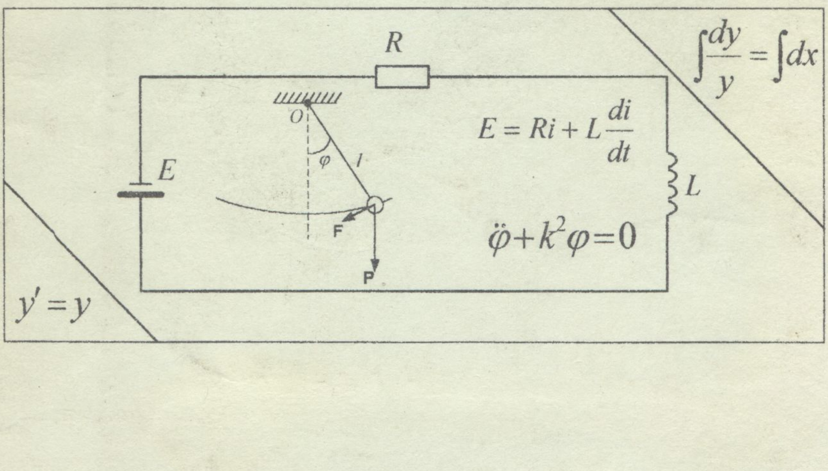
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Вінницький державний технічний університет

В.І. КЛОЧКО, А.О. СИРОВАТКА

Звичайні диференціальні рівняння

Частина I



Вінниця ВДТУ 2000

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Вінницький державний технічний університет

В.І. Клочко , А.О. Сироватка

Звичайні диференціальні рівняння

Частина 1

Затверджено Ученою радою ВДТУ як навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей. Протокол №11 від 29.06.2000 р.

Вінниця ВДТУ 2000

УДК 51791

Клочко В.І.,Сироватка А.О. “Звичайні диференціальні рівняння. Част.1”: Навчальний посібник. /Вінниця:ВДТУ,2000–148с.Укр. мовою/.

У навчальному посібнику розглянуто основні поняття диференціальних рівняннь і систем. Наводяться завдання для аудиторної, ідивідуальної, самостійної роботи та для контролю знань, а також завдання, орієнтовані на комп’ютеризовану форму навчання, з використанням пакетів прикладних програм.

Розраховано на викладачів та студентів всіх спеціальностей ступенової підготовки спеціалістів з вищою технічною освітою.

Іл. 24. Табл. 2. Бібліогр.: 19 назв.

Рецензенти: В.Л. Карпенко, к.ф.-м.н., проф. ВДТУ

В.М.Михалевич, д.т.н., проф.

В.С. Абрамчук, к.ф.-м.н., проф. ВДПУ

ЗМІСТ

§3 Лінійні однорідні рівняння вищих порядків

§4 Лінійні неоднорідні ДР (ЛНДР)

ПЕРЕДМОВА

Диференціальні рівняння займають значне місце у курсі вищої математики технічного вузу та викладаються окремою дисципліною на багатьох спеціальностях. Це обумовлено тим, що математичні моделі на основі диференціальних рівнянь мають широке застосування. Тому перед студентом ставиться завдання глибокого опанування матеріалом цього розділу.

Метою навчального посібника є допомога студентам у самостійній роботі над навчальним матеріалом, викладачам - в керуванні процесом здобуття студентами знань та навичок у складанні диференціальних рівнянь, пошуку і дослідженні розв'язків рівнянь, у використанні при цьому сучасних комп'ютерних технологій.

Теоретичний і практичний матеріал посібника відповідає навчальній програмі з математики для технічних, технологічних, економічних спеціальностей вищих закладів освіти. До посібника також вміщено додатковий навчальний матеріал, який виходить за межі програми з математики для бакалаврату та інженерії і який може бути використаний при поглибленому вивченні ДР.

Посібник складається з двох частин. До першої частини включено основний програмний матеріал, наводяться приклади побудови математичних моделей на основі ДР, упорядковані за рівнем складності завдання для підсумкової контрольної роботи. Після кожного розділу наведено завдання для опанування теоретичними базовими знаннями, для самостійної роботи (аудиторної та позааудиторної), приклади розв'язання типових завдань. Завдання для самостійної роботи супроводжуються вказівками та відповідями. Початок та кінець розв'язання прикладів і задач відмічено символом .

До другої частини включено питання, що стосуються ДР, які не розв'язні відносно похідної, поняття особливих розв'язків та їхнього аналізу; системи нормальних ДР і пов'язані з ними поняття стійкості. Наведено методику використання пакетів DERIVE і Maple V при аналітичному, наближеному та графічному розв'язанні і дослідженні розв'язків ДР. Досвід показав ефективність використання математичних пакетів при вивченні теоретичного матеріалу, при опануванні поняттями та методами розв'язування рівнянь. Запропоновано перелік завдань, які можуть бути темами курсових робіт, рефератів. Для проведення колоквіумів наводяться зразки завдань, які враховують рівень підготовленості студентів.

ВСТУП

Задачі геометричного і фізичного змісту, які приводять до диференціальних рівнянь

Розглянемо дві задачі, які приводять до знаходження функції, що є розв'язком диференціального рівняння.

Задача 1. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0,1)$ і для якої кутовий коефіцієнт дотичної, в кожній її точці, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Будуємо схематичний рисунок (рис. 1) . Нехай $y = y(x)$ є рівнянням шуканої кривої, яка в кожній своїй точці $M(x,y)$ має вказану в задачі властивість. Позначимо через α кут, утворений дотичною MT з додатним напрямом осі Ox. З геометричного змісту похідної маємо, що похідна від y по x дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної MT, тобто

$$y' = tg\alpha . \tag{1}$$

З іншого боку, за умовою задачі

$$tg\alpha = 2x . \tag{2}$$

Прирівнявши значення $tg\alpha$, які визначаються формулами (1) і (2), одержимо

$$y' = 2x . \tag{3}$$

В рівнянні (3) невідома функція $y = y(x)$ знаходиться під знаком похідної або це те саме, що рівняння (3) містить похідну від невідомої функції. *Рівняння такого типу, які містять похідні невідомої функції, називаються диференціальними рівняннями (ДР).*

Таким чином, наша задача звелась до знаходження функції, яка перетворює рівняння (3) в тотожність. *Така функція називається розв'язком диференціального рівняння, а сам процес знаходження розв'язків – інтегруванням диференціального рівняння.*

Розв'язком ДР (3) є кожна первісна для функції $2x$. Наприклад, розв'язком буде функція

$$y = x^2 . \tag{4}$$

Як відомо з інтегрального числення функції однієї змінної, множина усіх первісних для функції $2x$, а отже усі розв'язки ДР (3) задаються формулою

$$y = \int 2x dx + C \quad \text{або} \quad y = x^2 + C , \tag{5}$$

де С – довільна стала.

Шукана крива $y=y(x)$ є графіком розв'язку ДР (3), вона називається інтегральною кривою цього рівняння. Таким чином, інтегральними кривими рівняння (3) будуть парабола (4) і усі параболи (5) (рис. 2), які дістаємо з будь-якої з них паралельним перенесенням уздовж осі Oy.

Щоб виділити із сім'ї інтегральних кривих (5) шукану інтегральну криву, досить замінити в цьому рівнянні координати x і y координатами точки M_0 та знайти з одержаного рівняння значення довільної сталої C і підставити його в рівняння (5). Виконавши вказані вище дії, маємо

$$1 = 0^2 + C,\ C = 1,\ y = x^2 + 1.$$

Таким чином, шуканою кривою буде парабола $y = x^2 + 1$ (рис. 3.).

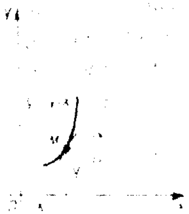


Рисунок 1

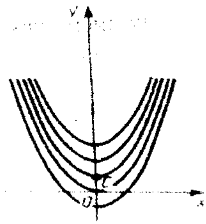


Рисунок 2

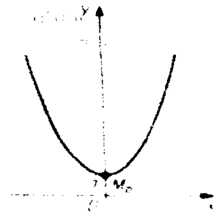


Рисунок 3

З а д а ч а 2. Швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і оточуючого середовища (закон Ньютона). Знайти закон охолодження тіла від часу, якщо тіло, яке має температуру θ_0 в момент часу $t = t_0$, помістили в середовище з температурою a ($\theta_0 > a$).

Позначимо через $\theta(t)$ – температуру тіла в момент часу t. Тоді за законом Ньютона

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta(t) - a), \tag{6}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, $k > 0$.

ДР (6) є математичною моделлю даного фізичного процесу. Відмітимо, що рівняння (6) може описувати і інші фізичні а також хімічні, біологічні та інші процеси. Наприклад, рівнянням (6) описуються: радіоактивний розпад при $a = 0$; хімічні реакції першого порядку; закон змінювання чисельності істот популяції ($k < 0$, $a = 0$). Розв'язком рівняння (6) є функція $\theta = Ce^{-kt} + a$, де C – довільна стала. Щоб знайти значення коефіцієнта пропорційності k, неохідно задати додаткові умови які характеризують процес. Значення довільної сталої C можна знайти з умови

$$\theta(t_0) = \theta_0, \tag{7}$$

яка називається початковою умовою.

Тобто $\theta_0 = Ce^{-kt_0} + a$ або $C = (\theta_0 - a)e^{kt_0}$.

Таким чином, закон охолодження тіла має вигляд $\theta = (\theta_0 - a)e^{-k(t-t_0)} + a$.

Задача знаходження розв'язку рівняння (6), *який задовольняє початкову умову* (7), *називається початковою задачею, або задачею Коші.*

Основна термінологія. Багато різноманітних задач загально-технічних і спеціальних дисциплін (фізики, хімії, теоретичної механіки, опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності, гідравліки, теорії машин і механізмів , технології виробництва та інші) приводять до ДР. Дамо означення диференціального рівняння (термін "диференціальні рівняння" введений Лейбніцем у 1676 р.) та пов'язаних з ним основних понять.

Означення. *Рівняння, яке, крім незалежних змінних і невідомої функції цих змінних, містить ще похідні (чи диференціали) від невідомої функції, називається диференціальним рівнянням.*

При цьому невідома функція і незалежні змінні можуть явно і не входити до ДР, але обов'язково повинні містити похідні (чи диференціали) від невідомої функції, інакше рівняння не буде диференціальним.

Приклади.

1. $y' = x^2 + 2xy$, де x – незалежна змінна; $y(x)$ – невідома функція.
2. $adr = rd\varphi$, де φ – незалежна змінна, $r(\varphi)$ – невідома функція.
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \varpi^2 x = A\sin\nu t$, де t – незалежна змінна, $x(t)$ – невідома функція.
4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, де x,t – незалежні змінні, $u(x,t)$ – невідома функція.

ДР називається звичайним, якщо невідома функція, яка входить до нього, залежить від однієї незалежної змінної. Рівняння (1) - (3) є звичайними ДР.

Якщо ж невідома функція, яка входить до ДР, є функцією двох і більшої кількості незалежних змінних, то таке рівняння називається ДР з частинними похідними. Наприклад, рівняння (4).

Порядком ДР називається найвищий порядок похідної (чи диференціала), що входить у ДР. Так ДР (1), (2) – першого порядку, (3), (4) – другого порядку. ДР $y^{IV} = 0$ – четвертого порядку. Рівняння n-го порядку в загальній формі має вигляд

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{8}$$

де x – незалежна змінна, y – невідома функція цієї змінної, F – задана скалярна функція вказаних в (8) змінних в деякій області G; ця область називається областю задання рівняння і позначається $D(F)$.

Ми будемо розглядати в основному рівняння, розв'язані відносно старшої похідної, тобто рівняння виду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{9}$$

Відносно такого рівняння кажуть, що воно задано в нормальній (явній або канонічній) формі. Наприклад, нормальною формою рівняння

$$(1+x^2)y''-(y')^2+1=0 \qquad (10)$$

буде

$$y''=\frac{1}{1+x^2}(y')^2-\frac{1}{1+x^2}.$$

Якщо права частина рівняння (9) лінійна відносно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то його можна записати у вигляді

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x).$$

Таке рівняння називається л і н і й н и м ДР n-го порядку. Так, рівняння (1) - (4), (6) є лінійні; рівняння (10) – *н е л і н і й н е.*

Розв'язком ДР (8) *на інтервалі (a,b) називається будь-яка неперервна і n раз диференційовна на цьому інтервалі функція* $y=y(x)$, *якщо вона це рівняння перетворює в тотожність*

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x))=0 \quad (a<x<b).$$

Відмітимо, що інколи розв'язки одержують в неявному вигляді $\Phi(x,y)=0$, (розв'язки в такій формі називають *і н т е г р а л а м и*), або в параметричній формі $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$ (t – *параметр*).

П р и к л а д. Для ДР $a^2\, y\, dy + b^2\, x\, dx = 0$ записати по одному розв'язку:
а) в неявній формі , б) в параметричній формі.

а) функція $y(x)$, яка задана неявно $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ y > 0$, є розв'язком даного рівняння. Дійсно, знайдемо диференціал цієї функціїі $d(b^2\, x^2 + a^2\, y^2 - a^2\, b^2\,) =$
$= 2\, b^2\, x\, dx + 2a^2\, y\, dy = 2b^2 x\, dx - (b^2x/a^2y)2a^2y\, dx = 0,\ \ 0 = 0;$

б) параметрично задана функція $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ t\in\ (0,\pi)$ також є розв'язком цього рівняння, оскільки для цієї функції $a^2\sin t\, b\cos t\, dt - b^2 a\cos t\times$
$\times a\sin t\, dt = 0,\ 0 = 0.$

Графік розв'язку ДР називається *інтегральною кривою* цього рівняння.

Основна задача теорії інтегрування ДР полягає в знаходженні усіх розв'язків цього рівняння та вивченні їх властивостей. Ця задача найповніше розв'язана для лінійних рівнянь.

Математичні динамічні моделі реальних процесів. Моделі реальних об'єктів широко використовують в науці і техніці для перевірки вірогідності гіпотез. Зокрема математичні моделі реального процесу в загальному вигляді наближено описують цей процес мовою математики, тобто у вигляді системи рівнянь та нерівностей.При математичному описі різноманітних процесів, що містять елементи "руху", користуються математичними моделями у вигляді диференціальних рівнянь, їх ще можна назвати математичними динамічними моделями. Складання динамічної моделі не є самоціллю, а проміжною ланкою між об'єктом дослідження і їх кінематичними моделями, тобто математичними залежностями між змінними і шуканими величинами.

Перехід від динамічної до кінематичної моделі називається інтегруванням динамічної моделі.

Кожна математична модель повинна задовольняти дві основні вимоги:

1. *Адекватності процесу.* Модель повинна відображати найхарактерніші зв'язки між величинами, які беруть участь в процесі, при цьому враховується процес і інформація про початковий стан процесу.
2. *Розв'язності моделі.* Модель повинна бути не дуже складною, щоб з неї можна було одержати інформацію, яка нас цікавить. При цьому бажано мати аналітичний розв'язок моделі або числовий, якщо перший неможливий або дуже громіздкий.

Складання рівнянь. Універсального методу складання ДР, що описує перебіг деякого еволюційного процесу, не існує. У багатьох випадках залежність між досліджуваними величинами базується на відомих фізичних законах (другий закон Ньютона, закон Ньютона про охолодження тіла, Фур'є про теплоту, розчинення речовин, Торрічеллі про витікання рідини, Кірхгофа, Ома, збереження енергії, збереження імпульсу і т.д.) часто застосовують експериментальні дані. При цьому використовують геометричний зміст похідної (тангенс кута нахилу дотичної) та її фізичний зміст (швидкість перебігу процесу).

В деяких випадках можна дотримуватись такої схеми:

<table>
<tr><th>Геометричні задачі</th><th>Фізичні задачі</th></tr>
<tr><td>Зробити схематичний рисунок і ввести позначення, виходячи із детального аналізу умов задачі.</td><td>Визначитись, яку з величин взяти за незалежну змінну t, а яку – за шукану функцію $S(t)$</td></tr>
<tr><td>Відокремити умови, які мають місце в довільній точці шуканого геометричного місця, від умови, яка має місце лише в окремих точках.</td><td>Встановити, яким законом описується процес.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Визначити початкові умови, виходячи із умови задачі.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Виразити всі величини, про які йде мова в задачі</td></tr>
<tr><td>Через x, y, y', враховуючи геометричний зміст похідної $y' = tg\alpha$ – кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці з абсцисою x; рівняння дотичної при цьому має вигляд : $Y - y = y'(x)(X - x)$.</td><td>через t, S, S', S'', враховуючи при цьому фізичний зміст похідної 1-го та 2-го порядків (якщо незалежна змінна t, то $S'(t)$ – швидкість, $S''(t)$ – прискорення зміни $S(t)$)</td></tr>
</table>

Скласти диференціальне рівняння	
Згідно з умовою задачі.	Згідно з фізичним законом, або виразити різницю $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ через величини, про які йде мова в задачі, після цього необхідно поділити на приріст Δt і перейти до границі при $\Delta t \to 0$.

П р и к л а д 1. Скласти рівняння для знаходження кривої за умови, що сума довжин відрізків дотичної і піддотичної пропорційна добутку координат точки дотику.

Будуємо схематичний рисунок (рис. 4) і позначимо через $y = f(x)$ рівняння шуканої лінії, через x і y – координати точки дотику M; k – коефіцієнт пропорційності (початкові умови в задачі відсутні).Виходячи з геометричного змісту похідної, маємо $y'(x) = \mathrm{tg}\alpha$. З прямокутного трикутника ΔMPT знаходимо довжину відрізка піддотичної $TP = \dfrac{y}{tg\,\alpha} = \dfrac{y}{y'}$, і довжину відрізка $TM = \sqrt{y^2 + \left(\dfrac{y}{y'}\right)^2}$ (за теоремою Піфагора). З умови задачі, TP + TM = kxy. Розв'язуючи одержане рівняння відносно y, маємо

$$y' = \frac{2kx}{k^2x^2 - 1}. \tag{11}$$

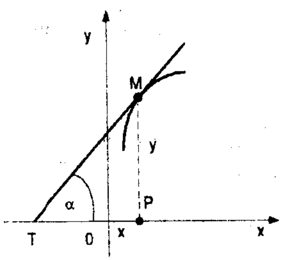


Рисунок 4

Інтегральне числення дозволяє записати невідомі функції у вигляді

$$y = \frac{1}{k}\ln\left|k^2x^2 - 1\right| + C \tag{12}$$

П р и к л а д 2. Барометрична формула.

Задача полягає в пошуку залежності між висотою h над рівнем моря та тиском повітря P.

Тиск повітря на горизонтальну ділянку площею в 1 см^2 визначається масою повітря відповідного циліндра, розміщеного над ділянкою.

Нехай на висоті h над рівнем моря тиск повітря на горизонтальну (ділянку) площини дорівнює P. На висоті $h + \Delta h$, $\Delta h > 0$ тиск повітря дорівнює $P + \Delta P$, де $\Delta P < 0$.Тиск зменшується на величину, яка чисельно дорівнює масі стовпа повітря, обмеженого площинками. За законом Бойля-Маріотта густина повітря при сталій температурі пропорційна тискові. А тому на висоті h густина повітря дорівнює kP, де k – коефіцієнт пропорційності, $k > 0$, а на висоті $h + \Delta h$ вона дорівнює $k\,(P + \Delta P)$.

Вважаючи, що густина повітря у стовпі висотою Δh є сталою, приймемо її рівною значенню густини в середній точці, тобто $k\,(P + \theta\Delta P)$, $0 < \theta < 1$. Тоді одержуємо співвідношення $\Delta P = \Delta m$, $\Delta P = \rho\cdot\Delta V = \rho\cdot\Delta h$, $\Delta p = -\,k\,(P + \theta\Delta P)\,\Delta h$, $(k > 0)$.

Переходимо до границі при $\Delta h \to 0$ і одержуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dP}{dh} = -kP \tag{13}$$

Зінтегрувавши рівняння, знаходимо його загальний розв'язок

$$P = ce^{-kh} \tag{14}$$

Якщо тиск над рівнем моря P_0 ($h = 0$), то

$$P = P_0 \cdot e^{-kh} \tag{15}$$

Інший вигляд барометричної формули (15):

$$h = \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{P_0}{P}$$

Коефіцієнт k знаходять, використавши інші початкові умови (температуру повітря, густину повітря на поверхні Землі та інші). □

Розглянутий підхід до побудови моделей дозволяє глибше зрозуміти явище в порівнянні з моделлю описового характеру. Крім того, мова диференціальних рівнянь характеризуются високим ступенем узагальненості.

П р и к л а д 3. Ємкість наповнена 100 л розчину, який містить 10 кг розчиненої солі. За одну хвилину в нього втікає – 8 л води і стільки ж суміші перекачують в іншу ємкість, заповненої на початку 100 л води. Із останньої ємкості надлишок рідини виливається. В який момент часу у першій ємкості буде у два рази менше солі, ніж у другій ємкості?

□ Нехай в момент часу t у першій ємкості знаходилось x кг солі. За проміжок часу Δt кількість солі у першій ємкості зменшилась на Δx кг. При цьому концентрація солі в t була $x/100$ кг/л. Якщо пропустити, що за проміжок Δt концентрація не змінювалась, то за час Δt зменшилось солі на $8 \cdot \frac{x}{100} \cdot \Delta t$ кг. Отже, одержуємо співвідношення

$$-\Delta x \cong \frac{x}{100} \cdot 8 \cdot \Delta t \ (\Delta x<0).$$

Переходимо до границі, що дає ДР : $-\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{8x}{100}$.

Розв'язавши його, запишемо загальний розв'язок $x(t) = ce^{-\frac{8t}{100}}$.

Оскільки в початковий момент $t = 0$ кількість солі дорівнювала 10 кг, то, підставивши ці дані, одержуємо частинний розв'язок ДР, який описує процес змінювання кількості солі у першій ємкості

$$x(t) = 10\, e^{-0{,}08t}.$$

Розглянемо аналогічний процес у другій ємкості, в якій в момент t було розчинено y кг солі. За час Δt кількість солі збільшилась на $\frac{8x}{100} \cdot \Delta t$. Якщо припустити, що за час Δt концентрація солі в другій ємкості не змінилась, то в ній кількість солі зменшилась на $\frac{8y}{100} \cdot \Delta t$ кг. Отже, кількість солі Δy за проміжок Δt змінилась на:

$$\Delta y = 0{,}08\, x \cdot \Delta t - 0{,}08\, y \cdot \Delta t$$

або

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 0{,}08\,(x - y),$$

тобто одержали ДР

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}08\,(x - y).$$

В даному рівнянні замінимо $x = 10 \cdot e^{-0{,}08t}$

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}8\, e^{-0{,}08t} - 0{,}08\, y$$

Зведемо його до канонічного вигляду:

$$\frac{dy}{dt} + 0,08\ y = 0,8\, e^{-0,08\, t}.$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = (c + 0,8t)\, e^{-0,08t}$$

В початковий момент у другій ємкості сіль була відсутня, тобто при $t = 0$, $y = 0$. Враховуючи ці умови, знаходимо $c = 0$. Таким чином

$$y(t) = 0,8\, te^{-0,08t}$$

Визначимо час, на протязі якого кількість солі у першій ємкості стане у два рази менша, ніж у другій ємкості, тобто $2x = y$.

$$20\, e^{-0,08t0} = 0,8\, t_0 e^{-0,08t0}, \quad t_0 = 20/0.8 = 25 \text{ хв.}$$

П р и к л а д 4. Розмноження, вимирання та співіснування популяцій.

Нехай $x(t)$ - кількість істот у популяції в момент часу t, A - кількість істот в популяції, які народжуються в одиницю часу, B - кількість істот в популяції, які вмирають в одиницю часу. Якщо кількість істот достатньо велика, то можна вважати, що функція $x(t)$ диференційовна і твердити, що швидкість змінювання x матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = A - B. \tag{16}$$

Наступним кроком побудови математичної моделі є вибір функціональної залежності A і B від змінної x. У найпростішому випадку вважатимемо, що залежність лінійна

$$A = ax,\ B = bx, \tag{17}$$

де $a > 0$ і $b > 0$ - відповідно коефіцієнти народження та смерті істот за одиницю часу. Після підстановки формул (17) у ДР (16) воно набуває вигляду

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x. \tag{18}$$

Припустимо, що в момент часу $t = t_0$ кількість істот у популяції дорівнює $x = x_0$. Тоді, зінтегрувавши ДР (18), одержуємо спрощену модель для оцінювання кількості істот у популяції в момент часу t

$$x(t) = x_o e^{(a-b)(t-t_0)}. \tag{19}$$

На основі одержаної моделі можна зробити деякі висновки. Так, коли народжуваність перевищує смертність, тобто при $a > b$ кількість істот зростає $x \to \infty$, якщо $t \to \infty$. З іншого боку, при $a < b$ кількість істот зменшується і $x \to 0$ при $t \to \infty$, тобто популяція вимирає.

Лінійна модель дає можливість одержати задовільні кількісні оцінки лише на невеликих проміжках часу, але є інші важливі особливості розвитку популяцій.

Набагато більше інформації містить нелінійна модель, тобто замість рівняння (16) розглядається рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{20}$$

де $f(x)$ - нелінійна функція.

Нехай нелінійність має вигляд $f(x) = ax - bx^2$, а коефіцієнти мають вище згаданий зміст. Задача Коші для ДР

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \quad x(t_0) = x_0, \tag{21}$$

має розв'язок

$$x(t)=\frac{x_0 a/b}{x_0+(a/b-x_0)e^{-a(t-t_0)}}. \qquad (22)$$

Аналіз поведінки функції $x(t)$, наприклад, при $t\to\infty$ вказує на можливі два шляхи змінювання чисельності популяції відносно початкового рівня. Або вона зростає до рівня a/b при $a/b > x_0$, або зменшується до того ж рівня при $a/b < x_0$.

Розглянемо приклад математичної моделі, яка пояснює періодичні зміни чисельності істот антагоністичних популяцій (модель "хижак - жертва", яку запропонував дослідник В. Вольтерра).

Нехай x і y - чисельність жертв і хижаків, які їх поїдають. Чисельність хижаків буде зростати до тих пір, поки в них буде достатньо їжі. Проте настане момент, коли недоставатиме їжі для хижаків, що призведе до зменшення їхньої чисельності, в результаті чого зростатиме до певного моменту чисельність жертв. А це сприятиме зростанню кількості хижаків, і до повторення згаданої ситуації. Математичною моделлю описаного біологічного динамічного процесу є система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-ax+bxy,\\ \dfrac{dy}{dt}=cx-d\cdot xy,\end{cases} \qquad (23)$$

де $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ - сталі, що характеризують народжуваність та смертність хижаків і жертв.

Детально розв'язання систем такого типу буде роглянуто у другій частині посібника. Графіки розв'язків системи в площині (x,y) наведено на рис. 5.

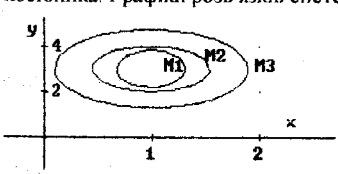


Рисунок 5

Якщо на одній з кривих (наприклад, на М3) вибрана точка $M_0(x_0,y_0)$, де $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$, то рух по цій траєкторії набуває періодичного характеру. При певних співвідношеннях між початковими умовами, між $x(t)$ та $y(t)$ чисельність хижаків (y) в залежності від чисельності жертв (x) буде збільшуватись чи зменшуватись. Зауважимо, що максимум y і максимум x не збігаються, тобто коливання чисельності істот у популяції відбуваються у різних фазах. Описані в літературі спостереження за коливаннями чисельності зайців і рисей Канади свідчать про те, що розглянута математична модель угоджується з еспериментальними даними.

Побудова ДР однопараметричної сім'ї кривих. Нехай задана однопараметрична сім'я кривих

$$\Phi(x,y,C)=0, \qquad (24)$$

де C – параметр, а Φ – функція, яка має неперервні частинні похідні.

Поставимо задачу: *утворити ДР, для якого сім'я кривих (24) є загальним інтегралом.*

Розглянемо рівняння (24) як неявне задання шуканої функції $y(x)$ і, диференціюючи (24) по x, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0\\ \Phi'_x(x,y,C)+\Phi'_y(x,y,C)y'=0\end{cases} \qquad (25)$$

Якщо із системи (25) можна вилучити параметр C, то одержимо шукане рівняння першого порядку:

$$\Phi(x, y, y') = 0,$$

П р и к л а д. Нехай маємо сім'ю півпарабол

$$y = (x - C)^2, \ x \geq C \quad (26)$$

Утворити ДР, що відповідає цій сім'ї кривих.

Диференціюючи дане рівняння, знаходимо $y' = 2(x - C)$. Для вилучення параметра складаємо систему

$$\begin{cases} y = (x - C)^2 \\ y' = 2(x - C) \end{cases} \quad \text{звідси} \quad y' = 2\sqrt{y}.$$

Побудоване рівняння має і самостійне значення. Так інтегральними кривими цього рівняння є не лише півпараболи (26), і їх обвідна $y \equiv 0$ – особливий розв'язок; а також розв'язки, які одержуються шляхом склеювання з відрізків особливого розв'язку $y \equiv 0$ і півпарабол (26).

Відмітимо, що для складання ДР заданої n-параметричної сім'ї кривих

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad (27)$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – параметри, Φ – функція, яка має неперервні частинні похідні до n-го порядку включно, необхідно продиференціювати (27) n разів за змінною x, вважаючи y функцією аргументу x. Дістанемо систему $(n+1)$ рівнянь, з якої слід вилучити всі параметри $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Якщо $n = 2$, то система рівнянь,з якої вилучають параметри C_1 і C_2 ,має вигляд:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C_1, C_2) = 0 \\ \Phi'_x + \Phi'_y y' = 0 \\ \Phi''_{xx} + 2\Phi''_{xy} y' + \Phi''_{yy} (y')^2 + \Phi'_y y'' = 0 \end{cases}$$

Після вилучення параметрів C_1 і C_2 дістанемо шукане ДР сім'ї кривих.

П р и к л а д.Скласти ДР сім'ї гіпербол $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, де a,b – параметри.

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \\ x/a^2 - yy'/b^2 = 0 \\ 1/a^2 - (y')^2 - yy''/b^2 = 0 \end{cases}$$

Виключивши звідси параметри a і b, дістанемо шукане ДР :

$$yy' - x((y')^2 + yy'') = 0.$$

Короткі біографічні відомості про вчених, які зустрічаються в тексті

Ньютон Ісаак (04.01.1643–31.03.1727) – видатний англійський вчений, один з основоположників сучасного природознавства, член Лондонського Королівського т-ва з 1672 і його президент з 1703, народився в сім'ї бідного фермера в Вулсторне. Одержавши ступінь бакалавра мистецтв в Кембриджському університеті, під час Великої чуми 1664–1665 роки виїхав в своє рідне село.

Історія науки не знає аналогів гідних порівнянню з результатами Ньютона за ці два золоті роки.

Він перший відкрив, що світло при проходженні через прозору тригранну призму розкладається на промені різних кольорів. Вивчав інтерференцію, дифракцію і поляризацію світла. Започаткував математичний аналіз, вказавши методи розв'язування найпростіших диференціальних рівнянь, відкрив основні закони механіки, сформулював закон всесвітнього тяжіння, вивівши з нього кеплерові закони руху планет, пояснив причину морських приливів і відливів на Землі.

Вершиною наукової творчості Ньютона є його праця "Математичні початки натуральної філософії" (1687), в якій узагальнено дослідження попередників і його власні в галузі астрономії й фізики. Тут Ньютон дав поняття маси, кількості руху, інерції, сили, прискорення, доцентрової сили; сформулював три основні закони руху. Визначальним у поглядах Ньютона був стихійний матеріалізм. Разом з тим Ньютон стояв на метафізичних позиціях.

Інтелектуальні інтереси Ньютона не обмежувались лише фізикою і математикою. Залишився цілий ряд рукописів з теології і алхімії. Він не тільки очолював кафедру математики і фізики в Кембриджському університеті на протязі 32 років, а і був головним директором Монетного двору в Лондоні (з 1699р.).

Лейбніц Готфрід Вільгельм (1.07.1646-14.11.1716) народився в Лейпцігу. В 15 років став студентом юридичного факультету Лейпцігського університету. В 17 років захистив дисертацію на ступінь бакалавра, в 18 – магістра філософії, в 20 – доктора права. Лейбніц був ще більшим християніном ніж інші мислителі його століття. Крім філософії, він займався історією, теологією, лінгвістикою, біологією, геологією, математикою, економікою, "мистецтвом винаходу"; був дипломатом, бібліотекарем. Лейбніц заснував Берлінську Академію наук і один з перших наукових журналів, в якому надрукував свої перші незалежно від І.Ньютона дослідження з аналізу. Центральне місце в творчості Лейбніца займали пошуки "універсального методу" з метою зведення усіх умовиводів до обчислень; тобто попередником математичної логіки. Удосконаленню винайденої ним обчислювальної машини Лейбніц присвятив більше 40 років. Ввів велику кількість математичних символів. Небагато хто так розуміли єдність форми і змісту.

Коші Огюстен Луї (21.08.1789–23.05.1857) своєю невтомною продуктивністю, винахідливістю і широтою математичних інтересів нагадував математиків XVIII століття. Проте Коші був математиком XIX століття і приділяв велику увагу логічному обґрунтуванню математичного аналізу. День народження майже збігся з початком Великої французької революції. Першим його вчителем і вихователем був батько. Коші закінчив Політехнічну школу і школу мостів і доріг в Парижі, де і народився. За призначенням працював інженером морських портів. Приділяючи багато часу королеві наук – математиці і представивши АН в Парижі роботу з теорії багатогранників (1811р.), з теорії хвиль на поверхні важкої рідини, звернув на себе увагу, набув популярності і досяг високого звання – члена Академії наук (1816р.). Коші написав більше 800 праць. Цьому сприяла не лише працездатність Коші і геніальність його розуму, а і увага до його робіт з боку сучасників. Роботи Коші присвячені аналізу, геометрії, теорії чисел і математичній фізиці. І сьогодні математики усього світу користуються такими поняттями, як "границя функцій за Коші","неперервність функцій за Коші","інтеграл Коші", "нерівність Коші" та ін.

Лагранж Жозеф Луї (25.01.1736–10.04.1813) народився в Турині у франко-італійській сім'ї банківського чиновника. Бувши наймолодшим в багатодітній сім'ї, вимушений був робити все, щоб якомога швидше розпочати самостійне життя. Курсантом артилерійського училища в Турині випадково познайомився з трактатом з математичної оптики і відчув своє покликання. Всі свої сили направив на вивчення математики і в 17 років став викладачем в Королівській артилерійській школі в Турині, а в 19 років - професором математики. Фрідріх II запросив Лагранжа в Берлін -"необхідно, щоб найвидатніший геометр Європи жив поблизу найвидатнішого з королів". Після смерті Фрідріха (1786р.) Лагранж переїхав в Париж. Під час революції брав участь в реформі мір і ваги. Ейлер визнав переваги методу Лагранжа над своїми і рекомендував двадцятитрьохрічного Лагранжа в члени Берлінської АН. В 1788 році з'явилась його знаменита "Аналітична механіка", в якій підводиться підсумок в цій галузі за попереднє століття. В цій книзі немає жодного рисунка, все грунтується лише на формулах. Таким чином була створена класична аналітична механіка у вигляді вчення про загальні диференціальні рівняння руху матеріальних систем.

Відома теорема Лагранжа з математичного аналізу та наслідки з неї стали основою для дослідження зміни функцій. В своїх працях Лагранж розглядав задачі теорії чисел, алгебри, інтерполяції (інтерполяційна формула Ларанжа), математичної картографії і астрономії.

Брати Бернуллі: Якоб (27.12.1654–6.08.1705) і Іоганн І (27.7.1667–01.01.1748) - швейцарські математики – представники знаменитої родини швейцарських учених. Якоб в 1695 році запропонував рівняння, а Іоганн І в 1697р. вказав метод його розв'язання. Наукові інтереси: Якоба Бернуллі – застосування диференціального числення до геометрії; варіаційне числення, основи якого він заклав; теорія ймовірності, довів важливий окремий випадок *великих чисел закону* – теорему Бернуллі; Іоганна І. Бернуллі – інтегральне числення, диференціальні рівняння, варіаційне числення, маханіка. Серед багаточисельних учнів Іогана І Бернуллі слід, крім трьох його синів і маркіза Г.Ф. де Лопіталя , назвати Л.Ейлера.

Торрічеллі Еванджеліста (15.10.1608–25.10.1647) - італійський фізик і математик. Навчався в Римі. Під впливом праць Галілея написав "Трактат про рух важких тіл". Відкрив атмосферний тиск, винайшов ртутний барометр, вивів формулу швидкості витікання рідини з отвору посудини та ін. У працях з математики запровадив т.з. метод "неподільних" при розв'язуванні задач на дотичні. Узагальнив правило квадратури параболи на випадок довільного раціонального показника степеня.

Ріккаті Якопо Ф. (28.05.1776–15.04.1754) – італійський математик, інженер-будівельник. Наукові інтереси: інтегральне числення і диференціальні рівняння.

Бойль Роберт (1627-1691) - англійський фізик, хімік і філософ, один із засновників Лондонського королівського товариства. Сформулював наукове поняття хімічного елемента. Заклав основи якісного аналізу. Відкрив 1662 закон про залежність об'єму газу від тиску (закон – Бойля - Маріотта).

Маріотт Едм (1620-1684) французький фізик, член Паризької АН (з 1666).

Фур'є Жан Батіст Жозеф (21.03.1768–16.05.1830) - великий французький математик. Народився Фур'є в місті Оксер в сім'ї шевця. Закінчивши військове училище, в силу бідного походження не мав можливості зробити військову кар'єру, тому залишився в училищі в ролі викладача математики, історії і риторики. В 1794 р. Фур'є став слухачем Нормальної школи. В 1796–1798 викладав в Політехнічній школі. З 1798р. брав участь в єгипетській експедиції Наполеона, був призначений губернатором Нижнього Єгипту. В 1802–1815 рр. Фур'є – перфект департаменту Ізери. У 1818 р. переїхав в Париж, де став секретарем АН, а після смерті Лапласа головою ради Політехнічної школи. Наукові інтереси: чисельні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь, ряди, які носять його ім'я (ряди Фур'є), теорія теплоти, теорія функцій, інтегральне числення, диференціальні рівняння. В 1822 р. опублікував працю "Аналітична теорія теплоти", що стала відправною точкою створення тригонометричних рядів і в подальшому теорії множин, і теорії функцій дійсного змінного.

Ліувілль Жозеф (24.03.1809–8.09.1882) – видатний французький математик. Наукові інтереси: теорія аналітичних функцій, крайові задачі, механіка, теорія чисел, алгебра. Побудував теорію еліптичних функцій. Одним із перших оцінив роботи Е. Галуа і надрукував їх в заснованому ним журналі.

Вольтерра Віто (03.05.1860–11.10.1940) – італійський математик, член Національної академії деї Лінчеї в Римі, організатор і перший голова Товариства прогресу наук. Наукові інтереси : диференціальні рівняння з частинними похідними, теорія пружності, інтегральні і інтегро- диференціальні рівняння, функціональний аналіз і теорія множин а також оригінальні дослідження в біології методами математичного аналізу.

Ом Георг Сімон (16.03.1787–7.07.1854) – німецький фізик. Наукові інтереси: електрика, акустика, оптика і кристало-оптика. Найважливіше відкриття Ома – основний закон електричного струму.

Пікар Шарль (27.07.1856–11.12.1941) – видатний французький математик. Наукові інтереси: фундаментальні дослідження з диференціальних і інтегральних рівнянь, теорія аналітичних функцій, теорія алгебраїчних функцій, філософія науки.

Ліпшіц Рудольф (14.05.1832–07.10.1903) – німецький математик. Наукові інтереси: математичний аналіз, теорія чисел, механіка і фізика, диференціальні рівняння, багатовимірна геометрія.

Остроградський Михайло Васильович (24.09.1801–01.01.1862) – видатний український математик, один із засновників Петербурзької математичної школи. Наукові інтереси і світогляд сформувались в Харківському університеті під впливом професорів А.Ф. Павловського і Т.Ф. Осіповського (ректора університету). За мотивів неблагонадійності не одержав диплом про закінчення університету. Подальше навчання продовжував в Парижі, слухаючи лекції Ампера, Коші, Лапласа, Пуассона та інших. Наукові інтереси - різноманітні області математики і механіки: диференціальне і інтегральне числення, вища алгебра, геометрія, теорія ймовірностей, теорія чисел, аналітична механіка, математична фізика, баллістика і т.д. Видатний педагог і організатор. Посібники і програми з математики пропагували досконалі і прогресивні методи викладання.

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

1. В чому відмінність диференціальних і алгебраїчних рівнянь. Наведіть приклад диференціального рівняння третього порядку і алгебраїчного рівняння третього степеня.
2. Яке диференціальне рівняння називається звичайним, а яке з частинними похідними? Наведіть приклади.
3. Як визначається порядок ДР? Визначити порядок рівнянь:

   а) $(y')^3 = y''$; б) $x + y''' = y$; в) $y'y^{IV} - 5(y'')^3 + 4(y''')^6 = 2x$.
4. Дайте означення розв'язку ДР. Як називається операція знаходження розв'язку ДР?
5. Розкрийте аналітичний та геометричний зміст процесу "розв'язання ДР".
6. Скільки розв'язків ДР $y' = 2/\sqrt[3]{x}$ визначає співвідношення $y = \sqrt[3]{x^2} + C$ при кожному фіксованому значенні $C \in R$? Накреслити інтегральні криві. Чи має рівняння інші розв'язки? Які?
7. Яка форма запису розв'язку ДР називається явною, неявною, параметричною? Для ДР $y' = -x/y$ запишіть по одному розв'язку :

   а) в явній формі; б) в неявній формі; в) в параметричній формі.
8. Що називається задачею Коші? Сформулюйте задачу Коші для рівняння $y' = f(x, y)$.
9. Яка форма звичайного ДР n-го порядку називається нормальною?
10. В якому випадку звичайне ДР називається лінійним, в якому нелінійним ? Наведіть приклади лінійних і нелінійних ДР.
11. В чому полягає основна задача теорії інтегрування ДР? Розгляньте задачу. Точка масою m рухається прямолінійно. На неї діє сила, пропорційна часові (коефіцієнт пропорційності α). Крім цього, точка зазнає опору середовища, пропорційного швидкості (коефіцієнт пропорційності β):

    а) написати закон зміни швидкості v(t) у вигляді ДР;

    б) знайти v(t) у вигляді аналітичної формули;

    в) припустимо, що $\alpha = 0$, $\beta = const$ і у фіксовані моменти часу t_i (i=1,2, ...) маса точки зменшується на 0,1 свого попереднього значення, тобто $m(t_i + 0) = 0,9m(t_i)$. Керуючись законом збереження імпульсу $v(t_i + 0)m(t_i + 0) = v(t_i)m(t_i)$, знайти аналітичну формулу для $v(t)$.
12. Що таке математична данамічна модель реального процесу, яка її роль при вивченні еволюційного процесу? Які вимоги повинна задовольняти математична модель? Наведіть приклад використання ДР для математичного моделювання реальних процесів.
13. Сформулювати основні положення, якими користуються при складанні ДР геометричного змісту.

14. Навести приклади складання диференціальних задач фізичних та природничих наук з використанням фізичного змісту похідних, додаткових умов та законів і закономірностей, притаманних відповідній галузі науки.
15. Розкрийте зміст методу складання ДР заданої *n*-параметричної сім'ї кривих $\Phi(x_1, y_1 C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$. Записати системи рівнянь з яких слід вилучити параметри при $n = 1$ і $n = 2$, щоб одержати шукані ДР.

Завдання для практичних аудиторних занять

1. Утворити ДР однопараметричної сім'ї кривих

   а) $y = -1/(x + C)$; б) $\rho^2 = a\cos 2\theta$, a – параметр.
2. Скласти диференціальне рівняння сім'ї співфокусних еліпсів і гіпербол. (Вказівка, якщо $2c$ – фокусна відстань, то параметричне рівняння можна записати $x^2/a^2 + y^2/(a^2 - c^2) = 1$, a - параметр)
3. Чи є функція розв'язком ДР:

   а) $y = \sqrt{x}$, $2yy' = 1$; б) $\ln x \ln y = C$, $y\ln y dx + x\ln x dy = 0$;

   в) $y = Ce^x - e^{-x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$; г) $y = x\int_0^x \frac{\sin s}{s} ds$, $xy' = y + \sin x$;

   д) $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = t^2(2\ln t + 1) \end{cases}$, $y'\ln(y'/4) = 4x$; е) $y = x\left(\int \frac{e^x}{x} dx + C\right)$, $xy' - y = xe^x$

4. Знайти криві, для яких сума відрізків нормалі і піднормалі є сталою величиною, що дорівнює a. (Відповідь $y' = \frac{a^2 - y^2}{2ay}$, $y^2 = a^2 + Ce^{-x/a}$)
5. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2,e)$ і має ту властивість, що в будь-якій її точці M дотичний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Ox має проекцію на вісь Ox, обернено пропорційну абсцисі точки M. Коефіцієнт пропорційності $a = -2$. (Відповідь: $2y' = xy$, $xy = e^{x^2/4}$)
6. Тіло рухається із швидкістю, пропорційною пройденому шляху, і проходить за 2с – 10м, а за 4с – 50м. Який шлях пройде тіло за 6с від початку відліку часу? (Відповідь: $\dot{S} = ks$, 250м)

Відповіді: 1. а) $y' = y^2$, б) $\rho' + \rho tg 2\theta = 0$; 2. $(y - xy')(yy' + x) + C^2 y' = 0$;
3. а) так, б) так, в) ні, г) так, д) так, е) так.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

I. 1. Скласти ДР сім'ї логарифмічних спіралей $x^2 + y^2 = Ce^{arctg x/y}$, $C \in R$.

2. Довести, що функція $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$ є розв'язком ДР $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

3. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю пропорційною часу руху. Знайти рівняння руху тіла, якщо воно пройшло шлях 20м за 10с і 35м за 20с від початку відліку часу. Який шлях пройде тіло за 1хв. 40 с. (Відповідь: $S = 0{,}15\,t^2 + 15$, 515м).

II. 1. Скласти ДР однопараметричної сім'ї кривих $xtg(x+C) = y$, $C \in R$.

2. Довести, що функція $y - x + C_1 \ln y = C_2$ є інтегралом ДР $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$.

3. При бродінні швидкість процесу діючого ферменту пропорційна його кількості. Через 2 години після бродіння кількість ферменту складала 6 г, а через 6 годин – 24 г. Якою була початкова кількість ферменту?

(Відповідь: $x' = kx$, $x = 3e^{0,5t}$, $x = 3$ г)

III. 1. Скласти ДР однопараметричної сім'ї кривих $xch(x + C) = y$, $C \in R$.

2. Довести, що функція $s = t^2 \ln t + C_1 t^2 + C_2 t + C_3$ є розв'язком ДР $t\,\dddot{s} = 2$.

3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(-1,4)$ і має ту властивість, що піднормаль її в будь-якій точці є стала, яка дорівнює 4.

(Відповідь: $yy' = 4$, $y^2 = 8(x+3)$)

Відповіді: **I. 1**. $xy' + y + 2x = 0$; **II. 2**. $xy' = y + x^2 + y^2$; **III. 1**. $xy'y + x\sqrt{(y^2 - x^2)}$.

Індивідуальні домашні завдання

Задача 1. *Знайти диференціальні рівняння сім'ї кривих (де можливо, дайте геометричне тлумачення здобутого результату)*:

1. $x^3 + 2y^2 - xy = C$;
2. $x^3 y + x^2 - y^2 - Cxy = 0$;
3. $x + y + C(xy - 1) = 0$;
4. $x^2 + Cy^2 = 2y$;
5. $y = \sin(x + C)$;
6. $y = a/x$;
7. $x^2 - y^2 = ax$;
8. $y = ae^{x/a}$;
9. $y = e^x(ax + b)$;
10. $y^2 = 2Cx + C^2$;
11. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$;
12. $C = \sqrt{y} - \sqrt{x}$;
13. $y = C_1 x + C_2 / x$;
14. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$;
15. $\cos y = C \cos x$;
16. Знайти диференціальне рівняння всіх прямих на площині.
17. Утворити диференціальне рівняння прямих, що проходять через задану точку з координатами (a,b).

18. Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, які проходять через початок координат і мають за вісь симетрії вісь Ox.
19. Знайти диференціальне рівняння всіх кіл на площині, які проходять через початок координат $x^2 + y^2 - 2C_1 x - C_2 y = 0$.
20. Знайти диференціальне рівняння кіл з радіусом r та центром у будь-якій точці площини.
21. Скласти рівняння всіх парабол, які проходять через початок координат і мають вісь, паралельну Oy.
22. Скласти диференціальне рівняння сім'ї кіл з радіусом r та центром на осі Oy.
23. Скласти диференціальне рівняння всіх кіл, що дотикаються осі ординат.
24. Знайти диференціальне рівняння сім'ї строфоїд
$$x(x^2 + y^2) = C(x^2 - y^2).$$
25. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кардіоїд, що проходять через полюс, мають в ньому точку звороту, а віссю симетрії кардіоїд є полярна вісь.
26. Знайти диференціальне рівняння сім'ї циклоїд з однаковою висотою $H = 2d$, основи яких лежать на осі Ox.
27. Скласти диференціальне рівняння логарифмічних спіралей, що мають полюс в початку координат $x^2 + y^2 = Ce^{arctgx/y}$.
28. Знайти диференціальне рівняння гармонійного коливного руху, який описується формулою $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, де A і α – довільні сталі.
29. Знайти диференціальне рівняння всіх еліпсів з даною фокусною відстанню $2c$.
30. Знайти диференціальне рівняння сім'ї циклоїд
$$x = C(t - \sin t),\ y = C(1 - \cos t).$$

Відповіді: **1**. $y' = (2x^2 - y)/(x - 4y)$; **2**. $y' = (2x^3y + x^2 + y^2)y/x(x^2 + y^2)$; **3**. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$; **4**. $x^2y' - xy = yy'$; **5**. $(y')^2 + y^2 = 1$; **6**. $y + xy' = 0$; **7**. $x^2 + y^2 = 2xyy'$; **8**. $xy' = yy'$; **9**. $y'' - y = 0$; **10**. $y(y')^2 + xy' = y$; **11**. $y'' - y = 0$; **12**. $\sqrt{x}y' = \sqrt{y}$; **13**. $x^2y'' + xy' - y = 0$; **14**. $y'' + y = 0$; **15**. $\cos x \sin y dy - \sin x \cos y dx = 0$; **16**. $y'' = 0$; **17**. $y - b = (x - a)y'$; **18**. $2xy' - y = 0$; **19**. $(x^2 + y^2)y'' - 2(xy' - y)\cdot(1 + (y')^2) = 0$; **20**. $(1 + (y')^2)^3 = r^2(y'')^2$; **21**. $xy'' - 2xy' + 2y = 0$; **22**. $x^2(1 + (y')^2) = r^2(y')^2$; **23**. $(1 + (y')^2)^3 = (xy'' - y' - (y')^3)$; **24**. $4x^3yy' = y^4 + x^2y^2 - x^4$; **25**. $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho ctg\dfrac{\theta}{2}$; **26**. $(1 + (y')^2)y - 2a = 0$;

27. $2(x + yy') = y - xy'$; **28**. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; **29**. $xy(y')^2 + (x^2 - y^2 - C^2)y' - xy = 0$; **30**. $x = y\left[(1 + (y')^2)arctg\, y' - y'\right]$.

Задача 2. *Скласти диференціальне рівняння та розв'язати його*

1. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(15, 1)$ і яка має ту властивість, що у будь-якій її точці M(x,y) нормальний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Oy має довжину *a = 25* і утворює гострий кут з додатним напрямом осі Oy.($y' = -x/\sqrt{625 - x^2}$, $y = \sqrt{625 - x^2} - 19$)

2. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2,e)$ і має ту властивість, що у будь-якій точці M(x,y) дотичний вектор MN з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy, яка дорівнює 2.($xy' = -2$, $y = 4 - \ln|x|$)

3. Визначити криву, всі дотичні до якої проходять через початок координат.($xy' = y$, $y = Cx$).

4. Знайти криву, піддотична якої дорівнює *a (a = const)*.($|xy'| = a$, $y = Ce^{x/a}$).

5. Знайти криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений осями та перпендикулярами, опущеними на них з будь-якої точки кривої, у відношенні 2:1. ($y^2 = Cx$. Вказівка $2xy = \int_0^x y dx$).

6. Знайти криві, в яких тангенс кута між дотичною і додатним напрямом осі Ox обернено пропорційний абсцисі точки дотику. ($xy' = k$, $y = k\ln|x| + C$)

7. Знайти криві, в яких тангенс кута між дотичною та додатним напрямом осі Ox прямо пропорційний ординаті точки дотику. ($y' = ky$, $y = Ce^{kx}$)

8. Знайти криву, для якої трикутник, утворений нормаллю з осями координат, був би рівновеликий трикутнику, утвореного віссю Ox, дотичною і нормаллю. ($2xyy' = y^2 - x^2$, $x^2 + y^2 = Cx$)

9. Знайти криву, в якої всі нормалі проходять через точку (2,-3). ($(3 + y)y' + x - 2 = 0$, $x^2 - 4x + y^2 + 6y = C$, $C > -13$)

10. Знайти криву, яка проходить через точку (3,4) і в якої відрізок довільної дотичної, між осями координат, ділиться в точці дотику навпіл. ($xy' = y$, $y = 4x/3$)

11. Знайти криві, в яких дотична і нормаль в довільній точці рівновіддалені від початку координат. ($x + yy' = \pm(y - xy')$, $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = C \pm artg(y/x)$)

12. Знайти криву, яка проходить через точку (1,1/3), якщо кутовий коефіцієнт дотичної до неї в будь-якій точці кривої в три рази більший кутового коефіцієнта радіуса-вектора точки дотику. ($xy' = 3y$, $y = 2x^3/3$)

13. Знайти криву, яка проходить через точку A(0,a), MN довільна ордината кривої. Визначити криву з умови,що площа OAMN = $a\,s$, *де* s – довжина дуги AM. ($y = \sqrt{1 + (y')^2}$, $y = ach(x/a)$ або $y = a$)

14. Знайти криву, яка проходить через точку (a,a), якщо піддотична в будь-якій точці кривої дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. ($2x = yx'$, $y^2 = ax$)

15. Знайти криву, яка проходить через точку (-1,-2), якщо піднормаль її дорівнює 2. ($yy' = 2$, $y^2 = 4(x+2)$)

16. Крива проходить через точку A(o,a), MN – довільна ордината кривої. Знайти криву з умови, що площа OAMN = a(MN – a^2) . ($y = ay'$, $y = ae^{x/a}$)

17. Знайти та побудувати криву, яка проходить через точку (-1,-1), для якої відрізок OT, який відтинає на осі Ox дотична до кривої в будь-якій її точці, дорівнює квадратові абсциси точки дотику. ($y'(x - x^2) = y$, $y = 2x/(1-x)$)

18. Знайти криву, для якої трикутник, утворений віссю Oy, дотичною та радіус–вектором точки дотику, є рівнобедреним (розглянути всі можливі випадки).($y' = (y^2 - x^2)/2xy$, $x^2 + y^2 - Cx = 0$; $y' = -y/x$, $y = Cx \quad (x \neq 0)$; $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = Cx^2/2 - 1/2C \quad (C > 0)$; $xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = x^2/2C + C/2 (C > 0)$).

19. Знайти криву, піддотична якої є середнім арифметичним координат точки дотику. ($2x'y = x + y$, $(x-y)^2 - Cy = 0$)

20. Знайти криву, для якої відношення відрізка, що відтинається дотичною на осі Оу, до відрізка, що відтинається нормаллю на осі Ох, є сталою величиною, яка дорівнює k. ($y - xy' = k(yy' + x)$, $\sqrt{x^2+y^2} = C\exp(-(1/k)arctg(y/x))$ або $r = C\exp(-\theta/k)$)

21. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ох, дотичною та радіусом-вектором точки дотику, дорівнює a^2. ($x' - x/y = -2a^2/y^2$, $x = Cy + a^2/y$)

22. Знайти криві, для яких площа трапеції, утвореної дотичною до кривої в будь-якій її точці, осями координат і прямою, яка паралельна осі ординат і проходить через точку дотику, дорівнює a^2. ($y' = 2y/x - 2a^2/x^2$, $y = Cx + 2a^2/3x$)

23. Знайти криві, в яких відрізок, який відтинає дотична на осі ординат, пропорційний квадратові ординати точки дотику. ($y' = y/x - ky^2/x$, $y = x/(C+kx)$ k – коефіцієнт пропорційності)

24. Знайти криві, в яких відрізок, який відтинає дотична на осі абсцис, пропорційний квадратові абсциси точки дотику. ($x' = x/y - kx^2/y$, $x = y/(C+ky)$ k – коефіцієнт пропорційності)

25. Знайти криву, для якої площа сектора, обмеженого цією кривою, полярною віссю і радіусом-вектором довільної точки кривої, дорівнює шостій частині куба цього радіуса-вектора. ($1 = 8rr'$, $r(0) = 0$, $r = \sqrt{\varphi}/2$)

26. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$, якщо відрізок її дотичної, що знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні $a:b$ (рахуючи від осі Оу). ($b|xy'| = a|y|$, $y = y_0(x/x_0)^{a/b}$)

27. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$, якщо відрізок довільної дотичної між точкою дотику і віссю Оу ділиться в точці перетину з віссю Ох у відношенні $a:b$ (рахуючи від осі Оу) ($xy' = y(1 + a/b)$, $y = y_0(x/x_0)^{1+a/b}$).

28. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$, якщо відрізок її нормалі, який знаходиться між осями координат, ділиться точкою дотику у відношенні *a:b* (рахуючи від осі Оу). ($a|xx'| = b|y|$, $a(x^2 - x_0^2) = b(y^2 - y_0^2)$)

29. Знайти криву, яка проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0)$ і має ту властивість, що в довільній її точці M дотичний вектор MN з кінцем на осі Оу має проекцію на вісь Оу, яка дорівнює *a*. ($xy' = -a$, $y = y_0 + a\ln(x_0/x)$)

30. Знайти криві, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, перпендикуляром, опущеним з точки дотику на вісь абсцис, та віссю Ох, є величиною сталою, яка дорівнює *a*. ($y(1-|x'|) = a$, $\pm x = C + \ln y - y$, $0 < y < a$)

Задача 3. *Розв'язати задачі*

1. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю *v*, яка пропорційна квадратові часу. Встановити залежність між пройденим шляхом s і часом t, якщо відомо, що при $t = 0$ $s = s_0$. ($s = s_0 + k\,t^3/3$)

2. Матеріальна точка масою в 1г рухається прямолінійно під дією сили прямо пропорційної часові з моменту початку руху і обернено пропорційна швидкості руху тіла. В момент $t = 10$ с швидкість дорівнювала 0,5 м/с, а сила – 4 10^{-5} н. Якою буде швидкість через хвилину після початку руху ? (2,7 м/с).

3. Тіло рухається прямолінійно з прискоренням, пропорційним швидкості руху *v* на час *t*. Встановити залежність між швидкістю та часом, якщо при $t = 0$, $v = v_0$. ($v = v_0\, e^{kt}$).

4. Уповільнювальна дія тертя на диск, який обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості ω. Виразити ω як функцію часу, якщо відомо, що за 25 с від початку руху кутова швидкість знизилась з 100 до 50 об/с. ($\omega = 100\, 2^{-t/25}$).

5. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, що пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна 1,5 м/с, через 4с його швидкість становила 1м/с. За який час швидкість зменшиться до 0,01м/с ? Який шлях пройде човен до повної зупинки ? (50 с; 15 м).

6. Кількість світла, що поглинається шаром води, пропорційна кількості світла та товщині водяного шару. Так, шар води завтовшки 35 см

поглинає половину світла, яке на нього падає. Яку частину світла поглинає шар завтовшки 2 м ? (98 %).

7. За 30 днів розпалось 50% початкової кількості радіоактивної речовини (кількість радіоактивної речовини, що розпадається за одиницю часу, пропорційна кількості цієї речовини в даний момент часу). Через скільки днів залишиться 1 % початкової кількості ? (200 дн.).

8. Маса ракети з повним запасом палива дорівнює M, без палива – m; швидкість виходу продуктів горіння з ракети дорівнює C, а початкова швидкість ракети дорівнює нулю. Знайти швидкість ракети після згорання всього палива, нехтуючи силою тяжіння та опором повітря (формула Ціолковського).($v = C \ln(M/m)$).

9. Куля, що рухається з швидкістю $v = 450$ м/с, входить в досить товсту стіну. Опір стіни надає кулі від'ємного прискорення, яке пропорційне квадратові її швидкості. Знайти швидкість кулі через 0,002 с після входу кулі в стіну, якщо коефіцієнт пропорційності $k = 6$ c^{-1}.(70 м/ с).

10. За який час витече вся вода з циліндричного бака діаметром 1,8 м, заввишки 2,45 м через круглий отвір у дні, радіуса 3 см ? Вісь бака вважати вертикальною. (17,5 хв)

11. Лійка має вигляд конуса, радіус основи якого 6 см, висота 10 см. За який час витече вся вода з наповненої доверху лійки через отвір діаметром 0,5 см, зроблений у вершині конуса ? (27,2 с)

12. У залі, кубатурою 10 800 куб.м, повітря містило після зборів 0,12 % CO_2. Скільки куб.м повітря, що містить 0,04% CO_2 треба щохвилини подавати до залу, щоб через 10 хв у ній було 0,06 % CO_2 ? (1497 куб.м).

13. На деяку кількість нерозчинної речовини, що містить у своїх порах 2 кг солі, діємо 30 л води. Через 5 хв розчиняється 1 кг солі. Через який час розчиниться 99 % початкової кількості солі ? (37,3 хв).

14. В 75 л розчину міститься 3 кг цукру. В резервуар втікає чиста вода із швидкістю 4 л/хв, а суміш витікає із швидкістю 2 л/хв. Концентрація суміші підтримується рівномірною. Скільки цукру буде в резервуарі через 25 хв після початку процесу ? (1,8 кг).

15. В резервуар глибиною 4 м, поперечний переріз якого – квадрат зі стороною 6 м, втікає вода зі швидкістю 10 $м^3$/хв. За який час резервуар буде наповнений, якщо за той же час вода витікає з нього через квадратний отвір, зі стороною 1/12 м, у дні. (14,7 хв).

16. Паропровідна труба діаметром 20 см захищена шаром магнезії товщиною 10 см. Теплопровідність магнезію $k = 0{,}71$ Дж / (м · с · К). Припустивши, що температура труби 160 ^{0}C, а зовнішньої поверхні шару магнезії 30 ^{0}C, знайти закон розповсюдження температури всередині покриття а також кількість теплоти, яка віддається трубою завдовжки 1м, в навколишнє середовище на протязі доби. ($T = 592 - 187{,}6 \ln r$ ^{0}C ; $Q = 7236\,000$ Дж) .

17. Локомотив рухається по горизонтальній ділянці шляху із швидкістю 72 км /год. Знайти час і відстань до повної зупинки після гальмування, якщо опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги. (10,2 с ; 102 м).

18. Пароплав водотоннажності 100 тис.тонн рухається прямолінійно з швидкістю 10 м/с. Опір води пропорційний квадратові швидкості пароплава і дорівнює 25 кН при швидкості 1 м /с. Яку відстань пройде пароплав після вимкнення двигуна, спершу ніж швидкість зменшиться вдвоє? За який час пароплав пройде цю відстань? (2,75 км ; 400 с).

19. Знайти на якій відстані та за який час можна зупинити автомобіль, який рухається з швидкістю 54 км/год, якщо сила гальмування складає 2500 Н на тонну ваги автомобіля. (46 м ; 6.1 с).

20. Товщина цегляної стіни 30 см, k = 0,63 Дж / (м · с · К). Встановити залежність температури від відстані точки до зовнішнього краю стіни, якщо температура дорівнює 20 ^{0}C на внутрішній і 0 ^{0}C на зовнішній поверхні стіни. Знайти також кількість теплоти, яку стіна площею 1 м^2 віддає навколишньому середовищу на протязі доби.($T = 2x/3$ ^{0}C ; $Q = 3\,620\,000$ Дж).

21. Порожнинна залізна куля (к = 58,66 Дж / (м ·с ·К)), внутрішній радіус якої 6 см, а зовнішній 10 см, знаходиться в стаціонарному тепловому режимі, причому температура на внутрішній його поверхні 200 ^{0}C, а на зовнішній 20 ^{0}C. Знайти температуру на відстані r (6 см < r < 10 см) від центра кулі та кількість теплоти, яку віддає куля навколишньому середовищу на 1 см.($T = 2700/r - 250$ ^{0}C; $Q = 19\,892{,}77$ Дж).

22. Парашутист, викинувшись з аеростату без початкової швидкості, вільно падає в атмосфері, не розкриваючи парашута. В цьому випадку на нього діють (крім сили ваги і інерції) сила опору F_0 зустрічного потоку повітря, яка пропорційна (з коефіцієнтом пропорційності k) квадратові швидкості руху. Відомо, що при швидкості $v = 10$м /с $F_0 = 20$ Н. Знайти залежність швидкості від часу та визначити максимальну швидкість падіння, прийнявши густину повітря $\rho = const$,

масу парашутиста 72 кг, g = 10 м /с^2. ($t=\frac{m}{2k\sqrt{q}}\ln\left|\frac{\sqrt{G}+\sqrt{k}v}{\sqrt{G}-\sqrt{k}v}\right|$,

$v_{мак}=60 м/с$)

23.Матеріальна точка рухається вздовж прямої з швидкістю, яка обернено пропорційна шляху. У початковий момент руху точка знаходилася на відстані 5 м від початку відліку шляху і мала швидкість v_0 = 20 м/с. Знайти пройдений шлях і швидкість точки через 10с після початку руху.(s = 40 м ; v = 20/9 м /с).

24.Куля входить в дошку товщиною 0,1 м з швидкістю 200 м/с, а вилітає, пробивши її, з швидкістю 80 м /с. Приймаючи, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадратові часу руху, знайти скільки часу продовжувався рух кулі через дошку. (0,00082 с)

25.Визначити час скоєння злочину, якщо в момент виявлення температура тіла дорівнювала 31^{0}С, а через годину – 29^{0}С. (Припустити, що в момент смерті людини температура її тіла дорівнювала 37^{0}С, а температура повітря 21 ^{0}С). (-2,1063год)

26.Температура витягнутого з печі хліба на протязі 20 хв знизилась від 100 до 60^{0}С, температура навколишнього середовища 25^{0}С. За який час з моменту охолодження температура хліба знизиться до 30^{0}С ? (71хв).

27.Конденсатор ємністю С вмикається в коло з напругою U і опором R. Знайти заряд q конденсатора в момент часу t після ввімкнення. ($q = CU\,(1-e^{-t/(CR)})$).

28.Швидкість знецінювання обладнання внаслідок його зношення пропорційна в кожний даний момент його фактичній вартості S. Початкова вартість складає 50 тис. гривень. Якою буде вартість обладнання через t років. (Відповідь: $S = 50\,e^{-kt}$).

29.Ціна деякого товару складала спочатку 10 грн., а через t тижнів – $p(t)$ грн. Попит визначається рівнянням $q=60-2p+6\frac{dp}{dt}$, а пропозиція - рівнянням $S = 6p - 4 + 62\frac{dp}{dt}$. Знайти функцію ціни за умовою рівноваги попиту і пропозиції. ($p(t)=8+2e^{-t/7}$)

30.В колі підтримується напруга U = *300 В*, опір кола R = *150 Ом*, коефіцієнт самоіндукції L = *30 Гн*. За який час з моменту замикання кола струм силою І досягне 99% свого граничного значення? (0,92с)

§1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1 Основні означення та поняття

1.1.1 Означення диференціального рівняння (ДР) першого порядку

Звичайним ДР першого порядку в загальній формі називається рівняння вигляду:

$$F(x,y,y')=0, \tag{1}$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція, $y'=dy/dx$ - її похідна; $F(x,y,y')$ - задана функція трьох змінних x,y,y', які змінюються в деякій області тривимірного простору R_3.

Рівняння (1) *називають ще неявним або не розв'язаним відносно похідної* y'.

Якщо рівняння (1) *можна розв'язати відносно* y', *то воно набирає вигляду*

$$y'=f(x,y). \tag{2}$$

Таку форму рівняння першого порядку називають явною, або розв'язаною відносно похідної, або нормальною. Будемо розглядати в основному такі рівняння.

Якщо права частина рівняння (2) визначена і неперервна функція двох змінних x і y в деякій області D двовимірного простору R_2 $(D\subset R_2)$, то область D *називають областю визначення ДР* (2).

Якщо в околі точок (x, y) функція $f(x,y)$ є необмеженою, то поряд з рівнянням (2) розглядають *перевернуте ДР*:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}, \tag{3}$$

множину цих точок, а також точки, де функція $f(x,y)$ не визначена, але може бути довизначена за неперервністю (існує скінченна границя в цих точках) приєднують до області визначення ДР(2).

Рівняння (3) *доцільно розглядати також і тоді, коли воно простіше розв'язується, ніж ДР* (2).

Рівняння (2) можна подати у формі, в якій змінні x і y рівноправні; тобто кожну з них можна розглядати, як функцію іншої змінної. Така форма *називається симетричною* або *диференціальною* і має вигляд:

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0. \tag{4}$$

Якщо в рівнянні (2) покласти $y' = dy/dx$, то одержимо $dy/dx = f(x,y)$, або $dy = f(x,y)dx$, або $dy - f(x,y)dx = 0$, остання форма є окремим випадком рівняння (4).

Навпаки, кожне рівняння (4), при $Q(x,y) \neq 0$ ($P(x,y) \neq 0$), можна подати в нормальній формі, тобто розв'язати відносно похідної: $y' = f(x,y)$ ($x' = \varphi(x,y)$), де

$$(f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}), \qquad (\varphi(x,y) = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}).$$

П р и к л а д и диференціальних рівнянь виду (1) - (4).

1) $x^2y' + \ln x = 0$ – загальна (або неявна) форма.

2) $y' = -\ln x / x^2$ – нормальна (або явна) форма.

3) $x' = -x^2 / \ln x$ – перевернуте до рівняння 2.

4) $x^2dy + \ln x\, dx = 0$ – симетрична (або диференціальна) форма.

1.1.2 Розв'язок рівняння. Основна задача теорії інтегрування. Задача Коші

Означення. *Розв'язком ДР (2) на інтервалі (a,b) називають будь-яку неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка перетворює дане рівняння в тотожність на інтервалі (a,b), тобто: $\varphi'(x) \equiv f(x,\varphi(x))$, $\forall x \in (a,b)$.*

Н а п р и к л а д, функція $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ є розв'язком диференціального рівняння

$$y' + xy = 0 . \qquad (*)$$

Дійсно, $y' = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$; підставивши значення y і y' в рівняння (*), одержуємо тотожність:

$$-xe^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}} \equiv 0 .$$

Звичайно, розв'язок ДР може подаватись не тільки явно, $y = \varphi(x)$, але й параметрично $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ або неявно $\Phi(x,y) = 0$.

Розв'язок в неявній формі прийнято називати ***інтегралом диференціального рівняння.***

П р и к л а д. Чи є функція $x^2+y^4=Cy^2$ інтегралом ДР
$$xy\,dx + (y^4 - x^2)dy = 0\ ?$$

Диференціюємо задану неявно функцію, одержимо:
$2xdx + 4y^3dy = 2Cydy$. Звідси $dx = ((2Cy - 4y^3)/x)$.

Підставляємо знайдене значення диференціала dx в задане рівняння, одержуємо тотожність:
$$xy\frac{Cy-2y^3}{x}dy + (y^4 - x^2)dy = (Cy^2 - y^4 - x^2)dy = 0,\quad 0=0.$$

Щодо кількості розв'язків, то диференціальне рівняння першого порядку за певних умов має їх нескінченну множину. Це можна помітити з попереднього прикладу, де C – довільна стала, а також з основної задачі інтегрального числення функції однієї змінної, яка приводить до необхідності знаходження невідомої функції за її похідною чи диференціалом, тобто до інтегрування найпростішого ДР
$$y' = f(x) \quad \text{або} \quad dy = f(x)dx, \tag{5}$$
де y – невідома функція x, а $f(x)$ – відома неперервна функція в інтервалі $(a,в)$. Нескінченна множина первісних для функції $f(x)$, які є розв'язками ДР (5), задається формулою
$$y = \int f(x)dx + C \quad (a < x < b), \tag{6}$$
де C – довільна стала.

Якщо рівняння (5) (або більш складного вигляду) не інтегрується в елементарних функціях, проте всі його розв'язки виражаються через невизначені інтеграли (від елементарних функцій), то говорять, що рівняння проінтегровано в квадратурах.

***Квадратурою** називається операція взяття невизначеного інтеграла.*

Н а п р и к л а д. Розв'язки рівняння $$y' = e^{-x^2} \tag{*}$$
задаються формулою $y = \int e^{-x^2}dx + C$.

Тут перший доданок у правій частині є фіксованою первісною для функції e^{-x^2}, а C – довільною сталою.

Таким чином рівняння (*) проінтегровано в квадратурах.

Якщо рівняння може бути проінтегровано в елементарних функціях або квадратурах, то говорять що воно зінтегровано в скінченому вигляді. Слід відмітити, що значно більше рівнянь не інтегруються в скінченому вигляді, і для аналітичного подання розв'язків потребують більш складного математичного апарату.

*Основною задачею інтегрування ДР є **знаходження його розв'язків і вивчення їх властивостей.***

Ця задача найбільш повно розв'язана для лінійних рівнянь. В загальному вигляді така задача не може бути розв'язаною.

Проте на практиці часто доводиться знаходити не всі розв'язки, тобто не загальний розв'язок ДР, а розв'язок, який задовольняє певні додаткові умови. Однією з таких задач є **задача Коші** (початкова задача).

Постановка задачі: *серед усіх розв'язків рівняння $y' = f(x,y)$ знайти той розв'язок $y = \varphi(x)$, який при заданому значенні x_0 незалежної змінної приймає задане значення y_0 ($\varphi(x_0)=y_0$), де x_0 і y_0 – задані числа, які називають початковими значеннями, а умову $\varphi(x_0) = y_0$ – початковою умовою.*

Виникає питання, чи завжди задача Коші має розв'язок. Для рівняння (2) відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема Пеано(достатні умови існування розв'язку задачі Коші).

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна відносно обох змінних у прямокутнику

$$\Pi = \{(x,y): |x-x_0| \le a,\ |y-y_0| \le b\}, \tag{7}$$

де $a, b > 0$. Тоді задача Коші на проміжку Пеано

$$I = (x_0 - h,\ x_0 + h), \tag{8}$$

де
$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},\quad M = \max_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|, \tag{9}$$

має хоча б один розв'язок.

Для того, щоб через кожну точку області існування розв'язків проходила лише одна інтегральна крива, треба поставити перед функцією $f'(x,y)$ додаткові вимоги в цій області. Сформулюємо теореми Пікара і Коші, в яких вказано на такі додаткові вимоги.

Теорема Пікара (достатні умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші).

Нехай функція $f(x,y)$:

1) неперервна в прямокутнику (7) *відносно обох змінних;*

2) рівномірно відносно x задовольняє умову Ліпшиця за змінною y, тобто для будь-яких y_1, y_2 $|y_0 - y_i| \le b$ $(i=1,2)$ існує число $L = const > 0$:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|.$$

Тоді задача Коші на проміжку (8) *має єдиний розв'язок.*

Наслідком з теореми Пікара є теорема Коші.

Теорема Коші (**про існування та єдиність розв'язку задачі Коші**).

Якщо в рівнянні $y'=f(x,y)$ функція $f(x,y)$ та частинна похідна по y – $f'_y(x,y)$ неперервні в області $D\subset R_2$, яка містить точку $M_0(x_0,y_0)$ $(M_0\in D)$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y=y(x)$, визначений на проміжку (8), *який задовольняє початкову умову $y(x_0)=y_0$.*

Теорема Коші дає можливість за неперевністю функції $f(x,y)$ та частинної похідної по y – $f'_y(x,y)$ розв'язати питання про існування і єдиність розв'язків ДР (2), це особливо важливо в тих випадках, коли наперед невідомо, чи має дане рівняння розв'язок.

П р и к л а д. Оцінити область визначення розв'язку ДР

$$y'=x^2+y^2, \tag{10}$$

що задовольняє початкову умову $y(0)=0$. (11)

Тут функція $f(x,y)=x^2+y^2$ і її частинна похідна $f'_y(x,y)$ є неперервними функціями для всіх $(x,y)\in R_2$. Тому за теоремою Коші через кожну точку площини Oxy проходитиме єдина інтегральна крива заданого рівняння. Нас цікавить інтегральна крива, яка проходить через точку (0,0).

Розглянемо прямокутник $\Pi=\{(x,y):|x|\le a,\ |y|\le b\}$ з центром в точці (0,0). Маємо $M=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|=\max\limits_{(x,y)\in\Pi}(x^2+y^2)=a^2+b^2$

Число h, означуване теоремою Пікара, дорівнює

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\right\}.$$

Можна взяти, наприклад, $a=b=1$, тоді $h=1/2$. Знайдемо найбільше значення h:
$$h_0=\max_{a>0,b>0}\ \min\left\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\right\}.$$

Якщо $a>0$ зафіксоване, то функція $\phi(b)=\dfrac{b}{a^2+b^2}$ набуває найбільшого значення, що дорівнює $1/2a$, в точці $b=a$. Тому:

$$\max_{a>0,b>0}\ \min\left\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\right\}=\max_{a>0}\ \min\left\{a,\frac{1}{2a}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

За теоремою Пікара, рівняння (10) має єдиний розв'язок, який задовольняє початкову умову (11). Цей розв'язок визначений $\left[-\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2\right]$ принаймні на відрізку і на цьому відрізку неперервно диференційовний.

Результат, який ми дістали, має особливе значення у зв'язку з тим, що розв'язок заданого рівняння, як показав Ліувілль, не є ні елементарною функцією, ні інтегралом від елементарної функції.

1.1.3 Класифікація розв'язків: загальний, частинний, особливий

Нехай D – є деяка область на площині R_2, через кожну точку якої проходить одна і тільки одна інтегральна крива рівняння (2). Наприклад, можна допустити, що в достатньо малому околі кожної точки області $D \subset R_2$ функція $f(x,y)$ рівняння (2) задовольняє умови теореми Коші.

Означення. *Функція* $y=\varphi(x,C)$, (12)
яка залежить від x *і довільної сталої* C *і неперервно диференційовна по* x, *називається загальним розв'язком рівняння* (2) *в області* D, *якщо вона задовольняє дві умови:*

1) *рівність* (12) *можна розв'язати в області* D *відносно довільної сталої:* $C=\psi(x,y)$, (13)

2) *функція* (12) *є розв'язком рівняння* (2) *при всіх значеннях довільної сталої* C, *яка визначається рівністю* (13), *коли точка* $(x,y) \in D$.

П р и к л а д. Розглянемо рівняння $y'=3x^2$.

Оскільки умови теореми Коші виконуються в околі довільної точки $(x_0,y_0) \in R_2$, то в ролі D можна брати всю площину або довільну її частину. Загальним розв'язком буде

$$y=x^3+C. \qquad (*)$$

Іноді у формулі загального розв'язку (12) роль довільної сталої C виконує початкове значення y_0 шуканої функції $y(x)$ при деякому фіксованому значенні x_0 аргументу x. В цьому випадку формула (12) набуває такого вигляду $y=\varphi(x,x_0,y_0)$.

Така форма запису загального розв'язку називається *загальним розв'язком у формі Коші.*

Розв'язок (*) з початковими даними x_0, y_0 має вигляд

$$y = x^3+y_0 - x_0^3.$$

Загальний розв'язок рівняння (2), *записаний в неявному вигляді* $\Phi(x,y,C)=0$, *називають* ***загальним інтегралом*** *рівняння* (2). Часто загальний інтеграл одержують у вигляді $\Phi(x,y)=C$, *ліву частину цієї рівності називають* ***інтегралом*** *рівняння* (2).

Частинний розв'язок – *це розв'язок, в кожній точці якого зберігається єдиність розв'язку задачі Коші. Розв'язок, який дістають із загального при конкретному значенні довільної сталої (включаючи $\pm\infty$), є частинним розв'язком.*

П р и к л а д. Розглянемо рівняння $y'=y$.

Можна переконатись в тому, що функція $y=Ce^x$ є загальним розв'язком цього рівняння на площині R_2. Кожний розв'язок виду $y=C_0e^x$, де C_0 – конкретне значення довільної сталої, є частиним розв'язком. Зокрема, при $C_0=1$ одержуємо частинний розв'язок $y=e^x$, при $C_0=0$ – $y=0$ тощо.

Особливий розв'язок – *це розв'язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші.* Особливий розв'язок не може бути одержаний з формули загального розв'язку (12) ні при якому конкретному числовому значенні довільної сталої C (проте може бути одержаний при $C=C(x)$).

Н а п р и к л а д, $y=0$ є розв'язком рівняння $y'=2\sqrt{y}$, проте його не можна одержати із формули загального розв'язку $y=(x-C)^2$ ні при якому конкретному значенні довільної сталої C(проте можна одержати при $C=x$).

Легко бачити, що в усіх точках осі Ox $(y=0)$ частинна похідна по y $(2\sqrt{y})'_y=1/\sqrt{y}$,

перетворюється в нескінченність; тобто не виконується умова єдиності розв'язку задачі Коші.

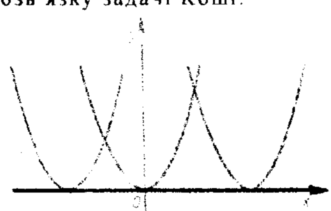


Рисунок 1.1

Інтегральна крива, що відповідає особливому розв'язку, називається ***особливою інтегральною кривою.***

Крива, що дотикається до кожної кривої сім'ї в одній або декількох точках і складається тільки з цих точок дотику, називається ***обвідною*** *цієї сім'ї.*

Інтегральна крива $y=0$ є обвідною сім'ї інтегральних кривих $y=(x-C)^2$ (рис. 1.1).

1.1.4 Геометричний зміст ДР першого порядку

Нехай права частина рівняння (2) визначена в деякій області $D\subset R_2$, а $y=y(x)$ – інтегральна крива цього рівняння, яка проходить через точку $M(x,y) \in D$. Тоді інтегральна крива в точці $M(x,y)$ має дотичну, кутовий коефіцієнт якої дорівнює $y'(x)$ або $f(x,y(x))$. *Отже, рівняння* $y' = f(x,y)$ *визначає зв'язок між координатами точки області D та кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої у цій точці.*

Якщо через α позначити кут, який утворює дотична до інтегральної кривої в точці $M(x,y)$ з додатним напрямом осі Ox, то напрям дотичної до інтегральної кривої в цій точці буде визначатись формулою:

$$tg\alpha = f(x,y). \tag{14}$$

Таким чином, напрям дотичної можна знайти за формулою (14), не знаходячи самих інтегральних кривих, в кожній точці області D. *Побудувавши в кожній точці області D одиничний вектор (одиничний відрізок), напрям якого визначається формулою (14), одержимо п о л е н а п р я м і в* (рис. 1.2).

Тому диференціальне рівняння (2), з геометричної точки зору, задає в області D поле напрямів.

Замітимо, якщо в точці (x_0, y_0) функція перетворюється на невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, то її довизначають за неперервністю, або вважають, що в точці (x_0, y_0) поле невизначене. Наприклад, вважатимемо, що в точці $(0,0)$ ДР $y' = (\sin x)/x$ породжує напрям такий, що $tg\alpha = 1$, тоді як напрям поля, породженого рівнянням $y' = (x+y)/(x-y)$, є невизначеним у цій точці.

Інтегральна крива, тобто розв'язок ДР (2), *що проходить через точку* $M(x,y) \in D$ *відрізняється від усіх інших кривих, які проходять через цю точку тим, що напрям дотичної в даній точці до інтегральної кривої збігається з напрямом поля.*

Поле напрямів зручно будувати таким чином. Будуються лінії, у яких напрям поля в кожній точці однаковий, тобто $y' = k$ або $f(x,y) = k$. Такі лінії називаються *ізоклінами*.

Рисунок 1.2

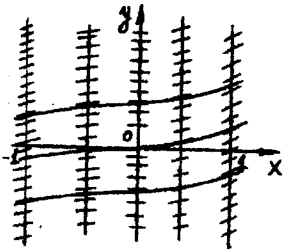


Рисунок 1.3

Розглянемо приклад. Побудуємо поле напрямів рівняння $y'=x^2$. Скористаємось поняттям *ізокліни*. Рівняння ізокліни $x^2 = k$. Надаємо k значення, наприклад, 1; ¼; 0 і т.д. Якщо $x^2 = 1$, то це - рівняння двох прямих $x = -1$ і $x = 1$. У кожній точці цих прямих відрізок дотичної до інтегральної кривої нахилений до осі Ox під кутом 45^0. Якщо $k = 0$, то ізокліна $x = 0$ є віссю Oy. Побудувавши достатню кількість ізоклін, можна провести інтегральну криву так, щоб в кожній точці області D дотична до кривої збігалася з напрямом поля (рис.1.3). Отже, метод ізоклін можна використати при побудові наближених графічних розв`язків диференціального рівняння. Розглянемо ще один приклад побудови поля напрямів та розв`язків рівняння.

П р и к л а д. Побудувати поле напрямів та накреслити схематично інтегральні лінії рівняння $y' = y - x$.

Нехай $y'=k$, де k – стала. Запишемо рівняння ізоклін $y - x = k$ або $y + x = k$. Ізоклінами цього рівняння є паралельні прямі. Надаємо значення параметру k. Якщо $k = 0$, то рівняння ізокліни $y - x = 0$. Ізокліну перетинаємо відрізками з кутом нахилу до додатного напряму осі абсцис, рівним нулеві (див. рис. 1.4). Далі надамо k значення -2; -1; 1; 2. Рівняннями відповідних ізоклін будуть прямі $y = x - 2$, $y = x - 1$, $y = x + 1$, $y = x + 2$. Ізокліни перетинаємо відрізками з кутами нахилу, відповідно,

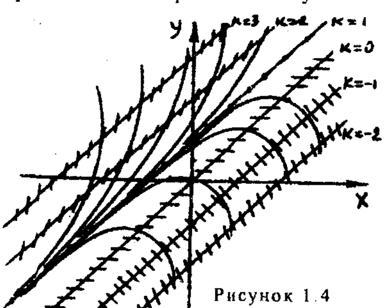


Рисунок 1.4

$$\alpha_1 = \pi - arctg2;\ \alpha_2 = \frac{3}{4}\pi;\ \alpha_3 = \frac{\pi}{4};$$

$$\alpha_4 = arctg2.$$

Отже, побудовано поле напрямів. Далі за допомогою поля напрямів будуємо схематично інтегральні криві. Хоча вони побудовані наближено, але дозволяють уявити та проаналізувати поведінку інтегральних кривих. Так, ізокліна $y=x+1$ є інтегральною кривою, що ділить площину на дві сім`ї інтегральних кривих, які асимптотично наближаються до прямої $y = x + 1$. Інтегральні криві, що лежать нижче прямої $y = x + 1$, мають екстремуми, яким відповідають точки, що лежать на прямій $y = x$. Цей аналіз можна продовжити, враховуючи інші особливості розв`язків рівняння.

1.2 Інтегрування деяких типів ДР першого порядку

Тип 1. Неповні рівняння першого порядку. Найпростішим неповним ДР є рівняння (5), тобто рівняння, яке не містить шуканої функції ($y' = f(x)$).

1.Якщо *f(x) неперервна при a < x < b, то однією з форм загального роз'язку цього рівняння є формула* (6). *Якщо в ролі первісної взяти визначений інтеграл з верхньою змінною межею інтегрування x*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx,$$

де x_0 – довільне фіксоване число з інтервалу неперервності функції f(x), то формула (6) *набуде вигляду*

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C. \tag{15}$$

Тут $C = y(x_0) = y_0$, тому (15) можна записати у вигляді

$$y = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0.$$

Це загальний розв'язок рівняння (5) в формі Коші.

Кожна із формул загального розв'язку дає можливість знайти розв'язок, який задовольняє початкову умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

де y_0 можна задати довільно, а x_0 належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

П р и к л а д 1. Серед усіх розв'язків ДР $y' = 4x^3$ знайти розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Усі розв'язки заданого ДР задаються формулою

$$y = \int 4x^3 dx + C = x^4 + C \qquad (*)$$

Підставляючи в (*) початкові дані, одержимо рівняння для знаходження C: $1 = 0^4 + C$. Звідси $C = 1$.

Одже, шуканим розв'язком є функція (рис. 1.5)

$$y = x^4 + 1 \qquad (**)$$

Розв'язок (**) має мінімум при $x = 0$, оскільки $y(0) = 0$ і при переході через $x = 0$ похідна y' змінює знак з – на +. Це залишається справедливим для кожної інтегральної кривої (*). Тому *вісь Oy є лінією екстремумів*, а дотичні до інтегральних кривих в точках перетину їх з віссю Oy паралельні осі Ox.

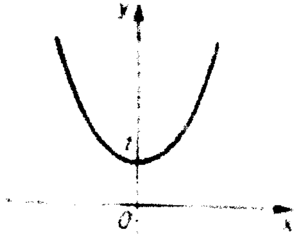


Рисунок 1.5.

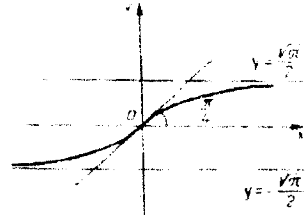


Рисунок 1.6.

П р и к л а д 2. Загальний розв'язок рівняння $y' = e^{-x^2}$, за формулою (6) можна записати у вигляді

$$y=\int e^{-x^2}dx+C. \qquad (16)$$

Але ця форма незручна як для розв'язання задачі Коші, так і для вивчення властивостей розв'язків, оскільки невизначений інтеграл, який входить у формулу (16), не береться в класі елементарних функцій. В подібних випадках доцільно користуватись загальним інтегралом у формі визначеного інтеграла (15). В силу неперервності функції e^{-x^2} на R, значення x_0 можна брати довільним. Наприклад, $x_0 = 0$. При $x_0 = 0$ одержимо:

$$y=\int_0^x e^{-x^2}dx+C. \qquad (17)$$

Користуючись формулою (17) знайдемо розв'язок, який задовольняє початкову умову $y_0 = 0$: $\quad 0=y(0)=\int_0^0 e^{-x^2}dx+C, \quad 0=C.$ Тобто шуканим розв'язком буде функція:

$$y=\int_0^x e^{-x^2}dx. \qquad (18)$$

Ця функція *монотонно зростаюча*, чого і слід було очікувати, оскільки в заданому рівнянні $y'>0,\ \forall x\in R$. Інтегральна крива (18) перетинає вісь Oy під кутом $\pi/4$ до осі Ox, оскільки $tg\alpha=y'(0)=1$. Функція (18) *непарна*. Дійсно:

$$y(-x)=\int_0^{-x} e^{-t^2}dt=\begin{vmatrix} t=-z, & t=0\Rightarrow z=0 \\ dt=-dz, & t=-x\Rightarrow z=x\end{vmatrix}=-\int_0^x e^{-z^2}dz=-y(x).$$

Розв'язок (18) є *обмеженою функцією*, оскільки

$$\left|\int_0^x e^{-x^2}dx\right|<\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}/2.$$

Звідси слідує, що *прямі* $y=\pm\sqrt{\pi}/2$ є *горизонтальними асимптотами* інтегральної кривої.

Оскільки $y'' = e^{-x^2}(-2x)$ дорівнює нулю при $x = 0$ і змінює знак з + на – при переході через $x = 0$, то розв'язок (18), і всі розв'язки (17), *в точках перетину з віссю Оу* мають *точки перегину*. Вісь Oy є лінією точок перегину інтегральних кривих. При $x < 0$ $y'' > 0$, тому інтегральні криві зліва від осі Oy опуклі донизу, а при $x > 0$ $y'' < 0$, тому справа від осі Oy інтегральні криві опуклі доверху. Графік розв'язку зображено на рис. 1.6.

2. Нехай $f(x) \to \infty$ при $x \to c$, де точка розриву $x = c$ знаходиться всередині або на межі інтервалу (a,b). В усіх інших точках інтервалу $f(x)$ є неперервною. Тоді поряд з рівнянням (5) розглядають перевернуте рівняння $dx/dy = 1/f(x)$. Дослідження цього рівняння наведено в [12]. Це рівняння має очевидний розв'язок $x = c$, який приєднують до розв'язків рівняння (5).

П р и к л а д 3. Розглянемо рівняння $y' = 1/x$. Тут права частина неперервна при всіх x, відмінних від нуля, при $x = 0$ перетворюється в нескінченність. Якщо $x \neq 0$ (рис. 1.7), то розв'язки задаються формулою

$$y = \ln|x| + C \tag{19}$$

Розглядаючи перевернуте рівняння

$$\frac{dx}{dy} = x$$

в точках осі Oy, бачимо, що остання буде інтегральною кривою, оскільки обидві частини цього рівняння перетворюються в нуль при $x = 0$. Тому вісь Oy слід приєднати до інтегральних кривих (19). Цей розв'язок *частинний*. Він є *асимптотою* розв'язків (19) (див. рис. 1.7)

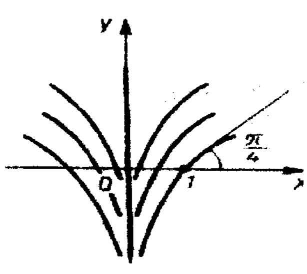


Рисунок 1.7.

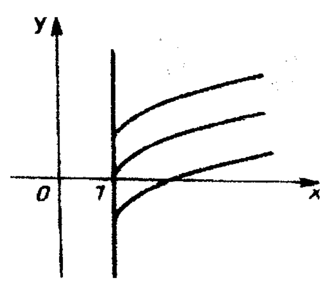


Рисунок 1.8.

П р и к л а д 4. Для рівняння $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

інтегральними кривими будуть півпараболи (рис. 1.8) $y = \sqrt{x-1} + C$

і пряма $x = 1$. Розв'язок $x = 1$ *особливий*. Він є *обвідною* сім'ї інтегральних кривих (див. рис. 1.8).

До неповних рівнянь належать також рівняння виду (2), якщо права частина не містить в явному вигляді незалежної змінної, тобто
$$y' = f(y), \tag{20}$$
де $f(y)$ неперервна в деякому інтервалі (c,d).

Якщо $f(y) \neq 0$, то переходимо до перевернутого рівняння
$$x' = \frac{1}{f(y)}. \tag{21}$$

Звідси
$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C, \tag{22}$$

або
$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} + C. \tag{23}$$

Кожна з формул (22),(23) є загальним інтегралом рівняння(20).

Якщо права частина рівняння (20) перетворюється в нуль при $y = m$, причому $c < m < d$, то воно має очевидний розв'язок
$$y = m, \tag{24}$$
оскільки обидві частини даного рівняння перетворюються в нуль при $y = m$.

Розв'язок (24) при переході від рівняння (20) до рівняння (21) можна загубити. Тому слід інтегрувати рівняння (20) так: ділимо обидві його частини на $f(y)$ і множимо на dx
$$\frac{dy}{f(y)} = dx \quad (f(y) = 0?). \tag{25}$$

В дужках записано для пам'яті рівняння, яке слід розглянути після інтегрування (25). Інтегральними кривими рівняння (20) будуть криві, які входять в загальний інтеграл (22) або (23), і прямі $y = m$, де m – корінь рівняння $f(y) = 0$.

П р и к л а д. Зінтегрувати рівняння $y' = 1 + y^2$.

Тут $f(y) = 1 + y^2 \neq 0$, $y \in (+\infty, -\infty)$. Перевернуте рівняння $x' = 1/(1 + y^2)$. Зінтегрувавши його, дістаємо загальний інтеграл
$$x = \int \frac{dy}{1 + y^2} + C = arctg\ y + C \cdot$$

Розв'язавши цю рівність відносно y, знаходимо загальний розв'язок
$$y = tg(x - C), \quad x - C \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Розглянемо ДР 1-го порядку, записане в симетричній формі
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{26}$$
з якого легко одержати ряд типів ДР, які інтегруються в квадратурах.

Тип 2. Рівняння з відокремленими змінними. *Якщо в рівнянні* (26) *функція* $P(x,y)$ *не залежить від* y, *і* $Q(x,y)$ *не залежить від* x, *то його називають* ***ДР з відокремленими змінними*** *і воно має вигляд:*
$$P(x)dx + Q(y)dy = 0. \tag{27}$$
Рівняння (27), як і рівняння (5), є найпростішим ДР. Загальний інтеграл рівняння (27) знаходиться почленним інтегруванням і може бути записаний як в формі визначеного, так і в формі невизначеного інтеграла.

Дійсно, нехай функції $P(x)$ і $Q(y)$ неперервні в області зміни значень x і y. Тоді рівняння (27) можна записати у вигляді:
$$d\left(\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy\right) = 0,$$
звідси
$$\int_{x_0}^{x} P(x)dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)dy = C. \tag{28}$$

Це співвідношення, де x_0 і y_0 – деякі фіксовані числа з області неперервності функцій $P(x)$ і $Q(y)$, а C – довільна стала, зв'язує шуканий розв'язок y, незалежну змінну x і довільну сталу C. Тобто ми одержали *загальний інтеграл рівняння* (27) у вигляді визначеного інтеграла.

Загальний інтеграл (28) можна записати і у вигляді
$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C\ , \tag{29}$$
оскільки визначені інтеграли з верхньою змінною межею інтегрування можна замінити невизначеними інтегралами, тому що вони є первісними для одних і тих же підінтегральних функцій, а значить можуть відрізнятися лише сталими доданками, які можна включити в C.

П р и к л а д. Знайти загальний розв'язок рівняння $(x+2)dx+(y+1)dy=0$.

Його загальний інтеграл можна записати у вигляді:

$$\int_0^x (2x+4)dx + \int_1^y (2y+2)dy = C\cdot$$

Виконуючи обчислення, одержуємо $x^2+2x+y^2+4y=C+3$. Скориставшись формулою (29), одержимо

$$\int (2x+2)dx + \int (2y+4)dy = C \quad \text{або} \quad x^2+2x+y^2+4y=C.$$

Знайдені загальні інтеграли відрізняються лише значеннями довільної сталої.

Зауваження. Неповне ДР (5) є також ДР з відокремленими змінними.

Тип 3. Рівняння з відокремлюваними змінними. *Якщо в* (26) *кожну з функцій $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ можна подати у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить лише від x, а друга – лише від y, то ДР* (26) *можна записати у вигляді:*

$$M(x)N(y)dx+M_1(x)N_1(y)dy=0. \tag{30}$$

Рівняння (30) називається ***ДР з відокремлюваними змінними.***

Для того, щоб одержати формулу загального інтеграла заданого рівняння, спочатку шляхом ділення обох частин рівняння (30) на добуток $N(y)M_1(x)$ відокремлюємо змінні цього рівняння:

$$\frac{M(x)}{M_1(x)}dx+\frac{N_1(y)}{N(x)}dy=0, \tag{31}$$

а після, зінтегрувавши (31), одержуємо загальний інтеграл

$$\int\frac{M(x)}{M_1(x)}dx+\int\frac{N_1(y)}{N(y)}dy=C. \tag{32}$$

При діленні рівняння (30) на добуток $N(y)M_1(x)$ можна втратити деякі розв'язки, які одержуються з рівняння $N(y)M_1(x)=0$.

Якщо рівняння $N(y)=0$ і $M_1(x)=0$ мають розв'язки виду $y=b$, $x=a$, то легко бачити, що вони є розв'язками рівняння (30). Тому слід перевірити, чи не входять вони в загальний інтеграл (32). Якщо ні, то вони є особливими.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $(x+1)\sqrt{y}\,dx-x\,dy=0$.

Обидві частини рівняння ділимо на добуток $x\sqrt{y}$ і одержуємо рівняння з відокремленими змінними $\frac{x+1}{x}dx - \frac{dx}{\sqrt{y}} = 0$, звідси: $x + \ln x - 2\sqrt{y} = C$. Розглядаємо рівняння $x\sqrt{y} = 0$, розв'язками якого є $x=0$ і $y=0$, які є також розв'язками заданого рівняння, і вони не входять в загальний інтеграл. Значить, розв'язки $x=0$, $y=0$ є особливими.

Зауваження:

1) неповне ДР (20) є ДР типу 3;
2) у формі (2) ДР з відокремлюваними змінними має вигляд: $y'=f_1(x)f_2(y)$. Очевидно, що функції $y = m$ такі, що $f_2(m)=0$ є розв'язками цього рівняння. Інші розв'язки, вздовж яких $f_2(y)\neq 0$, задовольняють співвідношення:

   $$\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$ де C – довільна стала;
3) до рівняння з відокремлюваними змінними, шляхом заміни

$$u=ax+by+c, \tag{33}$$

зводиться рівняння виду

$$y' = f(ax+by+c), \tag{34}$$

де a, b, c – задані сталі величини.

Дійсно, із (33) знаходимо $y= (u-ax-c)/b$; тому, згідно з (34), $y' = \frac{u'-a}{b} = f(u)$. Тобто приходимо до рівняння виду (20): $u'=a+bf(u)$. Перевернуте рівняння, за умови, що $a+bf(u)\neq 0$, має вигляд: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a+bf(u)}$. Звідси $C + x = \int\frac{du}{a+bf(u)}$.

Якщо $\varphi(u)$ є деяка первісна для невизначеного інтегралу, то одержуємо загальний інтеграл $\varphi(u)-x=C$ або

$$f(ax+by+c) - x = C.$$

Якщо $a+bf(u)=0$, то рівняння може мати ще розв'язки $ax+by+c=const$.

П р и к л а д. Знайти загальний інтеграл рівняння $y'=\sin(x+y)$.

Згідно з (23) покладемо $u=x+y$, тоді $y=u-x$, а $y'=u'-1$, дане рівняння набуде виду $u'-1=\sin u$ або $u'= 1+\sin u$. Нехай $1+\sin u\neq 0$, тоді перевернуте рівняння $\frac{dx}{du} = \frac{1}{1+\sin u}$.

Зінтегрувавши його, дістанемо

$$x+C=\int\frac{du}{1+\sin u}=\int\frac{d(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4})}{\cos^2(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4})}=tg(\frac{u}{2}-\frac{\pi}{4})\cdot$$

Звідси $u=\frac{\pi}{2}+2arctg(x+C)$. Повертаючись до підстановки

$x+y=u$, маємо $y+x=\frac{\pi}{2}+2arctg(x+C)$.

Тип 4.Однорідні відносно x і y рівняння та звідні до них.

Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією виміру m, якщо справедлива тотожність $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$ при будь - якому λ.

Н а п р и к л а д: функція $f(x,y)=y^2+xy$ є однорідною функцією виміру 2, оскільки

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda y)^2+\lambda x\lambda y=\lambda^2y^2+\lambda^2xy=\lambda^2(y^2+xy)=\lambda^2 f(x,y);$$

функція $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+2y}$ - однорідна функція нульового виміру,

оскільки : $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda x-\lambda y}{\lambda x+2\lambda y}=\dfrac{\lambda(x-y)}{\lambda(x+2y)}=\lambda^0 f(x,y)$.

Функція $f(x,y)=x+y-1$ не є однорідною (чому?).

Означення. *ДР* (26) *називається однорідним, якщо $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ однорідні функції одного і того ж виміру m.*

ДР (26) можна записати в нормальній формі

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

Якщо рівняння (26) є однорідним, то функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є однорідними одного і того ж виміру, а функція $f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ - однорідна функція нульового виміру.

Точку (x_0,y_0), в якій коефіцієнти P і Q одночасно перетворюються в нуль, будемо називати особливою точкою рівняння (26).

Однорідну функцію нульового виміру завжди можна подати як функцію відношення змінних y/x або x/y (це рівноцінно тому, що $\lambda=1/x$ або $\lambda=1/y$) в однорідній функції $f(x,y)$.

Таким чином, ***однорідним*** *є ДР в одній із трьох форм:*

1) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy=0$, *де* $P(x,y)$ *і* $Q(x,y)$ *– однорідні функції одного виміру.*

2) $y' = f(x,y)$, *де* $f(x,y)$ *- однорідна функція нульового виміру.*

3) $y' = \varphi(y/x)$. (35)

Далі розглянемо однорідні рівняння в формі (35).

Припустимо, що функція $\varphi(u)$, де $u=y/x$, визначена і неперервна на інтервалі (a,b). Тоді $\varphi(y/x)$ буде визначена і неперервна в областях :

$$D_1 = \{(x,y) \mid ax < y < bx, x > 0\} \quad \text{і} \quad D_2 = \{(x,y) \mid bx < y < ax, x < 0\}.$$

Має місце теорема.

Теорема. *Якщо функція* $\varphi(u)$ *неперервна при* $a < u < b$ *і* $\forall u \in (a,b)$ $(\varphi(u) \neq u)$, *то в кожній з областей* D_1 *і* D_2 *рівняння* (35) *має загальний інтеграл у вигляді:* $\Phi(y/x) = \ln|x| + C$, *де* $\Phi(u)$ *– первісна для функції* $1/(\varphi(u)-u)$ *і* C *– довільна стала.*

Δ Зробивши підстановку $y = u \cdot x$, де $u(x)$ – невідома диференційовна функція, рівняння (35) запишемо у вигляді

$$xu' + u = \varphi(u).$$

Звідси одержуємо ДР з відокремлюваними змінними

$$x\frac{du}{dx} = (\varphi(u) - u).$$

Згідно з посилками теореми: $\varphi(u)$ неперервна в інтервалі (a,b), $\varphi(u) \neq u$ в цьому інтервалі і $x \neq 0$. Відокремивши змінні, одержимо ДР типу 2, з неперервними коефіцієнтами виду:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{36}$$

Загальний інтеграл рівняння (36) в кожній з областей, D_1 і D_2 запишеться у вигляді:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C, \text{ де } C \text{ – довільна стала.}$$

Якщо $\Phi(u)$ яка-небудь первісна для $1/(\varphi(u) - u)$, то загальний інтеграл набуває вигляду: $\Phi(u) = ln|x| + C$. З урахуванням підстановки $u = y/x$ маємо

$$\Phi(y/x) = ln|x| + C. \quad \nabla \tag{37}$$

Зауваження. Можна довести [11],що через кожну точку області D_1 і D_2 проходить єдина інтегральна крива рівняння (35).

Якщо $\varphi(u)-u\equiv 0$, $\forall u\in(a,b)$, то $\varphi(u)\equiv u$ і рівняння (35) має вигляд

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}. \qquad (38)$$

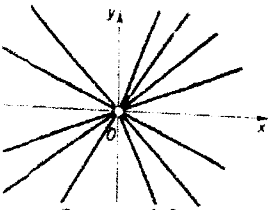


Рисунок 1.9

Розв'язками цього рівняння є функції $y=c\,x\ (x\neq 0)$ і $x=0\ (y\neq 0)$, тобто всі півпрямі, які наближаються до початку координат. Точка (0,0) є особливою точкою рівняння (рис.1.9).

Якщо $\varphi(u)\ -\ u\ =\ 0$ лише при окремих значеннях, наприклад при $u=u_0$, то для рівняння (35) півпрямі $\frac{y}{x}=u_0$ або $y=u_0x$ $(x\neq 0)$ також будуть розв'язками. Вони можуть бути як частинними, так і особливими.

Зауваження:

1) деякі однорідні рівняння раціонально розв'язувати за допомогою підстановки $u=x/y$;

2) при розв'язанні однорідних рівнянь доцільно користуватись безпосередньо підстановкою, а не кінцевою формулою.

П р и к л а д 1. Знайти загальний інтеграл ДР:

$$(4x-3y)dx+(2y-3x)dy=0.$$

Оскільки функції $P(x,y)=4x-3y$ і $Q(x,y)=2y-3x$ – однорідні функції одного і того ж виміру (першого), то переконуємось в тому, що дане рівняння однорідне.

Робимо заміну $y=ux$, $dy=xdu+udx$. Тоді дане рівняння набуває вигляду $(4x-3ux)dx+(2ux-3x)(xdu+udx)=0$ і після елементарних перетворень одержимо

$$(4-6u+2u^2)dx+x(2u-3)du=0.$$

Ми одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремивши змінні і зінтегрувавши рівняння $\frac{dx}{x}+\frac{(2u-3)du}{4-6u-2u^2}=0$, маємо

$$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left|4-6u+2u^2\right|=\frac{1}{2}\ln|C| \quad \text{або} \quad x^2(4-6u+2u^2)=C.$$

Підставимо замість u його значення, одержимо загальний інтеграл

$$x^2\left(4-6\frac{y}{x}+2\frac{y^2}{x^2}\right)=C \quad \text{або} \quad 4x^2-6xy+2y^2=C, \qquad (*)$$

де C - довільна стала.

В процесі розв'язування ДР ми ділили обидві частини рівняння на $x(4-6u+2u^2)$. Оскільки $x\neq 0$ (чому?), то перевіримо, чи будуть розв'язками даного рівняння $4-6u+2u^2=0$ або $u^2-3u+2=0$; тобто числа $u=1$, $u=2$. Оскільки $u=y/x$, то ми одержуємо ще два розв'язки $y=x$ і $y=2x$ ДР. В даному випадку ці розв'язки одержуються із формул (*) при $C=0$.

П р и к л а д 2. Розв'язати задачу Коші $y' = \dfrac{y}{x+y}$; $y(-1)=1$.

Функція $f(x,y)=y/(x+y)$ - однорідна функція нульового виміру: ($f(\lambda x,\lambda y)=\lambda y/(\lambda x+\lambda y)=y/(x+y)=f(x,y)$). Дане рівняння однорідне. Запишемо перевернуте рівняння:

$$x' = \frac{x+y}{y} \qquad \text{або} \qquad x' = \frac{x}{y}+1.$$

Зробимо заміну $x=uy$. Звідси $x'=u'y+u$. Підставимо x і x' в рівняння, дістанемо $u'+u=u+1$ або $u'y=1$. Звідси $u'=1/y$.

Зінтегрувавши його, маємо $u=ln|y|+C$. Повертаючись до старих змінних, одержуємо $x=(C+ln|y|)y$. Використовуючи початкову умову $x=1$ при $y=1$ (чому?), знаходимо $-1=C$. Таким чином, шуканий частинний інтеграл буде $x=y(ln|y|-1)$.

П р и к л а д 3. Знайти форму дзеркала, яке збирає паралельні промені в одну точку.

Нам треба визначити форму осесиметричного дзеркала, яке збирає промені, паралельні, наприклад, його осі Ox, в одній точці O (яку виберемо за початок координат) (рис.1.10). Нехай $y=y(x)$– рівняння осьового перерізу дзеркала. Оскільки кут падіння променя дорівнює кутові його відбиття, то $\angle\alpha = \angle\beta$, а $\angle MTO = \angle\alpha$ (як відповідні кути), тому трикутник MTO рівнобедрений і, отже

$$|TO|=|OM|. \qquad (*)$$

З прямокутного трикутника OMP знаходимо $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Рівняння дотичної TM до кривої $y=y(x)$ в точці M має вигляд $Y-y=y'(X-x)$. Візьмемо в цьому рівнянні $Y=0$, знайдемо

$$X=OT=x-y/y'.$$

Тому $|TO|=y/y'-x$. Рівність (*) запишеться у вигляді

$$\frac{y}{y'}-x=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{або} \quad y'=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (**)$$

де $f(x,y)=\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ – однорідна функція нульового виміру,

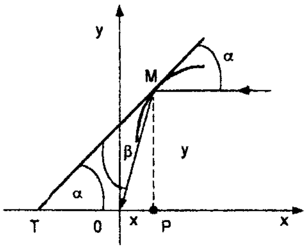


Рисунок 1.10

а значить ДР (**) є однорідним. Застосувавши підстановку $x=uy$, $x'=u'y+u$ до рівняння (**) в перевернутому вигляді $x'=\dfrac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, одержимо:

$u'y+u=u+\sqrt{u^2+1}$ або $u'y=\sqrt{1+u^2}$.

Відокремивши змінні $\dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\dfrac{dy}{y}$, знайдемо загальний інтеграл

$\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|=\ln|y|+\ln|C|$ або $u+\sqrt{1+u^2}=Cy$.

Позбувшись ірраціональності (проробити самостійно), одержимо рівність $u=\dfrac{C}{2}y-\dfrac{1}{2Cy}$.

Повертаючись до старих змінних x і y, маємо

$$\frac{x}{y}=\frac{C}{2}y-\frac{1}{2Cy} \quad \text{або} \quad y^2=\frac{2}{C}x+\frac{1}{C^2}.$$

Позначивши $p=1/C$, одержимо $y^2=2px+p^2$ або $y^2==2px(x+p/2)$. Розв'язком є парабола, вісь якої збігається з віссю Ox і фокус якої знаходиться в початку координат.

Обертаючи таку параболу навколо осі Ox, дістанемо параболоїд обертання. Дзеркальна поверхня цього параболоїда збиратиме промені, які падають на неї паралельним пучком, в одну точку - фокус параболи. Навпаки, якщо в цей фокус помістити джерело світла, то промені, відбившись від дзеркальної поверхні параболоїда, підуть паралельним пучком. Ця властивість параболоїда використовується при виготовленні прожекторів, супутникових антен.

До однорідного ДР зводиться рівняння вигляду

$$y'=f\left(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}\right), \tag{39}$$

де a,b,c,m,n,l – задані числа, у випадку коли визначник $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}=an-bm\neq 0$ (відмінний від нуля) шляхом підстановки

$$\begin{cases} x=t+\alpha, \\ y=z+\beta; \end{cases} \tag{40}$$

де сталі α і β добирають так, щоб

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ m\alpha + n\beta + l = 0. \end{cases} \tag{41}$$

Дійсно, ДР (39) в нових координатах t, z набуває вигляду $z' = f\left(\dfrac{at + bz + (a\alpha + b\beta + c)}{mt + nz + (m\alpha + n\beta + l)}\right)$, і, зважаючи на (41), маємо:

$$z' = f\left(\frac{at + bz}{mt + nz}\right). \tag{42}$$

ДР (42) однорідне, оскільки $f\left(\dfrac{at + bz}{mt + nz}\right)$ є однорідною функцією нульового виміру. Знайшовши його загальний інтеграл $F(t, z, C) = 0$ і замінивши в ньому t на $x-\alpha$ і z на $y-\beta$, дістанемо загальний інтеграл рівняння (39)

$$F(x - \alpha, y - \beta, C) = 0. \tag{43}$$

П р и к л а д. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0.$$

Запишемо дане рівняння в нормальній формі $y' = \dfrac{2 - x - y}{x - y + 4}$.

Знаходимо $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Оскільки $\Delta \neq 0$, то підстановка $x = t + \alpha$ і $y = z + \beta$ (α і β знаходимо з системи лінійних рівнянь $\begin{cases} -\alpha - \beta + 2 = 0 \\ \alpha - \beta + 4 = 0 \end{cases}$, тобто $\alpha = -1$, $\beta = 3$) зводить дане рівняння до однорідного

$$\frac{dz}{dt} = \frac{t + z}{z - t}. \tag{*}$$

Заміна $z = u \cdot t$, $z' = u't + u$, як відомо, перетворює рівняння (*) в рівняння з відокремлюваними змінними

$u't = \dfrac{1 + 2u - u^2}{u - 1}$. Звідси $\dfrac{dt}{t} + \dfrac{u - 1}{u^2 - 2u - 1}du = 0.$

Зінтегрувавши яке, дістаємо $\ln|t| + \dfrac{1}{2}\ln|u^2 - 2u - 1| = \dfrac{1}{2}\ln|C|$ або

$t^2(u^2 - 2u - 1) = C$. Звідси одержуємо $z^2 - 2zt - t^2 = C$.

Замінивши t на $x+1$, а z на $y-3$, дістанемо $y^2 - 6y - 2xy - x^2 - 2x + 6x - 2y = C$. Загальний інтеграл: $y^2 - 2xy - x^2 - 8y + 4x = C$.

Якщо в рівнянні (39) $c=l=0$, то воно є однорідним, оскільки функція $f\left(\frac{ax+by}{mx+ny}\right)$ - однорідна функція нульового виміру.

У випадку, коли $\Delta=0$, ДР (39) набуває вигляду (20) і зводиться до ДР з відокремлюваними змінними шляхом підстановки

$$u = mx + ny. \tag{44}$$

Дійсно, оскільки $\Delta = an - bm = 0$, то $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\lambda$ і $a = m\lambda$, $b= n\lambda$. Із підстановки (44) одержуємо $u' = m + ny'$ або $y' = (u' - m)/n$. Тоді рівняння (39) набуває вигляду $\frac{u'-m}{n}=f\left(\frac{\lambda u+C}{u+l}\right)$, а це є ДР з відокремлюваними змінними.

П р и к л а д. Зінтегрувати ДР: $y'=\frac{2x-2y-1}{x-y+1}$.

□ Оскільки $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0$, то робимо підстановку $u = x - y$ і $u'=1 - y'$ або $y' = 1 - u$. Одержимо ДР з відокремлюваними змінними $u'=\frac{2-u}{u+1}$. Зінтегрувавши його, одержимо: $u + 3ln|u-2| + x = C$.

Повертаючись до підстановки $u = x - y$, одержимо загальний інтеграл даного рівняння

$$2x - y + 3ln|x - y - 2| = C. \tag{*}$$

При відокремленні змінних ми ділили на вираз $2 - u$, тому, можливо,загубили розв'язок $2 - u= 0$ або $u=2$. В старих змінних $x - y=2$ або $y = x - 2$. Перевіркою встановлюємо, що $y=x-2$ є розв'язком даного рівняння $\left(1\equiv\frac{2x-2x+4-1}{x-x+2+1}=1\right)$, і цей розв'язок не може бути одержаний із загального інтегралу (*) ні при яких значеннях C, тобто він є особливим розв'язком. □

Тип5. Рівняння в повних диференціалах. Інтегрувальний множник

Означення. *Якщо ліва частина рівняння (26) є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ двох змінних в області D, тобто*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du, \tag{45}$$

то рівняння (26) ***називається ДР в повних диференціалах*** *в області D.*

В цьому випадку ДР (26) еквівалентне рівнянню $du(x,y)=0$, загальний інтеграл якого є $u(x, y) = C$.

П р и к л а д 1. Розглянемо рівняння

$$\sin y\, dx + x \cos y\, dy = 0. \qquad (*)$$

Легко переконатись в тому, що це рівняння в повних диференціалах, оскільки: $d(x \sin y) = \sin y\, dx + x \cos y\, dy$.

Еквівалентне рівняння має вигляд $d(x\sin y)=0$, звідси загальний інтеграл його буде $x \sin y=C$, де C – довільна стала.

Існує критерій, за допомогою якого можна встановити чи є дане ДР рівнянням в повних диференціалах, чи ні.

Теорема. *Якщо функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні разом із своіми частинними похідними $P'_y(x,y)$ і $Q'_x(x,y)$ в певній області $D\subset R_2$ і не перетворюються одночасно в нуль в жодній точці області D, то для того, щоб в цій області рівняння* (26) *було ДР в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб в усіх точках цієї області справджувалась рівність*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (46)$$

Δ. Необхідність. Дано, що рівняння (26) в повних диференціалах. Тоді згідно з (45) і формулою обчислення диференціала 1-го порядку, маємо

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

звідси

$$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (47)$$

Продиференціювавши перше співвідношення по змінній y, а друге - по x, одержимо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

а оскільки за умовою теореми $P'_y(x,y)$ і $Q'_x(x,y)$ неперервні, то згідно з теоремою із математичного аналізу про рівність мішаних похідних $u''_{xy}(x\ ,y)$ і $u''_{yx}(x\ ,y)$ буде виконуватись умова (46).

Достатність. Дано (46) і (47), покажемо що можна знайти функцію $u(x,y)$ яка задовольняє умову (45).

З першого із співвідношень (47) дістаємо:

$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)$, де x_0 – абсциса довільної точки з області D. При інтегруванні по x ми вважаємо y сталою, а тому довільна стала є функцією від y. Підберемо $\varphi(y)$ таким чином, щоб виконувалось друге з співвідношень (47). Для цього диференціюємо обидві частини останньої рівності по y і результат прирівнюємо до $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y).$$ Оскільки

$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, то $\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\partial P}{\partial y}dx=\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx=\int\limits_{x_0}^{x}\partial Q=Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x}=$

$=Q(x,y)-Q(x_0,y)$; тому $Q(x,\ y)=Q(x,\ y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)$

або $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$. Звідси $\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_1$.

Таким чином, функція $u(x,y)$ набуває вигляду

$$u=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_1.$$

Тут x_0, y_0 – координати довільної точки області D, в якій існує розв'язок ДР (26). Прирівнявши цей вираз довільній сталій C, одержимо загальний інтеграл рівняння (26):

$$\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C.\ \nabla \qquad (48)$$

П р и к л а д 2. Знайти загальний інтеграл рівняння:

$$(3x^2+10xy)dx+(5x^2-1)dy=0$$

□ Перевіряємо чи є дане рівняння в повних диференціалах.

Позначимо $P(x,y)=3x^2+10xy$; $Q(x,y)=5x^2-1$; тоді $P'_y=10x$; $Q'_x=10x$. Умова (46) виконується для всіх точок площини

R_2, тому ліва частина даного рівняння є повним диференціалом деякої невідомої функції $u(x,y)$, визначеної на R_2.

Для знаходження функції $u(x,y)$ можна скористатись процесом доведення достатності умови (46), або кінцевою формулою (48).

Взявши у формулі (48) $x_0 = y_0 = 0$ (точка $(0,0)$ належить області розв'язку даного рівняння), одержимо

$$u = \int_0^x (3x^2 + 10xy)dx - \int_0^y dy = C \quad \text{або} \quad x^3 + 5x^2y + y = C.$$

П р и к л а д 3. Зінтегрувати рівняння:

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0. \tag{49}$$

Перевіряємо виконання умови (46)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(y + xy^2)}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(-x)}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x};$$

Тому ДР (49) не є рівняння в повних диференціалах, не дивлячись на неперервність функцій $P(x,y) = y + xy^2$ і $Q(x,y) = -x$ та їх частинних похідних $P' = 1 + 2xy$, $Q' = -1$; оскільки не існує області $D \subset R_2$, в якій виконується умова (46).

Іноді ДР (26), яке не є рівнянням в повних диференціалах, можна за допомогою множення його на деяку функцію $\mu = \mu(x, y)$ звести до рівняння в повних диференціалах.

Н а п р и к л а д. Помноживши обидві частини рівняння (49) на функцію $\mu = 1/y^2$, дістанемо ДР: $\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ в повних диференціалах. Справді, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} + x\right) = -\frac{1}{y^2}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^2}$;

тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\forall (x,y) \in D = \{(x,y) | \ y \neq 0\}$.

Нехай $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Знаходимо згідно з (48) загальний інтеграл

$$\int_0^x \left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \int_1^y \frac{0}{y^2}dx = C, \quad \text{звідси} \quad \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C.$$

Означення. *Функція $\mu(x,y)$, після множення на яку обох частин рівняння (26) зводить останнє до ДР в повних диференціалах, називається інтегрувальним множником.*

Отже, для ДР (49) функція $\mu = 1/y^2$ є інтегрувальним множником.

За допомогою інтегрувального множника рівняння (26) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ завжди можна звести до ДР в повних диференціалах, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервно диференційовні.

У загальному випадку ця задача не простіша, оскільки зводиться до розв'язування ДР в частинних похідних. Дійсно, помножимо обидві частини ДР (26) на $\mu(x,y)$, тоді умова (46) запишеться так: $\dfrac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)P(x,y))=\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)Q(x,y))$;

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}P+\mu\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}Q+\mu\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{або} \quad P\frac{\partial\mu}{\partial y}+Q\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

а це є ДР в частинних похідних.

Проте в деяких окремих випадках, наприклад, коли інтегрувальний множник є функцією тільки однієї змінної x або y, визначення інтегрувального множника спрощується.

1. *Нехай* $\mu=\mu(y)$ *і* $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)=\Phi(y)$. *Тоді функція* $\mu=\exp\left[\int\Phi(y)dy\right]$ *є інтегрувальним множником.*

В прикладі 3 $P(x,y)=y+xy^2$; $Q'_x=-1$; $P'_y=1+2xy$;

$$\frac{1}{P}\left(Q'_x-P'_y\right)=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=\frac{-2}{y}=\Phi(y).$$

Тому $\mu(y)=\exp\left(\int\left(-\dfrac{2}{y}\right)dy\right)=\exp(-2\ln|y|)=\dfrac{1}{y^2}$.

2. *Нехай* $\mu=\mu(x)$ *і* $\dfrac{1}{Q}(P'_y-Q'_x)=F(x)$, *тоді функція* $\mu=\exp\left(\int F(x)dx\right)$ *є інтегрувальним множником.*

Зауваження. Доведена теорема дозволяє обгрунтувати формули загального інтеграла для розглянутих типів рівнянь.

Тип 2. Оскільки $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x=0$, то умова (46) виконана. Згідно з формулою (48) загальний інтеграл рівняння (27) має вигляд: $\displaystyle\int_{x_0}^{x}P(x)dx+\int_{y_0}^{y}Q(y)dy=C$.

Тип 3. В загальному випадку ДР (30) не є в повних диференціалах. Проте його можна звести до такого шляхом множення на інтегрувальний множник

$$\mu(x,y)=1/N(y)M_1(x),$$

оскільки рівняння (30) переходить в рівняння типу 2, де $P(x)=M(x)/M_1(x)$, $Q(y)=N_1(y)/N(y)$, для якого виконується умова (46). Тоді згідно з формулою (48) загальний інтеграл рівняння (30) набуває вигляду

$$\int_{x_0}^{x}\frac{M(x)}{M_1(x)}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{N_1(y)}{N(y)}dy=C\cdot$$

Тип 4. В загальному вигляді однорідне ДР не є рівнянням в повних диференціалах. Якщо вибрати інтегрувальний множник виду [11]: $\mu(x,y)=1/(P(x,y)x+Q(x,y)y)$, де $y=ux$, то однорідне рівняння в симетричній формі, зводиться до ДР типу 3, загальний інтеграл якого має вигляд:

$$\int_{u_0}^{u}\frac{Q(1,u)du}{P(1,u)+Q(1,u)u}+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}=C$$

або $\Phi(u)+\ln|x|=C$. Звідси $\Phi(y/x)+\ln|x|=C$.

П р и к л а д. Розв'язати рівняння $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

□ Функції $P(x,y)=x^2+y^2$ і $Q(x,y)=-2xy$ – однорідні другого виміру, тому дане рівняння є однорідним. Оскільки $P'_y=2y$, $Q'_x=-2y$, то $P'_y\neq Q'_x$, тобто дане рівняння не є в повних диференціалах. Помножимо дане рівняння на інтегрувальний множник

$$\mu(x,y)=1/((x^2+y^2)x-(2xy)y),\quad \text{де}\quad y=ux$$

одержимо $dx/x-2udu/(1-u^2)=0$, область єдиності якого $D=\{(x,y):x\neq 0;u\neq \pm 1\}$. Покладаючи $x_0=1$, $u_0=2$, знаходимо загальний інтеграл $\int_1^x dx/x-\int_2^u 2udu/(1-u^2)=C$. Звідси

$\ln|x|+\ln|1-u^2|-\ln 3=\ln a$. Позначивши $C_1=\ln a$, отримаємо

$x(1-u^2)=3C_1=C_2$. Оскільки $u=y/x$, то $x^2-y^2=C_2x$. □

Тип 6. Лінійні ДР першого порядку,та звідні до них

***Зведеним лінійним ДР** першого порядку називається рівняння вигляду*

$$y'+p(x)y=q(x),\tag{50}$$

воно лінійне відносно шуканої функції y та її похідної y'.

Припустимо, що функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні в деякому інтервалі (a,b), тоді в цьому інтервалі виконуються умови теореми Коші про існування і єдиність розв'язку, тобто через кожну точку (x_0,y_0) області $D=\{(x,y)| a<x<b, -\infty<y<+\infty\}$ проходить лише одна інтегральна крива рівняння (50), яка визначена $\forall x\in(a,b)$.

Якщо права частина $q(x)$ рівняння (50) не дорівнює тотожно нулю в інтервалі (a,b), то це рівняння називається лінійним *неоднорідним* рівнянням.

Якщо ж $q(x)\equiv 0(a<x<b)$, то рівняння (50) набуває вигляду

$$y' + p(x)y = 0, \tag{51}$$

яке називається лінійним *однорідним* рівнянням.

Розглянемо лінійне ДР (50) з точки зору рівняння в повних диференціалах. З цією метою запишемо його в симетричній формі

$$(p(x)y-q(x))dx+dy=0 \tag{52}$$

Тут $P(x,y) = p(x)y - q(x)$, $Q(x,y)=1$. Звідси $P'_y=p(x)$, $Q'_x=0$. Тобто рівняння (50) в загальному вигляді не є рівнянням в повних диференціалах. Проте вираз $\frac{1}{Q}(P'_y-Q'_x)=\frac{1}{1}(p(x)-0)=$ $=p(x)=F(x)$ є функцією лише x. Тому інтегрувальним множником його буде функція

$$\mu(x)=\exp(\int p(x)dx). \tag{53}$$

Помножимо обидві частини рівняння (52) на $\mu(x)$, одержимо ДР в повних диференціалах

$$e^{\int p(x)dx}(p(x)y-q(x))dx+e^{\int p(x)dx}dy=0,$$ або

$d(e^{\int p(x)dx}y)=e^{\int p(x)dx}q(x)dx$. Зінтегрувавши яке, одержимо: $e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}p(x)dx+C$, де C – довільна стала.

Звідси знаходимо формулу загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР першого порядку

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx. \tag{54}$$

Для лінійного однорідного рівняння $(q(x)=0)$ формула загального розв'язку набуває вигляду

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Зауваження. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння можна записати у вигляді $y=C/\mu(x)$.

П р и к л а д . Зінтегрувати рівняння $y' + 2y/x = 0$.

□Функція $p(x) = 2/x$ - неперервна в області $D = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$.

Згідно з формулою (53) $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$. Загальним розв'язком заданого рівняння буде функція $y = C/x^2$. □

Оскільки такий підхід не єдиний, то розглянемо деякі інші ідеї і методи розв'язування лінійних однорідних і неоднорідних ДР першого порядку.

Лінійне однорідне рівняння ДР першого порядку (ЛОДР) $y' + p(x)y = 0$ завжди має нульовий розв'язок $y = 0$. Разом з тим ЛОДР має нескінченну множину ненульових розв'язків, які легко знайти, оскільки воно є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Симетрична форма рівняння (51) має вигляд:

$$p(x)ydx + dy = 0.$$

Відокремивши змінні, одержимо: $dy/y = -p(x)dx$.

Зінтегрувавши дане рівняння, знаходимо

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|.$$

Звідси

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{55}$$

де C – довільна стала.

Формула (55) містить всі розв'язки лінійного однорідного ДР (також частинний розв'язок $y = 0$, який одержується з (55) при $C = 0$), тобто є загальним розв'язком рівняння (51) в області D: $a < x < b$, $|y| < +\infty$.

Зауваження. Рівнянням з відкремлюваними змінними є лінійне неоднорідне ДР зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{dy}{dx} + ay = b, \tag{56}$$

де a, b – сталі.

Його, як і попереднє рівняння, можна розв'язати шляхом відокремлення змінних і подальшим інтегруванням:

$$dy = (b - ay)dx, \quad dy/(b - ay) = dx, \quad -(1/a)\ln|b - ay| = x + C_1,$$

$$\ln(b - ay) = -(ax + C_2), \quad C_2 = aC_1, \quad b - ay = e^{-(ax + C_2)},$$

$y = -(1/a)e^{-(ax+C_2)} + b/a$ звідси $y = Ce^{-ax} + b/a$, де $C = -(1/a)e^{-C_2}$.

Це і є загальний розв'язок даного ЛНДР.

Замітимо, що $y_1 = b/a$ є частинним розв'язком рівняння (56) ($y_1'=0$, $a(b/a)=b$, $b = b$), а $y=Ce^{-ax}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння ($y'+ay=0$).

Напрошується висновок: *загальний розв'язок ЛНДР дорівнює сумі будь-якого одного частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.*

Покажемо, що це вірно для кожного ЛНДР (50). Дійсно, нехай y_1 – будь-який частинний розв'язок рівняння (50). Зробимо заміну $y=z+y_1$, де z – нова невідома функція від x.

Тоді $\qquad z'+z_1'+p(x)(y_1+z)=q(x) \qquad$ або

$$y_1'+p(x)y_1+z'+p(x)z=q(x). \tag{57}$$

Оскільки $y_1'+p(x)y_1=q(x)$, то з (57) одержимо: $z'+p(x)z=0$ – лінійне однорідне рівняння, загальний розв'язок якого $z=Ce^{-\int p(x)dx}$, де C – довільна стала. Повертаючись до підстановки $y = y_1 + z$, одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y=y_1+Ce^{-\int p(x)dx}$, що й треба було довести.

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння із змінними коефіцієнтами (50) не є ДР з відокремлюваними змінними. Проте його можна розщепити на два рівняння такого типу. Розглянемо два таких методи, які знаходять застосування при розв'язанні ДР і більш загального вигляду.

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Виходячи із загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (51), розв'язок ЛНДР (50) будемо шукати у вигляді

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{58}$$

де $C(x)$- невідома неперервно диференційовна функція. Підставивши (58) в рівняння (50), одержимо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}-C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x).$$

Звідси $C'(x)=q(x)e^{\int p(x)dx}$. Зінтегрувавши останнє рівняння, одержимо: $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$, де C – довільна стала.

Підставивши значення $C(x)$ в (58), одержимо загальний розв'язок ЛНДР 1-го порядку

$$y=e^{-\int p(x)dx}(C+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx). \tag{59}$$

Метод Бернуллі – Фур'є полягає в наступному: розв'язок рівняння (50) шукаємо у вигляді добутку двох довільних неперервно диференційовних функцій: $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$y = u(x)\cdot v(x), \tag{60}$$

вибір яких дозволяє розщепити рівняння (50) на два ДР з відокремлюваними змінними.

Підставимо y і $y' = u'v + uv'$ в ДР (43), маємо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x).$$

Згрупувавши подібні члени, одержимо

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x),$$

(61)

Виберемо v так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю. Тоді

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

Перше рівняння системи є ЛОДР, загальний розв'зок якого визначається формулою (55). Враховуючи довільність функції v, можна прийняти C=1, тоді маємо :

$$v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Одержаний розв'язок підставляємо в друге рівняння системи: $u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$ або $u' = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Звідси знаходимо функцію $u(x)$: $u = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$. Остаточно

$$y = (\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C)\, e^{-\int p(x)dx}.$$

Таким чином різні підходи до розв'язання ЛНДР дають одну і ту ж формулу, яка може бути записана у вигляді

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + y_1, \tag{62}$$

де $y_1 = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$ - є частинним розв'язком ЛНДР.

На завершення цього пункту наведемо приклади рівнянь, які часто зустрічаються в застосуваннях і які за допомогою відповідних підстановок можуть бути зведені до лінійних.

Рівняння Бернуллі:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \tag{63}$$

де α не дорівнює нулю і одиниці $(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1)$.

При $\alpha = 0$, воно є ЛНДР (50); при $\alpha = 1$ – ЛОДР:

$y' + (p(x)-q(x))y = 0$, метод розв'язування яких відомий.

Для зведення рівняння Бернуллі до лінійного поділимо обидві частини рівності (63) на y^{α}. Одержимо

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Введемо нову функцію $z: z=y^{1-\alpha}$. Знаходимо $z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Приходимо до рівняння $z'+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$ - це є лінійним рівнянням. Знайшовши його загальний розв'язок, одержимо загальний розв'язок рівняння Бернуллі за формулою $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Зауваження:

1. Якщо $\alpha > 0$ то рівняння має розв'язок $y=0$. Цей розв'язок буде особливим, якщо $0< \alpha <1$ (чому?);
2. Рівняння Бернуллі можна безпосередньо розв'язувати за методом Бернуллі без зведення до лінійного.

Складнішим є **рівняння Ейлера - Ріккаті**

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2, \qquad (64)$$

яке в загальному випадку, як це довів у 1841р. Ліувілль, в квадратурах не інтегрується. Однак воно має таку важливу властивість: якщо вдається знайти частинний розв'язок рівняння (64), то знаходження загального розв'язку рівняння (64) зводиться до розв'язування лінійного рівняння.

Дійсно, заміна $y=y_1+z$ зводить рівняння (64) до рівняння Бернуллі $z' - (Q + 2y_1R)z = Rz^2$, яке , як сказано вище, зводиться до лінійного.

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

1. Який вигляд має ДР першого порядку в загальній, нормальній, перевернутій та симетричній формах? Вказати в якій формі записано рівняння $(xy+y)dx+(xy+x)dy=0$ та записати його в трьох інших формах.
2. Що називають областю визначення ДР? Знайти область визначення для ДР: $y'=(2x+y)/x$.
3. Яка функція називається розв'язком ДР в нормальній (загальній) формі на заданому інтервалі (a,b)?
4. Що значить зінтегрувати ДР в скіченному вигляді? Зінтегруйте рівняння $xy'-y=x^2\sin x^2$ в скінченному вигляді.
5. Для ДР $yy'+x=0$ записати по одному розв'язку:

   а) в явній формі; б) в неявній формі; в) в параметричній формі.
6. Дайте означення загального розв'язку ДР першого порядку. Довести, що функція $y=C/x$, де C – довільна стала, є загальним розв'язком рівняння $xy'+y=0$.
7. Сформулюйте задачу Коші для рівняння $y'(x)=f(x,y)$. В чому полягає геометричний зміст задачі Коші. Довести, що функція $y=\varphi(x)$ є розв'язком задачі Коші тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком інтегрального рівняння $y(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,y(s))ds$.
8. Сформулюйте теорему існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку і які умови (необхідні, достатні чи необхідні і достатні) формулюються теоремою Коші.
9. Розкрийте геометричний зміст ДР 1-го порядку та його розв'язків.
10. Сформулюйте означення ізокліни. Які лінії є ізоклінами для рівняння вигляду $y'=f(x),\ x\in(a,b)$. Побудуйте схематичний рисунок сім'ї інтегральних кривих $y'=2x$, побудуйте ізокліни $x=0,\ x=\frac{1}{2},\ x=1,\ x=-\frac{1}{2},\ x=-1$.
11. Чи може ізокліна бути інтегральною кривою? Які лінії є ізоклінами рівняння вигляду $y'=f(x),\ x\in(c,d)$? Побудувати схематичні рисунки сім'ї інтегральних кривих, побудувавши ізокліни рівнянь: а) $y'=y$; б) $y'=2\sqrt{y}$.
12. Чи можуть інтегральні криві рівняння $y'=f(x,y)$ з неперервною правою частиною перетинатись або мати злам, чи можуть вони дотикатись одна одної.
13. Де порушуються умови теореми Коші $y'=\sqrt[4]{y}$?
14. Чи має ДР $y'=\sqrt{y}+a,\ a\neq 0$ особливі розв'язки?

15. Як знайти лінії екстремумів і лінії точок перегину інтегральних кривих рівняння $y' = f(x,y)$?

16. Довести, що рівняння $y' = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, де P і Q – поліноми, не може мати особливих розв'язків. Чому рівняння $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, де M і N – поліноми, завідомо немає особливих розв'язків.

17. Довести, що всі розв'язки рівняння $y' = 1/(1 + x^2 + y^2)$ обмежені на числовій прямій Ох.

18. Довести, що всі розв'язки рівняння $y' = f(y)$ монотонні.

19. Показати, що одним з розв'язків рівняння $y' + ky = kq(x)$ ($0 \le x < +\infty$), де k – стале число, буде функція $y = \int\limits_0^{+\infty} q(x-t)e^{-kt}dt$.

20. Чи може ДР $y' = f(x,y)$ мати розв'язки, які не є ні частинними, ні особливими.

21. Наведіть приклади неповних ДР 1-го порядку. Який вигляд має загальний розв'язок цих рівнянь.

22. Як можна вибрати початкові дані x_0, y_0 при постановці задачі Коші для рівняння $y' = f(x,y)$, де функція f – неперервна на інтервалі (a,b)? Який інтервал існування розв'язку задачі Коші? Як можна вибрати початкові дані при постановці задачі Коші для рівняння $y' = 1/x$? В яких інтервалах визначені розв'язки з початковими умовами Коші: $y(0) = 1$ і $y(-1) = 0$?

23. Як інтегрується рівняння $y' = f(y)$? Які функції можуть виявитись особливими розв'язками? Проінтегруйте рівняння: $y' = y$ і $y' = \sqrt[3]{y^2}$ (зробіть рисунки).

24. Дайте означення ДР з відокремленими змінними та вкажіть метод його розв'язання. Яке неповне ДР є також ДР з відокремленими змінними?

25. Як інтегруються ДР з відокремлюваними змінними? Які функції можуть виявитись особливими розв'язками? За допомогою якої підстановки рівняння $y' = f(ax + bx + c)$ зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними?

26. Яку функцію називають однорідною виміру m? Наведіть приклади однорідних та неоднорідних функцій.

27. Наведіть різні форми ДР, які є однорідними. Якою підстановкою однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними? Дослідити розв'язки однорідного рівняння у випадку, коли $\varphi(u) - u = 0$ (дивись тип 4). В якій формі можна подати ізокліни для однорідного рівняння $y' = \varphi(y/x)$?

28. При яких α і β рівняння $y' = ay^{\alpha} + bx^{\beta}$ зводиться до однорідного за допомогою підстановки $y = z^m$? Звести до однорідного рівняння $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ за допомогою підстановки $y = z^m$.

29. При якому співвідношенні між коефіцієнтами a,b,m,n рівняння $y' = (\dfrac{ax+by+c}{mx+ny+c})$ зводиться заміною $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$, де α і β – сталі, до однорідного?

30. Рівняння $y' = f(x,y)$ називається квазіоднорідним з вагою квазіоднорідності σ, якщо $f(tx, t^{\sigma}y) = t^{\sigma-1}f(x,y)$. Показати що квазіоднорідне рівняння зводиться до однорідного заміною $t = x^{\sigma}$ (до рівняння з відокремлюваними змінними – $y/x^{\sigma} = z$). Розв'язати рівняння $y' = x^m + 2y^2$, якщо воно квазіоднорідне.

31. Дайте означення ДР в повних диференціалах. Сформулюйте та доведіть критерій, за допомогою якого можна встановити чи є ДР в повних диференціалах, чи ні.

32. Роз'ясніть сутність методу інтегрувального множника. Перевірте, що $\mu = 1/x^2$ є інтегрувальний множник рівняння $(x^2 + y)dx - xdy = 0$. Знайдіть загальний інтеграл цього рівняння та інтегральну криву, яка проходить через точку $(1,1)$.

33. Який вигляд має лінійне рівняння першого порядку? Чим відрізняється неоднорідне лінійне рівняння від однорідного? Виведіть формулу загального розв'язку ЛОДР. Покажіть, як ЛОДР можна звести до ДР в повних диференціалах.

34. Сформулюйте умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння.

35. Вивести формулу загального розв'зку лінійного неоднорідного ДР першого порядку методами: інтегрувального множника; варіації довільної сталої; Бернуллі – Фур'є.

36. Якою підстановкою неоднорідне лінійне рівняння першого порядку зводиться до однорідного у випадку, коли відомий один ненульовий частинний розв'язок y_1 неоднорідного рівняння? Функція $y_1 = \sin x$ є розв'язком рівняння $y' + ytgx = \sec x$. Зінтегруйте дане рівняння шляхом зведення його до однорідного.

37. Знайдіть загальний розв'язок ЛНДР, якщо відомі два його частинних розв'язки y_1 і y_2.

38. Доведіть, що розв'язок задачі Коші $y' + p(x)y = q(x)$, $y(x_0) = y_0$ можна записати у вигляді формули Коші $y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{-\int_{s}^{x} p(t)dt} ds$.

39. Довести, що рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної $x = \varphi(t)$ і при будь-якій заміні функції $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, де φ, α, β – деякі неперевно диференційовні функції.

40. Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, звівши його до рівняння, що не містить доданка з шуканою функцією, замінивши $y = \alpha(x)z$, де $\alpha(x)$ – деяка неперервно диференційовна функція.

41. Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд $y = a(x)C + b(x)$. Довести обернене: ДР кожної сім'ї кривих такого вигляду є лінійним.

42. Довести, що лінійне рівняння $y' = ky + f(x)$, де k – стала ($k \neq 0$), $f(x) = f(x + \omega)$, ($\omega > 0$), має один частинний розв'язок $y = \varphi(x)$, такий, що $\varphi(x + \omega) = \varphi(x)$. Знайти цей розв'язок.

43. Розв'яжіть рівняння $y' = y/x + x$. Побудуйте інтегральні криві, що проходять через точки $M_1(1;0), M_2(1;1), M_3(1;2)$. Проведіть дотичні до інтегральних кривих у цих точках. Переконайтесь в тому, що ці дотичні перетинаються у спільній точці.

44. Доведіть, що дотичні до інтегральних кривих лінійного рівняння, проведені у точках перетину цих кривих з прямою $x = x_0$, перетинаються в одній точці або паралельні.

45. Навести приклади нелінійних ДР першого порядку, які зводяться до лінійних.

46. Довести, що ДР сім'ї кривих $y = (c\varphi_1(x) + \varphi_2(x))/(c\phi_1 + \phi_2(x))$ є рівняння Рікатті $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$.

47. Довести, що коли відомий частинний розв'язок рівняння Рікатті, наприклад, $y_1(x) \neq 0$, то заміною $y = y_1 + z$ (де z – нова функція аргументу x) рівняння Рікатті зводиться до рівняння Бернуллі. Заміна $y = y_1 + 1/z$ (де $z = z(x)$) зводить рівняння Рікатті до лінійного відносно функції $z(x)$ рівняння. Розв'язати рівняння Рікатті $y' = -y^2 + x^2 + 1$, якщо $y_1 = x$.

Завдання для практичних аудиторних занять (АЗ)

АЗ 1

1. Користуючись методом ізоклін побудувати поле напрямів та накреслити схематично хід інтегральних кривих таких ДР :

   а) $y' = x + y$; б) $y' = \sin(x + y)$; в) $y' = x^2 - y^2$.

2. Зінтегрувати рівняння:

   а) $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$; б) $y' = \sin x \cos 3x$; в) $y' = \sqrt{1-x^2}$; г) $y' = x\cos x$;

   д) $y' = e^x / x$.

3. Знайти загальний або частинний розв'язок (загальний або частинний інтеграл) ДР:

   а) $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0, \quad y(1) = 1$;

   б) $x^2(2yy' - 1) = 1$; в) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)d = 0$;

   г) $xy' = y(1 + \ln y + \ln x), \quad y(1) = l$.

Відповіді: 2. а) $y = \ln(x^2+1) + C$, б) $y = \dfrac{1}{4}\cos 2x - \dfrac{1}{8}\cos 4x + C$;

в) $y = \dfrac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C$, г) $y = x\sin x + \cos x + C$;

д) $y = \int\limits_1^x \dfrac{e^t}{t}dt + C$; 3.а) $y - x + \ln|xy| = C, x = 0, y = 0$, б) $x(y^2 + C) = x^2 - 1$,

в) $x^3 + 3x^2y - y^3 = C$; г) $y = xe^x$.

Завдання для аудиторної самостійної роботи 1

1. 1. Методом ізоклін побудувати наближено інтегральні криві рівняння:

   $xy' = 2y$.

   2. Зінтегрувати рівняння:

   а) $xdx + (y+1)dy = 0$; б) $\sec^2 xsrcydx + ctgx\sin ydy = 0$.

   3. Розв'язати задачу Коші для ДР $xy'\ln\dfrac{x}{y} = x + y\ln\dfrac{x}{y}, \quad y(1) = e$;

2. 1. Методом ізоклін побудувати наближено інтегральні криві рівняння:

   $y' = x + 1$.

   2. Зінтегрувати рівняння:

   а) $\sin(x+1)dx + \sqrt{ydy = 0}$; б) $(1 + e^x)yy' = 0$;

   3. Розв'язати задачу Коші для ДР $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0, \quad y(1) = 1$.

3. 1. Методом ізоклін побудувати наближено інтегральні криві рівняння:

   $y' = 1 - x$.

2. Зінтегрувати рівняння:

а) $\ln sds - tgtdt = 0$; б) $y' = 1 + 1/y$.

3. Розв'язати задачу Коші для ДР $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y, \quad y(2) = \pi$.

Відповіді: **1**.3. $\frac{y}{x}(\ln\frac{y}{x} - 1) = \ln x$; **2**.3. $2\sqrt{xy} - y = 1$; **3**.3. $y = 2x arctg\frac{x}{2}$.

АЗ 2

1. Вказати тип ДР та метод його розв'язання (усно).

а) $xdy - ydx = xdx$; б) $y'\sin^2 x = 1$; в) $\frac{xdx}{y} - \frac{dx}{4y} = 0$;

г) $(y-2)dx - (x+2)dy = 0$; д) $\sec^2 x \sec ydx = -ctgx \sin ydy$;

е) $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$; ж) $x^2(2yy' - 1) = 1$;

з) $2(1+e^x)yy' = e^x$; и) $y' = y\ln y$; и) $y' = 1 + 1/y$.

2. Знайти загальний інтеграл рівняння:

а) $(x^3 - 3xy^2)dx + (y^3 - 3x^2y)dy = 0$;

б) $\sin(x+y)dx + x\cos(x+y)\cdot(dx+dy) = 0$.

3. Знайти загальний або частинний розв'язок ДР:

а) $xy' - 2y = 2x^5, \quad y(1) = 2$; б) $y' + \frac{xy}{1+x^2} = x\sqrt{y}$;

в) $(2x + y^2)y' = 1$; г) $xy' - y^2\ln x + y = 0$.

4. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною та радіусом вектором точки дотику, стала й дорівнює a^2. (Відповідь: $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{2a^2}{y^2}$, $x = Cy + \frac{a^2}{y}$)

5. Автомобіль масою m кг в момент вимкнення двигуна рухався із швидкістю 20 м/с. Через 25с швидкість зменшилась до 5 м/с. Вважаючи, що опір руху автомобіля пропорційний його швидкості, знайти рівняння швидкості і визначити через скільки секунд від початку руху без роботи двигуна його швидкість стала 1,25 м/с? (Відповідь: 50с.)

Відповіді: 2.1. а) $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 0$, б) $x\sin(x+y) = 0$; 3.1. а) $y = x^2 + x^5$, б) $\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - 1/3(1-x^2)$, в) $x = Ce^{2y} + \frac{y^2+y}{2} + \frac{1}{4}$, г) $y = \frac{1}{1+\ln x}$.

Завдання для аудиторної самостійної роботи 2

1. 1. Зінтегрувати рівняння:

а) $dx + x(dx + dy) = 0$; б) $y' = 3x^2y - 3x^5, \quad y(0) = 1$.

2. Тіло, яке знаходиться в стані спокою, починає рухатись із швидкістю, пропорційною пройденому шляху. Знайти рівняння руху тіла, якщо воно проходить 10м за перші 2с і 40м за 4с від початку відліку часу. Знайти S при $t = 0$. (Відповідь: $S = 5 \cdot 2^{t-1}$, $S = 160м$).

2. 1. Зінтегрувати рівняння:

а) $xdx + ydy = \dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$; б) $(2y - xe^y)y' = e^y$, $y(1) = 0$.

2. Знайти криві, для яких відрізок, що його дотична відтинає на осі Oy, дорівнює півсумі координат точки дотику. (Відповідь : $y = C\sqrt{x} - x$)

3. 1. Зінтегрувати рівняння:

а) $\dfrac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$; б) $\dot{s}\cos t + s\sin t = 1$, $s(0) = 1$.

2. Швидкісь руху тіла, пущеного вертикально вгору на Місяць, виражається формулою $v(t) = v_0 - 1{,}6t$. На яку максимальну висоту підніметься куля, вистрілена з гвинтівки із швидкістю 800 м/с вертикально вгору з висоти 10 м над поверхнею Місяця. (Відповідь: 200,01 км)

Відповіді: **1**.1. а) $xe^{x+y} = C$, б) $y = Ce^{x^3} - x^3 + 1$, $y = 1 - x^3$; **2**.1. а) $x^2 + y^2 - arctg(x/y) = C$, б) $xe^y = 1 + y^2$; **3**.1. а) $xy/(x-y) = C$, б) $s = \cos t + \sin t$.

Індивідуальні домашні завдання

1. Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл):

1.1. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$; 1.2. $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$;

1.3. $y'\sin x = y\ln x$, $y(\pi/2) = e$ 1.4. $y' + 2\sqrt{y}\ln x = 0$, $y(e) = 1$;

1.5. $y' = 10^{x+y}$; 1.6. $2x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$;

1.7. $y' + ytgx = \dfrac{y}{x}$; 1.8. $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} = 1$;

1.9. $y' + \sin\dfrac{x-y}{3} = \sin\dfrac{x+y}{3}$; 1.10. $\sqrt{4-x^2}y' = xy^2 + x$;

1.11. $\sqrt{6+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$; 1.12. $(e^{-x^2}/x)dy + (1/\cos^2 y)dx = 0$;

1.13. $2y'\sin x + y\sin x = 2y\cos x$; 1.14. $(1+s^2)dt + \sqrt{t}ds = 0$;

1.15. $\sin x\cos^2 ydx + \cos^2 xdy = 0$; 1.16. $(2+y)\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2}y'$;

1.17. $x\dot{x} + t = 1$; 1.18. $3^{y^2-x^2} = yy'/x$, $y(0) = 0$;

1.19. $y'\cos^3 y - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$; 1.20. $y'ctgx + y = 2$;

1.21. $tgydx - x\ln xdy = 0, \quad x(\frac{\pi}{2}) = e$; 1.22. $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy = 0$;

1.23. $xydx + (x+1)dy = 0$; 1.24. $(y^2 + xy^2) + x^2 - yx^2 = 0$;

1.25. $(x+2)e^y dx + y\sqrt{x+1}dy = 0$; 1.26. $e^{-s}(1+\dot{s}) = 1$;

1.27. $y' + xy = xy^3$; 1.28. $(1+y^4)(\cos x + \sin x) + y\sqrt{\sin 2x}dy = 0$;

1.29. $xyy' = \frac{1+x^2}{1-y^2}$; 1.30. $\frac{x}{y}dx = \sqrt{1+x^2}\ln ydy$;

2. Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл):

2.1. $xy' - y = xtg(y/x)$; 2.2. $xdx = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx$;

2.3. $xy' = y\cos\ln(y/x)$; 2.4. $xdy = y\ln(y/x)dx$;

2.5. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$; 2.6. $xy'\sin(y/x) + x = y\sin(y/x)$;

2.7. $xy' + y = y(\ln x - \ln y)$; 2.8. $xy' = 2(y + \sqrt{xy})$;

2.9. $x^2y' = xy + y^2e^{-x/y}$; 2.10. $y - xy' = x\sec(y/x)$;

2.11. $xdy - y(\ln x - \ln y)dx = 0$; 2.12. $(\sqrt{xy} - x)dy - ydx = 0, \quad y(1) = 1$;

2.13. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})dx - ydx, y(1) = 1$; 2.14. $(xye^{x/y} + y^2)dx - x^2e^{x/y}dy = 0$;

2.15. $(3x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0, y(1) = 2$; 2.16. $y' = y^2/x^2 - 2$;

2.17. $(x - y)dx + xdy = 0$; 2.18. $(x - y\cos(y/x))dx - x^2e^{x/y}dy = 0$;

2.19. $y^2 + x^2y' = xyy', \quad y(3) = 4$; 2.20. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$;

2.21. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$; 2.22. $xy' = y - xe^{y/x}$;

2.23. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x), y(1) = 1/\sqrt{e}$; 2.24. $(x+y)y' = y$;

2.25. $(x+y)dx + (y-x)dy = 0$; 2.26. $xy' + x\cos(y/x) - y + x = 0$;

2.27. $y' = e^{y/x} + y/x + 1$; 2.28. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$;

2.29. $xydy - y^2dx = (x+y)^2e^{-y/x}dx$; 2.30. $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdx - ydy)$.

3. Перевірити чи будуть дані рівняння в повних диференціалах та розв'язати їх

3.1. $(3x^2y^2 + 7)dx + 2x^3ydy = 0$;

3.2. $(e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy$;

3.3. $\sin(x+y)dx + xcox(x+y)(dx+dy) = 0$;

3.4. $(2x + ye^{xy})dx + x\cos(1 + xe^{xy})dy = 0, \quad y(0) = 1$;

3.5. $(\frac{y^2 + \sin 2x}{y} + 1)dx - (\frac{\sin^2 x}{y^2} - x)dy = 0$;

3.6. $(x+\ln|x|)dx+(1+x/y+\sin y)dy=0$;

3.7. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$;

3.8. $(x^2+y^2+y)dx+(2xy+xe^y)dy=0$;

3.9. $3x^2(1+\ln y)dx-(2y-\dfrac{x^3}{y})dy=0$;

3.10. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$;

3.11. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$;

3.12. $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dx=0$;

3.13. $(3x^2y^2-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)=0$;

3.14. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2ydy=0$;

3.15. $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$;

3.16. $(y^3-x)y'=y$;

3.17. $e^x(1+e^y)dx+e^y(1+e^x)dy=0$;

3.18. $(\ln y-2x)dx+(x/y-2y)dy=0$;

3.19. $(e^x+y+\sin y)dx+(e^y+x+\cos y)dy=0$;

3.20. $(2x+e^{x/y})dx+(1-x/y)e^{x/y}dy=0$;

3.21. $y'=(y-3x^2)/(4y-x)$;

3.22. $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$;

3.23. $(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$;

3.24. $(2x-y)dx-xdy=0$;

3.25. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{xdy-ydx}{x^2}=0$;

3.26. $(\dfrac{\sin 2x}{y}+x)dx+(y-\dfrac{\sin^2 x}{y^2})dy=0$;

3.27. $\sin xydx+\cos(xydx+x^2dy)=0$;

3.28. $\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}=0,\quad y(0)=1$;

3.29. $\dfrac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dy+(\dfrac{x}{\cos^2 xy}+\sin y)dy=0$;

3.30. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{(y^2-3x^2)dy}{y^4}=0,\quad y(1)=1$.

4. Знайти загальний або частинний розв'язок рівняння

4.1. $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$;

4.2. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$;

4.3. $y' + ytgx = \sec x$;

4.4. $ye^y dx = (y^3 + 2xe^y)dy$;

4.5. $(1-x)(y'-y) = e^{-x}, \qquad y(2) = 0$;

4.6. $\cos y dx + (x + 2\cos y)\sin y dy = 0$;

4.7. $(x^2+1)y' + 4xy = 3$;

4.8. $y' - yctgx = \sin x$;

4.9. $ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0, \quad y(-1/3) = 1$;

4.10. $y' - 3y/x = x$;

4.11. $xy' + y = \ln x + 1$;

4.12. $y' + 2y/x = e^{-x^2}/x$;

4.13. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

4.14. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

4.15. $y' + y = \cos x$;

4.16. $t(1+t^2)dx + (x + xt^2 - t^2)dt = 0, \quad x(1) = -\pi/4$;

4.17. $y' + y = e^x, \quad y(0) = 1$;

4.18. $y' + y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = 0$;

4.19. $y' + tgx = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2$;

4.20. $y' + tgx = x\cos^2 x, \quad y(0) = 1$;

4.21. $y' = 2y + e^x - x, \quad y(0) = 1/4$;

4.22. $dy = (x^2 + 2x - 2y)dx$;

4.23. $y' = 1/(2x - y^2)$;

4.24. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$;

4.25. $y' - \dfrac{y}{\sin x} = tg(x/2)$;

4.26. $y'(1+x^2) - xy = \sqrt{1+x^2}$;

4.27. $y' - \dfrac{n}{x}y = e^x x^n$;

4.28. $y' - y\sin x = \sin x\cos x$;

4.29. $ydx - (x - y^2\sin y)dy = 0$;

4.30. $y' - \dfrac{y}{x \ln x2} = x \ln x, \quad y(e) = \dfrac{e^2}{2}$.

5. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл рівняння

5.1. $(1-x^2)y' + xy = (x - x^3)\sqrt{y}$; 5.2. $xy' + y = y^2 \ln x$;

5.3. $y' + 2y/x = 2\sqrt{y}/\cos^2 x$; 5.4. $\cos x y' - y \sin x = y^4$;

5.5. $y' - ytgx = -y^2 \cos x$; 5.6. $3xy' - 2y = x^3 / y^2$;

5.7. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$; 5.8. $y^{(n-1)}(ay' + y) = x$;

5.9. $xdx = (x^2 / y - y^3)dy$; 5.10. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$;

5.11. $ydy - ay^2 dx / x^2 = bdx / x^2$; 5.12. $(1-x^2)y' - xy = axy^2$;

5.13. $(x^2 y^3 + xy)y' = 1$; 5.14. $3dy / dx - y \sin x + 3y^4 \sin x = 0$;

5.15. $xy' + y = xy^2 \ln x$; 5.16. $(1+x^2)y' = xy + x^2 y^2$;

5.17. $x^2 y^2 y' + xy^3 = 1$; 5.18. $ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x}\sec^2 y dy, \quad y(0) = \pi$;

5.19. $xy' - y(2y \ln x - 1) = 0$; 5.20. $y' - y / x = -y^2$;

5.21. $y' + 2y = y^2 e^x$; 5.22. $y' - y + y^2 \cos x = 0$;

5.23. $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$; 5.24. $ydx + xdy = -yx^2 dy$;

5.25. $xy' + y = xy^2 \ln x$; 5.26. $3y^2 y' - ay^3 - x - 1 = 0$;

5.27. $(y \ln x - 2)ydx = xdy$; 5.28. $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x)$;

5.29. $\dfrac{(1+x^2)dy}{dx} - 2xy = 4arctgx\sqrt{(1+x^2)y}$; 5.30. $2y' \ln x + y/x = \dfrac{\cos x}{y}$.

Відповіді:

1.1. $\arcsin x - \sqrt{1-y^2} = C$; **1.2.** $2e^{y^2/2} = \sqrt{e}(1+e^x)$; **1.3.** $\sqrt{y} = x\ln|x| - x + 1$;
1.4. $y = e^{tg(x/2)}$; **1.5.** $10^x + 10^{-y} = C$; **1.6.** $(1+x^2)\sqrt{1+y^2} = C$; **1.7.** $y = Cx\cos x$;
1.8. $\sqrt{1-y^2} = -\arcsin(x) + C$; **1.9.** $\ln\left|tg\dfrac{y}{6}\right| = 6\sin(x/3) + C$; **1.10.** $y = -tg(\sqrt{4-x^2} + C)$; **1.11.** $x = -tg(2\sqrt{6+y^2} + C)$; **1.12.** $y + 0{,}5\sin 2y = 1 - e^{x^2}$;
1.13. $y^2 = Ce^{-x}\cos^2 x$; **1.14.** $2\sqrt{t} + arctgs = C$, $t = 0$; **1.15.** $\sec x + tgy = C$;
1.16. $x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| = 4\ln\left|y + \sqrt{1+y^2}\right| + 2\sqrt{1+y^2} + C$;
1.17. $x^2 + (t-1)^2 = C$; **1.18.** $y^2 - x^2 = 0$; **1.19.** $0.5y + 0.25\sin 2y = C + \sin 2x$;
1.20. $y = C\cos x + 2$; **1.21.** $x = e^{\sin y}$; **1.22.** $\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + y^2/2 = C$;

1.23. $y=C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$; **1.24.** $(x+y)(x-y-2)+2\ln\left|\frac{1+x}{1-y}\right|=C$; **1.25.** $2\sqrt{(x+1)^3}+$ $+6\sqrt{x+1}-3e^{-y}(y+1)=C$; **1.26.** $1-2e^{-s}=Ce^{t}$; **1.27.** $\ln\left|1-1/y^2\right|=x^2+C$, $y=0, y=\pm 1$; **1.28.** $arctg\, y^2+2\arcsin(\sin x-\cos x)=\pi$; 1.29. $2y^2-y^4=$ $=4\ln|x|+2x^2+C$; **1.30.** $4\sqrt{1+x^2}=2y^2\ln y-y^2+C$;

2.1. $\sin(y/x)=Cx$; **2.2.** $Cx^2=y+\sqrt{x^2+y^2}$; **2.3.** $ctg(1/2\ln(y/x))=\ln Cx$; **2.4.** $y=xe^{Cx+1}$; **2.5.** $2\ln|y/x|+y/x=-\ln|x|+C$; **2.6.** $\cos(y/x)=\ln|Cx|$; **2.7.** $y=xe^{C/x-2}$; **2.8.** $y=x(\sqrt{Cx}-2)^2$; **2.9.** $e^{x/y}+\ln|Cx|=0$; **2.10.** $y=x\arcsin(C-\ln|x|)$; **2.11.** $y=xe^{1-x}$; **2.12.** $\ln|y|=2(1-\sqrt{x/y})$; **2.13.** $\arcsin(y/x)-\ln|x|=C$; **2.14.** $\ln|x|+e^{x/y}=C$; **2.15.** $xy^2-x^3=1$; **2.16.** $y-2x=Cx^2(y+x)$; **2.17.** $xe^{y/x}=C$, $x=0$; **2.18.** $Cx=e^{-\sin(y/x)}$; **2.19.** $y=4e^{(3y-4x)/3x}$; **2.20.** $x(y-x)=Cy$, $y=0$; **2.21.** при $x>0$ $\sqrt{y/x}=\ln(C/x)$, при $x<0$ $\sqrt{y/x}=\ln Cx$; **2.22.** $y=-x\ln(\ln(Cx))$; **2.23.** $y=xe^{-x/2}$; **2.24.** $x=y(C+\ln|y|)$; **2.25.** $\ln(x^2+y^2)^{1/2}-arctg(y/x)=$ $=C$; **2.26.** $tg(y/2x)=\ln(C/x)$; **2.27.** $e^{y/x}=Cx/(1-Cx)$; **2.28.** $y=2x\,arctg\,Cx$; **2.29.** $(x+y)\ln Cx=xe^{y/x}$; **2.30.** $xy\cos(y/x)=C$.

3.1. $x^3y^2+7x=C$; **3.2.** $xe^y+ye^x+3x-2y=C$; **3.3.** $x\sin(x+y)=C$; **3.4.** $x^2+y+e^{xy}=2$; **3.5.** $(y+1)x+(1-\cos 2x)/2y=C$; **3.6.** $x^2/2+x\ln|y|+$ $+y-\cos y=C$; **3.7.** $x^2/2+x\sin y-\cos y=C$; **3.8.** $x^3/3+y^2x+yx=e^y=1$; **3.9.** $x^3(1+\ln y)-y^2=C$; **3.10.** $x^3e^y-y=C$; **3.11.** $y+xe^{-y}=C$; **3.12.** $x^2\cos^2 y+$ $+y^2=C$; **3.13.** $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$; **3.14.** $(x^2\cos 2y)/2+x=C$; **3.15.** $x^3/3+yx-y^2=C$; **3.16.** $y^4=4xy+C$; **3.17.** $e^{x+y}+e^x+e^y=C$; **3.18.** $x\ln y-x^2-y^2=C$; **3.19.** $e^x+e^y+xy+x\sin y=C$; **3.20.** $x^2+ye^{x/y}=C$; **3.21.** $x^3-xy+2y^2=C$; **3.22.** $x^3+3x^2y^2+y^4=C$; **3.23.** $x^4/4-(3/2)x^2y^2+y^4=C$; **3.24.** $x^2-xy=C$; **3.25.** $\sqrt{x^2+y^2}+y/x=C$; **3.26.** $\frac{\sin^2 x}{y}+\frac{x^2+y^2}{2}=C$; **3.27.** $x\sin xy=C$; **3.28.** $\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}=0$; **3.29.** $tgxy-\cos x-\cos y=C$; **3.30.** $y=x$;

4.1. $y=Ce^{x^2}+x^3$; **4.2.** $y=e^{-\sin x}(C+x)$; **4.3.** $y=\sin x+C\cos x$; **4.4.** $x=y^2(C-e^{-y})$; **4.5.** $y=-e^x\ln|1-x|$; **4.6.** $x=2\cos y(\ln\cos y+C)$;

4.7. $y=\dfrac{C+x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$; **4.8.** $y=(C+x)\sin x$; **4.9.** $x=\dfrac{y^3-4}{9}-\dfrac{1}{3}\ln y$;

4.10. $y=Cx^3-x^2$; **4.11.** $y=\ln x+C/x$; **4.12.** $y=\dfrac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$;

4.13. $y=e^{-x^2}(C+\dfrac{x^2}{2})$; **4.14.** $y=(x+C)(1+x^2)$; **4.15.** $y=Ce^{-x}+0{,}5(\cos x+$ $+\sin x)$; **4.16.** $x=-t\,arcctg\,t$; **4.17.** $y=shx$; **4.18.** $y=e^{-\sin x}+\sin x-1$; **4.19.** $y=0{,}5\sin 2x$; **4.20.** $y=(x/2)\sin 2x+\cos^2 x$; **4.21.** $y=e^{2x}-e^x+1/2x+$ $+1/4$; **4.22.** $y=Ce^{-2x}+1/4(2x^2+2x-1)$; **4.23.** $x=Ce^{2y}+(4y^2+2y+1)/4$; **4.24.** $y=(x+1)^2(C+x+x^2/2)$; **4.25.** $y=(C+x)tg(x/2)$; **4.26.** $y=\sqrt{x^2+1}(arctg\,x+C)$; **4.27.** $y=x^4(e^x+C)$; **4.28.** $y=Ce^{-\cos x}+1-\cos x$;

4.29. $x=(C-\cos y)y$; **4.30.** $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x$;

5.1. $\sqrt{y}=C\sqrt[4]{1-x^2}-(1-x^2)/3$; **5.2.** $y(Cx+\ln x+1)=1$; **5.3.** $\sqrt{y}=$ $=C/x+(\ln\cos x)/x+tgx$; **5.4.** $y^3=C\cos^3 x+2\sin^3 x-3\sin x$; **5.5.** $y(x+C)=\sec x$; **5.6.** $y^3=x^3+Cx^2$; **5.7.** $\dfrac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+0.5$;

5.8. $ny^n=Ce^{-nx/a}+nx-a$; **5.9.** $x^2=y^2(C-y^2)$; **5.10.** $y=\dfrac{x^4}{4}\ln^2|Cx|$;

5.11. $y^2=Ce^{-2a/x}-b/a$; **5.12.** $y=1/(C\sqrt{1-x^2}-a)$; **5.13.** $(Ce^{-y^2/2}-$ $-y^2+2)x=1$; **5.14.** $y^3(Ce^{\cos x}+3)=1$; **5.15.** $xy(C+\ln^2 x)+2=0$;

5.16. $y\left[\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{1+x^2}}\right]=1$; **5.17.** $y=\sqrt[3]{3/2x+C/x^3}$;

5.18. $xy^2=(\ln|\cos y|+ytgy)^2$; **5.19.** $y(Cx+2(\ln x+1))=1$; **5.20.** $y=2x/(x^2+$ $+C)$; **5.21.** $y=1/(Ce^{2x}+e^x)$; **5.22.** $y=2e^x/(e^x(\cos x+\sin x)+C)$;

5.23. $y=e^{3x}(\dfrac{x}{3}e^{-2x}+\dfrac{1}{6}e^{-2x}+C)^{3/2}$; **5.24.** $xy(C+\ln y)=1$; **5.25.** $xy(C+$ $+\ln^2 x)+2=0$; **5.26.** $a^2y^3=Ce^{ax}-a(x+1)-1$; **5.27.** $y(Cx^2+\ln x^2+1)=4$;

5.28. $y=\dfrac{tgx+\sec x}{\sin x+C}$; **5.29.** $y=(1+x^2)(arctg^2x+C)^2$;

5.30. $y^2\ln x=C+\sin x$.

2.1 Загальні відомості

Нагадаємо, що диференціальним рівнянням n-го порядку в загальній формі називається співвідношення

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x ($x \in (a,b)$), шукану функцію $y(x)$ та її похідні $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$ до n-го порядку включно. *Кожне ДР, порядок якого вище першого, називається рінянням вищого порядку.*

Наприклад, рівняння $e^{y'} + y'' = x$, $y''' - 1 = 0$, $y^{IV} + xy'' + \sin x = 0$ - рівняння вищих (відповідно другого, третього і четвертого) порядків.

Якщо рівняння (1) можна розв'язати відносно старшої похідної $y^{(n)}$, то його записують у вигляді :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Таке рівняння називають ДР порядку n, розв'язаним відносно похідної; або говорять, що воно записано в нормальній формі.

Надалі розглядатимемо диференціальні рівняння вигляду (2).

Розв'язком диференціального рівняння (2) на інтервалі (a,b) називається будь-яка неперервна і n раз диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, якщо вона це рівняння перетворює в тотожність

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)), \quad \forall x \in (a,b).$$

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння (2) називають інтегруванням цього рівняння.

Приклади.

1. ДР $y''' = y$ має на всій числовій прямій розв'язок $y = e^x$, оскільки дана функція неперервна, необхідне число раз диференційовна ($y' = e^x$, $y'' = e^x$, $y''' = e^x$) і справджується тотожність $(e^x)''' \equiv e^x, \forall x \in R$.

2. Методи невизначеного інтегралу дозволяють проінтегрувати ДР другого порядку $y'' = 6x$.

Дійсно, $y'' = dy'/dx$, тому $dy' = xdx$; звідси $y' = 6\int xdx + C_1 = 3x^2 + C_1$. Інтегруючи ще раз одержану рівність, маємо: $y = x^3 + C_1 x + C_2$, де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Як бачимо, що коли ДР (2) має на даному проміжку розв'язок, то цих розв'язків є нескінченна множина.

Задача Коші для рівняння (2) полягає в тому, щоб знайти розв'язок

$$y = y(x), \tag{3}$$

що задовольняє початкові умови :

$$y = y_0,\ y' = y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0, \tag{4}$$

де $x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}$ - задані числа (початкові дані розв'язку (3)).

Наведемо одну із достатніх умов (без доведення) існування і єдиності розв'язку задачі Коші.

Теорема Коші. *Якщо права частина в рівнянні* (2) *функція* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *та її частинні похідні по аргументам* $y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)}$ *неперервні в області* $D \subset R_{n+1}$, *то для довільної точки* $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)})$ *із області* D *існує єдиний розв'язок* (3), *визначений на деякому інтервалі* $(x_0 - h,\ x_0 + h)$, *який задовольняє початкові умови* (4).

Слід відмітити, що єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння n-го порядку ($n > 1$) не означає, що через дану точку $(x_0\ ,\ y_0)$ площини Oxy проходить лише одна інтегральна крива $y = y(x)$, як це мало місце для рівняння першого порядку в нормальній формі.

Н а п р и к л а д, для рівняння другого порядку з початковими даними $x_0,\ y_0,\ y_0'$ єдиність розв'язку задачі Коші слід розуміти в тому плані, що через точку $(x_0\ ,\ y_0) \in R_2$ проходить єдина інтегральна крива рівняння, дотична до якої має кутовий коефіцієнт y_0'. Проте через точку $(x_0\ ,\ y_0)$ проходить ще нескінченна множина інтегральних кривих рівняння з іншим нахилом дотичної в цій точці.

Поняття про загальний і частинний розв'язки рівняння (2)

Нехай в кожній точці деякої області $D \subset R_{n+1}$ зміни змінних $x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{(n-1)}$ має місце існування і єдиність розв'язку задачі Коші, наприклад, виконуються умови теореми Коші.

Функція

$$y = \varphi\,(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \tag{5}$$

що визначена в деякій області зміни змінних $x, C_1, C_2, \dots, C_n$ *і має неперервні частинні похідні по* x *до порядку* n *включно, називається загальним розв'язком рівняння* (2) *в області* D, *якщо :*

1) систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} & y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ & y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ & \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ .. \\ & y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

в області D можна розв'язати відносно довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так що ми маємо

$$C_i = \psi_i(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),\ i = \overline{1, n} \tag{7}$$

2) функція (5) *є розв'язком рівняння* (2) *при всіх значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$, які задаються формулами* (7), *коли точка*

$$(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \in D.$$

Загальний розв'язок (5) містить в собі всі розв'язки рівняння (2) з початковими даними з області D.

Загальний розв'язок (5), *записаний в неявному вигляді*

$$\Phi\,(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

називається загальним інтегралом цього рівняння.

Розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2) *називається частинним, якщо в кожній точці зберігається єдиність розв'язку задачі Коші.*

Кожен розв'язок, який одержується із загального розв'язку (5) при допустимих числових значеннях довільних сталих (включаючи $\pm\infty$), є частинним розв'язком.

Н а п р и к л а д, функція $y = x^3 + C_1x + C_2$ є загальним роз'язком рівняння $y'' = 6{\cdot}y$ (перевірити самостійно), а $y = x^3 + 5$ його частинним розв'язком (C_1=0; C_2= 5).

2.2 Диференціальні рівняння другого порядку

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків важливе місце займають ДР другого порядку, які в загальній формі мають вигляд :

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{8}$$

Геометричний зміст рівняння другого порядку та його розв'язків

Рівняння (8) завжди можна записати у вигляді :

$$F(x, y, y', \frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}(1+(y')^2)^{3/2}) = 0,\ \text{або}\ F_1(x, y, y', k) = 0, \tag{9}$$

де $k = \dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}$ - кривина кривої $y = y(x)$ в точці (x, y).

З рівняння (9) слідує, що *диференціальне рівняння другого порядку в кожній точці інтегральної кривої виражає залежність між координатами точки, нахилом дотичної до інтегральної кривої і кривиною кривої в цій точці.*

П р и к л а д и.

1. Розглянемо рівняння $\dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}} = a \quad (a > 0)$.

Загальна властивість цього рівняння - це сталість кривини. Таку властивість мають кола $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=\dfrac{1}{a^2}$.

Отже, вони є інтегральними кривими, в чому переконайтесь безпосередньо. □

2. Дано рівняння $y''=0$. Тобто в кожній точці інтегральної кривої $y=y(x)$ кривина її дорівнює нулю. Отже, інтегральними кривими є прямі $y=C_1x+C_2$, де C_1, C_2 - довільні сталі.

3. Визначити форму гнучкої тонкої нитки, закріпленої в точках A і B, *що прогинається* під дією власної ваги.

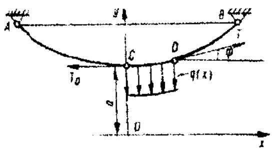


Рисунок 2.1

□ Нехай $D(x,y)$ - довільна точка нитки, а C - її найнижча точка (рис.2.1). На частину нитки CD діють такі сили : сила горизонтального натягу T_0, яка прикладена в точці C, і сила натягу T, яка прикладена в точці D і напрямлена по дотичній до нитки; сила ваги рівномірно розподілена вздовж частини CD нитки, довжина якої S, і навантаження, яке приходиться на одиницю довжини нитки, дорівнює q.

З точки зору простоти запису кінцевих результатів доцільно вибрати положення початку координат так, щоб координати точки C дорівнювали:

$$x_c=0 \quad \text{і} \quad y_c=\frac{T_0}{q}=a.$$

Проекції сили натягу T на осі координат відповідно дорівнюють

$$T_x=T\cos\varphi, \quad T_y=T\sin\varphi.$$

Оскільки частина дуги CD перебуває у рівновазі, то горизонтальні сили T_0 і T_x повинні дорівнювати одна одній так само, як вертикальні сили T_y і qs, тобто: $T\sin\varphi=qs$, $T\cos\varphi=T_0$.

Поділивши почленно першу з цих рівностей на другу, дістаємо :

$$tg\varphi=\frac{qs}{T_0}, \quad \text{або} \quad y'=\frac{s}{a}.$$

Продиференціювавши по x обидві частини цієї рівності і беручи до уваги те, що $a=T_0/q$ - стала, а похідна від довжини нитки CD $s'=\sqrt{1+y'^2}$, дістанемо

$$y''=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}.$$

Ми прийшли до диференціального рівняння другого порядку. Зінтегрувавши його методом, який розглядається нижче, одержимо загальний розв'язок : $y=a\,ch\left(\dfrac{x}{a}+C_1\right)+C_2$. При початкових умовах $x_0=0$, $y(x_0)=y_0=a$ і $y'(x_0)=y'_0=0$ одержимо частинний розв'язок $y=a\,ch\dfrac{x}{a}$, де $a=\dfrac{T_0}{q}$ - рівняння " ланцюгової " нитки. □

Механічний зміст рівняння другого порядку та його розв'язків

Нехай матеріальна точка масою m рухається по прямій, яку приймемо за вісь Ox, під дією сили $F(t,x,\dot{x})$, яка залежить від часу t, положення x і швидкості $\dot{x}$ в момент часу t. Тоді на основі другого закону механіки маємо

$$m\ddot{x} = F(t,x,\dot{x}),\ \text{або}\ \ \ddot{x} = f(t,x,\dot{x}) \qquad (10)$$

де $\ddot{x}$ - прискорення точки в момент часу t, $f = F/m$. *Саме рівняння визначає закони руху матеріальної точки. Розв'язки рівняння (10) $x=x(t)$ називають рухом.* Задача інтегрування рівняння (10) полягає в знаходжені всіх рухів та вивчення їх властивостей.

П р и к л а д и.

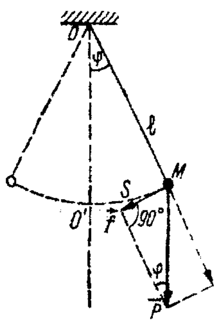


Рисунок 2.2

1.Знайти закон руху математичного або фізичного маятника, нехтуючи силами опору.

Під математичним маятником розуміють матеріальну точку, підвішану на нерозтяжній нитці, закріпленій нерухомо в одній точці.

Нехай математичний маятник (рис.2.2), довжина якого l і вага $p=mg$, виведений з вертикального положення на деякий кут φ.

Оскільки коливання маятника відбувається в середовищі без опору, то маятник коливається під дією сили $\overline{F}$, величина якої $f = mg\sin\varphi$.

Нехай за час t точка M пройшла по дузі кола з центром в точці O і радіусом l шлях s. Тоді $s = l\varphi$.

На основі другого закону механіки, маємо

$$lm\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0,\ \text{або}\quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (11)$$

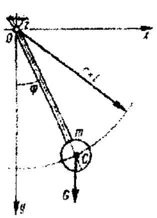


Рисунок 2.3

Це є нелінійне рівняння руху математичного маятника.

Фізичним маятником називається абсолютно тверде тіло, яке може коливатись (обертатись) під дією сили тяжіння відносно нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр його ваги.

Умови рівноваги моментів відносно осі обертання маятника можна записати у вигляді :

$$I_z\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \quad \text{або} \quad \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_z}\sin\varphi = 0, \qquad (12)$$

де I_z - момент інерції тіла відносно осі Oz (рис.2.3), $\varphi(t)$-кут відхилення ваги від осі Oy в момент часу t.

Як бачимо з рівнянь (11) і (12), рівняння руху математичного і фізичного маятника одне і те ж

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\sin\varphi=0 \tag{13}$$

лише змінюються власні частоти. Для математичного маятника $\omega^2=\frac{g}{l}$, а для фізичного -- $\omega^2=\frac{mgl}{I_z}$.

При досить малих коливаннях маятника: $\sin\varphi\approx\varphi$, тобто відповідні рівняння можна *лінеаризувати.* В результаті чого одержали *рівняння гармонічного осцилятора*

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi=0, \tag{14}$$

розв'язки якого задаються формулою :

$$\varphi=A\sin(\omega t+\varphi). \tag{15}$$

Тобто, рух математичного (фізичного) маятника при малому відхиленні від положення рівноваги є гармонічним коливанням. □

Задача про другу космічну швидкість. Визначити найменшу швидкість, з якою необхідно кинути тіло вверх, щоб воно вийшло із сфери тяжіння Землі. Опором повітря знехтувати.

□ Нехай M – маса Землі, m – маса тіла, а r - відстань між центрами мас. На тіло кинуте вверх діють: *сила тяжіння* f і *сила інерції* - $m\ddot{r}$. За законом всесвітнього тяжіння сила f взаємодії між тілом і Землею, не залежно від того є опір повітря чи ні, виражається формулою $f=\gamma\frac{mM}{r^2}$, де γ - гравітаційна стала.

Умова рівноваги дає диференціальне рівняння :

$$m\ddot{r}=-\gamma\frac{mM}{r^2} \text{ або } \ddot{r}=-\gamma\frac{M}{r^2}. \tag{*}$$

Це є диференціальне рівняння, яке допускає зниження порядку (див. наступний пункт, випадок III).

Підстановка $\dot{r}=z(r)$ дає ДР 1-го порядку :

$$\dot{z}\cdot z=-\frac{\gamma M}{r^2}.$$

Звідси $zdz=-\frac{\gamma M}{r^2}dr$. Інтегруючи це рівняння, маємо $\frac{z^2}{2}=\frac{\gamma M}{r}+C_1$.

Враховуючи, що при $z(r)=v(r)$ і при $t=t_0=0$, $z=v=v_0$; $r=R$, одержимо :

$C_1=\frac{v_0^2}{r}-\frac{\gamma M}{R}$. В результаті маємо частинний розв'язок :

$$\frac{v^2}{2}=\frac{\gamma M}{r}+(\frac{v_0^2}{r}-\frac{\gamma M}{R}). \tag{**}$$

Оскільки, за даних умов, вихід за межі впливу сили тяжіння Землі означає, що $r \to \infty$ при $t \to \infty$, то при $r \to \infty$ маємо : $\frac{\gamma M}{r} \to 0$. Враховуючи, що $\frac{v^2}{2} > 0$ із (**) одержимо: $\frac{v_0^2}{2} - \frac{\gamma M}{R} \geq 0$, або $v_0^2 \geq \frac{2\gamma M}{R}$.

Тому найменша швидкість буде визначатись рівністю

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}, \qquad (***)$$

де $\gamma = 6{,}673\ 10^{-11}\ Н\,м^2/кг^2$, $R = 63.7 \cdot 10^5\ м$.

На поверхні Землі, при $r = R$, прискорення сили ваги дорівнює g ($g = 9.81 м/с^2$). На основі цього з рівності (*) одержимо: $g(R) = \frac{\gamma M}{R^2}$, звідси $M = gR^2/\gamma$. Підставляючи це значення у формулу (***), одержимо:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 63.7 \cdot 10^5} \approx 11.2\, км/с.$$

Рівняння другого порядку, які допускають зниження порядку

Одним із методів інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку є заміна змінної, за допомогою якої диференціальне рівняння другого порядку зводиться до диференціального рівняння першого порядку. Таке перетворення диференціального рівняння називається зниженням порядку.

Випадок I. *Рівняння виду $y'' = f(x)$, яке не містить в явному вигляді шуканої функції y та її похідної y', шляхом заміни $y' = z(x)$, при цьому $y'' = z'(x)$, перетворюється в рівняння першого порядку $z'(x) = f(x)$ з шуканою функцією $z(x)$*. Зінтегрувавши його знаходимо :

$z(x) = \int f(x)dx + C_1$. Оскільки $z(x) = y'$, то $y' = \int f(x)dx + C_1$.

Звідси $y = \int(\int f(x)dx)dx + C_1 x + C_2$, де C_1, C_2 - довільні сталі.

П р и к л а д. Знайти загальний інтеграл рівняння $y'' = \sec^2 x$.

Зробимо заміну $z(x) = y'$, тоді $z'(x) = 1/\cos^2 x$. Зінтегрувавши, дістанемо: $z(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C_1 = tgx + C_1$. Врахувавши, що $z(x) = y'$, одержимо ще раз диференціальне рівняння першого порядку $y' = tgx + C_1$. Звідси $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$, де C_1, C_2 - довільні сталі.

Випадок II. $F(x, y', y'') = 0 \quad (\ y'' = f(x, y')\ )$.

Рівняння не містить в явному вигляді шуканої функції y. *Зниження порядку досягається шляхом заміни змінної як і у випадку I, тобто* $z(x) = y'$. Тоді $z' = y''$ і рівняння переходить в рівняння першого порядку відносно $z(x)$: $\quad F(x, z, z') = 0 \quad (\ z' = f(x, z)\ )$. Розв'язуючи його, знаходимо : $z = \varphi(x, C_1)$. Повертаючись до підстановки $z(x) = y'$, одержимо : $y' = \varphi(x, C_1)$. Зінтегрувавши яке, маємо шуканий розв'язок :

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2,$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

П р и к л а д. Зінтегрувати рівняння : $\quad y'' + \dfrac{2}{x} y' = x$.

Рівняння не містить в явному вигляді y, маємо випадок II.

Зробивши заміну $z = y'$, $z' = y''$, приходимо до ЛНДР 1-го порядку відносно функції $z(x)$: $\quad z' + \dfrac{2}{x} z = x$.

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $\mu(x)dx$, де

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2dx}{x}} = e^{2\ln x} = x^2,$$

одержимо $\quad x^2 z' dx + 2xzdz = x^3 dx, \quad$ або $\quad d(x^2 z) = x^3 dx$,

звідси $\quad x^2 z = \int x^3 dx + C_1, \quad$ або $\quad x^2 z = \dfrac{x^4}{4} + C_1$, тобто $\quad z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{C_1}{x^2}$.

Повертаючись до заміни $z(x) = y'$, одержимо ДР 1-го порядку з відокремленими змінними: $\quad y' = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{C_1}{x^2}, \quad$ звідси $\quad y = \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{C_1}{x} + C_2$,

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Випадок III. $F(y, y', y'') = 0$ $(y'' = f(y, y'))$. *Рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну.* Зниження порядку в цьому випадку досягається шляхом заміни $z(y) = y'$.

Слід звернути увагу, що нова невідома функція z є функцією старої невідомої функції y. Тому $\quad y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} = z' \cdot z$.

Підставляючи в рівняння вирази для y і y', маємо рівняння 1-го порядку відносно z, як функції y:

$$F(y, z, z' \cdot z) = 0 \quad (\ z' \cdot z = f(y, z)\ )$$

Розв'язуючи його, одержимо $z = \varphi(y, C_1)$. Оскільки $z = dy / dx$, то $dy / dx = \varphi(y, C_1)$. Це ДР з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, маємо $dy / \varphi(y, C_1) = dx$.

Звідси $$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2,$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

П р и к л а д. Знайти частинний розв'язок рівняння $yy'' + (y')^2 = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Рівняння не містить в явному вигляді незалежної змінної x. За допомогою підстановки $z(y)=y'(x)$, $y'' = \frac{dz}{dy}z$ зводимо його до двох ДР першого порядку: $y\frac{dz}{dy}z + z^2 = 0$; $y' = z$. Перше рівняння, рівносильне сукупності рівнянь $yz' + z = 0$ або $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0$. З останього рівняння маємо $y = C$. Оскільки $y(0) = 1 = C$, то шуканим розв'язком задачі є функція $y = 1$ (чому?).

2.3 ДР вищих порядків, які допускають зниження порядку

Покажемо, що підстановки попереднього пункту можна застосувати до рівнянь, порядок яких $n > 2$.

1. *Рівняння виду* $y^{(n)} = f(x)$, (16)
де $f(x)$ - функція неперервна в інтервалі (a,b), розв'язується послідовним інтегруванням, оскільки кожне інтегрування знижує порядок рівняння на одиницю. Дійсно, оскільки $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, то рівняння (16) можна переписати у вигляді

$$y^{(n-1)})' = f(x). \tag{17}$$

Звідси $$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1. \tag{18}$$

Вчинимо з рівнянням (18) так само, як з рівнянням (16), будемо мати

$$y^{(n-2)} = \iint f(x)dxdx + C_1x + C_2.$$

Після знайдемо

$$y^{(n-3)} = \iiint f(x)dxdxdx + C_1x^2/2 + C_2x + C_3,$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$y' = \iint\ldots\int f(x)dxdx\ldots dx + C_1x^{n-2}/(n-2)! + C_2/(n-3)! + C_{n-1}.$$

Нарешті, одержимо

$$y = \iint\ldots\int f(x)dxdx\ldots dx + C_1x^{n-1}/(n-1)! + C_2x^{n-2}/(n-2)! + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Це загальний розв'язок рівняння (16) в області D:

$$a < x < b,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty,\ \ldots,\ |y^{(n-1)}| < +\infty.$$

2. *Рівняння виду* $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (19)
зводиться до ДР 1-го порядку

$$F(z, z') = 0, \tag{20}$$

якщо зробити заміну $z = y^{(n-1)}$.

а) Припустимо, що рівняння (20) розв'язується відносно z', тоді матимемо $\frac{dz}{dx} = \varphi(z)$, звідси знаходимо

$$\int \frac{dz}{\varphi(z)} = x + C_1 \qquad (21)$$

і якщо з (21) знайдемо z, то дістанемо $z = \psi(x, C_1)$ або $y^{(n-1)} = \psi(x, C_1)$, тобто рівняння типу 1.

Якщо (21) не розв'язується відносно z, то розглядаємо z як параметр.

Тоді $\quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = zdx = \frac{zdz}{\varphi(z)}$.

Звідси $\quad y^{(n-2)} = \int \frac{zdz}{\varphi(z)} + C_2 = \phi(z) + C_2$. Тепер послідовно знаходимо $y^{(n-3)}$ і т.д.

б) Якщо (20) розв'язується в елементарних функціях відносно z, тобто $z = \varphi(z')$, то покладемо $z' = \theta$ і дістанемо $z = \varphi(\theta)$, $dz = \theta dx = \varphi'(\theta)d\theta$, звідси $\quad dx = \frac{\varphi'(\theta)}{\theta}d\theta \quad , \quad C_1 + x = \int \frac{\varphi'(\theta)}{\theta}d\theta. \qquad (22)$

Якщо можливо, то знаходимо $\theta = \psi(x, C_1)$ і $z = \varphi(\theta) = \psi_1(x, C_1)$. Знову прийшли до рівняння типу 1.

Якщо з рівняння (22) не можна знайти θ, то дістаємо розв'язок рівняння в параметричній формі:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = z\frac{\varphi'(\theta)}{\theta}d\theta = \varphi(\theta)\varphi'(\theta)\frac{d\theta}{\theta}.$$

П р и к л а д. $\qquad y'''tgx = y'' + 1.$

Підставляючи $y'' = z$, дістаємо $\quad \frac{dz}{dx}tgx = z + 1$. Звідси $\frac{dz}{z+1} = ctgxdx$ і $\ln|z+1| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|$ або $z+1 = C_1 sinx$. Повертаючись до підстановки $y'' = z$, одержимо ДР вигляду 1: $y'' = C_1 sinx - 1$. Зінтегрувавши яке, одержимо загальний розв'язок:

$$y = -C_1 sinx - x^2/2 + C_2 x + C_3,$$ де C_1, C_2, C_3 - довільні сталі. □

3. *Рівняння, що не містить в явному вигляді невідому функцію $y(x)$ та її похідні до $(k-1)$ - го порядку.*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k \le n-1), \qquad (23)$$

шляхом підстановки $y^{(k)} = z(x)$ знижує порядок рівняння на k одиниць. Дійсно, $\quad y^{(k+1)} = z'(x), y^{(k+2)} = z''(x), \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$

і рівняння (23) набуває вигляду

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \qquad (24)$$

Це рівняння $(n-k)$ - го порядку відносно невідомої функції $z(x)$.

Допустимо, що рівняння (24) таке, що ми можемо знайти його загальний розв'язок

$$z(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}), \tag{25}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}$ - довільні сталі. Повертаючись до підстановки $y^{(k)}=z(x)$, одержимо рівняння вигляду (16): $y^{(k)}(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$.

Зінтегрувавши це рівняння, одержимо розв'язок рівняння (23):

$$y(x) = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

П р и к л а д. Нехай дано рівняння $(1+x)y''' - y'' = 0$.

□ Це рівняння не містить y і y', $k=2$. Підстановка $y''=z(x)(y'''=z')$ приводить до ДР 1 - го порядку $(1+x)z' = z$, зінтегрувавши яке, знаходимо $z = C_1(1+x)$, тому $y'' = C_1(1+x)$. Звідси $y' = C_1(x + x^2/2) + C_2$; $y = C_1(x^2/2 + x^3/6) + C_2x + C_3$. □

4. ***Рівняння, які не містять в явному вигляді незалежну змінну, тобто рівняння вигляду $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ допускають зниження порядку на одиницю, якщо за незалежну змінну взяти функцію y, а за нову шукану функцію взяти $z(y) = y'(x)$.***

Дійсно, застосовуючи правило диференціювання складеної функції, одержимо:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z ,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dy}z\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy}z\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)z \quad \text{і т. д.}$$

Нарешті одержимо $\quad y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right).$

Тобто, кожна похідна від y по x порядку m $(1 \le m \le n)$ виражається через похідні від z по y порядку не вище $m - 1$. Підставляючи їх значення в дане рівняння, одержимо відносно нової шуканої функції z ДР порядку $n - 1$:

$$F_1(y, z, dz/dy, \ldots, d^{(n-1)}z/dy^{(n-1)}) = 0.$$

Якщо це рівняння проінтегрувати і $\Phi(y, z, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0$ – сукупність його розв'язків, то для одержання розв'язку даного ДР залишається розв'язати ДР 1-го порядку $\Phi(y, y', C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) = 0$.

П р и к л а д. $yy''' - y'y'' = 0$ - це рівняння третього порядку, яке не містить в явному вигляді x.

□ Введемо через $z(y) = y'(x)$ - нову шукану функцію, а y будемо вважати новою незалежною змінною. Тоді $y'' = \frac{dz}{dy} z$, $\quad y''' = \left[z \frac{d^2 z}{dy_2} + (\frac{dz}{dy})^2 \right] z$.

В нових змінних рівняння набуде вигляду:

$$y\left[z\frac{d^2 z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \right] z - z\frac{dz}{dy} z = 0$$

- воно еквівалентне сукупності рівнянь $z = 0 \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow y = C$ або $yzz'' + y(z') - zz' = 0.$ (*)

Зауваження. Якщо рівняння $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ є однорідним відносно змінних $y, y', \ldots, y^{(n)}$, тобто

$$F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),\ k > 0,$$

то його порядок *можна знизити на одиницю заміною* $y'(x) = uy$.

Одержане рівняння (*) - однорідне відносно z, z', z''. Оскільки тут y - незалежна змінна, тому робимо підстановку $dz / dy = u(y)z$. Звідси $\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{du}{dy} z + u\frac{dz}{dy} = \frac{du}{dy} z + u^2 z = (\frac{du}{dy} + u^2)z.$ В нових змінних рівняння (*) набуває вигляду

$$yz\left(\frac{du}{dy} + u^2\right)z + yu^2 z^2 - zuz = 0.$$

Звідси $y\frac{du}{dy} + 2yu^2 - u = 0$ або $\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}u = -2u^2$.

А це є рівняння Бернуллі. Зінтегрувавши яке, одержуємо: $u = \frac{y}{C_1 + y^2}$,

де C_1 - довільна стала. Тоді $\frac{dz}{dy} = \frac{y}{C_1 + y^2} z$. Звідси $z = C_2\sqrt{C_1 + y^2}$ або

$y' = C_2\sqrt{C_1 + y^2}$. Звідси неважко одержати загальний розв`язок $y = C_3 e^{C_2 x} + C_1 e^{-C_2 x}$, де C_1, C_2, C_3 - довільні сталі. □

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

1. Дайте означення ДР вищого (другого порядку). Наведіть приклади.
2. Дайте означення розв'язку ДР вищого (другого) порядку. Наведіть приклади.
3. Сформулюйте задачу Коші для ДР n-го (другого) порядку в нормальній формі.
4. Сформулюйте теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння n-го (другого) порядку в нормальній формі.

5. Як узгоджується з теоремою Коші те, що через точку області проходить більше ніж одна інтегральна крива рівняння вищого порядку.
6. Дайте означення загального розв'язку рівняння n-го порядку. Що називається загальним інтегралом цього рівняння. Як розв'язується задача Коші з початковими даними з області визначення ДР за допомогою формули загального розв'язку. Переконайтесь, що $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ є загальним розв'язком ДР $y'' + 4y = 0$ в області $D{=}R_3$. Розв'яжіть, користуючись загальним розв'язком, задачу Коші: $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
7. Що називається частинним розв'язком рівняння $y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ ($y'' = f(x, y, y')$). Як він зв'язаний з загальним розв'язком. Переконайтесь, що : $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$ є частинним розв'язком рівняння $y'' + 4y = 0$.
8. Дайте геометричну та механічну інтерпретацію ДР другого порядку та його розв'язків. Наведіть приклади застосування.
9. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$ ($y'' = f(x)$) ? Який вигляд має рівняння з початковими умовами ?
10. Як знижується порядок рівняння, яке не містить незалежної змінної ? Вказати метод та навести приклади.
11. Якою підстановкою знижується порядок ДР $y'' = f(y, y')$. Наведіть приклади.
12. Вкажіть підстановку, якою знижується порядок рівняння, яке не містить шуканої функції та її послідовних перших похідних.
13. Визначіть тип рівняння відносно функції z, до якого зводиться рівняння $x^2 y y'' = (y - xy')^2$ заміною $y' = yz$.
14. Довести, що рівняння руху маятника $y'' + \sin y = 0$ має розв'язок $y(x)$ такий, що при $x \to +\infty$ $y \to +\infty$.
15. Обчислити швидкість, з якою впаде на Землю тіло (під дією земного тяжіння), що в початковий момент перебуває на орбіті Місяця (прискорення земного тяжіння обернено пропорційне квадратові відстані тіла від центра Землі). (R = 6370 км – радіус земної кулі ; L = 384000 км – відстань Місяця від центра Землі).
16. Знайти інтегральну криву, знаючи, що радіус її кривини пропорційний квадратові абсциси (коефіцієнт пропорційності $1/a$) та справедлива умова $y(a) = -a/3$, $y'(a) = 0$.

Завдання для практичних аудиторних занять

1. Зінтегрувати рівняння :

   а) $y''' = 4x^3 + \cos x$; б) $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$; в) $yy'' + (y')^2 = 0$.

Відповіді: а) $y = x^6/30 + C_1 x^2/2 + C_2 x + C_3 - \sin x$;

б) $y = sh(x + C_1) + C_2(x+1)$; в) $y^2 = C_1 x + C_2$

2. Розв'язати задачу Коші :

а) $y'' = xe^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

б) $t\ddot{s} + \dot{s} + t = 0$, $s(1) = 3/4$, $\dot{s}(1) = -1/2$.

Відповіді: а) $y = (x-2)e^x + x + 3$; б) $s = 1 - t^2/4$.

3. Виходячи із загального інтеграла рівняння $yy'' + (y')^2 = 1$, виділити інтегральну криву, яка проходить через точку (0,1) і дотикається прямої $x + y = 1$. (Відповідь: $y + x = 1$)

4. Обчислити згин балки, один кінець якої непорушно замурований у стіні, а на другий діє вертикальна сила P. Довжина балки дорівнює L (вагою балки нехтуємо).

Вказівка. Якщо початок координат помістити в нерухому точку балки, вісь Ox спрямувати вздовж балки, а Oy – вертикально вниз, то згинальний момент у точці (x,y) $M = P(l-x) = EI\dfrac{d^2y}{dx^2}$, де E – модуль Юнга, I – момент інерції площі поперечного перерізу балки відносно нейтральної лінії. При цьому $y(0) = y'(0) = 0$.

(Відповідь: $H = y(l) = \dfrac{Pe^3}{3EI}$)

5. Автомобіль рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 90$ *км/ч*. В деякий момент часу він починає гальмувати. Сила гальмування дорівнює *0.3* від ваги автомобіля. На протязі якого проміжку часу він буде рухатись від початку гальмування до повної зупинки і який шлях буде пройдений за цей час? (Відповідь: *8,5 с; 106,3 м*)

Завдання для аудиторної самостійної роботи

1. 1. Зінтегрувати рівняння : $y''' = 2x + \ln x$;

2. Розв'язати задачу Коші : $2yy'' - (y')^2 = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2. 1. Зінтегрувати рівняння : $x^2 y''' = (y'')^2$;

2. Розв'язати задачу Коші : $y'' + (y')^2 - y'(y+1) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

3. 1. Зінтегрувати рівняння : $y''' = \sqrt{1 - (y'')^2}$;

2. Розв'язати задачу Коші : $y'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Відповіді: 1.1. $y = \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{36}(\ln|x - 1|) + C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$, 1.2. $y=5x^2/4+2x+1$. 2.1. $y=C_1x^2/2-C_1^2((x+C_1)\ln|x+C_1|-1)+C_2x+C_3$ $(C_1\neq 0)$, при $C_1=0$, $y=x^3/6+C_2x+C_3$, 2.2. $y=2e^x$. 3.1. $y=C_3+C_2x-$ $-\sin(x+C_1)$, 3.2. $y=e^{2x}$.

Індивідуальні домашні завдання

1. Знайти частинний розв'язок ДР та обчислити значення одержаної функції $y=\varphi(x)$ при $x=x_1$ з точністю до двох знаків після коми

1.1. $y'''=x\sin x,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=\pi/4;$

1.2. $y'''\sin^4 x=\sin 2x,\quad y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}, y'(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}, y''(\frac{\pi}{4})=0, x_1=1;$

1.3. $y'''\cos^4 2x=\sin 4x,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=\pi/4;$

1.4. $y'''=\cos x+e^{-x},\quad y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=-1,\quad x_1=1;$

1.5. $y'''=\sin^3 x,\quad y(0)=20/17, y'(0)=1, y''(0)=-2/3,\quad x_1=\pi/4;$

1.6. $y'''=2\cos^2 2x+e^{-x},\quad y(0)=0, y'(0)=11/18, y''(0)=0,\quad x_1=\pi/4;$

1.7. $y'''=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=1;$

1.8. $y'''=\dfrac{1}{1+x^2},\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=1;$

1.9. $y'''=x+\sin^2 x,\quad y(0)=y''(0)=0, y'(0)=0,\quad x_1=\pi/4;$

1.10. $y'''=e^{-x}+\cos^2 x,\quad y(0)=y''(0)=0, y'(0)=7/8,\quad x_1=1;$

1.11. $xy'''=2,\quad y(1)=1/2, y'(1)=y''(1)=0,\quad x_1=2;$

1.12. $xy'''=1,\quad y(1)=1/4, y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=2;$

1.13. $\sin^3 xy'''=\cos x,\quad y(\pi/2)=y'(\pi/2)=0, y''(\pi/2)=-1/2,\quad x_1=1;$

1.14. $\cos^3 xy'''=\sin 2x,\quad y(0)=y'(0)=0, y''(0)=1/4,\quad x_1=\pi/6;$

1.15. $y'''=xe^{2x},\quad y(0)=0, y'(0)=y''(0)=-1/4,\quad x_1=1/2;$

1.16. $y'''=e^{3x}+\sin^2 4x,\quad y(0)=1/27, y'(0)=0, y''(0)=1/3,\quad x_1=1;$

1.17. $y'''=e^{2x},\quad y(0)=9/8, y'(0)=1/4, y''(0)=-1/2,\quad x_1=1/2;$

1.18. $x^4y'''=3+2x^2,\quad y(1)=y'(1)=0, y''(1)=-2,\quad x_1=e;$

1.19. $y'''=3\sin x\cos^2 x,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=1;$

1.20. $y'''=\sin^2 x\cos x,\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad x_1=\pi/3;$

1.21. $y'''=25x\cos 5x,\quad y(0)=y'(0)=0, y''(0)=1,\quad x_1=\pi/20;$

1.22. $(1+4x^2)y''' = -2, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = \pi/2, \quad x_1 = 1/2$;

1.23. $\sqrt{1-9x^2}\,y''' = 3, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad x_1 = 1/3$;

1.24. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x, \quad y(0) = -1/8, y'(0) = \dfrac{1}{8}\cos 2, y''(0) = \dfrac{1}{2}, \quad x_1 = 1$;

1.25. $y''' = e^{-x/2} + 1, \quad y(0) = 8, y'(0) = 5, y''(0) = 5, \quad x_1 = 2$;

1.26. $(2+x)^2 y''' = 1, \quad y(-1) = -1.5, y'(-1) = y''(-1) = 0, \quad x_1 = 2$;

1.27. $y''' = \sin x, \quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0, \quad x_1 = \pi/2$;

1.28. $x^3 y''' = 6, \quad y(1) = 2, y'(1) =, y''(1) = 1, \quad x_1 = 2$;

1.29. $y''' = \cos^2 x, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1/8, y''(0) = 0, \quad x_1 = \pi$;

1.30. $y''' = \cos 4x \quad y(0) = 2, y'(0) = 15/16, y''(0) = 0, \quad x_1 = \pi$.

Відповіді: **1.1** 0,14; **1.2** –0.17; **1.3** 0.09; **1.4** 0.79; **1.5** 1.32; **1.6** 0.6; **1.7** 1.18; **1.8** 0.15; **1.9** 0.12; **1.10** 1.41; **1.11** 0.77; **1.12** 0.38; **1.13** –0.09; **1.14** 0.04; **1.15** -0.15; **1.16** 0.71; **1.17** 1.22; **1.18** –1.54; **1.19** 0.1; **1.20** 0.02; **1.21** –0.23; **1.22** 0.28; **1.23** 0.13; **1.24** 0.08; **1.25** 0.8; **1.26** 0.45; **1.27** 1.23; **1.28** 4.08; **1.29** 3.58; **1.30** 5.14.

2.Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл ДР, які допускають зниження порядку

2.1. а) $xy'' = y'$; б) $1+(y')^2 = 2yy''$;

2.2. а) $y''x\ln x = y'$; б) $yy'' + (y')^2 = 0$;

2.3. а) $xy'' + y' = 0$; б) $yy'' + (y')^2 = 1$;

2.4. а) $xy'' + y' + x = 0$; б) $yy'' = (y')^2$;

2.5. а) $(x-3)y'' + y' = 0$; б) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$;

2.6. а) $(1-x^2)y'' - xy' = 2$; б) $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^3 = 0$;

2.7. а) $y'' = 1 + \dfrac{x(y'-x)}{1-x^2}$; б) $\cos y y'' + \sin y (y')^2 = y'$;

2.8. а) $x^2 y'' + xy' = 1$; б) $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$;

2.9. а) $y''(e^x - 1) + y' = 0$; б) $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$;

2.10. а) $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' = 2x$; б) $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$;

2.11. а) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$; б) $yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0$;

2.12. а) $y''x\ln x = 2y'$; б) $(y'')^2 + (y')^2 = a^2$;

2.13. а) $xy'' + y' = \ln x$; б) $y'y'' - \sqrt{1+(y')^2} = 0$;

2.14. а) $xy'' - y' = x^2 e^x$; б) $y'' + (y')^2 + 1 = 0$;

2.15. а) $y'' + y' tgx = \sin 2x$; б) $yy'' + (y')^2 = y^2 \ln y$;

2.16. а) $y'' = y' + x$; б) $2yy' + (y')^2 + (y')^4 = 0$;

2.17. а) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$; б) $2yy'' = (y')^2$;

2.18. а) $y'' - 2ctgxy' = \sin^3 x$; б) $yy'' - (y')^2 = y'$;

2.19. а) $y'' + \dfrac{1}{x} y' = x^2$; б) $y'(1 + (y')^2) = y''$;

2.20. а) $xy'' + 2y' = x^3$; б) $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y+1}}$;

2.21. а) $y'' - 2y' tgx = \sin x$; б) $2yy'' = y^2 + (y')^2$;

2.22. а) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 = 1 = 0$; б) $y^4 - y^3 y'' = 1$;

2.23. а) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$ $\begin{matrix} y(2) = 0 \\ y'(2) = 4 \end{matrix}$; б) $y^3 y'' = -1$;

2.24. а) $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$; б) $y'' + 2y(y')^3 = 0$;

2.25. а) $y'' tgx = y' + 1$; б) $2yy'' - (y')^2 = 1$;

2.26. а) $xy'' = (1 + 2x^2) y'$; б) $(y-1)^2 y'' - 2(y')^2 = 0$;

2.27. а) $y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$; б) $(y' + 2y)y'' = (y')^2$;

2.28. а) $y'' = -x / y'$; б) $y'' = y' / \sqrt{y}$;

2.29. а) $y'' + y' = chx$; б) $(2y + 3)y'' - 2(y')^2 = 0$;

2.30. а) $x^2 y'' + xy' = \sqrt{x}$; б) $y'' tgy = 2(y')^2$.

Відповіді: **2.1.** а) $y = C_1 x^2 + C_2$, б) $(x + C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$; **2.2.** а) $y = C_1 x(\ln x - 1) + C_2$, б) $\sqrt[3]{y^4} = C_1 x + C_2, y = C$; **2.3.** а) $y = C_1 \ln x + C_2$, б) $(x + C_2)^2 - y^2 = C_1$; **2.4.** а) $y = C_1 \ln|x| - x^2/4 + C_2$, б) $y = C_1 e^{C_2 x}$; **2.5.** а) $y = C_2 \ln|x-3| + C_2$, б) $y\cos^2(C_1 \pm x) = C_2$; **2.6.** а) $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2$, б) $(x + C_2)\ln y = x + C_1$; **2.7.** а) $y = 1/2x^2 + C_1 \arcsin x + C_2$, б) $x = C_1 + \cos C_2 \ln\left|\dfrac{y + C_2}{2}\right|$; **2.8.** а) $y = \dfrac{\ln^2 x}{2} + C_1 \ln x + C_2$, б) $C_1 x + C_2 = \ln|y/(y + C_1)|$; **2.9.** а) $y = C_1(x - e^{-x}) + C_2$, б) $\dfrac{x + C_2}{2} = C_1 arctg(C_1 \ln y)$; **2.10.** а) $y = x^3/6 + 1/2x + (C_1 - 1/2) arctgx + C_2$, б) $e^y + C_1 = (x + C_2)^2$; **2.11.** а) $y = x^3 - 3x + (C_1 + 3) arctgx + C_2$, б) $y +$

$+C_1\ln y = x+C_2$; **2.12**. а) $y=c_1(x\ln^2 x-2x\ln x+2x)+C_2$, б) $y=C_2-$ $-C_1\cos(x+C_1)$; **2.13**. а) $y=(x+a)\ln x-2x+C_2$, б) $y=\frac{x-a}{2}\sqrt{(x-a)^2-1}-$ $-1/2\ln[(x-a)+\sqrt{(x-a)^2-1}]+C_2$; **2.14**. а) $y=e^x(x-1)+C_1x^2+C_2$, б) $e^{-y}=C_1\sec(x+C_2)$; **2.15**. а) $y=C_2+C_1\sin x-x-1/2sim2x$, б) $\ln y=$ $=C_1e^x+C_2e^{-x}$; **2.16**. а) $y=C_1e^x+C_2-x-x^2/2$, б) $2(C_1y-1)^{3/2}=$ $=3C_1x+C_2, y=C$; **2.17**. а) $y=1/3x^3+C_1x^2+C_2$, б) $y=(C_1x+C_2)^2, y=C$; **2.18**. а) $y=-1/3\sin^3+C_1(x/2-\sin 2x/4)+C_2$, б) $y=C_2e^{C_1x}+1/C_1(C_1\neq 0)$; **2.19**. а) $y=x^4/16+C_1\ln|x|+C_2$, б) $x-C_1=\ln|\sin(y-C_2)|$; **2.20**. а) $y=$ $=x^4/20-C_1/x+C_2$, б) $x=\sqrt{y+1}-C_1/2\ln\left|2\sqrt{y+1}+C_1\right|+C_2, y=C$; **2.21**. а) $y=C_1tgx-1/3\ln|tg(x+\pi/4)|+C_2$, б) $y=C_1(1\pm ch(x+C_2)), y=Ce^{\pm x}$; **2.22**. а) $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$, б) $\ln\left|y^2+C_1+\sqrt{y^4+2C_1y^2+1}\right|=C_2\pm x$, $y=\pm 1$; **2.23**. а) $y=0.4x^2\sqrt{2x}-3.2$, б) $\sqrt{1+C_1y^2}/C_1=C_2\pm x$; **2.24** а) $y=(C_1x-C_1^2)e^{x/C_1+1}+C_2$, б) $y^3=3x+C_1y+C_2, y=C$; **2.25** а) $y=$ $=-C_1\cos x-x+C_2$, б) $(x-C_2)^2=4C_1(y-C_1)$; **2.26**. а) $y=C_1e^{x^2}+C_2$, б) $1-y=1/(C_1x+C_2)$; **2.27**. а) $y=x^4/8-x^3/6+C_1x^2/2-C_1x+C_2$, б) $x=z-\ln|z+1|+C_2$, де $z=\pm\sqrt{1+4C_1y}$, $y=C$, $y=Ce^{-x}$; **2.28** а) $y=(C_1/2)\arcsin(x/C_1)+(x/2)\sqrt{C_1^2-x^2}+C_2$, б) $\sqrt{y}-2c_1\ln\left|\sqrt{y}+C_1\right|=$ $=x+C_2, y=C$; **2.29**. а) $y=e^x/4-(x+1+C_1)e^{-x}+C_2$, б) $\sqrt{2y+3}=C_2e^{C_1x}$, $y=C$; **2.30**. а) $y=4\sqrt{x}+C_1\ln|x|+C_2$, б) $ctgy=C_1x+C_2, y=C$.

§ 3. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

В цьому і наступному параграфах розглянемо клас рівнянь, які широко використовуються в практиці наукових досліджень, теорія яких розроблена найбільш докладно – клас лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь вищих порядків.

3.1 Загальні відомості

Зведеним лінійним однорідним диференціальним рівнянням (ЛОДР) n - го порядку називається рівняння

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0\ , \qquad (1)$$

де $p_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ *- задані неперервні функції (зокрема сталі) на інтервалі (a;b); вони також називаються коефіцієнтами рівняння.* Умова неперервності забезпечує існування і єдиність розв'язку задачі Коші.

Для спрощення викладок позначимо ліву частину рівняння (1) через $L(y)$:

$$L(y)=y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)\,y. \qquad (2)$$

Запис $L(y)$ означає результат виконання над функцією y операцій, вказаних в правій частині формули (2), а саме: знаходження похідних від функції y до n – го порядку включно; множення $y, y', \ldots, y^{(n)}$ на задані функції $p_n(x), p_{n-1}(x), \ldots, p_1(x)$ і додавання одержаних добутків.

Сукупність цих операцій позначимо символом L:

$$L=\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x),$$

який будемо називати *лінійним диференціальним оператором n – го порядку.*

Зокрема, лінійний диференціальний оператор другого порядку має вигляд

$$L\equiv\frac{d^2}{dx^2}+p_1(x)\frac{d}{dx}+p_2(x).$$

Н а п р и к л а д, якщо оператор $L\equiv\dfrac{d^2}{dx^2}-2{,}5x\dfrac{d}{dx}+x^2-2$, то

$$L(e^{2x})=4e^{2x}-5xe^{2x}+(x^2-2)e^{2x},\ \ L(e^{x^2})=e^{x^2}(2+4x^2-5x^2+x^2-2)\equiv 0.$$

Лінійний диференціальний оператор L має дві основні властивості (лінійність оператора L):

1) ***однорідності**: $L(Cy)=C\,L(y)$, (сталий множник можна виносити за знак оператора);*

2) ***адитивності**: $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$ (результат дії оператора на суму двох функцій дорівнює сумі результатів дії оператора на кожний доданок окремо).*

В справедливості цих властивостей легко переконатись безпосередньою перевіркою. Дійсно:

1. Якщо y є n раз диференційовна функція, а C – довільне число, то

$$L(Cy) = (Cy)^{(n)} + p_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(Cy)' + p_n(x)(Cy) =$$

$$= C(y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y) = CL(y)$$

2. Якщо y_1 і y_2 - n раз диференційовні функції, то

$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots +$$

$$+ p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) =$$

$$= (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y_1) +$$

$$+ (y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Зауваження. Властивість (2) справедлива для довільного фіксованого числа доданків.

ЛОДР (1) за допомогою оператора L можна записати у вигляді:

$$L(y) = 0. \qquad (3)$$

Розв'язки однорідного рівняння мають такі властивості:

1^0 *Якщо функція $y_1(x)$ - розв'язок рівняння (3) ($L(y_1(x)) \equiv 0$), то розв'язком цього рівняння буде і функція $y = C_1 y_1(x)$, де C_1 - довільна стала.*

Дійсно: $L(C_1 y_1) = C_1 L(y_1) = C_1 0 = 0$.

2^0 *Якщо функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (3), то розв'язком цього рівняння буде і їх сума, тобто функція*

$$y = y_1(x) + y_2(x).$$

Дійсно, оскільки $L(y_1) = 0$ і $L(y_2) = 0$ і $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0+0=0$, то і сума розв'язків рівняння (3) є розв'язком цього рівняння.

3^0 *Якщо функції $y_k(x)$ $(k=\overline{1,n})$ є розв'язками рівняння (3), то функція*

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x), \qquad (4)$$

де $C_k (k=\overline{1,n})$ *- довільні сталі, є розв'язком цього рівняння.*

(Слідує з властивостей 1^0 і 2^0 і методу повної математичної індукції).

4^0 Функцію $\quad y(x) = u(x) + iv(x), \quad (i = \sqrt{-1}) \qquad (5)$

будемо називати комплексною функцією дійсної змінної x, визначеної на інтервалі (a,b). При цьому функції $u(x)$ і $v(x)$ називаються дійсною і уявною частинами комплексної функції $y(x)$. Похідна k - го порядку визначається так:

$$y^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x).$$

Функція (5) називається *комплексним розв'язком ДР (3) на інтервалі (a,b)*, якщо вона перетворює це рівняння в тотожність:

$$L(u(x)+iv(x))=0, \qquad \forall x\in(a,b).$$

В силу лінійності оператора L маємо:

$$L(u(x)+iv(x))=L(u(x))+i\,L(v(x))=0,$$

звідси $L(u)\equiv 0$ і $L(v)\equiv 0$, $\forall x\in(a,b)$, а це означає, що функції $u(x)$ і $v(x)$ є розв'язками однорідного рівняння.

Таким чином, *якщо комплексна функція дійсної змінної* x $y(x)=u(x)+iv(x)$ *є розв'язком ЛОДР (3), то розв'язками цього рівняння є дійсна і уявна частина комплексної функції* $y(x)$.

3.2 Фундаментальна система розв'язків

Які умови слід накласти на функції $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$, щоб функція (4) була загальним розв'язком ЛОДР (3)? Для відповіді на це питання введемо поняття лінійно залежної (ЛЗ) і лінійно незалежної системи функцій (ЛНЗ), які відіграють таку саму важливу роль, що й системи базисних векторів у лінійній алгебрі.

Означення. *Система функцій* $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$, *визначених на інтервалі* (a,b), *називається лінійно залежною (ЛЗ) на цьому інтервалі, якщо існує* n *дійсних чисел* α_k $(k=\overline{1,n})$, *з яких принаймні одне відмінне від нуля, таких, що справедлива тотожність :*

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\dots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0, \quad \forall x\in(a,b). \tag{6}$$

Якщо тотожність (6) *справедлива тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, $\forall x\in(a,b)$, *то сукупність функцій* $y_1(x), y_2(x),\dots, y_n(x)$ *називається лінійно незалежною (ЛНЗ).*

П р и к л а д 1. Система функцій $y_1=\sin^2 x$, $y_2=\cos^2 x$, $y_3=1$ є ЛЗ, оскільки при $\alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=-1$ справедлива рівність $\sin^2 x+\cos^2 x-1=0, \forall x\in(-\infty,+\infty)$.

Дві функції y_1 *і* y_2 *ЛНЗ на інтервалі* (a,b), *якщо* $\dfrac{y_1}{y_2}\neq const$ $(a<x<b)$.

П р и к л а д 2. Функції $y_1=e^{\lambda_1 x}, y_2=e^{\lambda_2 x}$, де $\lambda_1\neq\lambda_2$ ЛНЗ на довільному інтервалі. Дійсно, рівність $\alpha_1 e^{\lambda_1 x}+\alpha_2 e^{\lambda_2 x}=0$, в якій хоча б одне з чисел α_1 і α_2 не дорівнює нулю, може виконуватись не більше ніж при одному x. ЛНЗ функцій слідує також з того, що

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}}=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\neq const, \ (\lambda_1\neq\lambda_2).$$

П р и к л а д 3. Функції $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$ - ЛНЗ, оскільки рівність $\alpha_1\sin x+$ $+\alpha_2\cos x=0$ виконується $\forall x\in R$ лише за умови $\alpha_1=\alpha_2=0$. ЛНЗ функцій слідує також з того, що:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{\sin x}{\cos x}=tgx\neq const .$$

Має місце теорема.

Теорема 1. *Якщо функції $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ - ЛЗ на інтервалі (a,b), то одна з них є лінійною комбінацією (ЛК) інших.*

Δ Дійсно, нехай

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

де, наприклад, $\alpha_n \neq 0$. Тоді

$$y_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} y_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} y_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} y_{n-1}, \tag{7}$$

тобто y_n є ЛК функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_{n-1}(x)$. ∇

Означення. *Сукупність* **n** *розв'язків ЛОДР* ($L(y)=0$)

$$y_1(x)\ ,\ y_2(x),\ \ldots\ ,\ y_n(x) \qquad (a<x<b), \tag{8}$$

лінійно незалежних на інтервалі (a,b) *називається фундаментальною системою розв'язків цього рівняння на інтервалі* (a,b).

П р и к л а д 4. Розглянемо рівняння $L(y) = y'' + y = 0$. Це ЛОДР другого порядку має два частинних розв'язки $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$, які утворюють фундаментальну систему розв'язків на інтервалі $(-\infty,+\infty)$, оскільки вони ЛНЗ на цьому інтервалі.

3.3 Визначник Вронського та його властивості

Означення. *Визначником Вронського або вронскіаном* n - 1 *раз диференційовних функцій* $y_1, y_2,..., y_n$ *називається визначник вигляду:*

$$W(x) = W[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Теорема 2. *Якщо функції $y_1, y_2,..., y_n$ ЛЗ на (a,b), то $W(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.*

Δ Нехай функції $y_1, y_2,..., y_n$ ЛЗ на (a,b), то згідно з теоремою 1 одна з них є ЛК інших; продиференціювавши рівність (7) і підставивши у визначник Вронського замість n-го стовпця, за властивістю визначника (якщо елементи одного стовпця (рядка) є лінійна комбінація інших стовпців (рядків), то величина визначника дорівнює нулю) переконуємося в справедливості твердження теореми 2. ∇

Теорема 3. *Для того, щоб розв'язки* (8) *були ЛНЗ на (a,b), тобто в інтервалі неперервності коефіцієнтів рівняння $L(y) = 0$, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю ($W(x) \neq 0$) в жодній точці з інтервалу (a,b), ($\forall x \in (a,b)$).*

Δ *Необхідність.* Нехай розв'язки (8) утворюють фундаментальну систему розв'язків на (a,b). Допустимо, що $\exists x_0 \in (a,b)\ (W(x_0)=0)$.

Побудуємо однорідну лінійну систему n рівнянь

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=0, \\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)+\ldots+c_ny_n'(x_0)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+c_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} \tag{10}$$

з невідомими $c_1,c_2,\ldots,c_n$. Визначник цієї системи є $W(x_0)$. Оскільки він дорівнює нулю, то система (10) має нетривіальний розв'язок : $c_1=c_1^{(0)}, c_2=c_2^{(0)},\ldots,c_n=c_n^{(0)}$, тобто хоча б одне з чисел $c_1^{(0)},c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)}$ не дорівнює нулю. Будуємо розв'язок ДР (3)

$$y=c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\ldots c_n^{(0)}y_n. \tag{11}$$

Цей розв'язок задовольняє нульові початкові умови $y=0,\ y'=0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=0$ при $x=x_0$, як це видно із системи (10).

Розв'язком ДР (3) з нульовими початковими умовами є також функція $y=0$. Згідно з *теоремою* єдиності розв'язку задачі Коші, маємо рівність

$$c_1^{(0)}y_1+c_2^{(0)}y_2+\ldots c_n^{(0)}y_n=0,\quad \forall x\in(a,b) \tag{12}$$

Оскільки не всі $c_k^{(0)}=0$, то тотожність (12) означає, що, всупереч умові, розв'язки (8) ЛЗ на (a,b).

Достатність. Допустимо, що $W(x)\neq 0,\ \forall x\in(a,b)$ і розв'язки (8) ЛЗ на (a,b). З ЛЗ розв'язків (8) на (a,b) і *теореми 2* слідує, всупереч допущенню, що $W(x)=0,\ \forall x\in(a,b)$. ∇

Формула Ліувілля-Остроградського

Нехай y_1 і y_2 - фундаментальна система частинних розв'язків рівняння другого порядку: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, тоді можна записати :

$$\begin{cases} y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0, \\ y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0. \end{cases} \tag{*}$$

Помноживши перше з рівнянь системи (*) на $-y_2$, а друге – на y_1 і додавши, дістанемо:

$$y_2''y_1-y_1''y_2+p(x)(y_2'y_1-y_1'y_2)=0.$$

Це рівняння можна записати у вигляді $W'+p(x)W=0$, де W- визначник Вронського. Оскільки y_1, y_2 - фундаментальна система розв'язків, то згідно з *теоремою 3* $W[x,y_1,y_2]\neq 0,\ \forall\ x\in(a,b)$.

Зінтегруємо останнє ДР за умови $W(x_0)=W_0$. Дістанемо відому формулу Ліувілля-Остроградського

$$W(x) = W_0 \exp(-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx). \tag{13}$$

З формули (13) ще раз бачимо, що коли детермінант Вронського для системи розв'язків рівняння (1) перетворюється в нуль в одній точці, то він дорівнює нулю тотожно.

3.4 Структура загального розв'язку ЛОДР

Структуру загального розв'язку рівнянь визначає така *теорема*

Теорема 4. *Якщо y_1, y_2,..., y_n фундаментальна система розв'язків рівняння (3) на інтервалі (a,b), тобто в інтервалі неперервності коефіцієнтів $p_1(x)$, $p_2(x)$,...,$p_n(x)$, то лінійна комбінація цих розв'язків:*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{14}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - довільні сталі, дає загальний розв'язок цього рівняння в області D: $a < x < b$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$, ... ,$|y^{(n-1)}| < +\infty$.

Δ Дійсно, в кожній точці області D має місце теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Покажемо, що функція (14) задовольняє обидві умови, вказані в означенні загального розв'язку ДР n-го порядку.

1.Систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = y, \\ C_1y_1' + C_2y_2' + \ldots + C_ny_n' = y', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \ldots + C_ny_n^{(n-1)} = y^{(n-1)} \end{cases} \tag{15}$$

можна розв'язати в області D відносно довільних сталих C_j $j = \overline{1,n}$, оскільки визначник цієї системи є вронскіан фундаментальної системи розв'язків рівняння (3), тому відмінний від нуля.

2. Функція (14) за третьою властивістю розв'язків ЛО рівняння є розв'язком рівняння $L(y)= 0$ при всіх допустимих значеннях довільних сталих C_1, C_2, ..., C_n. Тому функція (14) є загальним розв'язком рівняння $L(y)= 0$ в області D. ∇

Формула (14) містить в собі всі розв'язки рівняння $L(y)= 0$, оскільки вона дає можливість знайти розв'язок з довільними початковими даними y_0, y_0',..., $y_0^{(n-1)}$ і $x_0 \in (a;b)$. Для цього достатньо підставити в систему (15) замість x, y, y' ... , $y^{(n-1)}$ початкові дані x_0, y_0, y_0',..., $y_0^{(n-1)}$ і розв'язати одержану систему відносно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Підставляючи одержані значення довільних сталих $C_j = C_j^{(0)}$, $j = \overline{1,n}$ у формулу (14), одержимо шуканий розв'язок:

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j^{(0)} y_j(x) \tag{16}$$

Таким чином, фундаментальна система розв'язків (8) є базисом n-вимірного лінійного простору розв'язків рівняння (3).

П р и к л а д 1. Легко бачити, що функції $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ є розв'язками ЛОДР $y'' + y = 0$. В пункті 3.2 було показано, що ці розв'язки ЛНЗ, отже утворюють фундаментальну систему розв'язків на всій числовій прямій, тому

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{17}$$

є загальним розв'язком рівняння $y'' + y = 0$, в області $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$.

3.5 Знаходження загального розв'язку ЛОДР другого порядку

Випадок змінних коефіцієнтів. Знання фундаментальної системи розв'язків забезпечує можливість знайти будь-який розв'язок лінійного однорідного рівняння. Проте навіть для простого ДР другого порядку із змінними коефіцієнтами

$$u'' + a^2(t)\, u = 0\,, \tag{18}$$

яке є одним з основних рівняннь математичної фізики і появляється в таких різних областях, як квантова механіка, теорія дифузії, розповсюдження хвиль, теорія передачі даних тощо, не вдається одержати жодної фундаментальної системи розв'язків в термінах квадратур і елементарних функцій. Тому залишається покладатися на інтуїцію і кмітливість інженерів, математиків і фізиків при розв'язанні конкретних задач. В зв'язку з цим представляє інтерес *теорема.*

Теорема. *Якщо відомий один ненульовий розв'язок* $y = y_1$ *рівняння*

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0, \tag{19}$$

то загальний розв'язок цього рівняння в області $(a<x<b, -\infty <y <+\infty)$ *може бути знайдено за допомогою квадратур.*

Δ. Введемо нову функцію $y = u\, y_1$ тоді

$$y' = u'y_1 + uy_1'; \qquad y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''.$$

Підставивши y, y', y'' в рівняння (19), одержимо

$$u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + p(x)(u'y_1 + uy_1') + q(x)uy_1 = 0,$$

тобто,

$$u''y_1 + u'[2y_1' + p(x)y_1] + u[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] = 0.$$

Оскільки y_1 - розв'язок рівняння (19), то $y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$, тоді в нових змінних рівняння (19) набуде вигляду

$$u''y_1 + u'[2y_1' + p(x)y_1] = 0.$$

Порядок цього рівняння понизимо, поклавши $u' = z$, де z - нова шукана функція: $z'y_1 + z[2y_1' + p(x)y_1] = 0$,

звідси $$z = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx},$$ де C_1 - довільна стала.

При цьому

$$u' = \frac{C_1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx}, \qquad \text{тобто} \qquad u = C_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f(x)dx} dx + C_2,$$

де C_2 - також довільна стала. Підставляючи знайдені значення u в формулу $y = uy_1$, одержимо загальний ров'язок:

$$y = C_1 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f(x)dx} dx + C_2 y_1,$$

оскільки y_1 і $y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f(x)dx} dx$ - ЛНЗ на інтервалі (a,b). ∇

П р и к л а д. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Тут $y_1 = x$. Згідно з доведеною теоремою, шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = x\left(\int \frac{Ce^{-\int \frac{dx}{x}}}{x^2} dx + C_2\right) = x\left(C\int \frac{dx}{x^3} + C_2\right) = x\left(\frac{C_1}{x^2} + C_2\right) = \frac{C_1}{x} + C_2 x,$$

де $C_1 = -\frac{C}{2}$.

Випадок сталих коефіцієнтів. Якщо коефіцієнти рівняння $L(y) = 0$ сталі, то ще Л.Ейлер довів, що завжди можна побудувати фундаментальну систему разв'язків, яка складається з елементарних функцій, тобто такі рівняння завжди інтегруються в елементарних функціях.

Розглянемо рівняння другого порядку

$$L(y) = y'' + p\,y' + q\,y = 0, \tag{20}$$

де p і q - дійсні числа. Будемо, як і Ейлер, шукати частинний розв'язок рівняння (20) у вигляді :

$$y = e^{kx}, \tag{21}$$

де k - довільний параметр (дійсний або комплексний).

Враховуючи, що $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$ приходимо до висновку, що (21) є розв'язком рівняння (20) тоді і тільки тоді, коли

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0 \quad \text{або} \quad k^2 + pk + q = 0. \tag{22}$$

Алгебраїчне рівняння (22) називається характеристичним, а його корені характеристичними числами рівняння (20). Замітимо, що характеристичне рівняння (22) може бути складено за даним ДР (20) заміною y'', y' і y на k^2, k і 1, тобто степінь k збігається з порядком похідної, якщо домовитись вважати, що похідна нульового порядку від функції є сама функція $y^{(0)} = y$.

Структура фундаментальної системи розв'язків, а разом з нею і загального розв'язку рівняння (20), залежить від коренів характеристичного рівняння (22). Можливі три випадки :

І випадок.

$$D = \frac{p^2}{4} - p > 0, \quad k_{1,2} = -\frac{p^2}{4} \pm \sqrt{D} \quad \text{- } \textit{корені дійсні і різні.}$$

Тоді $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків (див. п.3.2) і згідно з *теоремою 3* загальний розв'язок набуває вигляду

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{23}$$

П р и к л а д 1. Зінтегрувати рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичним рівнянням буде: $k^2 - 3k + 2 = 0$, його корені $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ (дійсні і різні). Тому фундаментальна система розв'язків має вигляд $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}$, а загальним розв'язком буде функція $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

П р и к л а д 2. Зінтегрувати рівняння $y'' + 5y' = 0$.

Характеристичним рівнянням буде: $k^2 + 5k = 0$ або $k(k+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k + 5 = 0 \end{array}\right.$, тобто $k_1 = 0$, $k_2 = 5$; $y_1 = e^{0*x} = 1; y_2 = e^{-5x}$, а загальним розв'язком буде функція $y = C_1 + C_2 e^{-5x}$.

ІІ випадок. $D = 0$, $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$ - *корені дійсні і рівні.*

У цьому випадку одним частинним розв'язком, очевидно, є

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{24}$$

Покажемо, що другим частинним розв'язком рівняння (20), лінійно

незалежним з (24), є $\quad y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}. \qquad (25)$

Оскільки $\quad y_2' = e^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p}{2} x e^{-\frac{p}{2}x}, \qquad y_2'' = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4} x e^{-\frac{p}{2}x},$

тому

$$L(xe^{-\frac{p}{2}x}) = -pe^{-\frac{p}{2}x} + \frac{p^2}{4} xe^{-\frac{p}{2}x} + pe^{-\frac{p}{2}x} - \frac{p^2}{2} xe^{-\frac{p}{2}x} + qxe^{-\frac{p}{2}x} = xe^{-\frac{p}{2}x}\left(-\frac{p^2}{4} + q\right) \equiv 0$$

(оскільки $\frac{p^2}{4} - q = 0$). Загальним розв'язком (20) буде

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2 x). \tag{26}$$

П р и к л а д 3. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + y = 0$.

□ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 1 = 0$ має рівні дійсні корені $k_1 = k_2 = 1$. Тому $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків, а загальним розв'язком буде:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad \text{або} \quad y = e^x (C_1 + C_2 x).$$ □

III випадок. *$D < 0$, корені k_1 і k_2 - комлексно-спряжені.*

Нехай $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $(i = \sqrt{-1})$. Підставивши корінь $k_1 = \alpha + i\beta$ у формулу (21), одержимо комплексний розв'язок :

$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x . \qquad (27)$$

Виділивши в комплексному розв'язку (27) дійсну і уявну частину, одержимо два дійсних частинних розв'язки:

$$y = e^{\alpha x} \cos \alpha x \quad \text{і} \quad y = e^{\alpha x} \sin \beta x .$$

Ці розв'язки, очевидно, незалежні, оскільки

$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = ctg\beta x \neq const$, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому $y = C_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin\beta x$

або $$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad (28)$$

буде загальним розв'язком рівняння (20).

Якщо корені k_1 і k_2 уявні, тобто $k_{1,2} = \pm i\beta$, то їм відповідає фундаментальна система розв'язків вигляду:

$$y_1 = \cos \beta x, \quad y_2 = \sin \beta x .$$

Загальний розв'язок рівняння (20) набуває вигляду:

$$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \qquad (29)$$

П р и к л а д 4. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$.

□ Характеристичне рівняння $k^2 - 2k + 2 = 0$ має комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = 1 \pm i$. Тому фундаментальна система розв'язків має вигляд: $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$, а загальним розв'язком буде

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x .$$ □

П р и к л а д 5. Розглянемо рівняння $y'' + 4y = 0$.

□ Характеристичне рівняння $k^2 + 4 = 0$ має уявні корені $k_{1,2} = \pm 2i$. Тому фундаментальна система розв'язків має вигляд: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$, а загальним розв'язком буде

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$ □

3.6 Інтегрування ЛОДР n-го порядку із сталими коефіцієнтами методом Ейлера

Розглянутий вище метод побудови фундаментальної системи розв'язків для рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами розповсюджується на рівняння n - го порядку із сталими коефіцієнтами:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{30}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ - дійсні числа.

Шукаючи частинний розв'язок рівняння (30) у вигляді (21), одержимо, що k повинно бути коренем рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0, \tag{31}$$

яке складається згідно з рівнянням (30) за тими же правилами, що і (22) за рівнянням (20) (похідна від шуканої функції замінюється відповідним степенем k, а функція $y = y^{(0)}$ замінюється на $k^0 = 1$, тобто на одиницю).

Рівняння (31) *називається характеристичним рівнянням, а його корені характеристичними числами рівняння* (30).

Структура фундаментальної системи розв'язків рівняння (30) визначається властивостями коренів характеристичного рівняння (31).

Розглянемо такі можливі випадки.

1. *Всі корені характеристичного рівняння (31) дійсні і різні.*

В цьому випадку функції $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, \dots, y_n = e^{k_n x}$ є ЛНЗ розв'язками ДР (30), тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків (на всій числовій осі), а загальний розв'язок буде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x} \tag{32}$$

П р и к л а д 1. Рівняння $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ має характеристичне рівняння $k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0$, корені якого $k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 3$ - дійсні і різні. Фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x},$$

а отже загальний розв'язок набуде вигляду $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.

2. *Всі корені різні, але серед них є комплексні.*

Тоді кожній парі комплексно-спряжених коренів вигляду $\alpha \pm i\,\beta$ відповідає два дійсних ЛНЗ частинних розв'язки

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x. \tag{33}$$

Якщо ці комплексні корені уявні $\pm i\beta$, то їм відповідають розв'язки

$$\cos \beta x, \quad \sin \beta x. \tag{34}$$

Знайшовши дійсні частинні розв'язки, які відповідають всім парам комплексно-спряжених коренів, і розв'язки, які відповідають дійсним кореням, одержують фундаментальну систему розв'язків, а їх лінійна комбінація дає загальний розв'язок (чому?).

П р и к л а д 2. Рівняння $y''' - 5y'' + 11y' - 15 = 0$ має характеристичне рівняння $k^3 - 5k^2 + 11k - 15 = 0$. Корені якого $k_1 = 3; k_2 = 1 - 2i; k_3 = 1 + 2i$ - різні, проте серед них є комплексні. Дійсному кореню $k_1 = 3$ відповідає частинний розв'язок $y_1 = e^{3x}$. Парі комплексно-спряжених коренів $k_{2,3} = 1 \pm 2i$ відповідають два ЛНЗ частинні розв'язки : $y_2 = e^x \cos 2x, \quad y_3 = e^x \sin 2x$. Загальним розв'язком буде ЛК частинних розв'язків y_1, y_2, і y_3:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x.$$

3. *Серед коренів характеристичного рівняння є кратні:*

а) нехай k_j - дійсний корінь кратності m. Тоді рівняння (30) має частинний розв'язок вигляду $e^{k_j x}$ і ще m-1 розв'язок, який одержується з даного шляхом множення на послідовні степені x, так що кореню k_j будуть відповідати m дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду

$$e^{k_j x},\ xe^{k_j x},\ \ldots, x^{m-1} e^{k_j x}; \tag{35}$$

б) нехай $k_j = \alpha + i\beta$ - корінь кратності r. Тоді характеристичне рівняння має спряжений корінь $k_j = \alpha - i\beta$ тієї ж кратності. Цим комплексно-спряженим кореням відповідає $2r$ дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків вигляду

$$\left.\begin{array}{l} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}\right\} \tag{36}$$

Знайшовши дійсні частинні розв'язки, які відповідають комплексно-спряженим кореням, і розв'язки, які відповідають дійсним і комплексно-спряженим простим кореням, одержують фундаментальну систему розв'язків, а їх лінійна комбінація дає загальний розв'язок.

П р и к л а д 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(10)} - 3y^{(9)} + 6y^{(8)} - 18y^{(7)} + 9y^{(6)} - 27y^{(5)} + 4y^{IV} - 12y''' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^{10} - 3k^9 + 6k^8 - 18k^7 + 9k^6 - 27k^5 + 4k^4 - 12k^3 = 0$ або $k^3(k-3)(k^2+4)(k^2+1)^2 = 0$ має дійсний простий корінь $k_1 = 3$,

$k_{2,3} = \pm 2i$ - прості комплексно-спряжені корені,

$k_4 = k_5 = k_6 = 0$ - дійсний корінь кратності m=3,

$k_{7,8} = k_{9,10} = \pm i$ - кратний комплексно-спряжений корінь кратності r=2.

Фундаментальна система розв'язків має вигляд:

$$y_1 = e^{3x},\ y_2 = \cos 2x,\ \ y_3 = \sin 2x,\ \ y_4 = 1,\ \ y_5 = x,\ \ y_6 = x^2$$

$$y_7 = \cos x,\ \ y_8 = \sin x,\ \ y_9 = x\cos x,\ \ y_{10} = x\sin x.$$

Загальний розв'язок:

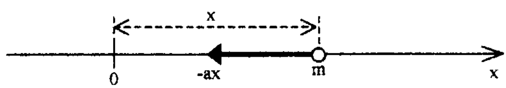
$$y = C_1 e^{3x} + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x + C_4 + C_5 x + C_6 x^2 +$$
$$+ C_7\cos x + C_8\sin x + C_9 x\cos x + C_{10} x\sin x.$$

3.7 Вільні (власні) коливання системи

Гармонічні коливання. Модельне рівняння вільних гармонічних коливань

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{37}$$

де $\omega > 0$ - стала, легко одержати, коли припустити, що матеріальна точка маси **m** рухається вздовж осі Ox під дією квазіпружної сили, пропорційної відхиленню точки від початку O і направленої весь час до положення рівноваги O (наприклад, під дією пружини). Опором середовища нехтуємо.



На основі другого закону механіки маємо: $m\ddot{x} = -ax$, де a - коефіцієнт пропорційності і знак мінус поставлений тому, що напрям дії сили протилежний напряму відхилення. Звідси одержуємо рівняння (37).

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad \text{де} \quad \omega^2 = \frac{a}{m}.$$

Механічна або фізична система, яка описується рівнянням (37), *називається гармонічним осцилятором.*

П р и к л а д и таких систем :
1) малі коливання математичного або фізичного маятника;
2) малі коливання тягарця, підвішеного на пружній пружині під дією сили ваги в середовищі без опору;
3) електричні коливання в контурі, який складається з ємності C і індуктивності L.

Рівняння (37) є ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами, його характеристичне рівняння $k^2 + \omega^2 = 0$ має корені $k = \pm\omega i$. Загальний розв'язок рівняння (37) (в області зміни t і x) є простою гармонікою:

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t, \qquad \text{де } C_1 \text{ і } C_2 \text{ - довільні сталі.}$$

Покладемо $C_1 = A\sin\varphi,\ C_2 = A\cos\varphi$, де $A > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$. Одержимо

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{38}$$

Такий рух називається гармонічним коливанням. Як видно з формули (38), він є періодичним рухом з періодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ і частотою ω. Число A називається *амплітудою,* а стала φ - *початковою фазою* коливання (38). (Фазою гармонічного коливання називається значення аргументу функції синус, тобто $\omega t + \varphi$. Значення фази при $t = 0$ називається початковою фазою). Із формули (38) видно, що всі рухи, які визначаються рівнянням (37), обмежені при $t \to +\infty$: $|x| \le A$.

Графік руху (рис.3.1) одержують в результаті геометричних перетворень графіка функції $x = \sin t$. Щоб виділити єдиний розв'язок із сім'ї синусоїд (38), необхідно задати значення функції $x(t)$ і її похідної $\dot{x}(t)$ в деякий момент часу t_0.

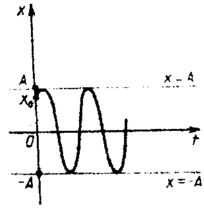


Рисунок 3.1

Нехай $t_0 = 0$, тоді початкові умови такі :

$$x(0) = x_0; \qquad x'(0) = x'_0 \qquad . \tag{39}$$

Підставивши ці початкові умови у формули

$$\left.\begin{aligned} x &= A\sin(\omega t + \varphi) \\ x' &= A\omega\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\}, \quad \text{дістанемо} \quad \left.\begin{aligned} x_0 &= A\sin\varphi \\ x'_0 &= A\omega\cos\varphi \end{aligned}\right\},$$

звідси

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x'_0)^2}{\omega^2}}, \qquad \varphi = arctg\ \frac{\omega x_0}{x'_0}.$$

Отже, у випадку вільних гармонічних коливань в середовищі без опору з початковими умовами (39) закон руху задається формулою :

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x'_0)^2}{\omega^2}}\ \sin(\omega t + arctg\ \frac{\omega x_0}{x'_0}). \tag{40}$$

Зауважимо, що частота коливання ω і період T не залежать від початкових умов руху, вони визначаються параметрами коливної системи; в той же час амплітуда A і початкова фаза φ, навпаки, залежать від початкових умов руху. Так при :

1. $x_0 \ne 0, \quad x'_0 = 0$: $A = x_0$, $\varphi = \pi/2$, рівняння руху

$$x = x_0\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = x_0\cos\omega t.$$

2. $x_0 = 0, \quad x'_0 \ne 0$: $A = x'_0/\omega$, $\varphi = 0$, рівняння руху $x = \dfrac{x'_0}{\omega}\sin\omega t$.

3. $x_0 = x'_0 = 0$: $A = 0, \varphi$ - невизначено, рівняння руху $x \equiv 0$ - стан спокою.

Ангармонічні коливання. Припустимо тепер, що крім квазіпружної сили на матеріальну точку діє ще сила опору середовища, пропорційна швидкості точки ($b\dot{x}$) і спрямована у бік, протилежний напрямку руху. Тоді, за другим законом Ньютона, рівняння руху матеріальної точки має вигляд :

$$m\ddot{x} = -ax - b\dot{x}, \quad \text{або} \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{41}$$

де $2h = b/m > 0$, $\omega^2 = a/m$. Коренями характеристичного рівняння $k^2 + 2hk + \omega^2 = 0$ є $k_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega^2}$.

Можливі три випадки, в залежності від чисел h і ω:

1. *Затухаючі гармонічні коливання.* Нехай $h < \omega$, тоді $k_{1,2} = -h \pm i\sqrt{\omega^2 - h^2}$ - корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, і всі дійсні розв'язки рівняння (41) мають вигляд $x = e^{-ht}(C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t)$, $\nu = \sqrt{\omega^2 - h^2}$, де C_1, C_2 - довільні дійсні сталі. Розв'язок можна записати у вигляді аналогічному (38)

$$x = Ae^{-ht} \sin(\nu t + \varphi). \tag{42}$$

Рух, який відповідає розв'язку (42), називається затухаючим гармонічним коливанням з періодом $T = 2\pi/\nu$ і частотою ν, амплітудою Ae^{-ht} і початковою фазою φ.

Легко бачити, що $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$ і графік затухаючих коливань знаходиться між графіками показникових функцій $x = Ae^{-ht}$ і $x = -Ae^{-ht}$ (рис.3.2).

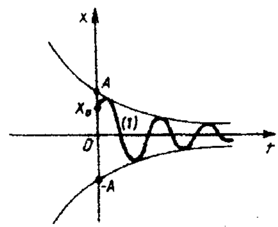


Рисунок 3.2

Число A називається початковою амплітудою (при $t = 0$), а h - коефіцієнтом затухання, множник e^{-ht} характеризує швидкість затухання.

Натуральний логарифм зміни амплітуди коливань на протязі одного періоду називається *логарифмічним декрементом* затухання d:

$$d = \ln(Ae^{-ht} / Ae^{-h(t+T)}) = hT,$$

який характеризує швидкість затухання коливного процесу. Оскільки h вимірюється в $1/c$, *то* d – величина безрозмірна.

Можна показати, якщо N – число коливань, після яких амплітуда зменшиться в e раз, то $d=1/N$; тобто логарифмічний декремент це величина, обернена числу коливань, після яких амплітуда зменшиться в e раз.

Для характеристики коливних контурів вживається ще величина Q – *добротність контуру*:

$$Q = \pi / d = \pi N.$$

2. *Аперіодичний процес.* Нехай $h > \omega$, тоді корені характеристичного рівняння k_1 і k_2 - дійсні і різні (від'ємні). Загальний розв'язок рівняння (41) має вигляд

$$x = C_1 e^{-|k_1|t} + C_2 e^{-|k_2|t}, \qquad (43)$$

а *рух, у цьому випадку, називають* ***аперіодичним***. Він відповідає наявності великого тертя або великих витрат системи. З формули (43) випливає, що при $t \to +\infty$ будь-який розв'язок наближається до шуканого розв'язку $x \equiv 0$.

3. Нехай $h = \omega$, тоді корені характеристичного рівняння $k_1 = k_2 = -h < 0$ (дійсні, рівні, від'ємні). Загальний розв'язок рівняння (41) має вигляд

$$x = e^{-ht}(C_1 + C_2 t). \qquad (44)$$

Рух, що вдіповідає розв'язкам (44), *називають, як і у випадку 2,* ***аперіодичним***.

Кожен розв'язок $x = x(t)$ рівняння (41) при $t \to +\infty$ прагне до нуля (рис.3.3).

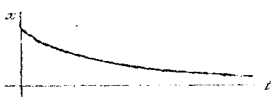


Рисунок 3.3

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

1. Який оператор називається лінійним? Показати, що диференціальний оператор $L = (1 + x^2)\dfrac{d^2}{dx^2} - 2x\dfrac{d}{dx} + 2$ є лінійним. Знайти $L(y)$, якщо: а) $y = x^2$; б) $y = \sin^2 x$.
2. Яке рівняння називається зведеним ЛОДР ? Як записуються однорідні ДР за допомогою лінійного диференціального оператора? Використовуючи диференціальний оператор п.1 записати лінійне однорідне ДР: а) за допомогою оператора; б) без оператора, та вияснити чи є ДР зведеним, якщо ні, то привести його до зведеного.
3. Доведіть основні властивості розв'язків ЛОДР.
4. Довести, що розв'язки однорідного лінійного рівняння $L(y) = 0$ утворюють лінійний простір?
5. Дайте означення ЛЗ і ЛНЗ системи функцій та наведіть приклади.
6. Довести, що необхідною і достатньою умовою лінійної незалежності двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ на проміжку (a,b) є відмінність від тотожної константи цих функцій $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$, $\forall x \in (a,b)$. Що можна сказати про лінійну залежність функцій: а) $y_1 = tgx$, $y_2 = ctgx$, $\forall x \in (0, \pi/2)$; б) $y_1 = \sin 2x$, $y_2 = \cos 2x$, $\forall x \in R$?

7. Доведіть теорему про лінійну залежність функцій. Показати, що функції $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$ лінійно залежні на R та виразити одну з них як лінійну комбінацію двох інших.
8. Яка система розв'яків ЛОДР називається фундаментальною? Наведіть приклади. Довести, що ніякі два ЛНЗ розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ не можуть дорівнювати нулю в одній і тій же точці.
9. Дайте означення визначника Вронського та доведіть його властивості.
10. Визначник Вронського для функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ дорівнює нулю $\forall x \in < a, b >$. Чи можуть ці функції бути лінійно незалежними? Лінійно залежними?
11. Розглянути приклади: а) $y_1 = 1$, $y_2 = \arcsin x$, $y_3 = \arccos x$, $x \in (-1,1)$;

    б) $y_1 = \begin{cases} x^3, & якщо\ x \in [-2,0], \\ 0, & якщо\ x \in [0,1] \end{cases}$, $y_1 = \begin{cases} 0, & якщо\ x \in [-2,0], \\ x^2, & якщо\ x \in [0,1] \end{cases}$.
12. Як за допомогою визначника Вронського визначити, чи утворюють дані n розв'язків лінійного однорідного рівняння n-го порядку фундаментальну систему розв'язків?
13. Довести, що довільні двічі диференційовні функції є розв'язками ЛОДР

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

14. Скласти ЛОДР другого порядку, яке має розв'язки $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Показати, що функції x і x^2 – ЛНЗ на R. Переконатись в тому, що визначник Вронського для цих функцій дорівнює нулю в точці $x = 0$. Чому це не суперечить необхідній умові ЛНЗ системи розв'язків ЛОДР?
15. Довести теорему про структуру загального розв'язку ЛОДР.
16. Доведіть, що якщо відомий один ненульовий розв'язок y_1 рівняння $y'' + p(x)y' + q(x) = 0$, то загальний розв'язок цього рівняння в області $(a < x < b,\ -\infty < y < +\infty)$ може бути знайдено за допомогою квадратур.
17. Якщо y_1 – нетривіальний частинний розв'язок ЛОР n-го порядку $L(y) = 0$, то підстановка $y = y_1 \int z(x)dx$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція, приводить ЛОР $L(y) = 0$ до ЛОР (n-1)-го порядку. Відомо, що $y_1 = x^2$ і $y_2 = x^3$ є частинними розв'язками рівняння $x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$. Знайти загальний розв'язок цього рівняння.
18. Відома фундаментальна система розв'язків лінійного ДР: e^x, $\cos x$, $\sin x$. Знайти його частинний розв'язок, який задовольняє початкові умови: $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = -1$.

19. Вивести формулу Ліувілля-Остроградського для ДР другого порядку. Побудувати за допомогою даної формули загальний розв'язок рівняння $y'' + x^2 y' - xy = 0$, якщо $y_1 = x$.
20. Виведіть формули для знаходження загального розв'язку ЛОДР другого порядку із сталими коефіцієнтами у випадку :
   а) дійсних різних коренів характеристичного рівняння ;
   б) дійсних рівних коренів ;
   в) комплексно-спряжених коренів .
21. При яких p,q кожен розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = 0$, крім розв'язку $y \equiv 0$, монотонно зростає за абсолютним значенням, починаючи з деякого x?
22. Довести, що рівняння Ейлера $x^2 y'' + pxy' + qy = 0$, де p,q задані числа, підстановкою $x = e^t$ (при $x > 0$) зводиться до ДР зі сталими коефіцієнтами.
23. При яких значеннях p,q усі розв'язки рівняння $y'' + py' + qy = 0$ є :
   а) обмежені $\forall x \geq 0$; б) періодичними функціями x?
24. Який вид має рівняння вільних коливань? Наведіть приклади систем, які приводять до відповідного рівняння.
25. Який вид має рівняння вільних коливань в середовищі без опору ? Який вигляд має загальний розв'язок? Що таке гармонічне коливання, його амплітуда, період, частота і початкова фаза? Як залежить амплітуда і початкова фаза від початкових умов? Як ведуть себе всі рухи по відношенню до стану спокою?
26. Як інтегруються рівняння вільних коливань в середовищі з опором? Який вигляд має загальний розв'язок при різних співвідношеннях між силою опору середовища і відновлювальною силою? Що таке затухання гармонічного коливання, його період, частота, амплітуда і початкова фаза? Що таке початкова амплітуда? Яка поведінка амплітуди при $t \to +\infty$? Як впливає наявність опору на характер коливань?
27. При яких значеннях h усі ненульові розв'язки $\ddot{x} + hx = 0$ представляють гармонічні коливання? Вказати їх вигляд і період?
28. При яких значеннях h усі ненульові розв'язки $\ddot{x} + 2h\dot{x} + x = 0$ представляють затухаючі гармонічні коливання?
29. При яких значеннях b усі ненульові розв'язки $\ddot{x} + 2\dot{x} + bx = 0$ представляють собою: а) затухаючі гармонічні коливання; б) затухаючі аперіодичні рухи?
30. Кутове прискорення при крученні описується ДР $\ddot{\varphi} = -k^2\varphi - 2n\dot{\varphi}$. Нехай $\varphi = \varphi_0$, при $t = 0$ і $\dot{\varphi}(0) = 0$. Знайти залежність кута φ від часу t в таких випадках: а) $k^2 > n^2$; б) $k^2 = n^2$; в) $k^2 < n^2$.
31. Рівняння руху стрілки гальванометра для малих коливань має вигляд: $\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \omega^2(\theta - \alpha) = 0$, де θ – кут, на який повертається стрілка в момент часу t; k, ω, α – задані сталі. Розв'язати це рівняння, якщо:
   а) $k > \omega$; б) $k = \omega$; в) $k < \omega$.

Завдання для практичних аудиторних занять

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок для таких ЛОДР 2-го порядку:

   а) $y''-6y'+8y=0$; б) $y''+10y'+25y=0$; в) $y''-2y'+4y=0$.

   Відповіді: а) $y_1=e^{2x}$, $y_2=xe^{5x}$, $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{5x}$; б) $y_1=e^{-5x}$, $y_2=e^{-5x}$, $y=C_1e^{-5x}+C_2e^{-5x}$; в) $y_1=e^{x}\cos\sqrt{3}x$, $y_2=e^{x}\sin\sqrt{3}x$, $y=e^{x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$.

2. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок для таких ЛОДР вищих порядків:

   а) $y'''+3y''+2y'=0$; б) $y'''-5y''+14y'-10y=0$; в) $y^{IV}+5y''=0$; г) $y^{IV}+4y''+16y=0$.

   Відповіді: а) $y_1=1$, $y_2=e^{-x}$, $y_3=e^{-2x}$, $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}$; б) $y_1=e^{x}$, $y_2=e^{2x}\cos3x$, $y_3=e^{2x}\sin3x$, $y=C_1e^{x}+e^{2x}(C_2\cos3x+C_3\sin3x)$; в) $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=\cos\sqrt{5}x$, $y_4=\sin\sqrt{5}x$, $y=C_1+C_2x+C_3\cos\sqrt{5}x+$ $+C_4\sin\sqrt{5}x$; г) $y_1=\cos2x$, $y_2=\sin2x$, $y_3=x\cos2x$, $y_4=x\sin2x$, $y=C_1\cos2x+C_2\cos2x+x(C_3\cos2x+C_4\sin2x)$.

3. Розв'язати задачу Коші

   а) $y''-5y'+4y=0,\quad y(0)=1, y'(0)=1$;

   б) $y'''+2y''+y'=0,\quad y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=-3$;

   в) $y^{IV}+5y''+4y=0,\quad y(0)=1, y'(0)=4, y''(0)=-1, y'''(0)=-16$.

   Відповіді: а) $y=e^{x}$; б) $y=1-e^{-x}+xe^{-x}$; в) $y=2\sin x+\cos x$.

4. Опір R та конденсатор ємності C з'єднані послідовно. При $t=0$ заряд конденсатора дорівнює q. Знайти силу струму при $t>0$, якщо коло замкнули при $t=0$. (*Відповідь*: $I=\dfrac{q}{RC}e^{-t/RC}$)

5. Послідовно з'єднанні індуктивність L, опір R і конденсатор ємності C, заряд якого при $t=0$ дорівнює q. Коло замикається при $t=0$. Знайти силу струму й частоту коливань у припущенні, що розряд має коливний характер.

   Відповідь: $I=\dfrac{q}{\omega CL}\sin\omega t$, $CR^4<4L$, $\omega=\sqrt{4CL-R^2C^2}/2CL$.

6. Один кінець пружини закріплений нерухомо, а до другого прикріплений вантаж масою m. Під час руху вантажу з швидкістю v сила опору дорівнює hv, а пружина діє з силою kx, спрямованою до положення рівноваги, де x – відстань від положення рівноваги. При $t = 0$ вантаж, що перебуває в положенні рівноваги, штовхають зі швидкістю v_0. Дослідити рух вантажу при а) $h^2 > 4km$, б) $h^2 < 4km$.

Відповіді: а) $x = \frac{v_0}{2\gamma} e^{(-\alpha+\gamma)t}$, $\alpha = \frac{h}{2m}$, $\gamma = \sqrt{h^2 - 4km} / 2m$;

б) $x = \frac{v_0}{\beta} \sin \beta t$, $\alpha = \frac{h}{2m}$, $\beta = \sqrt{4km - h^2} / 2m$)

Завдання для аудиторної самостійної роботи

Знайти: а) фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок для даного ДР; б) розв'язок задачі Коші; в) розв'язок даної задачі.

1. а) $y^{IV} + 4y''' + 5y'' = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;
   в) При яких a, b усі розв'язки рівняння $y'' + ay' + by = 0$ прагнуть до нуля при $x \to +\infty$.
2. а) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$; б) $y'' + 16y = 0, y(\pi/16) = \sqrt{2}, y'(\pi/16) = 4\sqrt{2}$;
   в) При яких a, b рівняння $y'' + ay' + by = 0$ має хоча б один розв'язок $y(0) \neq 0$, що прагне до нуля при $x \to +\infty$?
3. а) $y^{V} - 34y^{IV} + 2y''' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$;
   в) При яких a, b кожен розв'язок рівняння $y'' + ay' + by = 0$ перетворюється в нуль на нескінченній множині точок x?

Відповіді: 1. а) $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{2x} \cos x + C_4 e^{2x} \sin x$, б) $y = xe^x$, в) $a > 0, b > 0$;

2. а) $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x}$, б) $y = 2\sin 4x$, в) $b < 0$ *або* $b \geq 0, a > 0$;

3. а) $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{2x}$, б) $y = e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)$, в) $a^2 < 4b$.

Індивідуальні домашні завдання

1. Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок для таких лінійних однорідних диференціальних рівнянь:
   а) $y''' - by'' + ay' = 0$; б) $y''' + (a - 2b)y'' + (b^2 - 2ab)y' + ab^2 y = 0$;
   в) $y'' - 2ay' + (a^2 + b)y = 0$, де $b = D + B$, $a = B^2 + B(A + H)$,
   H - номер групи, AB - порядковий номер по журналу, $D = A + B + H$.
   Відповіді: а) $y = C_1 + C_2 e^{Bx} + C_3 e^{Dx}$; б) $y = C_1 e^{bx} + C_2 x e^{bx} + C_3 e^{-ax}$;
   в) $y = e^{ax}(C_1 \cos\sqrt{b}x + i \sin\sqrt{b}x)$.

2. За даною фундаментальною системою розв'язків:
а) скласти лінійне однорідне ДР;
б) розв'язати задачу Коші з початковими умовами $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$.

Варі-ант	y_1	y_2	y_3	Варі-ант	y_1	y_2	y_3
1	1	x	xe^x	16	x^2-3x	$2x-9$	$2x+3$
2	$x+3$	$\sin 2x$	e^{-3x}	17	$3x-7$	$x-2$	e^x+1
3	$\sin 3x$	1	xe^x	18	$x-2$	xe^x	$\cos 3x$
4	$\cos 2x$	x^2-1	$2e^x$	19	x^2+7	$4x-3$	e^{4x}
5	xe^{2x}	$\sin x$	1	20	$x\sin x$	$\cos 3x$	$2x-5$
6	$x-2$	$\sin 2x$	$\cos 2x$	21	$5x+7$	$\cos x$	e^x+1
7	$4x+1$	e^{2x}	$x\sin x$	22	1	$\cos x$	$2x^2+1$
8	$2x-4$	$\cos 2x$	e^{2x}	23	x^2-3	xe^x	$\sin 3x$
9	$3x+6$	2	$\sin 3x$	24	x^2+x	$e^x \sin 2x$	$\cos x$
10	$6x+7$	$2x^2-1$	e^{-x}	25	x^2-3x	$\sin 3x$	$2x+3$
11	$4x+1$	$3x^2+5$	$\cos 2x$	26	$2x+3$	xe^x	$\cos 2x$
12	$2x-3$	$2x^2-4$	$\sin 3x$	27	$2x^2-9$	$\cos x$	$\sin 3x$
13	$3x+4$	$3x^2$	xe^{2x}	28	$5x-4$	e^x+2	$\cos 3x$
14	4	$5x+4$	$\cos 2x$	29	x^2+2	$\sin 3x$	e^{2x}
15	5	$4x-5$	e^{7x}	30	x^2-3	$\cos 2x$	xe^{2x}

Вказівка: а) скласти визначник Вронського для системи ЛЗ функцій y, y_1, y_2, y_3; б) скористатись теоремою про структуру загального розв'язку ЛОДР.

4.1 Структура загального розв'язку

Як уже відмічалось, лінійним неоднорідним ДР n–го порядку називається рівняння вигляду:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \qquad (1)$$

якщо функція $f(x)$, яка називається вільним членом, відмінна від тотожного нуля в інтервалі $(a;b)$.

Якщо коефіцієнти рівняння $L(z)=0$ ті самі, що і рівняння $L(y)=f(x)$, то однорідне рівняння $L(z)=0$ називається відповідним даному неоднорідному рівнянню.

Легко бачити, що неперервність функцій, які є коефіцієнтами рівняння (1) $p_k(x)\ (k=\overline{1,n})$, і вільного члена $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ забезпечує існування та єдиність розв'язку задачі Коші з довільними числами $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ при кожному $x_0 \in (a;b)$.

Розглянемо теорему про структуру загального розв'язку ЛНДР.

Т е о р е м а. Якщо $\overline{y}$ є який–небудь частинний розв'язок рівняння (1) і якщо

$$z = C_1z_1(x) + C_2z_2(x) + \ldots + C_nz_n(x)$$

є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння $L(z)=0$, то загальний розв'язок ЛНДР (1) дорівнює сумі частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння:

$$y = \overline{y} + z \qquad (2)$$

або

$$y = \overline{y} + C_1z_1 + C_2z_2 + \ldots + C_nz_n.$$

Δ Покажемо спочатку, що функція (2) є розв'язком рівняння (1). Згідно з умовою теореми $L(z)=0$ і $L(\overline{y})=f(x)$. За властивістю оператора L:

$$L(y) = L(\overline{y}+z) = L(\overline{y}) + L(z) = f(x) + 0 = f(x).$$

Отже, функція (2) є розв'язком рівняння (1). Покажемо, що вона є загальним розв'язком цього рівняння. Це означає, що за довільними початковими умовами

$$y(x_0) = y_0,\ \ y_0'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \qquad (3)$$

можна єдиним чином підібрати значення сталих $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, щоб розв'язок (2) описував шуканий частинний розв'язок. Для цього у функції (2) і її похідних

$$y^{(k)}(x) = \overline{y}^{(k)}(x) + C_1Z_1^{(k)}(x) + \ldots + C_nZ_n^{(k)}(x) \qquad (k=\overline{1,n-1})$$

замінюємо x на x_0 і $y^{(j)}(x_0)$ на $y_0^{(j)}$ $(j=\overline{0,k})$, $(y_0^{(0)} \equiv y_0)$. В результаті дістанемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + ... + C_n z_n(x_0) = y_0 - \bar{y}(x_0), \\ C_1 z_1'(x_0) + C_2 z_2'(x_0) + ... + C_n z_n'(x_0) = y_0' - \bar{y}'(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 z_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 z_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n z_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Детермінантом цієї системи є вронскіан $W(x_0) \neq 0$, оскільки фундаментальна система функції $z_1(x), z_2(x),.., z_n(x)$ в $(a;b)$ лінійно незалежна, тобто система має єдиний розв'язок $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$. Підставляючи знайдені значення довільних сталих у рівність (2), дістанемо розв'язок рівняння (1), який задовольняє наперед задані умови (3). Цим доведено, що функція (4) є загальним розв'язком ЛНДР (1). ∇

П р и к л а д 1. Розглянемо рівняння $y'' - y = -2\sin x$.

Частинним розв'язком рівняння є функція $\bar{y} = \sin x$. Відповідне однорідне рівняння $z'' - z = 0$ має (див. § 3) загальний розв'язок

$$z = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння дорівнює їх сумі, тобто

$$y = \sin x + C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

П р и к л а д 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = x.$$

Маємо $\bar{y} = x$, $z'' + z = 0$, $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Значить

$$y = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

4.2 Принцип суперпозиції

Сутність принципу суперпозиції розв'язків розкриває теорема.

Т е о р е м а. Якщо y_1 і y_2 – частинні розв'язки рівняння $L(y) = f_1(x)$ і $L(y) = f_2(x)$ в області D, то $y_1 + y_2$ є частинний розв'язок рівняння $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$ в тій же області.

Δ Доведення випливає із співвідношень: $L(y_1) = f_1(x)$, $L(y_2) = f_2(x)$ і властивості адитивності оператора L:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = f_1(x) + f_2(x) \quad \nabla.$$

П р и к л а д. Дано рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розглядаємо два допоміжні рівняння: $y'' + y = x$ і $y'' + y = -\sin 2x$. Частинні розв'язки цих рівнянь відповідно рівні $y_1 = x$, $y_2 = (\sin 2x)/3$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$ має вигляд: $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

На основі доведених теорем, загальний розв'язок даного рівняння в R_2 можна записати у вигляді: $y = x + \frac{1}{3}\sin 2x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Нижче ми розглянемо правила знаходження частинних розв'язків ЛНДР із сталими коефіцієнтами. В загальному випадку задача підбору частинного розв'язку представляє значні труднощі, в зв'язку з чим представляє інтерес метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа), який дозволяє знайти загальний (частинний) розв'язок ЛНДР в квадратурах, виходячи з відомої фундаментальної системи розв'язків відповідного ЛОДР.

4.3 Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа) для ЛНДР другого порядку

Нехай дано ЛНДР другого порядку

$$L(y) \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{4}$$

де коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$ і права частина $f(x)$ є функції від x, неперервні в деякому інтервалі $(a;b)$.

Розглянемо відповідні йому ЛОДР

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0. \tag{5}$$

Якщо z_1, z_2 – фундаментальна система розв'язків рівняння (5), то, як відомо, його загальний розв'язок має вигляд

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2, \tag{6}$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі.

Сутність ідеї Лагранжа полягає в тому, що розв'язок ЛНДР (4) шукаємо в тому ж вигляді, що і загальний розв'язок відповідного ЛОДР (5), тобто у формі

$$y = C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2, \tag{7}$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ — деякі диференційовні функції змінної x, які належить знайти.

Покажемо, що дані функції можуть бути знайдені за допомогою квадратур.

Диференціюванням обох частин рівності (7), яка є розв'язком рівняння (4), маємо:

$$y' = C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 + C_1(x)z_1' + C_2(x)z_2'. \tag{8}$$

Нам треба визначити дві функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$, тому одне із співвідношень між ними можна взяти довільним. Для того, щоб при обчисленні y'' не з'явилися похідні другого порядку від функцій $C_1(x)$ і

$C_2(x)$, покладемо

$$C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 = 0.$$

Тоді (8) матиме вигляд $\quad y' = C_1(x)z_1' + C_2(x)z_2'$.

Диференціюючи це рівняння, дістанемо

$$y'' = C_1(x)z_1'' + C_2(x)z_2'' + C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2'.$$

Підставляючи значення y, y', y'' в рівняння (4), дістанемо тотожність

$$C_1(z_1'' + p(x)z_1' + q(x)z_1) + C_2(z_2'' + p(x)z_2' + q(x)z_2) + (C_1'z_1' + C_2'z_2') = f(x)$$

Оскільки z_1 і z_2 є розв'язками рівняння (5), то вирази, що стоять у перших двох парах дужок у лівій частині цієї рівності, тотожно дорівнюють нулю, звідси

$$C_1'z_1 + C_2'z_2 = f(x).$$

Таким чином для знаходження невідомих функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ ми одержали систему диференціальних рівнянь (СДР):

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 &= 0, \\ C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' &= f(x). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Оскільки визначник цієї системи є вронскіан $W(x)$ фундаментальної системи розв'язків z_1 і z_2, то

$$W(x) = z_1z_2' - z_2z_1' \neq 0$$

і система (9) має єдиний розв'язок

$$C_1'(x) = -\frac{f(x)z_2}{W(x)} \quad \text{і} \quad C_2'(x) = \frac{f(x)z_1}{W(x)}. \qquad (10)$$

Рівняння (10) є ДР з відокремлюваними змінними. Зінтегрувавши їх, одержуємо шукані функції у вигляді квадратур.

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)z_2}{W(x)}dx + \overline{C}_1 \;;\; C_2(x) = \int \frac{f(x)z_1}{W(x)}dx + \overline{C}_2. \qquad (11)$$

Якщо в рівностях (11) покласти $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = 0$, то при відповідних значеннях $C_1(x)$ і $C_2(x)$ рівність (7) дає частинний розв'язок рівняння (4), а при $\overline{C}_1 \neq 0$, $\overline{C}_2 \neq 0$ і підстановці (11) в (7) одержимо загальний розв'язок рівняння (4).

П р и к л а д . Дано рівняння $\qquad y'' + 4y = \sec 2x$.

Знайдемо його загальний розв'язок методом варіації довільних сталих.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $z'' + 4z = 0$

$$z = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Припускаємо, що C_1 і C_2 є невідомі функції від x і складаємо систему для знаходження C_1' і C_2':

$$\left.\begin{array}{c} C_1'\cos 2x + C_2'\sin 2x = 0, \\ C_1'(-2\sin 2x) + C_2'(2\cos 2x) = \sec 2x. \end{array}\right\}$$

Звідси $$C_1' = \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}2x;\ C_2' = \tfrac{1}{2}.$$

Тоді $$C_1 = \tfrac{1}{2}\int \mathrm{tg}2x dx = -\tfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + \overline{C}_1,\ C_2 = \tfrac{1}{2}x + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$ – довільні сталі.

Підставляємо значення C_1 і C_2 в загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, дістанемо загальний розв'язок даного рівняння

$$y = \overline{C}_1\cos 2x + \overline{C}_2\sin 2x - \tfrac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x| + \tfrac{1}{2}x\sin 2x. \ \square$$

Зауваження. Метод варіації довільних сталих дозволяє записати розв'язок ЛНДР n-го порядку у вигляді

$$y = \sum_{i=1}^{n} z_i(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(x)}{W(x)}q(x)d(x),\ (x_0, x \in (a;b)),$$

де $z_1,...z_n$ – фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння; $W(x)$ – її визначник Вронського; $W_{ni}(x)$ – алгебраїчне доповнення елемента визначника Вронського на перетині n-го рядка та i-го стовпця.

4.4 ЛНДР із сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Метод невизначених коефіцієнтів

Метод варіації довільних сталих вимагає знаходження квадратур, що часто приводить до складних обчислень. Тому в тих випадках, коли частинний розв'язок неоднорідного рівняння вдається знайти значно легше, цей метод не застосовують. Зокрема, для ЛНДР зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (12)$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ – дійсні числа, а права частина $f(x)$ має спеціальний вигляд

$$f(x) = \left(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)e^{\alpha x}, \qquad (13)$$

тут $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – задані многочлени, відповідно, степеня m і n, $\alpha, \beta \in R$, частинний розв'язок можна побудувати алгебраїчним шляхом (метод невизначених коефіцієнтів).

Нагадаємо, що загальний розв'язок ЛНДР (зокрема і для (12)) дорівнює сумі довільного частинного розв'язку цього рівняння ($\overline{y}$) і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (z), тобто $y = \overline{y} + z$.

Відповідне однорідне рівняння для (12) записуємо у вигляді

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} z' + a_n z = 0 \qquad (14)$$

Структура загального розв'язку ЛОДР залежить від коренів характеристичного рівняння

$$R(k) = k^n + a_n k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0 \qquad (15)$$

Вид частинного розв'язку $\bar{y}$ залежить від того чи є число $\alpha + i\beta$ коренем характеристичного рівняння (15) і для функції (13) набуває вигляду

$$\bar{y} = x^r (M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x) e^{\alpha x}, \qquad (16)$$

де $M_s(x)$, $N_s(x)$ – многочлени степеня $s = \max(m,n)$ з невизначеними коефіцієнтами, які визначаються із системи рівнянь, що одержуються в результаті підстановки (16) в рівняння (12) скороченням обох частин на $e^{\alpha x}$, прирівнюванням многочленів при $\cos\beta x$ і $\sin\beta x$, і після цього коефіцієнтів при x з однаковими степенями; r – число коренів характеристичного рівняння (15), які дорівнюють $\alpha + i\beta$.

Випадок, коли корінь $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, носить назву "резонансу", якщо $\alpha + i\beta$ не є коренем рівняння (15), носить назву "нерезонансу".

З практичної точки зору реалізації методу невизначених коефіцієнтів доцільно розглянути випадки:

І випадок. $\alpha = \beta = 0$; $f(x) = P_m(x)$, (17)

де $P_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$ – многочлен степеня m.

Тоді частинний розв'язок $\bar{y}$ можна шукати у вигляді

$$\bar{y} = S_m(x) x^r, \qquad (18)$$

де $S_m(x) = B_0 x^m + B_1 x^{m-1} + \ldots + B_{m-1} x + B_m$ – многочлен степеня m з невідомими коефіцієнтами $\left(B_i\, (i = \overline{0,n})\right)$, r – число коренів характеристичного рівняння, рівних нулю.

П р и к л а д 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' = 4x + 6$.

□ Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $z'' - 2z' = 0$ має вигляд $z = C_1 + C_2 e^{2x}$. Оскільки права частина $f(x) = x + 1$ – многочлен i-го степеня і число 0 є простим коренем характеристичного рівняння $(k^2 - 2k = 0,\ k_1 = 0; k_2 = 2)$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{y} = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx, \quad \text{де } A \text{ і } B \text{ – невідомі коефіцієнти.}$$

Диференціюючи двічі $\bar{y} = Ax^2 + Bx$ ($\bar{y}' = 2Ax + B$; $\bar{y}'' = 2A$) і підставляючи $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в дане рівняння, маємо $2A - 4Ax - 2B = 4x + 6$.

Прирівнюючи коефіцієнти при x з однаковими степенями, одержимо:

$-4A=4;\ \ 2A-2B=6$. Звідки $A=-1;\quad B=-4$.

Таким чином, частинний розв'язок даного рівняння має вигляд $\bar{y}=-x^2-4x$, а його загальний розв'язок $\quad y=-x^2-4x+C_1+C_2e^{2x}$.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння $\quad y''+4y=8x^2$.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $z''+4z=0$. Корені характеристичного рівняння $k^2+4=0$ дорівнюють $k_{1,2}=\pm 2i$. Тому $z=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Оскільки права частина $f(x)=x^2$ – многочлен 2-го степеня і число 0 не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді многочлена другого степеня $\bar{y}=Ax^2+Bx+C$, де A, B і C – невизначені коефіцієнти. Для визначення їх підставляємо $\bar{y}$ в дане рівняння $(\bar{y}'=2Ax+B;\ \bar{y}''=2A)$.

При цьому можна користуватися формою запису:

$$\begin{array}{r|l} 4\cdot & \bar{y}=Ax^2+Bx+C, \\ 0\cdot & \bar{y}'=2Ax+B, \\ 1\cdot & \bar{y}''=2A \\ \hline \end{array}$$

$$4Ax^2+4Bx+4C+2A=8x^2$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему

$$4A=8,$$
$$4B=0,$$
$$4C+2A=0.$$

Звідси $A=2;\ \ B=0;\ \ C=-1$. Значить $\bar{y}=2x^2-1$, а загальний розв'язок даного рівняння буде

$$y=2x^2-1+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

II випадок. $\qquad \beta=0;\ \ \alpha\neq 0;\ \ f(x)=e^{\alpha x}P_m(x), \qquad (19)$

де $P_m(x)$ – многочлен степеня m. Тоді частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$\bar{y}=S_m(x)x^re^{\alpha x}, \qquad (20)$$

де $S_m(x)$ – многочлен степеня m, як і многочлен $P_m(x)$, лише з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння рівних α.

Приклад 1. Для рівняння $\quad y''-4y'+3y=12xe^x \quad$ маємо $z''-4z'+3z=0;\ \ k^2-4k+3=0;\ \ k_1=1;\ \ k_2=3;\ \ z=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

Оскільки число $\alpha=1$ є простим коренем характеристичного рівняння, то $r=1$.

$$\begin{array}{r|l} 3\cdot & \bar{y}=(Ax+B)xe^{x}=(Ax^{2}+Bx)e^{x} \\ (-4)\cdot & \bar{y}'=(2Ax+B+Ax^{2}+Bx)e^{x} \\ 1\cdot & \bar{y}''=(2A+2Ax+B+2Ax+B+Ax^{2}+Bx)e^{x} \end{array}$$

$$\left(x^2(A-4A+3A)+x(4A+B-8A-4B+3B)+2A+2B-4B\right)e^x=12xe^x$$

Скорочуючи ліву і праву частини одержаної рівності на e^x і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x одержимо систему

$$\left.\begin{array}{r} -4A=12 \\ 2A-2B=0 \end{array}\right\}.$$

Звідки $A=-3$; $B=A=-3$. Значить $\bar{y}=-(3x^2+3x)e^x$, а загальний розв'язок $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-3(x^2+x)e^x$.

III випадок. $\beta\neq0$ ($\alpha-$ може дорівнювати нулю, а може бути відмінним від нуля).

а) $f(x)=P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x$ (21)

(або $f(x)=P_m(x)\cos\beta x$, або $f(x)=Q_n(x)\sin\beta x$), де $P_m(x)$ і $Q_n(x)-$ многочлени степеня m і n відповідно.

У цьому випадку

$$\bar{y}=x^r(M_s(x)\cos\beta x+N_s(x)\sin\beta x), \tag{22}$$

де $M_s(x)$ і $N_s(x)-$ многочлени степеня $s=\max(m,n)$, $r-$ число коренів характеристичного рівняння рівних $i\beta$ ($i=\sqrt{-1}$).

П р и к л а д . Розв'язати рівняння $y''-6y'=x\sin x$.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $z''-6z'=0$; $k^2-6k=0$; $k_1=0$; $k_2=6$; $z=C_1+C_2e^{6x}$.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{y}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$$

($r=0$, оскільки i не є коренем характеристичного рівняння).

Обчислюючи похідні

$$\bar{y}'=A\cos x-(Ax+B)\sin x+C\sin x+(Cx+D)\cos x=$$
$$=(A+D+Cx)\cos x+(C-B-Ax)\sin x,$$
$$\bar{y}''=\cos x-(A+D+Cx)\sin x-A\sin x+(C-B-Ax)\cos x=$$
$$=(2C-B-Ax)\cos x-(2A+D+Cx)\sin x$$

і підставляючи в задане рівняння, дістаємо

$$(2C-B-6A-6D)\cos x+(-A-6C)x\cos x+$$
$$+(6B-6C-2A-D)+(6A-C)x\sin x=x\sin x,$$

прирівнюючи коефіцієнти при функціях $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$, $x\sin x$ у правій і лівій частинах, дістанемо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} -6a - B + 2C - 6D &= 0 \\ -2A + 6B - 6C - D &= 0 \\ -A - 6C &= 0 \\ 6A - C &= 1 \end{aligned}\right\},$$

звідси $A = \frac{6}{37}$; $C = -\frac{1}{37}$; $B = \frac{2}{37}$; $D = -\frac{2}{37}$;

$$\bar{y} = \left(\frac{6}{37}x + \frac{2}{1369}\right)\cos x - \left(\frac{1}{37}x + \frac{234}{1369}\right)\sin x.$$

Загальним розв'язком даного рівняння є функція

$$y = C_1 + C_2 e^{6x} + \frac{222x + 2}{1369}\cos x + \frac{37x - 1234}{1369}\sin x. \quad \square$$

б) $\alpha \neq 0$; $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$

(або $f(x) = e^{\alpha x}P_m\cos\beta x$, або $f(x) = e^{\alpha x}Q_n(x)\sin\beta x$).

Тоді частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{y} = x^r e^{\alpha x}(M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x),$$

де $M_s(x)$ і $N_s(x)$ – многочлени степеня $s = \max(m, n)$, r – число коренів характеристичного рівняння рівних $\alpha + i\beta$.

4.5 Вимушені коливання системи. Резонанс

Розглянемо прямолінійний рух матеріальної точки маси m по осі Ox. Нехай рух відбувається під дією трьох сил :

1) сили, яка притягує точку до початку координат і має проекцію на вісь Ox, яка дорівнює $-ax$ $(a > 0)$;
2) сили опору середовища, яку будемо вважати пропорційною швидкості: $-b\frac{dx}{dt}$ $(b \geq 0)$;
3) збурювальної сили, направленої по осі Ox і яка дорівнює $F(t)$ в момент часу t.

Рівняння руху одержуємо згідно з другим законом Ньютона

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - ax + F(t).$$

Поділивши обидві частини одержаного рівняння на m, перепишемо його у вигляді

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = f(t), \tag{23}$$

де $h = \frac{b}{2m} \geq 0$; $\omega^2 = \frac{a}{m} > 0$; $f(t) = \frac{F(t)}{m}$.

Розглянемо рівняння (23), коли на коливну систему діє періодична збурювальна сила $f(t) = H\sin\nu t$, причому коливання відбуваються в середовищі без опору ($h=0$)

$$\ddot{x}+\omega^2 x = H\sin\nu t. \qquad (24)$$

Це ЛНДР другого порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального виду. Характеристичне рівняння має корені $k_{1,2}=\pm i\omega$, значить, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, тобто рівняння вільних коливань: $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, представляє собою гармонічні коливання

$$x = A\sin(\omega t+\varphi). \qquad (25)$$

Вигляд частинного розв'язку рівняння (24) залежить від того, чи буде число $\alpha+i\beta=i\nu$ коренем характеристичного рівняння $k^2+\omega^2=0$. Оскільки корені цього рівняння $\pm i\omega$, то слід розрізняти два можливих випадки:

1) частота збурювальної сили (ν) збігається з частотою власних коливань (ω) – резонанс ($\nu=\omega$);

2) $\nu\neq\omega$ – нерезонансний випадок.

Розглянемо спочатку нерезонансний випадок. Частота збурювальної сили не дорівнює частоті власних коливань, тобто $\nu\neq\omega$. Тоді частинний розв'язок рівняння (24) можна знайти у вигляді простої гармоніки

$$\bar{x}=a\cos\nu t+b\sin\nu t,$$

сталі a і b належить визначити.

Маємо

$$\begin{array}{c|l} \omega^2 & \bar{x}=a\cos\nu t+b\sin\nu t,\\ 0 & \dot{\bar{x}}=-a\nu\sin\nu t+b\nu\cos\nu t,\\ 1 & \ddot{\bar{x}}=-a\nu^2\cos\nu t-b\nu^2\sin\nu t, \\ \hline \end{array}$$

$$a(\omega^2-\nu^2)\cos\nu t+b(\omega^2-\nu^2)\sin\nu t=H\sin\nu t;$$

$$\left.\begin{array}{l} a(\omega^2-\nu^2)=0,\\ b(\omega^2-\nu^2)=H; \end{array}\right\}\Rightarrow a=0;\ b=\frac{H}{\omega^2-\nu^2}.$$

Тому

$$\bar{x}=\frac{H}{\omega^2-\nu^2}\sin\nu t.$$

Цей частинний розв'язок визначає вимушене коливання, яке породжується збурювальною силою. Вимушене коливання має ту саму частоту, що і збурювальна сила. Амплітуда цього коливання стала, проте у випадку близькості частот ω і ν може бути достатньо великою навіть при малій амплітуді збурювальної сили. Загальний розв'язок рівняння (24) має вигляд $x(t)=\dfrac{H}{\omega^2-\nu^2}\sin\nu t+A\sin(\omega t+\varphi)$.

Вимушені коливання, які визначаються цим загальним розв'язком, дають накладання гармонічних коливань.

Нехай тепер частота зовнішньої сили ν збігається з частотою власних коливань ω, тобто $\nu = \omega$.

Оскільки число $i\nu = i\omega$ є простим коренем характеристичного рівняння $k^2 + \omega^2 = 0$, то частинний розв'язок рівняння (24) будемо шукати у вигляді $\bar{x} = t(a\cos\nu t + b\sin\nu t)$. Тоді

$$\begin{array}{r|l} \omega^2 \cdot & \bar{x} = t(a\cos\nu t + b\sin\nu t), \\ 0 \cdot & \dot{\bar{x}} = a\cos\nu t + b\sin\nu t + t\nu(b\cos\nu t - a\sin\nu t), \\ 1 \cdot & \ddot{\bar{x}} = 2(-a\nu\sin\nu t + b\nu\cos\nu t) + t(-a\nu^2\cos\nu t - b\nu^2\sin\nu t), \\ \hline \end{array}$$

$$-2a\nu\sin\nu t + 2b\nu\cos\nu t = H\sin\nu t$$

$$\left.\begin{array}{r} -2a\nu = H, \\ 2b\nu = 0; \end{array}\right\} \Rightarrow a = -\frac{H}{2\nu},\ \ b = 0.$$

Тому

$$\bar{x} = -\frac{H}{2\nu} t\cos\nu t. \qquad (26)$$

Частинний розв'язок (26) є вимушене коливання, яке має необмежену амплітуду $\frac{Ht}{2\nu}$. Цей випадок у фізиці називається резонансом між власними коливаннями матеріальної точки і збурювальною силою. Графік цього коливання розміщений між прямими: $x = -\frac{H}{2\nu}t$ і $x = \frac{H}{2\nu}t$.

Загальний розв'язок рівняння (24) у резонансному випадку матиме вигляд

$$x = A\sin(\omega t + \varphi) - \frac{Ht}{2\nu}\cos\nu t. \qquad (27)$$

Вимушені коливання, які визначаються загальним розв'язком (27), є накладанням коливань з необмеженою амплітудою (26) і гармонічних коливань (25).

Резонанс відіграє важливу роль в техніці і фізиці. Коливання з великою амплітудою можуть мати позитивний характер, наприклад, при конструюванні різних підсилювачів, зокрема у радіотехніці. Проте великі коливання можуть носити негативний характер, оскільки спричиняють руйнування конструкцій — машин, мостів, крил літака , кораблів та інше. Тому важливо передбачити можливість виникнення резонансу.

4.6 Поняття про крайові задачі для звичайних ДР

Якщо крім загального розв'язку звичайного ДР необхідно знайти ті розв'язки ДР, які задовольняють певні додаткові умови, то такі задачі називають *диференціальними*. Ми вже розглядали задачу про знаходження частинних розв'язків, які справджують задані початкові умови. Таку задачу називають задачею Коші. Поряд із задачею Коші важливим класом диференціальних задач є крайові задачі, в яких умови, які накладаються на шукані розв'язки, визначені на відрізку $[a,b]$, справджуються не в одній точці, а на кінцях деякого відрізка $[a,b]$. Якщо при цьому і рівняння, і згадані додаткові умови є лінійними, то диференціальні задачі називаються *лінійними диференціальними задачами*.

Розглянемо постановку і приклади крайових задач для деяких лінійних ДР другого порядку.

З теорії лінійних ДР відомо, що рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{28}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – неперервні на $[a,b]$ функції, має загальний розв'язок вигляду

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \bar{y}(x), \tag{29}$$

де функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків на $[a,b]$ відповідного однорідного рівняння (28), $\bar{y}(x)$ – довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння (28), C_1, C_2 – довільні сталі.

Крайову граничну задачу для рівняння (28) в загальному випадку можна сформулювати так:

Знайти на відрізку [a,b] розв'язок цього рівняння, який задовольняє задані граничні умови.

При цьому розглядають такі граничні умови:

1) $y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$ (умови першого типу).

З геометричної точки зору це означає, що необхідно знайти інтегральну криву рівняння (28), яка проходить через задані точки $M(a, y(a))$, $N(b, y(b))$.

2) $y'(a) = A_2$, $y'(b) = B_2$ (умови другого типу).

З геометричної точки зору це означає знайти інтегральну криву рівняння (28), яка перетинає прямі $x = a$ і $x = b$ під заданими кутами $\alpha = arctgA_2$ і $\beta = arctgB_2$.

Для рівняння другого порядку можуть бути задані крайові умови більш загального вигляду

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = A_0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = B_0, \tag{30}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A_0, B_0$ – задані числа; при цьому в кожній із пар α_1, α_2 і β_1, β_2 хоча б одне із чисел не дорівнює нулю.

Якщо $A_0 = B_0 = 0$, то крайові умови (30) називаються *однорідними*; якщо хоча б одне із чисел A_0, B_0 не дорівнює нулю – *неоднорідними*.

У випадку, коли загальний розв'язок рівняння (28) знаходиться відносно легко, то крайова задача може бути розв'язана прямим підставленням загального розв'язку в крайові умови. Але при цьому крайова задача може: а) мати єдиний розв'язок; б) мати декілька або наскінченну множину розв'язків; в) не мати розв'язків.

П р и к л а д 1. Показати, що ДР $y'' + y = 0$ має: а) єдиний розв'язок, якщо справедливі крайові умови $y(0) = 1$ і $y(\pi/2) = 0$; б) нескіченну множину розв'язків, якщо - $y(0) = 1$ і $y(\pi)$; в) не має розв'язків, якщо - $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 5$.

Загальний розв'язок ДР має вигляд $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Підставивши крайові умови, маємо:

а) $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $y = \cos x$ $(0 \le x \le \pi/2)$;

б) $C_1 = 1$, C_2 –довільна стала; $y = \cos x + C_2 \sin x$ $(0 \le x \le \pi/2)$;

в) $y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0$; $y(2\pi) = C_1 \cos 2\pi + C_2 \sin 2\pi = 5$.

З першого рівняння $C_1 = 0$, а з другого $C_1 = 5$, одержана суперечність доводить, що розв'яків дана задача не має.

Лінійна крайова задача (28), (30) називається однорідною, якщо $f(x) \equiv 0$ і $A_0 = B_0 = 0$, тобто коли ДР однорідне і крайові умови однорідні. В протилежному випадку лінійна крайова задача називається неоднорідною.

Якщо коефіцієнти рівняння $p(x)$ і $q(x)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{31}$$

або коефіцієнти α_1, α_2, β_1, β_2 крайових умов

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{32}$$

залежать від деякого параметра λ, то ті значення λ, для яких задача (31)-(32) має нетривіальний ($y(x) \ne 0$) розв'язок, називаються власними. Відповідні власним значенням розв'язки – власні функції.

П р и к л а д 2. Знайти власні значення і власні функції крайової задачі $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(\pi) = 0$.

Загальний розв'язок рівняння при :

1) $\lambda < 0$ – має вигляд $y(x,\lambda) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Підставляючи загальний розв'язок в крайові умови, переконуємось, що крайова задача має єдиний тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = 0$ – $y(x,\lambda) = C_1 + C_2 x$, використовуючи крайові умови, маємо систему

$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0$ і $C_2 = 0$. Звідси $C_1 = C_2 = 0$ і крайова задача матиме лише тривіальний розв'язок.

3) $\lambda > 0$ – $y(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Підставивши крайові умови, одержуємо систему $C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$; $C_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Оскільки $C_1 = 0$, то $C_2 \cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$. Якщо $\sqrt{\lambda}$ не є натуральним числом, то крайова задача має лише тривіальний розв'язок. Крайова задача буде мати не нульовий розв'язок, якщо $\sqrt{\lambda} = n$, де n – натуральне число. Звідси власними значенями будуть числа $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$, а відповідними власними функціями – $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots$ □

Важливим випадком задачі на власні значення є задача Штурма-Ліувілля:

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y + \lambda r(x)y = 0;$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,$$

де функції $p(x), p'(x), q(x), r(x)$ – неперервні на $[a,b]$, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$; $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

Приклад 3. Повздовжній згин стержня. Пружний стержень, один кінець якого непорушно закріплено, знаходиться під дією стискувальної сили P, прикладеної до вільного кінця стержня і напрямленої вздовж його осі. (рис.4.1). Допускаючи, що відхилення стержня від прямолінійної форми невеликі, знайти його можливі рівноважні положення.

□ В курсах прикладної механіки при умовах малої диформації виводиться ДР деформованої осі стержня :

$$Py(x) = -EIy''(x),$$

де $Py(x) = M_x(P)$ - згинальний момент, створюваний силою P, $y(x)$ - відхилення деформованої осі від її нейтрального положення; $EI - const$ - згинальна жорсткість стержня.

Розглянемо однорідну крайову задачу Штурма-Ліувілля. Знайти розв'язок ДР $y'' + \lambda y = 0$, ($\lambda = \dfrac{P}{EI}$), $x \in [0,l]$, який задовольняє крайові умови $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

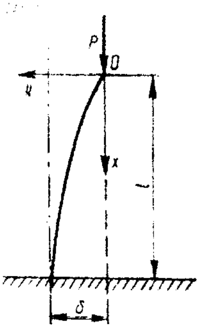


Рисунок 4.1

Згідно з умовами задачі $\lambda = 0$ або $\lambda > 0$. Із прикладу 2 слідує, що при $\lambda = 0$, $y \equiv 0$. Нехай $\lambda > 0$. Диференціюємо функцію $y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ - яка є загальним розв'язком ДР. Тоді маємо $y' = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$. Підставивши в крайові умови, одержуємо $0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Rightarrow C_1 = 0$;

$0 = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l \Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0$.

Оскільки $\lambda \neq 0$ і $C_1 \neq 0$ (Якщо $C_2 = 0$, то ми одержимо тривіальний роз'язок, який нас не цікавить), залишається $\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda'}l = (2k-1)\pi/2$, $k = 1,2,\ldots$ Звідки $\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{l}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2$ і $y_k' = C_{2k}\sin\left(\frac{2k+1}{l}\cdot\frac{\pi}{2}\right)x$.

При $P = \lambda_k EI = EI\left(\frac{2k+1}{l}\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2$ стержень може займати положення, яке визначається з точністю до сталого множника функцією $y_k = \sin\left(\frac{2k+1}{l}\cdot\frac{\pi}{2}\right)x$.

Сталу C_{2k} можна обчислити за відомим зміщенням $\delta = y(l)$ стержня на вільному кінці, яке визначається з іншого рівняння.

Сила $P\Big|_{k=0} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = P_{кр}$ називається *критичною* або *Ейлеровою.*

Зауважимо, що навіть при невеликому перевищенні $P_{кр}$ деформація $\delta = y(l)$ інтенсивно зростає, що веде, як правило, до руйнування стержня. Тому форми, які відповідають $k \geq 1$, можна спостерігати лише короткочасно, в динаміці, в процесі повздовжніх коливань стержня.□

Завдання для самоперевірки, систематизації та поглиблення знань

1. Яке рівняння називається ЛНДР, а яке відповідним ЛОДР? Чи є рівняння $\ddot{u} + 2h\dot{u} + k^2u - a\sin\omega t - b\sin\omega t = 0$ ЛНДР? Якщо так, то записати відповідне ЛОДР.
2. Які умови повинні задовольняти коефіцієнти і вільний член ЛНДР, щоб виконувались умови існування і єдиності розв'язку задачі Коші? Нехай дано ДР $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$. Які початкові дані $x_0, y_0 y_0'$ можна задавати, щоб задача Коші з цими початковими даними мала єдиний розв'язок?
3. Якою підстановкою неоднорідне лінійне рівняння зводиться до однорідного у випадку, коли відомий один частинний розв'язок неоднорідного рівняння?
4. Довести, якщо $\bar{y}$ є розв'язок ЛНДР $L[y] = f(x)$, а y_1 є розв'язком відповідного ЛОДР, то їх сума $\bar{y} + y_1$ є також розв'язком рівняння ЛНДР $L[y] = f(x)$.

5. Сформулювати та довести теорему про структуру загального розв'язку ЛНДР. Записати загальний розв'язок ЛНДР $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}$, якщо корені характеристичного рівняння $k_1 = 0, k_{2,3} = 3$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\bar{y} = (1/18)x^2(x-1)e^{3x}$.
6. Знайти загальний розв'язок неоднорідного ДР другого порядку, якщо відомі три лінійно незалежні частинні його розв'язки y_1, y_2 i y_3.
7. Розкрити зміст методу суперпозиції.
8. Розкрити зміст методу варіації довільних сталих для знаходження розв'язків ЛНДР? Які розв'язки можна знайти за допомогою цього методу?
9. Як знаходять частинні розв'язки ЛНДР із сталими коефіцієнтами у випадку спеціального вигляду правої частини?
10. Для кожного з даних неоднорідних лінійних ДР записати структуру його частинного розв'язку:

   а) $y^{IV} + 4y'' = 5$; б) $y'' + 3y' - 4y = 2x - 1$; в) $y'' - 8y' + 16y = xe^{4x}$;
   г) $y''' + y'' = 2x + e^{-x}$; д) $y'' - 8y' = 2\cos^2 4x$; е) $y'' + 25y = \sin 3x$.
11. Довести, що підстановкою $y = e^{-\frac{1}{2}\int p(x)dx} z$ рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ зводиться до ДР другого порядку, яке не містить z'. Написати це рівняння.
12. Довести, що рівняння $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$, яке задовольняє початкові умови $x(0) = x'(0) = 0$, має вигляд
$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(u)\sin\omega(t-u)du \cdot$$
13. При яких k і ω рівняння $y'' + k^2 y = \sin\omega t$ має хоча б один періодичний розв'язок?
14. Знайти періодичний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = \sin\omega t$.
15. Вивести рівняння вимушених коливань.
16. Як інтегрується рівняння вимушених коливань в середовищі без опору у випадку періодичної збурювальної сили, яка має синусоїдальний характер?
17. Що таке резонанс та його практичне значення?
18. Провести дослідження коливань (23) в середовищі з малим опором $(0 < h < \omega)$, коли збурювальна сила періодична і має вигляд $f(t) = h\sin\nu t$. Що можна сказати про амплітуду коливного руху, коли опір h достатньо малий, а частота ν збурювальної сили наближається до частоти ω власних коливань системи?

Завдання для практичних аудиторних занять

1. Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих (Лагранжа)

   а) $y''+3y'+2y=1/(e^x+1)$, б) $y''-y=1/x$, в) $y''+4y=2tgx$.

2. Розв'язати рівняння, шукаючи чатинні розв'язки методом невизначених коефіцієнтів

   I. а) $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=25t$, б) $\ddot{s}+\dot{s}=3t^2$;

   II. а) $y''+y=4xe^x$, б) $y''+y'-2y=3xe^x$;

   III. а) $y''-3y'+2y=\sin x$, б) $y''+y=2\cos x$.

3. Знайти частинні розв'язки рівнянь, використовуючи принцип суперпозиції

   а) $\ddot{x}-4\dot{x}+8x=e^{2t}+\sin 2t$, б) $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=(9t+1)e^t+9e^{-2t}$,

   в) $\ddot{x}+9x=81t^2+6\sin 3t$.

4. Знайти частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють початкові умови

   а) $y''+4y=8\sin 2x$, $y(0)=y'(0)=0$; б) $y^{IV}-y=8e^x, y(0)=0, y'(0)=2,$ $y''(0)=4, y'''(0)=6$; в) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$, $y(\pi)=\pi e^\pi, y'(\pi)=e^\pi$.

Відповіді: 1. а) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)$, б) $y=C_1e^{-x}+$ $+C_2e^x+\int\limits_1^x\frac{\sin(x-t)}{t}dt$, в) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\ln|\cos x|-x\cos 2x$;

2) I. а) $x=e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+5t-4$, б) $x=C_1+C_2e^{-t}+t^3-3t^2+6t$;

II. а) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2(x-1)e^x$, б) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+x^3e^x$;

III. а) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{1}{10}(\sin x+3\cos x)$, б) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x$;

3. а) $x_{ч.н.}=\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{10}\cos 2t$, б) $x_{ч.н.}=(\frac{t^3}{2}-\frac{t^2}{3})+te^{-2t}$, в) $x_{ч.н.}=t^2-2-t\cos 3t$;

5. а) $y=\sin 2x-2x\cos 2x$, б) $y=2xe^x$, в) $y=e^x((2x-\pi-1)\sin x-\pi\cos x)$.

Завдання для аудиторної самостійної роботи

Знайти: а) загальний розв'язок даних лінійних рівнянь; б) частинний розв'язок рівнянь, який задовольняє початкові умови.

1. а) $y''+y'=\frac{e^x}{1+e^x}$, б) $y''-y=x$, $y(0)=1, y'(0)=-1$;
2. а) $y''+4y=8ctg 2x$, б) $y''+4y=\sin 2x$, $y(0)=y'(0)=0$;
3. а) $y''-2y'+=\frac{x^2+2x+2}{x^3}$, б) $y''-2y'=2e^x$, $y(1)=-1, y'(1)=0$.

Відповіді: 1. а) $y = C_1 + C_2 e^{-x} + (e^{-x}+1)(\ln(e^x+1)-1)$, б) $y = -x + chx$;

2. а) $y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + 2\sin 2x \ln|tgx|$, б) $y = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x$;

3. а) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{x}$; б) $y = e^{2x-1} - 2e^x + e + 1$.

Індивідуальні домашні завдання

1. Знайти частинний розв'язок ДР, який задовольняє задані початкові умови

1.1. $y'' - 4y' + 5y = 2xe^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$;

1.2. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = 9$;

1.3. $y'' - 3y' + 2y = (3-4x)e^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$;

1.4. $y'' + 6y' + 9y = (1-x)e^{-3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$;

1.5. $y'' - 5y' = -5x^2 + 2x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$;

1.6. $y'' + 3y' + 2y = (12x^2 + 2x)e^{2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$;

1.7. $2y'' - y' = x - 4, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$;

1.8. $y'' - 2y' = (x-2)e^x, \quad y(0) = -2, y'(0) = 3$;

1.9. $y'' - 5y' + 4y = 4xe^{2x}, \quad y(0) = -2, y'(0) = -1$;

1.10. $y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 1$;

1.11. $y'' + y = 3e^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 2$;

1.12. $y'' - 4y' - 5y = 3xe^{2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 3$;

1.13. $y'' - y' = 2(1-x), \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$;

1.14. $y'' + 2y' + y = 2e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = -2$;

1.15. $y'' - y' = 3xe^{-x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$;

1.16. $y'' + y = 5e^x, \quad y(0) = 3, y'(0) = -2$;

1.17. $y'' - y = (2-x)e^x, \quad y(0) = 2, y'(0) = -1$;

1.18. $y'' + 4y = 3xe^{-x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$;

1.19. $y'' - 2y' = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -2$;

1.20. $y'' + 4y = 8e^{-2x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$;

1.21. $y'' - 2y' + 5y = xe^{2x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$;

1.22. $y'' - 6y' + 9y = (16x-7)e^{-x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$;

1.23. $y'' - 5y' + 6y = (1-2x)e^{2x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = -2;$

1.24. $y'' - 2y' + y = 16e^{x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2;$

1.25. $y'' - 4y' = 6x^2 - 1, \quad y(0) = 2, y'(0) = -3;$

1.26. $y'' - 3y' = 9x^2 - 6x + 3, \quad y(0) = 3, y'(0) = -1;$

1.27. $y'' - 3y' - 4y = (1-3x)e^{x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 3;$

1.28. $y'' + 4y' + 5y = 4xe^{-2x}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 1;$

1.29. $4y'' - 12y' + 9y = (x-1)e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -2;$

1.30. $y'' - 4y' + 29y = 37x - 29x^2 - 6, \quad y(0) = -2, y'(0) = -3.$

2. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

2.1. а) $y'' + 6y' + 13y = 3\cos 2x$; б) $y'' - y' = 1 - x + 2\cos 3x$;

2.2. а) $y'' + y = 2\cos 4x - 3\sin 4x$; б) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x} - \cos 2x$;

2.3. а) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$; б) $y'' - 3y' = 2x - 5\sin 3x$;

2.4. а) $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x$; б) $y'' - y' = 2shx - x + 3$;

2.5. а) $y'' + 4y = -8\sin 2x$; б) $y'' + 4y = 4\sin 2x + x^2 - 4$;

2.6. а) $y'' - 2y' + 5y = -2\cos x$; б) $y'' - 2y' + y = (1-x)e^{x} - 2\sin x$;

2.7. а) $y'' + 4y = \sin 3x$; б) $y'' - y' = x^2 - 1 + 3\sin x$;

2.8. а) $y'' - 2y' + 10y = \sin x$; б) $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x)$;

2.9. а) $2y'' + 5y' = 29\cos x$; б) $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x - xe^{x}$;

2.10. а) $y'' - 3y' + 2y = 5\sin 2x$; б) $y'' + 4y = 4e^{2x} - 8\sin 2x$;

2.11. а) $y'' - y = 4\cos x - \sin x$; б) $y'' + y' = 2shx + \sin x$;

2.12. а) $y'' + y = 6\sin 2x$; б) $y'' + 2y' + 17y = x^2 - 5x + 3e^{-x}$;

2.13. а) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$; б) $y'' + 6y' + 13y = 2x - 4 + 4xe^{-3x}$;

2.14. а) $y'' + 9y = 3\cos x$; б) $y'' - 6y' + 18y = 3x^2 - 4 + (4x-1)e^{x}$;

2.15. а) $y'' - 4y' + 8y = 2\sin 2x$; б) $y'' + 9y = 3xe^{2x} - 4\sin x$;

2.16. а) $y'' + 2y' + 8y = 8\sin 2x$; б) $y'' + 2y' + 5y = 3x - 5 - 2xe^{-x}$;

2.17. а) $y'' - y = 2\sin x - 3\cos x$; б) $y'' - 4y' = 4x^2 - 2 - e^{-2x}$;

2.18. а) $y'' + 2y' + 10y = 5\sin x$; б) $y'' + 5y' = 7e^{2x} + 4x^2 - 3$;

2.19. а) $y'' + 2y' + y = 4\cos x$; б) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 - 9 + 3e^{2x}$;

2.20. а) $y'' + 4y' + 8y = 3\sin 2x$; б) $y'' - 6y' = 4x^2 - 5x + 7e^{3x}$;

2.21. а) $y'' - 7y' + 12y = 4\cos 2x - \sin 2x$; б) $y'' - 4y' = 16sh4x$;

2.22. а) $y''+7y'-8y=\cos x-3\sin x$; б) $y''-3y'=2ch3x+2x$;

2.23. а) $y''+2y'+y=5\cos x$; б) $y''+2y'+2y=2x+5-3e^{-x}$;

2.24. а) $y''-7y'=4\cos 2x$; б) $y''+7y'+12y=3x^2-5-e^{-3x}$;

2.25. а) $y''+4y'+4y=-\cos 2x$; б) $y''-6y'+8y=4-3x^2+2e^{2x}$;

2.26. а) $y''+4y'=\cos x+3\sin x$; б) $y''-5y'=6x^2-x+8e^{2x}$;

2.27. а) $y''+2y'+17y=3\sin 4x$; б) $5y''-6y'+5y=2x-3+4e^{-x}$;

2.28. а) $y''-5y'+4y=3\cos 4x$; б) $y''+y=3x-x^2+4e^{-x}$;

2.29. а) $y''-6y'+18y=2\cos 2x$; б) $y''-3y'=3x^2-2x+(3x-4)e^{-x}$;

2.30. а) $y''+4y'+20y=80\sin 2x$; б) $2y''-3y'=3x^2+5e^{3x}-7$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь

3.1. $y'''+3y''+2y'=x^2-x$;
3.2. $y'''+y''=6x^2-2x+3$;
3.3. $y'''-5y''+6y'=(x-1)^2$;
3.4. $y^{IV}-9y''=3x^2-1$;
3.5. $y'''-y''=4-x^2$;
3.6. $y'''-13y''+12y'=2x-1$;
3.7. $3y'''-y''=5x$;
3.8. $y'''-4y'=16e^{2x}$;
3.9. $y^{IV}-y''=6x+5$;
3.10. $y'''-3y''+2y'=xe^x$;
3.11. $y^{IV}+y''=2x-x^2$;
3.12. $y^{IV}-6y'''+9y''=3x-1$;
3.13. $y^{IV}-3y'''+3y''-y'=2x^2-1$;
3.14. $y'''-4y''+3y'=-4e^x$;
3.15. $y^{IV}-2y'''+y''=2e^x$;
3.16. $y'''+6y''+9y'=(8x-1)e^{-x}$;
3.17. $y^{IV}-y'''=2x-3$;
3.18. $y'''+y''-6y'=(1-x)e^{2x}$;
3.19. $y'''-4y''=2e^{4x}$;
3.20. $y'''-3y''+2y'=x^2-4x$;
3.21. $y^{IV}+4y'''+4y''=4e^{-2x}$;
3.22. $y'''+4y''+4y'=x^2-3$;
3.23. $y^{IV}-2y'''+y''=2x^2-3$;
3.24. $y'''-5y''+6y'=(x-4)e^{-x}$;
3.25. $y^{IV}+y'''=x^2-4$;
3.26. $y'''-2y''+17y'=x^2+4x-3$;
3.27. $y'''-4y''=3x^2-x$;
3.28. $y'''+2y''+y'+2y=4e^{-x}$;
3.29. $y'''+3y''+2y'=(1-2x)e^{-x}$;
3.30. $y'''-2y''+4y'-8y=12\sin 2x$

4. Знайти загальний розв'язок ДР методом варіації довільних сталих

4.1. $y''+4y'+4y=2e^{-2x}\ln x$;
4.2. $y''+2y'+y=e^{-x}/\sqrt{x^2+3}$;
4.3. $y''-y'=e^{2x}\cos(e^x)$;
4.4. $y''-3y'+2y=1/(e^{-x}+3)$;

4.5. $y'' + y' = 2/\cos x$;

4.6. $y'' + 9y = 9/\cos 3x$;

4.7. $y'' - y = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$;

4.8. $y'' - 2y' + y = e^x/\sqrt{4-x^2}$;

4.9. $y'' - 2y' + y = e^x/(x^2+1)$;

4.10. $y'' + 4y = 4/\sin 2x$;

4.11. $y'' + y = tg^2 x$;

4.12. $y'' - 6y' + 8y = 4/(1+e^{-2x})$;

4.13. $y'' - 2y' + y = 3e^x/x$;

4.14. $y'' - y' = e^x/(2-e^x)$;

4.15. $y'' + y = 1/\cos^3 x$;

4.16. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2+e^{-x})$;

4.17. $y'' - y' = (2-x)e^x/x^2$;

4.18. $y'' - 2y' = 4e^{2x}/(1+e^{2x})$;

4.19. $y'' - y' = e^{2x}\sin e^x$;

4.20. $y'' + 4y = 4/\sin^2 2x$;

4.21. $y'' + y' = 1/(e^x+1)$;

4.22. $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\cos \pi x$;

4.23. $y'' - y' = e^x/x^2$;

4.24. $y'' - y' = 2e^x/(1+e^{2x})$;

4.25. $y'' + 4y = 1/\sin^2 x$;

4.26. $y'' + y' = e^{-2x}/(2+e^{-x})$;

4.27. $y'' - 6y' + 8y = 4/(1+e^{2x})$;

4.28. $y'' + y = -1/\sin 2x$;

4.29. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}/(2+e^x)$;

4.30. $y'' + 2y' = 8e^{2x}/(1+e^{2x})$

Відповіді: **1.1.** $y = e^x(x+1) + e^{2x}(\cos x - \sin x)$; **1.2.** $y = (e^x + 22e^{3x} + e^{5x})/8$; **1.3.** $y = e^{2x}(2x^2 + 0{,}5x + 3{,}5) - 1{,}5e^{2x}$; **1.4.** $y = (3x^2 - x^3)e^{-3x}/6$; **1.5.** $y = y^{5x} + x^3/3$; **1.6.** $y = 3e^{-x} - 1{,}25e^{-2x} + (x^2 - x + 0{,}25)e^{2x}$; **1.7.** $y = 2e^{x/2} - 0{,}5x^2 + 2x$; **1.8.** $y = e^{2x} - 5 + (2-x)e^x$; **1.9.** $y = (3-2x)e^{2x} - 5e^x$; **1.10.** $y = e^{-x}(2\sin x - \cos x + 2)$; **1.11.** $y = 1{,}5e^x + 0{,}5(\cos x + \sin x)$; **1.12.** $y = (10e^{-x} + 8e^{5x} - 3xe^{2x})/9$; **1.13.** $y = e^x + x^2 + 1$; **1.14.** $y = 2xe^{-x} + 2e^{-2x}$; **1.15.** $y = (1{,}5x + 2{,}25)e^{-x} - 2 - 0{,}25e^x$; **1.16.** $y = 2{,}5e^x + 0{,}5\cos x - 4{,}5\sin x$; **1.17.** $y = 2{,}125e^{-x} - 0{,}125e^x + e^x(1{,}25x - 0{,}25x^2)$; **1.18.** $y = 0{,}82\sin 2x - 1{,}24\cos 2x + e^{-x}(0{,}6x + 0{,}24)$; **1.19.** $y = 1{,}75 - 1{,}75e^{2x} + 1{,}5xe^{2x}$; **1.20.** $y = e^{-2x} - 2\cos 2x + 1{,}5\sin 2x$; **1.21.** $y = e^x(1{,}08\sin 2x - 2{,}2\cos 2x) + (0{,}2x - 0{,}08)e^{2x}$; **1.22.** $y = (x + 0{,}0625)e^{-x} - e^{3x}(0{,}0625 + 1{,}75x)$; **1.23.** $y = e^{2x}(x^2 + x) - e^{3x}$; **1.24.** $y = e^x(x^2/2 + x + 1)$; **1.25.** $y = 1{,}234375 - 0{,}765625e^{4x} - 0{,}5x^3 - 0{,}375x^2 + 0{,}0625x$; **1.26.** $y = 3 - x - x^3$; **1.27.** $y = (0{,}5x - 0{,}25)e^x - 1{,}15e^{-x} + 0{,}4e^{4x}$; **1.28.** $y = e^{-2x}(4x - \cos x - 5\sin x)$; **1.29.** $y = e^{1{,}5x}(5 - 0{,}5x) + (x-5)e^{2x}$; **1.30.** $y = x - x^2 - 2e^{2x}\cos 5x$.

2.1 а) $y = 0,75\cos 2x + 0,16\sin 2x + e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$; б) $y=C_1+C_2e^x + (15x^2-6\cos 3x-2\sin 3x)/30$; **2.2** а) $y = C_1 + C_2e^{-x} - 2/15\cos 4x + 1/5\ \sin 4x$; б) $y=(C_1+C_2x)e^x+(12x^2e^{2x}+\sin 2x)/8$; **2.3**. а) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 2\cos x + \sin x$; б) $y=C_1+C_2e^{3x}-(6x^2-4x-3\cos 3x+9\sin 3x)/18$; **2.4** а) $y = (C_1x+C_2)e^{2x} - 18\sin 2x$; б) $y=C_1+C_2e^x-(x^2+8x-2xe^x+e^{-x})/2$; **2.5**. а) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x\cos 2x$; б) $y=C_1\cos 2x+ +C_2\sin 2x - x\cos 2x+(2x^2-9)/8$;
2.6 а) $y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^x-(2\cos x-\sin x)/5$; б) $y=(C_1+C_2x)e^x - (x^3-3x^2)e^x/6-\cos x$; **2.7**. а) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 0.2\sin 3x$; б) $y=C_1+C_2e^x-x^3/3-x^2+x+1,5(\cos x-\sin x)$ **2.8** а) $y = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + (2\cos x + 9\sin x)/85$; б) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+0,5(x+1)+0,25\cos 2x$;
2.9. а) $y=C_1+C_2e^{-2,5x}+(58\cos x+145\sin x)/21$; б) $y=e^x(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+(6\cos 3x+\sin 3x)/37-xe^x/9$; **2.10** а) $y=C_1e^{2x}+C_2e^x-(3\cos 2x+\sin 2x)/4$; б) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+0,5e^{2x}+2x\cos 2x$;
2.11. а) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(\sin x-4\cos x)/2$; б) $y=C_1+C_2e^{-x}+0,5e^x+xe^{-x}-0,5(\cos x+\sin x)$; **2.12**. а) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2\sin 2x$; б) $y=e^{-x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+(17x^2-89x+144)/289+3e^{-x}/16$;
2.13. а) $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)+(\sin 2x)/8$; б) $y=e^{-3x}+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+(26x-64)/169+xe^{-3x}$; **2.14**. а) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+(3\cos x)/8$; б) $y=e^{3x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+(9x^2+6x-11)/54+e^x(52x+3)/169$;
2.15. а) $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 0.2\cos 2x+0.1\sin 2x$; б) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+e^{2x}(66x-39)/484+(18\cos x+2\sin x)/41$; **2.16**. а) $y = e^{-x}(C_1\cos\sqrt{7}x + C_2\sin\sqrt{7}x) - \cos 2x+\sin 2x$; б) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+0,3x-1,12-0,5xe^{-x}$; **2.17**. а) $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+(3\cos x-2\sin x)/3$; б) $y=C_1+C_2e^{4x}-x^3/3-x^2/4+3x/8-e^{-2x}/12$; **2.18**. а) $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) - (2\cos x-9\sin x)/17$; б) $y=C_1+C_2e^{-5x}+0,5e^{2x}+4x^3/15-7x^2/25-71/125$;
2.19. а) $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+2\sin x$; б) $y=e^{2x}(C_1+C_2x)+0,5x^2+x-1,5+1,5x^2e^{2x}$; **2.20**. а) $y = e^{-2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - 0.3\cos 2x+0.15\sin 2x$; б) $y=C_1+C_2e^{6x}-(8x^3+11x^2-28e^{3x})/9$; **2.21**. а) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}+(9\cos 2x-32\sin 2x)/130$; б) $y=C_1+C_2e^{4x}+2xe^{4x}-0,25e^{-4x}$;
2.22. а) $y=C_1e^x+C_2e^{-8x}+(3\cos x+7\sin x)/36$; б) $y=C_1+C_2e^{3x}+$

$+(6xe^{3x}+e^{-3x}-6x^2-4x)/9$; **2.23**. а) $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+(5\sin x)/2$; б) $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+x+1{,}5-3e^{-x}$; **2.24**. $y=C_1+C_2e^{7x}+(4\cos 2x+14\sin 2x)/45$; б) $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-4x}+x^2/4-7x/24-83/288-xe^{-3x}-xe2x$; **2.25**. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)-(\sin 2x)/8$; б) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}-(24x^2+36x-11)/64-xe^{2x}$; **2.26**. а) $y=C_1+C_2e^{-4x}-(11\cos x-\sin x)/17$; б) $y=C_1+C_2e^{5x}-0{,}4x^3-0{,}14x^2-0{,}056x-4e^{2x}/3$; **2.27**. а) $y = e^{-x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) - (24\cos 4x-3\sin 4x)/65$; б) $y=e^{0{,}6x}(C_1\cos\sqrt{0{,}8}x+C_2\sin\sqrt{0{,}8}x)+0{,}4x-0{,}12+0{,}25e^{-x}$; **2.28**. а) $y=C_1e^{x}+C_2e^{4x}-(9\cos 4x+5\sin 4x)/136$; б) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2+3x+2+2e^{-x}$; **2.29**. а) $y = e^{3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) +(7\cos 2x - 6\sin 2x)/85$; б) $y=C_1+C_2e^{3x}+e^{-x}(12x-1)/16-x^3/3$; **2.30**. а) $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) - 2\cos 2x+4\sin 2x$; б) $y=C_1+C_2e^{1.5x}+(5e^{3x}-3x^3-6x^2+13)/9$;

3.1. $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}+x^3/6-x^2+5x/2$; **3.2**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+x^4/2-7x^3/3+17x^2/3$; **3.3**. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{2x}+x^3/18-x^2/36+7x/108$; **3.4**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-3x}+C_4e^{3x}-x^4/36+x^2/54$; **3.5**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+x^4/12+x^3/3-x^2$; **3.6**. $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{12x}+x^2/12+7x/72$; **3.7**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{x/3}-5x^3/6-7{,}5x^2$; **3.8**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-2x}+C_4e^{2x}+2xe^{2x}$; **3.9**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4e^{x}-x^3+2{,}5x^2$; **3.10**. $y=C_1+C_2e^{x}+C_2e^{2x}-0{,}5x^2e^{x}$; **3.11**. $y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x-x^4/12+x^3/3+x^2$; **3.12**. $y=C_1+C_2x+e^{3x}(C_3+C_4x)+(x^3+x^2)/18$; **3.13**. $y=C_1+(C_2+C_3x+C_4x^2)e^{x}-2x^3/3-6x^2-31x$; **3.14**. $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{3x}+2xe^{x}$; **3.15**. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{x}+x^2e^{x}$; **3.16**. $y=C_1+(C_2+C_3x)e^{-3x}-(2x+0{,}25)e^{-x}$; **3.17**. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{x}-x^4/12+x^3/6$; **3.18**. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}-(0{,}05x^2-0{,}85x)e^{2x}$; **3.19**. $y=C_1+C_2x+C_3e^{4x}+xe^{4x}/8$; **3.20**. $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{2x}+x^3/6-x^2/4-5x/4$; **3.21**. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{-2x}-x^2e^{-2x}$; **3.22**. $y=C_1+C_2e^{-2x}+C_3xe^{-2x}+x^3/12-x^2/4-3x/8$; **3.23**. $y=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)e^{x}+(x^4+4x^3+3x^2)/6$; **3.24**. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}-(12x-29)e^{-x}/144$; **3.25**. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+x^5/60-$

$-x^4/12-x^3/3$; **3.26**. $y=C_1+e^x(\cos 4x+C_3\sin 4x)+x^3/51+x^2/289-$ $-757x/4913$; **3.27**. $y=C_1+C_2x=C_3e^{4x}-x^4/12-x^3/48-x^2/64$; **3.28**. $y=C_1e^{-2x}+C_2\cos x+C_3\sin x+0{,}8xe^{-2x}$; **3.29**. $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}+$ $+(1{,}5x^2-0{,}5x)e^{-x}$; **3.30**. $y=C_1e^{2x}+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x+x(\cos 2x-sn2x)$;

4.1. $y=(C_1+C_2x+x^2/2-x+x^2\ln x)e^{-2x}$; **4.2.** $y=e^{-x}(C_1+C_2x-\sqrt{x^2+3}-$ $-x\ln|x+\sqrt{x^2+3}|)$; **4.3**. $y=C_1+C_2e^x-\cos(e^x)$; **4.4**. $y=e^x(C_1+x-1-\ln(1+$ $+3e^x))+e^{2x}(C_2+3\ln(1+3e^x)-3x)$; **4.5**. $y=C_1+e^{-x}(C_2-2\int e^x dx/\cos x)+$ $+2\ln|\mathrm{tg}(x/2+\pi/4)|$; **4.6**. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x-\cos 3x\ln|\cos 3x|+3x\sin 3x$; **4.7**. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x+((4e^x-e^{-x})\arcsin(e^x)+(2e^{2x}+1)\sqrt{1-e^{2x}})/16$; **4.8**. $y=$ $=e^x(C_1+C_2x-\sqrt{4-x^2}+x\arcsin(x/2))$; **4.9**. $y=e^x(C_1+C_2+\ln(\sqrt{x^2+1})+$ $+x\mathrm{arctg}x)$; **4.10**. $y=\cos 2x(C_1-2x)+\sin 2x(C_2+\ln|\sin 2x|)$; **4.11**. $y=$ $=\cos x(C_1+\ln|\mathrm{tg}(x/2)|+\cos x)+\sin x(C_2-(\sin^3x)/3)-1$; **4.12**. $y=e^{2x}(C_1+$ $+\ln(1+e^{-2x}))+e^{4x}(C_2-2x+e^{-2x}+\ln(1+e^{2x}))$; **4.13**. $y=e^x(C_1+C_2x+$ $+3x(1++\ln x))$; **4.14**. $y=C_1+C_2e^x+\ln|e^x-2|+\frac{1}{2}e^x\ln|e^x/(e^x-2)|$; **4.15**. $y=$ $=C_1\cos x+\sin x(C_2+\mathrm{tg}x)+1/2\cos x$; **4.16**. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^w\ln|2e^x/(2e^x+$ $+1)|-2xe^{2x}-e^x+2e^x\ln(1+2e^{2x})$; **4.17**. $y=C_1+C_2e^x+\int(x-2)e^2/x^2-2e^x/x-$ $-e^x\ln|x|$; **4.18**. $y=C_1+e^{2x}(C_2+\ln|e^{2x}/(1+e^{2x})|)-\ln|1+e^{2x}|$; **4.19**. $y=C_1+e^{-x}(C_2-$ $-\ln|e^x+1|)+\ln|e^x/(e^x+1)|$; **4.20**. $y=\cos 2x(C_1-\ln|tgx|)+C_2\sin 2x-1$; **4.21**. $y=C_1+\ln|e^x/(e^x+1)|+e^{-x}(C_2-\ln|e^x+1|)$; **4.22**. $y=C_1\cos\pi x-$ $-1\sin\pi x(C_2-\ln|tg\pi(x+1/4)|)$; **4.23**. $y=C_1+e^x(C_2-1/x)-\int e^x dx/x^2$; **4.24**. $y=C_1+e^x(C_2+\ln|e^{2x}/(1+e^{2x})|-2arctg(e^x)$; **4.25**. $y=\cos 2x(C_1+$ $+\ln|\sin x|)+\sin 2x(C_2-x)-\cos^2x$; **4.26**. $y=C_1+e^{-x}(C_2+\ln(e^x/(2e^x+$ $+1))-1)+2\ln(1+2e^{2x})-2x$; **4.27**. $y=e^{2x}(C_1+1)+C_2e^{4x}+1/2+(2x-\ln(e^{2x}+1))-$ $-(e^{2x}+e^{4x})$; **4.28**. $y=e^x(C_1+\ln|2e^x/(2e^x+1)|-1)+e^{2x}(C_2+2\ln(1+2e^{2x})-$ $-2x)$; **4.29**. $y=e^x(C_1-1/8)+C_2e^{2x}-1/8+(1/16)(\ln(e^x+2)-x)(e^{2x}+2e^x)$; **4.30**. $y=C_1+C_2e^{-2x}+2(e^{-2x}+1)(\ln(1+e^{2x}))-1$.

Додаток

Завдання для контрольної роботи на тему "Диференціальні рівняння" (2 години)

Група А

1. Довести, що задана функція є розв'язком вказаного рівняння $C \in R$.
2. Знайти загальний розв'язок або інтеграл вказаного рівняння 1-го порядку.
3. Розв'язати задачу Коші для ДР 2-го порядку із змінними коефіцієнтами.
4. Знайти розв'язок лінійного неоднорідного ДР 2-го порядку із сталими коефіцієнтами, який задовольняє задані початкові умови.
5. Розв'язати фізичну або геометричну задачу.

1

1. $y = Ce^x \sin x$, $y'' - 2y' + 2y = 0$;
2. $y = \dfrac{c}{\cos x}$, $y' - ytgx = 0$;
3. $y = \ln x + C$, $dx - xdy = 0$;
4. $y = x\sqrt{1 - x^2}$; $yy' = x - 2x^3$;
5. $y = Ce^{-2x} + e^x/3$, $y' + 2y = e^x$;
6. $x = y\ln y$, $y'(x+y) = y$;
7. $x^2 - y^2 = Cx$, $(y^2 + x^2)dx - 3xydy = 0$;
8. $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$;
9. $\begin{cases} x = t^2 + e^t, \\ y = 2/3t^2 + (t-1)e^t; \end{cases}$ $\quad (y')^2 + e^{y'} = x$;
10. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 1/2t^2 + t\sin t + \cos t; \end{cases}$ $\quad y' + \sin y' = x$;
11. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y'' - y = 0$;
12. $s = -t - 1/2\sin 2t$, $\ddot{s} + \dot{s}\, tgt = \sin 2t$.

2

1. $x + xy + y'(y + xy) = 0$;
2. $3e^x tgydx = (1 - e^x)\sec^2 ydy = 0$;
3. $2x\sqrt{1 + y^2}dx + ydy = 0$;
4. $y' = tgx \cdot tgy$;
5. $y' = 5^{x+y}$;
6. $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx$;
7. $e^{1+x^2} tgydx = e^{2x}dy/(x-1)$;
8. $e^y\sqrt{1 + x^2}dy + dx = 0$;

9. $y' + \sin\frac{x-y}{2} = \sin\frac{x-y}{2}$; 10. $yy'\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} = 1$;

11. $x\cos\frac{y}{x}(ydx + xdy) = x^2\sin\frac{y}{x}dx$; 12. $xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$.

3

1. $y'' + y'tgx = \sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0$;
2. $x^2y'' + xy' = 1, \quad y(1) = 1, y'(1) = 2$;
3. $y'' + 2y' = e^x(y')^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;
4. $xy'' - y' = x^2e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0$;
5. $y'' = y' + x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$;
6. $xy'' + y' = x^2 + 1, \quad y(1) = 10/9, y'(1) = 1/3$;
7. $xy'' = y'(1 + \ln y'/x), \quad y(1) = 0, y'(1) = e$;
8. $xy'' = y' + x, \quad y(1) = 3/4, y'(0) = 0$;
9. $y''(x^2 + 1) = 2xy', \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$;
10. $y'' = y'/x + x^2/y', \quad y(2) = 0, y'(2) = 4$;
11. $x^2y''' = (y'')^2, \quad y(1) = 1{,}5, y'(1) = 1, y''(1) = 0{,}5$;
12. $xy'' - 2x^2\sqrt{y'} = 4y', \quad y(1) = 2/125, y'(1) = 0$;

4

1. $y'' - 2y' = 2e^x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$;
2. $2y'' - y' = 2x - 4, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1/2$;
3. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0$;
4. $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 12x + 2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$;
5. $y'' + y = 8\cos 3x, \quad y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = -3$;
6. $y'' + 4y' + 20y = 128xe^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -16$;
7. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}, \quad y(1) = e^{-1}, y'(1) = 0$;
8. $2y'' + y' - y = 1 - x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1{,}5$;
9. $y'' + 3y' = \cos x + \sin x, \quad y(0) = 0{,}6, y'(0) = 0{,}2$;
10. $y'' - y = e^{-x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1{,}5$;
11. $y'' - 4y' = 8, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$;
12. $y'' - 3y' + 2y = 2e^x\sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1$.

1. Прискорення прямолінійного руху матеріальної точки задається формулою $a = (2t - 10)$ $м/с^2$. Знайти рівняння руху матеріальної точки, якщо при $t = 0$ с $s = 4$ м і при $t = 3$ $с$ $s = 13$ м, і миттєву швидкість при $t = 10$ с.
2. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2), якщо відношення ординати будь-якої точки лінії до абсциси цієї точки дорівнює потроєному кутовому коефіцієнтові її дотичної в цій точці.
3. Відомо, що тіло рухається з швидкістю, пропорційною пройденому шляху, і проходить за 2 с - 10*м*, а за 4 с – 50*м*. Який шлях пройде тіло за 6 с від початку відліку часу?
4. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (0,2) і має дотичну з кутовим коефіцієнтом $к = 1/y$. Побудувати ескіз цієї кривої.
5. Тіло рухається прямолінійно з швидкістю пропорційною часу руху. Знайти рівняння руху тіла, яке пройшло шлях 20 м за 10 с і 35 м за 20 с від початку відліку часу. Який шлях пройде тіло за 1 хв 40 с?
6. Знайти лінію, яка проходить через точку $(0,e)$, якщо кутовий коефіцієнт її дотичної дорівнює подвоєному добутку координат точки дотику. Побудувати ескіз цієї лінії.
7. В куску гірської породи міститься 100 мг урану і 14 мг свинцю. Визначити вік гірської породи, якщо відомо, що період піврозпаду урану складає $4{,}5\ 10^9$ років і при повноному розпаді 238 г урану утворюється 206 г уранового свинцю. (Вважати, що в момент утворення гірська порода не містила свинцю, і нехтувати наявністю проміжкових продуктів розпаду урану і свинцю, які розпадаються значно швидше.)
8. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (9,9) і має ту властивість, що кутовий коефіцієнт будь-якої її дотичної в два рази менший кутового коефіцієнта радіус-вектора точки дотику.
9. Температура тіла за 20 *хв* знизилась із 100^0 до 40^0 C. Температура навколишнього середовища 20^0 C. Через скільки хвилин температура тіла буде дорівнювати 25^0 C, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температури тіла і навколишнього середовища?
10. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (2,1) і має ту властивість, що кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $x = 1$ в точці з ординатою, яка дорівнює подвоєній ординаті точки дотику.

11. Моторний човен рухається в спокійній воді зі швидкістю *4 м/с*. Через 4 с після вимкнення мотора його швидкість зменшилась до 1,6 *м/с*. Вважаючи, що опір води пропорційний швидкості руху човна, знайти його швидкість через 8 с з моменту вимкнення мотора.
12. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1.4) і має ту властивість, що в довільній її точці M дотичний вектор $\overline{MN}$ з кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy, рівну 2.

Група Б

1. Знайти загальний розв'язок або загальний інтеграл ДР 1-го порядку, вказавши тип ДР та метод його інтегрування.
2. Знайти загальний розв'язок ДР, використавши методи зниження його порядку.
3. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного ДР, який задовольняє вказані початкові умови.
4. Знайти загальний розв'язок ДР методом варіації довільної сталої.
5. Розв'язати фізичну або геометричну задачу.

1

1. $xy' - y = \sqrt{y^2 - x^2}$;
2. $xy' - 2y = 2x^4$;
3. $y' + 2y/x = 3x^2\sqrt[3]{y^4}$;
4. $x^2y' + xy + 1 = 0$;
5. $y' = 1/(x\cos y + \sin 2y)$;
6. $xy' = 3y - x^4y^2$;
7. $y' = (x+y)^2$;
8. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;
9. $(x - 2xy - y^2)dy = y^2dx$;
10. $y' = \cos(x-y)$;
11. $(2xye^{x^2} - x\sin x)dx + e^{x^2}dy = 0$;
12. $(1+y^2)dx - y\sqrt{1+y^2}(1+x^2)^{3/2}dy = 0$;
13. $(1+y^4)(\cos x + \sin x)dx + y\sqrt{\sin 2x}dy = 0$;
14. $2yy' = e^{\frac{x^2+y^2}{x}} + \dfrac{y^2+x^2}{x} - 2x$.

2

1. $xy''' - y'' + 1/x = 0$;
2. $2yy'' + (y')^2 = 0$;
3. $yy'' = (y')^2$;
4. $y''\sin y = 2(y')^2\cos y$;
5. $2y'' + (y')^2 = e^{-y}$;
6. $xy'' - y' = x^2e^x$;
7. $y'' - 2ctgxy' = \sin^3 x$;
8. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;
9. $4\sqrt{y}y'' = 1$;
10. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)(y')^2 = 0$;
11. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$;
12. $y'' = y'/x + x$;
13. $yy'' - (y')^2 = y^2y'$;
14. $xy'' = y' + x^2$.

3

1. $y'' + 9y = 12\sin 3x, \quad y(0) = -2, y'(0) = 1$.
2. $y'' + 9y' = x + 1/2, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$.
3. $y''' - 5y'' = -50x, \quad y(0) = 2, y'(0) = 7, y''(0) = 0$.
4. $4y'' - 12y' + 9y = (x-1)e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -2$.
5. $y'' - y' = e^x \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$.
6. $6y'' - y' = 5x^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 6$.
7. $y'' + 5y' = e^{-5x}, \quad y(0) = 1, y'(0) = -0.2$.
8. $y''' + y'' - 6y' = (20x+14)e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y'' = 2$.
9. $y'' - 2y' = 10x^2 + 18x + 6, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$.
10. $y'' + 2y' + y = 9e^{2x} + x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$.
11. $y'' + y = \cos 3x, \quad y(\pi/2) = 4, y'(\pi/2) = 1$.
12. $y'' + 6y' + 13y = 4e^{-3x}\cos 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 3$.
13. $y'' - 4y' + 4y = 36e^{2x}\sin 6x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 7$.
14. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = y'(0) = 2$.

4

1. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$;
2. $y'' + y = tgx$;
3. $y'' + 4y' = 3\sec 2x$;
4. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}/x$;
5. $y'' - y' = e^x/(1+e^x)$;
6. $y'' - 3y' + 2y = e^x/(1+e^{-x})$;
7. $y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x}e^{3x}$;
8. $y'' + y = \cos x$;

9. $y'' + 2y' + 2y = 1/e^x \sin x$; 10. $y'' + 4y' = 8ctg2x$;

11. $y'' - 3y' = 9e^{-3x}/(3 + e^{-3x})$; 12. $y'' + 4y = 1/\sin x$;

13. $y'' + y = (2 + \cos x)/\cos^2 x$; 14. $y'' - 2y' + y = e^x/\sqrt{4 - x^2}$.

5

1. З висоти 18м над рівнем Землі кинуто вертикально вверх тіло з швидкістю 30м/с. Знайти висоту, на якій знаходиться тіло в момент часу *t*, як функцію часу. Визначити найбільшу висоту підйому тіла.
2. У посудину, що містить 100л 10% - го розчину солі, щохвилини вливається 30л води і витікає 20л розчину. Яка кількість солі залишиться в посудині через 10 хв, якщо вважати, що суміш неперервно перемішується.
3. Електричне коло містить активний опір *R*, індуктивність *L* і електрорушійну силу $E = at \sin \omega t$. Знайти закон зміни струму в цьому колі, якщо $i(0) = 0$.
4. Фірма реалізує продукцію *B*, про яку на момент часу *t* з числа потенційних покупців *N* знає лише *x(t)* покупців. Після реклами швидкість зміни числа знаючих про продукцію пропорційна як числу знаючих про продукцію *B*, так і не знаючих про неї. Знайти рівняння логістичної кривої *x(t)*, якщо при $t = 0$, $x(0) = N/11$.
5. Метеор, який знаходиться виключно у полі тяжіння Землі, зі стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з необмежено великої відстані *h*. З якою швидкістю метеор зіткнеться з Землею, якщо відсутня земна атмосфера? Радіус земної кулі $R = 6377$км.
6. Підводний човен, втративши хід, дістав невелику від'ємну плавучість *P* (вага більше виштовхувальної сили) і занурюється поступально в глибину. Опір води при цьому пропорційний швидкості занурення *v* та площі горизонтальної проекції човна *S*. Маса підводного човна *M*. Знайти: 1) швидкість занурення як функцію часу, якщо при $t = 0$ $v_0 = 0$; 2) пройдений шлях човна за час *T*.
7. В повітрі кімнати об'ємом 60 м^3 міститься 0.15 % вуглекислого газу. Вентилятор подає за хвилину 1,8 м^3 повітря, яке містить 0,04% CO_2. За який час кількість CO_2 зменшиться вдвоє.
8. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (1,0) і має ту властивість, що квадрат довжини відрізка, який відтинається

довільною її дотичною на осі Оу, дорівнює добутку координат точки дотику.

9. Знайти криву, яка проходить через точку (1,1) і має ту властивість, що відрізок який відтинає дотична на осі ординат, дорівнює подвоєному квадратові ординати точки дотику.
10. Знайти криву, яка проходить через точку (2,3) і має ту властивість, що відрізок дотичної між координатними осями ділиться точкою дотику на дві рівні частини.
11. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (2,0) і має ту властивість, що відрізок довільної її дотичної між точкою дотику і віссю *Oy* має сталу довжину, яка дорівнює 2.
12. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (2,1) і має ту властивість, що площа трикутника, утвореного віссю *Ox*, дотичною та радіусом-вектором точки дотику, дорівнює 1.
13. Знайти рівняння лінії, яка проходить через точку (1,2) і має ту властивість, що площа трапеції, яка утворена осями координат, ординатою будь-якої її точки і дотичною в цій точці, дорівнює половині квадрату абсциси точки дотику.
14. Знайти рівняння кривої, яка проходить через точку (0.2), дотична до якої відтинає від осі *Ox* відрізок вдвічі більший ординати точки дотику.

Група В

Варіант 1

1. Знайти таке значення α, щоб при підстановці $y = \eta^{\alpha}$ рівняння $(y + y\sqrt{x^2y^4+1})dx + 2xdy = 0$ перейшло в однорідне та зінтегрувати його.

2. Зінтегрувати рівняння $(y'')^2 - xy' + y' = 0$ та знайти його розв'язки, які задовольняють початкові умови $y(0) = y'(0) = 0$. Чому отримуємо два розв'язки?

3. Знайти загальний розв'язок рівняння
$$y''' + y' = 2(x + shx + \sin x).$$

4. Знайти закон прямолінійного руху матеріальної точки m, що падає в середовищі, опір якого пропорційний квадратові швидкості. При $t = 0$ – початкове положення x_0, початкова швидкість v_0. Знайти граничне значення швидкості при $t \to \infty$.

Варіант 2

1. Зінтегрувати рівняння $y' = 1 + e^{x+2y}$, використовуючи підстановку $\eta = e^{-2y}$. Вказати тип рівняння, яке одержується в результаті підстановки, та методи його розв'язання.
2. Зінтегрувати рівняння $y'y''' - 3(y'')^2 = 0$ шляхом зниження його порядку.
3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 2y'' + 5y' = e^x \sin 2x + 2x^2.$$

4. Надійністю приладу p(t) називають ймовірність його безвідмовної роботи до моменту часу t. Відомо, що швидкість зміни надійності певного приладу пропорційна (з коефіцієнтом α) надійності в даний момент часу. Вважаючи, що в початковий момент часу надійність дорівнює одиниці, визначити:

а) закон зміни надійності у вигляді диференціального рівняння;

б) закон зміни надійності у вигляді аналітичної формули;

в) надійність наприкінці другого року експлуатації, якщо відомо, що протягом першого року експлуатації надійність приладу зменшилася вдвоє;

г) з метою підвищення надійності приладу у фіксовані моменти часу t_i ($i = 1,2, \ldots$) здійснюють ремонтні роботи, внаслідок яких надійність змінюється згідно із законом $p(t_i + 0) = \beta\, p(t_i)$, $\beta = \mathrm{const}>1$.

Знайти аналітичну формулу для p(t). Вважаючи, що $t_{i+1} - t_i = \tau$, $\forall i$, визначити значення β так, щоб p(t) була τ - періодичною функцією.

Варіант 3

1. Зінтегрувати рівняння $2(y - 2xy + x^2\sqrt{y}) + x^2 y' = 0$ та знайти розв'язок, який задовольняє початкову умову

а) $y(1) = 1$; б) $y(1) = 0$; в) $y \to 0$ при $x \to 0$,

вияснивши спочатку питання про його існування та єдиність.

2. Зінтегрувати рівняння $y'y''' - (y'')^2 = (y')^3$ шляхом зниження його порядку.
3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 8y'' + 20y' = 5x(x^2 + e^{4x} + \cos 2x).$$

4. Розмноження бактерій. Біологи встановили, що деякі бактерії розмножаються із швидкістю, пропорціональною з коефіцієнтом α їх наявній кількості, але одночасно утворюють отруту, яка знищує їх із швидкістю, пропорціональною з коефіцієнтом β кількості

отрути та з коефіцієнтом γ наявній кількості бактерій. Встановити закон розмноження бактерій: а) у формі ДР, б) у формі аналітичної формули.

Варіант 4

1. Знайти загальний інтеграл рівняння $(x^3-xy^2)dx+2x^2ydy-(xdy-$ $-ydx)=0$, використавши підстановку $y = tx$, та вказати тип рівняння, яке одержується в результаті підстановки.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння, скориставшись його квазіоднорідністю: $xyy''-x(y')^2-2yy'=0$.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння, користуючись методом варіації довільних сталих: $y'''-2y''-y'+2y=(2x^3+x^2-4x-6)/x^4$.

4. Дослідити бімолекулярний процес (хімічна реакція другого порядку, в процесі якої взаємодіючі речовини A і B перетворюються в речовину C), якщо a і b - початкові кількості речовин A і B, а x – кількість кожної з цих речовин, що вступила в реакцію за час t від початку реакції. Розглянути випадки: $a = b$ і $a \neq b$ та вияснити до чого прямує $x(t)$ при $t \to +\infty$ в кожному з цих випадків.

Варіант 5

1. Розв'язати рівняння методом інтегрувального множника $\mu = \mu(x)$ або $\mu = \mu(y)$: $y(1-y\sin x)\cos^2 ydx-(y^2+x\cos^2 y)dy=0$

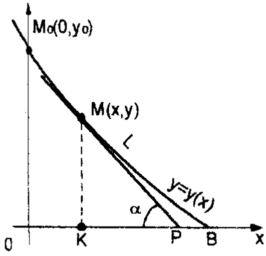
2. Зінтегрувати рівняння шляхом зниження його порядку:

$$3y'(y'')^2-(1+(y')^2)y'''=0$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''+y''-2y'=4x^2e^x+e^{-x}+e^{-x}\sin x.$$

4. Крива переслідування. Нехай точка Р(лисиця) рухається по осі Ox (див. рис.) із сталою швидкістю $v > 0$, а точка M (собака) – по деякій кривій L площини Oxy зі швидкістю u ($u > v$), причому вектор швидкості в точці M в кожний момент часу направлений в точку P. Крива L називається кривою переслідування. Вважаючи, що на початку погоні точка P знаходиться в початку координат, а точка M – на осі Oy в точці $M_0(0,y_0)$ ($y_0 > 0$), знайти рівняння кривої переслідування L, точку $B(x,0)$, в якій точка M дожене точку P, і час переслідування T.



СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях.-М.: Наука, 1987.-153с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1985.-444с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения.Кратные интегралы. Ряды. ФКП.- М.: Наука,1985.- 464с.
4. Еругин Н.П., Штокало Н.З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.- К.: Вища шк. Головное изд-во, 1974.-472с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1971.- 576с.
6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.-М.:Высш.шк., 1978.- 287с.
7. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Высшая школа, 1983.- 128с.
8. Клочко В.І. Практикум з диференціальних рівнянь.- В.: 1997.- 182с.
9. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння.- К.: Вища школа. Головне видавництво, 1974.-766с.
10. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.- Минск: Вышэйшая школа, 1974.- 766с.
11. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов.- М.: Наука, 1985.-560с.
12. Самойленко А.М., Перестюк М.О.,Парасюк І.О. Диференціальні рівняння.- К.: Либідь, 1994, 360с.
13. Самойленко А.М.,Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах.- К.: Вища школа, 1994, 483с.
14. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1980.- 230с.
15. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1980.- 352с.
16. Шкіль М.І., Сотніченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння: Навчальний посібник.- К.: Вища школа, 1992.- 303с.
17. Шестаков А.А., Малышева Н.А., Полозков Д.П. Курс высшей математики : Интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, векторный анализ.- М.: Высшая школа, 1987.-320с.
18. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие, 4.2 / А.П.Рябушко, В.В.Бархатов, В.В.Державец, И.Е.Юруть: Под общ. ред. А.П.Рябушко.- Минск: Вышэйшая школа, 1991.- 352с.
19. Методические указания к самостоятельной работе при выполнении типового расчета по теме «Дифференциальние уравнения» для студентов всех специальностей: Учебное издание /сост. А.А.Сыроватка, А.А.Дячук, Н.Б.Дубова, В.П.Литвинюк.-В. ВПИ,1988.-64с.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Вінницький державний технічний університет

Навчальне видання

Віталій Іванович Клочко, Анатолій Олександрович Сироватка

Звичайні диференціальні рівняння

Частина 1

Навчальний посібник

Редактор В.О. Дружиніна

Формат 29.7 х 42 ¼
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний
Зам. № 2001-0164
Тираж 72 прим.

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі ВДТУ
м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх
Тел. **(0432) 44-01-59**