В.І. КЛОЧКО, В.П. ЛИТВИНЮК

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.І. Клочко, В.П. Литвинюк

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів напрямку підготовки 0708 – "Екологія".

Вінниця ВНТУ 2007

УДК 519.2(075)
К 50

Рецензенти:
В.М. Михалевич, доктор технічних наук, професор
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук, професор
В.Г. Петрук, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Клочко В.І., Литвинюк В.П.
К 50 **Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики** Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2007 – 124с.

В посібнику детально розглянуті теоретичні положення про випадкові події і випадкові величини та закони їх розподілу. Методика викладання матеріалу максимально пристосована для самостійної роботи студентів, розроблені завдання для типового розрахунку. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри вищої математики і програмою дисципліни "Вища математика".

УДК 519.2 (075)

ЗМІСТ

1 ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

1.1 Простір елементарних подій. Випадкові події

Теорія ймовірностей – це математична наука, яка вивчає закономірності в масових випадкових явищах.

Одним із вихідних понять теорії ймовірностей є поняття *стохастичного експерименту*. Так називають експерименти (досліди, спостереження, процеси), результати яких заздалегідь не можна передбачити. Це залежить від багатьох обставин, яких ми або не знаємо, або не можемо врахувати.

Наприклад, при киданні грального кубика ми не можемо заздалегідь знати, яка із його граней виявиться зверху, бо це залежить від багатьох невідомих нам обставин (траєкторії руху руки при киданні, особливостей поверхні, на яку падає кубик, положення кубика в момент кидання та ін.).

Стохастичний експеримент проводять за умови здійснення сукупності певних умов. В подальшому, замість того щоб говорити „сукупність умов здійснена", будемо говорити коротко „*проведено випробування*".

Результат стохастичного експерименту називають елементарною випадковою подією. Отже, *всякий факт*, який в результаті стохастичного експерименту може настати або не настати, називають *випадковою подією.* Приведемо приклади випадкових подій: випадання п'ятірки при киданні грального кубика; відмова технічного пристрою за час T його роботи; спотворення повідомлення при передаванні його по каналу зв'язку.

Таким чином, *випадкову подію будемо розглядати як результат випробування.*

Означення. *Множину всіх можливих випадкових подій* деякого стохастичного експерименту називають *простором елементарних подій* і позначають великою грецькою буквою Ω (омега).

Всякий елемент ω цієї множини є випадкова подія. В реальному експерименті *елементарним подіям* часто відповідають *взаємовиключні результати.* В зв'язку з великою різноманітністю випадкових явищ не можна дати більш конкретного означення простору елементарних подій. Для описання кожної конкретної задачі множина Ω вибирається відповідним чином. Приведемо приклади.

1. Експеримент – кидання монети один раз. Можливими результатами можуть бути: випадання монети гербом або цифрою догори. Отже, маємо такі елементарні події: ω_1 – випадання герба Г, ω_2 – випадання цифри Ц. Зауважимо, що в цьому експерименті можливі і інші результати: монета зникла з поля зору, стала на ребро та ін. При математичному описанні цього експерименту такі результати є несуттєвими і їх не враховують.

Отже, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ або $\Omega = \{Г, Ц\}$. Кількість можливих результатів $n=2$.

2. Експеримент – кидання грального кубика один раз. Можливі результати: випадання на верхній грані кубика k очок, де $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Якщо такий результат позначити через ω_k, простір елементарних подій цього експерименту буде таким: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, а кількість можливих результатів $n = 6$.

3. Експеримент – кидання монети тричі (або кидання трьох монет один раз). Простір елементарних подій буде таким:
Ω = {ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ}, який складається з восьми елементів ($n = 8$).

4. Експеримент – стрільба по плоскій мішені. Якщо ввести прямокутну систему координат, то кожному результату ω{попадання в певну точку координатної площини} відповідає пара чисел x і y, що є координатами точки, тобто $\omega = (x, y)$. Отже, Ω – незчисленна множина.

5. Експеримент – підкидання монети до появи герба. Можливі результати: поява герба; поява спочатку цифри, а потім герба; поява спочатку цифри два рази підряд, а потім герба і т.д. Отже, простір елементарних подій є зчисленна множина: Ω = {Г, ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ,...}.

В реальному стохастичному експерименті, крім взаємовиключних результатів, можна вказати і багато інших. Всі вони називаються випадковими подіями (і перші, і останні).

Наприклад, в попередньому прикладі 3 (кидання монети тричі) можна розглядати такі випадкові події: випадання двох гербів, випадання не менше двох цифр, тобто A = {ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ}, B= {ГЦЦ,ЦГЦ, ЦЦГ,ЦЦЦ}; в прикладі 2 (кидання кубика) можна розглядати випадкову подію C – випадання очок, кратних трьом, тобто $\{\omega_3, \omega_6\}$.

Як бачимо, ці випадкові події є частинами відповідного простору елементарних подій або, як кажуть в термінології множин, є підмножинами множини Ω.

Означення. *Випадковою подією,* що пов'язана з даним стохастичним експериментом, називають будь-яку *підмножину A* елементів *множини Ω – простору елементарних подій* даного експерименту.

Позначають випадкові події великими буквами латинського алфавіту, переважно першими: $A, B, C, D, E,$…або A_1, A_2, A_3,..., A_n.

Умовно будемо говорити, що в результаті проведення експерименту настане випадкова подія A, якщо з'являться *деякі елементи ω, кожен з яких належить множині A*, тобто $\omega \in A$.

1.2 Алгебра випадкових подій. Види випадкових подій

Над випадковими подіями можна здійснювати операції додавання та множення. Нехай A і B – випадкові події, що можуть настати в результаті проведення стохастичного експерименту.

1. ***Означення***. *Сумою випадкових подій A і B називають випадкову подію,* що позначають символом $A+B$ або $A\cup B$, яка складається з *усіх елементарних подій,* що *належать хоча б одній із цих подій.*

Отже, випадкова подія $A+B$ настає тоді і тільки тоді, коли настає хоча б одна із подій A або B, або обидві.

2. ***Означення.*** *Добутком випадкових подій A і B називають випадкову подію*, що позначають символом AB або $A \cap B$, яка складається з *усіх елементарних подій, що належать події A і події B.*

Отже, випадкова подія AB настає тоді і тільки тоді, коли в результаті проведення експерименту настає і подія A, і подія B, тобто настають обидві події.

Наприклад, якщо випадкова подія A означає попадання в мішень при одному пострілі першим стрільцем, а B – попадання в цю мішень другим стрільцем, то випадкова подія AB означає, що обидва стрільці попадуть в мішень, а випадкова подія $A+B$ означає, що в мішень попаде або перший стрілець, або другий стрілець, або обидва стрільці, тобто в мішені буде одна або дві пробоїни.

Приведемо ще один приклад. Розглянемо ділянку електричного кола, що складається із двох паралельно з'єднаних елементів. Нехай подія A – вихід із ладу першого елемента, B – вихід із ладу другого елемента. Тоді випадкова подія AB полягає в тому, що ділянка кола не працюватиме, бо обидва елементи вийдуть з ладу.

Цим діям над випадковими подіями можна дати геометричну інтерпретацію. Якщо простір елементарних подій Ω зобразити на площині прямокутником, а випадкову подію A – деякою областю, що лежить в цьому прямокутнику (так звані круги Ейлера), то випадкові події $A+B$ і AB будуть зображатися відповідно заштрихованими областями (рис. 1.1 і рис. 1.2).

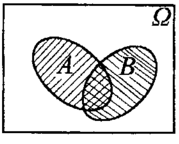


Рисунок 1.1

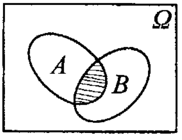


Рисунок 1.2

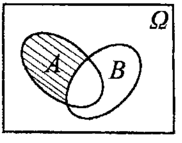


Рисунок 1.3

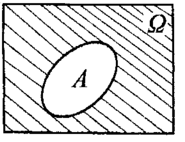


Рисунок 1.4

Зауваження. Поняття суми і добутку випадкових подій поширюються на довільну кількість випадкових подій або на послідовності випадкових подій, а саме: *сумою декількох випадкових подій* $A_1, A_2, ..., A_n$ називають випадкову подію $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + ... + A_n$, яка полягає в тому, що настане хоча б одна із них; добутком декількох випадкових подій $A_1, A_2, ..., A_n$ називають випадкову подію, яка полягає в сумісній появі всіх цих подій.

3. ***Означення.*** *Різницею випадкових подій A і B* називають *випадкову подію*, що складається із елементарних подій, які належать множині A і не *належать множині B*, і позначають символом $A \setminus B$.

Отже, випадкова подія $A \setminus B$ означає, що випадкова подія A настане, а випадкова подія B не настане в даному експерименті. Ця подія зображена на рисунку 1.3 (заштрихована область).

Введемо ще кілька понять, пов'язаних з випадковими подіями.

4. *Множину Ω – простір елементарних подій називають **вірогідною подією**.* Це означає, що при кожному випробуванні експерименту ця випадкова подія настає всякий раз. Наприклад, при киданні грального кубика один раз випаде не більше десяти очок.

5. *Порожню підмножину простору елементарних подій називають **неможливою подією**.* Це означає, що при будь-якому випробуванні експерименту ця випадкова подія ніколи не настане. Неможливу подію будем позначати символом $\varnothing$. Наприклад, при киданні грального кубика один раз одночасне випадання двох і п'яти очок є неможлива подія.

6. ***Означення**. Різницю $\Omega \setminus A$ називають **доповненням** випадкової події A або **протилежною подією*** до A і позначають символом $\overline{A}$.

Отже, протилежна подія $\overline{A}$ при випробуванні експерименту настає тоді і тільки тоді, коли випадкова подія A не настає. Це означає, що поява при випробуванні експерименту однієї з випадкових подій A або $\overline{A}$ виключає появу іншої, тобто в даному експерименті *одночасна поява цих подій неможлива.* Протилежну подію до A ще називають „не A".

Наприклад, при киданні монети один раз випадковій події A{випадання герба} протилежною подією $\overline{A}$ є випадання цифри; а при киданні монети тричі випадковій події A{випадання хоча б одного герба} протилежною подією $\overline{A}$ є випадання трьох цифр, тобто ні разу не випаде герб.

7. *Випадкові події A і B називають **несумісними**, якщо $AB = \varnothing$.* Це означає, що випадкова подія AB є неможливою, тобто одночасно їх поява в даному експерименті неможлива. Зокрема, *випадкові події A і $\overline{A}$ є несумісні.*

8. *Якщо $A\,B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають **сумісними.***

Отже, дві події є сумісні, якщо поява однієї з них при випробуванні експерименту не виключає появу іншої, такі події можуть настати одночасно.

Наприклад, при киданні двох гральних кубиків один раз випадкові події A_3{випадання трьох очок на першому кубику} і B_3{випадання п'яти очок на другому кубику} є події сумісні.

***Зауваження** 1.* Безпосередньо з означень суми і добутку випадкових подій випливають такі рівності:

$A+A = A$; $AA=A$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = \Omega$.

***Зауваження** 2.* Для дій додавання і множення справедливі всі *три закони математики*:

а) *комутативний або переставний* $A+B = B+A$, $A\,B = B\,A$;

б) *асоціативний* або *сполучний* $A+(B+C) = (A+B)+C$, $A\,(B\,C)=(A\,B)\,C$;

в) *дистрибутивний* або *розподільний* $(A+B)\,C = A\,C+B\,C$.

1.3 Частота випадкової події і її властивості

Нехай проводиться деякий стохастичний експеримент, тобто проводиться випробування і Ω – його простір елементарних подій. Будемо *повторювати* проведення цього експерименту n разів. Повторення цього експерименту n разів означає *вибір* певної послідовності $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ випадкових подій, що входять в Ω, бо при кожному випробуванні настане певна випадкова подія.

Виберемо тепер певну довільну випадкову подію A, що пов'язана з цим експериментом, яка в результаті проведення цього експерименту може настати або не настати. Відзначимо члени послідовності $\omega_1, \omega_2, ... \omega_n$, які відповідають даній події A, тобто входять в підмножину A. Їх число позначимо через m або $m(A)$. Це число $m(A)$ означає *число випробувань, в яких настала випадкова подія A,* або *число появ події A в серії із n повторень даного експерименту.* Розглянемо відношення $m(A)/n$, яке буде визначати частоту події A в цій серії випробувань.

Означення. *Частотою випадкової події A в серії n повторень даного експерименту називають відношення числа появ події A в цій серії до числа всіх випробувань.*

Позначають частоту випадкової події A символом $\upsilon_n(A)$, υ (ню). Отже, за означенням

$$\upsilon_n(A) = m(A)/n, \tag{1.1}$$

де n – число всіх випробувань, $m(A)$ – число появ події A в цих випробуваннях.

Приклад . Для контролю якості виробів із партії навмання відібрано 200 виробів, серед яких 6 виробів виявились бракованими. Визначити частоту браку.

Розв'язування. Нехай подія A означає, що виріб бракований. Оскільки $n = 200$, а $m(A) = 6$, то частота браку $\upsilon_{200}(A) = 6/200 = 0,03$.

Зауважимо, що частоту випадкової події визначають *після* того, як в даній серії випробувань *ця випадкова подія настала.*

Частота випадкової події має такі властивості.

1⁰. *Частота випадкової події є невід'ємне число, не більше* 1, тобто $0 \le \upsilon_n(A) \le 1$.

Дійсно, оскільки випадкова подія A в серії із n випробувань може настати від 0 до n разів, то $0 \le m(A) \le n$. Тоді матимемо, що $0/n \le m(A)/n \le n/n$ або $0 \le m(A)/n \le 1$. Отже, $0 \le \upsilon_n(A) \le 1$.

2⁰. *Частота вірогідної події дорівнює одиниці*, тобто $\upsilon_n(\Omega) = 1$.

Дійсно, бо в серії із n випробувань *вірогідна подія* кожного разу настане, тому $m(A) = n$, а тоді $\upsilon_n(\Omega) = n/n = 1$.

3⁰. *Частота неможливої події дорівнює нулю,* тобто $\upsilon_n(\varnothing) = 0$.

Це очевидно, бо $m(A) = 0$.

При проведенні експерименту може статись, що настала не одна подія, а декілька випадкових подій. Як бути з частотою суми і добутку випадкових подій?

4^0. *Частота суми двох несумісних випадкових подій дорівнює сумі частот цих подій*, тобто $\upsilon_n(A+B)=\upsilon_n(A)+\upsilon_n(B)$, де $AB=\varnothing$.

Доведення. Нехай проведено n випробувань, в результаті яких випадкова подія A настала m разів, а випадкова подія B настала k разів. Тоді $\upsilon_n(A)=m/n$, $\upsilon_n(B)=k/n$. Оскільки випадкові події A і B несумісні, то їх сума $A+B$ настала в цій серії випробувань $m+k$ разів. Тоді частота події $A+B$ дорівнюватиме $(m+k)/n$, тобто $\upsilon_n(A+B)=(m+k)/n$, звідси одержимо, що $\upsilon_n(A+B)=(m+k)/n=m/n+k/n=\upsilon_n(A)+\upsilon_n(B)$, що треба було довести.

Якщо випадкові події A і B сумісні, то при проведенні серії випробувань можна розглядати ряд частот, а саме: а) частоту події A безвідносно до появи події B; б) частоту події B безвідносно до появи події A; в) частоту події A за умови, що подія B настала; г) частоту події B за умови, що подія A настала; д) частоту події AB.

Частоту випадкової події за умови, що інша подія настала, називають ***умовною частотою*** *даної події* і позначають символами $\upsilon_n(A/B)$, $\upsilon_n(B/A)$.

Отже, $\upsilon_n(A/B)$ означає умовну частоту події A за умови, що B настала, а $\upsilon_n(B/A)$ – це умовна частота події B за умови, що подія A настала.

5^0. *Частота добутку двох сумісних подій A і B дорівнює добутку частоти однієї із цих подій на умовну частоту іншої*, тобто

$$\upsilon_n(AB)=\upsilon_n(A)\cdot\upsilon_n(B/A) \text{ або } \upsilon_n(AB)=\upsilon_n(B)\cdot\upsilon_n(A/B).$$

Доведення. Нехай в серії n випробувань випадкова подія A настала m разів, а випадкова подія B настала k разів, причому l разів події A і B настали одночасно (очевидно, що $l\le m$ і $l\le k$). Тоді $\upsilon_n(A)=m/n$, $\upsilon_n(B)=k/n$ і $\upsilon_n(AB)=l/n$.

Визначимо тепер умовні ймовірності випадкових подій. Оскільки подія A настала в m випробуваннях, з яких в l випробуваннях вона настала разом з випадковою подією B, то умовна частота події B за умови, що подія A настала, дорівнює l/m, тобто $\upsilon_n(B/A)=l/m$. Знайдемо добуток частот, що входять в праву частину першої рівності, одержимо $\upsilon_n(A)\cdot\upsilon_n(B/A)=m/n\cdot l/m=l/n$, а це числове значення дорівнює частоті події $A\,B$.

Отже, перша рівність доведена.

Аналогічно, оскільки подія B настала в k випробуваннях, з них в l випробуваннях вона настала разом із подією A, то умовна частота події A за умови, що B настала, дорівнює l/k, тобто $\upsilon_n(A/B)=l/k$, тоді $\upsilon_n(B)\cdot\upsilon_n(A/B)=k/n\cdot l/k=l/n=\upsilon_n(AB)$.

Зауважимо, що якщо $A\cdot B=\varnothing$, то $\upsilon_n(AB)=0$ (за властивістю **3^0**).

2.4 Статистичне означення ймовірності випадкової події

Звернемо увагу на те, що частоту випадкової події можна визначити тільки після проведення даного експерименту, точніше *після серії випробувань.* Очевидно, що в *різних серіях* n випробувань, що проводяться при одних і тих же умовах, частота події *не залишається сталою, вона змінюється від серії до серії.* І тому частота випадкової події погано характерризує саму випадкову подію.

Але накопичений *історичний досвід* переконує в тому, що при *необмеженому збільшенні числа випробувань частоти випадкових подій стабілізуються навколо певних величин,* які не залежать ні від n, ні від вибору від-повідної серії випробувань.

Число, навколо якого групуються частоти випадкової події при *необмеженому зростанні n*, виражає *об'єктивну можливість появи події* в даному експерименті *ще до настання* самої події. Саме це число дає *можливість прогнозувати появу випадкової події* в даному експерименті. Це число називають *ймовірністю випадкової події A* і позначають символом $P(A)$ (від першої букви слова"probability", що означає „ймовірність").

***Означення. Ймовірністю** випадкової події називають число, навколо якого групуються частоти цієї події при необмеженому збільшенні числа випробувань.*

Отже,
$$P(A) \approx \upsilon_n(A) \text{ або } P(A) \approx m(A)/n, \tag{1.2}$$
де n – число всіх випробувань (*досить велике* число), $m(A)$ – число появ події A в цих випробуваннях.

Це так зване *статистичне означення ймовірності* випадкової події, бо опирається на реальні експерименти, в цьому його переваги над іншими, бо можна перевірити їх правильність практикою. Але статистичне означення ймовірності має і *недоліки,* бо іноді проведення деяких експериментів економічно і матеріально є досить затратним. Тому є потреба іншого способу визначення ймовірності випадкової події до її настання, прогнозуючи можливість цього настання числом до проведення експерименту.

1.5 Класичне означення ймовірності випадкової події

Це поняття ймовірності випадкової події основане на понятті *рівноможливих подій, що утворюють повну групу подій,* і *понятті випадків.*

Дві і більше випадкові події називають ***рівноможливими,*** якщо *умови* їх *появи однакові* і нема підстав твердити, що яка-небудь із них в результаті даного експерименту має більше шансів настати, ніж інші.

Наприклад, а) при киданні грального кубика події A_k випадання k очок, де $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, є рівноможливими; б) при киданні монети один раз випадання герба і випадання цифри є рівноможливі події; в) витягування з ящика будь-якої із k однакових деталей є рівноможливі події.

Декілька випадкових подій *утворюють повну групу подій,* якщо в результаті експерименту *обов'язково настане хоча б одна із них.*

Означення. *Рівноможливі несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають* ***випадками*** *або шансами.*

Відносно даної випадкової події випадки діляться на *сприятливі* і *несприятливі. Сприятливими називають випадки, при яких ця подія настане; несприятливими називають випадки, при яких дана подія не настане.*

Наприклад, а) при киданні грального кубика один раз події A\{випадання непарного числа очок\} сприяють три випадки: випадання 1, 3 і 5 очок, тому $P(A)=3/6=1/2$; а події B\{випадання очок, кратних трьом\} сприяють два випадки (випадання 3 і 6 очок), тому $P(B)=2/6=1/3$.

Означення. Ймовірністю випадкової події *A називають відношення числа випадків, що сприяють появі події A, до загального числа всіх випадків в даному експерименті.*

Якщо через n позначити число всіх випадків, а через $m(A)$ – число сприятливих події A випадків, то за означенням ймовірності

$$P(A)=m(A)/n. \tag{1.3}$$

Це означення ймовірності випадкової події називають *класичним*, бо воно історично було першим означенням поняття ймовірності події в самий початковий період розвитку теорії ймовірностей. Важливою його *перевагою* є те, що *ймовірність випадкової* події можна *визначити заздалегідь* ще до проведення експерименту, що дає можливість спрогнозувати для себе певні висновки, провівши попередньо деякі обчислення. А *недоліки* цього способу визначення ймовірності події полягають в *обмеженості* його застосування (*тільки* для *рівноможливих результатів* і *простір елементарних подій Ω скінченний*).

Приведемо кілька прикладів.

Приклад 1. В урні 10 однакових кульок, серед яких 6 білих і 4 чорних. Навмання витягують одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

Розв'язування. Нехай A – випадкова подія, що означає появу білої кульки при витягуванні. Очевидно, що результати цього експерименту є випадками, загальне число яких дорівнює 10, тобто $n=10$, а число сприятливих цій події випадків дорівнює 6, тобто $m(A)=6$. Тоді $P(A)=6/10=3/5$.

Приклад 2. В урні 10 однакових кульок, серед яких 6 білих і 4 чорних. Навмання витягують дві кульки. Знайти ймовірність того, що ці кульки різного кольору.

Розв'язування. Нехай A – випадкова подія, яка полягає в тому, що дві витягнуті кульки різного кольору. Треба визначити, скількома способами можна витягнути дві кульки із 10, тобто скількома способами можна утворювати пари різних кульок і скількома способами можна утворювати пари різного кольору. Почнемо з визначення кількості саме пар, які є сприятливими випадками події A. Оскільки кожну білу кульку можна спарувати з чорною 4 способами, бо чорних кульок 4, то всього таких пар буде в шість разів більше, бо є 6 білих кульок. Отже, $m(A) = 4 \cdot 6 = 24$. Число всіх випадків, тобто всіх можливих пар, можна обчислити так: одну кульку пари можна вибрати десятьма способами, а другу – дев'ятьма способами, тоді всього буде $10 \cdot 9 = 90$. Оскільки порядок в парі не має значення, бо пари кульок з номерами 1 і 2 та номерами 2 і 1 це не різні пари, а одна і та ж пара, то число всіх різних пар буде в два рази менше, тобто $n = 45$. Тоді ймовірність події A визначимо за формулою (1.3), а саме: $P(A) = 24/45 = 8/15$.

Приклад 3. Монета кидається двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде „герб".

Розв'язування. Нехай випадкова подія A означає, що хоча б один раз випаде „герб". Для цього експерименту неважко скласти простір елементарних подій $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$. Звідси видно, що число всіх випадків $n = 4$, а число випадків, що сприяють події A, дорівнює 3, тобто $m(A) = 3$, бо $A = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$; тоді $P(A) = m(A)/n = 3/4$.

1.6 Основні формули комбінаторики

Як бачимо, при обчисленні ймовірності випадкової події за класичним означенням доводиться знаходити число груп елементів, що задовольняють певні вимоги. Формуванням і підрахунками таких груп займається комбінаторика. В залежності від побудови цих груп вони розділяються на три типи: *перестановки, розміщення* і *комбінації.*

1. ***Означення. Перестановками*** *називають групи, що складаються з одних і тих же n різних елементів і відрізняються тільки порядком їх розміщення.*

Число всіх можливих перестановок із n елементів позначають через P_n. Неважко вивести формулу для обчислення числа перестановок. По суті треба встановити, скількома способами можна заповнити n місць (позицій) n різними елементами (особами) (кількість місць і осіб однакова). Першу позицію можна заповнити (чи вибрати) n способами, бо елементів всього n; другу позицію – $(n-1)$ способом, а дві перші позиції можна заповнити $n(n-1)$ способами; третю позицію можна заповнити $(n-2)$ способами, а три перші – $n(n-1)(n-2)$ способами, а всі n позицій $n(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ способами. Цей добуток натуральних чисел від 1 до n називають n – факторіал і позначають $n!$

Отже,
$$P_n = n!, \tag{1.4}$$
при цьому, вважають $0! = 1$.

2. Нехай тепер маємо n елементів, з яких будемо складати групи по m елементів в кожній.

Означення. *Розміщеннями із n по m* називають *групи*, що складаються із n різних елементів по m елементів в кожній групі і *відрізняються самими елементами* або *порядком їх розміщення.*

Число всіх можливих розміщень із n по m позначають символом A_n^m.

Формулу для обчислення A_n^m можна вивести аналогічно тому, як виводилась формула для обчислення числа всіх перестановок тільки з тією різницею, що число місць n заповнюються m елементами, де $m < n$, а саме: першу позицію можна вибрати n способами, другу – $(n–1)$ способом, третю – $(n–2)$ способами, останню m-у вибираємо $(n–(m–1))$ способами, а всі m позиції – $n(n–1)(n–2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$ способами.

Отже, $$A_n^m = n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1). \qquad (1.5)$$

3. Якщо в попередніх групах виключити ті, що відрізняються порядком розміщення елементів, то такі групи називають *комбінаціями.*

Означення. *Комбінаціями* із n по m називають групи, що складаються з n різних елементів по m елементів в кожній і *відрізняються хоча б одним елементом.*

Число всіх комбінацій із n по m позачають символом C_n^m. Очевидно, що числа комбінацій C_n^m менше числа розміщення A_n^m, бо треба виключити з розміщень ті групи, що відрізняються порядком розміщення елементів. Неважко показати, що $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$, звідки маємо, що

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}. \qquad (1.6)$$

Якщо чисельник і знаменник цього дробу помножити на добуток $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n–m)$, то дістанемо формулу: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Справедлива формула $$C_n^m = C_n^{n-m}. \qquad (1.7)$$

Приклад 4. В ящику міститься 10 однакових на вигляд деталей, серед яких 4 пофарбовані. Навмання витягують три деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі пофарбовані .

Розв'язування. Нехай випадкова подія A означає, що витягнуті деталі пофарбовані. Випадками є групи, складені з трьох деталей і відрізняються хоча б однією деталлю, а це є комбінації. Тоді число всіх випадків $n = C_{10}^3$, а число сприятливих цій події випадків $m(A) = C_4^3$, тому

$$P(A) = C_4^3 / C_{10}^3 = 4 \Big/ \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 1/30.$$

Приклад 5. Телефонний номер складається з шести цифр. Знайти ймовірність того, що всі цифри різні.

Розв'язуваня. Нехай випадкова подія A означає, що всі цифри номера різні. Число всіх шестизначних номерів (число всіх випадків) дорівнює 10^6. Сприятливі випадки – це групи по шість цифр в кожній, що відрізняються самими цифрами або порядком її розміщення (останнє важливе), а такі групи називають розміщеннями, тому $m(A) = A_{10}^6$. Тоді

$$P(A) = A_{10}^6 / 10^6 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 / 10^6 = 0{,}1512.$$

1.7 Геометричні ймовірності

Якщо число всіх випадків даного стохастичного експерименту нескінченне і особливо, коли результати експерименту не зводяться до схеми випадків, класичне означення ймовірності події не можна застосувати. В цьому випадку можна вказати інший спосіб визначення ймовірності події, але знову основну роль буде відігравати поняття *рівноможливості* деяких подій. Застосовується цей спосіб в тих задачах, які зводяться до випадкового кидання випадкової точки на скінченну частину прямої, площини або простору. Цим обумовлена сама назва геометричної ймовірності. Викладемо суть цього поняття.

Нехай на площині є деяка область (D), площу якої позначимо через S_D, і в ній міститься інша область (d), площу якої позначимо через S_d. На область (D) кидають навмання точку. Це означає, що ця точка може *виявитись в будь-якому місці області* (D), а *ймовірність попадання* цієї точки в область (d) *пропорційна площі цієї області*, тобто тим більша, чим більша площа S_d, *і не залежить ні від місця розташування її відносно області* (D), *ні від форми області* (d).

Нехай випадкова подія A означає *попадання випадкової точки в область* (d). *Тоді за ймовірність попадання точки в область* (d) *беруть відношення площ* S_d і S_D, а саме:

$$P(A) = S_d / S_D . \tag{1.8}$$

У випадку просторової області або відрізка числової прямої замість площ беруть відповідно об'єми тіл або довжини відрізків.

1.8 Аксіоми теорії ймовірностей

Основні базові твердження теорії ймовірностей введемо аксіоматично, тобто у вигляді теорем, які приймаються без доведення. Оскільки ймовірність випадкової події за статистичним означенням є число, навколо якого групуються частоти випадкової події при необмеженому зростанні числа випробувань, то від ймовірності випадкової події треба вимагати виконання всіх властивостей її аналогу, яким є частота випадкової події. Тільки в цьому випадку *відповідна теорія буде добре узгоджуватись з практикою*. Отже, від ймовірностей випадкових подій ми будемо вимагати виконання всіх відомих нам властивостей частот випадкових подій. До того ж теорія, побудована на аксіомах, вважається строгою і достатньо науково обґрунтованою. Отже, будемо вважати, що для ймовірностей випадкових подій справедливі такі аксіоми.

А 1. *Ймовірність випадкової події є невід'ємне число, що не перевищує одиниці*, тобто $0 \le P(A) \le 1$.

А 2. *Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці.*

А 3. *Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.*

А 4. *Ймовірність суми двох несумісних випадкових подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій,* тобто

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1.9)$$

Цю аксіому називають *аксіомою додавання ймовірностей.*

А5. *Ймовірність добутку двох випадкових подій дорівнює ймовірності однієї з них, помноженій на умовну ймовірність іншої*, тобто

$$P(A\,B) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B) \qquad (1.10)$$

Цю аксіому називають *аксіомою множення.*

Означення. *Ймовірність випадкової події A, знайдену за умови, що подія B настала, називають умовою ймовірністю події A відносно події B* і позначають символом $P(A/B)$.

Зауважимо, що *аксіома додавання* **А4** і аксіома множення **А5** формулюються *лише* для *двох* випадкових подій.

Приклад 6. На двох автоматичних верстатах виготовляються однакові деталі, які надходять на спільний конвеєр. Відомо, що продуктивність першого верстата в два рази більша, ніж другого. Ймовірність виготовлення деталі вищої якості на першому верстаті дорівнює 0,96, а на другому – 0,93. Знайти ймовірності того, що навмання взята з конвеєра деталь виготовлена на відповідному верстаті і виявиться вищої якості.

Розв'язування. Нехай A_i – навмання взята з конвеєра деталь виготовлена на i-му верстаті, де $i = 1, 2$, а B_i – взята деталь виявиться вищої якості. Оскільки $P(A_1) =2/3$, $P(A_2) =1/3$, $P(B_1/A_1) = 0{,}96$, $P(B_2/A_2) = 0{,}93$, то $P(A_1\,B_1)=$ $=P(A_1)\cdot P(B_1/A_1) = 2/3\cdot 0{,}96 = 0{,}64$, $P(A_2\,B_2) = P(A_2)\cdot P(B_2/A_2)=1/3\cdot 0{,}93 = 0{,}31$.

1.9 Основні теореми теорії ймовірностей

Зауважимо, що безпосередньо, користуючись приведеними означеннями, можна визначити ймовірності елементарних простих подій, для яких виконуються відповідні умови їх застосування. В реальних експериментах розглядаються більш складні випадкові події, які описуються алгеброю випадкових подій. Тому треба вміти визначати ймовірності суми і добутку декількох випадкових подій, ймовірність яких ми знаємо або можемо визначити.

1.9.1 Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Узагальнимо аксіому додавання *А*4 на довільне число несумісних випадкових подій. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Ймовірність суми декількох несумісних випадкових подій дорівнює сумі їх ймовірностей*, тобто

$$P(A_1 + A_2 +\ldots+ A_n) =P(A_1) + P(A_2) +\ldots+ P(A_n). \qquad (1.11)$$

Доведення. Доводити теорему будемо за допомогою *методу повної математичної індукції*. Для $k = 2$ ця рівність справедлива згідно з *аксіомою додавання*. Припустимо, що ця теорема має місце, для $k = n - 1$, тобто $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) = P(A_1) + P(A_2) +\ldots+ P(A_{n-1})$. Доведемо, що це твердження справедливе для $k = n$, тобто для суми n подій. Суму перших $(n - 1)$ випадкових подій позначимо через B, тобто $B = A_1 + A_2 + \ldots+ A_{n-1}$.

Тоді за нашим припущенням $P(B) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{n-1})$. Користуючись сполучним законом додавання випадкових подій, суму n випадкових подій A_k подамо в такому вигляді: $A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n = (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) + A_n = B + A_n$. Оскільки події B і A_n теж не сумісні, то за аксіомою додавання матимемо, що $P(B + A_n) = P(B) + P(A_n)$ або $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} + A_n) = P(B + A_n) = P(B) + P(A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{n-1}) + P(A_n)$.

Отже, $P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$ і теорему доведено.

З цієї теореми випливають такі наслідки.

Наслідок 1*. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.*

Дійсно, оскільки події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій, тобто хоча б одна із них в результаті експерименту обов'язково настане, то їх сума $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ є *вірогідною* подією, тоді за аксіомою **А2** випливає, що $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$. З другого боку $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$. Звідси випливає, що

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (1.12)$$

Наслідок 2*. Сума ймовірностей* ***протилежних*** *випадкових подій дорівнює одиниці*, тобто

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (1.13)$$

Дійсно, це випливає з попереднього наслідку, оскільки події A і $\overline{A}$ *несумісні* і утворюють *повну групу подій.*

З рівності (1.13) маємо, що

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}). \qquad (1.14)$$

Ось такими рівностями зв'язані ймовірності протилежних подій.

Приклад *7*. В урні міститься 30 кульок, серед яких 5 червоних, 8 синіх, 6 зелених і 11 білих. Навмання витягують одну кульку. Знайти ймовірність того, що витягнута кулька кольорова, тобто не біла.

Розв'язування 1. Нехай випадкова подія A означає, що витягнута кулька кольорова. Це означає, що ця кулька або червона, або синя, або зелена. Введемо додаткові випадкові події: B – витягнута кулька червона, C – витягнута кулька синя, D – витягнута кулька зелена. Тоді для події A можна скласти таку алгебру: $A = B+C+D$, причому події B, C, D несумісні. Оскільки за класичним означенням $P(B) = 5/30$, $P(C) = 8/30$, $P(D) = 6/30$, то згідно з теоремою 1 будемо мати

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D) = 5/30+8/30+6/30 = 19/30.$$

2. Вкажемо спосіб розв'язування цієї задачі, перейшовши до протилежної події $\overline{A}$, яка означатиме, що витягнута кулька біла. Оскільки за класичним означенням $P(\overline{A}) = 11/30$, бо число сприятливих випадків події $\overline{A}$ дорівнює 11, то $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 11/30 = 19/30$.

3. Ймовірність події A можна знайти, користуючись класичним означенням. Оскільки число сприятливих події A випадків $m(A) = 5+8+6 = 19$, то $P(A) = 19/30$.

Як бачимо, розв'язуючи цю задачу трьома вказаними способами, ми маємо один і той же результат.

Приклад 8. В ящику знаходиться 10 однакових деталей, серед яких 4 пофарбованих. Складальник навмання бере три деталі. Знайти ймовірність того, що хоча б одна із взятих деталей пофарбована.

Розв'язування. Нехай подія A означає, що хоча б одна деталь пофарбована. Це означає, що одна деталь пофарбована, дві інші непофарбовані, або дві деталі пофарбовані, а одна непофарбована, або всі три деталі пофарбовані; алгебра цієї випадкової події складна. Перейдемо до протилежної випадкової події $\overline{A}$, яка означатиме, що жодна із деталей непофарбована, тобто всі три деталі непофарбовані. Ймовірність цієї події будемо шукати за класичним означенням. Очевидно, що випадками будуть комбінації, тоді загальне число випадків дорівнює числу комбінацій із 10 елементів по три, тобто $n = C_{10}^3$, а число випадків, що сприяють події $\overline{A}$, дорівнює числу комбінацій із 6 елементів (непофарбованих деталей), тобто $m(\overline{A}) = C_6^3$. Отже, $P(\overline{A}) = m(\overline{A})/n = C_6^3/C_{10}^3 = 1/6$. Тоді $P(A) = 1-P(\overline{A}) = 1-1/6 = 5/6$.

1.9.2 Теорема множення ймовірностей

Узагальнимо тепер *аксіому множення* на добуток декількох випадкових подій. Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Ймовірність добутку декількох випадкових подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти подій за умови, що всі попередні події настали,* тобто

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)\cdot P(A_1/A_2)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1}). \quad (1.15)$$

Доведення. Цю теорему теж будемо доводити *методом повної математичної індукції*. Для $k=2$ це твердження справедливе згідно з аксіомою множення $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)$. Припустимо, що формула (1.15) справедлива для $к=n$-1, а саме $P(A_1\cdot A_2 \ldots A_{n-1}) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_{n-1}/A_1A_2 \ldots A_{n-2})$. Доведемо, що рівність (1.15) буде виконуватися для $k = n$. Позначимо добуток $n-1$ подій через B, тобто $B = A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}$, тоді на підставі сполучного закону множення випадкових подій будемо мати, що $A_1\cdot A_2\cdot\ldots\times \times A_{n-1}A_n = (A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1})A_n = B\,A_n$. Скориставшись аксіомою множення, дістанемо $P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(B\,A_n) = P(B)\cdot P(A_n/B) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\times \times P(A_{n-1}/A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_{n-1})$, що і треба було довести.

Введемо поняття *залежних* і *незалежних* випадкових подій.

Означення. *Випадкову подію A називають незалежною від події B, якщо ймовірність події A не залежить від того чи настане, чи не настане подія B*, тобто

$$P(A) = P(A/B). \quad (1.16)$$

В протилежному випадку *подію А називають залежною від події В*.

Справедливе таке твердження.

Якщо випадкова подія А незалежна від події В, то і подія В незалежна від події А.

Дійсно, нехай подія A незалежна від B, тобто $P(A) = P(A/B)$. За аксіомою множення **А5** $P(AB) = P(A)\cdot P(A/B) = P(B)\cdot P(A/B)$, звідси на підставі попередньої рівності дістанемо: $P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A)$. Поділивши цю рівність на $P(A)$, матимемо, що $P(B) = P(B/A)$, а це означає, що випадкова подія B не залежить від A.

Отже, *поняття залежності* і *незалежності* двох випадкових подій є *взаємні*, що дає нам право уточнити це поняття так.

***Означення**. Дві випадкові події А* і *В називаються незалежними, якщо поява однієї з них не змінює ймовірності появи іншої.*

Для двох *незалежних випадкових подій правило множення ймовірностей* приймає вигляд

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B). \qquad (1.17)$$

Декілька випадкових подій називають попарно незалежними, якщо кожна їх пара є незалежні події.

Декілька випадкових подій називають незалежними в сукупності, якщо незалежними є кожні дві із них і незалежними є кожна із цих подій і добуток всіх решти подій.

Наприклад, незалежність в сукупності трьох випадкових подій A,B і C означає, що: а) події A і B, A і C, B і C незалежні і б) події A і BC, B і AC, C і AB незалежні.

Враховуючи поняття незалежності в сукупності випадкових подій, з теореми 2 маємо як наслідок таке *правило множення ймовірностей декількох подій.*

***Наслідок.** Ймовірність добутку незалежних в сукупності випадкових подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій*, тобто

$$P(A_1A_2\ldots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \qquad (1.18)$$

Отже, формула (1.15) узагальнює аксіому множення, а формула (1.18) узагальнює формулу (1.17).

Приведемо приклади на застосування теореми множення ймовірностей.

***Приклад 9**.* В трьох ящиках міститься по 10 однакових на вигляд деталей, в першому з них 7 стандартних деталей, в другому – 9, в третьому – 8. З кожного ящика навмання витягують по одній деталі. Знайти ймовірність того, що всі три витягнуті деталі стандартні.

Розв'язування. Нехай випадкова подія A означає, що всі три витягнуті деталі стандартні. Введемо допоміжні події : A_1{витягнута з першого ящика деталь стандартна}, A_2{витягнута з другого ящика деталь стандартна}, A_3{витягнута з третього ящика деталь стандартна}. Тоді, для випадкової події А матимемо таку алгебру: $A = A_1A_2\,A_3$. Очевидно, що випадкові події A_1, A_2 і A_3 незалежні в сукупності.

Оскільки $P(A_1) = 7/10$, $P(A_2) = 9/10$, $P(A_3) = 8/10$, то $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) =$
$= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 7/10\cdot 9/10\cdot 8/10 = 504/1000 \approx 0{,}5$.

Приклад 10. В ящику міститься 10 однакових на вигляд деталей, серед яких 2 з дефектом. Навмання з ящика витягують три деталі. Знайти ймовірність того, що витягнуті деталі без дефектів.

Розв'язування. Випадкову подію, яка означає те, що витягнуті деталі без дефектів, позначимо через A. Щоб скласти алгебру цієї події введемо допоміжні події A_i – i-та витягнута деталь без дефектів, де $i = 1,2,3$. Тоді, $A = A_1 A_2 A_3$, причому ці допоміжні події є залежними, тому $P(A) =$ $= P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)$. Оскільки за класичним означенням $P(A_1) = 8/10$, $P(A_2/A_1) = 7/9$, $P(A_3/A_1A_2) = 6/8$, то $P(A) = 8/10\cdot 7/9\cdot 6/8 = 7/15$.

Приклад 11. Ймовірність попадання в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. По мішені стріляють одиночними пострілами до першого попадання, після чого стрільбу припиняють. Знайти ймовірність того, що а) буде зроблено три постріли; б) буде зроблено не більше трьох пострілів.

Розв'язування: а) Нехай випадкова подія A означає, що зроблено три постріли. Це означає, що попадання настане при третьому пострілі, а при перших двох пострілах будуть промахи. З метою скласти алгебру цієї події введемо допоміжні прості події A_i – попадання в мішень при і-му пострілі, де $i = 1,2,3$. Тоді $A = \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Зауважимо, що ці події незалежні. Оскільки за умовою задачі $P(A_i) = 0{,}7$, то $P(\overline{A}_i) = 1-0{,}7 = 0{,}3$ при $i = 1,2,3$, тоді $P(A) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}063$.

2) Нехай випадкова подія B означає, що буде зроблено не більше трьох пострілів. Це означатиме, що попадання в мішень відбудеться або при першому пострілі, або при другому пострілі, або при третьому пострілі (при цьому при двох перших пострілах промахи), тоді $B = A_1 + \overline{A}_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. Оскільки випадкові події, що є доданками, несумісні, а випадкові події, що є множниками, незалежні, то за теоремою 1 і теоремою 2 будемо мати $P(B) = P(A_1) + P(\overline{A}_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3) = P(A_1) + P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2) + P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) =$ $= 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}7 + 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}973$. Вкажемо ще один спосіб розв'язування цієї задачі. Перейдемо до протилежної події $\overline{B}$, яка буде означати, що при трьох пострілах не буде жодного попадання, тоді $\overline{B} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$. Враховуючи те, що події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ незалежні, дістанемо, що $P(\overline{B}) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) =$ $= 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3 = 0{,}027$, тоді $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$. Результати збіглися, що свідчить про правильність розв'язування цієї задачі.

1.9.3 Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи,* тобто

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.19}$$

Доведення. Для появи події A достатньо, щоб настала хоча б одна із несумісних подій AB або $A\overline{B}$, іншими словами подія A може настати разом з подією B або разом з протилежною їй. А для появи події B достатньо, щоб настала хоча б одна із несумісних подій BA або $B\overline{A}$. Отже, події A і B можна записати у вигляді суми двох несумісних подій так: $A = AB+A\overline{B}$; $B = BA+B\overline{A}$. Тоді за аксіомою додавання маємо, що $P(A) = P(AB)+P(A\overline{B})$; $P(B) = P(AB)+ P(\overline{A}B)$.

Для появи хоча б однієї із подій A або B достатньо, щоб настала хоча б одна із трьох несумісних подій AB, $A\overline{B}$, $\overline{A}B$, то суму сумісних подій $A+B$ можна подати у вигляді суми цих трьох несумісних подій, тобто $A+B =$ $= AB+ A\overline{B}+\overline{A}B$, тоді за теоремою 1 додавання ймовірностей несумісних подій будемо мати: $P(A+B) = P(AB)+P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$.

З двох попередніх рівностей маємо, що $P(A\overline{B}) = P(A)- P(AB)$, $P(\overline{A}B) =$ $= P(B)-P(AB)$. Підставивши ці вирази в попередню рівність, матимемо $P(A+B) = P(AB)+ P(A)-P(AB)+ P(B)-P(AB) = P(A)+ P(B)-P(AB)$.

Отже, $P(A+B) = P(A)+ P(B)-P(AB)$ і теорему 3 доведено.

Зауваження. Для суми трьох сумісних подій справедлива рівність $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$.

Приведемо приклади застосування цієї теореми.

Приклад 12. Робітник обслуговує два автоматичні верстати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом певного часу T перший верстат не вимагатиме уваги робітника дорівнює 0,9, а другий – 0,8. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу хоча б один із верстатів не вимагатиме уваги робітника.

Розв'язування. Нехай випадкова подія A полягає в тому, що хоча б один із верстатів не вимагатиме уваги робітника. Введемо допоміжні прості випадкові події: A_1\{перший верстат не вимагатиме уваги робітника\}, A_2\{другий верстат не вимагатиме уваги робітника протягом цього часу\}. Ці випадкові події *сумісні і відомі їх ймовірності*: $P(A_1) = 0{,}9$; $P(A_2) = 0{,}8$. За означенням суми випадкових подій маємо, що $A = A_1+ A_2$, тоді на підставі теореми **3** дістанемо: $P(A) = P(A_1+ A_2) = P(A_1)+P(A_2) -P(A_1 \cdot A_2) =$ $= 0{,}9+0{,}8 -0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}98$.

Вкажемо ще один спосіб розв'язування цієї задачі, розглянувши протилежну подію $\overline{A}$, яка полягає в тому, що обидва верстати вимагатимуть уваги робітника протягом цього часу. Оскільки $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$, то $P(\overline{A}) =$ $= P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2) = 0{,}1\cdot 0{,}2 = 0{,}02$, бо $P(\overline{A}_1) = 1- P(A_1) = 1-0{,}9 =$ $= 0{,}1$, $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$. Тоді $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 -0{,}02 = 0{,}98$.

Зауважимо, що зручність цього методу (*перехід до протилежної події*) особливо проявляється у випадку, коли число верстатів більше двох.

Зауваження. В задачах знаходження ймовірності появи хоча б однієї події у випадку, коли число всіх випадкових подій більше двох, зручно користуватись *протилежною* випадковою подією.

1.10 Формула повної ймовірності

Припустимо, що в результаті проведення стохастичного експерименту деяка *випадкова подія A може настати разом з однією із n несумісних подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, що утворюють повну групу*. Події $H_1, H_2, \ldots H_n$ називають *гіпотезами*. Припустимо, що ймовірності всіх гіпотез відомі, при цьому повинна виконуватись рівність $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$, що випливає з наслідку теореми 1 додавання ймовірностей несумісних подій. Припустимо ще, що відомі всі умовні ймовірності події A за умови, що настала кожна із гіпотез, тобто відомі ймовірності $P(A/H_1)$, $P(A/H_2), \ldots, P(A/H_n)$.

Тоді справедлива рівність.

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n). \qquad (1.20)$$

Цю формулу називають ***формулою повної ймовірності***.

Доведення. Оскільки випадкова подія A може настати разом з однією із *n несумісних* подій $H_1, H_2, \ldots H_n$, то для події A можна скласти таку алгебру: $A = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$, де події, що є доданками цієї суми, несумісні. Тоді за теоремою 1 додавання ймовірностей несумісних подій будемо мати

$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n)$.

Оскільки за аксіомою множення $P(AH_i) = P(H_i)\cdot P(A/H_i)$, де $i = 1, 2, \ldots, n$, то з попередньої рівності матимемо:

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A/H_n)$.

Формулу (1.20) записують в згорнутому вигляді так:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i).$$

Приклад 13. Прилад може працювати в двох режимах: нормальному і ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх випадків роботи приладу, а ненормальний – в 20%. Ймовірність виходу приладу з ладу за деякий час Т в нормальному режимі дорівнює 0,1, а в ненормальному режимі – 0,7. Знайти ймовірність виходу приладу із ладу за цей час.

Розв'язування. Нехай випадкова подія A означає вихід приладу із ладу. Введемо гіпотези: H_1 – прилад в нормальному режимі, H_2 – прилад працює в ненормальному режимі, ймовірність цих гіпотез легко визначити за класичним означенням, а саме: $P(H_1) = 80/100 = 0{,}8$, $P(H_2) = 20/100 = 0{,}2$, при цьому $P(H_1) + P(H_2) = 1$. За умовою задачі відомі умовні ймовірності події A: $P(A/H_1) = 0{,}1$, $P(A/H_2) = 0{,}7$. Тоді за формулою повної ймовірності

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i) = 0{,}8\cdot 0{,}01 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}22.$

Приклад 14. На пункт складання надходять деталі від трьох заводів: від першого заводу – 30% деталей від загальної кількості, від другого – 25%, від третього – 45%. Ймовірності браку деталі для цих заводів відповідно дорівнюють 0,01, 0,03 і 0,02. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться бракованою.

Розв'язування. Нехай випадкова подія A означає, що взята навмання деталь виявиться бракованою. Ця деталь може належати одному із трьох заводів. Тому введемо такі гіпотези: H_1 – взята деталь виготовлена на першому заводі, H_2 – взята деталь виготовлена на другому заводі, H_3 – взята деталь виготовлена на третьому заводі. Ймовірності цих гіпотез відповідно будуть: $P(H_1) = 30/100 = 0{,}3$; $P(H_2) = 0{,}25$; $P(H_3) = 0{,}45$. Умовні ймовірності події A відомі, а саме: $P(A/H_1) = 0{,}01$; $P(A/H_2) = 0{,}03$; $P(A/H_3) = 0{,}02$. Тоді за формулою повної ймовірності матимемо , що $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i) =$ $= 0{,}3\cdot 0{,}01 + 0{,}25\cdot{,}0{,}03 + 0{,}45\cdot 0{,}02 = 0{,}0195$.

1.11 Імовірність гіпотез. Формула Бейєса

Припустимо, що проводиться деякий експеримент, в результаті якого може настати випадкова подія A, при цьому подія A може настати тільки разом з однією із n несумісних випадкових подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$, що утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності цих гіпотез і умовні ймовірності події A за умови, що ці гіпотези настали. Припустимо тепер, що в результаті експерименту *випадкова подія A настала.* Треба *знайти ймовірності кожної із гіпотез за умови, що подія A настала*; іншими словами, треба перерахувати ймовірності гіпотез після того, як подія A настала.

Зауважимо, що ймовірність події A визначимо за формулою повної ймовірності. Скористаємось аксіомою множення і визначимо ймовірність добутку події A на гіпотезу H_i, будемо мати

$$P(A\,H_i) = P(A)\cdot P(H_i/A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i),$$

звідки матимемо, що

$$P(A/H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \text{ де } i = 1,2,\ldots,n.$$

Якщо використати формулу повної ймовірності, то дістанемо

$$P(A/H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}. \qquad (1.21)$$

Цю формулу називають ***формулою Бейєса***, вона дає можливість знайти умовні ймовірності гіпотез після того, як випадкова подія настала. Звернемо увагу на те, що *умовні ймовірності* гіпотез, взагалі кажучи, *будуть іншими*, ніж апріорні ймовірності (початкові, до проведення експерименту), але *сума всіх умовних ймовірностей гіпотез знову дорівнюватиме одиниці*.

Приклад 15. В умовах попередньої задачі (приклад 14) деталь, що взята навмання для складання, виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця деталь надійшла від другого заводу.

Розв'язування. Потрібно перерахувати ймовірність гіпотез H_2, після того, як настала подія A – взята для складання деталь виявилась бракованою, що можна зробити за допомогою формули Бейєса. Оскільки $P(A) =$

$= 0{,}0195$, $P(H_2) = 0{,}25$, а $P(A/H_2) = 0{,}03$, то умовну ймовірність гіпотези H_2 (після появи події A) визначимо так: $P(A/H_2) = (P(H_2)\cdot P(A/H_2))/P(A)$; $P(H_2/A) = (0{,}25\cdot 0{,}03)/0{,}0195 = 0{,}385$. Як бачимо, умовна ймовірність гіпотези H_2 збільшилась в порівнянні з апріорною ймовірністю.

1.12 Повторення незалежних випробувань. Формула Бернуллі

Припустимо, що проводиться повторення даного експерименту, в результаті якого може настати деяка випадкова подія A з певною ймовірністю p або не настати. Припустимо, що ця ймовірність *не залежить* від результатів інших випробувань, іншими словами *ймовірність події A є сталою при кожному випробуванні*, тобто $P(A)$ всякий раз одна і та ж. *Такі випробування називають незалежними відносно події A.*

Поставимо тепер таку задачу: *знайти ймовірність того, що в результаті проведення n незалежних випробувань, в кожному із яких випадкова подія A настає зі сталою ймовірністю p, настане рівно m разів.*

Шукану ймовірність позначають символом $P_n(m)$ або $P(m;n)$. Таку задачу доводиться часто розв'язувати. Вкажемо спосіб її розв'язування.

Будемо вважати, що серії n незалежних випробувань проводяться при однакових умовах, причому в результаті кожного випробування настає випадкова подія A з імовірністю p і не настає подія $\overline{A}$ з імовірністю $1-p$, тобто ймовірність протилежної події $\overline{A}$ дорівнює $1-p$.

Введемо допоміжні *елементарні* події A_i ($i = 1,2,\ldots n$), де A_i *означає появу випадкової події A в i*-му випробуванні, при цьому $P(A_i) = p$, а $P(\overline{A_i}) = 1-p$, де $\overline{A_i}$ *означає, що випадкова подія A не настане в i*-му випробуванні.

Те, що випадкова подія A настане *рівно m разів* при n незалежних випробуваннях, означає, що в якихось m випробуваннях настане подія A, а в решті $n-m$ випробуваннях ця подія A не настане, а, значить, настане протилежна подія $\overline{A}$. При цьому подія A може настати на m різних міс-цях в послідовності із n елементів, що відповідають n випробуванням; кожен результат серії n випробувань можна записати у вигляді добутку елементарних подій A_i і $\overline{A_i}$ наприклад:

$B = A_1A_2\ldots A_m\ \overline{A_m}\ \overline{A_{m+1}}\ldots\overline{A_n}$, $C = \overline{A_1}\ A_2A_3\ldots A_m\ A_{m+1}\ \overline{A_{m+2}}\ldots\overline{A_n}$,

$D = A_1\overline{A_2}\ A_3\ldots A_{m+1}\ \overline{A_{m+2}}\ldots,\overline{A_n},\ldots$, $E = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ldots\overline{A_{n-m}}\ A_{n-m+1}\ldots A_n$ і т.д. Кожна із цих випадкових подій містить m множників виду A_i і $n-m$ множників виду $\overline{A_i}$. Зауважимо, що випадкові події $B, C, D, E,\ldots$ є несумісними. А розглядувана подія, ймовірність якої позначена через $P_n(m)$ і яку треба знайти, дорівнюватиме сумі цих несумісних подій. Зрозуміло, що ймовірності подій $B, C, D, E,\ldots$ рівні між собою; події, що входять множниками до складу цих подій, є незалежні, тому ймовірності кожної із цих подій $B, C, D, E,\ldots$ дорівнюють добутку ймовірностей подій-множників.

Враховуючи те, що $P(A_i) = p$, а $P(\overline{A}_i) = 1-p$, будемо мати:

$P(B) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_m)\cdot P(\overline{A}_{m+1})\cdot\ \cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n) = p\cdot p\cdot\ldots\cdot p\cdot(1-p)\cdot\ldots\cdot(1-p) =$ $= p^m\cdot(1-p)^{n-m}$. Залишилось вияснити кількість подій B, C, D, E,… Оскільки ці події являють собою групу множників, що складаються із n різних елементів по m елементів в кожній і відрізняються одна від одної хоча б одним елементом (порядок їх розміщення нас не цікавить), то ці групи є комбінаціями і кількість всіх таких груп дорівнює числу комбінацій із n по m, тобто число всіх подій B,C, D, E,… дорівнює C_n^m, бо нас цікавлять саме ті m позицій, що займатимуться подіями A_i.

Таким чином, число доданків у відповідній сумі подій B,C, D, E,… дорівнює C_n^m, а самі доданки мають одну і ту ж ймовірність, тому шукана ймовірність $P_n(m)$ буде визначена за формулою

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{1.22}$$

Цю формулу називають *формулою Бернуллі.*

Приклад 16. Два рівносильні шахісти грають в шахи. Що ймовірніше виграти: дві партії із чотирьох чи три партії із шести (нічиї до уваги не приймаються)?

Розв'язування. Оскільки грають два рівносильні шахісти, то ймовірність виграшу, так само як і ймовірність програшу, дорівнює 1/2, до того ця ймовірність є сталою в кожній партії, тому можна застосувати формулу Бернуллі при визначенні відповідних ймовірностей виграти дві партії з чотирьох результативних та три партії з шести результативних. Щоб з'ясувати, яка із цих ймовірностей більша, знайдемо вказані ймовірності:

$P_4(2) = C_4^2(1/2)^2(1/2)^2 = 6\cdot 1/4\cdot 1/4 = 6/16$;

$P_6(3) = C_6^3\cdot(1/2)^3\cdot(1/2)^3 = (6\cdot 5\cdot 4)/(1\cdot 2\cdot 3)\cdot 1/8\cdot 1/8 = 5/16$. Оскільки $P_4(2) > P_6(3)$, то ймовірність виграти дві партії з чотирьох більша, ніж три партії з шести.

Приклад 17. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях ця подія настане не більше трьох разів.

Розв'язування. Випадкова подія B{подія A настане не більше трьох разів в п'яти випробуваннях} означає, що подія A ні разу не настане або настане рівно один раз, або настане рівно два рази, або настане рівно три рази. Простішою є протилежна подія $\overline{B}$, яка полягає в тому, що подія A настане більше трьох разів в п'яти випробуваннях. Це означає детальніше, що подія A настане рівно 4 рази або рівно 5 разів в п'яти випробуваннях. Оскільки події несумісні, то

$P(\overline{B}) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4 + C_5^5\cdot 0{,}6^5 = 5\cdot 0{,}6^4\cdot 0{,}4 + 0{,}6^5 = 0{,}337$. Тоді $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}337 = 0{,}663$.

2 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1 Поняття випадкової величини

Випадкові події виражають якісні характеристики випадкових результатів стохастичного експерименту. Але випадковий результат експерименту можна характеризувати і *кількісно,* тобто числовими величинами. Їх називають випадковими величинами. Наприклад, число влучень в мішень при п'яти пострілах є випадкова величина. Це число заздалегідь до проведення експерименту *невідоме,* його *точне* значення передбачити неможливо, лише можна вказати список можливих значень.

Означення. *Випадковою величиною називають величину,* що в результаті стохастичного експерименту *може прийняти те чи інше значення, але тільки одне, заздалегідь невідомо, яке саме.*

Наприклад, йдучи на лекцію, лектор не міг точно передбачити, скільки буде присутніх студентів на ній. Отже, число студентів, що будуть присутніми на лекції, є випадкова величина.

Випадкові величини позначають заглавними буквами латинського алфавіту X, Y, Z, ... або X_1, X_2, X_3, ... (переважно останніми буквами алфавіту), а їх можливі значення відповідно малими буквами з індексами. Наприклад, випадкова величина X своїми можливими значеннями має x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Позначають випадкові величини і грецькими буквами ξ, η, ..., але малими.

Випадкові величини розрізняють двох типів: *дискретні і неперервні.*

Означення. *Випадкова величина називається **дискретною**,* якщо вона *може приймати тільки окремі, ізольовані одне від одного значення.* Кількість цих значень може бути *скінченною* або *зчисленною* множиною.

Наприклад, *а*) нехай X – число влучень в мішень при п'яти пострілах; можливими значеннями цієї випадкової величини є такі: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$; *б*) нехай Y – число пострілів по мішені, якщо стрільба ведеться до першого попадання; можливими значеннями випадкової величини є такі: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, ..., x_n = n, ...$, тобто зчисленна множина значень.

Означення. *Випадкову величину називають **неперервною,** якщо можливі значення її неперервно заповнюють суцільно деякий проміжок числової осі.*

Прикладами неперервної випадкової величини є *похибка вимірювання* відстані до деякого об'єкта і взагалі *похибка результатів всіх можливих вимірювань,* час безвідмовної *роботи* певного пристрою або апаратури.

2.2 Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини

Розглянемо деяку дискретну випадкову величину. Що означає задати дискретну випадкову величину, визначити її закон задання?

Перш за все треба вказати *всі її можливі значення.* Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – всі можливі значення, які може прийняти ця випадкова величина. Але знання всіх її можливих значень ще не може характеризувати саму випадкову величину, бо ми не можемо за цим списком вказати, *як часто треба чекати появи цих значень при повторенні експерименту* при одних і тих же умовах. Оскільки ці значення можливі, а не вірогідні, то кожне із значень випадкова величина може прийняти з певною ймовірністю, яка і буде вказувати, як часто відповідне значення буде повторюватись випадковою величиною при повторенні експерименту.

Нехай в результаті експерименту випадкова величина X прийме певне із своїх значень $x_1, x_2, ..., x_n$, тобто настане одна із випадкових подій, що полягає в тому, що випадкова величина X прийме значення x_1, або x_2, або x_3, або x_4, ..., або x_n, що зручно позначати так: $(X=x_1)$, або $(X=x_2)$, або $(X=x_3)$, ..., або $(X=x_n)$. Зауважимо, що згідно з означенням випадкової величини ці випадкові події є *несумісними* і *утворюють повну групу подій*, бо хоча б одна із цих подій в результаті проведення експерименту настане.

Імовірності появи цих випадкових подій позначимо через $p_1, p_2, ..., p_n$, тобто $p_i = P\,(X=x_i)$,що означає *ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення x_i*, де $i = 1, 2, ..., n$. Згідно з наслідком теореми додавання ймовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу подій, випливає, що сума ймовірностей $p_1, p_2, ..., p_n$ дорівнює одиниці, тобто

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1\,. \qquad (2.1)$$

Отже, *сумарна ймовірність, що дорівнює* ***одиниці****, розподілена між всіма можливими значеннями випадкової величини X.*

Таким чином, випадкова величина X вважається *заданою*, якщо *вказані всі її можливі значення і визначені ймовірності* кожного із цих значень.

Закон, за яким кожному із можливих значень випадкової величини ставиться у відповідність певна ймовірність його появи, називають *законом розподілу ймовірностей випадкової величини.*

Отже, закон розподілу дискретної випадкової величини – це по суті функція дискретної змінної x_i, коли відповідність визначається як ймовірність того, що випадкова величина прийме можливе значення x_i.

Розподіл дискретної випадкової величини записують у вигляді таблиці, перший рядок якої містить всі можливі значення випадкової величини, записані в порядку їх зростання, а другий рядок – ймовірності цих значень, а саме:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

, де $p_i = P(X=x_i)$. (2.2)

Цю таблицю називають ***рядом розподілу*** випадкової величини. Для *контролю правильності* складання ряду розподілу є рівність $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Ряду розподілу дискретної випадкової величини можна дати таку *гео-*

метричну ілюстрацію: в прямокутній системі координат на площині будують точки з координатами $(x_i; p_i)$, де $i = 1, 2, ..., n$, і з'єднують їх відрізками прямих; одержану *ламану* називають *многокутником розподілу.*

2.3 Основні закони розподілу дискретної випадкової величини

Існує декілька типів розподілу дискретної випадкової величини, які часто використовуються, а тому є важливими.

1. ***Біноміальний розподіл.*** Нехай проводиться *n незалежних* випробовувань , в кожному з яких може настати випадкова подія A з імовірністю p або випадкова подія $\bar{A}$ з імовірністю $1-p$. Нехай випадкова величина X – це *число появ події* A в цих n незалежних випробуваннях . Знайдемо закон розподілу цієї випадкової величини. Можливими значеннями цієї випадкової величини є значення $0, 1, 2, ..., n$ (їх кількість $n+1$). Оскільки випадкова подія $(X = m)$ означає, що при n незалежних випробуваннях подія A настане рівно m разів, то імовірність цієї події означає імовірність того, що випадкова подія A при n незалежних випробуваннях настане рівно m разів, яку визначають за формулою Бернуллі, тому ймовірності можливих значень випадкової величини визначають за формулою

$$p_m = P(X = m) = C_n^m\, p^m (1-p)^{n-m}, \text{ де } 0 < p < 1,\ m = 0, 1, \dots, n. \qquad (2.3)$$

Закон розподілу, в якому ймовірності можливих значень випадкової величини визначаються за формулою Бернуллі, називають *біноміальним законом.* Ця назва пов'язана з тим, що *загальний член* відомої формули *бінома* Ньютона

$(a+b)^n = a^n + C_n^{n-1}a^{n-1}b + C_n^{n-2}a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-m}a^m b^{n-m} + ... + b^n$ має вигляд (2.3), де C_n^m – число комбінацій з n по m.

Приклад 1. Скласти ряд розподілу числа народження хлопчиків в сім'ї з чотирма дітьми, якщо вважати, що ймовірності народження хлопчика і дівчинки дорівнюють 1/2.

Розв'язування. Число народження хлопчиків в сім'ї із чотирма дітьми є випадковою величиною X. Можливими її значеннями будуть: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Визначимо ймовірності цих можливих значень. Ймовірності p_1 і p_2 неважко визначити, використавши алгебру випадкових подій, а саме: $(X = 0) = \bar{A}_1\, \bar{A}_2\, \bar{A}_3\, \bar{A}_4$, $(X = 4) = A_1A_2A_3A_4$, де через A_i позначено випадкову подію, яка полягає в тому, що i-та дитина в сім'ї є хлопчик, а $\bar{A}_i$ – i-та дитина дівчинка (не хлопчик). Тоді, оскільки $P(A_i) = 1/2$, $P(\bar{A}_i) = 1/2$, матимемо, що

$$p_1 = P(X = 0) = 1/2\cdot1/2\cdot1/2\cdot1/2 = 1/16; p_5 = P(X = 4) = 1/2\cdot1/2\cdot1/2\cdot1/2 = 1/16.$$

Імовірності p_2, p_3 і p_4 зручно визначати за формулою Бернуллі:

$$p_2 = P(X = 1) = P_4(1) = C_4^1\cdot p\cdot(1-p)^3 = 4\cdot1/2\cdot(1/2)^3 = 1/4;$$

$$p_3 = P(X = 2) = P_4(2) = C_4^2\cdot p^2\cdot(1-p)^2 = 6\cdot(1/2)^2\cdot(1/2)^2 = 6/16;$$

$$p_4 = P(X = 3) = C_4^3\cdot p^3\cdot(1-p) = 4\cdot(1/2)^3\cdot1/2 = 4/16.$$

Зауважимо, що p_1 і p_5 можна було б визначити теж за формулою Бернуллі:

$$p_1 = P(X = 0) = P_4(0) = C_4^0 \cdot (1/2)^0 \cdot (1/2)^4 = (1/2)^4 = 1/16;$$

$$p_5 = P(X = 4) = P_4(4) = C_4^4 \cdot (1/2)^4 \cdot (1/2)^0 = 1/16.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$, що свідчить про правильність обчислень, то ряд розподілу має вигляд

X	0	1	2	3	4
P	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

З цієї таблиці видно, що найімовірніше число народження хлопчиків в сім'ї з чотирма дітьми дорівнює двом. Таким самим є найімовірніше число народження дівчаток в цій сім'ї.

Зауважимо, що *біноміальний розподіл залежить від двох параметрів*: *p і n*.

2. ***Розподіл Пуассона.*** На практиці зустрічаються випадкові події, які настають дуже рідко, тобто з дуже *малою* ймовірністю. Яким законом описуються ці рідкісні явища?

Припустимо, що проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких може настати випадкова подія A зі сталою ймовірністю p. Припустимо, що число випробувань *n дуже велике*, а ймовірність *p дуже мала*, наприклад, $p \le 0{,}01$ або $p \le 0{,}001$. Треба визначити ймовірність того, що при великому числі незалежних випробувань n, в кожному з яких може настати випадкова подія A, може настати рівно m разів.

Шукану ймовірність можна було б визначити за відомою формулою Бернуллі $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. Але практично цією формулою скористуватись дуже важко, бо число C_n^m дуже велике, а числа p^m або $(1-p)^{n-m}$ дуже малі, тому виконати множення таких чисел являє собою проблему в обчислювальній техніці.

Зробимо важливе *припущення* при розв'язуванні цієї задачі, а саме: будемо вважати, що добуток np зберігає стале значення і позначимо цей добуток через λ. Це число λ називають *параметром* відповідного розподілу. Отже, $np = \lambda$, звідси $p = \lambda/n$, де n – велике число.

Застосуємо формулу Бернуллі при $p = \lambda/n$, дістанемо:

$$P_n(m) = C_n^m (\lambda/n)^m (1-\lambda/n)^{n-m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}(\lambda/n)^m (1-\lambda/n)^{n-m}.$$

Оскільки число n приймає дуже велике значення, то замість $P_n(m)$ будемо шукати $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)$, тоді при великих n можна вважати, що $P_n(m) \approx \lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)$ можна вважати за наближене значення $P_n(m)$.

Зауважимо, що в нашому випадку $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m)$ знайти легше, ніж безпосередньо обчислити $P_n(m)$. Покажемо, як це зробити.

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \lim_{n\to\infty} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot m}(\lambda/n)^m \times$$

$$\times(1-\lambda/n)^{n-m} = (\lambda^m/m!)\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{n^m}(1-\lambda/n)^{-m}.$$

Знайдемо границі кожного із цих трьох множників:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^{-m} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))}{n^m} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(m-1)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1\cdot(1-1/n)(1-2/n)\cdot\ldots\cdot(1-(m-1)/n) = 1\cdot1\cdot\ldots\cdot1 = 1 \text{ і}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\lambda/n)^n = \lim_{n\to\infty}((1-\lambda/n)^{-n/\lambda})^{-\lambda} = e^{-\lambda}, \quad \text{бо} \quad \lim_{n\to\infty}(1+(-\lambda/n))^{-n/\lambda} = e,$$

тоді матимемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(m) = \dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$.

Отже, $$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}, \text{ де } \lambda = np. \tag{2.4}$$

Якщо ймовірності можливих значень випадкової величини визначаються за формулою $p_m = P(X = m) = \dfrac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}$, де $\lambda = np$, то такий розподіл випадкової величини називають *розподілом Пуассона*, а *дискретну* випадкову величину називають *розподіленою за законом Пуассона.*

Зауважимо, що *розподіл Пуассона залежить від одного параметра* λ.

Приклад 2. Пристрій складається з 2000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого елемента протягом деякого часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу вийдуть з ладу рівно три елементи.

Розв'язування. Оскільки $n = 2000$ є досить велике число, а $p = 0{,}002$, тобто досить мале число, то шукану ймовірність слід знаходити за формулою Пуассона (2.4). Визначивши параметр λ за формулою $\lambda = np = 2000\cdot0.002 = 4$, при $m = 3$ і $\lambda = 4$ будемо мати:

$$P_{2000}(3) = \frac{4^3\cdot e^{-4}}{3!} = \frac{64\cdot e^{-4}}{6} \approx 0{,}195.$$

3. ***Геометричний розподіл***. Кажуть, що випадкова величина X має *геометричний розподіл*, якщо її можливі значення $1,2,\ldots,m,\ldots$, а ймовірності цих значень визначають за формулою

$$p_m = q^{m-1} \cdot p, \text{ де } 0 < p < 1,\ q = 1-p,\ m = 1,2,\ldots \qquad (2.5)$$

На практиці геометричний розподіл зустрічається, коли здійснюється ряд незалежних „спроб" досягти деякого результату, тобто до *першого успіху*, при цьому при кожній спробі результат досягається з ймовірністю p, тоді як число q буде означати ймовірність „ не успіху " при даній спробі.

Якщо ж X означає число „невдалих спроб", то її можливі значення 0, 1, 2,..., m,..., а ймовірності цих значень визначаються за формулою $p_m = q^m \cdot p$, де $m = 0, 1, 2, \ldots$

4. ***Гіпергеометричний розподіл.*** Випадкова величина X з можливими значеннями 0, 1, 2,..., m має *гіпергеометричний розподіл* з параметрами n, a, b, якщо ймовірності цих значень знаходяться за формулою

$$p_m = P(X = m) = C_a^m C_b^{n-m} / C_{a+b}^n, \qquad (2.6)$$

де $m = 0, 1, 2, \ldots a$, при цьому вважають, що число комбінацій $C_k^r = 0$, якщо $r > k$. Цей розподіл виникає за таких умов: з урни, в якій міститься a білих і b чорних кульок навмання витягується n кульок. Тоді випадкова величина X {число білих кульок серед витягнутих} має розподіл ймовірностей, що визначаються за формулою (2.6).

2.4 Найімовірніше число появ події при повторенні незалежних випробувань

Нехай проводиться n незалежних випробувань даного експерименту, в результаті яких може настати випадкова подія A з імовірністю p.

Означення. *Найімовірнішим числом появ випадкової події A* в n *незалежних випробуваннях називають число m_0,* для якого ймовірність $P_n(m_0)$ *перевищує* або *не менша* ймовірності кожного із решти можливих результатів випробувань.

Як знайти це число m_0? Можна його знайти, якщо відомий ряд розподілу дискретної випадкової величини, вибравши те із можливих значень, ймовірність якого є найбільшою. Але якщо кількість можливих значень випадкової величини X велика, то при складанні ряду розподілу треба виконати значну обчислювальну роботу. Вкажемо більш зручний спосіб знаходження числа m_0.

За означенням цього числа m_0 випливає, що $P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1)$ і $P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1)$, тобто ймовірність $P_n(m_0)$ не менша ймовірностей сусідніх з ним можливих значень випадкової величини. Скористаємось цими нерівностями і формулою Бернуллі $P_n(m_0) \geq C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m}$, де $q = 1 - p$.

З нерівності $P_n(m_0) \geq P_n(m_0 + 1)$ матимемо, що

$$C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0} \geq C_n^{m_0+1} p^{m_0+1} q^{n-m_0-1},$$

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m_0+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m_0}p^{m_0}q^{n-m_0}\geq\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m_0+1)(n-m_0)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot m_0(m_0+1)}p^{m_0+1}q^{n-m_0-1}$$

Поділивши обидві частини цієї нерівності на добуток множників p^{m_0}, q^{n-m_0-1} і $C_n^{m_0}$,дістанемо $q\geq\frac{n-m_0}{m_0+1}p$, звідси маємо $(m_0+1)q\geq(n-m_0)p$; $m_0q+m_0p\geq np-q$; $m_0(q+p)\geq np-q \Leftrightarrow m_0\geq np-q$, бо $p+q=1$.

З нерівності $P_n(m_0)\geq P_n(m_0-1)$ аналогічно попередньому дістанемо, що $\frac{n-m_0+1}{m_0}p\geq q$, звідки матимемо, що $m_0\leq np+p$.

Отже, шукане число m_0 повинно задовольняти такі дві нерівності: $m_0\geq np-q$ і $m_0\leq np+p$, тобто $np-q\leq m_0\leq np+p$. Оскільки довжина цього проміжку дорівнює 1, бо $np+p-(np-q)=p+q=1$, а m_0 є натуральним числом, то у випадку, коли кінці цього проміжку є *дробові числа*, ми одержимо *одне значення* m_0; якщо ж кінці цього проміжку є *цілими числами*, то одержимо *два значення* цього числа m_0, а саме: $m_0'=np-q$ і $m_0''=np+p$.

Отже, найімовірніше число m_0 появ події A при n незалежних випробуваннях визначається з подвійної нерівності

$$np-q\leq m_0\leq np+p. \tag{2.7}$$

2.5 Функція розподілу

Ряд розподілу випадкової величини є *зручною* формою запису закону розподілу лише для дискретної випадкової величини, та й то із *скінченним* числом її можливих значень. Його *важко* застосувати і оглянути, коли множина всіх можливих значень дискретної випадкової величини є *зчисленною*, і *зовсім не можна застосувати для неперервної* випадкової величини. Тому ряд розподілу не є універсальним законом розподілу випадкової величини.

Найбільш *загальною формою закону розподілу* випадкової величини є *функція розподілу*, яка являє собою ймовірність не окремого можливого значення випадкової величини, а *ймовірність* того, що випадкова величина *X прийме значення менше, ніж задане значення x*, тобто розглядають випадкову подію ($X<x$), де x – задане значення; звернемо увагу на те, що розглядають *строгу* нерівність $X<x$, і визначають ймовірність випадкової події ($X<x$), тобто *відповідність* кожному $x\in R$ *задають через ймовірність* $P(X<x)$.

Означення. Функцією розподілу *випадкової величини X називають функцію F(x), що визначена для будь-якої дійсної змінної x рівністю*

$$F(x)=P(X<x). \tag{2.8}$$

Отже, *областю визначення функції розподілу є вся числова пряма.* Цю функцію вводять як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини.

Функції розподілу можна дати *геометричну* інтерпретацію. Для цього випадкову величину X будемо розглядати як випадкову точку X числової осі Ox, яка в результаті експерименту може зайняти певне положення на цій осі. Тоді випадкова подія ($X < x$) означатиме попадання випадковою точкою на необмежений інтервал, що лежить лівіше точки x. Тоді *функція розподілу $F(x)$ означатиме ймовірність попадання випадковою точкою X лівіше даної точки x числової осі.*

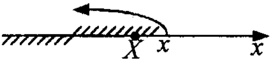


Рисунок 2.1

2.5.1 Властивості функції розподілу

1⁰. *Функція розподілу випадкової величини є невід'ємна функція, значення якої не перевищують одиниці*, тобто при всіх x

$$0 \le F(x) \le 1. \tag{2.9}$$

Це очевидно, бо функція розподілу $F(x)$ – це *ймовірність* випадкової події, а за аксіомою **А1** $0 \le P(X < x) \le 1$.

2⁰. $F(-\infty) = 0$, тобто $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$ (2.10)

Це очевидно, бо $F(-\infty) = P(x < -\infty)$, а подія $(X < -\infty)$є *неможливою*, тому за аксіомою **А3** її ймовірність дорівнює нулю.

3⁰. $F(+\infty) = 1$, тобто $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$ (2.11)

Це теж очевидно, бо $F(+\infty) = P(X < +\infty)$, а оскільки подія $(X < +\infty)$є *вірогідною*, тому за аксіомою **А2** її ймовірність дорівнює одиниці.

4⁰. *Функція розподілу є неспадною.*

З геометричної точки зору це зрозуміло, бо *імовірність* попасти випадковою точкою на безмежний інтервал числової осі, що включає в себе менший інтервал, більша, ніж ймовірність попасти випадковою точкою на менший інтервал, що є частиною цього більшого.

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – будь-які дійсні числа, причому $x_1 < x_2$. Покажемо, що $F(x_1) \le F(x_2)$. Це і буде означати, що функція $F(x)$ не є спадною. За означенням функції розподілу $F(x_2) = P(X < x_2)$, а $F(x_1) = P(X < x_1)$. Оскільки $(-\infty; x_2] = (-\infty; x_1) \cup [x_1, x_2)$, то випадкова подія ($X < x_2$) може бути подана у вигляді суми двох подій $(X < x_1)$ і $(x_1 \le X < x_2)$, які є несумісними за означенням випадкової величини, тобто $(X < x_2) = (X < x_1) + (x_1 \le X < x_2)$. Тоді за аксіомою додавання **А4** будемо мати, що $P(X < x_2) - P(X < x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$ або $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le X < x_2)$. Оскільки за аксіомою **А1** $P(x_1 \le X < x_2) \ge 0$, то з останньої рівності маємо, що $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$, звідси маємо, що $F(x_2) \geq F(x_1)$, що й треба було показати, а це означає, що функція $F(x)$ є неспадною, бо числа x_1 і x_2 довільні.

2.5.2 Імовірність попадання випадкової величини на заданий проміжок

З рівності $F(x_2)-F(x_1) = P(x_1 \leq X < x_2)$, яку ми отримали при доведенні неспадання функції розподілу, маємо, що

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2)-F(x_1)$$

або, якщо цю рівність застосувати до проміжку $[a ; b)$, матимемо таке

$$P(a \leq X < b) = F(b)-F(a).$$

Отже, *ймовірність попадання випадкової величини X на проміжок* $[a;b)$ *виражають через функцію розподілу формулою*

$$P(a \leq X < b) = F(b)-F(a), \tag{2.12}$$

тобто *ця ймовірність* дорівнює *приросту функції розподілу* на проміжку $[a ; b)$. В цьому полягає *найголовніша роль функції розподілу.*

Перейдемо в рівності (2.12) до границі за умови, що $b \to a$, тобто коли проміжок $[a ; b)$ стягується в точку $x = a$. В результаті цього *граничного переходу* ми знайдемо ймовірність того, що випадкова величина *X прийме окремо взяте значення a*, а саме: $\lim\limits_{b \to a} P(a \leq X \leq b) = \lim\limits_{b \to a} (F(b) - F(a))$ або

$$P(X = a) = \lim_{b \to a} F(b) - F(a). \tag{2.13}$$

Тут можливі два випадки.

1. Якщо функція розподілу $F(x)$ *неперервна* в точці $x = a$, то, оскільки за означенням неперервної функції $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$, матимемо,

$$P(X = a) = 0. \tag{2.14}$$

2. Якщо функція розподілу $F(x)$ в точці $x = a$ є *розривною*, то *ймовірність прийняти випадковою величиною це окремо взяте значення* $x = a$ дорівнює величині *стрибка функції $F(x)$* в цій точці, що визначається формулою (2.13).

Зауваження. Користуючись формулою (2.12), неважко визначити такі ймовірності $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X < b)$ і $P(a < X \leq b)$. Оскільки випадкова подія $(a \leq X \leq b)$ є *сумою несумісних* випадкових подій $(a \leq X < b)$ і $(X = b)$, то за аксіомою додавання **А4** матимемо, що $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) +$ $+ P(X = b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$.Отже, $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$. Аналогічно, оскільки випадкова подія $(a \leq X < b) = (a < X < b) + (X = a)$, то $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = b)$. І нарешті $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ $+ P(X = b) - P(X = a)$.

Приклад 3. Знайти функцію розподілу дискретної випадкової величини заданої рядом розподілу

X	-1	1	4
P	0,3	0,5	0,2

Розв'язування. При визначенні функції $F(x)$ будемо користуватись її означенням. Напевне, її значення повинні змінюватись при переході через її можливі значення, тому будемо визначати $F(x)$ на проміжках, відокремлених можливими значеннями випадкової величини. При $x \le -1$ матимемо $F(x) = P(X < x) = 0$, бо подія $(X < x)$ неможлива, оскільки жодне із трьох можливих значень не попадає на проміжок $(-\infty;-1]$; зокрема, $F(-1) = P(X < -1) = P(\varnothing) = 0$, тому правий кінець цього проміжку слід включати до нього. При $-1 < x \le 1$ *випадкова подія* $(X < x)$ рівносильна випадковій події $(X = -1)$, бо тільки можливе значення $x_1 = -1$ лежить лівіше вибраного x, тому $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) = 0,3$. При $1 < x \le 4$ будемо мати, що випадкова подія $(X < x) = (X = -1) + (X = 1)$, тому що лівіше вибраного x знаходиться два із можливих значень $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Випадкові події $(X = -1)$ і $(X = 1)$ несумісні за означенням випадкової величини, оскільки вона може прийняти те чи інше значення, але тільки одне.

Тоді $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,3 + 0,5 = 0,8$. При $x > 4$ лівіше вибраного значення x знаходяться всі три можливі значення, тому випадкова подія $(X < x)$ дорівнює сумі випадкових подій $(X = -1)$, $(X = 1)$ і $(X = 4)$, які є несумісними. Тоді $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X \le =1) + P(X = 4) = 0,3 + 0,5 + 0,2 = 1$. Запишемо тепер вираз функції розподілу $F(x)$ і побудуємо її графік.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -1, \\ 0,3 & \text{при } -1 < x \le 1, \\ 0,8 & \text{при } 1 < x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

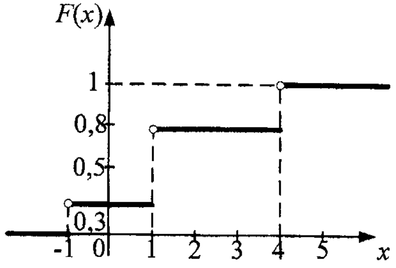


Рисунок 2.2

З графіка цієї функції видно, що $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, при зростанні x функція $F(x)$ не спадає, вона розривна в точках, що є можливими значеннями випадкової величини.

Зауваження. *Функція розподілу дискретної* випадкової величини X є *розривна*, *ступінчаста функція*, розривів вона досягає в точках, що є можливими значеннями випадкової величини, а величина стрибка у точці розриву дорівнює значенню ймовірності відповідного можливого значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сума величин всіх стрибків дорівнює *одиниці*; між стрибками функція $F(x)$ зберігає стале значення.

Якщо число можливих значень випадкової величини збільшується, то величини стрибків зменшуються, бо їх сумарна величина повинна дорівнювати одиниці. Якщо їх число збільшувати *необмежено*, то стрибки будуть згладжуватися, а у випадку, коли можливі значення випадкової величини заповнюють неперервно деякий проміжок числової осі, ступінчаста лінія згладиться деякою неперервною лінією, а *ступінчаста функція* перейде в *неперервну функцію*. Це означатиме, що для неперервної випадкової величини її функція розподілу $F(x)$ є неперервною функцією на всій числовій прямій.

Зауваження. *Неперервну випадкову величину* визначають як таку випадкову величину, *функція розподілу якої є неперервна функція*, що *задовольняє властивості* $\mathbf{1^0 - 4^0}$.

Як уже відзначалось, у випадку *неперервної функції розподілу* $F(x)$ *ймовірність окремо взятого значення випадкової величини дорівнює нулю*, тому, справедливе твердження:

Для неперервної випадкової величини ймовірність окремо взятого значення дорівнює нулю, тобто

$$P(X = a) = 0, \tag{2.15}$$

де a – будь-яке дійсне число.

Враховуючи це, будемо мати, що для *неперервної випадкової величини справедливі* рівності:

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{2.16}$$

І нарешті, графік функції розподілу неперервної випадкової величини схематично зображено на рис. 2.3

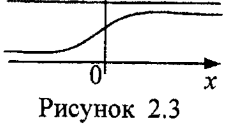


Рисунок 2.3

2.6 Щільність розподілу ймовірностей

Функція розподілу $F(x)$, будучи універсальним законом розподілу випадкової величини, має той недолік, що за нею важко судити про характер розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини в малому околі точки числової осі.

Розглянемо *неперервну* випадкову величину X і припустимо, що її *функція розподілу не тільки неперервна*, а має ще *похідну* в кожній точці числової прямої, тобто *диференційовна*. Знайдемо спочатку ймовірність попадання випадкової величини X на елементарний інтервал $(x;\ x+\Delta x)$ числової осі довжиною Δx; як відомо, ця ймовірність дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x).$$

Складемо тепер відношення цієї ймовірності до довжини Δx, тобто $\dfrac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \dfrac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta F}{\Delta x}$. Це відношення визначає деяку *середню ймовірність*, що припадає на одиницю довжини Δx. Перейдемо нарешті в цій рівності до границі за умови, що Δx прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x), \qquad (2.17)$$

оскільки за означенням $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$. В лівій частині цієї рівності стоїть *щільність ймовірності* в точці x, а в правій – похідна функції $F(x)$.

Означення. *Границю відношення ймовірності* попадання випадкової величини на інтервал довжиною Δx до довжини цього інтервалу за умови, що ця довжина інтервалу прямує до нуля, називають *щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини* або коротко щільністю ймовірностей.

Позначають її символом $p(x)$ або $f(x)$.

Отже, за означенням $p(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}$. Враховуючи рівність (2.17), маємо, що

$$p(x) = F'(x). \qquad (2.18)$$

Щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ ще називають *диференціальною* функцією розподілу $f(x)$, а функцію $F(x)$ називають *інтегральною функцією розподілу*, бо з рівності (2.18) випливає, що $F'(x) = f(x)$, тобто $F(x)$ первісна для $f(x)$.

Криву, що є графіком щільності розподілу ймовірностей, називають *кривою розподілу*.

Зауваження. Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини заповнюють деякий *обмежений відрізок* $[a;b]$, то *поза цим* проміжком *щільність розподілу ймовірностей вважають тотожно рівною нулю*, тобто

$$p(x) \equiv 0 \text{ при всіх } x \notin [a;b]. \qquad (2.19)$$

Це пояснюється тим, що ймовірності попадання випадкової величини на інтервал довжиною Δx, що міститься поза *відрізком* $[a;b]$, дорівнюють нулю.

2.6.1 Властивості щільності ймовірностей

1^0. *Щільність розподілу ймовірностей є невід'ємна функція*, тобто

$$p(x) \geq 0, \qquad (2.20)$$

для всіх x.

Дійсно, оскільки $p(x) = F'(x)$, а функція $F(x)$ є *неспадною*, то її похідна $F'(x)$ є *невід'ємною*, тобто $F'(x) \geq 0$, тому $p(x) \geq 0$ при всіх x.

2^0. *Справедлива рівність* $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt.$ (2.21)

Дійсно, оскільки $F(t)$ є первісною для $p(t)$, бо $p(t) = F'(t)$, то невласний інтеграл $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$ за формулою Ньютона-Лейбніца дорівнює приросту функції $F(t)$ на проміжку $(-\infty\,;\,x)$, тобто $\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = F(x) - F(-\infty)$. Враховуючи те, що $F(-\infty) = 0$, матимемо, що $\int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = F(x)$, що і треба було довести.

3^0. *Ймовірність попадання неперервної випадкової величини X на деякий інтервал $(a;b)$ дорівнює визначеному інтегралу щільності розподілу ймовірностей на цьому інтервалі, тобто*

$$P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx. \tag{2.22}$$

Доведення. Оскільки для неперервної випадкової величини $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ згідно з рівністю (2.16), то використовуючи формулу (2.21), дістанемо, що $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} p(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)dx = \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$, бо $\int\limits_{-\infty}^{b} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} p(x)dx + \int\limits_{a}^{b} p(x)dx$ за властивістю адитивності визначеного інтеграла. Властивість доведено.

Зауваження. Оскільки $\int\limits_{a}^{b} p(x)dx$ за геометричним змістом визначає площу криволінійної трапеції, що обмежена зверху кривою розподілу, основою якої є відрізок $[a;b]$, то рівності (2.22) можна дати таку інтерпретацію: *ймовірність попадання випадкової величини X на заданий відрізок $[a;b]$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, що обмежена зверху кривою розподілу* (рис. 2.4).

Наслідок. Оскільки $P(x < X < x + \Delta x) = \Delta F(x)$, а приріст функції $\Delta F(x)$ при малих Δx наближено дорівнює диференціалу функції $F(x)$ як головній частині приросту функції $F(x)$ і враховуючи те, що диференціал функції $F(x)$ визначається за формулою $dF(x) = F'(x)\,dx = p(x)dx$, бо $F'(x) = p(x)$, то матимемо наближену рівність

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx p(x)dx. \tag{2.23}$$

Тому *підінтегральний вираз $p(x)dx$ називають елементом ймовірності* неперервної випадкової величини.

4^0. *Справедлива рівність* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$ (2.24)

Дійсно, оскільки первісною для $p(x)$ є функція розподілу $F(x)$, то за формулою Ньютона-Лейбніца матимемо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1,$$ що і треба довести.

Звернемо увагу на *геометричну інтерпретацію* формули (2.24). Оскільки невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$ за геометричним змістом виражає чисельно площу *безмежної трапеції*, що обмежена *зверху кривою розподілу*, а знизу віссю Ox, то згідно з рівністю (2.24) ця *площа повинна дорівнювати одиниці.*

Таким чином, ця *інтегральна властивість щільності ймовірностей переконує нас в тому, що площа безмежної криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою розподілу, а знизу віссю Ox* (заштрихованої області), *дорівнює одиниці.* Це дуже важлива властивість. А це означає, що *вісь Ox* при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$ *повинна бути горизонтальною асимптотою кривої розподілу* або крива розподілу при великих значеннях абсолютної величини x повинна збігатися з віссю Ox, що відповідає рівності (2.19), а тому крива розподілу, враховуючи те, що $p(x) \geq 0$, повинна мати вигляд, зображений на рисунках (2.4) і (2.5).

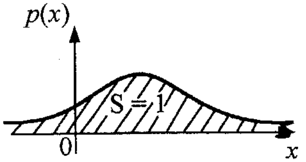


Рисунок 2.4

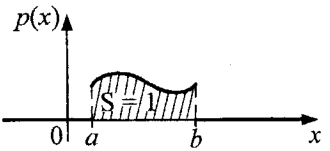


Рисунок 2.5

Приклад 1. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 1, \\ 1 - A/x \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A, щільність розподілу ймовірностей, ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (3;5). Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$.

Розв'язування. 1. Коефіцієнт A визначимо, використовуючи те, що функція розподілу $F(x)$ неперервна, зокрема скористаємось тим, що функція $F(x)$ неперервна в точці $x = 1$, а це означає, що виконується рівність $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = F(1)$, визначимо праву і ліву частину цієї рівності: $F(1) = 1 - A$; $\lim\limits_{x\to 1-0} F(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} 0 = 0$. Тоді матимемо, що $1 - A = 0$, звідки маємо, що $A = 1$.

Отже, $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 1 - 1/x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Щільність розподілу ймовірностей визначимо, користуючись формулою $p(x)=F'(x)$. Оскільки $(1 - 1/x)' = 1/x^2$, будемо мати

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<1, \\ 1/x^2 & \text{при } x\geq 1. \end{cases}$$

3. Ймовірність попадання неперервної випадкової величини знайдемо, користуючись формулою $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$, дістанемо

$$P(3 < X < 5) = F(5) - F(3) = 1 - 1/5 - (1 - 1/3) = 2/15.$$

4. Графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$ зображенні на рисунках

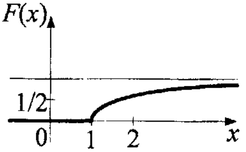


Рисунок 2.6

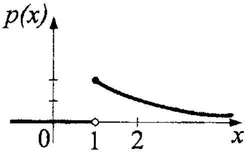


Рисунок 2.7

Приклад 5. Випадкова величина X задана щільністю розподілу ймовірностей

$$p(x)=\begin{cases} a\, sinx & \text{при } 0\leq x\leq \pi, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ і } x>\pi. \end{cases}$$

Знайти: коефіцієнт a, функцію розподілу $F(x)$, ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $(0\ ;\ \pi/3)$. Побудувати графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$.

Розв'язування. 1. Коефіцієнт a визначимо, користуючись відомою інтегральною властивістю щільності розподілу, а саме: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Оскільки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int\limits_{0}^{\pi} a\, sin\, x\, dx + \int\limits_{\pi}^{+\infty} 0 dx = a\cdot \int\limits_{0}^{\pi} sin\, x\, dx = -a\, cos\, x \Big|_{0}^{\pi} =$

$= -\, a(cos\pi - cos0) = -\, a(-2) = 2a$, то матимемо: $2a = 1$, звідки $a = 1/2$.

Отже, $$p(x)=\begin{cases} 1/2\ \ sin\, x & \text{при } 0\leq x\leq \pi, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ і } x>\pi. \end{cases}$$

2. Функцію розподілу $F(x)$ визначимо на кожному із трьох проміжків за формулою $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$:

а) при $x < 0$ маємо $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0;$

б) при $0 \leq x \leq \pi$ маємо

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x} \sin t\, dt = -\frac{1}{2}\cos t \Big|_{0}^{x} = -1/2(\cos x - \cos 0) =$$

$$= 1/2\cdot(1 - \cos x);$$

в) при $x > \pi$ маємо $p(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} \sin t\, dt + \int\limits_{\pi}^{x} 0dt =$

$$= -1/2\cdot\cos t \Big|_{0}^{\pi} = -1/2\cdot(\cos \pi - \cos 0) = 1.$$

Отже, $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1/2\cdot(1 - \cos x) & \text{при } 0 \le x \le \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

3. $P(0 < X < \pi/3) = \int\limits_{0}^{\pi/3} p(x)dx = 1/2\int\limits_{0}^{\pi/3} \sin x\, dx = -1/2 \cos x \Big|_{0}^{\pi/3} =$

$= -1/2(\cos \pi/3 - \cos 0) = 1/4.$

4. Графіки функцій $p(x)$ і $F(x)$ зображені на рисунках 2.8 і 2.9

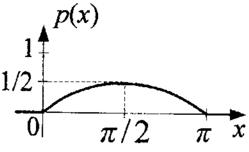


Рисунок 2.8

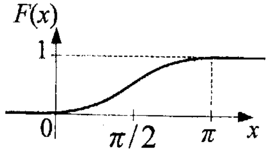


Рисунок 2.9

2.7 Числові характеристики випадкових величин

Функція розподілу $F(x)$ і щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ є універсальними законами розподілу випадкових величин. Але на практиці не завжди є необхідність характеризувати випадкову величину за допомогою цих функцій. До того ж ці функції ще треба вміти визначати для данної випадкової величини чи, в кращому випадку, вибрати із певного списку таких функцій. Ми ж можемо знаходити функцію розподілу $F(x)$ для дискретної випадкової величини, якщо її ряд розподілу відомий або його неважко скласти.

Часто достатньо вказати лише *самі істотні числові характеристики* випадкової величини. До них в першу чергу відносяться: *а*) деяке *середнє із значень, навколо якого групуються всі можливі значення* випадкової величини – це так зване *математичне сподівання*; *б*) число, яке б характеризувало *величину розсіювання можливих значень* випадкової величини *відносно математичного сподівання* – це так звана *дисперсія* випадкової величини.

2.7.1 Поняття математичного сподівання випадкової велачини

1. Введемо це поняття спочатку для дискретної випадкової величини. Нехай дискретна випадкова величина X задана своїм рядом розподілу

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

, причому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Складемо суму добутків всіх можливих її значень на їх ймовірності. Одержане число і називають математичним сподіванням випадкової величини X.

***Означення. Математичним сподіванням дискретної** випадкової величини називають суму добутків всіх її можливих значень на ймовірності, з якими приймаються ці значення,* і позначають символами $M[X]$, $M(X)$, m_x.

Отже, $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$ або $m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. (2.25)

Який же *ймовірносний зміст* математичного сподівання?

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких випадкова величина X приймає певне значення, серед яких *k різних значень* $x_1, x_2, ..., x_k$, де $k \le n$, тобто серед можливих значень випадкової величини є такі, що можуть настати в декількох випробуваннях. Нехай значення x_1 повторюється n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, ..., $x_k - n_k$ разів, при цьому повинна виконуватись рівність $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Знайдемо *середнє арифметичне* значення $\bar{x}$ всіх можливих значень x_i з врахуванням їх повторень:

$$\bar{x} = (x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k)/n.$$

Поділивши почленно чисельник дробу на знаменник n, дістанемо $\bar{x} = x_1(n_1/n) + x_2(n_2/n) + ... + x_k(n_k/n)$. Оскільки *відношення* n_1/n, n_2/n, ..., n_k/n є *частотами*, з якими приймаються відповідні можливі значення $x_1, x_2, ..., x_k$, тобто $n_1/n = \nu_1$, $n_2/n = \nu_2$, ..., $n_k/n = \nu_k$, то останню рівність можна записати так: $\bar{x} = x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_k\nu_k$.

Враховуючи те, що при великих n вказані частоти можливих значень наближено дорівнюють ймовірностям, з якими можуть прийматися можливі значення $x_1, x_2, ..., x_k$, матимемо, що $\bar{x} = x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + ... + x_k\nu_k \approx x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_kp_k = m_x$, де m_x – математичне сподівання випадкової величини X, тобто $m_x \approx \bar{x}$.

А це означає, що *математичне сподівання* випадкової величини X *визначає середнє арифметичне всіх можливих значень* випадкової величини або визначає *середнє із можливих значень випадкової величини з врахуванням повторень цих окремих значень.*

Отже, *математичне сподівання випадкової величини – це центр групування всіх можливих значень випадкової величини з врахуванням повторень цих окремих значень.* Цим і пояснюється сама назва цієї числової величини.

2. Введемо тепер поняття математичного сподівання неперервної випадкової величини. Це можна зробити за аналогією з формулою (2.25), за якою визначають математичне сподівання дискретної випадкової величини. Припустимо, що всі можливі значення неперервної випадкової величини X належать деякому відрізку $[a;b]$. Нехай відома щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ цієї випадкової величини, яка визначена на *відрізок* $[a;b]$, а поза ним $p(x) \equiv 0$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ довільно на n частин, довжини яких позначимо через Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. На кожному з цих інтервалів розбиття виберемо довільно по одній точці x_1, x_2, ..., x_n відповідно, визначимо в кожній точці x_i значення $p(x_i)$ щільності розподілу і складемо добутки $p(x_i)\,\Delta x_i$, де $i = 1, 2, ..., n$, які наближено дорівнюють ймовірності того, що ця випадкова величина попаде на i-тий *інтервал* довжиною Δx_i. Складемо суму $\sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i$, яка утворена за аналогією з формулою (2.25), і тому може бути прийнята за наближене значення математичного сподівання неперервної випадкової величини. Якщо перейти в цій сумі до границі за умови, що всі $\Delta x_i \to 0$, тобто всі частини розбиття стягуються в точки, при цьому число *інтервалів* розбиття необмежено збільшується, то ця границя і буде визначати точне значення математичного сподівання, тобто $M(X) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i)\Delta x_i$, а ця границя є визначеним інтегралом функції $xp(x)$ на проміжку $[a;b]$, бо утворюється подібно до визначеного інтеграла функції $f(x)$.

Отже, за означенням

$$M(X) = \int_a^b xp(x)dx. \tag{2.27}$$

У випадку, коли значення неперервної випадкової величини належать *всій числовій прямій*, її математичне сподівання визначається за допомогою невласного інтеграла функції $xp(x)$ за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \tag{2.28}$$

Приклад 6. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$p(x)=\begin{cases} ax^2 & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ або } x>3. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a і математичне сподівання випадкової величини.

Розв'язування. 1. За інтегральною властивістю щільності розподілу ймовірностей $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$ будемо мати, що $1 = \int_0^3 ax^2dx = ax^3/3\Big|_0^3 = 9a$, тобто, $9a = 1$, звідки $a = 1/9$. Отже, $p(x)=\begin{cases} (1/9)x^2 & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 0 & \text{при } x<0 \text{ або } x>3. \end{cases}$

Знайдемо математичне сподівання цієї випадкової величини:

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_0^3 x(1/9)x^2dx = 1/9\cdot\int_0^3 x^3dx = 9/4$. Отже, $M(X) = 2{,}25$.

2.7.2 Властивості математичного сподівання

1°. *Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій,* тобто $M(C) = C$, де C – стала величина.

Дійсно, $M(C) = \int_{-\infty}^{\infty} C\,p(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = C\cdot 1 = C$.

2°. *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання*, тобто $M(CX) = CM(X)$, де C – стала, X – випадкова величина.

Доведення. 1. Якщо X – неперервна випадкова величина, то, враховуючи формулу (2.28), будемо мати

$$M(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} Cxp(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = CM(X).$$

2. Якщо X – дискретна випадкова величина, можливими значеннями якої є $x_1, x_2, ..., x_n$, що приймаються відповідно з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n$, то можливими значеннями випадкової величини CX будуть $Cx_1, Cx_2, ..., Cx_n$, які приймаються з тими ж імовірностями, тоді

$$M(CX) = \sum_{i=1}^{n} Cx_ip_i = C\sum_{i=1}^{n} x_ip_i = CM(X), \text{ бо } M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i\,.$$

3°. *Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань*, тобто

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \tag{2.29}$$

Доведення. Для спрощення проведемо доведення для дискретних випадкових величин X і Y за умови, що вони приймають по два можливих значення. Нехай їх ряди розподілу такі:

X	x_1	x_2
P	p'_1	p'_2

Y	y_1	y_2
P	p''_1	p''_2

Тоді $M(X) = x_1 p'_1 + x_2 p'_2$, $M(Y) = y_1 p''_1 + y_2 p''_2$. Випадкова величина $X + Y$ може прийняти такі чотири значення: $x_1 + y_1$, $x_1 + y_2$, $x_2 + y_1$, $x_2 + y_2$. Імовірності, з якими приймаються ці значення, позначимо відповідно через p_{11}, p_{12}, p_{21} і p_{22}. Тоді $M(X + Y) = (x_1 + y_1)\, p_{11} + (x_1 + y_2)\, p_{12} + (x_2 + y_1)\, p_{21} + (x_2 + y_2)\, p_{22} = x_1(p_{11} + p_{12}) + x_2(p_{21} + p_{22}) + y_1(p_{11} + p_{21}) + y_2(p_{12} + p_{22})$.
Але $p_{11} + p_{12} = p'_1$. Дійсно, оскільки випадкова подія $(X = x_1)$ може настати разом із подією $(Y = y_1)$ або $(Y = y_2)$, то $(X = x_1) = (X + Y = x_1 + y_1) + (X + Y = x_1 + y_2)$, які є несумісними, то $P(X = x_1) = P(X + Y = x_1 + y_1) + P(X + Y = x_1 + y_2) = p_{11} + p_{12}$. Отже, $p'_1 = p_{11} + p_{12}$.

Аналогічно доводиться, що $p_{21} + p_{22} = p'_2$, $p_{11} + p_{21} = p''_1$, $p_{12} + p_{22} = p''_2$. Тоді останню рівність запишемо так:

$$M(X + Y) = (x_1 p'_1 + x_2 p'_2) + (y_1 p''_1 + y_2 p''_2) = M(X) + M(Y).$$

Зауваження. *Для суми n випадкових величин* ця властивість доводиться *методом повної математичної індукції.*

4°. *Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань*

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y). \tag{2.30}$$

Доведення. Знову для спрощення проведемо доведення для двох незалежних дискретних випадкових величин X і Y, що приймають по два можливих значення, скориставшись їх рядами розподілу, розглядуваних при доведенні властивості **3°**. Тоді можливими значеннями випадкової величини XY будуть такі значення: $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$, $x_2 y_2$.

Оскільки випадкова подія $(XY = x_1 y_1)$ означає, що настане і подія $(X = x_1)$ і подія $(Y = y_1)$, то подія $(XY = x_1 y_1) = (X = x_1)\cdot(Y = y_1)$. Враховуючи те, що за умовою події $(X = x_1)$ і $(Y = y_1)$ незалежні, за наслідком теореми множення ймовірностей незалежних випадкових подій будемо мати:

$$P(XY = x_1 y_1) = P(X = x_1)\cdot P(Y = y_1) = p'_1 p''_1.$$

Аналогічно $P(XY = x_1 y_2) = P(X = x_1)\cdot P(Y = y_2) = p'_1 p''_2$; $P(XY = x_2 y_1) = p'_2 p''_1$; $P(XY = x_2 y_2) = p'_2 p''_2$. Отже, ряд розподілу випадкової величини XY матиме вигляд

XY	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$
P	$p'_1 p''_1$	$p'_1 p''_2$	$p'_2 p''_1$	$p'_2 p''_2$

Тоді $M(XY) = x_1 y_1 p'_1 p''_1 + x_1 y_2 p'_1 p''_2 + x_2 y_1 p'_2 p''_1 + x_2 y_2 p'_2 p''_2 = x_1 p'_1(y_1 p''_1 + y_2 p''_2) + x_2 p'_2(y_1 p''_1 + y_2 p''_2) = (y_1 p''_1 + y_2 p''_2)\cdot(x_1 p'_1 + x_2 p'_2) = M(Y)M(X)$. Властивість доведено.

2.7.3 Дисперсія випадкової величини

Одного лише математичного сподівання недостатньо для характеристики самої випадкової величини. На практиці можливі значення випадкової величини завжди коливаються навколо математичного сподівання. Але як ці можливі значення випадкової величини розкидані відносно цього центра групування? Чим характеризувати *міру розсіювання* можливих значень випадкової величини відносно математичного сподівання? Зрозуміло, що ця міра розсіювання повинна бути додатним числом.

Використовують відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання, тобто різницю $X - M(X)$. Ця *різниця* є *теж випадковою величиною*, називають її *центрованою випадковою величиною* і позначають символом $\overset{\circ}{X}$, тобто $\overset{\circ}{X} = X - m_x$. Закон розподілу ймовірностей центрованої випадкової величини $\overset{\circ}{X}$ збігається із законом розподілу ймовірностей самої випадкової величини X, в них тільки різні можливі значення. Сама центрована величина не може служити мірою розсіювання можливих значень випадкової величини, бо вона є випадковою величиною. Можливо, цією мірою є деяке середнє значення центрованої випадкової величини, тобто математичне сподівання центрованої випадкової величини.

Але $M(\overset{\circ}{X}) = M(X - m_x) = M(X) - M(m_x) = M(X) - m_x = 0$. Тому ця величина не може бути мірою розсіювання можливих значень випадкової величини. А сталось це через те, що додатні і від'ємні доданки, що входять добутками в суму, за якою визначається математичне сподівання дискретної випадкової величини, компенсувались.

А якщо розглядати математичне сподівання квадрата центрованої випадкової величини? Тоді вже нуля не одержемо, бо всі доданки відповідної суми будуть додатні. Саме так і поступають.

Означення. Дисперсією випадкової величини *називають математичне сподівання квадрата центрованої випадкової величини* і позначають символами $D(X)$ або D_x.

Отже, $$D(X) = M((X - m_x)^2). \tag{2.31}$$

Іншими словами, *дисперсією випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.*

Виходячи з цього *означення* і враховуючи *формули* (2.25) і (2.28) *обчислення математичного сподівання*, дістанемо такі *формули для обчислення дисперсії*:

а) для *дискретної* випадкової величини $$D_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i, \tag{2.32}$$

б) для *неперервної* випадкової величини $$D_x = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 p(x)dx. \tag{2.33}$$

Зауваження. Виходячи з формули (2.31), можна вивести більш *зручну формулу для обчислення дисперсії* випадкової величини X, використовуючи *властивості* математичного сподівання:

$D(X) = M((X - m_x)^2) = M(X^2 - 2m_x X + m^2_x) = M(X^2) - M(2m_x X) + M(m^2_x) =$
$= M(X^2) - 2m_x M(X) + m^2_x = M(X^2) - 2m_x m_x + m^2_x = M(X^2) - m^2_x.$

Отже, $D(X) = M(X^2) - m^2_x$ або $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. (2.34)

При цьому $M(X^2)$ визначають так: *а*) для дискретної випадкової величини $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$, *б*) для неперервної випадкової величини $M(X^2) =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx.$$

2.7.4 Властивості дисперсії випадкової величини

1°. *Дисперсія сталої величини дорівнює нулю,* тобто $D(C) = 0$.

Це очевидно, бо для сталої величини розсіювання її значень відсутнє. Це ж твердження легко перевіряється з використанням формули (2.34) (перевірте самостійно).

2°. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії в квадраті

$$D(CX) = C^2 D(X). \qquad (2.35)$$

Доведення. Користуючись формулою (2.34) і властивостями математичного сподівання, матимемо, що $D(CX) = M((CX)^2) - (M(CX))^2 = M(C^2X^2) - (CM(X))^2 = C^2D(X^2) - C^2(M(X))^2 = C^2D(X)$.

3°. *Дисперсія суми незалежних випадкових величини дорівнює сумі їх дисперсій*, тобто $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$. (2.36)

Доведення. При доведенні цієї властивості знову будемо користуватись формулою (2.34) і властивостями математичного сподівання, дістанемо:

$D(X + Y) = M((X + Y)^2) - (M(X + Y))^2 = M(X^2 + 2XY + Y^2) - ((M(X) + M(Y))^2 =$
$= M(X^2) + 2M(X\ Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 = M(X^2) +$
$+ 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (M(X))^2 - 2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 = M(X^2) + M(Y^2) -$
$- (M(X))^2 - (M(Y))^2 = (M(X^2) - (M(X))^2) + (M(Y^2) - (M(Y))^2) = D(X) + D(Y).$

Зауваження. *Для залежних випадкових величин це твердження не завжди справедливе, а для добутку випадкових величин відповідна властивість не завжди справедлива навіть для незалежних випадкових величин.*

2.7.5 Середнє квадратичне відхилення випадкової величини. Поняття моментів випадкової величини

Дисперсія випадкової величини, виражаючи міру розсіювання її можливих значень відносно математичного сподівання, має той недолік, що її *розмірність* не збігається з розмірністю самої випадкової величини, а має розмірність квадрата розмірності самої випадкової величини. З метою мати числову характеристику, яка б виражала міру розсіювання можливих значень випадкової величини і мала б розмірність самої випадкової величини, розглядають квадратний корінь із дисперсії випадкової величини. Цю числову характеристику називають *середнім квадратичним відхиленням випадкової величини* X і позначають символом σ_X.

Отже, $$\sigma_X = \sqrt{D(X)}. \qquad (2.37)$$

Зауваження. Крім основних числових характеристик випадкової величини, якими є її математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення, вводять ще цілий ряд додаткових числових характеристик, які називають моментами випадкової величини. Розрізняють два типи моментів: *початкові і центральні.*

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання випадкової величини X^k і позначають символом α_k. Отже, $\alpha_k = M(X^k)$.

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го степеня центрованої випадкової величини і позначають символом μ_k.

Отже, $\mu_k = M((X - m_X)^k)$.

Зауважимо, що $\alpha_1 = M(X)$, $\mu_2 = D(X)$.

2.7.6. Математичне сподівання і дисперсія біноміально розподіленої випадкової величини

Нехай дискретна випадкова величина X має біноміальний розподіл, ряд розподілу якої має вигляд

X	0	1	2	...	n
P	p_0	p_1	p_2	...	p_n

, де $p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ для $k = 0, 1, 2, ..., n$.

Якщо скористуватись формулою (2.25) обчислення математичного сподівання дискретної випадкової величини, то матимемо, що $M(X) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, але при цьому часто будемо зустрічатись з досить громіздкими обчисленнями.

Запропонуємо інший спосіб. Нагадаємо, що випадкова величина X означає число появ випадкової події A в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких подія A настане з ймовірністю p. Через X_i позначимо число появ події A в i-му випробуванні. Ця випадкова величина X_i приймає лише два значення 0 і 1 з імовірностями, що відповідно дорівнюють $1 - p$ і p. Тоді її математичне сподівання визначиться так: $M(X_i) = 0(1-p) + 1 \cdot p = p$. Таким чином, $M(X_i) = p$ для всіх $i = 1, 2, ..., n$.

Оскільки число появ події A в n незалежних випаробуваннях дорівнює сумі числа появ події A при кожному i-му випробуванні експерименту, то випадкову подію X можна подати у вигляді суми незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, тобто $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, тоді за властивістю математичного сподівання матимемо, що

$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n) = np$. Отже, $\qquad M(X) = np. \qquad$ (2.38)

Знайдемо ще дисперсію випадкової величини X, визначивши спочатку дисперсії випадкових величин X_i. Користуючись формулою $D(X_i) = M(X_i^2) - (M(X_i))^2$ і враховуючи, що можливими значеннями випадкової величини X_i^2 будуть знову 0 і 1, матимемо, що $D(X_i) = (0(1-p) + 1 \cdot p) - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$, де $q = 1 - p$. Оскільки випадкові величини X_i незалежні, то дисперсія випадкової величини X дорівнює сумі дисперсій випадкових величин X_i, тобто $D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$.

Отже, $\qquad D(X) = npq$, де $q = 1 - p. \qquad$ (2.39)

Приклад 7. Пристрій складається з 50 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність виходу з ладу будь-якого елемента за час проведення досліду дорівнює 0,08. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа елементів, що вийдуть з ладу за час проведення досліду.

Розв'язування. Нехай X – число елементів, що вийдуть з ладу за час проведення досліду. Зрозуміло, що ця випадкова величина має біноміальний розподіл, оскільки імовірність відмови будь-якого елемента є стала і дорівнює 0,08, тобто $p = 0,08$. Застосуємо формули (2.38) і (2.39) при $n = 50$, $p = 0,08$ і $q = 1 - p = 0,92$, будемо мати: $M(X) = 50 \cdot 0,08 = 4$, $D(X) = 50 \cdot 0,08 \cdot 0,92 = 3,68$.

2.8 Рівномірний розподіл

Для неперервної випадкової величини вид розподілу ймовірностей визначається за виглядом щільності розподілу ймовірностей випадкової величини. Найважливішими законами розподілу неперервної випадкової величини є рівномірний, нормальний, показниковий.

Припустимо, що всі значення неперервної випадкової величини X належать деякому обмеженому відрізку $[a;b]$, тобто щільність розподілу ймовірностей тотожно дорівнює нулю поза цим проміжком.

Якщо мова йде про закон розподілу ймовірностей випадкової величини, який ми хочемо визначити як *рівномірний*, то треба вимагати, щоб щільність розподілу була *однаковою* в усіх точках відрізка $[a;b]$, іншими словами, щільність розподілу ймовірностей треба вважати *сталою* на цьому відрізку.

Означення. *Неперервну випадкову величину називають* ***рівномірно розподіленою*** *на деякому відрізку, якщо її щільність розподілу на ньому є сталою, а поза ним тотожно рівною нулю.*

Отже, за означенням рівномірного розподілу випливає, що

$$p(x)=\begin{cases} C, \text{якщо } x\in[a;b], \\ 0, \text{якщо } x\notin(a;b). \end{cases} \qquad (2.40)$$

Яке ж числове значення повинна приймати ця стала C? Зрозуміло, що не довільне стале, ця стала повинна бути пов'язана з числами a і b. Щоб відповісти на це питання, скористаємось інтегральною властивістю щільності розподілу, а саме: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, будемо мати

$1 = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{b} Cdx + \int\limits_{b}^{\infty} 0dx = C\int\limits_{a}^{b} dx = C(b-a)$. Отже, маємо, що $C(b-a) = 1$, звідки $C = 1/(b-a)$. Тоді формула (2.40) запишеться так

$$p(x)=\begin{cases} 1/(b-a), \text{якщо } x\in[a;b], \\ 0, \text{якщо } x\notin(a;b). \end{cases} \qquad (2.41)$$

Як бачимо, рівномірний розподіл, який визначається формулою (2.41), містить два параметри a і b.

Графік щільності ймовірностей рівномірного розподілу, тобто крива розподілу, має вигляд

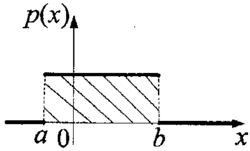


Рисунок 2.10

Звернемо увагу на те, що площа цього прямокутника дорівнює 1, що і повинно так бути, а висота його дорівнює саме числу $1/(b-a)$. Математичне сподівання цієї випадкової величини, напевне, зображається серединою відрізка $[a;b]$.

Дійсно, скориставшись формулою (2.28), будемо мати, що

$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = 1/(b-a)\int\limits_{a}^{b} xdx = 1/(b-a)x^2/2\Big|_a^b = 1/2(b-a)(b^2-a^2) =$
$= (a+b)/2.$

Отже, $\qquad M(X) = (a+b)/2. \qquad (2.42)$

Знайдемо ще дисперсію рівномірно розподіленої випадкової величини, скориставшись формулою $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. Оскільки $M[X^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2p(x)dx$, то дістанемо $M(X^2) = 1/(b-a)\int\limits_{a}^{b} x^2dx = 1/(b-a)\cdot x^3/3\Big|_a^b =$

$= 1/3(b-a)\cdot(b^3-a^3) = (b^2-ab+a^2)/3$. Тоді $D(X) = (a^2-ab+b^2)/3 - ((a+$ $+b)/2)^2 = (a^2-ab+b^2)/3 - (a^2-2ab+b^2)/4 = (a^2-2ab+b^2)/12 = (b-a)^2/12$.

Отже,
$$D(X) = (b-a)^2/12. \tag{2.43}$$

Зауважимо, що похибка округлення результатів вимірювання є рівномірно розподілена випадкова величина.

Приклад 8. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показання приладу округляють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущена похибка менша 0,04.

Розв'язування. Похибку округлення відліку можна вважати як рівномірно розподілену випадкову величину в проміжку між двома сусідніми поділками, тобто на проміжку довжиною 0,2, тоді її щільність розподілу ймовірностей $p(x) = 1/0{,}2 = 5$ при $x \in (0;0{,}2)$ і $p(x) \equiv 0$ при $x < 0$ і $x > 0{,}2$. Те, що похибка округлення відліку не перевищує 0,04, означає, що випадкова величина X попадає на проміжок (0;0,04) або на проміжок (0,016;0,2) (відстань показання приладу від лівого або правого кінця не повинна перевищувати 0,04). Тоді шукана ймовірність $P((0 < X < 0{,}04) +$

$$+ (0{,}16 < X < 0{,}20)) = P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}20) = \int_0^{0{,}04} 5dx +$$

$$+ \int_{0{,}16}^{0{,}20} 5dx = 5(0{,}04 + 0{,}04) = 0{,}4.$$

2.9 Нормальний закон розподілу

Це найбільш важливий закон розподілу, бо найбільш *вживаний*. Всі *похибки результатів вимірювання*, як правило, мають нормальний закон розподілу. До того ж, цей закон займає *центральне* місце серед інших законів розподілу, бо з необмеженим ростом числа випробувань всі інші закони розподілу наближаються в певному розумінні до нормального закону, про що буде нижче.

Означення. *Неперервну випадкову величину називають* ***нормально розподіленою****, якщо її щільність розподілу ймовірностей має вигляд*

$$p(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}, \tag{2.44}$$

де a і σ – задані числа, причому $\sigma > 0$.

Ці числа a і σ називають *параметрами нормального розподілу.*

Графік щільності розподілу нормально розподіленої випадкової величини називають *кривою Гаусса*. Криву Гаусса неважко побудувати, якщо врахувати те, що ця функція приймає додатні значення і неперервна при всіх $x \in R$, точка $x = a$ є її критичною точкою і при $x = a$ функція досягає максимуму, який дорівнює $1/\sigma\sqrt{2\pi}$. Крім того, оскільки у вираз (2.44) входить $(x-a)^2$, то графік цієї функції симетричний відносно прямої

$x = a$, а вісь Ox є горизонтальною двосторонньою асимптотою кривої Гаусса, бо $\lim\limits_{x \to a} p(x) = 0$, що очевидно. Крива Гаусса має вигляд

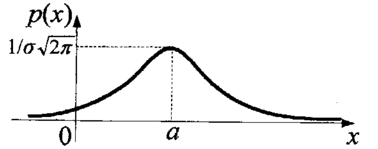


Рисунок 2.11

Звернемо увагу на те, що крива Гаусса симетрична відносно прямої $x = a$, тому *точка* $x = a$, мабуть, *буде* центром групування можливих значень цієї випадкової величини, тобто *її математичним сподіванням*, в чому треба ще переконатись. Крім того, враховуючи те, що площа безмежної криволінійної трапеції, що обмежена кривою Гаусса і віссю Ox, дорівнює одиниці, виведемо формулу, що називають *інтегралом Пуассона*, яка є важливою для визначення математичного сподівання і дисперсії цієї випадкової величини.

Отже, з одного боку, оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, будемо мати, що

$$1/\sigma\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = 1.$$

З другого боку цей же інтеграл підстановкою $(x - a)/\sigma\sqrt{2} = t$, враховуючи, що $dx = \sqrt{2}\sigma\, dt$, перетворимо до такого:

$$1/\sigma\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2}\, dt = 1/\sqrt{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt =$$

$$= 2/\sqrt{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Таким чином, $2/\sqrt{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = 1$, звідки маємо $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

Отже,
$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2. \tag{2.45}$$

Цей інтеграл називають ***інтегралом Пуассона***.

Визначимо функцію розподілу $F(x)$ і математичне сподівання та дисперсію нормально розподіленої випадкової величини.

1. Враховуючи формулу $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$, матимемо, що

$$F(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}\, dt.$$

2. Оскільки $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$, то будемо мати, що

$M(X) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}\, dx$; зробивши в цьому інтегралі заміну змінної інтегрування за тією ж формулою $(x-a)/\sigma\sqrt{2} = t$ і враховуючи те, що $x = \sigma\sqrt{2}\,t + a$ і $dx = \sigma\sqrt{2}\,dt$, матимемо, що

$M(X) = \sigma\sqrt{2}/\sigma\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}\,t + a)\ e^{-t^2} dt = 1/\sqrt{\pi}\,(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma\sqrt{2}\,t e^{-t^2} dt + a \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt) = 1/\sqrt{\pi}\,(0 + 2a\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt)$, оскільки функція e^{-t^2} є парною, а функція te^{-t^2} є непарна, а $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, якщо $f(x)$ парна і $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, якщо $f(x)$ непарна функція (за відомою властивістю визначеного інтеграла).

Тоді $M(X) = 2a/\sqrt{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2a/\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}/2 = a$ (скористувались формулою (2.45).

Отже,
$$M(X) = a. \tag{2.46}$$

Таким чином, параметр a нормально розподіленої випадкової величини визначає її *математичне сподівання.*

3. Знайдемо дисперсію цієї випадкової величини, користуючись формулою $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m_x)^2 p(x)dx$. Оскільки $m_x = a$, враховуючи формулу (2.44), будемо мати:

$$D(X) = 1/\sigma\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}dx = [\text{заміна } (x-a)/\,\sigma\sqrt{2} = t,$$

$$\text{то } x - a = \sigma\sqrt{2}\,t \text{ і } dx = \sigma\sqrt{2}\,dt] = 1/\sigma\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2\ t^2 e^{-t^2}\cdot\sigma\sqrt{2}\,dt =$$

$$= \sigma^2/\sqrt{\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2}\ dt = 2\sigma^2/\sqrt{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt = 2\sigma^2/\sqrt{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} t\cdot 2te^{-t^2}\ dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\text{застосуємо формулу інтегрування частинами:}} \\ u = t & du = dt \\ dv = 2te^{-t^2}dt & v = \int 2te^{-t^2}dt = -\int e^{-t^2}d(-t^2) = -e^{-t^2} \end{array}\right] = 2\sigma^2/\sqrt{\pi}\,\Big(-\,te^{-t^2}\Big|_0^{\infty} +$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t^2}\ dt\Big) = 2\sigma^2/\sqrt{\pi}\,(O + \sqrt{\pi}/2) = 2(\sigma^2/\sqrt{\pi})\cdot(\sqrt{\pi}/2) = \sigma^2.$$

Таким чином, $$D(X) = \sigma^2, \qquad (2.47)$$
звідки маємо, що $\sigma = \sqrt{D(X)}$, тобто $\sigma = \sigma_x$.

Отже, *другий параметр σ нормально розподіленої випадкової величини визначає її середнє квадратичне відхилення.*

Зауваження. Враховуючи те, що площа безмежної криволінійної трапеції, обмеженої кривою Гаусса і віссю Ox, дорівнює *одиниці*, параметр σ впливає на форму кривої Гаусса, а саме:

а) якщо σ – велике число, то число $1/\sigma\sqrt{2\pi}$ є мале число, тому крива Гаусса розтягнута, тобто з плоскою вершиною (рис. 2.12);

б) якщо σ – мале число, то крива Гаусса з гострою вершиною (рис. 2.13).

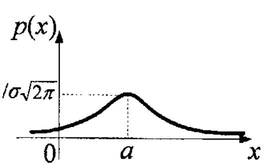


Рисунок 2.12

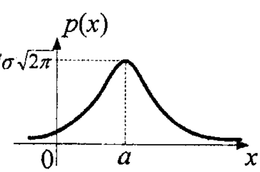


Рисунок 2.13

2.9.1 Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини на заданий проміжок

Розглянемо, як розв'язується ця важлива задача теорії ймовірностей для нормально розподіленої випадкової величини за умови, що параметри a і σ нормального розподілу відомі. Треба знайти ймовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини на заданий інтервал $(\alpha\ ;\ \beta)$.

Як нам відомо, ймовірність можна знайти за допомогою щільності розподілу ймовірностей за формулою $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$. Підставимо замість $p(x)$ конкретний вираз (2.44) щільності розподілу, дістанемо

$$P(\alpha < X < \beta) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{зробимо заміну змінної:} \\ (x-a)/\sigma = t \Rightarrow x = \sigma t + a; dx = \sigma dt \\ \text{при } x = \alpha \Rightarrow t = (\alpha - a)/\sigma; \\ \text{при } x = \beta \Rightarrow t = (\beta - a)/\sigma \end{bmatrix} = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt =$$

$$= 1/\sqrt{2\pi} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt.$$

Але цей інтеграл не виражається елементарними функціями; в цьому і проблема, яка вирішується так. Вводять *спеціальну функцію* $\Phi(x)$ за формулою

$$\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{0}^{x} e^{-t^2/2} dt, \tag{2.48}$$

яку називають *функцією Лапласа* або *інтегралом ймовірностей.*

Значення цієї функції протабульовані за допомогою степеневих рядів, складені таблиці її наближених значень з *досить високою точністю* (до $10^{-4} - 10^{-5}$) з *досить малим кроком зміни аргументу.*

Користуючись властивістю адитивності визначеного інтеграла, зведемо останній інтеграл до функції Лапласа, а саме:

$$P(\alpha < X < \beta) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = 1/\sqrt{2\pi} \int_{(\alpha-a)/\sigma}^{0} e^{-t^2/2} dt +$$

$$+ 1/\sqrt{2\pi} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = 1/\sqrt{2\pi} \int_{0}^{(\beta-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt -$$

$$- 1/\sqrt{2\pi} \int_{0}^{(\alpha-a)/\sigma} e^{-t^2/2} dt = \Phi((\beta - a)/\sigma) - \Phi((\alpha - a)/\sigma).$$

Отже,
$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{2.49}$$

де a – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

2.9.2 Властивості функції Лапласа

1°. *Функція Лапласа є непарною функцією.*

Доведення. Покажемо, що виконується рівність $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Визначивши $\Phi(-x)$ за формулою (2.48) і виконавши заміну змінної в інтегралі за формулою $t = -u$, звідки $dt = -du$, і визначивши межі інтегрування: при $t = 0 \Rightarrow u = 0$, при $t = -x \Rightarrow u = x$, будемо мати

$\Phi(-x) = 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{-x} e^{-t^2/2}dt = -1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{x} e^{-u^2/2}\,du = -\Phi(x)$, що треба було показати.

2°. *Функція Лапласа є зростаючою.*

Дійсно, оскільки $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{x} e^{-t^2/2}dt$, то $\Phi'(x) =$

$= 1/\sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2} > 0$. Оскільки $\Phi'(x) > 0$ при всіх x, то функція $\Phi(x)$ зростає при всіх x.

3°. *Функція Лапласа є обмеженою, її значення знаходяться між* $-1/2$ і $1/2$, тобто $-1/2 < \Phi(x) < 1/2$. (2.50)

Доведення. Покажемо, що при всіх $x \geq 0$ виконується рівність $\Phi(x) < 1/2$. Дійсно, $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{x} e^{-t^2/2}dt < 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2/2}dt$. Якщо зробити заміну змінної інтегрування за формулою $t/\sqrt{2} = u$, то, враховуючи те, що $dt = \sqrt{2}\,du$, дістанемо, що $\Phi(x) < 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-t^2/2}dt =$

$= 1/\sqrt{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-u^2/2}\sqrt{2}\,du = 1/\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}/2 = 1/2$, тут використана формула (2.45). Отже, $\Phi(x) < 1/2$ при всіх $x \geq 0$. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то при $x < 0$ матимемо, що $\Phi(x) > -1/2$; таким чином, $-1/2 < \Phi(x) < 1/2$, при цьому $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x) = 1/2$, а $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = -1/2$. Отже, прямі $y = 1/2$ і $y = -1/2$ є горизонтальними асимптотами графіка функції Лапласа. Враховуючи ці властивості функції Лапласа, її графік має вигляд

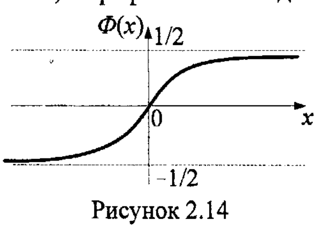


Рисунок 2.14

Зауваження. З таблиці значень функції Лапласа маємо, що $\Phi(4) =$ $= 0{,}499968$; $\Phi(4{,}5) = 0{,}499997$; $\Phi(5) = 0{,}499997$, тому *при всіх* $x > 5$ *вважають*, що $\Phi(x) = 0{,}5$.

***Приклад* 9.** Похибка результатів вимірювання має нормальний закон розподілу з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$ (так звана *нормована випадкова величина*). Знайти ймовірність того, що похибка вимірювання буде не більше 1,5 і не менше 0,5.

Розв'язування. Нехай X – похибка вимірювання. Треба знайти $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$. Застосуємо формулу (2.49) при $\alpha = 0{,}5$ і $\beta = 1{,}5$ ($a = 0$, $\sigma = 1$), будемо мати, що $P(0{,}5 < X < 1{,}5) = \Phi(1{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}4332 - 0{,}1915 = 0{,}2417$.

2.9.3 Імовірність заданого відхилення нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сигм

Часто доводиться знаходити ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої величини від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше деякого заданого додатного числа ε, іншими словами, треба знайти ймовірність нерівності ($|X - m_x| < \varepsilon$), тобто $P(|X - m_x| < \varepsilon)$.

Враховуючи рівносильність нерівності $|X - m_x| < \varepsilon$ подвійній нерівності $m_x - \varepsilon < X < m_x + \varepsilon$, будемо мати, що

$$P(|X - m_x| < \varepsilon) = P(m_x - \varepsilon < X < m_x + \varepsilon) = \Phi\left(\frac{m_x + \varepsilon - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m_x - \varepsilon - m_x}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi(\varepsilon/\sigma) - \Phi(-\varepsilon/\sigma) = \Phi(\varepsilon/\sigma) + \Phi(\varepsilon/\sigma) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma).$$

Отже, $$P(|X - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma). \qquad (2.51)$$

Застосуємо цю формулу для випадку, коли $\varepsilon = 3\,\sigma_x$, де $\sigma_x = \sigma$ – середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, дістанемо, що

$$P(|X - m_x| < 3\sigma) = 2\Phi(3\sigma/\sigma) = 2\Phi(3) = 2\cdot 0{,}4986 = 0{,}9972.$$

Отже, $P(|X - m_x| < 3\sigma) = 0{,}9972$. $\qquad$ (2.52)

Таким чином, випадкова подія ($|X - m_x| < 3\sigma$) практично майже *вірогідна*, тобто майже з *ймовірністю*, що дорівнює *одиниці*, значення *нормально розподіленої* випадкової величини X попадають на інтервал ($m_x - 3\sigma$; $m_x + 3\sigma$). В цьому і полягає „*правило трьох сигм*".

3 ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Як уже відзначалось в попередньому розділі, не можна заздалегідь вказати, яке із можливих значень прийме випадкова величина X в результаті проведення експерименту. Здавалося б, що для суми досить *великого числа* випадкових подій не можна встановити закономірностей їх поведінки. Насправді це не так. Виявляється, що при деяких порівняно широких умовах такі суми випадкових величин втрачають випадковий характер і стають такими, що мають певну закономірну поведінку. Це і встановлюють граничні теореми. До них відноситься ряд теорем двох типів: один із них – це ряд теорем, що носить назву *закону великих чисел*, а другий – *центральна гранична теорема теорії ймовірностей*, що також являє собою кілька теорем. Розглянемо найважливіші із них.

3.1 Нерівності Чебишова

Ці нерівності мають місце для дискретної і для неперервної випадкової величини. Розглянемо випадкову величину X, математичне сподівання якої дорівнює m_x, а дисперсія – D_x. Справедлива така теорема.

Теорема. *Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання не менша будь-якого додатного числа ε, обмежена зверху величиною D_x/ε^2*, тобто

$$P\left(|X - m_x| \ge \varepsilon\right) \le D_x/\varepsilon^2 . \tag{3.1}$$

Доведення. 1. Спочатку проведемо доведення для *дискретної* випадкової величини X, заданої рядом розподілу

X	x_1	X_2	...	x_n
P	P_1	P_2	...	P_n.

Виберемо довільно число $\varepsilon > 0$ і оцінимо ймовірність того, що випадкова величина X відхиляється від свого математичного сподівання на величину не меншу, ніж це число ε, тобто визначимо $P\left(|X - m_x| \ge \varepsilon\right)$; іншими словами, визначимо ймовірність того, що випадкова величина X попаде на безмежні проміжки, що знаходяться поза проміжком $(m_x - \varepsilon;$ $m_x + \varepsilon)$. Скористаємося формулою дисперсії $D_x = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 P_i$. Відкинувши всі доданки цієї суми, що містять можливі значення x_i, що належать інтервалу $\left(m_x - \varepsilon; m_x + \varepsilon\right)$, і враховуючи нерівність $\left(x_i - m_x\right)^2 \ge \varepsilon^2$, дістанемо, що

$$D_x \ge \sum_{|x_i - m_x| \ge \varepsilon}\left(x_i - m_x\right)^2 P_i \ge \sum_{|x_i - m_x| \ge \varepsilon}\varepsilon^2 P_i = \varepsilon^2 \sum_{|x_i - m_x| \ge \varepsilon} P_i = \varepsilon^2 P\left(|X - m_x| \ge \varepsilon\right).$$

Отже, $D_x \ge \varepsilon^2 P\left(|X - m_x| \ge \varepsilon\right)$, звідки маємо, що $P\left(|X - m_x| \ge \varepsilon\right) \le D_x/\varepsilon^2$, що і треба було довести.

2. Якщо X – неперервна випадкова величина, то її дисперсію D_x можна оцінити зверху так:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x)dx \geq \int_{|x-m_x|\geq\varepsilon} (x - m_x)^2 p(x)dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x-m_x|\geq\varepsilon} p(x)dx =$$

$$= \varepsilon^2 P\left(\left|X - m_x\right| \geq \varepsilon\right),$$

звідки маємо, що $P\,(\,|\,X - m_x| \geq \varepsilon\,) \leq D_x/\varepsilon^2$. Отже, нерівність (3.1) доведена.

Наслідок. *Справедлива нерівність*

$$P\,(\,|\,X - m_x| < \varepsilon\,) \geq 1 - D_x/\varepsilon^2, \qquad (3.2)$$

оскільки випадкова подія $(\,|\,X - m_x| < \varepsilon\,)$ протилежна події $(\,|\,X - m_x| \geq \varepsilon\,)$.

Зауваження. Застосуємо нерівність (3.2) при $\varepsilon = 3\sigma$, матимемо $(\,|\,X - m_x| < 3\sigma\,) \geq 1 - \sigma^2/9\,\sigma^2 = 1 - 1/9 = 8/9 \approx 0{,}9$.

Отже, $(\,|\,X - m_x| < 3\sigma\,) \geq 8/9$; іншими словами, *майже всі значення* випадкової *величини з великою ймовірністю попадають на інтервал* $(m_x - 3\sigma; m_x + 3\sigma)$ – *це є «правило трьох сигм» для довільної випадкової величини.*

***Приклад* 10.** Пристрій складається з 50 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність виходу із ладу кожного елемента за час T дорівнює 0,08. За допомогою нерівностей Чебишова оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що вийдуть із ладу, і середнім числом елементів, що вийдуть із ладу, виявиться: а) менше п'яти; б) не менше п'яти.

Розв'язування. Через X позначимо число елементів, що вийдуть із ладу за час T. Це є випадкова подія. Знайдемо математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини. Оскільки ця випадкова величина має біноміальний розподіл, то ці числові характеристики знайдемо за формулами $M(X) = np$, $D_x = npq$ при $n = 50, p = 0{,}08, q = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$, будемо мати: $M(X) = 50 \cdot 0{,}08 = 4$; $D_x = 50 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 = 3{,}68$.

Скористаємось нерівністю Чебишова (3.2) за умови, що $\varepsilon = 5$, $m_x = 4$, $D_x = 3{,}68$, дістанемо $P(\,|X - 4| < 5) \geq 1 - 3{,}68/25 = 0{,}1492 \approx 0{,}15$.

Оскільки випадкова подія $(|X - 4| \geq 5)$ протилежна до події $(\,|X - 4| < 5)$, то $P\,(|X - 4| \geq 5) \leq 0{,}85$.

3.2 Теорема Чебишова

Це одна з найважливіших *форм закону великих чисел.* Ця теорема встановлює *зв'язок між середнім арифметичним* значень випадкової величини, що можуть спостерігатися в результаті випробовувань, з її *математичним сподіванням.*

Введемо спочатку поняття *збіжності за ймовірністю.*

Означення. *Послідовність випадкових величин* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ***збіга-***

ється за ймовірністю до деякого числа а, якщо для будь-якого додатного числа ε виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - a\right| < \varepsilon\right) = 1 \ . \qquad (3.3)$$

Теорема Чебишова. *При необмеженому зростанні числа незалежних випробувань середнє арифметичне значень випадкової величини, що спостерігаються, за умови, що випадкова величина має скінченну дисперсію, збігається за ймовірністю до її математичного сподівання.*

Доведення. Розглянемо випадкову величину X з математичним сподіванням $m_x = a$ і дисперсією D_x. Нехай над нею проводиться n незалежних випробувань. Через X_1, позначимо значення випадкової величини X, що спостерігається в першому випробуванні, через X_2 – значення випадкової величини X, що спостерігається в другому випробуванні і т.д., через X_n – значення випадкової величини, що спостерігається в n-му випробуванні. Зауважимо, що $X_1, X_2, \dots, X_n$ *не означають список всіх можливих значень* випадкової величини X, а лише деякі із них, що спостерігаються при певному випробуванні.

Припустимо, що числові характеристики випадкової величини X *не змінюються* від випробування до випробування, тобто $M(X_i) = m_x = a$, $D(X_i) = D_x$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Визначимо середнє арифметичне значень випадкової величини, що спостерігаються при випробуваннях; це буде випадкова величина Y, що визначається за формулою

$$Y = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n . \qquad (3.4)$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Y:

$$m_y = M(Y) = M((X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n) = (1/n)\cdot M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) =$$

$$= (1/n)\cdot \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = (1/n)\cdot n \cdot m_x = m_x = a\,;$$

$$D_y = D(Y) = D((X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n) = (1/n^2) D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = (1/n^2) n D_x .$$

Отже,

$$m_y = m_x = a; \quad D_y = D_x / n. \qquad (3.5)$$

Застосуємо другу нерівність Чебишова (3.2) до випадкової величини Y $P\left(\left|Y - m_y\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - D_y/\varepsilon$. Враховуючи рівності (3.5), дістанемо

$$P\left(\left|(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n - a\right| < \varepsilon\right) = \geq 1 - D_x / n\varepsilon^2 .$$

Перейдемо в цій нерівності до границі за умови, що $n \to \infty$. Оскільки границя правої частини дорівнює одиниці, а згідно з цією нерівністю не може бути меншою, ніж границя правої частини, то дістанемо, що

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n - a\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де a – математичне сподівання випадкової величини X. Теорему доведено.

Зауваження. З доведення цієї теореми згідно з формулами (3.5) випливає, що *математичне сподівання середнього арифметичного значень* випадкової величини, що спостерігаються, *не залежить від числа випробувань* і дорівнює математичному сподіванню самої випадкової величини; *дисперсія середнього арифметичного спостережуваних значень з необмеженим зростанням числа випробувань прямує до нуля.* Таким чином, *середнє арифметичне значень випадкової величини, що спостерігаються, при великому n поводить себе майже як невипадкова величина.*

Цю теорему Чебишова можна узагальнити на більш загальний випадок, коли числові характеристики випадкової величини змінюються від випробування до випробування.

Теорема Чебишова (узагальнена). *При необмеженому зростанні числа незалежних випробувань над випадковими величинами, що мають обмежені дисперсії, середнє арифметичне спостережуваних значень випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ збігається за ймовірністю до середнього арифметичного математичних сподівань цих величин,* тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n - \left(\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right)/n\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{3.7}$$

Доведення. За нерівністю Чебишова $P\left(\left|Y - m_y\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - D_y/\varepsilon^2$, враховуючи те, що для середнього арифметичного спостережуваних значень випадкових величин $Y = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n$ згідно з властивостями математичного сподівання і дисперсії незалежних величин, а саме:

$M(Y) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} M(X_i)$, $\quad D(Y) = \left(1/n^2\right)\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$, дістанемо, що

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n - \left(\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right)/n\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} D(X_i)\right)/\varepsilon^2 n^2.$$

Оскільки дисперсії випадкових величин обмежені, то $\sum_{i=1}^{n} D(X_i) < C$, де C – деяке додатне число, тоді буде виконуватись нерівність

$$P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n - \left(\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right)/n\right| < \varepsilon\right) > 1 - \left(nC/\varepsilon^2 n^2\right) = 1 - C/\varepsilon^2 n,$$

тоді при $n \to \infty$ будемо мати, що $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)/n - \left(\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right)/n\right| < \varepsilon\right) = 1$,

що і треба було довести.

3.3 Теорема Бернуллі

Ця *теорема Якоба Бернуллі* є важливою і історично *першою формою закону великих чисел*. Справедлива така теорема.

Теорема. *При необмеженому зростанні числа незалежних випробовувань при однакових умовах його проведення* ***частота*** *випадкової події A збігається за ймовірністю до її ймовірності в окремому випробовуванні,* тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\nu_n(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{3.8}$$

Доведення. Доведення цієї теореми є наслідком теореми Чебишова (хоча доведення самого Бернуллі є досить складним).

Нехай проводиться n незалежних повторень експерименту, в кожному з яких може настати випадкова подія A з імовірністю p або протилежна подія $\bar{A}$ з імовірністю $1-p$. Позначимо через X_i– число появ події A в i-тому із n незалежних випробовувань, де $i=1,2,\ldots,n$, яка може прий - мати лише два значення 0 і 1; ця випадкова величина має такий ряд розподілу

X_i	0	1
P	$1-p$	p

Як було вже показано в підрозділі 2.7.6 математичне сподівання і дисперсія кожної випадкової величини X_i є сталі, при цьому $M(X_i)=p$, $D(X_i)=pq$, де $q=1-p$ при всіх $i=1,2,\ldots,n$.

Оскільки число появ випадкової події A в серії із n випробувань дорівнює сумі цих випадкових величин X_i, тобто $m(A)=\sum_{i=1}^{n}X_i$, то *частоту* випадкової події A, яку визначають за формулою $\nu_n(A)=m(A)/n$, можна подати так: $\nu_n=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)/n$, а це є середнє арифметичне спостережуваних значень випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Враховуючи те, що $\left(\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right)/n=np/n=p$, за узагальненою теоремою Чебишова, умови якої будуть виконані, рівність (3.7):

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)/n-\left(\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right)/n\right|<\varepsilon\right)=1$ прийме вигляд:

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\nu_n(A)-p\right|<\varepsilon\right)=1$ або $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\nu_n(A)-P(A)\right|<\varepsilon\right)=1$, що й треба було довести.

3.4 Центральна гранична теорема

В різних формах *закону великих чисел* мова йде про *середнє арифметичне* спостережуваних значень великого числа випадкових величин і зовсім *нічого не говориться про закони розподілу ймовірностей* як самих випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, так і цього середнього арифметичного спостережуваних значень цих випадкових величин. А останнє повинно бути дуже важливим. Цим займається центральна гранична теорема теорії ймовірностей. Всі форми центральної граничної теореми призначені встановленню умов, за яких розподіл ймовірностей стає нормальним розподілом. Оскільки на практиці ці умови часто виконуються, то нормальний закон розподілу є найбільш розповсюдженим. Він появляється в усіх випадках, коли досліджувана *випадкова величина X може бути подана у вигляді суми великого числа незалежних випадкових величин, кожна з яких порівняно мало впливає на суми цих величин.*

Найбільш простою формою центральної граничної теореми є така, коли *всі складові випадкові величини* X_i, що входять в суму $\sum_{i=1}^{n} X_i$, *мають однакові розподіли* в певному розумінні.

Приведемо одну із них, яку називають теоремою Ляпунова.

Теорема Ляпунова. *Якщо випадкові величини* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *взаємно незалежні і мають один і той же закон розподілу з математичним сподіванням а і дисперсією* σ^2 *і існує абсолютний центральний момент третього порядку* $\mu_3 = M\left(\left| X - m_x \right|^3\right)$, то *при необмеженому зростанні n закон розподілу суми* $X_1+X_2+\dots+X_n$ *необмежено наближається до нормального закону.*

Отже,
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt \ . \tag{3.9}$$

Доведення цієї теореми опустимо. Для її доведення Ляпуновим були введені спеціальні характеристичні функції і розроблений апарат їх використання.

Зауваження. Якщо число випробовувань настільки *велике*, щоб закон розподілу випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ можна було б вважати *близьким до нормального*, то *ймовірність попадання випадкової величини X на заданий інтервал* $(\alpha;\beta)$ наближено можна визначити за допомогою функції Лапласа, користуючись формулою (2.49), а саме:

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{3.10}$$

де $a = m_x = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$, $\sigma = \sqrt{D_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}$.

3.5 Теорема Муавра – Лапласа

Якщо випадкова величина X має *біноміальний розподіл*, де X означає число появ подій A при n незалежних випробовуваннях, в кожному з яких подія A настає із сталою ймовірністю p, то, враховуючи те, що $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, де X_i – число появ події A при i-му випробуванні і те, що $M(X) = np$, і $D(X) = npq$, при *великих n біноміальний закон розподілу наближається до нормального закону*, параметрами якого будуть $a = np$ і $\sigma = \sqrt{npq}$, тоді ймовірність попадання цієї випадкової величини на заданий інтервал $(\alpha;\beta)$ наближено можна знайти за допомогою *функції Лапласа*, скориставшись формулою (2.49), а саме:

$$P(\alpha < X < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \qquad (3.11)$$

Цю формулу називають *інтегральною формулою Муавра – Лапласа.*

Зауважимо, що цю формулу можна застосовувати при великих n. Обчислення істотно спрощуються порівняно з безпосереднім підрахунком ймовірності попадання випадкової величини X на інтервал $(\alpha;\beta)$ за допомогою точної формули $P(\alpha < X < \beta) = \sum_{\alpha<k<\beta} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$,

бо при великих n користуватись відомою формулою Бернуллі важко або неможливо, що пов'язано з дуже громіздкими обчисленнями.

Приклад. Знайти ймовірність того, що число бракованих деталей в партії із 10000 деталей з імовірністю браку 0,005 не буде перевищувати 70. Знайти ймовірність найімовірнішого числа бракованих деталей.

Розв'язування. Нехай X – число бракованих деталей. Треба знайти $P(0 \le X \le 70)$. Оскільки $n = 10000$ число досить велике, то закон розподілу випадкової величини X близький до нормального розподілу, тому можна скористуватись формулою (3.11) при $\alpha = 0$, $\beta = 70$.

Враховуючи те, що $a = np$ і $\sigma = \sqrt{npq}$, при $p = 0{,}005$ і $n = 10000$ матимемо, що $np = 50$, $\sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0.995} \approx 7$. Тоді

$P(0 \le X \le 70) \approx \Phi\,((70 - 50)/7) - \Phi\,((0 - 50)/7) \approx \Phi\,(2{,}9) + \Phi\,(7{,}1) =$
$= 0{,}4981 + 0{,}5 = 0{,}9981$.

Оскільки найімовірніше число m_0 появ бракованих деталей – це математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини X (саме для цього значення щільність розподілу ймовірностей є найбільшою), то шукана ймовірність наближено дорівнює значенню щільності ймовірностей

$p(x) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\,e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}$ нормального розподілу при $x = a = 50$, тоді дістанемо

$P_{10000}(50) = 1/7\sqrt{2\pi} \approx 0{,}06.$

Зауваження. Теорема Ляпунова дає можливість знайти ймовірність того, що випадкова величина X, що є сумою незалежних випадкових величин X_i при великих n, прийме певне значення. Ця ймовірність наближено дорівнюватиме значенню щільності ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини, яка визначається формулою (2.44) при $x = m$, а саме:

$$P_n(m) = p(m) \approx \left(1/\sqrt{2\pi\, npq}\right)\cdot e^{-(m-np)^2/2npq}.$$

Цю формулу називають *локальною теоремою Лапласа*, яку ще записують так:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{де}\ \varphi(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{-x^2/2},\ x = \left(m - np\right)/\sqrt{npq},$$

(таблиця значень функції $\varphi(x)$ часто наводиться в додатках).

4 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математичною статистикою називають науку, що займається розробленням методів відбору, описання і обробки експериментальних даних з метою вивчення закономірностей масових випадкових явищ. Першою задачею математичної статистики є розробка методів відбору і групування або описання статистичних даних. Другою задачею є розроблення методів аналізу і обробки експериментальних даних в залежності від мети дослідження.

4.1 Генеральна сукупність і вибірка

Припустимо, що треба вивчити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки, яка характеризує ці об'єкти. Наприклад, для партії деталей якісною ознакою може бути стандартність деталей, а кількісною – контрольовані розміри деталей. Якщо партія невелика, то ми можемо здійснити суцільне обстеження, послідовно замірюючи розміри деталей і зіставляючи їх з ГОСТом. А як бути, якщо число деталей в партії визначається десятками тисяч? Тут треба вміти відібрати з цієї партії стільки деталей, щоб за цією вибіркою правильно скласти уяву про всю партію. Таким чином, доводиться здійснювати вибіркові обстеження.

Вибірковою сукупністю *або* ***вибіркою*** *називають сукупність випадково відібраних об'єктів.*

Сукупність значень ознаки всіх об'єктів даного типу називають ***генеральною сукупністю.***

Число об'єктів вибірки, які повинні представляти генеральну сукупність, *називають об'ємом вибірки* і позначають через n; *число всіх об'єктів генеральної сукупності* називають *об'ємом генеральної сукупності* і позначають через N, при цьому $n < N$.

Числові характеристики вибіркової сукупності приймаються за наближені значення відповідних числових характеристик генеральної сукупності. Чим більше число n, тим більш обґрунтоване міркування можна висловити про властивості генеральної сукупності. Але збільшувати об'єм вибірки треба в розумних рамках. А для цього *необхідно, щоб об'єкти вибірки правильно представляли генеральну сукупність.* Цю вимогу коротко формулюють так: *вибірка повинна бути репрезентативною або достатньо представницькою.* Як випливає із закону великих чисел *об'єкти з генеральної сукупності повинні відбиратися випадково і всі її об'єкти мають однакову можливість потрапити до вибірки.*

4.2 Статистичний ряд. Статистична функція розподілу

Припустимо, що вивчається деяка випадкова величина X, яка є значенням розглядуваної ознаки генеральної сукупності, закон розподілу якої нам невідомий. Закон розподілу випадкової величини можна визначити експериментальним шляхом. Для цього над випадковою величиною X проведемо n незалежних вимірювань. Нехай i – номер вимірювання, а x_i – результат цього вимірювання. Результати подамо у вигляді таблиці, першим рядком якої служить номер вимірювання, а другий рядок містить спостережувані значення випадкової величини X:

Таблиця 4.1

i	1	2	3	…	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n

Цю таблицю називають *простим статистичним рядом*. Це первинна форма запису статистичного матеріалу, який дістали експериментальним шляхом.

Нехай в серії із n незалежних вимірювань випадкова величина X прийняла k різних значень, при цьому деякі з них можуть повторюватись. Різні спостережувані значення випадкової величини розмістимо в зростаючому порядку, тобто утворимо зростаючу скінченну послідовність

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k. \qquad (4.1)$$

Послідовність (4.1) *називають* ***варіаційним рядом***, а самі *значення* x_1, x_2, …, x_k *називають* ***варіантами.***

Нехай значення варіанти x_1 спостерігалось n_1 разів, варіанти x_2 – n_2 разів і т.д., варіанти x_k – n_k разів, при цьому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, числа n_i називають *частотами відповідних значень варіант* x_i.

Знайдемо ще відносні частоти $P_i^* = n_i / n$ відповідних значень x_i, $i =$ $=1, 2, \ldots, k$, і складемо таку таблицю:

Таблиця 4.2

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	…	n_k
$P_i^* = n_i / n$	n_1/n	n_2/n	n_3/n	…	n_k/n

при цьому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} P_i^* = 1$.

Цю таблицю називають ***статистичним розподілом*** або ***статистичним рядом*** випадкової величини X. Аналогом статистичному розподілу в теорії ймовірностей є *ряд розподілу дискретної* випадкової величини X.

Статистичному розподілу можна надати *геометричну* ілюстрацію: в прямокутній системі координат на площині будують точки (x_i, P_i^*), де

$i = 1, 2, \ldots, k$, які з'єднують відрізками прямих. Побудовану ламану називають *полігоном відносних частот*, який є аналогом многокутника розподілу дискретної випадкової величини.

Введемо ще аналог функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X, яка визначалась рівністю: $F(x) = P(X < x)$. Це так звана *статистична функція розподілу* і вводять її за аналогією з функцією $F(x)$, але замість ймовірності випадкової події $(X < x)$ знаходять відносні частоти випадкової події $(X < x)$.

Означення. Статистичною *або* ***емпіричною функцією*** *розподілу ознаки X називають функцію $F^*(x)$ дійсної змінної x , що визначається для будь-якого дійсного значення змінної x рівністю*

$$F^*(x) = P^*(X < x). \tag{4.2}$$

Зауваження. Якщо через n_x позначити число спостережень, в яких спостерігались значення варіант менші, ніж x, а через n – об'єм вибірки, то матимемо формулу

$$F^*(x) = n_x / n, \tag{4.3}$$

бо $P^*(X < x) = n_x / n$. Саме за цією формулою зручно обчислювати значення статистичної функції $F^*(x)$.

Приклад **1**. Скласти статистичний розподіл і знайти статистичну функцію розподілу ознаки, якщо відомо, що у вибірці об'єму $n = 50$ ця ознака прийняла значення 2, 7, 4 і 1 відповідно 10, 5, 20 і 15 разів.

Розв'язування. Складемо спочатку варіаційний ряд: 1, 2, 4, 7. Значення варіант повторювались відповідно 15, 10, 20 і 5 разів. Знайшовши відносні частоти цих варіант, а саме: $P_1^* = 15/50 = 3/10$; $P_2^* = 10/50 = 1/5$; $P_3^* = 20/50 = 2/5$; $P_4^* = 5/50 = 1/10$, складемо статистичний розподіл цієї ознаки:

x_i	1	2	4	7
n_i	15	10	20	5
$P_i^* = n_i / n$	0,3	0,2	0,4	0,1

Звернемо увагу на те, що сума відносних частот дорівнює 1.

Статистичну функцію розподілу будемо шукати, користуючись формулою (4.3), на проміжках числової осі Ox, на які вказані значення варіант x_i поділили всю числову вісь. Визначимо спочатку числове значення величини n_x на кожному із п'яти проміжків числової осі: при $x \le 1 \Rightarrow n_x = 0$; при $1 < x \le 2 \Rightarrow n_x = 15$; при $2 < x \le 4 \Rightarrow n_x = 15 + 10 = 25$; при $4 < x \le 7 \Rightarrow n_x = 15 + 10 + 20 = 45$; при $x > 7 \Rightarrow n_x = 50$, тому при $x \le 1$ $F^*(x) = 0$; при $1 < x \le 2 \Rightarrow F^*(x) = 15/50 = 0{,}3$; при $2 < x \le 4 \Rightarrow F^*(x) = 25/50 = 0{,}5$; при $4 < x \le 7 \Rightarrow F^*(x) = 45/50 = 0{,}9$ і при $x > 7 \Rightarrow F^*(x) = 1$.

Отже, маємо

$$F^*(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1,\\ 0{,}3 \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0{,}5 \text{ при } 2<x\le 4,\\ 0{,}9 \text{ при } 4<x\le 7,\\ 1 \text{ при } x>7.\end{cases}$$

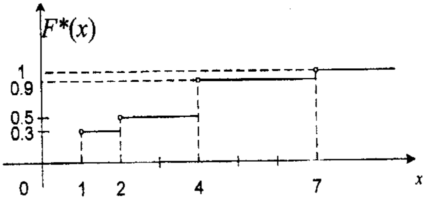


Рисунок 5.1

Як бачимо графік статистичної функції розподілу є ступінчаста лінія, вона будується таким же способом, як і графік функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини і є початковим наближенням графіка $F(x)$, якщо розглянута ознака є неперервною випадковою величиною.

Зауваження. При зростанні об'єму вибірки n статистична функція розподілу $F^*(x)$ наближається в певному розумінні до функції $F(x)$ неперервної випадкової величини. Принаймні їх графіки зближуються, тому й застосовують відповідне позначення цих функцій. Згладжений неперервною кривою графік функції $F^*(x)$ є наближенням до графіка функції розподілу випадкової величини X, тобто є можливість побачити наближений графік функції розподілу.

4.3 Статистична сукупність. Гістограма

Якщо об'єм вибірки великий і складено статистичний розподіл розглядуваної ознаки, то статистичний розподіл важко оглянути і незручно проводити певний аналіз, не кажучи вже про самі обчислення і складання відповідної таблиці. Статистичну функцію розподілу знаходити теж незручно. Особливо в тих випадках, коли *число різних спостережуваних значень ознаки велике*. Тому на основі простого статистичного ряду проводять групування спостережуваних значень поінтервально і складають так званий *інтервальний статистичний розподіл*, групуючи спостережувані значення ознаки по інтервалах, яких повинно бути значно менше, ніж число k різних спостережуваних значень, при цьому бажано було б, щоб відповідні інтервали мали однакову довжину, тобто інтервали розбиття відрізка, що містить всі спостережувані значення x_i, повинні бути рівними. Це робиться так.

1. Число часткових інтервалів m визначають в залежності від об'єму вибірки n за формулою $m = 3+3{,}322\cdot E(lg\ n)$, де E – функція антьє. В залежності від меж об'єму вибірки n вказують межі для числа m. Так, якщо об'єм вибірки задовольняє нерівності $40 \le n \le 100$, то число m вибирається з нерівності $6 \le m \le 10$; якщо n задовольняє нерівності $100 \le n \le 500$, то число m вибирається з нерівності $9 \le m \le 13$; якщо $500\le n \le 1000$, то число

m вибирається з нерівності $11 \le m \le 17$. Зрозуміло, що число m повинно бути цілком певним із вказаної групи, але "зручним" в деякому розумінні для користування, про що буде далі.

2. Визначають найменше і найбільше із спостережуваних значень x_i, їх позначають відповідно через x_{min} і x_{max}. Знаходять крок Δx інтервалів за формулою $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/ m$, де m – вибране число інтервалів, а різниця $x_{max} - x_{min}$ – довжина інтервалу, на який попали всі спостережувані значення. Якщо цей крок розбиття цього інтервалу не є зручним, тобто не всі інтервали розбиття мають однакову довжину, то можна трохи розтягнути цей інтервал, відступивши від його кінців відповідно на деяку невелику величину, тобто, вибирають два числа a і b такі, що $a \le x_{min}$ і $b \ge x_{max}$, щоб величина $(b - a)/ m$ була б зручною як крок розбиття для отримання *рівних частин розбиття*. Звернемо увагу на те, що всі спостережувані значення x_i, попадають на відрізок $[a, b]$ при вдало вибраному кроці h. Інколи числа a і b визначають так: $a = x_{min} - \Delta x / 2$, $b = x_{max} + \Delta x / 2$, але при цьому число інтервалів може збільшитись.

3. Виходячи з лівого кінця $x = a$ з кроком h, знаходять $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ точки розбиття відрізка $[a, b]$ на частини із сталим кроком h, вказують інтервали розбиття $[a; a_1)$, $[a_1; a_2)$, …, $[a_{m-1}, b]$ і підраховують частоти n_k значень x_k, що попадають на k- ий інтервал $[a_{k-1}, a_k]$, для $k = 1, 2,\ldots, m$. Якщо деякі значення x_k попадають на один із кінців часткових інтервалів, то їх кількість ділять порівну між сусідніми інтервалами, якщо це число парне; у випадку, коли це число непарне, перевагу віддають тому інтервалу, який ближче до середини відрізка $[a; b]$.

4. Визначають відносні частоти $P_k^* = n_k / n$ значень ознаки, що попали в k-ий інтервал, де $k = 1, 2,\ldots, m$.

5. Складають таку таблицю

Таблиця 4.3

Інтервали	$[a; a_1]$	$[a_1; a_2]$	$[a_2; a_3]$	…	$[a_{m-1}; b]$
Частоти n_k	n_1	n_2	n_3	…	n_m
Відносні частоти $P_k^* = n_k / n$	n_1 / n	n_2 / n	n_3 / n	…	n_m / n

при цьому $\sum_{i=1}^{m} n_k = n$, $\sum_{i=1}^{m} n_k / n = 1$.

Цю таблицю називають ***статистичною*** *сукупністю або інтервальним статистичним розподілом.*

Статистичну сукупність зображають геометрично. На осі абсцис відзначають точки $a, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, b$, що є кінцями інтервалів розбиття, із сталим кроком h. На відрізках $[a_{k-1}; a_k]$ як на основах будують прямокутники, площі яких чисельно дорівнюють відповідним відносним частотам, тобто $S_k = P_k^* = n_k / n$, тоді висоти цих прямокутників визначаються за формулою $H_k = P_k^* / h$, де h – крок розбиття. *Фігуру, що є об'єднанням цих прямокутників, називають* ***гістограмою*** *відносних частот.*

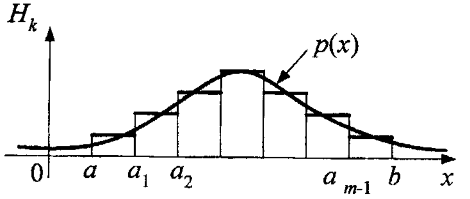


Рисунок 4.2

Зауважимо, що *сума площ всіх прямокутників дорівнює одиниці.* Якщо ступінчасту лінію, що обмежує гістограму зверху, згладити неперервною лінією, але так, щоб площа безмежної фігури між нею і віссю Ox дорівнювала наближено одиниці, то ця лінія в першому наближенні є графіком щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X.

Ця крива наближено дає форму кривої розподілу випадкової величини X, закон розподілу якої невідомий, але за допомогою методів математичної статистики визначена наближено форма графіка її щільності розподілу ймовірностей.

Зауваження. Якщо *об'єм вибірки* n є число *велике*, а *різних* спостережуваних значень x_i *багато*, то статистичну функцію розподілу, виходячи із статистичного розподілу, важко і незручно складати. Зручніше скористуватись інтервальним статистичним розподілом, якщо значенням *варіант* x_k *приписати значення* $\bar{x}_k$, *що є середнім арифметичним кінців k-го інтервалу розбиття, тобто* $\bar{x}_k = (a_{k-1} + a_k)/2$, *приписавши їм відповідні частоти* n_k *статистичної сукупності.* Зауважимо, що ці значення $\bar{x}_k$ частіше не спостерігались, вони обчислені при обробці експериментальних даних вказаним способом.

Для визначення *статистичної функції розподілу* $F^*(x)$ на базі статистичної сукупності складають допоміжний статистичний розподіл:
Таблиця 4.4

$\bar{x}_k$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	…	$\bar{x}_m$
n_k	n_1	n_2	…	n_m
$P_k^* = n_k / n$	n_1 / n	n_2 / n	…	n_m / n

А потім визначають статистичну функцію розподілу $F^*(x)$ за формулою (4.3), а саме: $F^*(x) = n_x/n$, де n_x – число спостережень, в яких $\bar{x}_k < x$.

4.4 Числові характеристики статистичного розподілу

Подібно до того, як в теорії ймовірностей введено *математичне сподівання* і *дисперсія дискретної випадкової величини*, які є не випадковими величинами, в математичній статистиці їм вводяться аналоги.

Нехай над випадковою величиною проведено n незалежних спостережень, результатами яких є випадкові значення $x_1, x_2, ..., x_n$. Припустимо, що вони утворюють вибіркову сукупність. Звернемо увагу на те, що спостережувані значення ознаки є випадковими, бо вибірка складається із випадково відібраних об'єктів генеральної сукупності.

Аналогом математичному сподіванню як центру групування можливих значень випадкової величини з врахуванням їх повторень, що дорівнює *середньому арифметичному всіх можливих значень випадкової величини* X і визначається формулою $m_X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, треба брати *середнє арифметичне спостережуваних значень ознаки* або середнє арифметичне значень ознаки, що утворюють вибірку, тобто *середнє арифметичне вибіркових значень* ознаки. Цю числову характеристику статистичного розподілу називають *статистичним середнім* або *вибірковою середньою.*

Означення. Статистичним середнім або ***вибірковою середньою*** *називають середнє арифметичне спостережуваних значень ознаки* і позначають одним із символів $\bar{x}$, m_x^*, $x_в$.

Отже, $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{n} x_i)/n$ або $\bar{x} = m_x^* = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)/n$, (4.4)

де $x_1, x_2, ..., x_k$ – різні спостережувані значення, а $n_1, n_2, ..., n_k$ – їх частоти, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, де n – об'єм вибірки.

Якщо врахувати, що $n_i/n = P_i^*$ є відносними частотами спостережуваних значень x_i, то $m_x^* = \sum_{i=1}^{k} x_i\,(n_i/n) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, P_i^*$, що дуже схоже на вираз математичного сподівання дискретної випадкової величини, а саме: $m_x = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p_i$. Тому *статистичне середнє може бути статистичною оцінкою для невідомого математичного сподівання* випадкової величини.

Звернемо увагу на те, що *статистичне середнє* є *випадковою величиною*, бо від вибірки до вибірки ця величина змінюється, що пов'язано з тим, що вибіркова сукупність стає іншою.

Аналогом дисперсії випадкової величини, яка для дискретної випадкової величини визначається за формулою $D_x = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i$, є так звана *статистична дисперсія*, яка визначає міру розсіювання спостережуваних значень ознаки навколо статистичного середнього.

Означення. Статистичною дисперсією *статистичного розподілу або вибірковою дисперсією називають число* D_i^*, *що визначають за формулою*

$$D_x^* = (\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2)/n. \tag{4.5}$$

Якщо рівність (4.5) записати у вигляді $D_x^* = (\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot (n_i/n))$ і врахувати, що $n_i/n = P_i^*$, то $D_x^* = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 P_i^*$, що за виглядом повністю збігається з формулою дисперсії дискретної випадкової величини.

Зауваження. На практиці для обчислення статистичної дисперсії використовують більш зручну формулу

$$D_x^* = m^*(X^2) - (m_x^*)^2 \text{ або } D_x^* = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \tag{4.6}$$

де $\overline{x^2} = m^*(X^2)$ – статистичне середнє квадрата спостережуваних значень x_i ознаки, причому

$$\overline{x^2} = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2)/n. \tag{4.7}$$

Зауваження. Якщо *об'єм* вибірки *великий*, а *різних* значень варіант *багато*, то при знаходженні статистичного середнього і статистичної дисперсії за формулами (4.4) і (4.6) безпосередньо будемо мати справу з дуже громіздкими обчисленнями, тому користуються інтервальним статистичним розподілом, де *значенням варіант приписують середини інтервалів розбиття*: $[a_{i-1}; a_i]$, тобто $\overline{x_i} = (a_{i-1} + a_i)/2$, де $i = 1, 2, \ldots, m$, приписуючи цим значенням відповідні інтервальні частоти; для обчислення статистичного середнього і статистичної дисперсії користуються формулами

$$\bar{x} = (\sum_{i=1}^{m} n_i \overline{x_i})/n, \qquad \overline{x^2} = (\sum_{i=1}^{m} n_i \overline{x_i}^2)/n, \tag{4.8}$$

де m – число інтервалів.

4.5 Властивості статистичного середнього і статистичної дисперсії

1. Спочатку розглянемо постановку такої загальної задачі. Нехай X – випадкова величина, закон розподілу якої містить деякий *невідомий* параметра a. Треба знайти *придатну оцінку цього параметра на основі експериментальних даних* або, іншими словами, треба знайти деяку числову характеристику $\tilde{a}$ статистичного розподілу, яка б в певному розумінні наближено є шуканим параметром a. Припустимо, що над випадковою величиною X проведено серії n незалежних спостережень, тобто вибірки об'єму n повторюються, і на основі цих спостережень за певним правилом визначено статистичну оцінку $\tilde{a}$. Які ж загальні умови повинна задовольняти ця статистична оцінка? *Статистична оцінка $\tilde{a}$ невідомого параметра a повинна бути незсуненою, ефективною* і *обґрунтованою*. Ці поняття визначаються так.

Означення 1. *Незсуненою називають статистичну оцінку $\tilde{a}$, математичне сподівання якої дорівнює самому параметру a* при будь-якому об'ємі вибірки, тобто $M(\tilde{a}) = a$.

Означення 2. *Ефективною називають статистичну оцінку $\tilde{a}$, яка при заданому об'ємі вибірки має найменшу можливу дисперсію серед дисперсій різних вибіркових сукупностей цього об'єму.*

Означення 3. *Обґрунтованою або слушною називають статистичну оцінку $\tilde{a}$ шуканого параметра a, якщо вона збігається за ймовірністю до параметра a при необмеженому зростанні числа випробувань.*

2. Статистичне середнє, як нам відомо, є аналогом математичного сподівання випадкової величини, тобто є його статистичною оцінкою.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Статистичне середнє є незсуненою і обґрунтованою оцінкою математичного сподівання випадкової величини.*

Доведення. Доведемо, що $M(\bar{x}) = M(X) = m_x$. Дійсно, оскільки $\bar{x} = (\sum_{i=1}^{n} X_i)/n$ і, враховуючи те, що $M(X_i) = m_x$ для всіх i = 1, 2, ..., n, та використовуючи властивості математичного сподівання, будемо мати

$$M(\bar{x}) = M(\sum_{i=1}^{n} X_i / n) = (1/n) \cdot M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = (1/n) \cdot n \cdot m_x = m_x .$$

Доведемо обґрунтованість статистичного середнього. Це випливає із теореми Чебишова. Скористаємось рівністю (3.6), а саме: $\lim_{n\to\infty} P(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i / n - m_x\right| < \varepsilon) = 1$, що рівносильно рівності $\lim_{n\to\infty} P(\left|\bar{x} - m_x\right| < \varepsilon) = 1$, а це і означає збіжність за ймовірністю статистичного середнього $\bar{x}_k$ до математичного сподівання випадкової величини. Теорему доведено.

3. Статистична дисперсія, будучи аналогом дисперсії випадкової величини, є її статистичною оцінкою. Справедлива теорема.

***Теорема** 2. Статистична дисперсія є обґрунтованою оцінкою, але не є зсуненою оцінкою дисперсії випадкової величини.*

Дійсно, скористаємось формулою (4.6), а саме $D_x^* = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$. Перший доданок $\overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 / n$ є середнє арифметичне спостережуваних значень випадкової величини $X^{\ 2}$ і за теоремою Чебишова збігається за ймовірністю до $M(X^2)$, а другий – до m_x^2, тому статистична дисперсія D_x^* збігається за ймовірністю до різниці $M(X^2) - m_x^2$, а це є дисперсія D_x випадкової величини X. Таким чином, D_x^* *збігається за ймовірністю до* D_x, тобто статистична дисперсія є *обґрунтованою* оцінкою дисперсії випадкової величини.

Здавалось би, що статистична дисперсія повинна групуватись навколо дисперсії випадкової величини, але це не так. Виявляється, що статистична дисперсія приводить до систематичних похибок, даючи дещо занижені значення дисперсії випадкової величини. Можна довести, що справедлива рівність

$$M(D_x^*) = \frac{n-1}{n} D_x. \tag{4.9}$$

Отже, статистична дисперсія відхиляється дещо вліво від дисперсії генеральної сукупності, а це означає, що *статистична дисперсія є зсуненою оцінкою дисперсії* випадкової величини.

Але легко *виправити статистичну дисперсію* з метою, щоб вона стала *незсуненою* оцінкою. Для цього достатньо домножити статистичну дисперсію на $n/(n-1)$, тоді виявиться, що статистична оцінка $\frac{n}{n-1} D_x^*$ є незсуненою оцінкою дисперсії випадкової величини. Дійсно, скориставшись властивістю математичного сподівання і рівністю (4.9), будемо мати

$$M\left(\frac{n}{n-1} D_x^*\right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} D_x = D_x.$$

Цю *незсунену виправлену статистичну дисперсію* позначають символом s^2 або $D_в$. Отже, *незсунена виправлена дисперсія* визначається за формулою

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_x^*. \tag{4.10}$$

Звернемо увагу на те, що статистична оцінка s^2 є *обґрунтованою оцінкою* дисперсії випадкової величини X, бо $n/(n-1) \to 1$ при $n \to \infty$.

Таким чином, *виправлена статистична дисперсія s^2 є незсуненою і обґрунтованою оцінкою дисперсії випадкової величини.*

Зауваження. Враховуючи формули (4.10) і (4.6), одержимо таку формулу для обчислення виправленої незсуненої статистичної дисперсії:

$$s^2 = (\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2)/(n-1). \qquad (4.11)$$

4.6 Надійний інтервал

Статистичні оцінки, зокрема статистичне середнє і статистичну дисперсію, називають *точковими оцінками* параметрів, бо вони вказують точку числової осі, в якій повинно знаходитися значення шуканого параметра. Оскільки *точкові оцінки* є *випадковими величинами*, бо визначаються за вибіркою, яка формується із випадково взятих спостережуваних значень ознаки, то *точкові оцінки можуть* значно відрізнятись від істинного значення шуканого параметра, тобто *приводити до значних похибок*, особливо у випадку вибірки малого об'єму. При цьому важливо знати величину похибок, а точніше, *з якою надійністю можна чекати, що ці похибки не вийдуть за певні межі*. Для визначення точності статистичної оцінки $\tilde{a}$ параметра a користуються надійними інтервалами і надійними ймовірностями.

Нехай на основі експериментальних даних для параметра a знайдено його незсунену оцінку $\tilde{a}$. Треба оцінити похибку, що при цьому може появитись. Це робиться так. Задаються деякою *досить великою ймовірністю* β для того, щоб події, які будуть розглядатись, були практично вірогідними. За ймовірність β беруть одне із значень 0,9; 0,95; 0,98; 0,99; 0,999. Треба знайти таке додатне число ε, щоб виконувалась рівність

$$P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta \quad \text{або} \quad P(\tilde{a} - \varepsilon < a < \tilde{a} + \varepsilon) = \beta. \qquad (4.12)$$

Ця рівність означає, що невідоме значення параметра a із заданою ймовірністю β попадає в інтервал $I_\beta = (\tilde{a} - \varepsilon;\ \ \tilde{a} + \varepsilon)$, середина якого знаходиться в точці $\tilde{a}$.

Зауважимо, що значення шуканого *параметра* a є величина *невипадкова*, а от *інтервал* I_β є *випадковим*, бо його середина є випадкова величина $\tilde{a}$. Тому ймовірність β краще тлумачити не як ймовірність попадання точки a в інтервал I_β, а *як ймовірність того, що інтервал* I_β *накриє точку* a. Отже, за заданою ймовірністю β треба знайти кінці цього інтервалу $\tilde{a} - \varepsilon$ і $\tilde{a} + \varepsilon$ тобто знайти число $\varepsilon > 0$.

Імовірність β *називають* ***надійною ймовірністю***, *а інтервал* I_β, *який з цією ймовірністю накриває шуканий параметр, називають* ***надійним інтервалом***.

Отже, щоб визначити інтервальну оцінку шуканого параметра a за заданою надійною ймовірністю β, треба встановити спосіб знаходження такого додатного ε, тобто точності, щоб виконувалась рівність $P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = \beta$. Оскільки закон розподілу статистичної оцінки $\tilde{a}$ залежить від закону розподілу випадкової величини X, який нам невідомий, то при розв'язуванні цієї задачі в загальному випадку є великі труднощі.

4.7 Знаходження надійного інтервалу для математичного сподівання випадкової величини

Нехай розглядається випадкова величина X або деяка ознака X генеральної сукупності з невідомим математичним сподіванням m_x і дисперсією D_x, а це означає, що невідомий її закон розподілу.

Над цією випадковою величиною проведемо n незалежних випробувань, тобто *розглядається вибірка об'єму n.* Для невідомих параметрів m_x і D_x знайдемо їх незсунені статистичні оцінки, якими є відповідно статистичне середнє $\bar{x}$ і незсунена статистична дисперсія s^2, за відомими формулами

$$\bar{x} = (\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)/n \text{ і } s^2 = (\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2)/(n-1).$$

Треба знайти *надійний інтервал для математичного сподівання* m_x за заданою надійною ймовірністю β, тобто *треба знайти таке число* $\varepsilon > 0$, щоб виконувалась рівність

$$P(|m_x^* - m_x| < \varepsilon) = \beta. \tag{4.13}$$

Оскільки статистичне середнє $m_x^* = (\sum_{i=1}^{n} X_i)/n$, де всі випадкові величини X_i мають однаковий розподіл, то за центральною граничною теоремою при *великих n закон розподілу випадкової величини* m_x *близький до нормального.* Тоді імовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини m_x^* від її математичного сподівання, що дорівнює m_x, бо $M(m_x^*) = m_x$ згідно з незсуненістю статистичного середнього, можна визначити за допомогою функції Лапласа, а саме:

$$P(|m_x^* - m_x| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon/\sigma),$$

де σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини m_x^*.

Враховуючи рівність (5.13), для знаходження ε одержимо рівняння,

$$2\Phi(\varepsilon/\sigma) = \beta,$$

звідки $2\Phi(\varepsilon/\sigma) = \beta/2$. Оскільки надійна ймовірність β задана, то за відомим значенням функції Лапласа, яке дорівнює $\beta/2$, знайдемо відповідне значення аргументу цієї функції, яке позначимо через t_β. Отже, $\varepsilon/\sigma = t_\beta$, звідки $\varepsilon = \sigma t_\beta$, де t_β уже відоме.

Залишилось визначити ще σ середнє квадратичне відхилення випадкової величини m_x^*. Оскільки $\sigma^2 = D(m_x^*)$, а згідно з рівністю (3.5) $D(m_x^*) = D_x/n$, то $\sigma = \sqrt{D_x/n}$. Але ж дисперсія D_x випадкової величини X нам невідома, тоді замість неї можна взяти незсунену статистичну дисперсію s^2. Тоді матимемо, що $\sigma = \sqrt{s^2/n}$ або $\sigma = s/\sqrt{n}$, де n – об'єм вибірки.

Отже, шукане число ε визначається за формулою

$$\varepsilon = (s/\sqrt{n})t_\beta, \qquad (4.14)$$

а надійний інтервал для математичного сподівання $(m_x^* - \varepsilon; m_x^* + \varepsilon)$ буде таким

$$m_x^* - \frac{s}{\sqrt{n}}t_\beta < m_x < m_x^* + \frac{s}{\sqrt{n}}t_\beta, \qquad (4.15)$$

де n – об'єм вибірки, s – виправлене статистичне середнє квадратичне відхилення, а t_β – значення аргументу функції Лапласа, коли її значення дорівнює числу $\beta/2$.

Приведений метод знаходження надійного інтервалу для математичного сподівання випадкової величини X є наближеним, бо розподіл випадкової величини m_x^* лише близький до нормального, та й замість D_x взято його наближене значення s^2.

Приклад 2. Відомо, що $\overline{x}=200$, $s^2 = 9$ і $n = 25$. Знайти надійний інтервал для середньої виміряної відстані до об'єкта з надійною ймовірністю $\beta = 0{,}9$.

Розв'язування. Середня виміряна відстань до об'єкта є математичним сподіванням випадкової величини, якою є вимірювана відстань до об'єкта. Тоді шуканий надійний інтервал для середньої виміряної відстані до об'єкта є надійним інтервалом для математичного сподівання випадкової величини, який визначимо за формулою (4.15). Оскільки $\beta = 0{,}9$, то $\beta/2 = 0{,}45$, тоді з рівняння $\Phi(\varepsilon/\sigma) = 0{,}45$ знайдемо, що $t_\beta = 1{,}65$ (за таблицею значень функції Лапласа). Користуючись рівністю (4.14) $\varepsilon = (s/\sqrt{n})t_\beta$, дістанемо, що $\varepsilon = (3/5)\cdot 1{,}65 = 0{,}99$. Тоді шуканий надійний інтервал буде таким: $200 - 0{,}99 < m_x < 200 + 0{,}99$ або $199{,}01 < m_x < 200{,}99$.

4.8 Точний метод знаходження надійного інтервалу для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини

Нехай випадкова величина X має *нормальний* розподіл, параметри якого невідомі, тобто невідомими є її математичне сподівання m_x і дисперсія D_x. Проведемо над нею n незалежних випробувань, тобто розглянемо вибірку об'ємом n, і визначимо незсунені статистичні оцінки m_x^* і s^2. Треба знайти надійний інтервал для математичного сподівання m_x при заданій надійній ймовірності β.

Розглянемо таку випадкову величину

$$T = \sqrt{n}\frac{m_x^* - m_x}{s}, \tag{4.16}$$

де m_x^* і s є випадкові величини. Доведено, що щільність розподілу ймовірностей цієї випадкової величини T не залежить ні від m_x^*, ні від s і має вигляд

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi}\,\Gamma((n-1)/2)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \tag{4.17}$$

де $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ – так звана гама-функція.

Такий розподіл називають *розподілом Стьюдента з* (n–1) *степенями свободи*. Як видно, розподіл Стьюдента *залежить лише* від числа n випробувань, тобто *від об'єму вибірки*, і не залежить від m_x^* і σ, в цьому є його перевага над іншими розподілами.

Знайти надійний інтервал для математичного сподівання випадкової величини X при заданій надійній ймовірності β означає знайти таке додатне число ε, щоб виконувалась рівність

$$P(|m_x^* - m_x| < \varepsilon) = \beta.$$

Помноживши обидві частини нерівності $|m_x^* - m_x| < \varepsilon$ на $\sqrt{n}/s$, перейдемо в попередній рівності до випадкової величини T, а саме:

$$P\left(\sqrt{n}\frac{|m_x^* - m_x|}{s} < \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{s}\right) = \beta \Leftrightarrow P\left(|T| < \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{s}\right) = \beta.$$

Якщо ввести позначення $t_\beta = \frac{\sqrt{n}\varepsilon}{s}$, то остання рівність прийме такий вигляд: $P(|T| < t_\beta) = \beta$ або $P(-t_\beta < T < t_\beta) = \beta$.

Але ж ймовірність цієї нерівності можна виразити через щільність розподілу $S_{n-1}(t)$, а саме:

$$P(|T|<t_\beta)=P(-t_\beta<T<t_\beta)=\int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt.$$

Отже, маємо, що
$$\int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt=\beta. \tag{4.18}$$

За таблицею значень t_β, що задовольняють цю рівність, за відомими β і $n-1$ знаходимо відповідне значення t_β. Тоді шукану точність ε визначимо із рівності $\varepsilon=st_\beta/\sqrt{n}$, а шуканий надійний інтеграл для математичного сподівання матиме вигляд
$$m_x^*-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\beta<m_x<m_x^*+\frac{s}{\sqrt{n}}t_\beta.$$

Зауваження. Цей метод можна застосувати для вибірки будь-якого об'єму $n\geq 2$. *Він незамінний при малих n.* Тому його називають ще *законом малої вибірки.*

Приклад 3. Знайти інтервал надійності для математичного сподівання m_x, якщо $m_x^*=200$, $s^2=9$ і $n=25$, з надійною ймовірністю $\beta=0{,}9$.

Розв'язування. Користуючись таблицею значень t_β, що задовольняють рівність $\int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n-1}(t)dt=\beta$, при $\beta=0{,}9$ і $n-1=24$ знайдемо, що $t_\beta=1{,}711$. Тоді точність $\varepsilon=(3/5)\cdot 1{,}711=1{,}03$, а надійний інтервал буде таким: $200-1{,}03<m_x<200+1{,}03$ або $198{,}97<m_x<201{,}03$.

4.9 Статистична перевірка статистичних гіпотез. Критерії згоди

Що таке статистична гіпотеза? Часто необхідно знати закон розподілу генеральної сукупності або, що те саме, закон розподілу випадкової величини. Якщо закон розподілу *невідомий*, але є підстави на основі тих чи інших даних припустити, що він має певний вигляд A, то *висувають гіпотезу*: *генеральна сукупність розподілена за законом A*.

Можливий випадок, коли *закон розподілу відомий*, але він містить *невідомі параметри*. Якщо є підстави припустити, що *невідомий параметр a дорівнює певному значенню a_0, то висувають гіпотезу: $a=a_0$*. Такі *гіпотези* називають *статистичними*. Наприклад, висувають гіпотезу, що генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона або за нормальним законом.

Поряд з висунутою гіпотезою розглядають і суперечливу їй гіпотезу. Якщо висунута гіпотеза буде відхилена, то має місце суперечлива гіпотеза.

Першу із гіпотез називають *нульовою* або *основною*, другу – *конкурентною* (*альтернативною*). Нульову гіпотезу позначають H_0 , а конкурентну – H_1.

Прийнявши ту чи іншу гіпотезу, з'ясовують наскільки ця гіпотеза H_0 *правдоподібна*, тобто *перевіряють узгодженість прийнятої гіпотези H_0 з експериментальними даними*, або, як кажуть, перевіряють узгодженість теоретичного і статистичного розподілів. Для цього використовують так звані *критерії згоди.*

Висунута гіпотеза H_0 може бути *правильною* або *неправильною*. Тому виникає необхідність її перевірити. Оскільки цю перевірку проводять статистичними методами, то її називають *статистичною перевіркою*. В результаті статистичної перевірки *гіпотези в двох випадках може бути прийняте неправильне рішення*, тобто можуть бути *допущені помилки двох родів.*

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відхилена правильна гіпотеза. Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна гіпотеза. Наслідки цих помилок можуть бути різні.

Правильне рішення може бути теж в двох випадках:

– *гіпотеза приймається*, причому в дійсності вона є *правильною*;

– *гіпотеза відхиляється*, причому в дійсності вона є *неправильною.*

Зауваження. *Імовірність здійснити помилку першого роду позначають через α і її називають рівнем значущості*. Найбільш часто рівень значущості приймають рівним 0,05 або 0,01.

Наприклад, якщо α = 0,05, то це означає, що в середньому в п'яти випадках із ста є *ризик допустити помилку першого роду*, тобто відхилити правильну гіпотезу.

Прийнявши ту чи іншу гіпотезу, з'ясовують наскільки ця гіпотеза H_0 *правдоподібна*, тобто *перевіряють узгодженість прийнятої гіпотези H_0 з експериментальними даними*, або, як кажуть, *перевіряють узгодженість теоретичного і статистичного розподілів*. Для цього використовують так звані *критерії згоди*. Ідея критеріїв згоди полягає в такому.

Нехай на основі експериментальних даних нам треба перевірити нульову гіпотезу H_0 , яка полягає в тому, що випадкова величина X має певний запропонований закон розподілу. Ним може бути функція розподілу $F(x)$ або щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ або сукупність ймовірностей P_i, де P_i – ймовірності того, що ця випадкова величина попаде на деякий i-тий інтервал розбиття. Візьмемо більш загальний випадок, коли запропонований закон розподілу задається функцією розподілу $F(x)$.

Отже, *висунута нульова гіпотеза H_0 полягає в тому, що випадкова величина X має певну функцію розподілу $F(x)$.*

Для того щоб прийняти чи відхилити нульову гіпотезу H_0, розглядають деяку величину $У$, що буде характеризувати *міру розходження теоретичного і статистичного розподілів*. Ця величина $У$ може бути вибрана різними способами, а саме:

а) за $У$ можна взяти *максимальне відхилення статистичної функції розподілу* $F^*(x)$ *від теоретичної функції розподілу* $F(x)$;

б) за $У$ можна взяти *суму квадратів відхилень теоретичних ймовірностей* P_i *попадання випадкової величини* X *на* i*-тий елементарний проміжок розбиття і відповідних відносних частот* p_i^* або ж цю суму з деякими "ваговими" коефіцієнтами.

Припустимо, що величина $У$ вибрана певним способом. Зрозуміло, що це буде випадкова величина і закон розподілу випадкової величини $У$ залежить від закону розподілу випадкової величини X, над якою проводились випробування, і від числа n цих незалежних випробувань. Припустимо, що закон розподілу величини $У$ відомий.

Нехай в результаті проведення n незалежних випробувань над X випадкова величина $У$ прийняла деяке значення y. Постає питання, чи можна пояснити прийняте значення $У = y$ випадковими причинами, чи це значення достатньо велике і вказує на наявність істотної різниці між теоретичним і статистичним розподілами, тобто на непридатність нульової гіпотези H_0?

Щоб відповісти на це питання, припустимо, що гіпотеза H_0 правильна, і знайдемо ймовірність того, що випадкова величина У за рахунок випадкових причин, що пов'язані з обмеженим об'ємом експериментальних даних, прийме значення не менше, ніж спостережуване значення y, тобто знайдемо $P(У \geq y)$. *Якщо ця ймовірність мала, то гіпотезу* H_0 *треба відхилити як мало правдоподібну, а якщо ця ймовірність значна, то експериментальні дані не суперечать гіпотезі* H_0.

Але щоб обчислити $P(У \geq y)$, необхідно знати закон розподілу випадкової величини $У$, який буде залежати в принципі від закону розподілу випадкової величини X і від числа випробувань. Виявляється, що при деяких способах вибору $У$ її закон розподілу при досить великих n практично не залежить від закону розподілу випадкової величини X, а лише від n. Саме такими мірами розходження і користуються в математичній статистиці при виборі критеріїв згоди.

Одним із найбільш вживаних критеріїв згоди є так званий *критерій* χ^2 *Пірсона* (*критерій "хі квадрат"*). Викладемо суть цього критерію.

1. Нехай над випадковою величиною X проведено n незалежних випробувань і результати спостережень оформлені у вигляді *інтервального статистичного розподілу*, який містить m інтервалів, при цьому бажано мати не менше 5-10 спостережень на кожному інтервалі $[a_{i-1}; a_i]$. Якщо кількість спостережуваних значень в окремих інтервалах мала, то є смисл об'єднати деякі сусідні інтервали. Після об'єднання інтервали називають *розрядами.*

2. Виходячи із теоретичного запропонованого закону розподілу, який вказують заданням функції розподілу $F(x)$ або щільності розподілу $p(x)$, *визначають ймовірності* p_i *попадання* випадкової величини X на кожен із m інтервалів, точніше розрядів $[a_{i-1}; a_i]$, де $i = 1, 2, \ldots, m$.

3. За *міру розходження* між теоретичним і статистичним розподілами *вибирають суму квадратів* $(p_i^* - p_i)$, взятих з відповідними "ваговими" коефіцієнтами c_i, а саме:

$$У = \sum_{i=1}^{m} c_i (p_i^* - p_i)^2 . \tag{4.19}$$

Пірсон показав, що якщо $c_i = n / p_i$, де n – об'єм вибірки, то при великих n закон розподілу $У$ не залежить від закону розподілу X, тобто від її функції розподілу $F(x)$, а залежить лише від об'єму вибірки n і від числа розрядів m і при зростанні n наближається до розподілу хі квадрат. Якщо $c_i = n / p_i$, то міру розходження позначають через χ^2. Враховуючи те, що $p_i^* = n_i / n$, звідки $np_i^* = n_i$, дістанемо вираз χ^2, а саме:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^{m} (p_i^* - p_i)^2 / p_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} . \tag{4.20}$$

4. Розподіл χ^2 залежить від параметрів k, який називають *числом степенів свободи* і визначають за формулою

$$k = m - s - 1 , \tag{4.21}$$

де s – *число параметрів* теоретичного закону розподілу, які знаходять за експериментальними даними (для нормального закону s = 2, бо цей розподіл має два параметри a і σ).

5. Задаються певним рівнем значущості α і за таблицею критичних точок розподілу χ^2 (їх ще називають *квантелями*) за заданим *рівнем значущості* α і *числом степенів свободи* k знаходять критичну точку $\chi^2_{крит.}(\alpha, k)$.

6. *Якщо* спостережуване *значення* χ^2, *знайдене за формулою* (4.20), *виявиться меншим, ніж* $\chi^2_{крит.}$, *то немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Якщо ж* $\chi^2_{спост.} > \chi^2_{крит.}$, *то нульову гіпотезу відхиляють як неправдоподібну*; кажуть, що нульова гіпотеза не узгоджується з експериментальними даними.

4.10 Зразок виконання типового розрахунку

За даними вибірки для вимірювання напруги в мережі: а) скласти статистичну сукупність; б) побудувати гістограму відносних частот; в) побудувати наближено криву розподілу; г) скласти статистичну функцію розподілу; д) знайти статистичне середнє, статистичну дисперсію, незсунену статистичну дисперсію; е) знайти надійний інтервал для математичного сподівання двома способами: наближено, вважаючи розподіл близьким до нормального, і точно за допомогою розподілу Стьюдента, якщо надійна ймовірність β = 0,98; ж) перевірити статистичну гіпотезу про нормальний закон розподілу цієї випадкової величини.

При вимірюванні напруги в мережі одержані такі результати (у вольтах):

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	127,08	11	127,43	21	126,61	31	127,28	41	126,18
2	127,03	12	126,86	22	127,12	32	126,37	42	126,64
3	126,26	13	126,43	23	126,94	33	127,55	43	127,04
4	126,53	14	127,25	24	126,47	34	126,04	44	126,15
5	127,30	15	126,93	25	126,72	35	126,95	45	126,68
6	126,88	16	126,71	26	126,82	36	127,34	46	127,38
7	127,65	17	127,83	27	127,06	37	126,64	47	126,79
8	126,54	18	127,01	28	126,78	38	126,87	48	126,87
9	127,23	19	126,43	29	126,35	39	127,12	49	127,17
10	126,84	20	127,09	30	127,34	40	127,07	50	126,30

1. Складемо статистичну сукупність, тобто поінтервальний статистичний ряд розподілу. Для цього спочатку визначимо число інтервалів m, виходячи з того, що при об'ємі вибірки n, що задовольняє подвійну нерівність $40 \leq n \leq 60$, *число інтервалів* m визначають із нерівності $6 \leq m \leq 10$. Знайшовши найменше і найбільше із спостережуваних значень x_i, а саме:
$x_{min} = 126{,}04$, $x_{max} = 127{,}83$, будемо мати, що $x_{max} - x_{min} = 1{,}79$. Знайдений так званий *розкид* 1,79 поділимо відповідно на 7, 8, 9 і знайдемо *крок розбиття* $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/m$, дістанемо відповідно 0,25571; 0,22375; 0,19888. Округливши ці значення з надлишком до сотих, будемо мати відповідно 0,26; 0,23; 0,20. Зручним кроком розбиття є число 0,26, яке є *парним* і відповідає числу інтервалів $m = 7$ (інші значення кроків розбиття є незручними). Отже, за крок розбиття беремо $h = 0{,}26$. Оскільки добуток $h \cdot m = 1{,}82$, що більше розкиду 1,79 на 0,03, то інтервал $(a; b)$ виберемо так, щоб його лівий кінець був трохи меншим за x_{min}, а правий кінець був би більшим за x_{max}, а саме: $a = 126{,}02$ і $b = 127{,}84$. Тоді точками розбиття будуть: $a_1 = 126{,}28$; $a_2 = 126{,}54$; $a_3 = 126{,}80$; $a_4 = 127{,}06$; $a_5 = 127{,}32$; $a_6 = 127{,}58$. Підрахувавши частоти n_k значень x_k, що попали на k-тий інтервал $[a_{k-1}; a_k]$, де $k = 1, 2, \ldots, 7$, дістанемо, що $n_1 = 4$; $n_2 = 7$; $n_3 = 9$; $n_4 = 13$; $n_5 = 10$; $n_6 = 5$; $n_7 = 2$.

Обчислимо ще відносні частоти значень x_k, що попадають на ці часткові інтервали, користуючись формулою $P_k^* = n_k / n$, де $n = 50$, дістанемо: $P_1^* = 0{,}08$; $P_2^* = 0{,}14$; $P_3^* = 0{,}18$; $P_4^* = 0{,}26$; $P_5^* = 0{,}20$; $P_6^* = 0{,}10$; $P_7^* = 0{,}04$.

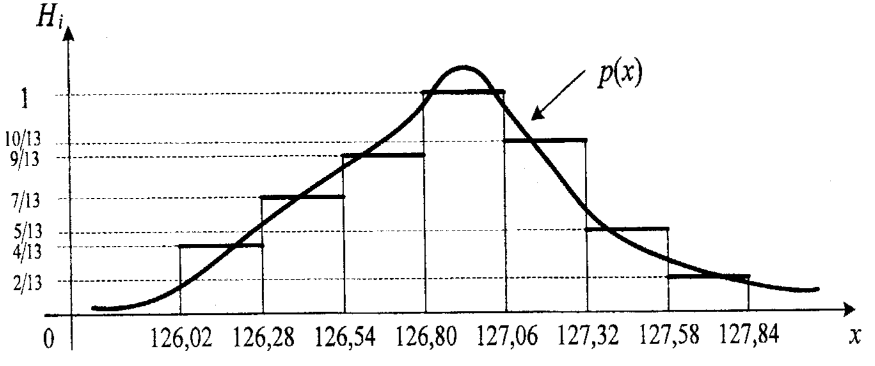
Складемо тепер таблицю (див. таблицю 4.3)

Часткові інтервали	126,02–126,28	126,28–126,54	126,54–126,80	126,80–127,06	127,06–127,32	127,32–127,58	127,58–127,84
частоти n_k	4	7	9	13	10	5	2
відносні частоти $P_k^* = n_k / n$	0,08	0,14	0,18	0,26	0,20	0,10	0,04

Це і є *статистична сукупність* для даної вибірки.

2. Побудуємо тепер гістограму відносних частот. Для цього побудуємо прямокутники, основами яких є часткові інтервали, а площі яких дорівнюють відносним частотам P_k^*. Тоді висоти цих прямокутників визначають за формулою $H_k = P_k^* / h$, будемо мати: $H_1 = 4/13$, $H_2 = 7/13$, $H_3 = 9/13$, $H_4 = 1$, $H_5 = 10/13$, $H_6 = 5/13$, $H_7 = 2/13$.

Побудуємо ці прямокутники; їх об'єднання (ступінчаста фігура) – *гістограма відносних частот*. Згладивши ступінчасту лінію, що обмежує гістограму зверху, неперервною лінією, але так, щоб площа безмежної криволінійної трапеції, що обмежується цією кривою і віссю Ox, дорівнювала наближено одиниці, дістанемо наближення *кривої розподілу* випадкової величини, тобто графік її щільності розподілу ймовірностей $p(x)$.



3. Щоб скласти вираз статистичної функції розподілу, в зв'язку з тим, що різних значень варіант $x_к$ багато, скористаємось інтервальним статистичним розподілом, приписавши значенням варіант $x_к$, що спостерігались, значення середин часткових інтервалів $[a_k\ ;\ a_{k+1}]$, а саме : $\overline{a_k}=(a_k+a_{k+1})/2$. Зауважимо, що самі значення $\bar{x}_k$ не є спостережуваними, вони обчислені за попередньою формулою. Цим значенням $\bar{x}_k$ приписують ті ж самі частоти і відносні частоти, що і відповідних часткових інтервалів. В нашому випадку $\bar{x}_1$=126,15; $\bar{x}_2$=126,41; $\bar{x}_3$=126,67; $\bar{x}_4$=126,93; $\bar{x}_5$=127,19; $\bar{x}_6$=127,45; $\bar{x}_7$=127,71, а статистичний ряд розподілу матиме вигляд:

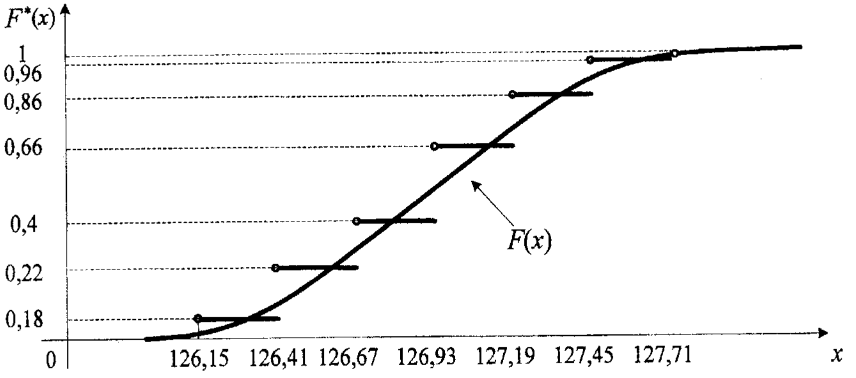
$\bar{x}_k$	126,15	126,41	126,67	126,93	127,19	127,45	127,71
n_k	4	7	9	13	10	5	2
$P_k^*=\dfrac{n_k}{n}$	0,08	0,14	0,18	0,26	0,20	0,10	0,04

Статистичну функцію $F^*(x)=P^*(X<x)$ зручно обчислювати за формулою $F^*(x)=\dfrac{n_x}{n}$, де n – об'єм вибірки, а n_x – число спостережень, при яких спостерігались (приписувались) значення ознаки X менші, ніж x. Значення $F^*(x)$ визначимо на кожному із інтервалів, на які вся числова вісь розбивається точками $\bar{x}_k$:

При $x \le 126{,}15 \Rightarrow n_x = 0 \Rightarrow F^*(x) = 0$; при $126{,}15 < x \le 126{,}41 \Rightarrow n_x = 4$, то $F^*(x) = 4/50 = 0{,}08$; при $126{,}41 < x \le 126{,}67 \Rightarrow n_x = 11 \Rightarrow F^*(x) = 0{,}22$; при $126{,}67 < x \le 126{,}93 \Rightarrow n_x = 20 \Rightarrow F^*(x) = 0{,}40$; при $126{,}93 < x \le 127{,}19$ $n_x = 33 \Rightarrow F^*(x) = 0{,}66$; при $127{,}19 < x \le 127{,}45 \Rightarrow n_x = 43 \Rightarrow F^*(x) = 0{,}86$; при $127{,}45 < x \le 127{,}71 \Rightarrow n_x = 48 \Rightarrow F^*(x) = 0{,}96$; при $x > 127{,}71 \Rightarrow n_x = 50$, то $F^*(x) = 1$.

Отже,

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<126{,}15, \\ 0{,}08 & \text{при } 126{,}25<x\le 126{,}41, \\ 0{,}22 & \text{при } 126{,}41<x\le 126{,}67, \\ 0{,}40 & \text{при } 126{,}67<x\le 129{,}93, \\ 0{,}66 & \text{при } 126{,}93<x\le 127{,}19, \\ 0{,}86 & \text{при } 127{,}19<x\le 127{,}45, \\ 0{,}96 & \text{при } 127{,}45<x\le 127{,}71, \\ 1 & \text{при } x>127{,}71. \end{cases}$$



Ступінчаста лінія є графіком статистичної функції розподілу $F^*(x)$, а неперервна лінія є наближенням графіка функції розподілу $F(x)$.

4. *Статистичне середнє* або *вибіркову середню* m_x^* визначають за формулою $m_x^* = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k n_k\right) / n$, де n – об'єм вибірки, n_k – частоти варіант x_k, за які будемо брати середини $\bar{x}_k$ часткових інтервалів, а саме: $m_x^* = \left(\sum_{k=1}^{7} x_k n_k\right) / n$ = (126,15 · 4 + 126,41 · 7 + 126,67 · 9 + 126,93 · 13+ +127,19 · 10 + 127,45 · 5 + 127,71 · 2) / 50 = 126,8832. Отже, m_x^*= 126,88.

Статистичну дисперсію D_x^*, що визначають за формулою $D_x^* = \left(\sum_{k=1}^{m} (x_k - \bar{x})^2 \cdot n_k\right) / n$, зручно обчислити за формулою $D_x^* = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, де $\overline{x^2} = \left(\sum_{k=1}^{m} x_k^2 n_k\right) / n$. Знайдемо спочатку $\overline{x^2}$, дістанемо $\overline{x^2}$ =(126,15² ·4 + +126,41² ·7+ 126,67² ·9+ 126,93² ·13+ 127,19² ·10+127,45² ·5+127,71² ·2) / 50 = = 16099,5084. Тоді D_x^*= 0,1614.

Незсунену статистичну дисперсію визначають за формулою $s^2 = \left(n D_x^*\right) / \left(n - 1\right)$, дістанемо s^2 = (50/49) · 0,1614 = 0,1647.

Отже, m_x^*= 126,88; D_x^* = 0,1614 і s^2= 0,1647.

5. *Надійний інтервал для математичного сподівання* випадкової величини X визначають за формулою $m_x^* - \varepsilon < m_x < m_x^* + \varepsilon$, де точність ε визначають за формулою $\varepsilon = s\, t_\beta / \sqrt{n}$, де n = 50, s = 0,4058, а t_β визначають за заданою надійною ймовірністю β таким чином.

Якщо вважати закон розподілу випадкової величини близьким до нормального, то t_β визначають наближено за формулою $2\Phi(\varepsilon/\sigma)=\beta$, звідки $\Phi(\varepsilon/\sigma)=\beta/2$. При заданій ймовірності $\beta=0{,}98$ будемо мати, що $\Phi(\varepsilon/\sigma)=0{,}49$, тоді за таблицею значень функції Лапласа за відомим її значенням 0,49 знайдемо відповідне значення її аргументу, яке дорівнюватиме 2,33 і позначають його через t_β. Тоді при $t_\beta=2{,}33$ дістанемо, що $\varepsilon=0{,}4058\cdot 2{,}33/\sqrt{50}\approx 0{,}134$. Оскільки $m_x^*-\varepsilon=126{,}746$, $m_x^*+\varepsilon=$ $=127{,}014$, то шуканий надійний інтервал буде таким:

$126{,}746 < m_x < 127{,}014$.

Якщо вважати, що випадкова величина має *нормальний закон* розподілу, то за таблицею значень t_β, що задовольняють рівність $\int_{-t_\beta}^{t_\beta} s_{n-1}(t)\,dt=\beta$, при $\beta=0.98$ і $n-1=49$ розподілу Стьюдента з $(n-1)$ степенями свободи матимемо, що $t_\beta=2{,}41$, тоді $\varepsilon=0{,}138$, а надійний інтервал для математичного сподівання буде таким:

$126{,}742 < m_x < 127{,}018$.

6. Перевіримо статистичну *гіпотезу* H_0 про *нормальний* закон розподілу цієї випадкової величини, скориставшись *критерієм Пірсона*, що визначається мірою розходження між теоретичним і статистичним розподілами, яку позначають через χ^2 і визначають за формулою

$$\chi^2=\sum_{k=1}^{m}\left(n_k-n\,p_k\right)^2/n\,p_k.$$

Розподіл χ^2 залежить від параметра r, який називають *числом степенів свободи* і визначають за формулою $r=m-s-1$, де s – *число параметрів* теоретичного розподілу (для нормального розподілу $s=2$).

Обчислимо спостережуване значення χ^2, визначивши спочатку ймовірності $p_к$ попадання нормально розподіленої випадкової величини на часткові інтервали $[a_k, a_{k+1}]$, де $k=0, 1, 2 \ldots, 6$, скориставшись для цього таблицею значень функції Лапласа ($a=m_x^*=126{,}88$; $\sigma\approx s=$ $=0{,}4058$):

$p_1=P(126{,}02<X<126{,}28)=\Phi((126{,}28-126{,}88)/0{,}4058)-\Phi((126{,}02-$ $-126{,}88)/0{,}4058)=\Phi(-1{,}4786)-\Phi(-2{,}11927)=-0{,}43027+0{,}48295=$ $=0{,}05268$; $p_2=P(126{,}28<X<126{,}54)=\Phi(-0{,}8338)+0{,}43027=-0{,}29496+$ $+0{,}43027=0{,}13531$; $p_3=P\ (126{,}54<X<126{,}80)=\Phi(-0{,}1974)+0{,}29496=$

$= 0{,}29496 - 0{,}07814 = 0{,}21682$; $p_4 = P(126{,}80 < X < 127{,}06) = \Phi\,(0{,}4435) +$
$+ 0{,}07814 = 0{,}17129 + 0{,}07814 = 0{,}24943$; $p_5 = P(127{,}06 < X < 127{,}32) =$
$= \Phi\,(1{,}0842) - 0{,}17129 = 0{,}36086 - 0{,}17129 = 0{,}18996$;
$p_6 = P(127{,}32 < X < 127{,}58) = \Phi\,(1{,}7249) - 0{,}36086 = 0{,}45772 - 0{,}36086 =$
$= 0{,}09686$; $p_7 = P(127{,}58 < X < 127{,}84) = \Phi\,(2{,}3656) - 0{,}45772 = 0{,}49100 -$
$- 0{,}45772 = 0{,}03328$.

Тоді $\chi^2 = \sum_{k=1}^{7}\left(n_k - n\,p_k\right)^2 / n\,p_k = (4 - 50 \cdot 0{,}05268)^2 / 50 \cdot 0{,}05268 +$
$+ (7 - 50 \cdot 0{,}13531)^2 / 50 \cdot 0{,}13531 + (9 - 50 \cdot 0{,}21682)^2 / 50 \cdot 0{,}21682 +$
$+ (13 - 50 \cdot 0{,}24943)^2 / 50 \cdot 0{,}24943 + (10 - 50 \cdot 0{,}18996)^2 / 50 \cdot 0{,}18996 +$
$+ (5 - 50 \cdot 0{,}09686)^2 / 50 \cdot 0{,}09686 + (2 - 50 \cdot 0{,}03328)^2 / 50 \cdot 0{,}03328 =$
$= 0{,}70841 + 0{,}00813 + 0{,}31263 + 0{,}02239 + 0{,}02653 + 1{,}02733 + 0{,}06785 =$
$= 2{,}17327$.

Отже, $\chi^2_{спост.} = 2{,}17327$.

Визначимо число степенів свободи r за формулою $r = m - s - 1$, де $m=7$, $s = 2$, дістанемо, що $r = 4$. Задамося ще *рівнем значущості* α критерію χ^2, прийнявши його рівним 0,05 (на практиці вважають, що $\alpha = 0{,}05$). За *таблицею критичних точок розподілу* χ^2 при $\alpha = 0{,}05$ і $r = 4$ знаходимо, що $\chi^2_{крит.} = 9{,}5$. Оскільки $\chi^2_{спост.} < \chi^2_{крит.}$, то це означає, що *нульова гіпотеза* H_0 *не суперечить експериментальним даним.*

5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

Задача **1.** Користуючись класичним означенням, знайти ймовірності випадкових подій.

1.1. В ящику знаходиться 12 деталей, що мало відрізняються одна від одної, серед яких п'ять пофарбованих. Навмання витягують три деталі. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих деталей: а) немає пофарбованих; б) тільки дві пофарбовані; в) хоч би одна деталь пофарбована.

1.2. Серед десяти лотерейних білетів три виграшні. Навмання беруть чотири білети. Знайти ймовірності того, що: а) тільки один із них виграшний; б) хоча б один із них виграшний; в) всі взяті білети виграшні.

1.3. В майстерню для ремонту поступило десять телевізорів, серед яких шість потребують загального регулювання. Майстер навмання бере п'ять штук. Знайти ймовірності того, що: а) тільки два із них потребують загального регулювання; б) хоча б один потребує загального регулювання; в) не менше чотирьох із них потребують загального регулювання.

1.4. В ліфт восьмиповерхового будинку зайшли чотири пасажири. Кожен із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з третього. Знайти ймовірності того, що: а) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж поверсі; б) всі пасажири вийдуть на сьомому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на різних поверхах.

1.5. Яка ймовірність того, що п'ятизначний номер навмання взятого автомобіля у великому місті має: а) три однакові цифри; б) всі різні цифри; в) тільки непарні цифри.

1.6. В контейнері знаходиться 15 верстатів, серед яких чотири з дефектами. Знайти ймовірності того, що серед навмання взятих для контролю трьох верстатів: а) немає з дефектами; б) тільки два верстати з дефектами; в) хоча б один без дефектів.

1.7. Із партії виробів, серед яких 20 доброякісних і 4 бракованих, для контролю вибрано навмання 6 виробів. Визначити ймовірність того, що: а) всі вибрані вироби доброякісні; б) тільки два вироби браковані; в) хоча б один виріб бракований.

1.8. В урні три білих, п'ять чорних і чотири червоних кульки. З урни навмання витягують чотири кульки. Знайти ймовірності того, що: а) всі витягнуті кульки чорні; б) серед витягнутих кульок дві білі і дві червоні кульки; в) серед витягнутих кульок одна біла, дві чорні і одна червона.

1.9. В складальника 12 деталей, що мало відрізняються одна від одної, серед них п'ять деталей першого типу, чотири – другого і три третього. Яка ймовірність того, що серед шести навмання взятих деталей виявиться: а) три першого типу і три – другого; б) три першого типу, одна – другого і дві – третього?

1.10. В ящику 10 деталей, серед яких 4 пофарбовані. Складальник навмання витягує 3 деталі. Знайти ймовірності того, що: а) витягнуті деталі виявляться пофарбованими; б) тільки дві деталі пофарбовані; в) хоча б одна деталь пофарбована.

1.11. З колоди в 36 карт навмання витягують чотири. Знайти ймовірності того, що серед них виявиться: а) один туз; б) три тузи; в) хоча б один туз.

1.12. Серед 20 студентів групи, в якій 8 дівчат, розігруються п'ять білетів. Знайти ймовірності того, що серед власників білетів буде: а) три дівчини; б) хоча б одна дівчина; в) більше двох дівчат.

1.13. Телефонний номер складається із шести цифр. Знайти ймовірності того, що в навмання взятому номері: а) дві перші цифри парні; б) три перші цифри парні і однакові, а решта – непарні різні; в) всі цифри непарні.

1.14. В партії із 14 виробів чотири вироби браковані. Для контролю відбирають навмання п'ять виробів. Знайти ймовірності того, що серед відібраних виробів: а) всі вироби доброякісні; б) два вироби браковані; в) хоча б один виріб доброякісний.

1.15. Чотири стрільці стріляють по 6 мішенях. Кожен стрілець вибирає собі мішень випадково і незалежно від інших стрільців. Знайти ймовірності того, що стрільці будуть стріляти: а) по різних мішенях; б) по одній і тій же мішені.

1.16. Дехто купив картку «Спортлото» і відмітив 6 номерів із 49, після цього відбувся тираж цієї гри. Знайти ймовірності того, що: а) правильно угадані 4 номери; б) правильно угадані 5 номерів.

1.17. Серед виробів трьох сортів 5 виробів першого сорту, 3 вироби другого сорту і 6 виробів третього сорту. Для контролю навмання беруть 7 виробів. Знайти ймовірності того, що: а) серед них два вироби першого сорту, два вироби другого сорту і три вироби третього сорту; б) хоча б один виріб третього сорту.

1.18. В групі 12 студентів, серед яких 5 відмінників. За списком навмання відібрані сім студентів. Знайти ймовірності того, що серед відібраних студентів: а) чотири відмінники; б) хоча б один відмінник; в) не більше двох відмінників.

1.19. Пристрій складається із восьми елементів, серед яких три зношені. При увімкненні пристрою вмикаються випадково п'ять елементів. Знайти ймовірності того, що увімкненими виявляться: а) незношені елементи; б) два зношені елементи; в) хоча б один незношений елемент.

1.20. В дослідній лабораторії працюють 7 чоловіків і 5 жінок. За табельними номерами навмання відібрані 6 осіб. Знайти ймовірності того, що серед відібраних осіб виявиться: а) чотири жінки; б) три чоловіки; в) хоча б одна жінка.

1.21. Телефонний номер складається з шести цифр. Знайти ймовірності того, що: а) три перші цифри однакові, а три наступні різні; б) чотири перші різні парні, а дві останні непарні.

1.22. В групі із 25 студентів на контрольній роботі 5 студентів отримали оцінку “відмінно”, 6 студентів – “добре”, 8 студентів – “задовільно”. Навмання до дошки викликають трьох студентів. Знайти ймовірності того, що серед цих студентів: а) всі мають незадовільні оцінки; б) два студенти мають відмінні оцінки і один задовільну; в) хоча б один має задовільну оцінку.

1.23. В ящику міститься 10 однакових деталей, що помічені номерами 1,2,…,10. Навмання витягують 7 деталей. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих деталей виявляться: а) деталь №2; б) деталі №3, №5.

1.24. В ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі зайшли три особи, кожна з яких з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірності того, що: а) всі пасажири вийдуть на одному і тому ж поверсі; б) всі пасажири вийдуть на п’ятому поверсі; в) всі пасажири вийдуть на різних поверхах.

1.25. Із партії, що містить 30 приймачів, серед яких 6 несправних, навмання для перевірки відбирають 5 приймачів. Знайти ймовірності того, що серед відібраних приймачів: а) всі справні; б) хоча б один справний; в) тільки два приймачі несправні.

1.26. Серед виробів чотирьох сортів чотири вироби першого сорту, три вироби другого сорту, два вироби третього сорту і п’ять виробів четвертого сорту. Для контролю навмання беруться п’ять виробів. Визначити ймовірність того, що серед них: а) всі вироби четвертого сорту; б) два вироби першого сорту і по одному решти сортів.

1.27. Студент знає 25 питань із 30 питань програми. Екзаменаційний білет містить три питання. Знайти ймовірності того, що студент знає: а) всі три питання білета; б) два питання білета; в) одне питання білета.

1.28. Серед 10 лотерейних білетів три виграшні. Навмання беруть 6 білетів. Визначити ймовірність того, що серед них: а) жоден невиграшний; б) тільки один виграшний; в) два виграшні.

1.29. Серед виробів трьох сортів 8 виробів першого сорту, 5 – другого, 3 – третього. Для контролю навмання беруть 7 виробів. Визначити ймовірність того, що серед відібраних: а) всі вироби першого сорту; б) два вироби першого сорту, три – другого і два – третього.

1.30. В ящику міститься 20 деталей, серед яких 4 браковані. Навмання витягують три деталі. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих деталей: а) немає бракованих; б) дві браковані; в) хоча б одна доброякісна.

1.31. Яка ймовірність того, що п’ятизначний номер випадково взятого автомобіля у великому місті: а) має дві перші цифри різні; б) має хоча б одну цифру 7; в) має дві пари однакових цифр.

1.32. В коробці 9 однакових виробів, серед яких 4 пофарбовані. Навмання витягують три вироби. Знайти ймовірності того, що серед них: а) два вироби пофарбовані; б) хоча б один виріб пофарбований;

1.33. В ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі сіли 5 осіб. Кожна з них незалежно від інших може вийти з однаковою ймовірністю на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Визначити ймовірності того, що: а) всі пасажири вийдуть на четвертому поверсі; б) всі пасажири вийдуть на різних поверхах; в) на третьому і четвертому поверсі вийдуть по два пасажири і один на шостому.

1.34. Із 15 радіопередавачів, серед яких 4 несправних, навмання для контролю відбирають три радіопередавачі. Знайти ймовірності того, що серед відібраних: а) немає несправних; б) тільки два справні; в) хоча б один справний.

1.35. Із партії, що містить 12 виробів, серед яких 4 бракованих, навмання витягують три вироби для контролю. Знайти ймовірності того, що: а) всі витягнуті вироби браковані; б) хоча б один виріб бракований; в) тільки один виріб бракований.

1.36. Серед кандидатів в студентську раду факультету чотири першокурсники, 5 другокурсників і 8 третьокурсників. З цього складу навмання вибирають п'ять осіб на конференцію. Знайти ймовірності того, що: а) будуть вибрані тільки третьокурсники; б) не буде вибрано жодного другокурсника; в) буде вибрано один першокурсник і по два другокурсники і третьокурсники.

1.37. В ящику 20 деталей, серед яких 8 бракованих. Навмання витягують 4 деталі. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих деталей: а) немає браковані; б) хоча б одна деталь бракована; в) дві деталі доброякісні і дві браковані.

1.38. Серед виробів трьох сортів 5 виробів першого сорту, 6 – другого і 7 – третього. Для контролю навмання беруть шість виробів. Знайти ймовірності того, що серед взятих виробів: а) хоча б один третього сорту; б) три вироби першого сорту; в) один виріб першого сорту, три – другого і два – третього.

1.39. В урні знаходиться 10 кульок, серед яких 6 білих і 4 чорних. З урни навмання витягують три кульки. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих кульок: а) дві білі кульки; б) хоча б одна біла кулька; в) хоча б одна чорна кулька.

1.40. На складі знаходиться 15 телевізорів, серед яких три телевізори з дефектами. Навмання вибирають чотири телевізори. Знайти ймовірності того, що серед вибраних телевізорів: а) немає з дефектами; б) три без дефектів; в) хоча б один з дефектами.

1.41. Із колоди в 52 карти навмання витягують 4 карти. Знайти ймовірності того, що: а) всі витягнуті карти бубнової масті; б) серед витягнутих карт виявиться хоча б один туз; в) серед витягнутих карт виявиться дві дами і два королі.

1.42. Серед дев'яти лотерейних білетів чотири виграшні. Навмання беруть три білети. Знайти ймовірності того, що серед взятих білетів: а) два виграшних; б) хоча б один виграшний; в) всі виграшні.

1.43. Телефонний номер складається із шести цифр. Знайти ймовірності того, що: а) всі цифри номера парні; б) перші дві різні, а решта непарні; в) три цифри однакові, а решта різні.

1.44. В контейнері міститься 9 деталей, серед яких три з дефектами. Навмання беруть п'ять деталей. Знайти ймовірності того, що серед взятих деталей: а) немає з дефектами; б) тільки одна з дефектами; в) хоча б одна доброякісна.

1.45. В альбомі знаходиться 10 марок, серед яких 3 марки погашені. Навмання беруть чотири марки. Знайти ймовірності того, що серед взятих марок виявиться: а) одна погашена; б) всі погашені; в) хоча б одна погашена.

1.46. В ящику міститься 12 деталей, серед яких 4 пофарбовані. Навмання витягують чотири деталі. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих: а) немає пофарбованих; б) дві пофарбовані; в) хоча б одна пофарбована.

1.47. Телефонну книгу розкривають навмання і вибирають випадковий номер телефону (телефонні номери складаються із семи цифр). Знайти ймовірності того, що: а) чотири останні цифри номера телефону однакові; б) всі цифри різні; в) номер починається з цифри 4, а решта цифр непарні.

1.48. В партії, що містить 15 виробів, є чотири вироби з дефектами. Для контролю навмання беруть п'ять виробів. Знайти ймовірності того, що серед взятих виробів: а) всі з дефектами; б) три вироби з дефектами; в) хоча б один виріб з дефектами.

1.49. В ящику міститься 20 типових елементів заміни, серед яких 8 несправних. Навмання беруть 5 елементів. Знайти ймовірності того, що серед взятих елементів: а) всі несправні; б) тільки один справний; в) хоча б один несправний.

1.50. П'ять стрільців стріляють по восьми мішенях. Кожен стрілець вибирає собі мішень випадково і незалежно від інших стрільців. Знайти ймовірності того, що стрільці будуть стріляти: а) по одній мішені; б) по різних мішенях.

Задача 2. Користуючись теоремами додавання і множення ймовірностей, знайти ймовірності випадкових подій.

2.1. Прилад складається з трьох вузлів, кожен з яких незалежно від інших протягом часу T може відмовити. Відмова хоча б одного вузла призводить до відмови приладу. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу, якщо ймовірність відмови для першого вузла дорівнює 0,2, для другого – 0,1, для третього – 0,3.

2.2. Достатньою умовою здати іспит є правильна відповідь на два із трьох запитань, що пропонуються викладачем студенту. Студент не знає відповідей на 10 запитань із 60 запитань програми іспиту. Яка ймовірність складання іспиту?

2.3. Випробовуються три конденсатори. Імовірності виходу із ладу протягом певного часу для цих конденсаторів відповідно дорівнюють 0,04, 0,03 і 0,05. Знайти ймовірності того, що протягом цього часу вийде із ладу: а) один конденсатор; б) хоча б один конденсатор.

2.4. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,6, для другого – 0,4. Перший стрілець здійснює два постріли, другий – три. Знайти ймовірності того, що: а) буде тільки одне влучення; б) хоча б одне влучення в ціль.

2.5 В двох партіях 75% і 80% доброякісних виробів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії. Знайти ймовірності того, що серед вибраних виробів: а) один бракований; б) обидва браковані; в) хоча б один доброякісний.

2.6. На стенді випробовують три прилади. Імовірності витримати випробування протягом певного часу для цих приладів відповідно дорівнюють 0,9, 0,8 і 0,95. Знайти імовірності того, що протягом цього часу витримають випробування: а) тільки два прилади; б) всі прилади; в) хоча б один прилад.

2.7. Два гравці A і B по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться герб. Першим кидає гравець A. Знайти імовірності того, що: а) виграє гравець A до четвертого кидка; б) виграє гравець B не пізніше третього кидка.

2.8. В першій урні 2 білих і 4 чорних кульки, в другій – 3 білих і 3 чорних кульки. З кожної урни навмання витягують по одній кульці. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих кульок будуть: а) дві білі кульки; б) дві чорні кульки; в) кульки різного кольору.

2.9. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,6, другим – 0,4. Стрільці здійснюють по два постріли. Знайти ймовірність того, що в мішені буде: а) хоча б одне влучення; б) тільки два влучення.

2.10. Три мисливці домовились стріляти по дичині в певному порядку. Наступний мисливець здійснює постріл лише у випадку промаху попереднього. Ймовірність влучення для першого мисливця дорівнює 0,6, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Знайти імовірності того, що буде здійснено: а) два постріли; б) три постріли.

2.11. Обчислювальний центр має в своєму розпорядженні три обчислювальних пристрої. Відомо, що ймовірність відмови за деякий час для першого пристрою дорівнює 0,3, для другого і третього дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що відмовить: а) тільки один пристрій; б) тільки два пристрої; в) хоча б один пристрій.

2.12. Три стрільці здійснюють по одному пострілу по цілі. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,6, для другого – 0,8 і для третього – 0,7. Знайти імовірність того, що буде: а) одне влучення; б) хоча б одне влучення; в) два влучення.

2.13. Робітник обслуговує три верстати, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом певного часу не вимагатиме уваги робітника перший верстат дорівнює 0,9, другий – 0,8 і третій 0,9. Знайти імовірності того, що протягом цього часу не вимагатиме уваги робітника: а) тільки один верстат; б) два верстати; в) хоча б один верстат.

2.14. Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її навмання. Знайти ймовірність того, що йому доведеться набирати не більше, ніж чотири номери.

2.15. Три гармати ведуть вогонь по цілі. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі із першої гармати дорівнює 0,6, із другої – 0,7, із третьої – 0,6. Кожна гармата стріляє один раз. Знайти імовірності того, що: а) буде хоча б одне влучення в ціль; б) ціль буде уражена, якщо для цього достатньо двох влучень.

2.16. Гра проводиться до виграшу одним із двох гравців двох партій підряд. Імовірність виграшу партії кожним гравцем дорівнює 0,5 і не залежить від результатів попередніх партій. Знайти імовірність того, що гра закінчиться до третьої партії.

2.17. Два мисливці стріляють в кабана, причому кожен здійснює по одному пострілу. Для першого мисливця ймовірність влучення в ціль дорівнює 0,7, для другого – 0,8. Яка ймовірність влучення в кабана (хоча б при одному пострілі)? Як зміниться результат, якщо мисливці здійснять по два постріли?

2.18. По цілі здійснюють по одному пострілу три стрільці. Імовірності влучення в ціль для кожного стрільця не залежать від результатів інших і відповідно дорівнюють 0,7;0,6 і 0,8. Знайти ймовірності того, що в ціль влучить: а) тільки другий стрілець, б) два стрільці; в) хоча б один стрілець.

2.19. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,6. Після першого влучення стрільбу зупиняють. Знайти ймовірність того, що буде здійснено: а) рівно чотири постріли; б) не більше трьох пострілів.

2.20. Для підвищення надійності приладу він дублюється іншим точно таким же приладом. Імовірність безвідмовної роботи кожного приладу дорівнює 0,8. При виході із ладу основного приладу здійснюється миттєве перемикання на дублюючий з імовірністю 0,9. Знайти імовірність безвідмовної роботи системи двох приладів.

2.21. Здійснюють послідовні випробування приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовують в тому випадку, коли попередній виявиться надійним. Імовірність витримати випробування для кожного приладу дорівнює 0,8. Знайти ймовірності того, що число приладів, що витримають випробування буде: а) рівним чотирьом; б) не більше двох.

2.22. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі першим стрільцем дорівнює 0,4, другим – 0,6. Перший стрілець здійснив три постріли, другий – два постріли. Знайти ймовірності того, що: а) ціль не уражена; б) буде хоча б один промах.

2.23. В першому ящику 2 білих і 10 чорних кульок, в другому ящику 8 білих і 4 чорних кульки. З кожного ящика витягують по одній кульці. Знайти ймовірності того, що: а) обидві витягнуті кульки білі; б) обидві витягнуті кульки чорні; в) витягнуті кульки різного кольору.

2.24. Три стрільці стріляють по цілі. Імовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,9 для третього – 0,8. Знайти імовірності того, що: а) два стрільці влучать в ціль; б) хоча б один із стрільців промахнеться.

2.25. Три дослідники незалежно один від одного здійснюють вимірювання деякої фізичної величини. Імовірність того, що перший дослідник допустить помилку при знятті показів приладу дорівнює 0,1; для другого і третього ця ймовірність відповідно дорівнює 0,2 і 0,15. Знайти ймовірності того, що буде допущена помилка: а) тільки одним дослідником; б) хоча б одним дослідником.

2.26. Імовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,3, другим – 0,4. Стріляють стрільці по черзі, причому кожен здійснює по два постріли. Той, хто влучить в мішень першим, отримує приз. Знайти ймовірності того, що: а) стрільці отримають приз; б) перший стрілець отримає приз.

2.27. Технічний пристрій, що складається з трьох вузлів, працює протягом певного часу. Імовірність виходу із ладу першого вузла дорівнює 0,1, другого – 0,12, третього – 0,08. Знайти ймовірності того, що протягом цього часу: а) тільки один вузол вийде із ладу; б) хоча б один вузол вийде із ладу.

2.28. Для сигналізації про аварію встановлено три сигналізатори, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що при аварії спрацює перший сигналізатор дорівнює 0,9, а для другого і третього – 0,8. Знайти імовірності того, що при аварії спрацює: а) тільки перший сигналізатор; б) тільки один сигналізатор; в) хоча б один сигналізатор.

2.29. В урні 30 кульок, серед яких 5 червоних, 10 синіх, 15 зелених. Витягують підряд три кульки. Знайти імовірність того, що будуть витягнуті: а) послідовно кульки синя, зелена, червона; б) дві зелені і одна червона.

2.30. Імовірність того, що радіолампа даної партії пропрацює певний час, дорівнює 0,6. Знайти імовірність того, що із навмання відібраних чотирьох радіоламп: а) всі пропрацюють протягом цього часу; б) хоча б одна пропрацює протягом цього часу.

2.31. В партії, що містить 200 деталей, є 150 штук першого сорту, 30 другого сорту, а решта – третього сорту та браковані. Знайти ймовірності того, що взята навмання деталь буде: а) першого або другого сорту; б) другого сорту.

2.32. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що серед трьох навмання вибраних виробів: а) тільки два вироби стандартні; б) хоча б один виріб стандартний.

2.33. Із двох партій виробів, серед яких 80% і 75% доброякісних, навмання витягують по одному виробу. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих виробів: а) обидва браковані; б) хоча б один бракований; в) один доброякісний і один бракований.

2.34. В ящику міститься 10 деталей, серед яких 6 пофарбованих. Складальник навмання бере 4 деталі. Знайти ймовірності того, що серед взятих деталей: а) хоча б одна пофарбована; б) дві пофарбовані.

2.35. В урні міститься 5 однакових кульок, серед яких дві червоні. Двоє гравців по черзі витягують з урни по одній кульці, не повертаючи її назад в урну. Виграє той, хто раніше витягне червону кульку. Знайти ймовірності того, що: а) виграє перший гравець; б) виграє другий гравець.

2.36. При вмиканні запалювання двигун починає працювати з імовірністю 0,8. Знайти імовірності того, що: а) двигун почне працювати при третьому вмиканні; б) для введення двигуна в роботу доведеться увімкнути запалення не більше двох разів.

2.37. Дві гармати ведуть стрільбу по танку. Ймовірність влучення в танк для першої гармати дорівнює 0,7, для другої – 0,8. Кожна гармата здійснює по два постріли. Знайти ймовірності того, що: а) буде хоча б одне влучення в танк; б) буде три влучення в танк.

2.38. Два стрільці A і B по черзі стріляють в мішень. Імовірності влучення в мішень цими стрільцями відповідно дорівнюють 0,8 і 0,6. Першим стріляє стрілець A. Знайти ймовірності того, що: а) в мішень влучить стрілець B до четвертого пострілу; б) в мішень влучить стрілець A не пізніше четвертого пострілу.

2.39. Імовірності того, що потрібна складальнику деталь знаходиться в першому, другому, третьому ящику відповідно дорівнюють 0,6; 0,7 і 0,4. Знайти імовірності того, що деталь міститься: а) не більше, ніж в двох ящиках; б) не менше, ніж в двох ящиках.

2.40. Із партії товарознавець відбирає вироби вищого сорту. Імовірність того, що навмання взятий виріб виявиться вищого сорту, дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що із трьох взятих для перевірки виробів: а) тільки один виріб вищого сорту; б) тільки два вироби вищого сорту; в) хоча б один виріб вищого сорту.

2.41. В читальному залі знаходиться 12 підручників з теорії ймовірностей, серед яких 3 в оправі. Бібліотекар взяв навмання чотири підручники. Знайти ймовірності того, що серед взятих підручників: а) тільки один в оправі; б) тільки два в оправі; в) хоча б один без оправи.

2.42. В ящику 10 конденсаторів, серед яких чотири браковані. Навмання витягують три конденсатори. Знайти ймовірності того, що серед витягнутих конденсаторів: а) один бракований; б) хоча б два браковані; в) хоча б один бракований.

2.43. В електричне коло послідовно увімкнені три елементи, що працюють незалежно один від одного. Імовірності відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють 0,2; 0,1 і 0,1. Знайти ймовірності того, що серед увімкнених елементів: а) тільки два елементи відмовлять в роботі; б) хоча б один елемент відмовить в роботі.

2.44. З аеропорту відправились три автобуси-експреси до трапів літаків. Імовірність своєчасного прибуття кожного автобуса дорівнює 0,9. Знайти ймовірності того, що вчасно прибуде: а) тільки один автобус; б) не менше двох автобусів; в) хоча б один автобус.

2.45. В урні 3 білих і 2 чорних кульки. Два гравці *A* і *B* по черзі виймають з урни по одній кульці, не повертаючи їх назад в урну. Виграє той, хто раніше вийме білу кульку. Знайти ймовірності того, що; а) виграє гравець *A*; б) виграє гравець *B*.

2.46. В двох партіях 80% і 85% доброякісних виробів, відповідно. Навмання з кожної партії відбирають по одному виробу. Знайти ймовірності того, що серед взятих виробів виявиться: а) один бракований; б) два бракованих; в) хоча б один доброякісний.

2.47. Два гравці *A* і *B* по черзі кидають монету. Виграє той, у кого раніше з'явиться герб. Першим кидає гравець *A*. Знайти ймовірності того, що: а) виграє гравець *A* до третього кидка; б) виграє гравець *B* не пізніше четвертого кидка.

2.48. В двох партіях 75% і 70% доброякісних виробів, відповідно. Навмання вибирають два вироби з першої і один виріб з другої партії. Знайти ймовірності того, що серед вибраних виробів: а) один бракований; б) два бракованих; в) хоча б один бракований.

2.49. В урні дві білі і три чорні кульки. Два гравці *A* і *B* по черзі витягують із урни по одній кульці, не повертаючи їх назад в урну. Виграє той, хто раніше вийме білу кульку. Знайти ймовірності того, що: а) виграє гравець *A*; б) виграє гравець *B*.

2.50. В двох ящиках містяться типові елементи заміни. В першому ящику 18 справних і 6 несправних, а в другому – 25 справних і 7 несправних елементів. З кожного ящика беруть навмання по одному елементу. Знайти ймовірності того, що взяті елементи: а) обидва справні; б) обидва несправні; в) різної якості.

***Задача* 3.** Користуючись формулою повної ймовірності і формулою Бейєса, знайти ймовірності випадкових подій.

3.1. На галантерейній фабриці перша машина виготовляє 25%, друга – 35%, третя – 40% всіх виробів. В їх продукції брак складає відповідно 5, 3 і 2%. Випадково вибраний виріб виявився дефектним. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений першою, другою, третьою машинами?

3.2. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по одній мішені, здійснюючи по одному пострілу. Імовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,4. Після стрільби в мішені було виявлено одне влучення. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив: а) перший стрілець; б) другий стрілець.

3.3. В альбомі 10 чистих і 4 погашених марок. Навмання витягують 2 марки (серед них можуть бути чисті і погашені), які погашають і повертають знову в альбом. Після цього знову навмання витягують три марки. Знайти ймовірність того, що ці марки погашені.

3.4. Радіолампа може належати до однієї з двох партій, причому кількість радіоламп в партіях відповідно відноситься як 8:5. Імовірності того, що кожна лампа пропрацює протягом деякого часу, дорівнюють відповідно 0,8 і 0,6. Визначити ймовірність того, що навмання взята радіолампа пропрацює протягом цього часу. Знайти ймовірність того, що радіолампа належить до першої партії, якщо відомо, що вона пропрацювала протягом цього часу.

3.5. В першій урні 9 білих і 5 чорних кульок, в другій – 6 білих і 4 чорних. З першої урни в другу перекладають три кульки, а потім з другої урни витягують одну кульку. Ця кулька виявилась білою. Знайти ймовірність того, що ця кулька належить першій урні.

3.6. Сигнал з пунктів B і C в пункт A передається з перешкодами. Імовірність спотворення сигналу з пункту B дорівнює 0,5, а з пункту C – 0,4. Кількість передач сигналу з цих пунктів відповідно відносяться як 6:8. Отриманий сигнал в пункті A виявився спотвореним. Знайти ймовірність того, що цей сигнал було передано з пункту C.

3.7. В альбомі філателіста 12 чистих і 8 погашених марок. Навмання з альбому витягують три марки (серед них можуть бути чисті і погашені), їх погашають і повертають знову в альбом. Після цього знову витягують 4 марки. Знайти ймовірність того, що всі ці марки непогашені.

3.8. В магазин надходять однотипні вироби з трьох заводів, при цьому перший завод постачає 60% загальної кількості, другий – 10%, третій – 30%. Серед виробів першого заводу 80% першосортні, другого – 90% і третього – 60%. Куплено один виріб, який виявився першосортним. Знайти ймовірність того, що цей виріб вироблено на другому заводі.

3.9. Два автомати випускають деталі, які надходять на спільний конвейєр. Імовірність виготовлення нестандартної деталі першим автоматом дорівнює 0,05, другим – 0,08. Продуктивність другого автомата в півтора рази більша, ніж першого. Навмання взята з конвейєра деталь виявилась нестандартною. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

3.10. В першому ящику знаходиться 15 справних і 6 несправних типових елементів заміни, в другому – 12 справних і 5 несправних. З першого ящика перекладають три елементи в другий, а потім з другого ящика витягують два елементи. Знайти ймовірність того, що ці витягнуті елементи виявляться справними.

3.11. В першій урні 5 білих і 6 чорних кульок, в другій – 4 білих і 5 чорних кульок. З першої урни в другу перекладають дві кульки і потім із другої урни витягують дві кульки. Знайти ймовірність того, що ці витягнуті кульки білі.

3.12. Сигнал з пунктів A, B і C в пункт D передається з перешкодами. Імовірність спотворення сигналу з пункту A дорівнює 0,3, з пункту B – 0,2, з пункту C – 0,25. Кількість передач сигналу з цих пунктів відповідно відносяться як 5:7:8. Знайти ймовірність того, що отриманий в пункті D сигнал буде спотвореним.

3.13. В альбомі філателіста 8 чистих і 5 погашених марок. Витягують три марки (серед них можуть бути чисті і погашені), їх погашають і повертають знову в альбом. Після цього знову витягують дві марки. Знайти ймовірність того, що ці витягнуті марки непогашені.

3.14. Електрична лампочка може належати до однієї із двох партій, для яких кількість лампочок відповідно відноситься як 8:12. Імовірність того, що лампочка пропрацює певну кількість годин, для першої партії дорівнює 0,8, для другої – 0,75. Визначити імовірність того, що лампочка пропрацює задане число годин.

3.15. В цеху 20 верстатів, серед яких десять марки A, шість марки B і чотири марки C. Імовірність того, що якість деталей виявиться відмінною для цих верстатів відповідно дорівнює 0,8, 0,9 і 0,7. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде відмінної якості.

3.16. Дві перфораторниці набили на різних перфораторах по комплекту перфокарт, причому перша перфораторниця набила в два рази більше перфокарт, ніж друга. Імовірність того, що перша перфораторниця допустить помилку, дорівнює 0,05, для другої 0,08. При звірянні перфокарт була виявлена помилка. Знайти ймовірність того, що помилилась перша перфораторниця.

3.17. В шкафу знаходяться однотипні прилади, з яких 9 нових і 3 вже були в експлуатації. Вибирають навмання два прилади і експлуатують протягом певного часу, після чого повертають в шкаф. Потім повторно вибирають навмання два прилади. Знайти ймовірність того, що обидва повторно вибрані прилади нові.

3.18. В кожному із двох ящиків знаходиться по 20 деталей, в першому з яких 15 стандартних деталей, а в другому – 12. Із навмання вибраного ящика навмання витягують одну деталь, яка виявилась стандартною. Деталь повертають в той же ящик і навмання знову з нього витягують деталь, яка знову виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталі витягувались з другого ящика.

3.19. В першому ящику знаходиться 14 деталей, серед яких 5 пофарбованих; в другому – 12, серед яких 7 пофарбованих. З першого ящика навмання перекладають дві деталі в другий. Після цього з другого ящика витягують одну деталь, яка виявилась пофарбованою. Знайти ймовірність того, що витягнута пофарбована деталь належить першому ящику.

3.20. В шкафу знаходяться однотипні прилади, з яких 9 нових і 7, що вже використовувались. Навмання беруть два прилади і експлуатують протягом певного часу, після чого повертають їх в шкаф. Після цього знову навмання беруть два прилади. Знайти ймовірність того, що обидва прилади, вибрані повторно, будуть нові.

3.21. В телевізійному ательє знаходиться чотири кінескопи. Імовірності того, що кінескоп витримає гарантійний термін роботи, відповідно дорівнюють 0,7; 0,8; 0,9 і 0,85. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп витримає гарантійний термін.

3.22. 95% виробів, що випускаються заводом, відповідають стандарту. Пропонується спрощена система контролю, яка признає придатною стандартну продукцію з імовірністю 0,98 і нестандартну продукцію з імовірністю 0,04. Знайти ймовірність того, що виріб, який був при контролі признаний стандартним, дійсно відповідає стандарту.

3.23. Телеграфне повідомлення із сигналів "крапка" і "тире", які передаються з перешкодами. Сигнал "крапка" спотворюється в 25% повідомлень, а сигнал тире спотворюється в 20% повідомлень. Число сигналів "крапка" і сигналів "тире" відноситься як 3:2. Знайти ймовірність того, що буде прийнятий той сигнал, який передавався, якщо прийнято сигнал "крапка".

3.24. Лічильник реєструє частинки трьох типів A, B і C. Імовірності появи цих частинок відповідно дорівнюють 0,3; 0,4 і 0,3. Частинки кожного із цих типів лічильник реєструє відповідно з ймовірностями 0,9; 0,4 і 0,5. Лічильник зареєстрував частинку. Знайти ймовірність того, що це була частинка типу C.

3.25. На базу надходять однотипні вироби з трьох підприємств, причому перше підприємство постачає 60%, друге – 20% і третє – 20% виробів. Серед виробів першого підприємства 70% першосортних, другого – 80%, третього – 60%. Куплено один виріб. Він виявився першосортним. Знайти ймовірність того, що куплений виріб випущений першим підприємством.

3.26. В першій урні 4 білих і 6 чорних кульок, а в другій – 6 білих і 3 чорних кульки. З першої урни в другу перекладають три кульки, а потім із другої урни витягують навмання одну кульку, яка виявилась чорною. Знайти ймовірність того, що ця чорна кулька належала другій урні.

3.27. Із 600 ламп 200 належать першій партії, 180 – другій і решта – третій. В першій партії 3%, в другій 2%, в третій 5% бракованих ламп. Навмання вибрана лампа виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця лампа відноситься до першої партії.

3.28. В магазин надходять однотипні вироби з трьох фабрик, причому перша фабрика постачає 40%, друга – 25%, третя – 35% всіх виробів. Серед виробів першої фабрики 60% першого сорту, другої – 75%, третьої – 80%. Куплено один виріб, який виявився першого сорту. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлено на другій фабриці?

3.29. В першій урні 1 біла і 2 чорні кульки, в другій – 100 білих і 100 чорних кульок. З другої урни навмання перекладають в першу одну кульку, а потім з першої урни витягують навмання одну кульку. Яка ймовірність того, що витягнута кулька раніше знаходилась в другій урні, якщо відомо, що вона біла?

3.30. В групі із 25 студентів, що прийшли складати іспит з теорії ймовірностей, є 8 відмінників, 9 студентів підготовлені добре, 5 – задовільно і 3 студенти погано підготовлені. Відмінники знають 25 питань програми, добре підготовлені – 20, задовільно підготовлені – 15 і погано підготовлені знають лише 10 питань. Визваний навмання студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність того, що: а) студент підготовлений добре; б) студент підготовлений задовільно.

3.31. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному відношенні 3:5:2, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0,07; 0,02 і 0,04. Прилад, що був придбаний науково-дослідним інститутом, виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей прилад виготовлений на другому заводі?

3.32. На вхід радіолокаційного пристрою з імовірністю 0,8 поступає суміш корисного сигналу з перешкодою, з імовірністю 0,2 – тільки перешкода. Якщо поступає корисний сигнал з перешкодою, то пристрій реєструє наявність сигналу з імовірністю 0,7; якщо ж поступає лише перешкода, то з імовірністю 0,3. Пристрій зареєстрував наявність сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

3.33. В першій урні 6 білих і 2 чорних кульок, в другій урні 4 білих і 4 чорних кульки. Із першої урни в другу перекладають навмання три кульки, а потім з другої урни витягують одну кульку. Знайти ймовірність того, що витягнута з другої урни кулька чорна.

3.34. Сигнал із пунктів A і B передається в пункт C з перешкодами. Імовірність спотворення сигналу із пункту A дорівнює 0,4, із пункту B – 0,3. Кількість передач з цих пунктів відноситься як 6:10. Знайти ймовірність того, що отриманий сигнал буде спотворений. Імовірніше з якого пункту передано спотворений сигнал?

3.35. Один із трьох стрільців викликається на лінію вогню і здійснює один постріл. Ціль уражена. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,3, для другого – 0,5, для третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що постріл було здійснено другим стрільцем.

3.36. Перша партія складається із 20 виробів, серед яких 4 браковані, друга з 24 виробів, серед яких 5 бракованих. З першої партії навмання беруть 6 виробів, а з другої – 4 вироби; ці вироби перемішують і утворюють нову партію. З цієї нової партії беруть навмання один виріб. Знайти ймовірність того, що цей виріб буде бракований.

3.37. На оптовій базі знаходяться верстати, виготовлені на двох заводах. Серед них 60% виготовлено першим заводом і 40% – другим. Відомо, що із кожних 100 верстатів, виготовлених першим заводом, 85 верстатів без дефектів, а із 100 верстатів, виготовлених на другому заводі, 75 верстатів без дефектів. Навмання беруть один верстат, він виявився без дефектів. Знайти ймовірність того, що цей верстат виготовлений на другому заводі.

3.38. Литво в болванках заготовляють в трьох цехах заводу. З першого цеху надходить 40%, з другого – 35%, з третього – 25%. При цьому продукція першого цеху має 5% браку, другого – 6%, третього – 2%. Знайти ймовірність того, що взята навмання болванка немає дефектів.

3.39. Серед восьми гвинтівок три гвинтівки пристріляні. Імовірність попадання з пристріляної гвинтівки дорівнює 0,8, а з непристріляної – 0,3. Пострілом з однієї навмання взятої гвинтівки ціль була уражена. Імовірніше з якої гвинтівки здійснено постріл?

3.40. Лічильник реєструє частинки трьох типів: α, β і $\wp$, ймовірності появи яких відповідно дорівнюють 0,4, 0,2 і 0,4. Частинки кожного із цих типів лічильник вловлює відповідно з імовірностями 0,7, 0,3 і 0,6. Лічильник відмітив частинку. Знайти ймовірність того, що це була частинка типу $\wp$.

3.41. Для контролю продукції із трьох партій навмання беруть одну деталь. Імовірність браку деталі з першої партії дорівнює 8%, з другої – 7%, з третьої – 3%. Взята деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця деталь взята з першої партії.

3.42. В групі спортсменів 15 лижників, 5 велосипедистів. Імовірність виконати кваліфікаційний норматив для лижника дорівнює 0,8, для велосипедиста – 0,7. Навмання вибирають двох спортсменів. Вони виконали кваліфікаційні нормативи. Знайти ймовірність того, що були вибрані лижник і велосипедист.

3.43. В магазин надходять телевізори від трьох заводів, причому перший завод постачає 30%, другий – 25% і третій 45% загальної кількості телевізорів. Серед телевізорів першого заводу 75% першосортних, другого – 70%, третього – 85%. Куплено один телевізор, який виявився першосортним. Знайти ймовірність того, що цей телевізор виготовлений на першому заводі.

3.44. В двох ящиках знаходяться типові елементів заміни (ТЕЗ). В першому ящику 15 справних ТЕЗ і 7 несправних; в другому – 25 справних і 3 несправних. З другого ящика в перший перекладають три ТЕЗ і потім з першого ящика витягують один ТЕЗ, який виявився справним. Знайти ймовірність того, що цей ТЕЗ містився в першому ящику.

3.45. В групі з 10 студентів, що прийшли на екзамен, три підготовлені відмінно, чотири – добре, два – посередньо і один погано. В екзаменаційних білетах є 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань програми, добре підготовлений – на 16, посередньо підготовлений – на 9 і погано підготовлений – на 5 питань. Визваний навмання студент відповів на всі три задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент був добре підготовлений.

3.46. В першій коробці міститься 15 діодів, серед яких 3 з дефектами; в другій – 12 діодів, серед яких 5 з дефектами. З першої коробки в другу навмання перекладають один діод, а потім з другої коробки витягують два діоди. Знайти ймовірність того, що обидва витягнуті діоди без дефектів.

3.47. В альбомі 6 чистих і 7 погашених марок. Витягують навмання три марки (серед яких можуть бути і непогашені і погашені), ці марки погашають і знову повертають в альбом. Після цього навмання витягують три марки. Знайти ймовірність того, що ці марки непогашені.

3.48. Противник може застосувати ракети трьох типів з ймовірностями відповідно 0,5; 0,2 і 0,3. Імовірність збити ракету першого типу дорівнює 0,7, другого – 0,9, третього – 0,6. Відомо, що противник застосував дві ракети одного типу. Знайти ймовірність того, що обидві ракети будуть збиті.

3.49. На спостережній станції встановлені три радіолокатори різних конструкцій. Імовірність виявлення цілі за допомогою першого локатора дорівнює 0,85, другого – 0,9, третього – 0,92. Спостерігач навмання вмикає один із локаторів, ціль була виявлена. Знайти ймовірність того, що ціль була виявлена першим локатором.

3.50. В майстерню ремонту телевізорів поступили дві партії радіоламп певного типу. В першій партії ламп в три рази більше, ніж в другій. Імовірність браку радіоламп з першої партії дорівнює 0,06, другої – 0,04. Навмання витягують одну лампу з навмання вибраної партії. Вона виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що ця лампа належить другій партії.

***Задача* 4.** Користуючись формулою Бернуллі, знайти ймовірності випадкових подій.

4.1. На стенді випробовують 7 приладів. Імовірність того, що протягом певного часу кожен із приладів витримає випробування, дорівнює 0,9. Знайти ймовірності того, що протягом цього часу відмовлять: а) тільки чотири прилади; б) хоча б два прилади.

4.2. Проростання зерен огірків складає 80%. Яка ймовірність того, що серед десяти посіяних зерен проростуть: а) тільки вісім; б) не менше двох.

4.3. Що ймовірніше виграти в рівносильного противника: а) три партії з чотирьох чи п'ять партій з восьми? б) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п'яти партій з восьми?

4.4. По цілі здійснюється п'ять пострілів. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,7. Для одержання заліку зі стрільби достатньо трьох влучень. Знайти ймовірність одержання заліку.

4.5. 10% виготовлених на заводі автоматичних верстатів вимагають додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що із шести верстатів вимагатимуть додаткового регулювання: а) не менше двох верстатів; б) менше чотирьох верстатів.

4.6. По літаку здійснюють одночасно чотири незалежні постріли. Імовірність попадання в літак при одному пострілі дорівнює 0,4. Щоб вивести літак із ладу, досить трьох влучень. Знайти імовірність того, що літак буде виведено з ладу.

4.7. Достатньою умовою складання колоквіуму є відповідь на два із трьох запитань, запропонованих викладачем студенту. Студент не знає 8 питань із 40 питань програми. Яка імовірність скласти колоквіум?

4.8. Технічна система складається із п'яти вузлів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність порушення режиму роботи протягом певного часу для кожного вузла дорівнює 0,3. Система виходить із ладу, якщо порушення настане не менше, ніж в чотирьох вузлах. Знайти ймовірність виходу із ладу системи протягом цього часу.

4.9. Імовірність отримати вдалий результат при проведенні складного хімічного експерименту дорівнює 0,4. Знайти найімовірніше число вдалих експериментів і його ймовірність, якщо проведено всього дев'ять незалежних експериментів.

4.10. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти імовірність того, що при п'яти пострілах буде хоча б два влучення в мішень.

4.11. Робітник обслуговує шість однотипних верстатів. Імовірність того, що верстат потребує уваги робітника протягом певного часу дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу буде: а) менше однієї потреби; б) від трьох до п'яти потреб.

4.12. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що не менше двох деталей будуть стандартними, якщо виготовлено шість деталей.

4.13. Прилад складається з восьми елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента протягом деякого часу дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу відмовить: а) не менше двох елементів; б) не менше трьох і не більше чотирьох елементів.

4.14. Імовірність появи випадкової події A в одному випробуванні експерименту дорівнює 0,7. Експеримент повторюють шість разів. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться рівно три рази. Чому дорівнює найімовірніше число появ події A і яка його імовірність?

4.15. Для стрільця, який виконує вправу в тирі, ймовірність влучення в "яблучко" при одному пострілі не залежить від результатів попередніх пострілів і дорівнює 0,25. Спортсмен здійснив п'ять пострілів. Знайти ймовірності того, що буде: а) рівно два влучення; б) не менше трьох влучень.

4.16. Імовірність відмови кожного приладу при випробуванні не залежить від відмов решти приладів і дорівнює 0,2. Випробувано 19 приладів. Знайти найімовірніше число приладів, що відмовлять в роботі, і його імовірність.

4.17. Десять освітлювальних лампочок для ялинки увімкнені послідовно. Імовірність для кожної лампочки перегоріти при підвищенні напруги в електромережі дорівнює 0,1. Знайти ймовірність розриву електричного кола при підвищенні напруги.

4.18. Пристрій складається з 6 незалежно працюючих елементів. Імовірності відмови кожного з елементів за певний час однакові і дорівнюють 0,2. Яка ймовірність того, що відмовить рівно два елементи. Знайти ймовірність відмови приладу, якщо для цього достатньо, щоб відмовили хоча б три елементи з шести.

4.19. На контроль поступає 20 деталей з цеху. Відомо, що 5% всіх деталей не задовольняє стандарт. Знайти найімовірніше число нестандартних деталей і його імовірність.

4.20. Автоматичний верстат виготовляє дві третіх числа деталей першого сорту і одну третю – другого сорту. Визначити найімовірніше число деталей першого сорту і найімовірніше число деталей другого сорту і знайти відповідні їм ймовірності, якщо виготовлено дев'ять деталей.

4.21. Імовірність для певного баскетболіста закинути м'яч в корзину дорівнює 0,3. Здійснено 15 кидків. Знайти найімовірніше число попадань і його ймовірність.

4.22. По каналу зв'язку передається 8 повідомлень, кожне з яких із ймовірністю 0,1 може бути спотвореним. Знайти імовірність того, що спотвореними будуть: а) рівно три повідомлення; б) не менше двох повідомлень.

4.23. В партії 10% нестандартних деталей. Навмання відбирають 6 деталей. Знайти найімовірніше число стандартних деталей і його імовірність.

4.24. При масовому виробництві напівпровідникових діодів ймовірність браку дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що із навмання взятих 15 діодів буде: а) рівно чотири бракованих; б) не менше двох бракованих.

4.25. Імовірність приймання радіосигналу дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що при восьмикратному передаванні сигнал буде прийнято: а) рівно три рази; б) не менше двох разів?

4.26. В партії із 40 деталей 10 нестандартних. Навмання відбирають 8 деталей. Знайти ймовірність того, що серед відібраних рівно три стандартних деталей. Чому дорівнює найімовірніше число нестандартних деталей і яка його імовірність?

4.27. Батарея здійснила 9 пострілів по цілі. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,4. Яке найімовірніше число влучень і чому дорівнює його імовірність?

4.28. Імовірність виготовлення виробу відмінної якості дорівнює 0,8. Виготовлено 9 виробів. Чому дорівнює найімовірніше число виробів відмінної якості і його ймовірність?

4.29. Пристрій складається з шести вузлів, кожен з яких незалежно один від одного може вийти з ладу із ймовірністю 0,3. Якщо виходить з ладу не менше трьох вузлів, то пристрій не може працювати. Якщо виходить з ладу один або два вузли, то пристрій працює, але зі зниженою ефективністю. Яка імовірність того, що пристрій може працювати?

4.30. Схожість насіння деякої культури складає 80%. Навмання відбирають 14 зерен. Знайти найімовірніше число зерен, що проростуть, і його імовірність.

4.31. Монету кидають 10 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде не менше двох разів. Яке найімовірніше число випадань герба і яка його імовірність?

4.32. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,8. Виготовлено 9 деталей. Знайти ймовірність того, що не менше двох деталей будуть стандартними. Яке найімовірніше число стандартних деталей і яка його імовірність?

4.33. Снайпер здійснює 9 пострілів по цілі. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що буде тільки 4 влучення. Яке найімовірніше число влучень і яка його імовірність?

4.34. В партії, що складається з 20 виробів, чотири вироби браковані. Навмання відбирають 7 виробів для перевірки якості. Знайти ймовірність того, що серед відібраних буде: а) рівно два бракованих вироби; б) не менше двох бракованих виробів.

4.35. По цілі здійснено сім пострілів. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти найімовірніше число влучень в ціль і його ймовірність.

4.36. В майстерні знаходиться 8 двигунів. При відповідному режимі роботи ймовірність того, що двигун в даний момент працює з повним навантаженням, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в даний момент з повним навантаженням працює: а) тільки три двигуни; б) не менше двох двигунів.

4.37. Що ймовірніше виграти в рівносильного противника: не менше трьох партій з чотирьох, чи не менше п'яти партій з восьми?

4.38. Монету кидають 8 разів. Яка ймовірність того, що вона випаде гербом: а) тільки чотири рази; б) не менше трьох разів.

4.39. Схожість зерен деякої рослини становить 80%. Яка імовірність того, що із 20 посіяних зерен проростуть: а) тільки 15 зерен; б) не менше двох.

4.40. В урні 10 білих і 40 чорних кульок. Витягують підряд 14 кульок, фіксуючи колір витягнутої кульки, і повертають кульку знову в урну. Яке найімовірніше число появ білої кульки і яка його ймовірність?

4.41. Імовірність влучення стрільцем в ціль дорівнює 0,7. Здійснюється 9 пострілів. Знайти ймовірність того, що буде рівно 5 влучень. Яке найімовірніше число влучень в ціль і яка його імовірність?

4.42. Робітник обслуговує 5 однотипних верстатів. Імовірність того, що верстат вимагатиме уваги робітника протягом певного часу, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що протягом цього часу вимагатимуть уваги робітника: а) тільки три верстати; б) не менше двох верстатів.

4.43. В сім'ї п'ятеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) дві дівчинки; б) не менше двох хлопчиків.

4.44. Імовірність збою в роботі телефонної станції в кожному з дев'яти незалежних випробувань дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що буде: а) тільки п'ять збоїв; б) не менше двох збоїв.

4.45. Імовірність виграшу в лотерею на один білет дорівнює 0,3. Куплено 6 білетів. Знайти ймовірність того, що буде тільки три виграші. Чому дорівнює найімовірніше число виграшних білетів і яка його ймовірність?

4.46. Імовірність появи деякої події в кожному із 7 незалежних випробувань дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що ця подія настане тільки два рази. Яке найімовірніше число появ цієї події і чому дорівнює його ймовірність?

4.47. При передаванні повідомлення ймовірність спотворення одного знаку дорівнює 0,1. Передано 8 знаків. Знайти ймовірність того, що буде спотворено: а) тільки три повідомлення; б) не менше двох повідомлень.

4.48. Для прядіння змішують порівну білу і пофарбовану бавовну. Яка ймовірність того, що серед семи навмання взятих волокон суміші буде не менше трьох пофарбованих. Чому дорівнює найімовірніше число пофарбованих волокон і яка його ймовірність?

4.49. Схожість зерен нового сорту пшениці складає 90%. Яка ймовірність того, що із восьми посіяних зерен проростуть рівно шість зерен. Чому дорівнює найімовірніше число зерен, що проростуть і яка його ймовірність?

4.50. В кожному з чотирьох ящиків по 5 білих і по 15 чорних кульок. З кожного ящика витягують по одній кульці. Знайти ймовірність того, що буде витягнуто дві білі і дві чорні кульки. Чому дорівнює найімовірніше число витягнутих чорних кульок і яка його ймовірність?

***Задача* 5.** Для вказаної дискретної випадкової величини X: а) скласти ряд розподілу; б) побудувати многокутник розподілу; в) скласти функцію розподілу і побудувати її графік; г) знайти математичне сподівання m_X, дисперсію D_X і середнє квадратне відхилення σ_X; д) знайти ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях ця випадкова величина тільки m разів попаде на відрізок $[a; b.]$

5.1. Проводиться випробування на надійність шести приладів. Кожний наступний прилад випробовується в тому випадку, якщо попередній прилад виявився надійним. Імовірність витримати випробування для кожного приладу дорівнює 0,7. Нехай X – число випробувань ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.2. В коробці знаходиться 7 електричних лампочок, серед яких 2 мають дефекти. Навмання витягують три лампочки. Нехай X – число витягнутих лампочок, що не мають дефектів ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.3. Проводять чотири незалежних випробувань експерименту, в кожному з яких випадкова подія A настане з імовірністю 0,6. Нехай X – число появ події A ($n = 5$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.4. В коробці вісім радіоламп, серед яких три з дефектом. Навмання беруть чотири радіолампи і вставляють в чотири патрони. Нехай X – число радіоламп, що будуть працювати ($n = 5$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 4$).

5.5. Робітник обслуговує п'ять верстатів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що протягом певного часу кожен із верстатів не буде потребувати уваги робітника, дорівнює 0,7. Нехай X – число верстатів, що не потребують уваги робітника ($n = 3$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.6. В коробці сім конденсаторів, серед яких чотири з дефектами. Навмання беруть чотири радіолампи і вставляють в чотири патрони. X – число радіоламп, що будуть працювати ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.7. В партії із десяти деталей сім стандартних. Навмання відбирають три деталі. Нехай X – число стандартних деталей серед відібраних ($n = 6$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.8. Пристрій складається з п'яти елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного елемента в одному випробуванні дорівнює 0,1. Нехай X – число елементів, що відмовлять в роботі ($n = 4$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.9. В коробці дев'ять електричних ламп, серед яких чотири з дефектами. Навмання беруть три лампи і вставляють в три патрони. Нехай X – число ламп, що будуть працювати ($n = 5$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 3$).

5.10. З партії, що містить сто виробів, серед яких десять бракованих, вибирають п'ять виробів для перевірки їх якості. Нехай X – число бракованих виробів вибірки ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 5$).

5.11. В партії з восьми деталей шість стандартних, навмання вибирають чотири деталі. Нехай X – число стандартних деталей серед відібраних ($n = 3$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 3$).

5.12. Стрілець здійснює чотири постріли по мішені. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,6. Нехай X – число влучень в мішень ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.13. В коробці сім радіоламп, серед яких дві браковані. Навмання беруть чотири радіолампи і вставляють в чотири патрони. Нехай X – число радіоламп, що будуть працювати ($n = 4$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.14. В коробці знаходяться конденсатори, з яких 10% бракованих. Навмання відбирають п'ять конденсаторів. Нехай X – число бракованих конденсаторів ($n = 5$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.15. В коробці знаходяться шість виробів, серед яких один бракований. З коробки виймають вироби один за одним до тих пір, поки не буде витягнуто бракований виріб. Нехай X – число витягнутих виробів ($n = 3$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 5$).

5.16. З урни , що містить чотири білих і три чорних кульки, послідовно витягують кульки, причому операція витягування продовжується до появи білої кульки. Нехай X – число витягнутих чорних кульок ($n = 3$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.17. Стрілець, який має чотири патрони, стріляє по мішені до першого промаху. Нехай X – число пострілів по мішені ($n = 4$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.18. На шляху руху автомобіля чотири світлофори, кожен з яких з імовірністю 0,7 дозволяє автомобілю подальший рух. Нехай X – число світлофорів, що проїде автомобіль без зупинок ($n = 3$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.19. З урни, що містить чотири білих і три чорних кульки, навмання витягують чотири кульки. Нехай X – число білих кульок серед витягнутих ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.20. Проводяться послідовні випробування на надійність п'яти приладів. Імовірність витримати випробування для кожного приладу дорівнює 0,6. Кожен наступний прилад випробовується в тому випадку, коли попередній прилад виявився надійним . Нехай X – число випробувань, на якому завершується перевірка ($n = 5$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.21. В ящику 6 деталей, серед яких три пофарбованих. Навмання витягують три деталі. Нехай X – число пофарбованих деталей ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 3$).

5.22. В партії з шести телефонних апаратів є два несправних. Навмання взято чотири апарати. Нехай X – число несправних апаратів серед відібраних ($n = 5$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.23. Стрілець, що має чотири патрони, стріляє по цілі до першого промаху. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,6. Нехай X – число здійснених пострілів ($n = 4$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.24. З коробки, що містить 7 деталей, з яких три з дефектами, витягують три деталі. Нехай X – число деталей з дефектами серед витягнутих ($n = 5$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.25. В комірці ЕОМ записується п'ятирозрядне двійкове число. Кожен знак цього числа незалежно від інших приймає з однаковою імовірністю значення "0" або "1". Нехай X – число знаків "0" запису цього числа ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.26. Мисливець, що має п'ять патронів, стріляє по дикій птиці до першого влучення (або поки не використає всі патрони). Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6. Нехай X – число використаних патронів ($n = 4$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.27. Є п'ять заготовок для однієї і тієї ж деталі. Імовірність виготовлення придатної деталі з кожної заготовки дорівнює 0,8. Нехай X – число використаних заготовок ($n = 3$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.28. В коробці міститься шість електричних ламп, серед яких дві з дефектами. Навмання витягують три лампи. Нехай X – число бездефектних ламп серед витягнутих ($n = 4$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.29. В урні 4 білих і 2 чорних кульок. Навмання витягують три кульки. Нехай X – число білих кульок ($n = 5$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 3$).

5.30. Пристрій складається з п'яти елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність виходу із ладу кожного елемента дорівнює 0,2. Нехай X – число елементів, що вийдуть з ладу ($n = 4$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.31. Проводиться випробування на надійність шести вольтметрів. Кожний наступний вольтметр випробовується в тому випадку, якщо попередній вольтметр виявиться надійним. Імовірність витримати випробування для кожного приладу дорівнює 0,8. Нехай X – число випробувань ($n = 5$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.32. В коробці знаходиться п'ять діодів, серед яких один бракований. З коробки витягують діоди один за одним до тих пір, поки не буде витягнуто бракований діод. Нехай X – число витягнутих діодів ($n = 4$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.33. В ящику знаходиться шість електричних ламп, серед яких дві мають дефекти. Навмання витягують три лампи. Нехай X – число витягнутих ламп без дефектів ($n = 5$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.34. Із урни, що містить чотири білих і три чорних кульки, послідовно витягують одну за одною кульки до появи білої кульки. Нехай X – число витягнутих чорних кульок ($n = 4$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.35. Проводиться п'ять незалежних випробувань експерименту, в кожному з яких випадкова подія A настає з імовірністю 0,6. Нехай X – число появ події A ($n = 5$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.36. В коробці знаходиться шість мікроскопів, серед яких один бракований. Навмання витягують один за одним прилади до тих пір, поки не буде витягнуто бракований. Нехай X – число витягнутих мікроскопів ($n = 5$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.37. З урни , що містить три білих і чотири чорних кульки, навмання витягують чотири кульки. Нехай X – число витягнутих чорних кульок ($n = 5$; $m = 4$; $a = 2$; $b = 4$).

5.38. В ящику міститься п'ять однакових виробів, серед яких один бракований. З ящика витягують вироби один за одним до тих пір, поки не буде витягнуто бракований виріб. Нехай X – число витягнутих виробів ($n = 4$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 4$).

5.39. Проводиться послідовне випробування на надійність п'яти приладів. Кожен наступний прилад випробовується в тому випадку, коли попередній виявиться надійним. Імовірність витримати випробування для кожного приладу дорівнює 0,7. Нехай X – число випробувань ($n = 5$; $m = 4$; $a = 2$; $b = 4$).

5.40. В ящику міститься вісім деталей, серед яких три пофарбованих. Навмання витягують чотири деталі. Нехай X – число пофарбованих деталей серед витягнутих ($n = 4$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.41. Робітник обслуговує 6 верстатів. Імовірність того, що протягом певного часу кожен з верстатів не вимагатиме уваги робітника протягом цього часу дорівнює 0,8. Нехай X – число верстатів, що не вимагатимуть уваги робітника ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.42. В електричне коло послідовно включено чотири елементи, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови кожного з них дорівнює 0,2. Нехай X – число елементів, що відмовлять в роботі ($n = 5$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.43. В коробці знаходиться п'ять електричних лампочок, кожна з них з імовірністю 0,2 має дефект. Лампочка вставляється в патрон і вмикається струм. При вмиканні струму дефектна лампочка одразу ж перегорає, після чого замінюється іншою. Нехай X – число лампочок, що будуть випробувані ($n = 4$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.44. В комірці ЕОМ записують чотирирозрядне двійкове число. Кожен знак цього числа незалежно від інших приймає з однаковою імовірністю значення "0" або "1". Нехай X – число знаків " 1" запису цього числа ($n = 4$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 3$).

5.45. Імовірність перемикання передач автомобіля дорівнює 0,3. Зроблено чотири заїзди автомобіля, в кожному з яких може виконуватись одне переключення. Нехай X – число перемикань передач ($n = 5$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 4$).

5.46. Проводиться випробування на надійність шести амперметрів. Кожен наступний амперметр випробовується в тому випадку, коли попередній прилад виявився надійним. Імовірність витримати випробовування для кожного амперметра дорівнює 0,6 Нехай X – число випробовувань ($n = 5$; $m = 2$; $a = 2$; $b = 5$).

5.47. В ящику міститься шість деталей, серед яких одна бракована. Щоб виявити її, вибирають навмання деталь одну за одною, кожну деталь перевіряють. Нехай X – число перевірених деталей ($n = 4$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 4$).

5.48. В коробці міститься сім виробів, серед яких три бракованих. Навмання витягують чотири вироби. Нехай X – число витягнутих бракованих виробів ($n = 5$; $m = 3$; $a = 1$; $b = 3$).

5.49. В партії 10 % виробів з дефектами. Навмання відбирають п'ять виробів. Нехай X – число виробів з дефектами ($n = 5$; $m = 2$; $a = 1$; $b = 4$).

5.50. На шляху руху автомобіля шість світлофорів, кожен з яких або дозволяє, або забороняє подальший рух автомобіля з імовірністю 0,5. Нехай X – число світлофорів на шляху руху автомобіля до першої зупинки ($n = 5$; $m = 3$; $a = 2$; $b = 5$).

***Задача* 6.** Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$ або щільністю розподілу ймовірностей $p(x)$. Знайти: а) коефіцієнт a; б) щільність розподілу ймовірностей $p(x)$ або функцію розподілу $F(x)$; в) ймовірність попадання на заданий інтервал; г) математичне сподівання

m_x, дисперсію D_x і середнє квадратичне відхилення σ_x. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $p(x)$.

6.1. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при}\, x<0,\\ a\sin 2x \ \text{при} \ 0\le x\le \pi/4,\\ 1 \ \text{при}\, x>\pi/4.\end{cases}$

$P(X\ge \pi/6)-?$

$p(x)=\begin{cases}0 \ \text{при}\, x<0,\\ a x^2 \ \text{при} \ 0\le x\le 1\\ \dfrac{3}{2}(2-x)^2 \ \text{при} \ 1\le x\le 2,\\ 0 \ \text{при}\, x>2.\end{cases}$

$P(X\ge 1{,}5)-?$

6.2. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при}\, x<2,\\ a(x-2)^2 \ \text{при} \ 2\le x\le 4,\\ 1 \ \text{при}\, x>4.\end{cases}$

$P(X<2{,}5)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<0,\\ ae^{-2x} \ \text{при} \ x\ge 0.\end{cases}$

$P(X\ge 1)=?$

6.3. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<0,\\ a\sin 3x \,\text{при} \ 0\le x\le \pi/6,\\ 1 \ \text{при} \ x>\pi/6.\end{cases}$

$P(X<\pi/12)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<0,\\ a\left(3x-x^2\right) \text{при} \ 0\le x\le 3,\\ 0 \ \text{при} \ x>3.\end{cases}$

$P(X\ge 1)=?$

6.4. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<1,\\ a\left(x^2-x\right) \text{при} \ 1\le x\le 2,\\ 1 \ \text{при} \ x>2.\end{cases}$

$P(X<1{,}5)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<0,\\ a\cos 2x \ \text{при} \ 0\le x\le \pi/4,\\ 0 \ \text{при} \ x>\pi/4.\end{cases}$

$P(X<\pi/6)=?$

6.5. $F(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x<0,\\ ax^2 \ \text{при} \ 0\le x<1,\\ ax \ \text{при} \ 1\le x\le 4,\\ 1 \ \text{при} \ x>4.\end{cases}$

$P(X<3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \ \text{при} \ x\le 0,\\ a\cos x \ \text{при} \ 0<x\le \pi/3,\\ 0 \ \text{при} \ x>\pi/3.\end{cases}$

$P(X>\pi/6)=?$

6.6. $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{a}{x^3}\ \text{при}\ x\ge 2,\\ 0\ \text{при}\ x<2.\end{cases}$ $P(X\le 4)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ a\sin x\ \text{при}\ 0\le x\le \pi/3,\\ 0\ \text{при}\ x>\pi/3.\end{cases}$ $P(\pi/6<X<\pi)=?$

6.7. $F(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ a\sin 2x\ \text{при}\ 0\le x\le \pi/4,\\ 1\ \text{при}\ x>\pi/4.\end{cases}$ $P(X\ge \pi/12)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<1,\\ a(2x-1)\ \text{при}\ 1\le x\le 2,\\ 0\ \text{при}\ x>2.\end{cases}$ $P(X<1{,}5)=?$

6.8. $F(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<3\pi/4,\\ a\cos 2x\ \text{при}\ (3/4)\pi\le x\le \pi,\\ 1\ \text{при}\ x>\pi.\end{cases}$ $P(X)>\pi/2)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<-1,\\ a(x+1)\ \text{при}\ -1\le x\le 2,\\ 0\ \text{при}\ x>2.\end{cases}$ $P(X\le 1)=?$

6.9. $F(x)=\begin{cases}1-a/x^3\ \text{при}\ x\ge 3,\\ 0\ \text{при}\ x<3.\end{cases}$ $P(X\le 5)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ a\cos 2x\ \text{при}\ 0\le x\le \pi/4,\\ 0\ \text{при}\ x>\pi/4.\end{cases}$ $P(X>\pi/6)=?$

6.10. $F(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<-\pi/2,\\ a\cos x\ \text{при}\ -\pi/2\le x\le 0,\\ 1\ \text{при}\ x>0.\end{cases}$ $P(X>-\pi/3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ 6x+a\ \text{при}\ 0\le x\le 1/3,\\ 0\ \text{при}\ x>1/3.\end{cases}$ $P(X<1/4)=?$

6.11. $F(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ a(2-x)^2+1\ \text{при}\ 0\le x\le 2,\\ 1\ \text{при}\ x>2.\end{cases}$ $P(X\ge 1)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<-\pi/2,\\ a\sin 2x\ \text{при}\ -\pi/2\le x\le 0,\\ 0\ \text{при}\ x>0.\end{cases}$ $P(X<-\pi/4)=?$

6.12. $F(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ 3x^2+ax\ \text{при}\ 0\le x\le 1/3,\\ 1\ \text{при}\ x>1/3.\end{cases}$ $P(X<1/6)=?$

$p(x)=\begin{cases}0\ \text{при}\ x<0,\\ ae^{-3x}\ \text{при}\ x\ge 0.\end{cases}$ $P(X>2)=?$

6.13. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ a(x-1)^2 \text{ при } 1\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ a/x^4 \text{ при } x\ge 1.\end{cases}$

$P(X<1{,}5)=?$ $P(X\le 3)=?$

6.14. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-2,\\ a(x^2+x) \text{ при } -2\le x\le -1,\\ 1 \text{ при } x>-1.\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ae^{-3x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$

$P(X<-1{,}5)=?$ $P(X\ge 1)=?$

6.15. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-\pi/4,\\ a\cos 2x \text{ при } -\pi/4\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax+2 \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

$P(X<-\pi/6)=?$ $P\left(X>\frac{1}{2}\right)=?$

6.16. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax^2-x \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 2\cos 2x \text{ при } 0\le x\le \pi/4,\\ 0 \text{ при } x>\pi/4.\end{cases}$

$P(X\le 1)=?$ $P(X>\pi/6)=?$

6.17. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<1,\\ a(x-1)^2 \text{ при } 1\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ae^{-4x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$

$P(X<1{,}5)=?$ $P(X\ge 2)=?$

6.18. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 1-e^{-ax} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$ $p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ a(2-x) \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$

$P(X\le 2)=?$ $P(X>1)=?$

6.19. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<0,\\ a\sin\dfrac{x}{3} \;\; при \;\; 0\le x\le \pi/2,\\ 1 \;\; при \;\; x>\pi/2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<0,\\ a(4-x) \;\; при \;\; 0\le x\le 4,\\ 0 \;\; при \;\; x>4.\end{cases}$

$P(X>\pi/4)=?$ $\quad P(X\le 3)=?$

6.20. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1,\\ a(x^2-x) \;\; при \;\; 1\le x\le 2,\\ 1 \;\; при \;\; x>2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-\pi/2,\\ a\sin 2x \;\; при \;\; -\pi/2\le x\le 0,\\ 0 \;\; при \;\; x>0.\end{cases}$

$P(X>1{,}5)=?$ $\quad P(X<-\pi/4)=?$

6.21. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<2,\\ 1-a/x^3 \;\; при \;\; x\ge 2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1,\\ a(2x-1) \;\; при \;\; 1\le x\le 2,\\ 0 \;\; при \;\; x>2.\end{cases}$

$P(X\le 4)=?$ $\quad P(X>1{,}5)=?$

6.22. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<0,\\ 1-e^{-2ax} \;\; при \;\; x\ge 0.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<0,\\ -2x+a \;\; при \;\; 0\le x\le 1,\\ 0 \;\; при \;\; x>1.\end{cases}$

$P(X<2)=?$ $\quad P(X<0{,}5)=?$

6.23. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<2,\\ 1-a/x^3 \;\; при \;\; x\ge 2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<0,\\ (2/a)(1-x) \;\; при \;\; 0\le x\le 1,\\ 0 \;\; при \;\; x>1.\end{cases}$

$P(X>4)=?$ $\quad P(X\le 0{,}5)=?$

6.24. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-1,\\ a(x+1)^2 \;\; при \;\; -1\le x\le 2,\\ 1 \;\; при \;\; x>2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<0,\\ 2a\cos 2x \;\; при \;\; 0\le x\le \pi/4,\\ 0 \;\; при \;\; x>\pi/4.\end{cases}$

$P(X<1)=?$ $\quad P(X<\pi/6)=?$

6.25. $F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<-\pi,\\ a(1+\cos x) \;\; при \;\; -\pi\le x\le 0,\\ 1 \;\; при \;\; x>0.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x<1,\\ a(2x-1) \;\; при \;\; 1\le x\le 3,\\ 0 \;\; при \;\; x>3.\end{cases}$

$P(X > -\pi/2) = ?$ $\qquad$ $P(X \le 2) = ?$

6.26. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ a\cos 2x \text{ при } 0 \le x \le \pi/4, \\ 1 \text{ при } x > \pi/4. \end{cases}$ $\quad$ $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 2, \\ a/x^4 \text{ при } x \ge 2. \end{cases}$

$P(X \ge \pi/6) = ?$ $\qquad$ $P(X < 4) = ?$

6.27. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ (2/a)x - x^2/4 \text{ при } 0 \le x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -\pi/2, \\ 2a\sin x \text{ при } -\pi/2 \le x \le 0, \\ 0 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

$P(X \ge 1) = ?$ $\qquad$ $P(X < -\pi/3) = ?$

6.28. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -\pi/4, \\ a\sin 2x \text{ при } 0 \le x \le \pi/4, \\ 1 \text{ при } x > 0. \end{cases}$ $\quad$ $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 2\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 0 \text{ при } x > 1. \end{cases}$

$P(X \ge -\pi/6) = ?$ $\qquad$ $P(X < 0{,}5) = ?$

6.29. $F(x) = \begin{cases} (1/2)e^{-ax} \text{ при } x \le 0, \\ 1 - (1/2)e^{-ax} \text{ при } x > 0. \end{cases}$ $\quad$ $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ ax^2 \text{ при } 0 \le x < 1, \\ a(2-x)^2 \text{ при } 1 \le x < 2, \\ 0 \text{ при } x \ge 2. \end{cases}$

$P(X < 2) = ?$ $\qquad$ $P(X \ge 0{,}5) = ?$

6.30. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -4, \\ a(x+4)^2 \text{ при } -4 \le x \le -3, \\ 1 \text{ при } x > -3. \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -\pi/6, \\ a\cos 3x \text{ при } -\pi/6 \le x \le 0, \\ 0 \text{ при } x > 0. \end{cases}$

$P(X < -3{,}5) = ?$ $\qquad$ $P(X > -\pi/8) = ?$

6.31. $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ x(2 - x/a)/a \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 1 \text{ при } x > 2. \end{cases}$ $p(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ ae^{-5x} \text{ при } x \ge 0. \end{cases}$

$P(X \ge 1) = ?$ $\qquad$ $P(X \le 3) = ?$

6.32. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2,\\ 1-\left(\dfrac{a}{x}\right)^3 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 2-x \text{ при } 1<x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$

$P(X\le 1)=?$ $\quad P(X\ge 0{,}5)=?$

6.33. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<3,\\ a(x-3)^2/2 \text{ при } 3\le x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$ $\quad p(x)=ae^{|x|} \text{ при } -\infty<x<+\infty.$

$P(X>3{,}5)=?$ $\quad P(X<2)=?$

6.34. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-\pi/3,\\ 3a\cos x \text{ при } -\pi/3\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ (1+x/a)/a \text{ при } -1\le x<0,\\ (1-x/a)/a \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 0 \text{ при } x>1.\end{cases}$

$P(X<-\pi/4)=?$ $\quad P(X\ge -0{,}5)=?$

6.35. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-2,\\ ax^2+x \text{ при } -2\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$ $\quad p(x)=ae^{-2|x|} \text{ при} -\infty<x<+\infty,$

$P(X\ge -1)=?$ $\quad P(X<4)=?$

6.36. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-3\pi/4,\\ a\cos 2x \text{ при} -3\pi/4\le x\le -\pi/2,\\ 1 \text{ при } x>-\pi/2.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-3,\\ a(x+3) \text{ при } -3\le x\le -1,\\ 0 \text{ при } x>-1.\end{cases}$

$P(X<-2\pi/3)=?$ $\quad P(X>-2)=?$

6.37. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 2x^2+ax \text{ при } 0\le x\le 1,\\ 1 \text{ при } x>1.\end{cases}$ $\quad p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-\pi,\\ a\sin x/2 \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 0 \text{ при } x>0.\end{cases}$

$P(X>0{,}5)=?$ $\quad P(X<-2\pi/3)=?$

6.38. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/2,\\ a\cos x \text{ при } \pi/2\le x\le\pi,\\ 1 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$ $P(X>2\pi/3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ a(4-x) \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $P(X<1)=?$

6.39. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ a(x+1)^2 \text{ при } -1\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $P(X>1)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/6,\\ 2a\sin 3x \text{ при } \pi/6\le x\le\pi/3,\\ 0 \text{ при } x>\pi/3.\end{cases}$ $P(X\le\pi/4)=?$

6.40. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi,\\ a\cos(x/2) \text{ при } \pi\le x\le 2\pi,\\ 1 \text{ при } x>2\pi.\end{cases}$ $P(X<3\pi/2)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ ae^{-3x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$ $P(X>2)=?$

6.41. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ 1-ae^{-5x} \text{ при } x\ge 0.\end{cases}$ $P(X>3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<3\pi/4,\\ a\sin 2x \text{ при } 3\pi/4\le x\le\pi,\\ 0 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$ $P(X<5\pi/6)=?$

6.42. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/4,\\ a\cos 2x \text{ при } \pi/4\le x\le\pi/2,\\ 1 \text{ при } x>\pi/2.\end{cases}$ $P(X>\pi/3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-4,\\ ax+2 \text{ при } -4\le x\le -2,\\ 0 \text{ при } x>-2.\end{cases}$ $P(X<-3)=?$

6.43. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<2,\\ a(x-2)^2 \text{ при } 2\le x\le 4,\\ 1 \text{ при } x>4.\end{cases}$ $P(X\ge 3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/4,\\ 2a\sin 2x \text{ при } \pi/4\le x\le\pi/2,\\ 0 \text{ при } x>\pi/2.\end{cases}$ $P(X<\pi/3)=?$

6.44. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-\pi,\\ a\cos(x/2) \text{ при } -\pi\le x\le 0,\\ 1 \text{ при } x>0.\end{cases}$ $P(X<-2\pi/3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-1,\\ 2a(x+1) \text{ при } -1\le x\le 0,\\ 0 \text{ при } x>0.\end{cases}$ $P(X>-0{,}5)=?$

6.45. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<3,\\ a(x-3)^2 \text{ при } 3\le x\le 5,\\ 1 \text{ при } x>5.\end{cases}$ $P(X\ge 4)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-\pi/6,\\ a\sin 3x \text{ при } -\pi/6\le x\le 0,\\ 0 \text{ при } x>0.\end{cases}$ $P(X<-\pi/4)=?$

6.46. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/6,\\ a\cos 3x \text{ при } \pi/6\le x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 1 \text{ при } x>\pi/3.\end{cases}$ $P(X>\pi/4)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax+3 \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 0 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $P(X<1)=?$

6.47. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-2,\\ (1+x/a)^2/a \text{ при } -2\le x\le 0,\\ (1-x/a)^2/a \text{ при } 0\le x\le 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$ $P(X>1)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-3\pi/4,\\ a\sin 2x \text{ при} -3\pi/4\le x\le -\pi/2,\\ 0 \text{ при } x>-\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $P(X<-2\pi/3)=?$

6.48. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/2,\\ a\cos x \text{ при } \pi/2\le x\le \pi,\\ 1 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$ $P(X>2\pi/3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-2,\\ a(x+1) \text{ при } -2\le x\le 0,\\ 0 \text{ при } a>0.\end{cases}$ $P(X<-1)=?$

6.49. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ 1-ae^{-4x} \text{ при } x>0.\end{cases}$ $P(X>3)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\pi/2,\\ 2a\sin x \text{ при } \pi/2\le x\le \pi,\\ 0 \text{ при } x>\pi.\end{cases}$ $P(X<2\pi/3)=?$

6.50. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<-3,\\ (1+x/a)^2/a \text{ при } -3\le x\le 0,\\ (1-x/a)^2/a \text{ при } 0<x\le 3,\\ 1 \text{ при } x>3.\end{cases}$ $P(X\ge -1)=?$

$p(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0,\\ ae^{-4x} \text{ при } x>0.\end{cases}$ $P(X<2)=?$

Додаток А

Таблиця А.1 — Значення функції Лапласа $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-t^2/2}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295
1,6	44520	44630	44738	41845	44950	45053	45154	45254	45352
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46326	46995
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124
2,2	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537
2,1	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Додаток Б

Таблиця Б.1 — Значення t_β, що задовольняють рівність $\int_{-t_\beta}^{t_\beta} S_{n\text{-}1}(t)dt = \beta$ в залежності від β і $n-1$

$n-1$	β					
	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,440	1,943	2,45	3,14	4,71	5,96
7	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,314	1,703	2 ,05	2,47	2,77	3,69
28	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
50	1,300	1,678	2,01	2,41	2,68	3,50
60	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37
∞	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Додаток В

Таблиця В.1 — Значення χ^2 в залежності від числа степенів свободи r і рівня значущості α

r	α					
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6

Література

1. Гурский Е.И. Теория вероятностей с елементами математической статистики. – М.: Высшая школа, 1971.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Физматгиз, 1962.
4. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.
5. Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища школа, 1994.
6. Гурский Е.И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Минск: Высшая школа, 1984.
7. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1979.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983.

Навчальне видання

Віталій Іванович Клочко
Василь Парфенович Литвинюк

Елементи теорії ймовірностей

і математичної статистики

Навчальний посібник

Оригінал- макет підготовлено авторами
Редактор О.Д. Скалоцька

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 8.06.2007 р.
Формат 29,7х42 ¼
Друк різографічний
Гарнітура Times New Roman
Папір офсетний
Ум. друк. арк. 6.96

Тираж 75 прим.

Зам. № 2007-095

Відруковано в комп'ютерному інформаційному-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ