням письмово висловлювати думки та ін. Тому технологією навчання передбачається використання і нетестових методів контролю процесу навчання. Крім того, з метою розвитку та оцінки здібностей, розумових дій студента, тобто оцінки рівня його розвитку, при формуванні тестів використовуються завдання третього і четвертого рівнів складності, в яких передбачаються задачі на класифікацію, порівняння та інші дії творчого характеру.

Тести можуть носити навчальний характер, коли для кожного запитання після відповіді студента дається вірна відповідь або надається можливість дати ще одну відповідь, тобто, студент може змінювати відповідь. Це особливо важливо для підтримки та підсилення мотивації навчання. При цьому може збільшуватись час, відведений для відповіді на запитання, а додаткова інформація про хід тестування (пояснення помилки, витрачений час на тестування тощо) дається лише після відповіді на запитання. Мета адаптивного тестування у навчальному режимі полягає в тому, щоб навчити студента самостійно виявляти та виправляти помилки, допомогти викладачеві в організації навчального процесу, щоб до мінімуму зменшити кількість помилок у студентів. Це вимагає від розробників контролюючих програм створення обгрунтованої структури діалогу, його змісту, мотивованості та адекватності характеру відповіді інформації про хід тестування.

Алгоритм адаптивного тестування

Відомими величинами вважаються рівні складності завдань (r, $r=1, 2, 3$), кількість завдань у тесті (n), рівень готовності студента до розв'язування завдань (P_{it}), інтенсивність забування та відновлення знань (a_i).

I. Студентові пропонується k завдань рівня складності r, які відповідають рівню готовності P_{it}.

2. Якщо успішність розв'язування завдань m/k, де m – кількість вірних відповідей, така, що

$$m/k > 0.9P_{it},$$

то студент розв'язує решту завдань тесту. Далі обчислюється відношення l/n, де l – кількість вірних відповідей із загальної кількості завдань тесту. В подальшому приймається P_{it}=l/n. На цьому тестування закінчується.

3. Якщо успішність розв'язування завдань $m/k < 0.9P_{it}$, то тестування проводиться на рівні r-1, а якщо m/k < 0.5, то тестування проводиться на рівні r-2. При r=1 тестування закінчується і пропонується студентові ретельніше опрацювати матеріал.

Шляхом введення додаткових елементів знань при виконанні завдання можна будувати адаптовані тести за таким параметром, як зміст та обсяг запитань. З іншого боку, адаптивне тестування дає можливість установити рівень засвоєння дій як окремих елементів знань, так і деякої їх сукупності (рівні розпізнання, відтворення, продуктивний і творчий).

Поряд з рейтинговою оцінкою діяльності студентів предметні знання оцінюються і за традиційною шкалою "2" - "5". В цьому випадку можна використовувати такий критерій оцінки знань: незадовільна оцінка виставляється тоді, коли студент відповів на менш ніж 65% запитань тесту; задовільна оцінка - при 66-76%%; оцінка "добре" віповідає 77-90%% вірних відповідей і оцінка "відмінно" - при 91-I00%%.

Інтерпретація результатів тестового контролю дозволяє викладачеві одержати об'єктивну оцінку ефективності тих чи інших ланок впроваджуваної педагогічної системи.

Використання комп'ютерів дає можливість повніше врахувати критерії якості засвоєння знань (об'єм і повнота, систематичність, дійовість та ін.), критерії розвитку самостійності і творчої активності студентів (здатність аналізувати і робити узагальнення, самостійність та ін.). У попередніх розділах детально розглянуті шляхи реалізації цих критеріїв через застосування відповідних вправ.

3.6. Застосування пакетів прикладних програм до вивчення спецкурсу з диференціальних рівнянь

Виходимо з того, що спецкурс математики у технічному вузі не має самостійного значення, а є дисципліною, яка вивчається з метою практичного застосування сучасних математичних методів. у спеціальних дисциплінах.

Основні цілі використання НІТН при вивченні спецкурсу з диференціальних рівнянь можна сформулювати так: підвищення інтересу до предмета; організація індивідуальної навчальної діяльності студентів; скорочення непродуктивних витрат часу на допоміжні роботи; розвиток творчої активності та здібностей студентів; підвищення унаочнення, виразності, доступності навчального матеріалу; моделювання фізичних явищ і процесів за допомогою комп'ютерів тощо.

Використання НІТН дозволяє інтенсифікувати навчання, сприяє створенню у студентському колективі напруженої творчої праці з метою оволодіння знаннями. Якщо при вивченні загального курсу вищої математики перед студентами ставиться завдання оволодіння вихідними поняттями математичних об'єктів та їх властивостями, обгрунтування вибору того чи іншого методу, алгоритму, то при вивченні спецкурсу головною метою є знайомство з методами, їх порівняння при застосуванні до побудови розв'язків фахових задач, набуття навичок доведення результату до числа та аналізу результатів обчислення.

Можна виділити такі види діяльності студентів при вивченні спеціальних розділів математики та диференціальних рівнянь зокрема:

- оволодіння математичним понятійним апаратом спеціальних розділів математики;
- оволодіння новими знаннями;
- систематизація набутих знань з математики, необхідних при вивченні фахових дисциплін;
- оволодіння навичками застосування набутих знань із спецкурсу математики.

Вивчення спецкурсів грунтується на принципах:

- формування навчально-пізнавальної проблеми, яку не можна розв'язати за допомогою набутих знань, здійснюється на основі реальної або імітованої практичної ситуації;

- залучення студентів до участі у виконанні завдань теоретичного, практичного змісту та лабораторних робіт;

- актуалізація необхідного навчального матеріалу.

При цьому студенти:

- набувають умінь правильного вибору сучасних чисельних методів і алгоритмів, які використовуються при розв'язуванні конкретних фахових задач;

- набувають досвіду використання математичного забезпечення, пакетів програм;

- мають можливість ознайомитись із методами розв'язування визначених та несумісних систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

- набувають навичок аналізу і тестування програмного забезпечення тощо.

Традиційне вивчення спецкурсів здійснюється за схемою: теорія ⇒ алгоритм ⇒ написання програми ⇒ проведення розрахунків. Значні витрати часу студентами у двох останніх ланцюгах не дозволяють їм в повній мірі оволодіти методами. Використання пакетів дає можливість зменшити об'єм рутинної роботи та сконцентрувати увагу на процесові розв'язування задачі та аналізові результатів.

Застосовуючи пакети, викладач може ставити перед студентами комплексні творчі завдання. Такий підхід дозволяє студентам визначити межі застосування тих чи інших методів та можливості їх інтеграції в інші розділи курсу.

Засобами 2D- та 3D-графіки студент може візуалізувати результати обчислень.

Практичне заняття

Тема заняття. Поняття жорсткої задачі Коші диференціальних рівнянь. Побудова наближеного аналітичного розв'язку рівняння методом базових функцій.

Дидактична мета. Розглянути поняття жорсткої задачі Коші ДР. Оволодіти навичками обчислення власних чисел матриці Якобі. Набути навичок побудови інтерполяційних поліномів на основі базових функцій. Продемонструвати студентам доцільність використовування комп'ютерів з метою ефективнішого засвоєння матеріалу; продовжити формування у студентів навичок використовування ППП.

Виховна мета. Сформувати уміння правильно аналізувати практичні задачі, використовувати такі методи наукового пізнання, як аналіз, порівняння, узагальнення та інші. Активізувати навчально-пізнавальну діяльність студентів.

Основні знання і уміння. Розуміти означення жорсткої задачі звичайного диференціального рівняння; уміти знаходити власні числа матриці Якобі за допомогою одного з пакетів: Maple V, DERIVE, MATLAB; будувати інтерполяційні многочлени; використовувати ППП при розв'язуванні нелінійних **систем рівнянь**.

Комп'ютерна підтримка. Програмне забезпечення: пакети GRAN1, Maple V, MATLAB, DERIVE.

Тип заняття. Засвоєння нових знань.

Мотивація пізнавальної діяльності студентів. Жорсткі задачі зустрічаються в теорії електронних кіл, теорії управління, хімічній кінетиці та інших галузях науки і техніки. Активізувати сприйняття нового матеріалу шляхом ознайомлення із задачами прикладного змісту, переконанням студентів у необхідності оволодіння методами розв'язування жорсткої задачі для звичайного диференціального рівняння.

Так, при математичному моделюванні робочого процесу віброграспортуючого пристрою, необхідно враховувати те, що час переміщення клапанів каскадів суттєво (принаймні на порядок) відрізняється від часу переміщення плунжера. Тому при розв'язуванні відповідного диференціального рівняння

$$y'' + a(t)(y')^2 + b(t)y = d(t),$$

де a(t), b(t), d(t) - функції, що характеризують робочий процес, узгоджують процеси, які змінюються повільно, та збурення, які швидко згасають.

Послідовність оволодіння новим матеріалом

1. За допомогою комп'ютера ознайомити студентів із задачами, при розв'язуванні яких необхідно знати методи розв'язування жорстких задач ДР.

2. Організувати роботу студентів з програмами, в яких моделюються відповідні фізичні процеси.

3. Розглянути означення жорсткої задачі звичайного диференціального рівняння.

4. Розв'язати вправи на обчислення власних чисел і векторів

матриці та застосування критерія жорсткості задачі.

5. Побудувати інтерполяційні многочлени.

6. Організувати роботу студентів з пакетами з метою візуалізації розв'язків рівнянь та їх наближень за допомогою базових функцій.

План заняття

I. Актуалізація знань. Повторення поняття розв'язку ДР, фізичного і геометричного змісту похідної, поняття диференціалу, власних чисел та власних векторів матриці.

2. Вивчення нового матеріалу. Оволодіння поняттям жорсткої задачі ДР починається з аналізу математичної моделі .

На прикладі рівняння [9]

$$y'' + 101y' + 100y = 0,\ y(0) = 1.01,\ y'(0) = -2,$$

розв'язком якого є функція $y = 0.01\exp(-100x) + \exp(-x)$, розглядається зміст жорсткості задачі Коші. Починаючи з деякого x_0, значення $\exp(-100x)$ стають малими і при $x > x_0$ не впливають суттєво на розв'язок рівняння.

Далі повторюються поняття, які розглядались на лекції: означення жорсткої задачі.

Розглядається задача Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (в загальному випадку нелінійних) першого порядку:

$$\bar{y}' = \bar{f}(x,\bar{y}) \quad , \quad x\in[a,b], \tag{I}$$

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_0 \ , \tag{2}$$

де $\bar{y}(x)$, $x\in[a,b]$ – розв'язок рівняння (I), який задовольняє початковим умовам (2).

Означення. Задача Коші називається жорсткою в деякому інтервалі $I\subset[a,b]$, якщо для $x\in I$

$$1)\ Re(\lambda_i)<0, \quad i=1,2,\ldots,s,$$

(тобто система асимптотично стійка по Ляпунову), і

$$2)\ S(x) = \max_{i=1,\ldots,s} Re(-\lambda_i) / \min_{i=1,\ldots,s} Re(-\lambda_i) >> 1,$$

де λ_i –власні значення матриці $J(x)$, обчисленої в точці $(x,\bar{y}(x))$, $J(x)$ – матриця Якобі лінеаризованої системи (I).

Розв'язуються завдання:

I. Знайти власні числа матриці Якобі рівняння

$$x^2(x-1)y'' + x(x+1)y' - y = 0 \qquad (3)$$
в точках $x_0 = 2;\ 1.1;\ 1.01;\ 3$. Визначити, чи задача Коші є жорсткою. Студенти переконуються в тому, що при $x>1$ виконуються умови (I) і (2), сформульовані в означенні. Отже, задача є жорсткою.

2. Вибрати серед базових функцій, введених В.С.Абрамчуком[1], $\varphi(x) = a(x-\alpha)_+^{\mu}$; $\varphi(x) = a*\exp(-\alpha(x-\beta)^2)$; $\varphi(x) = \alpha\ln(\omega x - \beta)$; $\varphi(x) = a\sin(\omega x - \varphi_0)$ або їх комбінацій ті, на основі яких доцільно будувати наближені розв'язки задачі:
$x^2(x-1)y'' + x(x+1)y' - y = 0$, $y(2) = 3.386$, $y'(2) = -2.693$.

Наближений аналітичний розв'язок знаходиться у вигляді комбінації базових функцій:

$$y=a(x-1)^{\mu}\ln(x-1)+b.$$

Для даної задачі Коші він має вигляд:

$$\varphi(x) = -2.693((x-1)\hat{\ }(-0.386))\ln(x-1) + 3.386.$$

3. Побудувати наближений розв'язок рівняння (3) з початковими умовами $y(1.1) = 12.048$, $y'(1.1) = -99.53$. Він має вигляд

$$\varphi(x) = -0.667((x-1)\hat{\ }(-0.74I))\ln(x-1) + 3.579.$$

4. Побудувати графіки наближених аналітичних розв'язків, одержаних у пп.2 і 3, та графік точного частинного розв'язку $y = x(1 + \ln x)/(x-1)$ (рис. 25). Проаналізувати їх, зробити попередній висновок про те, що вибрана функція тим точніше описує розв'язок рівняння, чим ближче точка, в якій задано початкові умови, до точки розриву.

Завдання творчого характеру.

I. Дослідити на жорсткість систему:

$$x'(t) = 998x(t) + 1998y(t),$$
$$y'(t) = -999x(t) - 1999y(t),$$
$$x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

2. Розв'язати дані ДР, побудувати наближені аналітичні розв'язки на основі базових функцій, проаналізувати графіки одержаних розв'язків.

1. y'(t) + 100y(t) = -1/((t + 1)^2) + 100/(t+1), y(0) = 2;
2. y'(t) + 100y(t) = -2t/((t^2 + 1)^2)+100/(t^2+1), y(0) = 2;
3. y'(t) + 100y(t) = -1/(t + 10) + 100/ln(t+10), y(0) = 3;

[1] Абрамчук В.С., Гуменюк А.В., Абрамчук И.В. Интерполяционные многочлены. – Винница, пединститут, 1995. – 96 с.

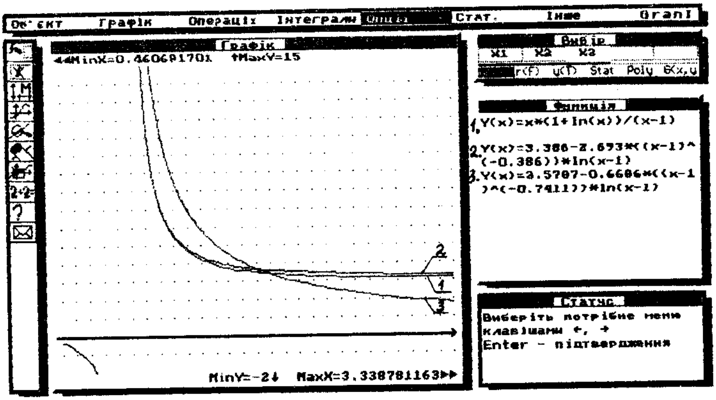


Рис. 25. Розв'язок жорсткої задачі Коші (I)
та його аналітичні наближення (2) і (3)

Підсумок заняття. Засвоєні наближені методи розв'язування жорсткої задачі Коші для звичайних ДР. Набули навичок обчислення власних чисел матриці за допомогою засобів математичних пакетів. На основі аналізу графіків розв'язків жорсткої задачі Коші та їх аналітичних наближень зроблено висновок про поведінку розв'язків в залежності від початкових умов.

Домашнє завдання. Студенти одержують завдання для самостійної роботи. Можуть бути використані програми для генерування індивідуальних завдань:

Побудувати наближені аналітичні розв'язки рівняння

$$y'(t) + ay(t) = f'(t) + af(t), \qquad y(0) = b,$$

де $a \gg 0$, b, $f(t)$ $(t > 0)$ - згенеровані константи та функція, яка повільно змінюється. Розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y(t) = f(t) + \exp(-at)(b - f(0)).$$

4. Вправи для автоматизованого навчального курсу

При вивченні диференціальних рівнянь доцільно використовувати відповідні автоматизовані навчальні курси. Дослідження показали їх ефективність при організації самостійної роботи, виконанні курсових робіт, типових розрахунків, на практичних заняттях тощо.

Нижче наведено типові завдання, які можна використати при розробці навчальних та контролюючих програм. При їх розробці використовувались алгоритми розв'язування диференціальних рівнянь, наведених у посібнику, а також матеріали завдань для самостійної роботи, самоперевірки та систематизації знань.

Наведемо приклади вправ, які можуть бути використані при розробці комп'ютеризованих навчальних курсів та інформаційних технологій навчання.

1. Які із наведених рівнянь є диференціальними?

   а) $y'+\sin(xy)=x$; б) $y+\sin x=\cos x$;

   в) $y''+xy'=0$; г) $y^2+x^2=x$.

2. Визначіть порядок диференціальних рівнянь

   а) $y''+(y')^3+y=0$; б) $(y')^2+xy'=y^3$;

   в) $(y''')^3-y''=\sin x$; г) $y^2+\sin(y')=x$.

3. Які з наведених нижче функцій є розв'язками рівняння $y'=\sin(2x)$?

   а) $y=2\sin(2x)$; б) $y=0,5\cos(2x)$;

   в) $y=-0,5\cos(2x)$; г) $y=0,5\sin(2x)$;

   д) $y=2-\frac{1}{2}\cos(2x)$.

4. Розв'язком яких із нижче наведених рівнянь є функція $y=x^3$?

   а) $y'=x^2$; б) $y'=xy$;

   в) $y'=\frac{3y}{x}$; г) $y'+y=x^3-x^2$;

   д) $y'=3x^2$; е) $(y')^2+xy=10x^4$.

5. Нехай $y = x^3 + C$ є загальним розв'язком деякого диференціального рівняння. Знайдіть частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(1)=2$.

6. Нижче сформульовані задачі для диференціальних рівнянь. Які з них є задачами Коші?

   а) $y''=x$, $y(1)=3$, $y(-2)=1$;

б) $y''=\sin x$, $y(0)=2$, $y'(0)=-3$;

в) $y''=\sin x+x$, $y(0)=1$, $y'(1)=5$;

г) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$, $y(1)=3$.

7. Вкажіть область існування і єдиності розв'язку рівняння $y'=\frac{y}{x}$.

8. Вкажіть відповідні пари диференціальних рівнянь, одне з яких виражено через диференціали:

а) $y'=x$; А) $ydx-xdy=0$;

б) $y'=x^2+y^2$; Б) $dy-(x^2+y^2)dx=0$;

в) $y'+xy=x^2$; В) $xdx-dy=0$;

г) $y'=\frac{y}{x}$; Г) $(x^2-xy)dx=dy$.

9. За якої умови відносно β загальний розв'язок рівняння $y''+y=\cos\beta x$ не містить добутку періодичної функції на степінь незалежної змінної?

10. При якому значенні a загальний розв'язок рівняння $y''+a^2y=\cos 2x$ не містить добутку періодичної функції на степінь незалежної змінної?

11. При яких значеннях a всі ненульові розв'язки рівняння $y''+ay'+y=0$ будуть затухаючими гармонічними коливаннями?

12. При яких значеннях k всі ненульові розв'язки рівняння $y''+y'+k^2y=0$ будуть затухаючими коливаннями?

13. При яких значеннях a_1 і a_2 всі розв'язки рівняння $y''+a_1y'+a_2y=0$ будуть періодичними функціями аргументу x?

14. При яких α і β рівняння $y'=ay^{\alpha}+bx^{\beta}$ заміною $y=z^m$ зводиться до однорідного відносно x і y ?

15. Розв'язати рівняння:

1) $y'=2xy$; 2) $y'-\frac{y}{x}=-x$; 3) $y'=\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$;

4) $xdx+ydy=0$; 5) $y'=3$; 6) $y'=4x$; 7). $y'=y$.

16. До якого з чотирьох типів рівнянь першого порядку (рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, рівняння в повних диференціалах) відносяться наведені нижче диференціальні рівняння:

1) $y'=y^2$; 2) $xdy+(y+x^2)dx=0$; 3) $\frac{dx}{y+x}=\frac{dy}{y-x}$;

4) $y'=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$; 5) $y'+y=3$; 6) $y''+y=\sin x$;

7) $xdy+(x^2-y)dy=0$; 8) $ydx+2(x+y)dy=0$;

9) $y'=\sin x\cdot\cos y$; 10) $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.

17. Побудуйте фундаментальну систему розв'язків рівнянь

1) $y''-4y=0$; 2) $y''=0$; 3) $y''+y=0$; 4) $y''-2y'+1=0$;

5) $y''-2y'-3y=0$.

18. Які з наведених рівнянь лінійні? Вкажіть їх порядок.

1) $x^2y''-2xy'+3y=0$; 2) $y'+3x^2y=\sin x$; 3) $y''+y'=y^2$;

4) $y'+xy=x^2(y'')^2$; 5) $y''-4y'+5=x^2$.

19. За даним характеристичним рівнянням а) $r^2+4=0$; б) $(r+1)^2=0$; в) $r^3=0$; г) $2r^2+3r-7=0$ складіть лінійне однорідне диференціальне рівняння найнижчого порядку.

20. За даними коренями характеристичного рівняння $r_1=2-i$, $r_2=2+i$ складіть лінійне однорідне рівняння другого порядку та запишіть його загальний розв'язок.

21. Нехай $\sin x$ і $\cos x$ фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння. Складіть рівняння та запишіть його загальний розв'язок.

22. За даними коренями характеристичного рівняння $r_1=-3$, $r_2=4$ запишіть загальний розв'язок відповідного диференціального рівняння.

23. Запишіть характеристичні рівняння заданих диференціальних рівнянь: 1) $y''-8y'+y=0$, 2) $y'''+9y''+2y'=0$, 3) $2y''+y=0$, 4) $y''=0$.

24. Якого виду функції можуть бути частинними розв'язками рівняння $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$?

25. Які з наведених рівнянь відносяться до лінійних однорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами?

1) $y'''-3y'+4y=0$; 2) $y''-2y'+3y=x$; 3) $y''-4y'+xy=0$;

4) $y''+3y'+x=0$; 5) $y''-2y=0$; 6) $y''-xy'+y=0$;

7) $y''+y'=0$.

26. Користуючись підпрограмою IZOKLIH, побудувати поле напрямків диференціального рівняння: 1) $y'=x+1$; 2) $y'=\cos(x-y)$.

27. Побудувати інтегральні криві диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx}=\frac{|xy|}{xy}.$$

28. Розв'язком якого з диференціальних рівнянь є функція

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt:$$

1) $x\,y=\sin x$; 2) $xy'=\sin x$; 3) $y'=\sin x$; 4) $xy'=\sin x+x$?

29. Яка з побудованих блок-схем (наводиться блок-схема) розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку відноситься до рівняння: а)однорідного, б)лінійного?

Особливістю наведених нижче завдань є те, що вони призначені для глибшого оволодіння темою "Диференціальні рівняння" за допомогою засобів НІТН. Викладач використовує їх для формулювання проблемних та творчих задач. Так, наприклад, завдання "Доведіть властивість інтегральних кривих однорідного відносно змінних x і y диференціального рівняння першого порядку про те, що коли одна з інтегральних кривих замкнута, то і всі інтегральні криві замкнуті" (завдання 34.2) викладач може сформулювати так. За допомогою одного з математичних пакетів (наприклад, GRAN1, DERIVE) побудуйте інтегральну криву однорідного відносно змінних x і y диференціального рівняння першого порядку (рис. 25). Яку особливість можна помітити та який висновок можна зробити відносно даної інтегральної кривої? Якщо ніхто із студентів не запропонував формулювання властивості, викладач ставить завдання побудувати ще декілька інтегральних кривих та конкретизує об'єкт аналізу, звертаючи увагу на те, що криві замкнуті. Далі студенти порівнюють ці інтегральні криві і розв'язки іншого однорідного рівняння, наведені на рис. 26. В результаті спільної діяльності викладача і студентів формулюється властивість інтегральних однорідного відносно змінних x і y диференціального рівняння першого порядку.

30. Доведіть, що інтегральні криві лінійного однорідного ДР $y' + P(x)y = 0$ не перетинають вісь OX.

31. Доведіть, що довільна інтегральна крива лінійного ДР $y' + P(x)y = Q(x)$ ділить у сталому відношенні відрізок ординати між будь-якими двома інтегральними кривими даного ДР.

32. Доведіть, що дотичні до інтегральних кривих лінійного ДР $y'+ P(x)y = Q(x)$, які проведені в точках перетину цих кривих прямою, паралельною осі OY, або паралельні, або перетинаються в одній точці.

33. Знайдіть розв'язок ДР

$$x(1+x^2)y' - y(x^2 - 1) + 2x = 0.$$

Чи існують розв'язки, які визначені при всіх дійсних x? Побудувати дотичні до інтегральних кривих в точках з абсцисою $x_0 = 0$. Довести, що ці дотичні проходять через одну точку, координати якої є функціями від x_0.

34. Доведіть властивості інтегральних кривих однорідного відносно змінних x і y диференціального рівняння першого порядку.

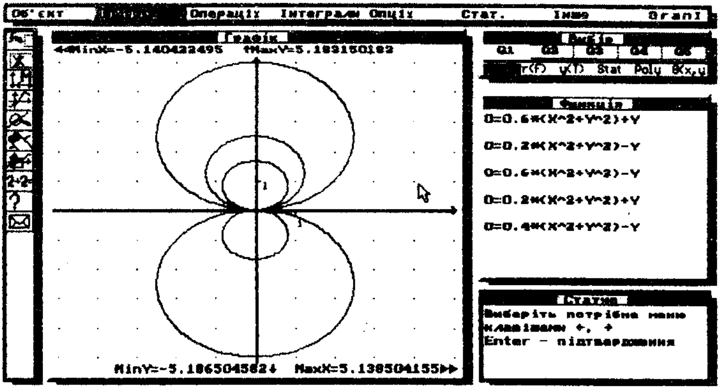


Рис. 26. Інтегральні криві однорідного диференціального рівняння

34.1. Якщо деяка крива є інтегральною кривою, то і симетрична їй відносно початку координат крива теж є інтегральною кривою.

34.2. Якщо одна з інтегральних кривих замкнута, то і всі інтегральні криві замкнуті.

34.3. Якщо інтегральна крива, відмінна від півпрямої, яка виходить з початку координат і, отже, розміщена на деякому проміжку зміни x між двома півпрямими $y = zx$, прилягає до точки $(0,0)$, то і всі інтегральні криві, розміщені між цими півпрямими, теж прилягають до точки $(0,0)$.

35. Побудуйте на фазовій площині траєкторії для даних рівнянь та систем рівнянь. На основі аналізу рисунку зробіть висновки про поведінку розв'язків при $t \to \infty$.

1). $x'' + 4x = 0$. 2). $x'' + 2x' + 5x = 0$.

3). $x'' - 2x' + 2x = 0$. 4). $x'' - 4x' + 3x = 0$.

5). $x'' + 2x' + x = 0$.

6). $x' = 3x,\ y' = 2x + y$. 7). $x' = x + 2y,\ y' = 5y - 2x$. 8). $x' = x,\ y' = 2x - y$.

Список літератури

I. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука, I985, - т.2.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. - М.: Наука, I985.

3. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Высшая школа, I983.

4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения, примеры и задачи. - К.: Выща школа, I984.

5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, I985.

6. Шестаков А.А., Малышева Н.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики: Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Векторный анализ. - М.: Высшая школа, I987.

7. Диференціальні рівняння (Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф)- К.: Вища школа, I98I.

8. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. - М.: Наука, I985.

9. Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. - М.: Наука, I986.

I0. Свидерский В.А. Решение технологических задач в машиностроении с применением микрокалькуляторов. - М.: Машиностроение, I987.

II. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров: Пер. с англ. Под ред. Р.С.Гутера. Изд. 2-е испр. - М.: Наука, I972.

З М І С Т

Навчальне видання

Віталій Іванович Клочко

Практикум з диференціальних рівнянь

Навчальний посібник

Редактор В.О.Дружиніна

Ум. др. арк. 10.81

Тир. 100 прим.

ВДТУ, 286021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95

ISBN 5 - 7763 - 8646 - 2