О. К. Колесницький, О. М. Роїк, І. В. Бокоцей

ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ ОБ'ЄКТІВ І ПРОЦЕСІВ КОМП'ЮТЕРИЗАЦІЇ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

О. К. Колесницький, О. М. Роїк, І. В. Бокоцей

ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ ОБ'ЄКТІВ І ПРОЦЕСІВ КОМП'ЮТЕРИЗАЦІЇ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 004(075)
ББК 32.97я73
К60

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 4 від 25.11.2010 р.).

Рецензенти:
В. М. Лисогор, доктор технічних наук, професор
С. І. Перевозніков, доктор технічних наук, професор
А. М. Пєтух, доктор технічних наук, професор

Колесницький, О. К.
К60 Основи системного аналізу об`єктів і процесів комп`ютеризації : навчальний посібник / О. К. Колесницький, О. М. Роїк, І. В. Бокоцей. – Вінниця : ВНТУ, 2013. - 143 с.

В навчальному посібнику розглянуті фундаментальні основи теорії систем і системного аналізу, сутність і принципи системного підходу. Розглядається моделювання як метод системного аналізу, основні етапи та принципи математичного моделювання задач системного аналізу в умовах невизначеності, моделювання систем масового обслуговування, моделювання в ігрових ситуаціях та методи аналізу великих систем (планування експериментів, факторний аналіз). Посібник розроблений відповідно до плану кафедри та програми дисципліни "Основи системного аналізу об`єктів і процесів комп`ютеризації".

УДК 004(075)
ББК 32.97я73

ЗМІСТ

ВСТУП 5

1 ОСОБЛИВОСТІ ЗАДАЧ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ 6
1.1 Загальні поняття теорії систем і системного аналізу 6
1.2 Сутність і принципи системного підходу. Поняття системи 7
1.3 Формальне означення поняття система 11
1.4 Проблеми системного аналізу 12
1.5 Моделювання як метод системного аналізу 17
Запитання і завдання для самоконтролю 19

2 МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ 21
2.1 Змістовна постановка задачі моделювання 22
2.2 Загальна структура математичних моделей системного аналізу 23
2.3 Основні етапи математичного моделювання 25
2.4 Класифікація математичних моделей системного аналізу 32
2.5 Моделювання систем в умовах визначеності 34
2.6 Наявність декількох цілей – багатокритеріальні системи 36
2.7 Експертні оцінки, рангова кореляція і конкордація 37
Запитання і завдання для самоконтролю 40

3 МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ 42
3.1 Основні поняття математичної статистики 42
3.1.1 Випадкові події і величини та їх основні характеристики 42
3.1.2 Взаємозв'язки випадкових подій 47
3.1.3 Схеми і закони розподілу випадкових подій та величин 48
3.2 Методи непараметричної статистики 50
3.3 Кореляція випадкових величин 52
3.4 Лінійна регресія 54
3.5 Елементи теорії статистичних рішень 54
3.5.1 Критерій Байєса 58
3.5.2 Мінімаксний критерій 60
3.5.3 Критерій Неймана-Пірсона 62
3.5.4 Критерій послідовних рішень 63
3.5.5 Регуляризація задачі прийняття рішень 65
Запитання і завдання для самоконтролю 67

4 МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ 68
4.1 Введення у теорію систем масового обслуговування 68
4.2 Класифікація систем масового обслуговування 70
4.3 Основна задача теорії систем масового обслуговування 71
4.4 Математичні моделі потоків подій 71

4.4.1 Регулярні і випадкові потоки 71
4.4.2 Найпростіший потік Пуассона 73
4.4.3 Нестаціонарні потоки Пуассона 75
4.4.4 Потоки з обмеженим наслідком (потоки Пальма) 76
4.4.5 Потоки відновлення 77
4.5 Системи масового обслуговування з відмовами 78
4.5.1 Математичні моделі СМО з відмовами. Формули Ерланга 78
4.5.2 Системи з послідовними каналами однієї продуктивності 79
4.5.3 Системи з послідовними каналами різної продуктивності 80
4.5.4 Системи з нагромадженням заявок 81
4.5.5 Приклади оцінювання й аналізу ефективності СМО з відмовами 82
4.6 Оптимізація систем масового обслуговування з відмовами 84
4.7 Системи масового обслуговування з очікуванням 85
4.7.1 Розімкнені СМО з очікуванням 85
4.7.2 Замкнені СМО з очікуванням 87
Запитання і завдання для самоконтролю 88

5 МОДЕЛЮВАННЯ В ІГРОВИХ СИТУАЦІЯХ 92
5.1 Класифікація ігрових ситуацій 93
5.2 Моделювання ігрових ситуацій у чистих стратегіях 94
5.3 Моделювання ігрових ситуацій у змішаних стратегіях 98
5.4 Властивості математичних моделей ігрових ситуацій 100
5.5 Алгебраїчний метод моделювання ігрових ситуацій 104
5.6 Графічний метод розв'язання ігор $2 \times n$ і $m \times 2$ 107
5.7 Матричний метод моделювання ігрових ситуацій 109
5.8 Ітеративні методи моделювання ігрових ситуацій 111
5.9 Метод послідовного наближення до ціни гри 114
5.10 Принцип мінімакса 117
5.11 Моделювання в умовах протидії (моделі торгів) 119
Запитання і завдання для самоконтролю 124

6 МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВЕЛИКИХ СИСТЕМ 125
6.1 Планування експериментів 125
6.2 Методи аналізу великих систем, факторний аналіз 130
Запитання і завдання для самоконтролю 136

СЛОВНИК ТЕРМІНІВ 138

ЛІТЕРАТУРА 141

ВСТУП

Формування системного аналізу як самостійного наукового напрямку дослідження обумовлено загальною тенденцією розвитку людства. Ця тенденція виявляється в усе більшому і глибокому втручанні в організаційну діяльність людини, а також у процеси вироблення і прийняття ними рішень.

У 70-х роках XX століття в науковій літературі з'явилася маса термінів: «системна революція», «системний підхід», «загальна теорія систем», «системний аналіз», «системний аналіз і дослідження операцій» і под. Це говорило про об'єднання зусиль фахівців різних професій для розв’язання загальних задач, що пов'язані з вивченням, проектуванням і керуванням складними системами. Причому, починаючи з цього часу, поняття системності стало не тільки теоретичною категорією, але усвідомленою необхідністю в практичній діяльності. Саме цей «системний рух» [16], привів до інтеграції окремих наукових напрямків щодо створення науки, яка отримала назву «системний аналіз» і у наш час існує як самостійна дисципліна.

Предметом вивчення системного аналізу є система (*system*), незалежно від її природи, організації, способу існування і способу опису.

Метою розгляду системи є розв’язання задач системного аналізу, керування системами (прийняття рішень у результаті аналізу) і проектування.

При розгляді реальних систем приходиться стикатися із сукупністю проблем, вирішення яких може бути під силу тільки колективу професіоналів різного профілю. До таких проблем відносяться різні проблеми починаючи з виділення системи із середовища, її формального опису, взаємодії з зовнішнім середовищем, вибору або розроблення оптимальних алгоритмів керування, оптимального проектування, технічних засобів керування і под., закінчуючи підбором кадрів і організацією колективу для виконання цих робіт. Для вирішення вищевказаних проблем системний аналіз залучає широкий спектр різних наук і різні сфери практичної діяльності. При цьому він надає велике значення методичним аспектам будь-якого системного дослідження [1, 4, 11, 15, 16].

Даний посібник присвячено розв’язанню таких задач системного аналізу як питання методології системних досліджень і математичних методів цих досліджень.

1 ОСОБЛИВОСТІ ЗАДАЧ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

1.1 Загальні поняття теорії систем і системного аналізу

Терміни *теорія систем* і *системний аналіз* або *системний підхід*, незважаючи на тривалий період їх застосування, все ще не знайшли загальноприйнятого стандартного тлумачення. Причиною цього, швидше за все, є динамічність процесів людської діяльності та реальна можливість використовувати системний підхід практично для будь-яких задач.

Джерела системного аналізу з'явилися одночасно з початками військової справи, торгівлі, виробництва і под. Становлення дисципліни прийнято відносити до кінця XIX – початку XX століття, коли з'явилися роботи з теорії регулювання, теорії оптимізації рішень і були сформульовані принципи компромісу В. Парето [8]. Розвиток системного аналізу пов'язаний з дослідженням операцій і розвитком ЕОМ як засобу перероблення інформації. В наш час системний аналіз – це велика синтетична дисципліна, окремі розділи якої носять характер самостійних дисциплін (інформатика, математичне програмування, теорія прийняття рішень, імітаційне моделювання, календарне планування тощо).

На сьогодні існують три системних поняття: «***системний аналіз***», «***теорія систем***» і «***системний підхід***». Припускають, що термін «теорія систем» був введений Л. Берталанфі (початок 30-х років XX ст.), який досліджував загальні властивості, що притаманні будь-яким досить складним організаціям матерії незалежно від їх природи (фізичної, біологічної, соціальної тощо). Однак подібні дослідження велися і раніше. Найбільш фундаментальні роботи належать А. А. Богданову, який почав створювати теорію організації, названу ним тектологією. Теорією організації, що за своєю проблематикою близька до теорії систем, займалися також і І. І. Шмальгаузен і В. Н. Беклемишев, першому з яких належить робота «Основи дарвінізму» (1960 р.). При цьому слід відзначити, що описаний період розвитку носив спочатку описовий характер і не опирався на який-небудь математичний апарат. Виникнення математичної теорії систем пов'язано з іменами М. Мессаровича, Д. Мако, І. Такахари [4], яким належить робота «Теорія ієрархічних багаторівневих систем».

Основною відмінністю теорії систем, розглядаючи її разом з системним аналізом, є її методологічна спрямованість, у той час як системний аналіз має суто прикладну спрямованість. При цьому можна сказати, що ***теорія систем є теоретичною основою системного аналізу***, однак, слід відзначити, що не всі задачі системного аналізу ще мають адекватні підстави у теорії систем.

Терміном «***системний підхід***» прийнято називати *особливий спосіб дослідження явищ і їх взаємозв'язок з іншими явищами. Інструментом* ***системного підходу*** *є* ***системний аналіз****, що базується на* ***теорії систем***.

При цьому зауважимо, що навіть у означенні самого поняття *система* можна знайти багато варіантів, одні з яких базуються на глибоко філософських підходах, а інші використовують повсякденні обставини, що спонукають нас до розв'язання практичних задач системного характеру.

Виходячи з цього, будемо надалі трактувати термін *система* як *сукупність (множину) окремих об'єктів (елементів) з наявними постійними зв'язками між ними.* Якщо ми зустрічаємо хоча б тільки два таких об'єкти, наприклад, вчитель та учень у процесі навчання, продавець і покупець у торгівлі, телевізор і передавальна станція в телебаченні і т. д. – то це вже буде *системою.* Отже, у загальному випадку, під поняттям системи можна розуміти ***спосіб існування навколишнього світу.*** Однак слід відзначити, що важливішим буде зрозуміти перевагу погляду на цей світ з позицій ***системного підходу***, тобто зрозуміти можливість постановки і розв'язання принаймні двох задач:

- розширення і поглиблення уявлень про "механізми" взаємодії об'єктів у системі при цьому вивчити і, можливо, відкрити нові властивості системи;

- підвищити ефективність системи у тому плані її функціонування, який найбільше нас цікавить.

Хоча хронологія науки відносить момент зародження ***теорії систем і системного аналізу*** (ТССА) до середини XX сторіччя, проте, можна сказати, що вік ТССА складає рівно стільки, скільки існує «homo sapiens». Інша справа, що з розвитком науки ця галузь сформувалася в окремий розділ прикладної науки. Її вплив прослідковується практично де завгодно, наприклад, у таких галузях, як біологічна, медична, технічна і економічна тощо. При цьому елементи систем можуть бути найрізноманітнішими, від живих істот у біології до механізмів, комп'ютерів або каналів зв'язку у техніці. Однак незважаючи на це, задачі і принципи системного підходу залишаються незмінними і не залежать від природи об'єктів у системі.

Використовуючи класичне означення кібернетики як науки про загальні закони отримання, збереження, передавання і перетворення інформації (***кібернетика*** (*cybernetics*) в дослівному перекладі – *мистецтво керувати*), можна вважати ТССА фундаментальним розділом будь-якої кібернетики.

1.2 Сутність і принципи системного підходу. Поняття системи

Теорія систем і системного аналізу, у загальному випадку, як галузь науки, може бути поділена на дві, причому досить умовні частини:

- ***теоретичну***, що використовує такі галузі, як теорія ймовірностей, теорія інформації, теорія ігор, теорія графів, теорія розкладання, теорія рішень, топологія, факторний аналіз і ін.;

- ***прикладну***, що заснована на прикладній математичній статистиці, методах дослідження операцій, системотехніці і под.

Таким чином, ТССА широко використовує досягнення багатьох галузей науки і це "охоплення" безупинно розширюється.

Разом з тим, теорія систем має власне "ядро", тобто, свій особливий метод – *системний підхід* (*system approach*) до задач, що виникають. Сутність цього методу досить проста: *всі елементи* системи і *всі операції* у ній повинні розглядатися *лише* як одне ціле, і тільки у сукупності, тобто *у взаємозв'язку* один з одним.

Невдалий досвід багатьох спроб вирішити системні питання з ігноруванням цього принципу, тобто спроб використання «містечкового» підходу досить добре вивчений і показує, що локальні рішення, врахування недостатнього числа факторів, локальна оптимізація – на рівні окремих елементів майже завжди приводили до неефективного, у цілому, а іноді і небезпечного за наслідками, результату. Отже:

- *перший принцип* ТССА – необхідно розглядати сукупність елементів системи як *одне ціле* або, більш жорстко, – забороняється розглядати систему як просте об'єднання елементів;
- *другий принцип* - властивості системи є не просто сумою властивостей її елементів. Тобто, вона характеризується особливими властивостями, які можуть і не мати окремі її елементи;
- *третій принцип - максимум ефективності* системи. Важливим атрибутом системи є її *ефективність*. Теоретично доведено, що завжди існує *функція цінності* системи – у вигляді залежності її ефективності (це майже завжди економічний показник) від умов побудови і функціонування. Крім того, ця функція обмежена, а значить можна і потрібно шукати її максимум;
- *четвертий принцип* - забороняється розглядати систему окремо від навколишнього середовища, тобто як автономну, відособлену. Це означає обов'язковість *врахування зовнішніх зв'язків* або вимогу розглядати досліджувану систему як частину (підсистему) деякої більш загальної системи;
- з урахуванням четвертого принципу приходимо до *п'ятого принципу* ТССА – можливості (а іноді і необхідності) декомпозиції системи на частини, підсистеми. Якщо останні виявляються недостатньо простими для аналізу, то до них застосовується цей самий принцип. Однак в процесі такої декомпозиції не можна порушувати попередні принципи. Поки вони дотримуються, декомпозиція виправдана, тобто дозволена в тому сенсі, що гарантує можливість застосування практичних методів, прийомів, алгоритмів розв'язання задач системного аналізу.

Усе вищесказане дозволяє формалізувати означення терміну *система*. ***Системою*** є багаторівнева конструкція взаємодіючих елементів, що поєднуються у підсистеми декількох рівнів, з точки зору досягнення єдиної мети її функціонування (деякої цільової функції).

Класифікація систем

Складні і прості системи. Однією з характерних тенденцій розвитку суспільства в наш час є поява великих і надзвичайно складних систем (великі автоматизовані, технологічні, енергетичні, гідротехнічні, інформаційні й інші комплекси). З іншого боку, прагнення пізнати світ, у якому живе людство, як складну багатофункціональну систему, стало реальністю сьогоднішнього дня. Усе це привело до необхідності визначити ***поняття складної системи*** (*complete system*), розробити методичні принципи її дослідження, керування і проектування.

В наш час однозначного, чіткого означення складної системи немає. Відомі різні підходи і запропоновані різні формальні ознаки, що її характеризують. Так, учений Г. Н. Поворов пропонував відносити до складних системи, що характеризуються великим числом (10^4 -10^7 і більше) елементів. Недолік даного підходу полягає у тому, що дане означення складності є відносним, а не абсолютним.

Англійський кібернетик С. Бор пропонує до складних відносити системи, які описуються мовою теоретико-ймовірнісних методів (мозок, економіка і под.) [3].

Найчіткішим, на наш погляд, є таке означення складних систем [9].

Означення. Складною системою називається система, у моделі якої недостатньо інформації для ефективного керування цією системою.

Таким чином, ознакою простоти системи є достатність інформації для її керування. Якщо ж результат керування, отриманий за допомогою моделі, буде несподіваним, то таку систему відносять до складної.

Для занесення системи в розряд *проста,* необхідно отримати відсутню інформацію про неї і включити її в модель.

Від складних систем необхідно відрізняти ***великі системи***.

Означення. Система, для актуалізації моделі якої з метою керування бракує матеріальних ресурсів (машинного часу, ємності пам'яті, інших матеріальних засобів моделювання) називається великою (*big system*) [9].

До таких систем відносяться, наприклад, економічні, організаційно-управлінські, нейрофізіологічні, біологічні і под. системи.

Способом переведення великих систем у прості є створення нових потужніших засобів обчислювальної техніки.

Як видно з означень, поняття великої і складної системи є різними. Однак у літературі ці поняття визначені неоднозначно. Деякі автори взагалі не використовують цих понять, інші використовують їх як синоніми, а деякі вважають різницю між ними лише кількісною. Для того, щоб ще раз підкреслити різницю між поняттями "велика" і "складна" системи наведемо приклади з роботи [9], що наведені у табл. 1.1.

У наведеній таблиці знаком "+" відмічено класифікаційні ознаки систем. Пояснимо, наприклад, чому шифрозамок віднесено до класу великих і простих систем. Ця система – велика, оскільки у викрадача може не вистачити ресурсу часу для відкриття замка, а також і проста – оскільки відкриття зводиться до простого перебору шифрів. На рис. 1.1 ілюструються можливі поєднання ознак систем.

Таблиця 1.1 – Приклади різних систем

Система	Мала	Велика	Проста	Складна
Справний побутовий прилад для користувача	+		+	
Несправний побутовий прилад для майстра	+			+
Шифрозамок для викрадача		+	+	
Мозок, живий організм		+		+

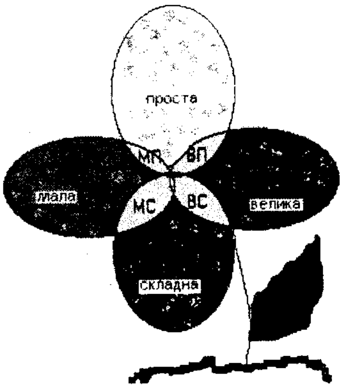

Рисунок 1.1 – Можливості поєднання ознак систем

Класифікація систем за їх основними властивостями. Наведена нижче класифікація має принципово важливе значення, оскільки вона використовується для побудови математичних моделей систем. Відповідно до неї системи можуть бути класифіковані за такими ознаками [7].

Динамічні системи (*dynamical system*) характеризуються тим, що їх вихідні сигнали на даний момент часу визначаються характером вхідних впливів у минулому (залежать від передісторії). Інші системи називають ***статичними.***

Прикладом динамічних систем можуть бути біологічні, економічні, соціальні системи і такі штучні системи як завод, підприємство, поточна лінія і т. д.

Детермінованою (*determined system*) називають систему, якщо її роботу можна абсолютно точно передбачити. Системи, стани яких залежать не тільки від контрольованих, але і від неконтрольованих впливів або якщо у них самих знаходиться джерело випадковості, називають ***стохастичними*** (*stochastic system*). До стохастичних систем можна віднести, наприклад, заводи, аеропорти, мережі і системи ЕОМ, магазини, підприємства побутового обслуговування і т. ін.

Розрізняють системи ***лінійні*** (*linear system*) і ***нелінійні*** *(nonlinear)*. Для лінійних систем реакція на суму двох чи більше різних впливів еквівалентна сумі реакцій на кожне збурення окремо, для нелінійних – це не виконується.

Якщо параметри систем змінюються у часі, то вони називаються ***нестаціонарними*** (*nonstationary system*). Протилежним поняттям є поняття ***стаціонарних*** систем.

Приклад нестаціонарних систем – це системи, де процеси, наприклад, старіння є на даному інтервалі часу істотними.

Якщо вхід і вихід системи вимірюється чи змінюється в часі дискретно, через крок *t*, то система називається ***дискретною*** (*discrete system*). Протилежним поняттям є поняття ***неперервної*** системи. Наприклад: ЕОМ, електронний годинник, електролічильник – дискретні системи; пісковий годинник, сонячний годинник, нагрівальні прилади і т. д. – неперервні системи.

На рис. 1.2 наведена класифікація систем за їх властивостями, де стрілки вказують можливий набір властивостей систем.

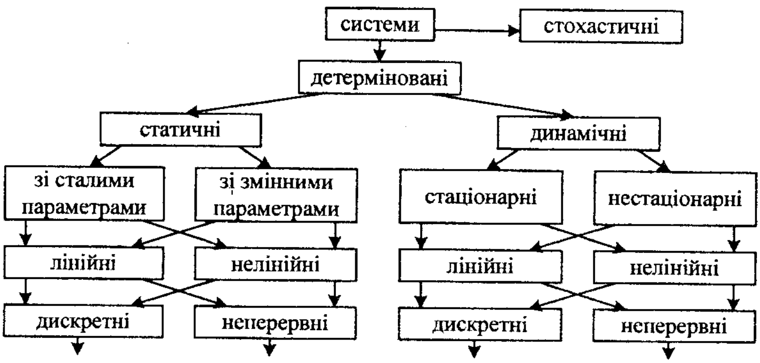

Рисунок 1.2 – Класифікація систем за їх властивостями

1.3 Формальне означення поняття система

Серед загальних процедур системного аналізу (СА) слід особливо виділити процедуру оцінювання системного (синергетичного) ефекту у вигляді його особливого системовизначального значення для класифікації сукупності об'єктів як системи. У цьому зв'язку необхідно розглянути означення поняття *система*. При цьому слід відзначити, що на сьогодні єдиного означення поняття системи не існує. Кожен системний аналітик вкладає в своє означення поняття системи тільки ті особливості досліджуваних систем, що його цікавлять. Однак можна виділити і деяку загальну для всіх систем частину, що буде властивою будь-яким означенням.

Системою прийнято називати такі сукупності об'єктів (елементів), що мають властивості, відмінні від властивостей їх складових елементів. В залежності від властивостей, що цікавлять системного аналітика, одна і та сама сукупність елементів може виявитися як системою, так і не системою.

Нові властивості у системи з'являються завдяки зв'язкам, у які вступають між собою елементи. Оскільки не всі зв'язки мають однакове значення для властивостей, що становлять інтерес для СА, спеціально виділяють частину зв'язків, що називають системоутворювальними.

Як елементи, так і їх зв'язки можуть мати різну природу (фізичну, хімічну, біологічну, соціальну, інформаційну). Тому системним аналізом займаються представники різних галузей знань, вирішуючи при цьому багато в чому подібні задачі.

1.4 Проблеми системного аналізу

Проблема узгодження цілей. У більшості випадків показником повноти досягнення мети (життя) системи практично завжди є деякий вартісний показник. Очевидно, що вибір показника – ***критерію ефективності системи***, є заключним етапом формулювання цілей і задач системи. Однак при цьому не можна не враховувати, що від нього будуть залежати як наші уявлення про властивості системи, так і результати самого системного аналізу. Припустимо, що стосовно деякої системи усі формальні запитання щодо її опису вже вирішені. Що ж далі?

А далі потрібно системою ***керувати*** – точніше вирішувати питання щодо алгоритму або тактики керування для досягнення найбільшої ефективності. Швидше за все, саме в цій області і лежить поле професійної діяльності під час розв'язання найрізноманітніших задач, що практично завжди зводяться до задач організаційно-управлінського характеру.

Начебто все дуже просто, наприклад, – є підприємство, виділено його підсистеми (відділи), визначено функції кожної підсистеми й кожного елемента в них, описано зв'язки всередині системи та відносно зовнішнього середовища, і нехай кожен елемент системи функціонує оптимально, тобто найефективніше робить свою справу.

Однак при цьому майже завжди виникають протиріччя, сутність яких розглянемо на прикладі, що вже став класичним.

Розглянемо діяльність деякої фірми, що виготовляє певні види продукції. Ця фірма, звичайно, прагне отримати максимальний прибуток від її продажу. Нехай вирішується просте запитання – скільки готової продукції слід зберігати на складі підприємства і скільки різновидів її повинно вироблятися? Розглянемо "особисті" інтереси різних відділів фірми і відразу ж знайдемо їх розбіжність.

Очевидно, що кожен з відділів зацікавлений у досягненні глобальної мети фірми – максимального прибутку (якщо це не так, то про системний підхід не може бути і мови). Однак при цьому!

Виробничий відділ зацікавлений у тривалому і безперебійному виробництві одного і того самого виду продукції. Тільки у цьому випадку будуть найменшими витрати на налагодження устаткування.

Відділ збуту, навпаки, буде відстоювати ідею виробництва максимального числа видів продукції і великих запасів на складах.

Фінансовий відділ, звичайно, буде наполягати на мінімумі складських запасів (те, що лежить на складі, не може приносити прибутку).

Навіть ***відділ кадрів*** має свою локальну цільову функцію, що полягає у забезпеченні постійного виготовлення продукції завжди (навіть у періоди ділового спаду), причому в одному і в тому самому асортименті. Це пояснюється тим, що у цьому випадку не буде проблеми плинності кадрів.

Звідси і випливає складність задачі керування такою ***великою системою*** з точки зору досягнення глобальної мети – отримання максимального прибутку. Очевидно, що при цьому, треба ставити і розв'язувати задачу ***узгодження цілей*** окремих підсистем і добре якщо їх показники ефективності будуть мати ту ж саму розмірність, що і критерій ефективності системи у цілому. Однак реально показники ефективності роботи різних підсистем характеризуються різною природою, і, навіть, можуть приймати нечислові значення.

Проблема оцінювання зв'язків у системі. Розглянемо питання про системні зв'язки, тобто між окремими елементами підсистем і підсистемами різних рівнів, а також і зв'язків системи із зовнішнім середовищем. Поміркувавши, можна уявити наявність деяких ***каналів***, за якими ці зв'язки здійснюються. Однак чим же вони "наповнені"? Швидше за все, наприклад, в економічних системах можна знайти і виділити тільки три типи наповнювачів:

- продукція;
- гроші;
- інформація.

Немає потреби пояснювати принципові розбіжності продукції і грошей. Що ж стосується інформації, то можна нагадати слова Н. Вінера на запитання – так що ж таке інформація? Це НЕ матерія і НЕ енергія! При цьому, виникає запитання про те, як же поєднати ці незіставні за розмірністю показники, тобто, як привести їх до «загального знаменника»? Адже без такого узгодження неможливо встановити єдиний показник ефективності системи у цілому.

Друга проблема оцінювання зв'язків у системі стане зрозумілою, якщо ми приймемо умовний поділ систем на природні і штучні. Ніхто не стане заперечувати, що у природі все взаємозалежне. Однак усі погодяться з тим, що "поведінку" природи (а тим більше людини) неможливо передбачити із

100% впевненістю. Таким чином, друга проблема оцінювання зв'язків полягає у тому, що кількість продукції, сума грошей і показники інформаційних потоків у каналах зв'язку мають стохастичну (*ймовірнісну*) природу, тобто їх значення на певний момент часу не можна передбачити абсолютно надійно.

Тому під час системного аналізу часто доводиться мати справу не з конкретними значеннями деяких величин, не із заздалегідь визначеними подіями, а з їх *оцінками* за минулими спостереженнями або за прогнозами на майбутнє. Звідси виникає необхідність застосування спеціальних, здебільшого прикладних, методів *математичної статистики*.

Якщо тепер згадати основне призначення системного аналізу, тобто отримати рекомендації щодо запитань з керування системою або принаймні з вдосконалення керування, то виникає питання – а чи завжди виправданий системний підхід? Адже зрозуміло, що для його реалізації будуть потрібні певні і можливо чималі витрати часу і засобів. Однак оскільки висновки системного аналізу і рекомендації, що отримуються на його основі, майже завжди не зовсім достовірні, то виходить, що ми завжди будемо ***ризикувати***? Це так і є. Без ризику помилки в реальному, оточуючому нас світі просто жити, а тим більше діяти, – практично неможливо.

Слід усвідомити, що навіть найточніше виконання рекомендацій науки не дає гарантії отримати саме те, що ми задумали, проектували і планували. Додамо лише, що можна ризикувати без спроб прорахувати можливі наслідки і можна ризикувати в умовах, коли використані всі наукові методи оцінювання цих наслідків. Це зовсім протилежні підходи, однак не можна вважати жоден з них «юридично законним» або таким, що витікає із законів природи, не можна вважати стиль керування системою на основі системного аналізу «правильним», «культурним» і под. Інша справа – ***не знати*** про можливість застосування системного підходу до цих питань – це ***неправильно і некультурно***.

З метою, хоча б частково, розглянути ще не підняті питання теорії систем і системного аналізу, розглянемо такий конкретний приклад.

Наприкінці 70-х років Мінвуз України прийняв рішення щодо глобального обліку інформації про поточну успішність студентів усіх вузів України. Справа була поставлена із справді радянським розмахом – кожні два тижні семестру усі студенти повинні були проходити атестацію з усіх дисциплін. Уся ця лавина інформації, звичайно ж недостовірної – у вигляді прогнозу майбутньої оцінки на іспиті, повинна була передаватись у Київ. Зараз справа не в тому, як вона використовувалася, наприкінці цієї епопеї виявилося що ніяк!

Адміністрація у вузах спробувала використовувати ситуацію щодо вдосконалення керування навчальним процесом, добре, що процес збирання інформації був обумовлений наказом міністерства.

На першому етапі системного підходу до задачі було вирішено питання про виділення підсистем і їх елементів. Як основні підсистеми розглядалися всього три різновиди:

- підсистема «*Студенти*»;
- підсистема «*Кафедри*»;
- підсистема «*Деканати*».

Було зрозуміло, що локальні цілі кожної з цих підсистем відрізнялися одна від одної (у першому випадку це навчання, у другому – викладання, у третьому – керування навчанням на рівні факультету).

Разом з тим, була і єдина мета функціонування вузів – підготовка фахівців з вищою освітою з окремих профілів. Був визначений і ступінь оцінювання ефективності системи у цілому, нехай навіть у такому примітивному вигляді як екзаменаційні оцінки знань. Була узята до уваги ***ієрархія*** підсистем з точки зору підпорядкування, спрямованості потоків знань та інформації про них у каналах зв'язку між ними. У зв'язку з цим були сформульовані дві задачі:

- як за результатами поточного контролю оцінити ефективність процесу навчання на даному інтервалі семестру (знайти «вузькі місця» процесу)?
- як оцінити ефективність керуючих впливів на систему навчання на кінцевому його етапі – після підведення підсумків сесії?

При цьому заздалегідь передбачалося, що «винуватцями» недостатньої ефективності навчання можуть виявитися елементи кожної з підсистем. І справді, низька успішність може бути обумовлена такими причинами:

- слабкою попередньою підготовкою студентів;
- малоефективними в даних умовах методами навчання;
- промахами в організації навчання.

Помітимо, що ці висновки поки що не мають ніякого відношення до системного аналізу. Тобто вони сформульовані на підставі ***розуміння*** особливостей процесу навчання. Тут, на цьому етапі системного підходу у будь-якій сфері, завжди необхідно звертатися до «технології» процесів, що відбуваються в системі. А це означає, що на першому етапі системного аналізу однаковою мірою повинні брати участь як фахівці в області ТССА, так і знавці процесів функціонування даної системи. Участь одного з них, а саме особи, що приймає рішення (ОПР), при цьому є ***обов'язковою***.

На наступному етапі у розглянутому прикладі було розроблено методи збирання, збереження і оброблення інформації. І тут, як у будь-якому випадку системного підходу до задач керування, довелося вирішувати проблему подання даних. Насамперед, довелося поставити і вирішити питання про оцінювання поточного контролю знань. Оскільки це не метри або літри, (шкали знань не існує), то що повинна означати оцінка поточного контролю?

Після обговорення цих питань серед фахівців, експертів з області навчання у вищій школі, було прийняте таке рішення – оцінка поточного контролю знань буде розглядатися як ***прогноз*** екзаменаційної оцінки. При цьому звернемо увагу на той факт, що така домовленість між ОПР і фахівцями ТССА була б необхідна і у тому випадку, коли мова б йшла не про знання, а про майбутні прибутки! Тут можливе розходження у достовірності прогнозу, однак, не завжди із стохастичним характером даних системного аналізу. Проте з цим доводиться миритися – така сутність явищ у реальності.

Однак і це ще не все про інформацію, що використовується під час системного аналізу. Далеко не завжди вимірювання "чогось" можна робити без відчутних наслідків. І нехай навіть збирання інформації не приносить прямого морального або матеріального збитку, що іноді цілком можливо хоча і не завжди очевидно. Головне в іншому – якщо ми хочемо отримати інформацію про елемент системи, то треба намагатись отримати її з найменшими, інформаційними втратами.

У розглянутому прикладі не використовувалися засоби, що позбавлені розуму і емоцій, тобто джерелами даних і "вимірювальниками" були люди! Насправді необхідність передбачити свої власні досягнення в умовах, коли вони не тільки від тебе залежать (у наведеному прикладі прогнозувати результат іспиту студента) можна лише трохи, що усе-таки змінює один з елементів, тобто викладач.

Нехай у нас є побудована модель системи з дотриманням усіх принципів системного підходу, розроблено і відпрацьовано алгоритми розрахунків, підготовлено варіанти впливів керування на систему (треба зрозуміти, що ці впливи не завжди полягають у зміні рівня деяких вхідних параметрів – це можуть бути варіанти структурних перебудов системи). Отже, нехай усе це є. І що ж далі? Потрібно керувати, і керувати з єдиною метою – підвищення ефективності функціонування системи (однокритеріальна задача) або з одночасним досягненням кількох цілей (багатокритеріальна задача).

Звичайно, тут ми порушуємо запитання: «*А що буде, якщо ...?*» і очікуємо на відповідь. Однак тут не слід очікувати дива, не можна сподіватися на однозначну відповідь. Якщо приміром, ми цікавимося запитанням: «До чого приведе збільшення закупівлі цементу на 20%?», то ми повинні не дивуватися, коли отримаємо відповідь: «Це приведе до збільшення рентабельності виробництва цегли на величину, що з ймовірністю 95%, ***не*** буде нижча 6% і ***не*** вища 14%». І це ще дуже змістовна відповідь, можуть бути і більш «розпливчасті» відповіді! Тут доречно востаннє звернутися до прикладу з аналізом системи навчання і відповісти на можливе запитання: «А як же були використані висновки системного аналізу навчання у вузах?». Відповідь дуже коротка – ***ніяк***.

Відкриємо ще одну (не останню) таємницю ТССА. Справа у тому, що долю розробок з керування великими системами повинна вирішувати тільки ОПР, і тільки ця (ці) особа вирішує питання подальшої долі висновків системного аналізу. Важливо відзначити, що це правило ніяк не пов'язане ні з «важливістю» конкретної галузі промисловості, торгівлі або освіти, ні з політичними обставинами, ні з державним устроєм. Усе набагато простіше – мудрість засновників ТССА проявилася, насамперед, у тому, що *неповнота вірогідності* цих висновків була ними заздалегідь *обговорена*. Тому системні аналітики не повинні претендувати на обов'язкове використання своїх розробок. При цьому факт відмови від них не є показником їх непридатності. З іншого боку, ОПР повинні також чітко розуміти, що розпливчастість висновків системного аналізу є неминучою, і вона може бути обумовлена не промахами аналізу, а самою природою або помилкою постановки задачі.

1.5 Моделювання як метод системного аналізу

Однією з проблем, з якою завжди стикаються під час системного аналізу, є ***проблема експерименту*** над системою. Це завжди пов'язано з матеріальними витратами і (або) значними втратами часу. Досвід усієї людської діяльності показує, що у таких ситуаціях треба експериментувати не над самим об'єктом, предметом або системою, а над їх ***моделями***. Під цим терміном треба розуміти необов'язково модель *фізичну*, тобто копію об'єкта (фізичне моделювання дуже рідко застосовується в системах, які хоч якось пов'язані з людьми), зокрема, у соціальних системах доводиться застосовувати *математичне моделювання.*

Взагалі ж можна відзначити, що математичне моделювання ми опановуємо ще на шкільній лаві. Так, наприклад, нехай нам потрібно знайти площу прямокутника зі сторонами 2 і 8 метрів. Значення розміру сторін приблизні (інших вимірів відстаней не буває). Як розв'язати цю задачу? Звичайно ж не шляхом рисування прямокутника (навіть у зменшеному масштабі) і наступній розбивці його на квадратики з остаточним підрахунком їх числа. Безумовно, ми знаємо формулу $S=BH$ і ясно, що ми скористаємося нею, тобто, застосуємо ***математичну модель*** процесу визначення площі.

Повертаючись до розглянутого вище прикладу аналізу процесу навчання, можна помітити, що там власне немає що обчислювати за формулами – а де ж їх узяти? Тобто не існує методів розрахунку у такій сфері як «приймання-передавання» знань, і сумнівно щоб ці методи коли-небудь, з'явилися. Так що ж? Якщо немає математичних моделей – не вигадувати ж їх самому? Відповідь на це запитання дуже проста – ***усім*** це вміти і робити необов'язково, а от тому хто взявся до системного аналізу, доводиться це вміти і робити дуже часто. Іноді тут можлива підказка природи та знання технології системи. У ряді випадків тут може допомогти експеримент над реальною системою або її елементами (***методи планування експериментів***) і, нарешті, іноді доводиться звертатися до методу «чорного ящика», припускаючи деякий статистичний зв'язок між його входом і виходом. Таким «ящиком», наприклад, у вищенаведеному прикладі вважається не тільки студент (з ймовірністю такою-то отримавший знання), але й усі інші елементи системи, тобто, викладачі і особи, що організують навчання.

Зазвичай, можливі і ситуації, коли всі процеси у деякій системі описуються відомими законами і коли можна сподіватися, що запис рівнянь цих законів дасть нам математичну модель хоча б окремих елементів або підсистем. Однак і у цих випадках виникають проблеми не тільки з точки зору складності рівнянь, а і у неможливості їх аналітичного розв'язання. Справа у тому, що в природі важко знайти приклади "чистого" прояву її окремих законів – найчастіше додаткові впливаючі фактори "порушують" теоретичну картину.

Відзначимо ще одну важливу обставину, що доводиться враховувати під час математичного моделювання. Прагнення до простих, елементарних моделей і викликане цим ігнорування ряду факторів може зробити модель неадекватною реальному об'єкту. Знову таки, без активної взаємодії з технологами, фахівцями в області законів функціонування систем даного типу, під час системного аналізу не обійтися. Наприклад, в економічних системах доводиться використовувати здебільшого математичне моделювання, але у специфічному вигляді – з використанням не тільки кількісних, але й і якісних, а також і логічних показників.

Завершуючи питання про моделювання, доцільно відзначити і питання про ***відповідність*** (***адекватність***) моделей ***реальності***. Ця відповідність може бути очевидною або експериментально перевіреною для окремих елементів системи. Однак при цьому вже для підсистем, а тим більше для систем у цілому, існує можливість методичної помилки, що пов'язана з об'єктивною неможливістю оцінити адекватність моделі великої системи на логічному рівні. Іншими словами – у реальних системах цілком можливе *логічне* обґрунтування моделей елементів. Ці моделі ми саме і намагаємося будувати ***мінімально-достатніми***, тобто простими настільки, наскільки це можливо без втрати сутності процесів. Однак логічно осмислити взаємодію десятків, сотень а то і більше елементів людина вже не в змозі. І саме тут може "спрацювати" відомий у математиці висновок із знаменитої теореми Геделя – у складній системі, цілком ізольованій від зовнішнього світу, можуть існувати істини (положення, висновки цілком "*припустимі*" з позицій самої системи), однак такі, що не мають ніякого сенсу ***поза*** цією системою. Тобто можна побудувати логічно бездоганну модель реальної системи з використанням моделей елементів і здійснювати аналіз такої моделі. Висновки цього аналізу будуть правильними для кожного елемента. Однак система – це не проста сума елементів, і її властивості не просто дорівнюють сумі властивостей її елементів. Звідси випливає такий висновок – без урахування зовнішнього середовища висновки про поведінку системи, що отримані на основі моделювання, можуть бути цілком обґрунтованими з точки зору погляду зсередини системи. Однак не виключена і ситуація, коли ці висновки не мають ніякого відношення до системи з точки зору погляду на неї із зовні.

Для пояснення цього повернемося до розглянутого вище прикладу аналізу процесу навчання. У ньому майже всі елементи були побудовані на цілком виправданих логічних *постулатах* (припущеннях) типу: якщо студент Іванов одержав оцінку «знає» з деякого предмета, і відвідав усі заняття з цього предмета, і керування його навчанням було на рівні «так», то *ймовірність* отримання ним оцінки «знає» буде вища, ніж за відсутності хоча б однієї з цих умов. Однак, як на підставі системного аналізу такої моделі відповісти на найпростіше запитання – який внесок (хоча б по шкалі «більше-менше») *кожної* з підсистем в отриманні фактичних результатів сесії? А якщо є *числові* описи цих внесків, то наскільки вони будуть точними? Адже керуючі впливи на систему навчання часто можна здійснювати тільки через семестр.

Тут приходить на допомогу такий метод моделювання як *метод статистичних іспитів* (Монте Карло). Суть цього методу проста – імітується досить довге «життя» моделі (кілька сотень семестрів для нашого прикладу). При цьому моделюються і реєструються *зовнішні (вхідні)* впливи на систему, які випадково змінюються. Для кожної із ситуації за рівняннями моделі прораховуються *вихідні (системні)* показники. Потім виконується зворотний розрахунок і за заданими вихідними показниками виконується розрахунок вхідних. Звичайно, ніяких збігів ми не повинні очікувати – кожен елемент системи при вході «так» зовсім не обов'язково буде «так» на виході. Однак існуючі методи математичної статистики дозволяють відповісти на запитання – чи можна, і з якою довірою, використовувати дані моделювання. Якщо ці показники довіри для нас достатні, ми можемо використовувати модель для відповіді на поставлені вище запитання.

Підсумовуючи вищеописане, залежно від характеристик змінних та об'єму апріорної інформації про досліджувані системи процеси моделювання задач системного аналізу (систем) можна поділити (досить грубо) на процеси моделювання в умовах визначеності та в умовах невизначеності.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що є предметом вивчення системного аналізу?
2. Дайте означення поняття система.
3. Дайте означення поняття кібернетика.
4. У чому суть системного підходу? Пояснити єдність і розходження понять «системний підхід», «системний аналіз» і «теорія систем».
5. Перерахуйте п'ять принципів ТССА.
6. Як класифікуються системи?
7. Дайте означення понять велика та мала система, а також проста і складна система.

8. Що таке динамічні та статичні системи?
9. Що таке детерміновані та стохастичні системи?
10. Що таке лінійні та нелінійні системи?
11. Що таке стаціонарні та нестаціонарні системи?
12. Що таке дискретні та неперервні системи?
13. Що таке критерій ефективності системи?
14. У чому полягає проблема узгодження цілей підсистем?
15. У чому полягає проблема оцінювання зв'язків у системі?
16. У чому суть системного ефекту? Навести приклади джерел системного ефекту для різних сукупностей об'єктів.
17. Пояснити відмінності систем і простих сукупностей об'єктів.
18. Проаналізувати виконання принципів системного підходу на прикладі деякої системи керування (деканат, ректорат, підрозділ, на якому проходила одна з практик).

2 МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Людина як у побутовій, так і службовій областях своєї діяльності постійно стикається з різними задачами аналізу, за результатами якого приймає рішення з точки зору керування системами. Прийняті рішення відрізняються як за ступенем відповідальності, так і за ступенем значимості наслідків. Різними аспектами проблем, що пов'язані з прийняттям управлінських рішень, з «оптимальною» поведінкою людей, з перетинанням інтересів кількох сторін, займаються багато наук, наприклад, таких, як дослідження операцій, дискретна математика, економіка, соціологія, право та ін.

На відміну від інших, системний аналіз аналізує ці проблеми за допомогою математичного апарату. Це означає, що хоча б деякі дані, що фігурують у формулюванні задачі, повинні мати кількісні значення. Якісні дані (умови) досліджуваної проблеми враховуються додатково і є своєрідним фоном для використання математичних моделей.

Як відомо, у загальному випадку прийняття рішень потребує наявності:

- особи (осіб), що приймають рішення (ОПР);
- мети прийняття рішення;
- варіантів вибору рішення (множина допустимих рішень).

При цьому, слід мати на увазі і те, що рішення приймаються з урахуванням певної обстановки, умов, що її супроводжує, і передумов.

Все це ті головні фактори, що характерні для будь-якої задачі прийняття рішень, і які обов'язково повинні бути відображені у математичній моделі.

Мета ОПР – з урахуванням існуючих умов прийняти те рішення з множини допустимих у даній ситуації рішень, що якнайкраще сприяє досягненню поставленої мети (оптимальне рішення).

Невід'ємною частиною методології системного аналізу є всебічний якісний і кількісний аналіз проблеми, що передує її математичному моделюванню. Тому говорять про системний аналіз проблеми, що припускає виконання таких компонентів:

- доматематичний (змістовний) аналіз проблеми;
- математичний аналіз проблеми;
- застосування результатів дослідження на практиці.

Проведення такого аналізу для кожної конкретної задачі повинно здійснюватися операційною групою, що включає фахівців даної області (постановників проблем, замовників), математиків, економістів, юристів, соціологів та ін. При цьому як не існує універсальних методів побудови математичних моделей, так і не існує універсальних методик і керівних принципів системного аналізу. Кожне окреме дослідження має свої особливості. Тому можна рекомендувати лише деякі, досить загальні принципи та етапи, що включають:

1) змістовну постановку задачі;

2) формулювання проблеми та визначення мети системного аналізу;

3) збирання даних (статистичних, експертних і ін.);

4) побудову моделі досліджуваної системи;

5) пошук і розроблення методу розв'язування задачі за допомогою моделі;

6) перевірку математичної моделі та оцінювання рішення;

7) реалізацію результатів на практиці.

Етапи 1-4 відносяться до доматематичної частини аналізу і виконуються фахівцями тієї області, до якої належить досліджувані системи. Дуже важливо, щоб перед математичним моделюванням об'єкт дослідження (предметна область) був досконально вивчений самими постановниками (замовниками). Зокрема, дослідникам повинні бути вичерпно надані усі необхідні документальні і статистичні дані. Збирання статистичних даних або іншої інформації – не справа математиків, їх справа полягає в організації збереження, аналізу і оброблення даних, наданих їм замовниками у зручній формі.

Етапи 5 і 6 відносяться до математичної частини аналізу. Це найскладніші і ключові етапи системного аналізу.

Етап 7 – є заключною частиною системного аналізу і здійснюється спільними зусиллями замовників і аналітиків-розробників моделі.

Поговоримо про кожен з цих етапів. При цьому будемо виділяти найскладніші у розумінні етапи і намагатися засвоїти методи їх здійснення на конкретних прикладах. Однак вже зараз відзначимо, що у кожному конкретному випадку етапи системного аналізу мають різну "питому вагу" у загальному обсязі робіт з точки зору часових, витратних і інтелектуальних показників. Дуже часто важко провести чіткі межі між ними і вказати, де закінчується даний етап і починається наступний.

2.1 Змістовна постановка задачі моделювання

Вище вже вказувалось, що у постановці задачі системного аналізу обов'язкова участь двох сторін: замовника (ОПР) і виконавця системного проекту. При цьому участь замовника не обмежується фінансуванням роботи – він повинен (для користі справи) зробити аналіз системи, якою він керує, сформулювати цілі та обговорити можливі варіанти дій відповідно до прийнятих рішень. Так, наприклад, у згаданому вище прикладі системи керування навчальним процесом, однією з причин її невдалого завершення було те, що одна з підсистем керівництва практично не мала свободи дій щодо підсистеми тих, кого вони навчали.

Очевидно, що на цьому етапі повинні бути встановлені і зафіксовані поняття ефективності діяльності системи. При цьому відповідно до принципів системного підходу необхідно враховувати максимальне число зв'язків як між елементами системи, так і щодо зовнішнього середовища. Зрозуміло, що виконавець-розробник не завжди може, і не повинен мати професійні знання щодо тих процесів, які мають місце у системі, або принаймні є головними. З іншого боку, обов'язковою є наявність таких знань у замовника, тобто, у керівника або адміністратора системи. Замовник повинен знати ***що*** треба зробити, а виконавець, тобто фахівець у галузі системного аналізу, повинен знати ***як*** це зробити.

Однак слід відзначити, що їм краще було б навчитися і тому і іншому. Наприклад, якщо ви будете у ролі адміністратора, то до професійних знань доречні знання з області системного аналізу – розумна постановка задачі, з урахуванням технології прийняття рішень на сучасному рівні буде гарантією успіху.

Якщо ж ви будете працювати у іншій категорії, тобто як розробники, то вам не обійтися без «технологічних» знань. Робота щодо системного аналізу у будь-яких системах навряд чи виявиться ефективною без спеціальних знань з області економічної ефективності.

2.2 Загальна структура математичних моделей системного аналізу

Під час визначення елементів математичної моделі будемо виходити з того, що у системному аналізі, у загальному випадку, вивчаються задачі прийняття рішень і, як окремий випадок, задачі оптимізації.

Однією з основних вимог до побудови математичних моделей досліджуваних систем є врахування їх основних факторів. При цьому для виявлення основних елементів моделі слід відповісти на такі запитання:

- Хто приймає рішення ?
- Яка мета прийняття рішення для кожного ОПР ?
- У чому полягає прийняття рішення ?
- Які є можливості ОПР (з точки зору прийняття можливих рішень)?
- За яких умов відбувається прийняття рішення?

Формалізуючи (описуючи математично) відповіді на ці запитання ми отримаємо необхідну модель системного аналізу.

Для з'ясування загальної структури математичних моделей системного аналізу введемо деякі загальні позначення.

Позначимо через $N = \{1,2,...,n\}$ множину сторін, що беруть участь у даній конкретній задачі системного аналізу, де кожен елемент множини N називається особою, що приймає рішення (ОПР), наприклад, окрема особистість, фірма, плановий орган великого концерну, уряду та ін. Кожен елемент $i \in N$ характеризується своїми можливостями. Позначимо через X_i множину усіх його допустимих рішень (стратегій, альтернатив). Припустимо, що такі множини математично описані: $X_1, X_2,..., X_n$.

Після цього процес прийняття рішення всіма ОПР зводиться до такого формального акту: кожна з ОПР вибирає конкретний елемент $x_1 \in X_1$,

$x_2 \in X_2, \ldots,\ x_n \in X_n$ зі своєї припустимої множини рішень.

У результаті отримується набір $x = (x_1,\ldots,x_n)$ обраних рішень, що називається ситуацією.

Формалізація цілей прийняття рішення здійснюється за такою схемою. Тим або іншим способом будуються аналітичні закони (функції) $f_1,\ldots,f_n$, що ставлять відповідно до кожної ситуації x набір з n чисел $f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_n(x)$.

Функція $f_i(x) = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ називається критерієм якості i-ої ОПР. Число $f_i(x)$ є кількісною оцінкою ситуації x для i-ої ОПР з точки зору переслідуваної нею мети. Тому в моделі мета i-ої особи формалізується таким чином: вибрати таке рішення $x_i \in X_i$, щоб досягти найбільшого значення функції f_i. Однак досягнення цієї мети цілком від нього не залежить з огляду наявності інших сторін, що впливають на загальну ситуацію x з метою досягнення своїх власних цілей. Цей факт перетинання інтересів (конфліктність) пояснюється тим, що функція f_i крім x_i залежить і від інших змінних x_j $(i \neq j)$. Тому в моделях прийняття рішення з багатьма учасниками застосовуються складніші принципи оптимальної поведінки, ніж пряма максимізація або мінімізація критерію якості.

Нарешті, нехай деяким чином (математично) описані всі ті умови, за яких відбувається прийняття рішення. Сукупність усіх цих умов, що виступають у моделі у вигляді певних рівнянь зв'язку, позначимо одним символом Σ. Математично система Σ містить опис зв'язків між керованими і некерованими змінними, опис впливу випадкових факторів, облік динамічних характеристик та ін.

Таким чином, загальна структура задачі прийняття рішення з багатьма учасниками виглядає так:

$$<N;\, X_1,\ldots,X_n;\, f_1,\ldots,f_n;\, \Sigma>. \qquad (2.1)$$

Мета математичного моделювання – для поставленої фахівцями конкретної задачі – отримати конкретний опис елементів наведеної структури. Слід відзначити, що математичне моделювання – це дуже складна задача, що потребує від розробників значних трудовитрат, навичок, знань і може бути виконана лише за наявності необхідного обсягу попередньої змістовної інформації.

Підсумовуючи, можна сказати, що основними елементами математичної моделі будь-якої задачі системного аналізу з прийняттям рішень є.

1. Множина ОПР (N).

2. Критерії якості ($f_1,\ldots,fn$).

2. Множина допустимих рішень ($X_1,\ldots,X_n$).

4. Обмеження на параметри задачі, передумови рівняння зв'язку (Σ).

Конкретизуючи ці елементи, їх характеристики і властивості, ми отримуємо той чи інший конкретний клас задач (клас моделей) прийняття рішення. Так, якщо множина N складається тільки з одного елемента ($n = 1$), а всі умови і передумови вихідної реальної задачі можна описати у вигляді множини допустимих рішень цієї єдиної ОПР, то з вищенаведеного виразу отримаємо структуру задач системного аналізу, зокрема задач оптимізації (екстремальних задач) $< X, f >$. У наведеній схемі ОПР може розглядатися як орган планування, множина допустимих рішень X задається за допомогою обмежень на можливості ОПР, а критерій якості f називається цільовою функцією. При цьому задача аналізу (оптимізації) ставиться таким чином:

$$\max_{x \in X} f(x); \qquad (f(x) \underset{x \in X}{\rightarrow} max);$$

$$\min_{x \in X} f(x); \qquad (f(x) \underset{x \in X}{\rightarrow} min). \tag{2.2}$$

Це різні форми запису однієї і тієї ж задачі. Їх оптимальними розв'язками називаються пари x^*, $f(x^*)$. У загальному ж випадку, модель досліджуваної системи можна описати у самому лаконічному вигляді, тобто, у вигляді залежності

$$E = f(X, Y), \tag{2.3}$$

де E – деякий кількісний показник (*критерій*) ефективності з точки зору досягнення деякої мети її функціонування системи;

X – керовані змінні системи, на які ми маємо вплив;

Y – некеровані, тобто зовнішні щодо системи впливи.

2.3 Основні етапи математичного моделювання

Для побудови математичних моделей конкретних задач системного аналізу можна рекомендувати таку послідовність робіт.

1. Вивчення умови задачі (предметної області).
2. Визначення найважливіших факторів.
2. Виділення відомих і невідомих параметрів.
4. Виявлення керованих і некерованих параметрів.
5. Доповнення умови задачі відсутніми відомостями.
6. Введення системи позначень.
7. Побудова математичної моделі задачі (математичний опис найважливіших факторів, співвідношень і зв'язків між параметрами).

Розглянемо наведені етапи моделювання на конкретних прикладах.

Приклад 2.1. (*Планування добового випуску продукції*). Процес виготовлення виробів двох видів полягає у послідовному обробленні кожного з них на трьох верстатах. Нам відомі: час експлуатації кожного верстата за добу, час оброблення одиниці кожного виробу на кожному верстаті, вартість реалізації одиниці кожного виробу. Потрібно скласти план добового випуску виробів таким чином, щоб дохід від їх продажу був максимальним.

Під час аналізу найважливіших факторів будемо виходити тільки з умови поставленої задачі, відповідно до яких:

- ОПР – орган планування фірми;
- мета – досягнення максимуму прибутку від продажу випущених за добу виробів двох видів;
- прийняття рішення для ОПР полягає у визначенні добових обсягів випуску кожного з двох видів виробів;
- можливості ОПР обмежені часовими ресурсами експлуатації верстатів трьох видів;
- про інші обмеження або умови у задачі нічого не говориться.

Після виявлення найважливіших факторів слід аналізувати всі параметри задачі: значення яких параметрів відомо (задано); які параметри є невідомими (шуканими) величинами; якими з параметрів ми можемо керувати (керовані змінні), а якими не можемо (некеровані параметри).

У наведеному прикладі відомими є такі параметри:

- добова норма b_1 експлуатації верстата 1;
- добова норма b_2 експлуатації верстата 2;
- добова норма b_3 експлуатації верстата 3;
- час a_{ij} обробки одиниці виробу виду i на верстаті типу j;
- вартість c_1 (продажу) одиниці виробу виду 1;
- вартість c_2 (продажу) одиниці виробу виду 2;

Усі ці параметри є некерованими, оскільки вони задані (їх значення можна знайти в довідниках або нормативах, визначити з минулого досвіду). Шуканими ж є такі величини:

- обсяг добового випуску виробу виду 1;
- обсяг добового випуски виробу виду 2.

Ці два параметри можна вважати керованими, оскільки фірма сама визначає їх величину, виходячи з реальних умов.

Далі для складання математичної моделі задачі потрібно ввести систему позначень невідомих параметрів задачі. Для нашого прикладу зробимо такі позначення:

x_1 – обсяг добового випуску одиниць виробу виду 1;

x_2 – обсяг добового випуску одиниць виробу виду 2.

Тоді прибуток від продажу x_1 і x_2 буде визначатися як $c_1 x_1 + c_2 x_2$, а час, що необхідний для оброблення x_1, x_2 одиниць виробів на верстаті j – як a_{ij} $x_1 + a_{2j} x_1$, (j = 1, 2, 3).

Тепер поставлену задачу можна сформулювати математично:

$$
\begin{gathered}
c_1 x_1 + c_2 x_2 \to max,\\
a_{11} x_1 + a_{21} x_2 \le b_1,\\
a_{12} x_1 + a_{22} x_2 \le b_1,\\
a_{13} x_1 + a_{23} x_2 \le b_1,\\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Умови невід'ємності змінних випливають з того, що величини x_1 і x_2 – це доповнення моделі відсутньою, однак, очевидною інформацією.

Наведений запис і є задачею математичного програмування з цільовою функцією $c_1 x_1 + c_2 x_2$ і множиною допустимих рішень X, що описується п'ятьма нерівностями (на площині це багатокутник, що утворений перетинанням п'яти півплощин).

У наведених нижче прикладах побудови моделей простежте етапи математичного моделювання, які ми виконаємо без коментарів (див. з цього приводу *Приклад 2.1*).

Приклад 2.2. (*Розміщення замовлень*). Фірма отримала замовлення на кілька тисяч нових виробів, що складаються з окремих блоків. Керівництво фірми прийняло рішення розмістити замовлення на виготовлення n блоків і вибрало n фірм-постачальників. Кожне замовлення настільки велике, що фірма-постачальник не може виконати більше одного замовлення. Кожному постачальнику запропоновано визначити вартість виконання замовлення, тобто ціну, за якою він готовий поставити фірмі різні блоки. Фірма повинна укласти n контрактів на постачання їй n видів блоків, мінімізувавши при цьому свої загальні витрати на придбання комплектуючих вузлів зі сторони.

Позначимо: i – номер (назва) блоку, $i = 1,....n$; j – номер (назва) фірми-постачальника, $j = 1,...,n$; c_{ij} – вартість виконання i-го блока j-ої фірми (задане число). Крім того, введемо для кожного i і j число

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо замовлення } i \text{ виконується фірмою } j \\ 0, \text{ у протилежному випадку} \end{cases}. \qquad (2.5)$$

Цільова функція, що має зміст загальних витрат на покупку комплектуючих блоків, запишеться так;

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + ... + c_{n1}x_{n1} + c_{n2}x_{n2} + ... + c_{nn}x_{nn} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ . \qquad (2.6)$$

Обмеження задачі (на змінні x_{ij}) мають такий зміст:

- кожен i-й блок повинен бути виконаний;
- кожен j-й постачальник повинен виконати один який-небудь блок.

Математично ці умови запишуться так:

$$x_{i1}+x_{i2} + ... +x_{in} = 1,\ \ x_{ij} + x_{2j} + ... + x_{nj} = 1... \qquad (2.7)$$

Таким чином, приходимо до такої задачі оптимізації (моделі):

$$min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\ ; \qquad (2.8)$$

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,\dots,n,\ \ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,\dots,n,\ x_{ij} = 0$ або 1 для всіх i, j.

Приклад 2.3. (*Вибір портфеля цінних паперів*). Фахівцю з фінансового аналізу, що працює в банку (або в страховій компанії) потрібно визначити найкращий набір акцій, облігацій та інших цінних паперів на виділену суму з метою мінімізації ризику, пов'язаного з придбанням набору цінних паперів. Прибуток до кінця планового періоду на кожен долар, вкладений у папір j-го виду, характеризується двома показниками: a_j – фактичний прибуток (випадкове число), α_j – очікуваний прибуток. Потрібно, щоб очікуваний прибуток на долар інвестицій був для всього набору цінних паперів не нижчий заданої величини b.

Для визначення моделі приймемо всі фонди, що виділені для придбання цінних паперів, рівними одиниці і позначимо через x_j – частку від усіх фондів, що виділяються для придбання цінних паперів виду j. Ризик враховується за допомогою коваріації $\sigma_{ij} = M\ (a_i, - \alpha_i)\ (a_j - \alpha_j)$ прибутку для цінних паперів виду i і виду j (термін з теорії ймовірностей). Математична модель, при цьому, запишеться як

$$min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j \qquad (2.9)$$

за обмежень: $\sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_j \geq b$; $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$; $x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$

Тут n – число різновидів цінних паперів. Цільова функція має сенс дисперсії фактичного прибутку (розсіювання фактичного прибутку від очікуваного), перше обмеження є умова на очікуваний прибуток, а останнє – не перевищення фондів, виділених на покупку цінних паперів.

Приклад 2.4. (*Задача про рекламу*). Фірма планує проведення радіорекламної компанії зі збуту автомобілів в одному з регіонів, де розташовано s радіостанцій, протягом двох тижнів. Фірма оцінила попередньо, що якщо радіостанції j виділити y_j доларів, то чистий прибуток від збільшення збуту дорівнює $R_j(y_j)$ (R_j – функція реалізації прибутку від обсягу фінансування реклами).

На рекламу виділена загальна сума, що дорівнює N доларам. Число рекламних оголошень на день не повинно перевищувати M. Якщо фірма виділила j-ій радіостанції y_j доларів, то число рекламних оголошень буде $K_j(y_j)$ (K_j – функція, яка кожній виділеній сумі ставить у відповідність кількість рекламних оголошень на день, і вважається відомою). Як потрібно фінансувати s радіостанцій, щоб отримати сумарний максимальний прибуток від реакції збуту на рекламу? Очевидно, що математична модель буде мати вигляд:

$$max \sum_{j=1}^{s} R_j(y_j) \qquad (2.10)$$

за обмежень: $\sum_{j=1}^{s} y_j \leq N$, $\sum_{j=1}^{s} K_j(y_j) \leq M$, $y_j \geq 0, j = 1,\ldots,s$.

Приклад 2.5. (*Задача керування виробництвом*). Фірма повинна розробити календарну програму випуску деякого виду виробів на плановий період, що складається з T відрізків (тижнів, місяців, кварталів, років). Передбачається, що для кожного з цих відрізків є точний прогноз попиту на продукцію, що випускається. Час виготовлення партії виробів настільки малий, що ним можна знехтувати. Для різних відрізків попит неоднаковий, крім того, на економічні показники виробництва впливають обсяги виготовлених партій. Збереження запасів, що виникають при цьому, (перевищення випуску над попитом на деяких відрізках) пов'язано з певними витратами. Потрібно розробити таку програму, за якою загальна сума витрат на виробництво і вартість запасів буде мінімальною за умови повного задоволення попиту на продукцію.

Позначимо через:

x_t – випуск продукції протягом деякого відрізка t;

y_t – рівень запасів на кінець відрізка t;

D_t – попит на продукцію для відрізка t;

Витрати на відрізку t (позначимо їх через C_t) залежать від випуску x_t і рівня запасів y_t, тобто є функцією від цих невідомих величин: $c_t = c_t\,(x_t, y_t)$.

Вимога задоволення попиту в межах кожного часового відрізка означає, що рівень запасів на кінець відрізка t (тобто y_t) повинен дорівнювати сумі – рівня запасів на початок відрізка t (тобто y_{t-1}) і випуску продукції на відрізку t (тобто x_t) мінус попит на відрізку t (тобто D_t).

Звідси отримуємо таку модель

$$min\sum_{t=1}^{T} C_t\,(x_t y_t) \qquad (2.11)$$

за обмежень: $y_{t-1} + x_t - y_t = D_t$, $t = 1,2,\ldots T$; $y_T = 0$, $x_t, y_t \geq 0$ для всіх t.

Тут y_0 – заданий рівень запасів на початок планового періоду, а y_T – рівень запасу на кінець періоду.

Приклад 2.6. (*Оптимізація схеми обслуговування*). Система обслуговування складається з n типів різних приладів (наприклад, каси в магазинах, телефонні лінії, автозаправні колонки та ін.). Кожен прилад у будь-який момент часу обслуговує не більше однієї заявки (наприклад, покупця, телефонну розмову, автомобіль та ін.). Відома кількість приладів j-го типу і число заявок i-го типу, що прибули в систему на момент часу t. Відома також ефективність j-го приладу під час обслуговування заявки i-го виду. Потрібно розподілити вільні прилади за заявками таким чином, щоб сумарна ефективність була найбільшою.

Для побудови моделі спочатку введемо позначення вільних величин:

N_j – кількість приладів j-го типу;

d_i^t – число заявок i-го типу на момент часу t;

μ_{ij} – ефективність j-го приладу при обслуговуванні заявки i-го виду.

Позначимо шукану величину через x_{ij} – число приладів j-го виду, відведених для обслуговування заявок i-го типу. Цих даних досить для складання математичної моделі вигляду

$$max\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}x_{ij} \qquad (2.12)$$

за обмежень: $\sum_{i=1}^{m}x_{ij} \le N, j = 1,...,n;$ $\sum_{i=1}^{n}x_{ij} \le d_i^{\,t}, i = 1,...,m;$ x_{ij} - цілі невід'ємні числа для всіх i, j, тут m і n задані числа кількості видів заявок і приладів.

Приклад 2.7. (*Вибір оптимального виду посівної культури*). Фермер може посіяти одну з трьох культур: A_1, A_2 або A_2. Врожаї цих культур багато в чому залежать від погоди. Потрібно визначити, яку з цих культур сіяти, щоб забезпечити найбільший прибуток, якщо відома ціна a_i одного центнера культури A_i, i = 1, 2, 3, і середня врожайність кожної культури в залежності від погоди (літо буде посушливим, нормальним або дощової). Достовірний прогноз погоди відсутній.

Позначимо через h_{ij} – врожайність i-ої культури за погодних умов j (тут j = 1 – літо посушливе, j = 2 – нормальне літо, j = 3 – дощове літо). Числа h_{ij}, як і числа a_i задані (відомі). Реально може мати місце тільки одна із ситуацій (i, j), i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 2. Причому (i, j) означає, що посіяно культуру A_j, а погода знаходиться у стані j. Усього таких ситуацій дев'ять. Очевидно, що ОПР (фермер) може вибрати тільки вид культури, стан погоди від нього не залежить. Якщо фермер засіяв культуру A_1, то він може отримати (залежно від стану погоди) один з таких прибутків: a_1h_{11}, $a_1\,h_{12}$, a_1h_{13}, щодо культури A_2: a_2h_{21}, a_2h_{22}, a_2h_{23}, і для культури A_3: a_3h_{31}, a_3h_{32}, a_3h_3.

Запишемо всі ці результати в одну таблицю (матрицю):

$$A = \begin{bmatrix} a_1h_{11}, a_1h_{12}, a_1h_{13} \\ a_2h_{21}, a_2h_{22}, a_2h_{23} \\ a_3h_{31}, a_3h_{32}, a_3h_{33} \end{bmatrix}. \qquad (2.13)$$

Ця матриця і буде математичною моделлю вихідної задачі. У ній дія фермера зводиться до вибору одного з рядків матриці (однієї з трьох стратегій). Його прибуток залежить від «вибору» природою одного зі своїх станів (одного із трьох стовпців матриці). Наприклад, якщо фермер посіяв культуру A_2, а літо було дощовим, то прибуток фермера дорівнює a_2h_{22}.

Приклад 2.8. (*Вибір асортименту товарів*). На базі торгової організації є n типів одного з товарів асортиментного мінімуму. У магазин повинен бути завезений тільки один з типів даного товару. Потрібно вибрати той тип товару, що доцільно завезти в магазин. Якщо товар типу j буде користатися попитом, то магазин від його реалізації дістане прибуток p_j, якщо ж він не буде користатися попитом – то збиток q_j. Скласти математичну модель цієї задачі в умовах невизначеного попиту. Керуючись формалізацією задачі прикладу 1.7, обґрунтуйте, що шукана модель має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & -q_1 & \dots & -q_1 \\ -q_2 & p_2 & \dots & -q_2 \\ & \dots\dots\dots & & \\ -q_3 & -q_3 & \dots & p_n \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Поясніть задачу магазину на цій моделі.

Приклад 2.9. (*Планування оптимального терміну закінчення робіт*). Компанія повинна реалізувати проект будівництва об'єкта, що складається з n операцій (робіт). Керівники комплексу оцінили тривалість виконання кожної операції та установили послідовність операцій, тобто точно визначили, які операції обов'язково повинні бути закінчені, щоб могла початися кожна з операцій, що входить у комплекс. Керівництву компанії треба з'ясувати, яка найменша можлива тривалість реалізації всього проекту, тобто найбільш ранній із усіх можливих термінів його завершення.

Під час побудови математичної моделі припустимо, що проект складається з п'яти операцій *A*, *B*, *C*, *Д*, *E*. За умовою відома послідовність операцій і їх тривалість. Нехай ці дані будуть такими, як показано в табл.2.1:

Таблиця 2.1 – Послідовність та тривалість операцій

Операції	Безпосередньо попередні операції	Тривалість операцій
A	-	*T*
B	-	*T*
C	*A*	*T*
D	*A*	*T*
E	*B,D*	t_E
F	*C,E*	-

Фіктивна операція *F*, що починається в момент завершення проекту, вводиться для зручності (див. нижче). Другий стовпець таблиці означає, що операцію *C* не можна почати перш ніж незакінчена операція *A* і т. д.

Приймемо, що змінними є терміни початку операції (введемо лише ті з них, що потрібні для вирішення задачі):

y_{CD} – момент початку операцій *C* і *D*;

y_E – момент початку операції *E*;

y_F – момент початку операції *F*.

Тут, y_F – момент завершення всього комплексу. Моменти y_A і y_B – моменти початку операцій, оскільки операції *A* і *B* не мають попередніх. При цьому математична модель має вигляд:

$$min\, y_F \quad (2.15)$$

за обмежень: $y_{CD} \geq t_A$; $y_E \geq t_B$; $y_E \geq t_D + y_{CD}$; $y_F \geq t_C + y_{CD}$; $y_F \geq t_E + y_E$.

2.4 Класифікація математичних моделей системного аналізу

Класи задач математичних моделей системного аналізу (дослідження операцій) можна класифікувати, виходячи з елементів загальної структури (2.1), розглядаючи їх характеристики з різних точок зору. Тому одне тільки перерахування назв зайняло б кілька сторінок. Тут ми визначимо тільки найбільші класи математичних моделей задач. Почнемо з характеристики середовища Σ моделей прийняття рішень.

Якщо елементи математичної моделі (2.1) не залежать від часу, тобто процес прийняття рішення зводиться до миттєвого акту вибору точки із заданої множини, то математична модель системного аналізу називається статичною. Інакше, тобто коли прийняття рішення є багатоетапним (дискретним) або неперервним у часі процесом, то така модель називається динамічною. Приклади 2.1-2.4, 2.7 і 2.8 попереднього розділу відносяться до статичних, а приклади 2.5, 2.6 і 2.9 – до динамічних моделей. Моделі, що не містять випадкових величин і ймовірнісних явищ називаються детермінованими (приклади 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.9), а якщо моделі характеризуються випадковими величинами з ймовірнісними оцінками, то вони називаються стохастичними (приклади 2.3, 2.4, 2.6).

Залежно від кількості ОПР розрізняють моделі прийняття оптимальних рішень і математичні моделі в умовах протидії (ігрові моделі ($n \geq 2$, де n – число елементів на множині N)). Ігрова модель (або гра) – це математична модель задачі прийняття рішення в умовах конфлікту, тобто в тих ситуаціях, коли має місце протистояння інтересів двох або більше сторін. У загальному випадку, залежно від характеру конфлікту, розрізняють антагоністичні (приклади 2.7, 1.8), неантагоністичні (безкоаліційні) і кооперативні ігри.

Якщо в моделях всі елементи лінійні (цільова функція та обмеження), то отримуємо моделі лінійного програмування (приклади 2.1 і 2.2), інакше – отримуємо моделі нелінійного програмування (приклади 2.3 і 2.4, якщо функції R_j і K_j – нелінійні). Якщо ж у моделях присутній фактор часу, то такі моделі називаються моделями оптимального керування (приклад 2.5). Іноді такі моделі називають моделями динамічного програмування. Однак це не точна назва, оскільки динамічне програмування – це назва методу розв'язання задач оптимального керування.

У реальних випадках часто в ОПР переслідує не одну, а кілька цілей. Математичні моделі $<X; f_1,\ldots,f_n; \Sigma>$, що відповідають цьому, називаються моделями багатокритеріальної (векторної) оптимізації. Так, наприклад, у моделі (2.5) ОПР вибирає рішення $x \in X$ таким чином, щоб отримати як можна більші значення $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ критеріїв.

Є також і такі класи математичних моделей, що отримали свою назву, виходячи з їх призначення: системи масового обслуговування (приклад

2.6), задачі керування запасами (приклад 2.3), задачі мережевого і календарного планування (приклад 2.9).

Для повноти сприйняття нижче наведемо ті «класичні» моделі задач системного аналізу, що, завдяки їх типовості, зустрічаються у багатьох підручниках з математичного програмування. Деякі з них відносяться до початку виникнення теорії оптимізації і теорії систем. Деякі з наведених нижче прикладів служать для ілюстрації деяких видів моделей прийняття рішень і не претендують на реальність, це «навчальні моделі». Моделі, що становлять безпосередній практичний інтерес, будуть докладнішими, глибшими і складнішими. Навчальні ж задачі – це перше наближення до реальних (практичних) задач, їх спрощений аналог. Керуючись матеріалами попередніх двох підрозділів, можливо самостійно отримати їх математичні моделі.

Задача оптимального розкрою матеріалу. Фірма виготовляє виріб, що складається з p деталей (наприклад, комплект постільної білизни). Причому в один виріб ці деталі входять у кількостях $k_1,\ldots,k_p$. З цією метою визначається розкрій m партій матеріалу. У i-ій партії є b_i одиниць матеріалу. Кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на деталі n способами. Під час розкрою одиниці i-ої партії j-им способом виходить a_{ijp} деталей p-го виду. Потрібно скласти такий план розкрою матеріалів, щоб з них отримати максимальне число виробів.

Транспортна задача. Є n постачальників і m споживачів деякого однорідного продукту. Відомі випуск продукції в кожного постачальника і потреби в ній кожного споживача, а також витрати на перевезення продукції від постачальників до споживачів. Треба побудувати план транспортних перевезень з мінімальними транспортними витратами з урахуванням пропозицій постачальників і попиту споживачів.

Задача про призначення на роботу. Є n робіт і m виконавців. Вартість виконання роботи i виконавцем j дорівнює c_{ij}. Потрібно розподілити виконавців на роботи так, щоб мінімізувати витрати.

Задача про суміші (про раціон). З m видів вихідних матеріалів, кожний з який складається з n компонентів, скласти суміш, у якій зміст компонентів повинен бути не менше $b_1,\ldots,b_n$. Відомі ціни одиниці матеріалів: $c_1\ldots c_m$ і питома вага j-го компонента в одиниці i-го матеріалу. Треба скласти суміш, у якій витрати були б мінімальними.

Задача про рюкзак. Є n предметів. Вага предмета i дорівнює p_i, а його цінність – c_i ($i = 1,\ldots,n$). Потрібно для заданої цінності вантажу вибрати сукупність предметів мінімальної ваги.

Задача про комівояжера. Є n деяких міст і задана відстань c_{ij} між ними (i, $j = 1\ldots,n$). Виїжджаючи з одного (вихідного) міста, комівояжер повинен побувати в усіх інших містах по одному разу і повернутися у вихідне місто. Треба визначити, у якому порядку слід об'їжджати міста, щоб сумарна пройдена відстань була найменшою.

Задача про верстати. На універсальному верстаті обробляються однакові партії з n деталей. Перехід від оброблення деталі i до оброблення деталі j вимагає переналагодження верстата, що займає c_{ij} часу. Потрібно визначити послідовність оброблення деталей, за якою загальний час переналагоджень верстата при обробленні партії деталей був би мінімальним.

Задача про розподіл капіталовкладень. Є n проектів, причому для кожного проекту i відомий очікуваний ефект γ_i від його реалізації і необхідна величина капіталовкладень g_i. Загальний обсяг капіталовкладень не може перевищувати заданої величини b. Потрібно визначити, які проекти необхідно реалізувати, щоб сумарний ефект був найбільшим.

Задача про розміщення виробництва. Планується випуск m видів продукції, що могли б вироблятися на n підприємствах ($n > m$). Витрати виробництва і збуту одиниці продукції, плановий обсяг річного виробництва продукції і планова вартість одиниці продукції кожного виду відомі. Потрібно з n підприємств вибрати такі m підприємств, кожне з яких буде виробляти один вид продукції.

2.5 Моделювання систем в умовах визначеності

Класичним прикладом найпростішої задачі системного аналізу в умовах визначеності може бути задача виробництва і постачання товару. Нехай деяка фірма повинна виробляти і поставляти продукцію клієнтам рівномірними партіями у кількості $N = 24000$ одиниць за рік. Зрив постачань неприпустимий, оскільки штраф за це можна вважати нескінченно великим. Запускати у виробництво слід відразу всю партію (такі умови технології). Вартість збереження одиниці продукції C_x = 10 копійок на місяць, а вартість запуску однієї партії у виробництво (незалежно від її обсягу) складає C_p = 400 грн. Таким чином, запускати в рік багато партій явно невигідно, але й невигідно і випустити всього 2 партії в рік – занадто великі витрати на збереження! Скільки ж партій на рік найкраще буде випускати?

Побудуємо математичну модель такої системи. Позначимо через n розмір партії і знайдемо кількість партій за рік – $p = N/n = 24000/n$. Виходить, що інтервал часу між партіями складає $t = 12/p$ (місяців), а середній запас виробів на складі – $n/2$ штук. Скільки ж нам буде коштувати випуск партії в n штук за один раз?

Підрахувати неважко – $0{,}1 \cdot 12 \cdot n/2$ гривень на складські витрати у рік і $400 \cdot p$ гривень за запуск партій з n штук виробів у кожній.

У загальному вигляді річні витрати складають

$$E = C_x T\, n/2 + C_p N/n, \tag{2.16}$$

де T=12 – повний час спостереження у місяцях.

Таким чином, перед нами постає типова *варіаційна* задача: знайти таке n_0, за яким сума E досягає мінімуму.

Розв'язок цієї задачі знайти зовсім просто – треба взяти похідну за n і прирівняти цю похідну до нуля. Це дає

$$n_0=\sqrt{\frac{2NC_p}{TC_x}}, \qquad (2.17)$$

що для нашого прикладу складає 4000 одиниць в одній партії і відповідає інтервалу випуску партій величиною у 2 місяці. Витрати при цьому мінімальні і визначаються як

$$E_0=\sqrt{2NTC_xC_p}, \qquad (2.18)$$

що для нашого прикладу складає 4800 гривень в рік.

Зіставимо цю суму з витратами за умови випуску 2000 виробів у партії або випуску партії один раз на місяць:

E_1 = 0.1·12·2000/2 + 400·24000/2000 = 6000 гривень у рік.

Коментарі, як кажуть, – зайві!

Зазвичай, так просто розв'язувати задачі прийняття оптимальних стратегій вдається далеко не завжди, навіть якщо мова йде про *детерміновані* дані щодо опису життя системи – її моделі. Існує цілий клас задач системного аналізу і відповідних їм моделей систем, де мова йде про необхідність мінімізувати ***одну*** функцію багатьох змінних такого типу:

$$E=a_1X_1+a_2X_2+...+a_nX_n, \qquad (2.19)$$

де X_i – шукані змінні;

a_i – відповідні їм коефіцієнти або "*ваги змінних*" і при цьому мають місце ***обмеження*** як на змінні, так і на їх ваги.

Такі задачі добре досліджені у спеціальному розділі прикладної математики – *лінійному програмуванні*. Ще в докомп'ютерні часи були розроблені алгоритми пошуку екстремумів функцій $E=f(a, X)$, які назвали – ***цільовими***. Вони використовуються і зараз, і є основою для розроблення прикладних програм системного аналізу. При цьому системний підхід до розв'язання практичних задач керування, зокрема для задач з багатьма змінними призвів до появи спеціалізованих типових напрямків як у області теорії аналізу, так і у практиці. "Найстаршими" і, отже, найперевіренішими є методи, що давно вже називають класичними. Фахівцям у галузі ділового адміністрування треба знати ці задачі хоча б на рівні постановки (див. підрозділ 2.1) і, головне, у плані моделювання відповідних систем.

Початки теоретичного обґрунтування і розроблення практичних методів розв'язання задач лінійного програмування були покладені

Д. Данцигом (за іншою версією – Л. В. Канторовичем). Для більшості конкретних додатків універсальним вважається так званий ***симплекс-метод*** пошуку мети. Для нього і супутніх йому методів розроблено багато спеціальних пакетів прикладних програм (ППП).

2.6 Наявність декількох цілей – багатокритеріальні системи

Часто етап змістовної постановки задачі системного аналізу приводить нас до висновку про наявність кількох цілей функціонування системи. І справді, якщо деяка, наприклад, економічна система може мати "головну мету" – досягнення максимального прибутку, то майже завжди можна спостерігати ситуацію наявності обмежень або умов. Порушення цих умов або неможливе (тоді не буде самої системи), або свідомо призводить до неприпустимих наслідків для зовнішнього середовища. Коротше кажучи, ситуація, коли мета всього одна і досягти її потрібно за будь-яку ціну, практично неможлива.

Так, наприклад, нехай є найпростіша ситуація багатокритеріальності – існують тільки дві мети системи T_1 і T_2 і тільки дві можливих стратегії S_1 і S_2.

Нехай ми оцінили ефективність E_{11} стратегії S_1 щодо T_1, і ефективність цієї стратегії виявилася рівною 0,4 (за деякою шкалою 0...1). Здійснивши таке ж оцінювання для всіх стратегій і всіх цілей, ми отримали таблицю 2.2 (матрицю ефективностей):

Таблиця 2.2 – Матриця ефективностей

E	T_1	T_2
S_1	0,4	0,6
S_2	0,7	0,3

Яку ж із стратегій вважати найкращою? Поки ми не обговоримо значимість кожної з цілей і не вкажемо їх *ваги* – сперечатися марно! От якби нам було відомо, що перша ціль, наприклад, у 3 рази важливіша другої, то тоді можна врахувати їх *відносні ваги* – скажімо величинами 0,75 для першої і 0,25 для другої. За таких умов *сумарні ефективності* стратегій (щодо усіх цілей) складуть:

для першої $E_1 = 0{,}4\cdot 0{,}70+0{,}6\cdot 0{,}30=0{,}28+0{,}18=0{,}46$;
для другої $E_2= 0{,}8\cdot 0{,}70+ 0{,}2\cdot 0{,}25=0{,}56+0{,}05=0{,}61$.

Так що відповідь на запитання про вибір стратегії далеко не очевидна. Отже, критерій ефективності системи за наявності декількох цілей доводиться описувати через ефективності окремих стратегій виду

$$E_s=\Sigma\, S_t U_t\,, \tag{2.20}$$

тобто враховувати ваги окремих цілей U_t.

Якщо ви уважно стежили за міркуваннями під час розгляду прикладу (2.16), то зможете зрозуміти, що насправді там мова йшла про дві цілі. З одного боку, ми хотіли б мати якомога менші партії – їх дешевше зберігати (малий термін зберігання). З іншого боку, нам були б бажані великі партії, оскільки при цьому менші витрати на запуск партій у виробництво. Якби ми перебирали усі 365 можливих стратегій (від зміни партії щодня до однієї в рік), то, звичайно ж, знайшли б оптимальну стратегію зі зміною партій кожні два місяці. Інша справа, що в нашому розпорядженні була *аналітична модель* системи (формула сумарних витрат).

Отож – вагові коефіцієнти цілей у тій моделі були рівними і ми їх могли не помічати під час пошуку мінімуму витрат. Ну, а що робити, якщо "важливість" цілей доводиться вимірювати не по шкалі **Int** або **Rel**, тобто в числовому вигляді, а по шкалі **Ord**? Іншими словами – звідки беруться вагові коефіцієнти цілей?

Не часто вагові коефіцієнти визначаються однозначно за "фізичним змістом" задачі системного аналізу. Частіше усього їх відшукування можна називати "призначенням", "придумуванням", "пророкуванням" – тобто ніяк не «науковими» діями. Іноді, як не дивно це звучить, вагові коефіцієнти призначаються шляхом голосування – явного або таємного. Справа у тому, що у ситуаціях, коли немає числового методу оцінювання ваги цілі, реальним виходом з положення є використання *накопиченого досвіду*.

Нерідко вагові коефіцієнти задає безпосередньо ОПР, але частіше її досвід керування підказує: одна голова – добре, а багато розумних голів – набагато краще. Приймається особливе рішення – використання *методу експертних оцінок*. Суть цього методу досить проста. Потрібно чітко обговорити всі цілі функціонування системи і запропонувати групі осіб, високо компетентних у даній галузі (*експертів*), хоча б розташувати всі цілі за значимістю за «призовими місцями», або, мовою ТССА, за рангами.

Вищий ранг (зазвичай 1) означає найбільшу важливість (вагу) цілі, наступний за ним – трохи меншу вагу і т. д. Спеціальний розділ непараметричної статистики – *теорія рангової кореляції*, дозволяє перевірити гіпотези про значимість отриманої від експертів інформації. Розвиток рангової кореляції, її інший розділ, дозволяє встановлювати згоду, тобто узгодженість думок експертів або *рангову конкордацію*. Це особливо важливо у випадках, коли не тільки виникла потреба використовувати думки експертів, але й існує сумнів у їх компетентності.

2.7 Експертні оцінки, рангова кореляція і конкордація

Нехай у процесі системного аналізу нам довелося враховувати деяку величину U, вимірювання якої можливе лише за порядковою шкалою (**Ord**). Наприклад, нам доводиться враховувати 10 цілей функціонування системи і потрібно з'ясувати їх відносну значимість, тобто питому вагу.

Якщо існує група осіб, компетентність яких у даній області не викликає сумнівів, то можна опитати кожного з *експертів*, запропонувавши їм розташувати цілі за важливістю або «проранжувати» їх. У найпростішому випадку можна не дозволяти повторювати ранги, хоча це необов'язково – повторення рангів завжди можна врахувати. Результати експертного оцінювання в нашому прикладі опишемо в табл. 2.3 рангів цілей.

Отже, для кожної з цілей T_i ми можемо знайти суму рангів, що визначені експертами, а потім сумарний або *результуючий* ранг мети R_i. Якщо суми рангів збігаються – призначається середнє значення.

Таблиця 2.3 – Результати експертного оцінювання

Експерти	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**Сума**
А	3	5	1	8	7	10	9	2	4	6	55
В	5	1	2	6	8	9	10	3	4	7	55
Сума рангів	8	6	3	14	15	19	19	5	8	13	
Сумарний ранг	4,5	3	1	7	8	9,5	9,5	2	4,5	6	55

Метод рангової кореляції дозволяє відповісти на запитання – наскільки корельовані невипадкові ранжировки кожного з двох експертів, а значить – наскільки можна довіряти результуючим рангам?

Зазвичай, висувається основна гіпотеза – про відсутність зв'язку між ранжировками і встановлюється ймовірність справедливості цієї гіпотези. Для цього можна використовувати два підходи: визначення коефіцієнтів рангової кореляції Спірмена або Кенделла.

Простішим у реалізації є перший метод, за яким обчислюється значення коефіцієнта Спірмена.

$$R_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum (d_i)^2}{n \cdot (n^2 - 1)}, \tag{2.21}$$

де d_i визначаються різницями рангів першої і другої ранжировок по n об'єктів у кожній.

У нашому прикладі сума квадратів різниць рангів складає 30, а коефіцієнт кореляції Спірмена близько 0,8, що дає значення ймовірності гіпотези про повну незалежність двох ранжировок усього лише 0,004.

При необхідності можна скористатися послугами групи з m експертів, встановити результуючі ранги цілей, але тоді виникне питання про узгодженість думок цих експертів або *конкордації*.

Нехай у нас є ранжировки 4 експертів стосовно 6 факторів, що визначають ефективність деякої системи (див. у табл. 2.4).

Відзначимо, що повна сума рангів складає 84, що дає у середньому по

14 на фактор. Для загального випадку n факторів і m експертів середнє значення суми рангів для будь-якого фактора визначиться виразом

$$\Delta = 0.5 \cdot m \cdot (n+1). \qquad (2.22)$$

Тепер можна оцінити ступінь узгодженості думок експертів щодо шести факторів. Для кожного з факторів спостерігається відхилення суми рангів, зазначених експертами, від середнього значення такої суми, як це показано в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 - Відхилення суми рангів, зазначених експертами

Фактори > Експерти	1	2	3	4	5	6	**Сума**
A	5	4	1	6	3	2	21
B	2	3	1	5	6	4	21
C	4	1	6	3	2	5	21
D	4	3	2	3	2	5	21
Сума рангів **сум. ранг**	15 4	11 2	10 1	19 6	12 3	17 5	84
Відхилення суми від середнього	+1 1	-3 9	-4 16	+5 25	-2 4	+3 9	0 64

Оскільки сума цих відхилень завжди дорівнює нулю, для їх усереднення розумним буде використовувати квадрати значень.

У нашому випадку сума таких квадратів складе $S = 64$, а в загальному випадку ця сума буде найбільшою тільки при повному збігу думок всіх експертів стосовно всіх факторів:

$$S_{max} = m^2 (n^3 - n)/12. \qquad (2.23)$$

М. Кенделлом запропоновано показник узгодженості або ***коефіцієнт конкордації** (concordation rate)*, що визначається як

$$K = \frac{S}{S_{\max}} = \frac{12 \times S}{m^2 \cdot (n^3 - n)}. \qquad (2.24)$$

У нашому прикладі значення коефіцієнта конкордації складає близько 0,229, що для чотирьох експертів і шести факторах достатньо, щоб з ймовірістю не більше 0,05 вважати думки експертів неузгодженими. Справа у тому, що саме ***випадковість*** ранжировок, їх некорельованість прораховується досить просто. Так, для нашого прикладу, зазначена ймовірність відповідає сумі квадратів відхилень $S = 142{,}3$, що набагато більше 64.

На закінчення відзначимо ще дві таких обставини про особливості методу експертних оцінок у системному аналізі.

У першому прикладі ми одержали результуючі ранги 10 цілей функціонування системи. Як скористатися цим і як перейти від рангової (**Ord**) шкали цілей до шкали вагових коефіцієнтів, тобто у діапазоні від 0 до 1? Тут, звичайно, використовуються елементарні прийоми нормування. Якщо ціль 3 має ранг 1, ціль 8 має ранг 2 і т. д., а сума рангів складає 55, то ваговий коефіцієнт для мети 3 буде найбільшим і сума ваг усіх десяти цілей складе 1.

Вагу цілі доведеться визначати як:

(11-1)/55 для цілі 3;
(11-2)/55 для цілі 8 і т. д.

Під час використання групової експертної оцінки можна не тільки з'ясовувати думку експертів щодо показників, необхідних для системного аналізу. Дуже часто в подібних ситуаціях використовують так званий ***метод Дельфі*** (від легенди про дельфійського оракула). За ним опитування експертів проводять у кілька етапів, як правило – анонімно. Після чергового етапу від експерта потрібна не просто ранжировка, але й її обґрунтування. Ці обґрунтування повідомляються усім експертам перед черговим етапом без вказування авторів обґрунтувань. Наявний досвід свідчить про можливість істотно підвищити показовість, обґрунтованість і, головне, вірогідність суджень експертів. Як «побічний ефект» можна скласти думку про професійність кожного експерта.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. В чому полягає мета ОПР?
2. З яких загальних принципів (етапів) складається дослідження задач системного аналізу?
3. В чому мета математичного моделювання?
4. Назвіть основні елементи математичної моделі будь-якої задачі системного аналізу з прийняттям рішень.
5. Що таке критерій якості ОПР?
6. Якою є загальна структура задачі прийняття рішення з багатьма учасниками?
7. Назвіть основні етапи математичного моделювання.
8. Охарактеризуйте задачу планування добового випуску продукції.
9. Охарактеризуйте задачу розміщення замовлень.
10. Охарактеризуйте задачу вибору портфеля цінних паперів.
11. Охарактеризуйте задачу про рекламу.
12. Охарактеризуйте задачу керування виробництвом.
13. Охарактеризуйте задачу оптимізації схеми обслуговування.
14. Охарактеризуйте задачу вибору оптимального виду посівної культури.

15. Охарактеризуйте задачу вибору асортименту товарів.
16. Охарактеризуйте задачу планування оптимального терміну закінчення робіт.
17. Опишіть класифікацію математичних моделей системного аналізу
18. Охарактеризуйте моделювання систем в умовах визначеності на прикладі задачі виробництва та постачання товару.
19. Що таке коефіцієнт конкордації?
20. Як працює метод експертних оцінок? Поясніть на прикладі.

3 МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Як уже відзначалося, у більшості реальних великих систем не обійтися без врахування "станів природи" – впливів *стохастичного* типу, випадкових величин або випадкових подій. Це можуть бути не тільки *зовнішні* впливи на систему в цілому або на окремі її елементи. Дуже часто і *внутрішні* системні зв'язки мають таку ж, "випадкову" природу. Важливо зрозуміти, що стохастичність зв'язків між елементами системи є основним чинником ризику виконати замість системного аналізу зовсім безглузду роботу, тобто отримати як рекомендації з керування системою заздалегідь неприйнятні рішення.

Вище вже було прийнято, що у таких випадках замість самої випадкової величини X доводиться використовувати її математичне сподівання M_x. Усе начебто б просто – не знаємо, так очікуємо. Але наскільки виправдані наші сподівання? Яка впевненість або яка ймовірність помилитися? Такі запитання вирішуються, відповіді на них отримати можна – але для цього треба мати інформацію про закон розподілу ВВ. От і доводиться на даному етапі системного аналізу (етапі моделювання) займатися статистичними дослідженнями, тобто намагатися отримати відповіді на запитання:

- чи є даний елемент системи і вироблені ним операції "класичними"?
- чи немає підстав використовувати теорію для визначення типу розподілу ВВ (продукції, грошей або інформаційних повідомлень)? А якщо це так, то можна сподіватися на оцінки помилок під час прийняття рішень. Якщо ж це не так, то доводиться ставити питання інакше:
- чи не можна отримати шуканий розподіл ВВ із даних експерименту?

Якщо цей експеримент обійдеться дорого або фізично чи морально неможливий, то скористатися апостеріорними даними, досвідом минулого або пророкуваннями на майбутнє, експертними оцінками? Якщо ж і тут немає підстав для прийняття позитивних рішень, то можна сподіватися ще на один вихід з положення. Не завжди, але усе-таки можливо використовувати поточний стан вже діючої системи, її реальне "життя" для отримання *глобальних показників* функціонування системи. Для цієї мети слугують методи планування експерименту, теоретичною і методологічною основою яких є особлива область системного аналізу – так званий факторний аналіз, сутність якого буде пояснена нижче.

3.1 Основні поняття математичної статистики

3.1.1 Випадкові події і величини та їх основні характеристики

Як уже говорилося, під час аналізу великих систем наповнювачем каналів зв'язку між елементами, підсистемами і системи в цілому може бути:

- продукція, тобто реальні, фізично відчутні предмети із заздалегідь заданим способом їх кількісного і якісного опису;

- гроші, з єдиним способом опису – сумою;

- інформація, у вигляді повідомлень про події в системі і значеннях величин, що описують її поведінку.

Почнемо з того, що звернемо увагу на тісний (системний) зв'язок показників продукції і грошей з інформацією про ці показники. Якщо розглядати деяку фізичну величину, скажімо – кількість проданих за день зразків продукції, то відомості про цю величину після продажу можуть бути отримані без проблем і досить точно або достовірно. Однак, зрозуміло, що під час аналізу нас куди більше цікавить майбутнє – а скільки цієї продукції буде продано за день? Це запитання дуже важливе, оскільки нашою метою є керування, а образно висловлюючись, "керувати – значить передбачати".

Отже, без попередньої інформації, тобто знань про кількісні показники в системі нам не обійтися. Величини, що можуть приймати різні значення залежно від зовнішніх щодо них умов, прийнято називати *випадковими* (*random size*) (*стохастичними* за природою). Так, наприклад, стать зустрінутої нами людини може бути жіночою або чоловічою (дискретна випадкова величина), причому її зріст також може бути різним, але це вже неперервна випадкова величина з тією або іншою кількістю можливих значень (залежно від одиниці вимірювання).

Для випадкових величин (далі – ВВ) доводиться застосовувати ***статистичні*** методи їх опису. Залежно від типу самої ВВ – (дискретна або неперервна) це робиться по-різному.

Дискретний опис полягає у тому, що вказуються ***всі*** можливі значення даної величини (наприклад, 7 кольорів звичайного спектра) і для кожної з них вказується ймовірність або частота спостережень саме цього значення для нескінченно великої кількості всіх спостережень. Можна довести (і це давно зроблено), що при збільшенні числа спостережень в певних умовах за значеннями деякої дискретної величини *частота* повторень даного значення буде усе більше наближатися до деякого фіксованого значення, яке і буде *ймовірністю* цього значення.

До поняття ймовірності значення дискретної ВВ можна підійти й іншим шляхом – через ***випадкові події***. Це найпростіше поняття з теорії ймовірностей і математичної статистики – подія з ймовірністю «0,5» або 50% у 50 випадках зі 100 може відбутися або не відбутися, якщо ж її ймовірність більша «0,5» – вона частіше відбувається, аніж не відбувається. Події з ймовірністю «1» називають *вірогідними*, а з ймовірністю «0» – *неможливими*. Звідси просте правило: для випадкової події X сума ймовірностей $P(X)$ (подія відбувається) і $P(\overline{X})$ (подія не відбувається) для простої події дає «1».

Якщо ми спостерігаємо за деякою складною подією, наприклад, випаданням чисел 1...6 на верхній грані гральної кості, то можна вважати, що така подія має множину варіантів і для кожного з них ймовірність складає 1/6 за умови симетричності кості. Якщо ж кость несиметрична, то ймовірності окремих чисел будуть різними, однак їх сума буде дорівнювати 1. Однак якщо розглядати результат кидання кості як дискретну випадкову величину, то прийдемо до поняття ***розподілу ймовірностей*** такої величини.

Нехай у результаті досить великого числа спостережень за гранню однієї і тієї ж кості ми отримали такі дані:

Таблиця 3.1 – Таблиця спостережень за випадковими величинами

Грані	1	2	3	4	5	6	Разом
Спостереження	140	80	200	400	100	80	1000

Подібну таблицю спостережень за ВВ часто називають ***вибірковим розподілом***, а відповідну їй діаграму – *гістограмою* (рис.3.1).

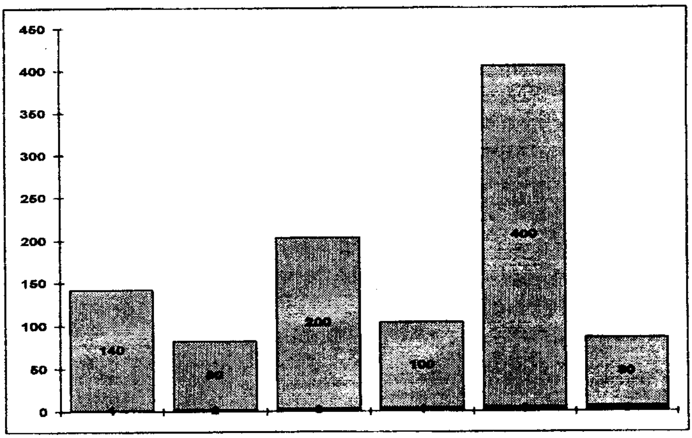

Рисунок 3.1 – Гістограма

Яку ж інформацію несе така таблиця або відповідна їй гістограма?

Насамперед, ***всю*** – оскільки іноді і таких даних про значення випадкової величини немає і їх доводиться або отримувати (експеримент, моделювання), або вважати результати такої складної події рівноможливими – по 1/6 для кожного з варіантів.

З іншого боку, інформації ***дуже мало***, особливо в цифровому, чисельному описі лише самої ВВ. Як, наприклад, відповісти на запитання: – а скільки **в середньому** ми виграємо за одне кидання кості, якщо виграш відповідає числу, що випало на грані? Неважко підрахувати:

$$1\times0{,}140+2\times0{,}080+3\times0{,}200+4\times0{,}400+5\times0{,}100+6\times0{,}080 = 3{,}48$$

Те, що ми обчислили, називається ***середнім значенням*** випадкової величини, якщо нас цікавить минуле. Якщо ж ми поставимо запитання інакше, тобто оцінити за цими даними наш майбутній виграш, то відповідь 3,48 прийнято називати ***математичним сподіванням*** випадкової величини, що у загальному випадку визначається як

$$M_x = \sum X_i \cdot P(X_i), \qquad (3.1)$$

де $P(X_i)$ – ймовірність того, що X прийме своє i-е чергове значення.

Таким чином, математичне сподівання випадкової величини (як дискретної, так і неперервної) – це те, до чого *прямує* її середнє значення для досить великої кількості спостережень. Звертаючись до нашого прикладу, можна помітити, що кость несиметрична, інакше ймовірності складали б по 1/6 кожна, а середнє і математичне сподівання склало б 3,5. Тому доречне таке запитання – а яка ступінь асиметрії кості, і – як її оцінити за підсумками спостережень? Для цієї мети використовується спеціальна величина – *міра розсіювання* – так само як ми «усереднювали» допустимі значення ВВ, можна усереднити її відхилення від середнього. Але оскільки різниці (X_i-M_x) завжди будуть компенсувати одна одну, то доводиться усереднювати не відхилення від середнього, а *квадрати цих відхилень*. Величину прийнято називати ***дисперсією*** випадкової величини X: $D_x = \sum(X_i - M_x)^2 P(X_i)$, яку можна простіше обчислити, якщо скористатися виразом

$$D_x = \sum (X_i)^2 \cdot P(X_i) - (M_x)^2. \qquad (3.2)$$

Виконаємо таке обчислення для ВВ з розподілом на рис. 3.1. Дані для обчислень занесено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Дані для обчислень ВВ

Грані (X)	1	2	3	4	5	6	Разом
X^2	1	4	9	16	25	36	
P_i	0,140	0,080	0,200	0,400	0,100	0,080	1,00
$P_i\,X^2\,1000$	140	320	1800	6400	2500	2880	14040

Таким чином, дисперсія складе $14{,}04 - (3{,}48)^2 = 1{,}930$.

Зазначимо, що величина дисперсії не збігається з величиною самої ВВ і це не дозволяє оцінити величину розкиду. Тому найчастіше замість дисперсії використовується квадратний корінь з її значення – ***середньо-квадратичне*** відхилення або відхилення від середнього значення:

$$S_x^{\cdot} = \sqrt{D_x}, \qquad (3.3)$$

складає в нашому випадку $\sqrt{1,93}=1,389$. Багато це чи мало?

Відзначимо, що у випадку спостереження тільки одного з можливих значень (розкиду немає) середнє дорівнювало б саме цьому значенню, а дисперсія склала б 0. І навпаки – якби всі значення спостерігалися однаково часто (були б рівноможливими), то середнє значення склало б

$$(1+2+3+4+5+6)/6=3,500,$$

середній квадрат відхилення визначиться як

$$(1+4+9+16+25+36)/6=15,167,$$

а дисперсія – як 15,167 – 12,25 = 3,917.

Таким чином, ***найбільше*** розсіювання значень ВВ має місце при її ***рівноможливому*** або рівномірному розподілі.

Слід відзначити, що значення M_x і S_x є розмірними і їх абсолютні значеннями мало про що говорять. Тому, часто для грубого оцінювання «випадковості» даної ВВ використовують *коефіцієнт* варіації або відношення кореня квадратного з дисперсії до величини математичного сподівання

$$V_x=\frac{S_x}{M_x}, \tag{3.4}$$

у нашому прикладі ця величина складе 1,389/3,48 = 0,399.

Отже, запам'ятаємо, що невипадкова, тобто ***детермінована*** величина має математичне сподівання, що дорівнює їй самій, *нульову* дисперсію та *нульовий* коефіцієнт варіації, у той час, як ***рівномірно розподілена*** ВВ має *максимальну* дисперсію і *максимальний* коефіцієнт варіації.

У багатьох ситуаціях доводиться мати справу з неперервно-розподіленими ВВ – вагами, відстанями і под. Для таких величин ідея оцінювання середнього значення (математичного сподівання) і міри розсіювання (дисперсії) залишається тією ж, що і для дискретних ВВ. Доводиться тільки замість відповідних сум обчислювати інтеграли.

Другою відмінністю для неперервних ВВ є те, що питання про те, яка ймовірність прийняття нею конкретного значення, зазвичай не має сенсу, тобто, як перевірити, що вага товару складає точно 242 кг – і не більше і не менше (визначити точно неможливо)?

Для усіх ВВ – як дискретних, так і неперервно розподілених, має велике значення питання про діапазон їх значень. І справді, іноді знання ймовірності ***події***, що випадкова величина не перевищить задану границю, є єдиним способом використовувати наявну інформацію для системного аналізу і системного підходу щодо задачі керування системою. При цьому правило визначення ймовірності влучення у необхідний діапазон, дуже просте – потрібно додати ймовірності окремих дискретних значень діапазону або проінтегрувати криву розподілу на цьому діапазоні.

3.1.2 Взаємозв'язки випадкових подій

Звернемося знову до поняття випадкових подій і розглянемо спочатку прості події (може відбутися або ні). Ймовірність події X позначимо через $P(X)$ і розумітимемо, що ймовірність того, що подія не відбудеться, складає

$$P(\overline{X}) = 1 - P(X). \qquad (3.5)$$

Найважливішим під час розгляду декількох випадкових подій (тим більше в складних системах з розвиненими зв'язками між елементами і підсистемами) – є розуміння способу визначення ймовірності одночасного настання декількох подій або – сумісності подій.

Розглянемо найпростіший приклад двох подій X і Y, ймовірності яких складають $P(X)$ і $P(Y)$. Тут важливе лише одне питання – ці події незалежні або навпаки взаємозалежні, що приводить до ще одного запитання – яка міра зв'язку між ними? Спробуємо розібратися в цьому питанні.

Оцінимо спочатку ймовірність *одночасного* настання *двох незалежних* подій. Елементарні міркування приведуть нас до висновку: якщо події незалежні, то при 80%-й ймовірності X і 20%-й ймовірності Y одночасне їх настання має ймовірність усього лише $0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$, тобто 16%. Отже, ймовірність настання двох незалежних подій визначається добутком їх ймовірностей:

$$P(XY) = P(X) \cdot P(Y). \qquad (3.6)$$

Перейдемо тепер до залежних подій. Назвемо ймовірність події X за умови, що подія Y уже відбулася, *умовною ймовірністю* $P(X/Y)$, вважаючи при цьому $P(X)$ *безумовною або повною* ймовірністю. Такі ж прості міркування приводять до так званої ***формули Байєса***

$$P(X/Y) \cdot P(Y) = P(Y/X) \cdot P(X), \qquad (3.7)$$

де у лівій і правій частині записані ймовірності одночасного настання двох «залежних» або *корельованих* подій.

Доповнимо цю формулу загальним виразом, що описує безумовну ймовірність події X:

$$P(X) = P(X/Y) \cdot P(Y) + P(X/\overline{Y}) \cdot P(\overline{Y}), \qquad (3.8)$$

яка означає, що подія X може відбутися або після того як подія Y відбулася, або після того, як вона не відбулася $(\overline{Y})$ – третього не може бути!

Формули Байєса (***байєсівський підхід)*** до оцінювання ймовірнісних зв'язків для простих подій і дискретно розподілених ВВ відіграють вирішальну роль у теорії прийняття рішень в умовах невизначеності, наслідків цих рішень або в умовах протидії з боку природи, або інших великих систем (конкуренції). За цих умов ключовою буде стратегія керування, що заснована на прогнозі апостеріорної (післядослідної) ймовірності події

$$P(X/Y) = \frac{P(Y/X) \cdot P(X)}{P(Y)}. \tag{3.9}$$

Насамперед, ще раз відзначимо *взаємний* зв'язок подій X і Y, і якщо одна не залежить від іншої, то вищенаведений вираз перетвориться на тривіальну тотожність. До речі, ця обставина використовується під час розв'язання задач оцінювання тісноти зв'язків, тобто під час кореляційного аналізу. Якщо ж взаємозв'язок подій має місце, то формула Байєса дозволяє вести керування шляхом оцінювання ймовірності досягнення деякої мети на основі спостережень над процесом функціонування системи, тобто, шляхом перерахунку варіантів стратегій з урахуванням уявлень, що змінились, тобто нових значень ймовірностей. Справа у тому, що будь-яка стратегія керування буде будуватися на базі певних уявлень про ймовірність подій у системі і на перших кроках ці ймовірності будуть узяті «з голови» або у кращому випадку з досвіду керування іншими системами. Однак впродовж «життя» системи не можна відкидати можливість керування, тобто використання всього здобутого дотепер досвіду.

3.1.3 Схеми і закони розподілу випадкових подій та величин

Значну роль у теорії і практиці системного аналізу відіграють стандартні розподіли неперервних і дискретних ВВ. Ці розподіли іноді називають «теоретичними», оскільки для них розроблено формальні методи розрахунку усіх показників, зафіксовані зв'язки між ними та побудовані алгоритми їх розрахунку і под. Таких класичних законів розподілу досить багато, хоча їх «штат» за останні 30..50 років практично не поповнився. Необхідність знайомства з ними пояснюється тим, що вони відповідають «теоретичним» схемам випадкових (здебільшого елементарних) подій.

Як уже відзначалося, наявність великих масивів взаємозалежних подій і велика кількість випадкових величин, наприклад, у системах економіки призводить до труднощів апріорного оцінювання законів розподілів цих подій або величин. Нехай, наприклад, ми деяким чином встановили математичне сподівання попиту на деякий товар. Однак цього замало – треба хоча б оцінити ступінь коливання цього попиту, щоб відповісти на запитання – а яка ймовірність того, що він буде знаходитися в певних межах? От якби встановити факт приналежності даної випадкової величини до ***нормального*** класичного розподілу, тоді задача оцінки діапазону, тобто довіри до нього (довірчих інтервалів) була б вирішена без будь-яких труднощів.

Доведено, що, наприклад, з ймовірністю більше 95% випадкова величина X з нормальним законом розподілу лежить у діапазоні, де математичне сподівання M_x дорівнює плюс/мінус три середньоквадратичних відхилення S_x. Таким чином, справа полягає у тому, до якої із схем випадкових подій класичного зразка ближче всього належить схема функціонування елементів вашої системи.

Наведемо простий приклад. Слід оцінити показники оплати за послуги надання часу на міжміські переговори, наприклад, знайти ймовірність того, що за 1 хвилину здійснюється рівно N переговорів, якщо заздалегідь відомо середнє число замовлень, що надходять за хвилину. Виявляється, що схема таких випадкових подій підпадає під *розподіл Пуассона* для дискретних випадкових величин. Цьому розподілу підпорядковуються майже усі дискретні величини, що пов'язані з так званими «рідкісними» подіями.

Далеко не завжди математична оболонка класичного закону розподілу досить проста. Навпаки, найчастіше це складний математичний апарат зі своїми, специфічними прийомами. Однак справа не в цьому, тим більше при «суцільній» комп'ютеризації усіх сфер діяльності людини. Очевидно, що немає необхідності знати в деталях властивості всіх або хоча б певної частини класичних розподілів. Досить пам'ятати тільки про саму можливість скористатися ними.

Таким чином, під час системного підходу до розв'язання тієї або іншої задачі керування слід дуже зважено поставитися до вибору елементів системи або окремих її системних операцій. При цьому не завжди «збільшення показників» забезпечить логічну стрункість структури системи, тобто, треба розуміти, що помітити близькість схеми подій у даній системі до схеми класичної найчастіше вдається тільки на «елементарному» рівні системного аналізу.

Завершуючи питання про розподіли випадкових величин звернемо увагу на ще одну важливу обставину – навіть якщо нам досить одного єдиного показника – математичного сподівання деякої випадкової величини, то й у цьому випадку виникає питання щодо надійності даних про цей показник. І справді, нехай даний ***вибірковий*** розподіл випадкової величини X, наприклад, щоденний виторг у $, у вигляді 100 спостережень за цією величиною. Нехай ми розрахували середнє M_x і воно склало $125 за умови коливань від $50 до $200. Разом з тим, припустимо, що було знайдено S_x, що дорівнює $5. Звідси постає запитання – а наскільки правильним буде твердження, що у наступні дні виторг складе $125 або буде знаходитись в інтервалі $120..$130 або виявиться більше деякої суми, наприклад, $90?

Питання такого типу є надзвичайно гострими, особливо якщо це елемент деякої економічної системи (один з багатьох). При цьому висновки за результатами системного аналізу та їх вірогідність, зазвичай, залежать від відповідей на деякі запитання. Що ж говорить теорія про ці питання?

З одного боку, надто багато, а з іншого боку – майже нічого. Так, наприклад, якщо у вас є впевненість у тому, що «теоретичний» розподіл деякої випадкової величини відноситься до деякого класичного, тобто цілком описаного в теорії типу, то можна отримати досить багато корисного. Дійсно:

• за допомогою теорії можна знайти ***довірчі*** інтервали для даної випадкової величини. Якщо, наприклад, уже доведено, точніше прийнята гіпотеза про ***нормальний*** розподіл, то знаючи середньоквадратичне відхилення можна з впевненістю до 5% вважати, що виявиться поза діапазоном (M_x - $3S_x$) ... (M_x+$3S_x$), або у нашому прикладі про виторг з ймовірністю 0,05 буде < $ 90 або > $ 140. Слід погодитись із своєрідністю теоретичного висновку, за яким стверджується не той факт, що виторг складе від 90 до 140 (з ймовірністю 95%), а тільки те, що сказано вище;

• якщо в нас немає теоретичного підґрунтя, щоб прийняти який-небудь класичний розподіл, що буде придатним для нашої ВВ, то і тут теорія зробить нам послугу, тобто дозволить перевірити гіпотезу про розподіл на підставі наявних у нас даних. Правда, вичерпної відповіді «Так» або «Ні» чекати не слід. Можна лише отримати ймовірність помилки, ***відкинувши правильну*** гіпотезу (помилка 1 роду) або ймовірність помилки, ***прийнявши помилкову*** гіпотезу (помилка 2 роду);

• навіть такі «обмежені» теоретичні висновки дуже залежать від *обсягу вибірки*, тобто кількості спостережень, а також від «чистоти проведення експерименту», тобто від умов його проведення.

3.2 Методи непараметричної статистики

Використання класичних розподілів випадкових величин зазвичай називають «параметричною статистикою». При цьому робиться припущення про те, що ВВ (дискретна або неперервна), яка нас цікавить, має ймовірності, що обчислюються за деякими формулами або алгоритмами. Однак не завжди для цього є підстави. Причинами цього найчастіше є дві:

- деякі випадкові величини просто не мають кількісного опису, тобто обґрунтованих одиниць вимірювання (рівень знань, якість продукції і под.);

- спостереження за величинами можливі, однак їх кількість надто мала для перевірки припущення (гіпотези) про тип розподілу.

В наш час у прикладній статистиці усе більшою популярністю користуються методи так званої ***непараметричної*** статистики, тобто, коли питання про належність розподілу ймовірностей даної величини до того або іншого класу взагалі не розглядається, однак задача оцінювання самої ВВ, тобто отримання інформації про неї, залишається.

Одним з основних понять непараметричної статистики є поняття

шкали або процедури ***шкалування*** значень ВВ. За своїм змістом така процедура шкалування полягає у вирішенні питання про «одиниці вимірювання» ВВ. Зазвичай прийнято використовувати чотири типи таких шкал.

Nom – номінальна шкала, тобто шкала, що застосовується до тих величин, що не мають природної одиниці вимірювання. Якщо деяка величина може приймати на своїй номінальній шкалі значення X, Y або Z, то справедливими вважаються тільки вирази типу: (X # Y), (X # Z), ($X = Z$), у той час як вирази типу ($X > Y$), ($X < Z$), ($X + Z$) не мають ніякого сенсу. Прикладами ВВ, до яких застосовні тільки номінальні шкали можуть бути такі величини, як стать, колір, марка автомобіля і под.

Ord. Другий спосіб шкалування, це використання ***порядкових*** шкал. Вони незамінні для ВВ, що не мають природних одиниць вимірювання, однак, вони дозволяють застосовувати поняття переваги одного значення над іншим. Типовий приклад: оцінювання знань (навіть при нечисловому опису), службові рівні і под. Для таких величин дозволені не лише відношення рівності (= або #), але й знаки переваги (> або <). Іноді говорять про ***ранги*** значень таких величин.

Int & Rel. Це два способи шкалування, що використовуються для ВВ, і які мають натуральні розмірності, тобто ***інтервальна*** і ***відносна*** шкала. Для таких величин, крім відношень рівності і переваги можуть застосовуватись операції порівняння, тобто, усі чотири дії арифметики. Головна особливість таких шкал полягає у тому, що різниця двох значень, наприклад, на шкалі (36 і 12) має один зміст для будь-якого місця шкали (28 і 4). Розходження між інтервальною шкалою і відносною є тільки у понятті ***нуля***, тобто на інтервальній шкалі 0 кг ваги означає відсутність ваги, а на відносній шкалі температур 0 градусів не означає відсутність теплоти, оскільки, можливі температури, що будуть нижчі 0 градусів за Цельсієм.

Звідси можна помітити ще одну перевагу, яку ми отримуємо під час використання методів непараметричної статистики, тобто, якщо ми стикаємося з ВВ неперервної природи, то використання інтервальної або відносної шкали дозволить нам мати справу не з випадковими величинами, а з випадковими подіями, тобто типу «ймовірність того, що вага продукції знаходиться в інтервалі 17 кг». Тому можна запропонувати єдиний підхід до опису ***всіх*** показників функціонування складної системи – ***опис на рівні простих випадкових подій*** (з ймовірністю $P(X)$ може відбутися подія X). При цьому під подією доведеться розуміти те, що випадкова величина займе одне з можливих для неї положень на шкалі ***Nom, Ord, Int*** або ***Rel.***

Зазвичай такий "мікроскопічний" підхід різко збільшує обсяг інформації, що необхідна для системного аналізу. Частково цей недолік пом'якшується при використанні комп'ютерних методів системного аналізу, але більш важливим є інше – перевага на початкових етапах аналізу, коли зважуються питання дезінтеграції великої системи (виділення окремих її елементів) і наступної її інтеграції для розроблення стратегії керування системою.

Не буде перебільшенням вважати, що методи непараметричної статистики – є могутнім засобом під час розв'язання задач системного аналізу у багатьох областях діяльності людини і зокрема в економіці.

3.3 Кореляція випадкових величин

Прямим означенням терміна ***кореляція*** (*correlation*) є стохастичний, ймовірний і можливий ***зв'язок*** між двома (парна) або кількома (множинна) випадковими величинами.

Вище говорилося про те, що якщо для двох ВВ (X і Y) має місце рівність $P(XY) = P(X)P(Y)$, то величини X і Y вважаються незалежними. Однак, якщо це не так? Адже завжди важливим є запитання – а наскільки залежить одна ВВ від іншої? І справа у властивому людям прагненні аналізувати що-небудь обов'язково у числовому вимірі. Зрозуміло, що системний аналіз означає неперервні обчислення, при цьому використання комп'ютера змушує нас працювати з *числами*, а не поняттями.

Для числового оцінювання можливого зв'язку між двома випадковими величинами Y (із середнім M_y і середньоквадратичним відхиленням S_y) та X (із середнім M_x і середньоквадратичним відхиленням S_x) прийнято використовувати ***коефіцієнт кореляції***

$$R_{xy} = \frac{\sum(X_i - M_x)\times(Y_i - M_y)}{n\times S_x\times S_y}. \tag{3.10}$$

Цей коефіцієнт може набувати значення від -1 до +1 залежно від тісноти зв'язку між даними випадковими величинами. Якщо коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, то X і Y називають ***некорельованими***. Вважати їх незалежними зазвичай немає підстав.

Виявляється, що існують такі, як правило, нелінійні зв'язки величин для яких $R_{xy} = 0$, хоча величини і залежать одна від одної. Зворотне завжди правильне – якщо величини ***незалежні***, то $R_{xy} = 0$. Однак, якщо модуль $R_{xy} = 1$, то є всі підстави думати про наявність лінійного зв'язку між X і Y. Саме тому часто говорять про ***лінійну кореляцію*** під час застосування такого способу оцінювання зв'язку між ВВ.

Відзначимо ще один спосіб оцінювання кореляційного зв'язку двох випадкових величин. Якщо додати добутки відхилень кожної з них від свого середнього значення, то отриману величину

$$C_{xy} = \sum(X - M_x)\times(Y - M_y), \tag{3.11}$$

або ***коваріацію*** величин X і Y відрізняє від коефіцієнта кореляції два показники: по-перше, усереднення (ділення на число спостережень або пар X, Y) і, по-друге, нормування шляхом ділення на відповідні середньоквадратичні відхилення. Таке оцінювання зв'язків між ВВ у складній системі є одним з початкових етапів системного аналізу, і тому вже тут постає питання про довіру до висновку про наявність або відсутність зв'язків між двома ВВ.

У сучасних методах системного аналізу зазвичай діють таким чином. За знайденим значенням R обчислюють допоміжну величину $W = 0,5\ Ln[(1 + R) / (1-R)]$, і питання про довіру до коефіцієнта кореляції зводять до довірчих інтервалів випадкової величини W, що визначаються стандартними таблицями або формулами.

В окремих випадках під час системного аналізу доводиться вирішувати питання про зв'язки кількох (більше 2) випадкових величин або питання про *множинну кореляцію*. Так, наприклад, нехай X, Y і Z – випадкові величини, під час спостереження за якими ми встановили їх середнє M_x, M_y, M_z і середньоквадратичні відхилення S_x, S_y, S_z. Тоді можна знайти ***парні*** коефіцієнти кореляції R_{xy}, R_{xz}, R_{yz} за наведеною вище формулою. Однак цього явно недостатньо, адже на кожному з трьох етапів ми забували про наявність третьої випадкової величини. Тому у випадках множинного кореляційного аналізу іноді потрібно відшукувати так званні ***часткові*** коефіцієнти кореляції, наприклад, оцінка впливу Z на зв'язок між X і Y здійснюється за допомогою коефіцієнта

$$R_{xy.z} = R_{xy.z} = \frac{R_{xy} - R_{xz} \times R_{yz}}{\sqrt{(1-(R_{xz})^2) \times (1-(R_{yz})^2)}} \qquad (3.12)$$

І, нарешті, можна поставити запитання. А який же є зв'язок між даною ВВ і сукупністю інших? Відповідь на це дають коефіцієнти ***множинної*** кореляції $R_{x.yz}$, $R_{y.zx}$, $R_{z.xy}$, формули для обчислення яких аналогічні тим же принципам, тобто із врахуванням зв'язків однієї з величин із всіма іншими у сукупності.

На складність обчислень всіх описаних показників кореляційних зв'язків можна не звертати особливої уваги. Програми для їх розрахунку досить прості і існують у готовому вигляді у багатьох програмах прикладного забезпечення сучасних комп'ютерів. Достатньо зрозуміти лише головне – якщо для формального опису елементів складної системи, сукупності таких елементів у вигляді підсистеми або системи у цілому, ми розглядаємо ***зв'язки*** між окремими її частинами, то ступінь тісноти зв'язків у вигляді впливу однієї ВВ на іншу можна і потрібно оцінювати на рівні кореляції.

Наприкінці відзначимо ще одне. В усіх випадках системного аналізу на кореляційному рівні обидві випадкові величини за умови парної або множинній кореляції вважаються «рівноправними». Тобто, мова йде про взаємний вплив ВВ одна на одну. Так буває далеко не завжди і часто питання про зв'язки X і Y ставиться інакше – тобто чи є одна з величин функцією від іншої величини (аргументу).

3.4 Лінійна регресія

У тих випадках, коли з природи процесів у системі або з даних спостережень над нею випливає висновок про нормальний закон розподілу двох ВВ – X і Y, з яких одна є незалежною, тобто Y є функцією від X, то виникає спокуса визначити таку залежність "формульно", аналітично. При цьому було б набагато простіше вести системний аналіз – особливо для елементів системи типу «вхід – вихід». Звичайно, найпривабливішою є лінійна залежність типу $Y = a + bX$. Подібна задача є задачею ***регресійного аналізу*** і має такий спосіб розв'язання. Висувається така ***гіпотеза***:

H_0 : випадкова величина Y для фіксованого значення величини X розподілена за *нормальним* законом з математичним сподіванням

$$M_y=a+bX, \tag{3.13}$$

і дисперсією D_y, що не залежить від X.

За наявності результатів спостережень над парами X_i і Y_i попередньо обчислюються середні значення M_y і M_x, а потім здійснюється оцінювання коефіцієнта b у вигляді:

$$b=\frac{\sum(X_i-M_x)\cdot(Y_i-M_y)}{\sum(X_i-M_x)^2}=R_x\frac{S_y}{S_x}, \tag{3.14}$$

що випливає з визначення коефіцієнта кореляції за (3.1). Після цього обчислюється оцінка для a у вигляді

$$a=M_y-b\cdot M_x, \tag{3.15}$$

і здійснюється перевірка значимості отриманих результатів. Таким чином, регресійний аналіз є потужним, хоча і далеко не завжди доступним розширенням кореляційного аналізу, розв'язуючи усе ту ж задачу оцінювання зв'язків у складній системі.

3.5 Елементи теорії статистичних рішень

Що таке – статистичне рішення? Як найпростіший приклад розглянемо ситуацію, у якій треба зіграти у таку гру:

- вам заплатять 2 долари, якщо підкинута монета впаде догори гербом;
- ви заплатите 1 долар, якщо вона впаде гербом униз.

Швидше за все, ви погодитеся зіграти, хоча розумієте ступінь ризику. Ви усвідомлюєте, «*знаєте*» про рівноймовірні появи герба і «*обчислюєте*» свій виграш $0{,}5\cdot2 - 0{,}5\cdot1=+\$0{,}5$.

Ускладнимо цю гру. Ви бачите, що монета трохи вигнута і можливо буде падати частіше однією зі сторін. Тепер рішення грати або не грати як і раніше залежить від ймовірності виграшу, що не може бути заздалегідь (по-латинському – ***apriori***) прийнята рівною 0,5.

Людина, що знайома із статистикою, спробує ***оцінити*** цю ймовірність за допомогою дослідів, якщо зазвичай вони можливі і коштують не дуже дорого. Звідси виникає запитання – скільки таких підкидань вам буде досить?

Нехай ви платите 5 центів за одне експериментальне підкидання, а ставки у грі складають $2000 проти $1000. Швидше за все ви погодитесь грати, заплативши порівняно невелику суму за 100..200 експериментальних підкидань. Ви напевно будете вести підрахунок вдалих падінь і, якщо їх число складе 20 з 100, припините експеримент і зіграєте на ставку $2000 проти $1000, оскільки ***очікуваний*** виграш оцінюється у $0,8{\cdot}2000 + 0,2{\cdot}1000 - 100{\cdot}0,05 = \$1795$.

У наведених прикладах головним для прийняття рішення була ймовірність успішного результату падіння монети. У першому випадку – апріорна ймовірність, а у другому – апостеріорна. Таку інформацію прийнято називати ***даними про стан природи***.

Наведені приклади мають безпосереднє відношення до сутності нашого предмета. І справді – під час системного керування доводиться приймати рішення в умовах, коли наслідки таких рішень заздалегідь вірогідно невідомі. При цьому питання: грати чи не грати – не стоїть! «Грати» треба, тобто ***треба керувати*** системою. Ви запитаєте – а як же заборона на експерименти? Відповідь можна дати таку – сама поведінка системи у звичайному її стані може розглядатися як експеримент, з якого для правильної організації збирання та оброблення інформації про поведінку системи можна чекати на одержання даних для з'ясування особливості системного підходу до розв'язання задач керування.

Для детальнішого розуміння теорії статистичних рішень розглянемо такий приклад. Нехай для характеристики об'єктів використовується ознака x, а уся їх сукупність розбита на два класи Ω_1 і Ω_2 [10]. При цьому вважатимемо, що відомі описи цих класів, тобто відомі умовні щільності розподілу ймовірностей $f_1(x)$ і $f_2(x)$ значень ознаки об'єктів класів Ω_1 і Ω_2, а також апріорні ймовірності $P(\Omega_1)$ і $P(\Omega_2)$ появи об'єктів.

Нехай за результатами експерименту визначено значення ознаки x^0 досліджуваного об'єкта (рис. 3.2).

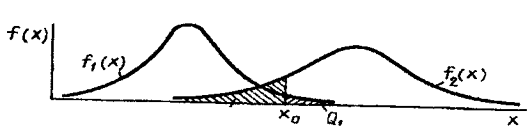

Рисунок 3.2 – Розподіл об'єктів двох класів за ознакою x

Щоб прийняти рішення до якого класу віднести досліджуваний об'єкт, позначимо через x^0 деяке доки ще невизначене значення ознаки x_0, і домовимося про таке правило. Якщо значення ознаки задовольняє умову $x^0 > x_0$, то об'єкт відносимо до класу Ω_2, а якщо задовольняється умова $x^0 \le x_0$, - то до класу Ω_1.

При цьому, якщо об'єкт відноситься до класу Ω_1, а його вважають об'єктом класу Ω_2, то це свідчить про помилку прийняття рішення – ***помилка першого роду***, умовна ймовірність якої визначається за виразом

$$Q_1 = \int_{x_0}^{\infty} f_1(x)dx. \tag{3.16}$$

Відповідно до термінології теорії статистичних рішень у цьому випадку помилково вибрана гіпотеза H_2, у той час коли правильною є гіпотеза H_1. І навпаки, коли правильною є гіпотеза H_2, а віддана перевага гіпотезі H_1, то вчинена ***помилка другого роду***, умовна ймовірність якої визначається як

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{x_0} f_2(x)dx. \tag{3.17}$$

Умовні ймовірності правильних рішень для випадків справедливості гіпотез H_1 і H_2 визначаються як:

$$D_1 = 1 - Q_1 = F\left[\frac{(x_0 - m_1)}{\sigma_1}\right];$$

$$D_2 = 1 - Q_2 = 1 - F\left[\frac{(x_0 - m_2)}{\sigma_2}\right], \tag{3.18}$$

де D_1 – визначає *розмірність іспитів*, а D_2 – їх *потужність*.

Міркування, якими слід керуватися під час вибору значення ознаки x_o (розбиття простору ознаки x на півпростори R_1 і R_2) повинні враховувати втрати, що пов'язані з правильними і помилковими рішеннями. Ці втрати зазвичай описують у вигляді платіжної матриці

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11}, c_{12} \\ c_{21}, c_{22} \end{Vmatrix}, \tag{3.19}$$

де c_{11} і c_{22}, c_{12} і c_{21} – втрати, що пов'язані відповідно з правильними рішеннями і помилками першого і другого виду.

При цьому, у випадку багатократного застосування задачі прийняття рішень, середній ризик буде дорівнювати сумі втрат, що пов'язані з неправильними і правильними рішеннями, з урахуванням ймовірностей їх появи і апріорних ймовірностей появи об'єктів класів Ω_1 і Ω_2

$$\bar{R} = P(\Omega_1)c_{11}(1-Q_1) + P(\Omega_1)c_{12}Q_1 + R(\Omega_2)c_{22}(1-Q_2) + P(\Omega_2)c_{21}Q_2 . \tag{3.20}$$

Підставляючи у (3.20) вирази (3.16) і (3.17), отримаємо

$$\bar{R} = P(\Omega_1)\left[c_{11}\int_{-\infty}^{x_0} f_1(x)dx + c_{12}\int_{x_0}^{\infty} f_1(x)dx\right] +$$

$$+ P(\Omega_2)\left[c_{22}\int_{x_0}^{\infty} f_2(x)dx + c_{21}\int_{-\infty}^{x_0} f_2(x)dx\right]. \tag{3.21}$$

Оскільки прийняття рішень практично завжди є задачею багатократного застосування, значення x_o слід вибирати таким чином, щоб значення середнього ризику було мінімальним. Щоб визначити значення x_0, для якого середній ризик буде мінімальним, знайдемо його диференціал за x і прирівняємо отриману похідну до нуля, поклавши що x=x_0

$$\left|\frac{d\bar{R}}{dx}\right| = P(\Omega_1)[c_{11}f_1(x_0) - c_{12}f(x_0)] + P(\Omega_2)[c_{21}f_2(x_0) - c_{22}f_2(x_0)] = 0 , \tag{3.22}$$

звідки можна записати, що

$$\frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)} = P(\Omega_1)(c_{12} - c_{11})/P(\Omega_2)(c_{21} - c_{22}). \tag{3.23}$$

Відношення умовних щільностей розподілу $f_2(x)/f_1(x) = \lambda(x)$ називають *коефіцієнтом* або *відношенням правдоподібності* (*plausibility rate*). При цьому права частина виразу (3.23)

$$P(\Omega_1)(c_{12} - c_{11})/P(\Omega_2)(c_{21} - c_{22}) = \lambda_0 \tag{3.24}$$

визначає *порогове (критичне) значення коефіцієнта правдоподібності.*

Значення x_o дозволяє оптимально (з точки зору мінімуму середнього ризику) розбити простір значень ознаки x на області R_1 і R_2. Область R_1 включає значення $x \le x_0$, для яких $\lambda(x) \le \lambda_0$, а область R_2 – значення $x > x_0$, для яких $\lambda(x) > \lambda_0$. Тому рішення про віднесення досліджуваного об'єкта до класу Ω_1 слід приймати, якщо значення коефіцієнта правдоподібності менше або дорівнює його критичному значенню. Інакше, об'єкт слід віднести до класу Ω_2.

У загальному випадку, коли число класів $m > 2$, а об'єкти описуються набором ознак $x_1,..., x_N$ або вектором $x = \{x_1,..., x_N\}$, відношення правдоподібності між класами Ω_k і Ω_l буде визначатися як

$$\lambda_{kl} = f_k(x)/f_l(x), \quad k,l=1,..., m, \tag{3.25}$$

платіжна матриця має вигляд

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{m1}, c_{m2}, \ldots, c_{mm} \end{Vmatrix}, \tag{3.26}$$

а середній ризик обчислюється за виразом

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} P(\Omega_k) c_{kl} \int_{Dk} f_k(x)dx. \tag{3.27}$$

З умови мінімуму значення середнього ризику рівняння границь у багатовимірному просторі ознак між областями D_k і D_l, що відповідають класам Ω_k і Ω_l, буде визначатися як

$$P(\Omega_k) f_k(x)(c_{kl} - c_{kk}) - P(\Omega_l) f_l(x)(c_{lk} - c_{ll}) = 0. \tag{3.28}$$

При цьому, якщо покласти, що $c_{kk} = c_{ll} = 0$, а $c_{kl} = c_{lk} = 1$, то будемо мати:

$$P(\Omega_k) f_k(x) - P(\Omega_l) f_l(x) = 0;$$
$$\log P(\Omega_k) f_k(x) / [P(\Omega_l) f_l(x)] = 0^*. \tag{3.29}$$

3.5.1 Критерій Байєса

Критерій Байєса (*Bayesian criterion*) – правило, за яким стратегія прийняття рішень вибирається таким чином, щоб забезпечити мінімум середнього ризику. Застосування критерію Байєса доцільне для систем багатократного розпізнавання в умовах незмінного простору ознак, незмінного опису класів і незмінної платіжної матриці.

З теорії статистичних рішень відомо, що мінімум середнього ризику забезпечується тільки тоді, коли рішення про віднесення об'єктів до класів Ω_1 або Ω_2 приймаються за правилом: *якщо виміряне значення ознаки об'єкта знаходиться в області R_1, то об'єкт відносять до класу Ω_1, а якщо це значення знаходиться в області R_2 – до класу Ω_3.*

Стратегію і мінімальний середній ризик, що визначаються за таким правилом, називають *байєсівськими*.

Байєсівска стратегія може бути описана також і таким чином. Нехай за результатами дослідів встановлено, що значення ознаки об'єкта визначається як $x = x^0$. Тоді умовна ймовірність приналежності об'єкта до класу Ω_1 (умовна ймовірність першої гіпотези) згідно з теоремою гіпотез або формулою Байєса визначиться як

$$P(\Omega_1/x^0) = P(\Omega_1) f_1(x^0) / f(x^0), \qquad (3.30)$$

а умовна ймовірність приналежності об'єкта класу Ω_2 (умовна ймовірність другої гіпотези) – як

$$P(\Omega_2/x^0) = P(\Omega_2) f_2(x^0) / f(x^0), \qquad (3.31)$$

де $f(x^0) = P(\Omega_1) f_1(x^0) + P(\Omega_2) f_2(x^0)$ – спільна щільність розподілу ймовірностей значень ознаки x за класами;

$P(\Omega_1| x^0)$ і $P(\Omega_2| x^0)$ – *апостеріорні* ймовірності того, що досліджуваний об'єкт належить класам Ω_1 і Ω_2, відповідно.

При цьому умовні ризики, що пов'язані з рішеннями $\omega \in \Omega_1$ і $\omega \in \Omega_2$, будуть визначатися як

$$R(\Omega_1/x^0) = c_2 P(\Omega_2/x^0); \quad R(\Omega_2/x^0) = c_1 P(\Omega_1/x^0). \qquad (3.32)$$

Система розпізнавання за байєсівською стратегією повинна розв'язувати задачу з мінімальним умовним ризиком. Це означає, що перевагу рішенню $\omega \in \Omega_1$ слід віддавати тільки тоді, коли виконується умова

$$[R(\Omega_1 | x^0) / R(\Omega_2 | x^0)] < 1. \qquad (3.33)$$

Підставимо у цей вираз значення $R(\Omega_1 | x^0)$ і $R(\Omega 2 | x^0)$, що визначені за (3.32). Тоді нерівності

$$c_1 R(\Omega_1 | x^0) > c_2 R(\Omega_2 | x^0),$$

або

$$[R(\Omega_1 | x^0) / R(\Omega_2 | x^0)] > c_2/c_1 \qquad (3.34)$$

будуть визначати умови, за якими слід приймати рішення, що $\omega \in \Omega_1$.

Таким чином, байєсівський підхід до розв'язання задачі прийняття рішення полягає в обчисленні умовних апостеріорних ймовірностей і порівняння їх значень. Саме це і забезпечує мінімум середнього ризику, а значить і помилкових рішень. Узагальнюючи вищеописане для числа варіантів рішень m>2, апостеріорна ймовірність віднесення об'єкта до класу Ω_i буде визначатися як

$$P(\Omega_i/x^0) = P(\Omega_i) f_i(x^0) \Big/ \sum_{i=1}^{m} P(\Omega_i) f_i(x^0). \qquad (3.35)$$

При цьому, якщо об'єкт або система до того ж характеризується ознаками x_j, $j = \overline{1,N}$, і ці ознаки прийняли значення $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$, $x_n = x_N^0$, ймовірність того, що за умови появи події $A_n = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0)$, об'єкт відноситься до i-го класу дорівнює

$$P(\Omega_i | A_N) = [P(\Omega_i) f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)] / \Sigma^m P(\Omega_i) f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \qquad (3.36)$$

Розглянемо ще одну форму запису байєсівського критерію віднесення об'єкта до відповідного класу. Нехай є класи Ω_1 і Ω_2 . Апріорні ймовірності появи об'єктів цих класів будуть відповідно $P(\Omega_1)$ і $P(\Omega_2)$, $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} = c_1$ і $c_{21} = c_2$. Відомі також багатомірні умовні щільності розподілу ймовірностей значень ознак $f_1(x_1,..., x_n)$ і $f_2(x_1,..., x_n)$ за класами. Тоді умовні ймовірності помилок першого і другого роду будуть визначатися як:

$$Q_1 = \int_{R2}...\int f_1(x_1,..., x_n)dx_1,..., dx_n\ , \quad Q_2 = \int_{R1}...\int f_2(x_1,...,x_n)dx_1,..., dx_n\ . \qquad (3.37)$$

Середній ризик, при цьому буде визначатись за виразом

$$\overline{R} = c_1P(\Omega_1)Q_1 + c_2P(\Omega_2)Q_2\ . \qquad (3.38)$$

Оскільки інтеграл від щільності розподілу ймовірності по областях R_1 *і* R_2 дорівнює одиниці, то Q_1=1- $\int...\int f_1(x_1...x_n)dx_1,....dx_n$, звідки

$$\overline{R} = c_1P(\Omega_1) + \int\limits_{R_i}\left[c_2P(\Omega_2)f_2(x_1,...,x_N) - c_1P(\Omega_1)f_1(x_1,...,x_N)\right]dx_1,...,dx_N\ . \qquad (3.39)$$

Задача полягає у тому, щоб мінімізувати значення середнього ризику. Для цього необхідно так вибрати області R_i і $P_ч$, щоб інтеграл у (3.39) прийняв найбільше від'ємне значення. Це досягається тоді, коли вираз під інтегралом приймає найбільше від'ємне значення і поза областю R_i не існує такої області, де вираз під інтегралом буде від'ємним, тобто

$$c_2P(\Omega_2)\, f_2(x_1,..., x_m) - c_2P(\Omega_1)\, f_1(x_1,..., x_n) < 0. \qquad (3.40)$$

Звідси випливає вже відоме правило прийняття рішень. Досліджуваний об'єкт, ознаки якого, як встановлено за результатами експерименту, дорівнюють $x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,..., x_n = x^0_n$, то відноситься до класу Ω_1, якщо

$$\frac{f_2\left(x_1^{\,0},\ldots x_N^{\,0}\right)}{f_1\left(x_1^{\,0},\ldots x_N^{\,0}\right)} > \frac{c_1P(\Omega_1)}{c_2P(\Omega_2)}, \qquad (3.41)$$

де $c_1 P(\Omega_1)/c_2 P(\Omega_2) = \lambda_o$ - *порогове* значення коефіцієнта правдоподібності.

3.5.2 Мінімаксний критерій

На практиці можливі такі ситуації, коли апріорні ймовірності появи об'єктів відповідних класів невідомі. У цьому випадку мінімізувати значення середнього ризику прийняття рішень за байєсівською стратегією не вдається. У цій ситуації доцільно використовувати критерій, що мінімізує максимально можливе значення середнього ризику (*мінімаксний критерій*).

Мінімаксна стратегія полягає у тому, що рішення про приналежність об'єкта відповідному класу приймається на основі байєсівської стратегії, що відповідає такому значенню $P(\Omega_i)$, для якого середній ризик буде максимальним. Покажемо перевагу мінімаксної стратегії у порівнянні з іншими в умовах, коли невідомі значення $P(\Omega_i)$, $i = 1,..., m$.

За наявності класів Ω_1 і Ω_2 байєсівський ризик з урахуванням того, що $P(\Omega_2) = 1-P(\Omega_1)$, $c_{11} = c_{22} = 0$, а $c_{12} = c_1$ і $c_{12} = c_2$, рівні

$$\bar{R}_{min} = P(\Omega_1)c_1\int_{x_0}^{\infty} f_1(x)dx + [1 - P(\Omega_1)]c_2\int_{-\infty}^{x_0} f_2(x)dx. \tag{3.42}$$

Побудуємо графік функції $R_{min}=f\ [P(\Omega_l)]$, пам'ятаючи при цьому, що для $P(\Omega_l) = 0$ і $P(\Omega_l) = 1$ $R_{min} = 0$ (рис. 3.3).

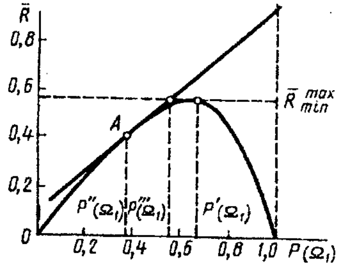

Рисунок 3.3 – Графік функції $R_{min}=f\,[P(\Omega_l)]$

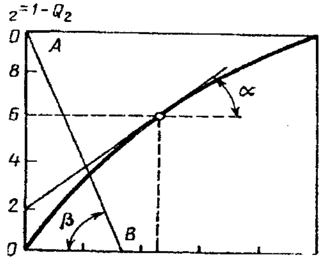

Рисунок 3.4 – Характеристика

Нехай R_{min} досягає свого найбільшого значення при $P(\Omega_l) = P'(\Omega_l)$. Цей ризик дає максимальне значення мінімального байєсівського ризику (позначимо його як R_{min}^{max}). Застосування мінімаксного критерію означає, що за відсутності даних щодо апріорних ймовірностей появи об'єктів слід орієнтуватися на $P(\Omega_l)=P'(\Omega_l)$, а середні втрати визначаються дотичною до кривої $R=f[P(\Omega_l)]$ у точці $P'(\Omega_l)$.

Для визначення алгоритму прийняття рішення відповідно мінімаксній стратегії, продиференціюємо (3.42) за $P(\Omega_l)$ і прирівняємо цю похідну до нуля. У результаті отримаємо

$$c_1Q_1(x_0) = c_2Q_2(x_0). \tag{3.43}$$

Це співвідношення, що описує рівність умовних значень середніх ризиків при помилках першого і другого роду, дозволяє визначити x_0 і побудувати такий алгоритм класифікації. Якщо значення ознаки x об'єкта ω дорівнює x^0, то $\omega \in \Omega_l$ якщо $x = x^0 \leq x_0$, і $\omega \in \Omega_2$ якщо $x = x^0 > x_0$.

Мінімаксна стратегія, що пропонує значення $P(\Omega_l) = P'(\Omega_l)$, дає порогове значення коефіцієнта правдоподібності

$$\lambda_0' = \frac{c_1}{c_2} \times \frac{P'(\Omega_1)}{1 - P'(\Omega_1)}. \tag{3.44}$$

Визначення λ_0' дозволяє записати алгоритм класифікації у вигляді: $\omega \in \Omega_l$, якщо $\lambda(x) \leq \lambda_0'$ і $\omega \in \Omega_2$, якщо $\lambda(x) > \lambda_0'$. При цьому, якщо $c_l = c_2$, то мінімаксна стратегія призводить до рівності умовних ймовірностей помилок першого і другого роду.

На завершення відзначимо, що *мінімаксна стратегія є байєсівською стратегією для найгірших значень апріорних ймовірностей, що дасть хоча і обережне, але гарантоване значення середнього ризику.*

3.5.3 Критерій Неймана-Пірсона

На практиці часто буває, що можуть бути невідомі не тільки апріорні ймовірності появи об'єктів відповідних класів, але й платіжні матриці. У таких системах для побудови алгоритму класифікації доцільно скористатися критерієм *Неймана - Пірсона*, суть якого полягає у такому.

Виходячи з того, що рішення приймаються за результатами експерименту над об'єктами, визначається допустиме (задане) значення умовної ймовірності помилки першого роду, а після цього визначається така границя між класами прийняття рішень, дотримуючись якої вдається досягти мінімуму умовної ймовірності помилки другого роду.

Нехай з деяких міркувань прийнято рішення, що допустима умовна ймовірність помилки першого роду не повинна перевищувати деякої сталої величини $Q_1 \le A$. Треба визначити x_0 для задачі $minQ_2 = min\int f_2(x)dx$ за обмежень типу $Q_1 = \int f_2(x)dx \le A$. Очевидно, що рішення x_o задовольняє рівняння $\int f_1(x)dx = A$, оскільки для значення $x_0' > x_0$ умовна ймовірність помилок другого роду Q_2 зростає. Обрати ж значення $x_0' << x_0$ не можна за умовою задачі.

На завершення розглянемо геометричну інтерпретацію вищевказаних критеріїв. Для цього в координатах $D_i = 1 - Q_i$ і Q_i побудуємо характеристику (рис. 3.4), відзначаючи що для $Q_1 = 0$ $Q_2 = 1$ і $D_2 = 0$, і навпаки, для $Q_1 = 1$ $Q_2 = 0$ і $D_2 = 1$. Оскільки $Q_1 = \int f_1(x)dx$, а $D_2 = \int f_2(x)dx$, то продиференціювавши D_2 за Q_1, отримаємо, що

$$\frac{dD_2}{dQ_1} = \frac{dD_2/dx_0}{dQ_2/dx_0} = \frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)} = \lambda_0. \tag{3.45}$$

Однак диференціал dD_2/dQ_1 є тангенсом кута нахилу дотичної до робочої характеристики для $\lambda = \lambda_o$. Тому для визначення Q_1 і D_1 на основі застосування критерію Байєса на робочій характеристиці знайдемо точку, дотична у якій має нахил, що дорівнює $\lambda_o = [P(\Omega_1)\, c_1/P(\Omega_2)\, c_2]$, тобто $tg\alpha = \lambda_0$. Тепер ордината цієї точки визначає умовну ймовірність правильного рішення, а абсциса – означає умовну ймовірність помилки першого роду.

Для визначення Q_1 і D_2 за мінімаксним критерієм необхідно враховувати, що похідна від середнього ризику за апріорною ймовірністю $P(\Omega_1)$ у точці його максимуму дорівнює нулю. Оскільки

$$R = c_{11}P(\Omega_1)(1-Q_1)+c_{12}P(\Omega_1)Q_1+c_{22}[1-P(\Omega_1)]D_2+c_{21}[1-P(\Omega_1)](1-D_2), \quad (3.46)$$

то

$$\partial R/\partial P(\Omega_1) = c_{11}(1-Q_1)+c_{12}Q_1 - c_{22}D_2 - c_{21}(1-D_2) = 0. \quad (3.47)$$

В координатах Q_1 і Q_2 це рівняння прямої і якщо $c_{11} = c_{22}$, то

$$D_2 = Q_1[c_{11} - c_{12})/(c_{21} - c_{22})]+1 \quad (3.48)$$

з кутовим коефіцієнтом $\gamma = tg\beta = [(c_{11}-c_{12})/(c_{21}-c_{22})]+1$.

Проведемо на графіку (рис. 3.4) цю пряму AB. Координати точки перетину цієї прямої з робочою характеристикою визначають умовні ймовірності Q_1 і $D_2 = 1-Q_2$ в умовах застосування мінімаксного критерію. Тангенс кута нахилу дотичної у цій точці дорівнює λ_o.

3.5.4 Критерій послідовних рішень

Раніше припускалося, що рішення про належність об'єкта, що розпізнається, відповідному класу Ω_i, $i = 1,\dots, m$, приймається після вимірювання усієї сукупності ознак об'єкта $x_1,\dots,x_n$. Однак можливий й інший підхід до розв'язання цієї задачі: після вимірювання кожної чергової ознаки x_1; x_1, x_2; x_1, x_2, x_3 і т. д. включається алгоритм розпізнавання і розв'язується задача прийняття рішення на основі даних про виміряні до поточного моменту ознаки досліджуваного об'єкта. При цьому залежно від результатів порівняння отриманих значень з деякими встановленими заздалегідь границями або вимірюється чергова ознака об'єкта ω, або припиняється подальше накопичення інформації про об'єкт. Така процедура розв'язання задачі прийняття рішень, що називається *послідовною*, зобов'язана своїм виникненням одному з розділів статистики – послідовному аналізу [7, 20].

Послідовне і багатократне розв'язання задачі прийняття рішень з використанням на кожнім кроці усе зростаючого числа виміряних ознак особливо доцільно у випадках, коли визначення ознак пов'язано із витратами на проведення експериментів (процес накопичення експериментальних даних вимагає витрат значної кількості годин, проведення експериментів пов'язано з певним ризиком (наприклад, при порушенні медичного діагнозу), об'єкти ряду класів з їх загальної сукупності надійно розпізнаються за обмеженою кількістю ознак. Розглянемо сутність послідовної процедури прийняття рішень.

Нехай множина прийняття рішень розділена на класи Q_i, при цьому робочий словник містить ознаки $x_1,\dots,x_n$ і функції умовної щільності розподілу ймовірностей будуть $f_i(x_1); f_i(x_1, x_2); \dots; f_i(x_1,\dots,x_4,)$, $i = 1, 3$.

Припустимо, що проведено серію з n експериментів, у результаті яких визначено ознаки $x_1,\dots,x_n$ ($n<N$). Зіставимо відношення n-мірних функцій

умовних щільностей розподілу ймовірностей $\lambda_n=f_1(x_1,..., x_n)/f_2(x_1,...,x_n)$ з величиною A і B. При цьому будемо враховувати таке: якщо $\lambda_n \geq A$, то проведення експериментів припиняється і приймається рішення про те, що $\omega \in \Omega_1$, а якщо $\lambda_n \leq B$, то проведення експериментів також припиняється і приймається рішення про те, що $\omega \in \Omega_2$. Якщо ж $B < x_n < A$, то приймається рішення, що експерименти необхідно продовжити і визначається чергова $(n + 1)$-a ознака досліджуваного об'єкта.

Сталі A і B, що називаються *верхнім* і *нижнім порогом,* можуть бути визначені з таких міркувань. Нехай після вимірювання n ознак $\lambda_n = A$, тоді позначимо $'x_n'=\{x_1,...,x_n\}$, і отримаємо $f_i(x_n)=Af_2(x_n)$ або

$$_{Gi}\int f_1(x_n)dx_n = A\int f_2(x_n)dx_n, \tag{3.49}$$

де G_i – область простору ознак щодо класу Ω_1.

За визначенням умовної ймовірності помилок першого і другого роду можна записати, що $1\text{-}Q_1=AQ_2$. Аналогічні міркування приводять до співвідношення $Q_1 = B(1\text{-}Q_2)$. Звідси, у загальному випадку

$$A \leq [(1\text{-}Q_1)/Q_2], \quad B \geq [Q_1/(1\text{-}Q_2)]. \tag{3.50}$$

Таким чином, для визначення порогів A і B необхідно задатися допустимими значеннями помилок першого і другого роду.

Якщо число класів прийняття рішень $m > 2$, то послідовна процедура полягає у такому. Виходячи з того, що рішення будуть прийматися після розпізнавання невідомих об'єктів, задаються допустимі значення ймовірностей правильних (e_{ii}) і помилкових (e_{iq}) рішень, що дозволяє визначити значення порогів для кожного класу, тобто

$$A(\Omega_i)=(1-e_{ii})/\left[\prod_{q=1}^{m}(1-e_{iq})^{m-1}\right], i=1,\dots,m;\ q\neq i. \tag{3.51}$$

Нехай у результаті проведення деякої сукупності експериментів визначено вектор ознак $x_n=\{X_1^0,..., x_n^0\}$ і розраховано відношення ймовірностей

$$\lambda_n(X_n^0 \mid \Omega_i) = f_i(X_n^0)\ [_{q=1}\Pi^m f_n^0(X_n^0)]^{m-1}. \tag{3.52}$$

Зіставимо $\lambda_n(X_n^0 \mid \Omega_i)$ з відповідним порогом $A(\Omega_i)$, i=1,...,m. Якщо $\lambda_n(X_n^0 \mid \Omega_i) < A\ (\Omega_i)$, то приймається рішення про те, що $\omega \in \Omega_i$. Якщо ж наявність апостеріорної інформації про знайдені ознаки не дозволяє виключити всі класи, окрім одного, то здійснюється наступний експеримент з метою визначення ознаки x_n+1. Після цього визначається $\lambda_{n+1}(x_n + 1^0 \mid \Omega_i)$ і здійснюється його порівняння з порогом $A(\Omega_i)$. Якщо при цьому знов не вдається встановити, що об'єкт відноситься саме до даного класу, то приймається рішення провести черговий експеримент з метою визначення ознаки x_n+2.

Подібна процедура послідовного знаходження ознак – **визначення** коефіцієнта правдоподібності $\lambda_I(x_I^0/\Omega_i)$,..., $\lambda_n(X_n^0/\Omega_i)$ і зіставлення його значення з порогом $A(\Omega_i)$ здійснюється до тих пір, доки послідовним виключенням не вдасться прийняти рішення про належність об'єкта саме до цього класу.

3.5.5 Регуляризація задачі прийняття рішень

Відповідно до стратегії Байєса, якщо у досліджуваного об'єкта (системи) виміряне значення ознаки $x = x^0$, то $\omega \in \Omega_I$ при $x^0 \le x_0$ і $\omega \in \Omega_2$ при $x^0 > x_0$. Хоча розв'язання $x = x^0$ і забезпечує мінімум середнього (байєсівського) ризику, тобто, $R(x_0) = min\bar{R}(x)$, таке правило прийняття рішень за наявності помилок вимірювання є нестійким.

Якщо значення ознаки x вимірюється з деякою точністю ∂x, то для діапазону його модифікації $(x_o - \partial x,\ x_o + \partial x)$ рішення, що приймається за значенням $x = x^0$ (вибраний клас), може відрізнятися від того, що відповідає істинному значенню ознаки x. Тому область значень ознаки $(x_o - \partial x,\ x_o + \partial x)$ може бути названа ***областю нестійкості*** стратегії мінімізації середнього ризику (стратегії Байєса).

Загальний підхід до некоректних задач, що мають нестійкі рішення, запропоновано академіком А. Н. Тихоновим, що полягає у їх регулюванні, тобто у такій модифікації, за якою знову отримана задача є близькою до вихідної і характеризується властивістю тривалості. Щодо даної задачі системного аналізу цей підхід можна реалізувати таким чином.

Трансформуємо вищенаведене правило прийняття рішень таким чином, щоб в межах зони нестійкості $(x_o - \partial x,\ x_o + \partial x)$ алгоритм відмовляється від прийняття будь-якого рішення. За зоною нестійкості, якщо виміряне значення ознаки дорівнює $x = x^0$, то приймається рішення $\omega \in \Omega_I$ при $x^0 \le x_o - \partial x$ або рішення $\omega \in \Omega_2$ при $x^0 > x_o + \partial x$.

Використання такого алгоритму виключає нестійкі рішення задачі за рахунок того, що з'являються такі значення ознаки $x = x \pm \partial x$, в межах яких алгоритм не дає відповіді на запитання про те, до якого класу слід віднести досліджуваний об'єкт або систему.

Регуляризація задачі прийняття рішень приводить до того, що зменшуються помилки першого і другого роду:

$$Q_I^p = \int_{x_0+\delta x}^{+\infty} f_I(x)dx = Q_I - \int_{x_0}^{x_0+\delta x} f_I(x)dx;$$

$$Q_2^p = \int_{-\infty}^{x_0+\delta x} f_2(x)dx = Q_2 - \int_{x_0-\delta x}^{x_0} f_2(x)dx, \qquad (3.53)$$

а також зменшується і регуляризоване значення середнього байєсівського ризику:

$$\bar{R}^{p}_{min} = P(\Omega_1)\left[c_{11} \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta x} f_1(x)\,dx + c_{12} \int\limits_{x_0+\delta x}^{\infty} f_1(x)\,dx \right] + $$
$$+ P(\Omega_2)\left[c_{22} \int\limits_{x_0+\delta x}^{\infty} f_2(x)\,dx + c_{21} \int\limits_{-\infty}^{x_0-\delta x} f_2(x)\,dx \right]. \quad (3.54)$$

При цьому

$$\Delta\bar{R} = \bar{R}_{min} - \bar{R}^{p}_{min} = P(\Omega_1)\left[c_{11} \int\limits_{x_0-\delta x}^{x_0} f_2(x)\,dx + c_{12} \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x} f_1(x)\,dx \right] + $$
$$+ P(\Omega_2)\left[c_{22} \int\limits_{x_0}^{x_0+\delta x} f_2(x)\,dx + c_{11} \int\limits_{x_0-\delta x}^{x_0} f_2(x)\,dx \right]. \quad (3.55)$$

Оцінимо ймовірність відмови системи від встановлення класу, до якого можна віднести досліджуваний об'єкт або систему. Ця ймовірність відмови

$$P_{ВІД} = P(\Omega_1) \int\limits_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} f_1(x)\,dx + P(\Omega_2) \int\limits_{x_0-\delta x}^{x_0+\delta x} f_2(x)\,dx \quad (3.56)$$

залежить безпосередньо від точності вимірювання досліджуваної ознаки.

Очевидно, що слід намагатись по можливості мінімізувати область нестійкості стратегії Байєса. Це може бути досягнуто за рахунок зменшення величини δx_j, $j = 1,..,N$. Однак у загальному випадку це пов'язано із збільшенням витрат ресурсів, величина яких не може бути необмеженою. При цьому виникає запитання – точність якого вимірювача слід підвищувати?

Як показано у [19], інформативність ознак – це величина не абсолютна, а умовна. Тому відповіді на поставлене запитання, напевне, не існує. Однак евристична рекомендації прикладного характеру можуть полягати у такому. Передусім необхідно знайти найінформативнішу ознаку робочого словника ознак у припущенні, що він визначається на першій стадії експериментів. Доцільно забезпечити максимально можливу точність вимірювання цієї ознаки (наприклад x_l, $l = 1,...,N$). Далі слід визначити таку ознаку x_k, $k = 1,..., N$, $k \neq l$, вимірювання якої вносить у системний аналіз найбільшу кількість інформації у припущенні, що на попередньому кроці визначено ознаку x_j, тобто $j = max\ I(x_{jl} | x_i)$.

У цьому рівнянні кількість інформації підраховують для усіх можливих значень ознак x_k, x_l, x_j, k, I, $j = l,..., N$, $k \neq l \neq j$. Після цього процедура повторюється, тобто визначають $I(x_r | x_k, x_l) = max_j\ I(x_j | x_k\ x_l)$, r, k, l, $=1,...,N$, $k \neq l \neq j \neq r$.

Як правило, визначення вже декількох ознак виявляється достатнім для вирішення запитання, що нас цікавить. Саме між вимірювачами, що призначені для визначення ознак x_l, x_k, x_r, доцільно розподілити основну частину ресурсів, що призначені для апаратурного забезпечення системного аналізу. При цьому слід підвищувати їх точнісні характеристики, що забезпечить, у свою чергу, зменшення області нестійких рішень під час використання цих ознак.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Назвіть основні поняття, що використовуються в задачах математичної статистики.
2. Дайте означення основних характеристик випадкових подій і величин.
3. Які закони розподілу випадкових величин Ви знаєте? Які використовуються в задачах СА?
4. При якому розподілі випадкової величини розсіювання її значень буде найбільшим?.
5. В яких випадках використовується формула Байєса при розгляді випадкових подій?
6. Поясніть різницю між параметричною і непараметричною статистикою?
7. В чому полягає процедура шкалування і які бувають способи шкалування?
8. Дайте означення терміна „кореляція".
9. Що таке коефіцієнт кореляції і які значення він може приймати?
10. Дайте означення терміна „коваріація".
11. В чому полягає задача регресійного аналізу?
12. Що таке статистичне рішення?
13. Що таке помилка першого та другого роду при прийнятті рішень?
14. Охарактеризуйте критерій Байєса.
15. У чому полягає мінімаксна стратегія?
16. У чому полягає суть критерія Неймана - Пірсона?
17. У чому полягає послідовна процедура розв'язання задачі прийняття рішень?
18. У чому полягає регуляризація задачі прийняття рішень?

4 МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

4.1 Введення у теорію систем масового обслуговування

Більшість систем, з якими людина має справу, є стохастичними системами. Спроба їх математичного опису за допомогою детермінованих моделей приводить до надто грубої оцінки реальності. Під час розв'язання задач аналізу і проектування таких систем необхідно враховувати те, що ***випадковість є визначальною*** у процесах, що протікають в них. При цьому нехтування цією випадковістю (спроба "утиснути" ці задачі у детерміновані рамки) призводить до помилок у висновках і практичних рекомендаціях.

Перші задачі теорії систем масового обслуговування (ТСМО) були розглянуті співробітником Копенгагенської телефонної компанії, датським вченим А. К. Ерлангом у період між 1908 і 1922р. Ці задачі були викликані намаганням упорядкувати роботу телефонної мережі і розробити методи, що дозволяють заздалегідь підвищити якість обслуговування залежно від числа наявних пристроїв. Виявилося, що ситуації, які виникають на телефонних станціях, є типовими не тільки для телефонного зв'язку. Наприклад, робота аеродромів, морських портів, магазинів, термінальних класів, електронних обчислювальних комплексів і т. д. може бути описана у рамках ТСМО. Наведемо деякі приклади систем масового обслуговування.

Приклад 1. Телефонний зв'язок часів Ерланга був телефонною станцією, що була зв'язана з великим числом абонентів. Телефоністки станції в міру надходження викликів з'єднували телефонні номери між собою.

Задача. Яка кількість телефоністок (за умови їх повної зайнятості) повинна працювати для того, щоб втрати заявок були мінімальними?

Приклад 2. Система швидкої допомоги міського району є пунктом, що приймає виклики на виконання, тобто виклики на деяку кількість машин швидкої допомоги і кілька лікарських бригад.

Задача. Визначити кількість лікарів, допоміжного персоналу, автомашин, для того, щоб час очікування виклику був для хворих оптимальним за умови мінімізації витрат на експлуатацію системи і максимізації якості обслуговування.

Приклад 3. Система оброблення інформації містить мультиплексний канал і кілька ЕОМ. Сигнали від датчиків надходять на мультиплексний канал, де вони буферизуються та обробляються, а потім надходять на ту ЕОМ, де черга мінімальна.

Задача. Забезпечити прискорення оброблення сигналів при заданій сумарній довжині черги.

Приклад 4. На рис.4.1 зображена структурна схема типової системи масового обслуговування – ремонтного підприємства (наприклад, ремонт ПЕОМ). Порядок її роботи зрозумілий зі схеми і не потребує роз'яснень.

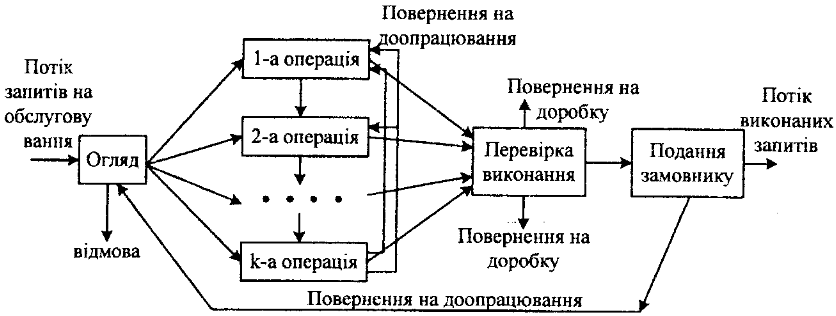

Рисунок 4.1 – Структурна схема типової системи масового обслуговування

Неважко навести і багато інших прикладів з будь-яких областей діяльності. Характерним для таких задач є:

- умови "подвійної" випадковості – випадковий момент часу надходження замовлення на обслуговування (на телефонну станцію, на пункт швидкої допомоги, на вхід процесора і т. д.) та випадкова тривалість часу обслуговування;

- проблема черги, наприклад, суден перед шлюзами, покупців перед прилавками, задач на вході процесорів обчислювального комплексу і т. д.

А. К. Ерланг звернув увагу на те, що СМО можуть бути поділені на два типи, до яких відносяться системи з очікуванням і системи з втратами. У першому випадку – заявка, що надійшла на вхід системи очікує черги на виконання, а у другому – вона через зайнятість каналу обслуговування одержує відмову і втрачається для СМО. Надалі ми побачимо, що до класичних задач Ерланга додаються нові задачі, а саме:

- заявки на обслуговування приймаються доти, поки черга не досягне заданого розміру;
- заявки залишаються у черзі, але очікують обслуговування не більше заданого часу t, після чого з черги виключаються;
- час очікування обслуговування і час самого обслуговування обмежується деякою величиною t і т. д.

Реальні системи, з якими приходиться мати справу на практиці, як правило, надто складні і містять у собі ряд етапів (стадій) обслуговування. Причому, на кожному з етапів може існувати ймовірність відмови у виконанні або існує ситуація пріоритетного обслуговування щодо інших заявок. При цьому окремі ланки обслуговування можуть припинити роботу (для ремонту, налагодження і под.) або можуть бути підключені додаткові засоби. Можуть бути і такі обставини, коли заявки, що одержали відмову, знову повертаються у систему, наприклад, в інформаційних системах.

У загальному випадку всі СМО мають цілком визначену структуру, що наведена на рис. 4.2.

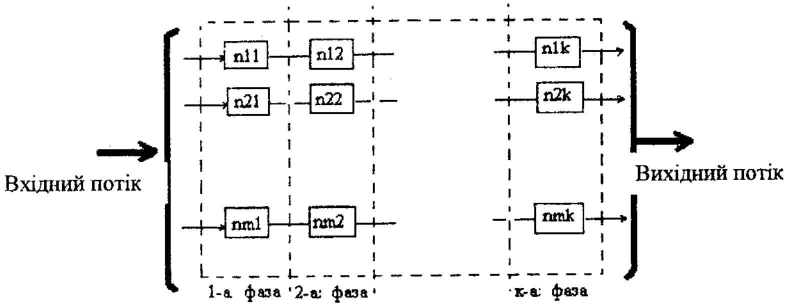

Рисунок 4.2 – Структура СМО

При цьому:

- потоком називають послідовність подій. Потік, що складається з заявок на обслуговування, називають потоком заявок;
- потік заявок, що надходять у систему, називають вхідним потоком;
- потік заявок, що обслуговані, називають вихідним потоком;
- сукупність черг і приладів (каналів) обслуговування називаються системою обслуговування;
- кожні заявки надходять на свій канал, де піддаються операції обслуговування;
- кожна СМО має певні правила формування черги і правила або дисципліну обслуговування.

4.2 Класифікація систем масового обслуговування

За характером заявок розрізняють СМО із скінченною і нескінченною кількістю заявок на вході.

У першому випадку у системі циркулює скінченна, зазвичай постійна кількість заявок, а у другому – деяке джерело генерує нескінченне число заявок. Перші СМО називають замкненими, а другі – розімкненими.

СМО також розрізняють

За дисципліною обслуговування:

- обслуговування у порядку надходження;
- обслуговування у випадковому порядку (відповідно до заданого закону розподілу);
- обслуговування з пріоритетом.

За характером організації:

- з відмовами;
- з очікуванням;

- з обмеженням на очікування.

У першому випадку заявка отримує відмову, коли канал зайнятий. У другому – ставиться у чергу і чекає звільнення каналу. У третьому – випадку вводиться обмеження на тривалість очікування.

За кількістю одиниць обслуговування:

- одноканальні;
- багатоканальні.

За числом етапів (фаз) обслуговування – однофазні і багатофазні (прикладом багатофазних може бути будь-яка потокова лінія).

За властивостями каналів – однорідні, коли канали мають однакову характеристику і неоднорідні у іншому випадку.

4.3 Основна задача теорії систем масового обслуговування

Основна задача ТСМО полягає у встановленні залежності між характером потоку заявок на вході СМО, продуктивністю одного каналу, числом каналів і ефективністю обслуговування. При цьому критеріями ефективності СМО можуть бути різні функції і величини:

- середній час простою системи;
- середній час очікування у черзі;
- закон розподілу тривалості очікування заявки у черзі;
- середній відсоток заявок, яким відмовили і т. д.

Вибір критеріїв залежить від виду системи. Наприклад:

- ***для систем з відмовами*** головною характеристикою є абсолютна пропускна здатність СМО; менш важливі критерії – число зайнятих каналів, середній відносний час простою одного каналу і системи в цілому;

- ***для систем без втрат*** (з необмеженим очікуванням) найважливішим є середній час простою у черзі, середнє число заявок у черзі, середній час перебування заявок у системі, коефіцієнт простою і коефіцієнт завантаження системи.

Сучасна ТСМО є сукупністю аналітичних методів дослідження перерахованих різновидів СМО. Надалі з усіх досить складних і цікавих методів розв’язування задач масового обслуговування будуть викладені методи, описувані в класі марковських процесів типу “загибель і розмноження”. Це пояснюється тим, що саме ці методи найчастіше використовуються в практиці інженерних розрахунків.

4.4 Математичні моделі потоків подій

4.4.1 Регулярні і випадкові потоки

Одним з центральних питань організації СМО є з'ясування закономірностей, яким підкоряються моменти надходження в систему заявок на обслуговування. Розглянемо найуживаніші математичні моделі потоків.

Означення. Потік заявок називають однорідним (*homogeneous stream of requests*), якщо він задовольняє умови:

- усі заявки потоку з точки зору обслуговування є рівноправними;
- замість заявок (подій) потоку, що за своєю природою можуть бути різними, розглядаються тільки моменти їх надходження.

Означення. Регулярним (*regular stream of requests*) називаються потік, якщо події у потоці випливають одна за одною через конкретні інтервали часу.

Функція $f(x)$ щільності розподілу ймовірності випадкової величини T – інтервалу часу між подіями має при цьому вигляд:

$$f(x)=\delta(x-M_r), \tag{4.1}$$

де δ – дельта функція,

M_T – математичне сподівання, причому $M_T = T$, дисперсія $D_T = 0$, а інтенсивність настання подій у потоці $t = 1/M_T = 1/T$.

Означення. Потік називають ***випадковим*** (*casual stream of requests*), якщо його події відбуваються у випадкові моменти часу.

Випадковий потік може бути описаний як випадковий вектор, що, як відомо, може бути заданий за законом розподілу двома способами:

- законом розподілу моментів появи подій

$$F(t_1,t_2,...,t_n)=P(\tau_1<t_1,\tau_2<t_2,...,\tau_n<t_n), \tag{4.2}$$

де $\tau_1,\tau_2,...,\tau_n$ випадкові моменти часу появи подій у потоці,

t_1, t_2, t_n – їх призначення,

P – ймовірність;

- багатовимірним законом розподілу системи випадкових величин T_1, T_2 ,...,T_n, що є довжинами інтервалів між послідовними подіями:

$$F(z_1,z_2,...,z_n)=P(\tau_1<z_1,\tau_2<z_2,...,\tau_n<z_n), \tag{4.3}$$

де z_i – значення T_i, $(i = 1,n)$.

У цьому випадку моменти настання подій можуть бути обчислені таким чином

$$t_1 = t_0 + z_1$$

$$t_2 = t_1 + z_2 \tag{4.4}$$

$$.........,$$

$t_n = t_{n-1} + z_n$,

де t_0 – момент початку потоку.

4.4.2 Найпростіший потік Пуассона

Під час розв'язання великого числа прикладних задач буває достатньо застосувати математичні моделі однорідних потоків, що задовольняють заявки стаціонарності, без післядії й ординарності.

Означення. Потік називається стаціонарним (*stationary stream of requests*), якщо ймовірність появи n подій на інтервалі часу $(t,\ t+T)$ залежить від його розташування на часовій осі t.

Означення. Потік подій називається ординарним (*ordinary stream of requests*), якщо ймовірність появи двох або більше подій протягом елементарного інтервалу часу є величина нескінченно мала у порівнянні з ймовірністю появи однієї події на цьому інтервалі, тобто $lim_{\Delta t \to 0} P(n, \Delta t) = 0$ для $n = 2,3,\ldots$

Означення. Потік подій називається ***потоком без наслідків*** (*Stream of requests without the consequences*), якщо для будь-яких інтервалів часу, що не перетинаються, число подій, що попадають на один з них, не залежить від числа подій, що попали на інший.

Означення. Якщо потік задовольняє стаціонарність, ординарність і без наслідків він називається ***найпростішим*** (*simplest stream of requests*) **(потоком Пуассона).**

Доведено, що для найпростішого потоку число n подій, що попадають на будь-який інтервал z розподілено за законом Пуассона

$$F(n,z) = \frac{(\lambda \cdot z)^n \cdot exp(-\lambda \cdot z)}{n!}, n = 0,1,2,\ldots \qquad (4.5)$$

Ймовірність того, що на інтервалі часу z не з'явиться жодної події дорівнює:

$$P(0, z) = e^{-\lambda z};\ P(T < z) = 1 - e^{\lambda z}. \qquad (4.6)$$

Тоді ймовірність протилежної події, де за визначенням $P(T < z) = F(z)$ – це функція розподілу ймовірності T. Звідси одержимо, що випадкова величина T розподілена за показовим законом

$$f(z) = dF/dz = \lambda e^{-\lambda z}, \qquad (4.7)$$

де λ називають щільністю потоку. Причому $M[T] = \lambda^{-1}$, а $D[T] = \lambda^{-2}$.

Властивості найпростішого потоку Пуассона

Відомі дві властивості найпростішого потоку, що можуть бути використані під час розв'язування практичних задач.

1. Нехай деяка величина $a = \lambda x$. Відповідно до властивостей Пуассонівського розподілу при $a \to \infty$ вона прямує до нормального закону розподілу, і тому для обчислення $P\{X(a) \leq n\}$, де $X(a)$ – випадкова величина, що розподілена за Пуассоном з математичним сподіванням a, можна скористатися такою наближеною рівністю

$$P\{X(a)\le n\}\approx 1\div\sqrt{2\cdot\pi\cdot a}\cdot\int\limits_{-\infty}^{n+1/2}\exp\left\{-\frac{(t-a)^2}{2\cdot a}\right\}\cdot dt=\Phi\left(\frac{n-a+\frac{1}{2}}{\sqrt{a}}\right),\quad(4.8)$$

де $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int\limits_0^x\exp\left(-\frac{t^2}{2}\cdot dt\right)$.

Ще одна властивість потоку Пуассона пов'язана з такою теоремою.

Теорема. Для показового розподілу інтервалу часу між заявками T, незалежно від того скільки він тривав, частина часу, що залишилася, має той же закон розподілу.

Доведення. Нехай T розподілено за показовим законом $F(x) = 1 - e^{\lambda z}$. Припустимо, що проміжок часу a вже тривав якийсь час $a < T$. Знайдемо умовний закон розподілу частини проміжку часу, що залишилася, $T_1 = T - a$

$$F_a(x) = P(T - a < x½\ T > x).\quad(4.9)$$

Відповідно до теореми множення ймовірностей

$$P((T > a)(T - a < z)) = P(T > z)\ P(T - a < z\ |T > a) = P(T > a)\ F_a(z).\quad(4.10)$$

Звідси можна записати, що $F_a = R((T > a)\wedge(T - a < z))/P(T > a)$, однак подія $(T > a)\wedge(T - a < z)$ рівносильна події $a < T < z + a$, для якої

$$P(a < T < z + a) = F(z + a) - F(a).\quad(4.11)$$

З іншої сторони $P(T > a) = 1 - F(a)$.

Таким чином, $F_a(x) = (F(z + a) - F(a))/(1 - F(a))$.

Звідси, з огляду на те, що $f(z)= dF/dz = \lambda e^{-\lambda z}$ можна записати, що

$$F_a(z)=\frac{e^{-\lambda z}-e^{\lambda(z-a)}}{e^{-\lambda a}}=1-e^{\lambda z}=F(z).\quad(4.12)$$

Цією властивістю характеризується тільки один вид потоків – найпростіші потоки Пуассона.

Зауваження. Дослідження задач ТСМО суттєво спрощується у припущенні, що вихідний потік є найпростішим потоком Пуассона. Однак критичне вивчення умов, що приводять до найпростішого потоку, змушують зробити висновок, що найпростіші потоки зустрічаються не так часто. Наприклад, найчастіше порушується ординарність (одночасно відбувається заявка одного і того ж номера телефону при цьому, необхідно ставити кілька машин під завантаження або розвантаження і т. д). Умова стаціонарності також часто порушується, наприклад, змінюється інтенсивність замовлень на переговори протягом доби. Недотримання умови без наслідків так само є звичайним, наприклад, поломка машин таксопарку, що може призвести (через збільшення навантаження) до поломок інших машин.

Однак у дійсності найпростіші потоки зустрічаються частіше, ніж це здається після наведених прикладів. Поясненням цього займався шведський учений Пальма. А пізніше Хінчін А. Я. довів одну загальну теорему, що є винятковою теоретичною цінністю. Він довів, що якщо потік є сумою великого числа n незалежних ординарних і стаціонарних потоків інтенсивністю λ_i $i=\overline{1,n}$, і жоден з них не порівнюється за потужністю з усім сумарним потоком, то за деяких аналітичних обмежень сумарний потік зводиться до найпростішого з інтенсивністю $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Теорема Хінчіна широко застосовується на практиці. Так під керівництвом Гнеденко було досліджено потік транспортних суден, що прибувають у порт. Статистичне оброблення дозволило зробити висновок про досить гарний збіг реального потоку з найпростішим. На підставі цього було зроблено прогнози щодо прибуття суден на наступні місяці.

4.4.3 Нестаціонарні потоки Пуассона

Теорема Хінчіна була узагальнена для потоків, що складаються з потоків неординарних і нестаціонарних. При цьому, якщо ці потоки незалежні і їх інтенсивність приблизно однакова, то сумарний потік близький до потоку Пуассона тільки із застосуванням параметра $\lambda(t)$. Причому $\lambda(t)$ називається ***миттєвою щільністю***. Вона є границею відношення середнього числа подій, що приходяться на елементарний інтервал часу $(t,\ t+x)$ до довжини інтервалу, коли останній прямує до нуля:

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(t+\Delta t)-M(t)}{\Delta t}, \qquad (4.13)$$

де $M(t)$ – математичне сподівання числа подій на інтервалі Δt.

Доведено, що для такого потоку число подій n протягом часового інтервалу z, що починається в момент t_0, розподілено за законом Пуассона

$$P(t_0,n,x)=\frac{\mu^n\exp(-\mu)}{n!}, \qquad (4.14)$$

де μ – математичне сподівання числа подій на інтервалі $(t_0,\ t+x)$

$$\mu = \int_{t_0}^{t_0+x} \lambda(t)dt. \quad (4.15)$$

Тут μ очевидно залежить від довжини інтервалу і від його положення на часовій осі.

Аналогічно тому, як була виведена функція щільності розподілу ймовірності для найпростішого потоку Пуассона $f(z) = dF/dz = \lambda e^{-\lambda z}$, можна отримати функцію щільності розподілу ймовірності T для нестаціонарного потоку Пуассона

$$f(z) = \lambda(t_0 + z) exp\left(\int_{t_0}^{t_0+z} \lambda(t)dt \right). \quad (4.16)$$

Розглянута модель належить математику Б. І. Григеліонісу. Цією моделлю описується велике число потоків – виклик лікаря до хворого, потік телеграм, потік замовлень на переговори, потоки пасажирів і т. д.

4.4.4 Потоки з обмеженим наслідком (потоки Пальма)

Іншим узагальненням найпростішого потоку є ***потік Пальма*** (*Palm stream*).

Означення. Потоком Пальма називається потік, що характеризується властивостями стаціонарності, ординарності і незалежності інтервалів часу T між подіями.

Вимога незалежності інтервалів T є слабкішою, ніж заявка без наслідку, а тому такі потоки називають ***потоками з обмеженими наслідками.***

Теорема. Нехай у систему надходить потік заявок типу Пальма. Заявка, що застала усі канали зайнятими, одержує відмову. Якщо при цьому час обслуговування має показовий закон розподілу, то потік заявок, що не обслуговані, є потоком Пальма. У загальному випадку найпростіший потік є частковим випадком потоку Пальма. Його незалежні інтервали розподілені за показовим законом.

Ще одним прикладом потоків Пальма є потоки Ерланга, що можуть бути отримані таким чином.

Якщо з найпростішого потоку виключається кожна друга заявка, то потік, що залишився, утворить потік другого порядку, а якщо у потоці зберігається кожна третя заявка, то це – потік третього порядку і т. д. Для потоку *k-го* порядку функція щільності для інтервалу T має такий вигляд

$$f_k(z) = \frac{\lambda(\lambda z)^{k-1}}{(k-1)!e^{-1/2}}, z > 0. \quad (4.17)$$

Із збільшенням порядку k функція $f_k(x)$ убуває, однак $M[T]$ зростає

$$M[T]=\int_0^\infty z\cdot f_k(z)\cdot dz=\frac{k}{\lambda};\quad D[T]=\int_0^\infty \left\{(z-M[T])^2\cdot f_k(z)\right\}\cdot dz=\frac{k}{\lambda^2}. \quad (4.18)$$

Для достатньо великого k (практично для $k = 5$) потік Ерланга k-ого порядку можна вважати нормальним із зазначеними $M[T]$ і $D[T]$. Це випливає з того, що інтервал часу T між двома послідовними подіями у потоці Ерланга k-ого порядку є сумою k незалежних випадкових величин з одним законом розподілу. Тоді на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей маємо доведення цього твердження.

Задаючи різні значення k у наведеному вище виразі можна отримати потоки, що характеризуються різними післядіями – від повної її відсутності ($k = 1$) до повного функціонального зв'язку між моментами появи подій (регулярний потік). І насправді для $k = 1$ отримуємо найпростіший потік, а для $k = const$ і для $k\to\infty$ потік Ерланга наближається до регулярного. Властивості потоків Ерланга дають можливість широкого застосування цієї математичної моделі.

4.4.5 Потоки відновлення

На практиці часто приходиться стикатися з потоками, що отримали назву потоків відновлення. Прикладом такого потоку є ситуація, коли пристрій системи повинен знаходитися у стані безперервної роботи. Як тільки він перестає виконувати свої функції (старіння, поломка) його заміняють на новий. Моменти заміни t_k, $k = 1,2, \ldots$ є випадковими, оскільки тривалість безвідмовної роботи кожного пристрою – є величина випадкова, незалежна і має свій розподіл $F(z)$. Такі потоки позначають як *GI* – загальний вхідний потік (General Input).

Для потоків відновлення існує велике число різних задач, зокрема, задача визначення ймовірності того, що протягом заданого проміжку часу T з'явиться k подій потоку. Простих формул, що були виведені для найпростішого потоку, тут уже немає.

Цікавими для практики є потоки, що із часом "рідшають", проходячи через послідовність приладів обслуговування. Прикладом цього може бути деталь, що проходить ряд операцій і на кожній операції є ймовірність виявлення прихованого дефекту. У таких випадках деталь усувається, а первісний потік рідшає. Ще одним прикладом може служити послідовне у часі виправлення тексту декількома коректорами. При цьому кількість непомічених помилок, як очевидно, рідшає. Угорським математиком А. Реньї був отриманий цікавий результат, що полягає у такому. Потік відновлення піддається операції – кожна заявка залишається у потоці з ймовірністю q і викидається з потоку з ймовірністю $p = 1 - q$. Одночасно здійснюється зміна масштабу часу – за одиницю масштабу вважається проміжок довжиною q^{-1}. Якщо це подвійне перетворення позначити символом R_q, то послідовне проведення перетворень R_{q1} , R_{q2} , ..., R_{qn} еквівалентно одному перетворенню $R_{q1q2...qn}$ ... . Теорема Реньї полягає у тому, що якщо тривалість безвідмовної роботи розподілена за законом $F(x)$ має скінченне математичне очікування M і

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} q_1 q_2 \cdots q_n = 0 \qquad (4.19)$$

то послідовність потоків, що рідшають, прямує до найпростішого потоку Пуассона. Таким чином, у певних умовах потоки відновлення стають найпростішими, що ще раз підтверджує справедливість теореми Хінчіна.

4.5 Системи масового обслуговування з відмовами

4.5.1 Математичні моделі СМО з відмовами. Формули Ерланга

Для усталеного процесу обслуговування під час надходження у систему найпростішого потоку заявок з показниковим розподілом часу основні показники ефективності функціонування СМО з відмовами визначаються за такими формулами:

– середнє число заявок, що надходять у систему за середній час обслуговування

$$\rho = \lambda / \mu = \lambda \bar{t}_{обс}, \qquad (4.20)$$

де λ – щільність надходження заявок в одиницю часу,

$t_{обс}$ – середній час обслуговування однієї заявки одним каналом, хв/год,

$\mu = 1/\, t_{обс}$ – інтенсивність обслуговування;

– ймовірність того, що обслуговуванням зайнято рівно k каналів.

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \Big/ \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}, \qquad (4.21)$$

де n – число каналів обслуговування;

– ймовірність того, що всі канали вільні від обслуговування

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1}; \qquad (4.22)$$

– ймовірність того, що заявку буде обслуговано (відносна пропускна здатність системи) $P_{обс} = 1 - P_{від}$;

– ймовірність того, що всі заявки будуть обслуговані

$$P_{від} = P_n = P_0\, \rho^n / n!; \qquad (4.23)$$

– абсолютна пропускна здатність системи $A = \lambda P_{обс} = \lambda(1 - P_{від})$;

– середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням

$$\overline{N}_з = \sum_{k=1}^{n} k p_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{(k-1)!} P_0, \quad \overline{N}_з = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - P_{від}); \tag{4.24}$$

– середнє число каналів, вільних від обслуговування

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\rho^k}{k!}; \tag{4.25}$$

– коефіцієнт простою каналів $k_n = \overline{N}_0 / n$;

– коефіцієнт завантаження каналів $k_з = \overline{N}_з / n$.

4.5.2 Системи з послідовними каналами однієї продуктивності

У таких системах існує певна послідовність обслуговування заявок: канали другої, третьої та інших груп не розпочинають обслуговування доти, поки не будуть зайняті всі канали попередніх груп. Нехай існує i таких груп. Кількість каналів у кожній групі S_j де $1 \le j \le i$.

Основною характеристикою функціонування системи є ймовірність відмови в обслуговуванні, ймовірність того, що заявка дістане відмову на каналах першої групи, тобто заявки надійдуть до каналів другої групи, визначиться з формули Ерланга

$$P_1 = \frac{\rho^{s_1}}{s_1!} \Big/ \sum_{k=0}^{s_1} \frac{\rho^k}{k!}. \tag{4.26}$$

Якщо всі канали першої групи зайняті, то заявки надійдуть до обслуговування до другої групи. Ймовірність відмови каналами другої групи

$$P_2 = \frac{\rho^{(s_1+s_2)}}{(s_1+s_2)!} \Big/ \sum_{k=0}^{s_1+s_2} \frac{\rho^k}{k!}. \tag{4.27}$$

де s_1, s_2 – число каналів обслуговування в перший і другій групах. Якщо s_i позначити число каналів у i-й групі, то ймовірність проходження заявок через усю систему

$$P_i = \frac{\rho^{(s_1+s_2+\ldots+s_i)}}{(s_1+s_2+\ldots+s_i)!} \Big/ \sum_{k=0}^{s_1+s_2+\ldots+s_i} \frac{\rho^k}{k!}. \tag{4.28}$$

Визначимо такі показники:

– ймовірність відмови в обслуговуванні на каналах j – і послідовно розташованої групи

$$n_j = \frac{P_j}{P_{j-1}}; \tag{4.29}$$

– ймовірність того, що канали j-ї послідовно розташованої групи обслуговують заявку, яка не обслуговувалась на каналах попередніх груп:

$$P_{обcj} = \frac{P_{j-1} - P_j}{P_{j-1}}; \tag{4.30}$$

– коефіцієнт продуктивності каналів j-ї послідовно розміщеної групи $|1 \le j \le i|$

$$k_j = \frac{P_{j-1} - P_j}{1 - P_i}; \tag{4.31}$$

– число заявок, які обслуговані $N = AP$, де N – число заявок, які обслуговані з ймовірністю обслуговування P, A – абсолютна пропускна здатність системи;

– число каналів обслуговування для того, щоб ймовірність втрачання хоча б однієї заявки була менша від заданої величини $P_{від}$ визначається із нерівності

$$\frac{\rho^k}{k!} \Big/ \sum_{k=0}^{s} \frac{\rho^k}{k!} < P_{від}. \tag{4.32}$$

4.5.3 Системи з послідовними каналами різної продуктивності

Розглянемо систему з двох каналів, які розміщені послідовно. Продуктивність першого з них характеризується параметром μ_1, а другого – μ_2.

Система працює таким чином. На перший канал надходить простіший потік заявок з інтенсивністю λ. Заявки, які не були обслуговані першим каналом, у зв'язку з тим, що він був зайнятим, надходять для обслуговування на другий канал. Якщо він вільний, то заявка обслуговується, інакше, вона вважається загубленою для системи.

Основні формули для розрахунків.

1. Ймовірність того, що обидва канали вільні від обслуговування

$$P_{од} = \frac{\mu_1 \mu_2 (2\lambda + \mu_1 + \mu_2)}{\lambda^2 (\lambda + \mu_2)} P_{11}. \tag{4.33}$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні заявок

$$P_{11} = P_{від} = \lambda^2 \Big/ \left(\lambda^2 + \lambda(\mu_1 + \mu_2) + \frac{\mu_1 \mu_2}{\lambda + \mu_2} (2\lambda + \mu_1 + \mu_2) \right). \tag{4.34}$$

3. Ймовірність того, що перший канал буде зайнятий обслуговуванням, а другий – вільним:

$$P_{10}=\frac{\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{\lambda(\lambda+\mu_2)}P_{11}. \qquad (4.35)$$

4. Ймовірність того, що другий канал буде зайнятий обслуговуванням, а перший – вільним:

$$P_{01}=\frac{\mu_1}{\lambda+\mu_2}P_{11}. \qquad (4.36)$$

5. Коефіцієнт завантаження першого каналу

$$\mathrm{k}_1=\frac{\mu_1(\mathrm{P}_{10}+\mathrm{P}_{11})}{\lambda(1-\mathrm{P}_{11})}. \qquad (4.37)$$

Після підстановки значень P_{10} та P_{11} маємо

$$k_1=\frac{\mu_1\left[\lambda(\lambda+\mu_2)+\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}. \qquad (4.38)$$

6. Коефіцієнт завантаження другого каналу

$$k_2=\frac{\lambda\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\lambda+\mu_2)\left[\lambda(\mu_1+\mu_2)+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda+\mu_2}(2\lambda+\mu_1+\mu_2)\right]}. \qquad (4.39)$$

7. Коефіцієнт, який показує, в скільки разів перший канал працює більше за другий:

$$k=\frac{k_1}{k_2}=\frac{\mu_1(\lambda+\mu_2)}{\mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}+\frac{\mu_1}{\lambda}. \qquad (4.40)$$

Аналіз функціонування системи, яка складається з двох каналів обслуговування різної продуктивності, показує: щоб ефективність системи була найвищою, перший канал повинен мати вищу продуктивність.

4.5.4 Системи з нагромадженням заявок

При функціонуванні системи заявки надходять до нагромаджувача обсягом n з інтенсивністю λ. Якщо заявка, яка надійшла, застає нагромаджувач заповненим, вона втрачається для системи. Через випадкові моменти часу до нагромаджувача звертається канал оброблення заявок і бере на обслуговування всі нагромаджені до того часу заявки. Час обслуговування цього масиву заявок випадковий з показниковим законом розподілу з параметром μ . Як тільки весь масив заявок оброблено, канал знов звертається до збирача і т. ін. Основні показники функціонування системи визначимо за такими формулами.

1. Ймовірність того, що в нагромаджувач надійшло рівно k заявок

$$P_k = \rho^k / (\rho+1)^{k+1}, \ (k<n). \tag{4.41}$$

2. Ймовірність відмови в обслуговуванні

$$P_{від} = P_n = \rho^n / (\rho+1)^n. \tag{4.42}$$

3. Середнє число заявок, що надійшли

$$m = \sum_{k=1}^{n} kP_k. \tag{4.43}$$

2. Коефіцієнт завантаження нагромаджувача

$$\eta = m/n. \tag{4.44}$$

8. Середній час обслуговування однієї заявки

$$\bar{t}_{обс_1} = m\mu^{-1}. \tag{4.45}$$

5. Обсяг нагромадження при заданій надійності обслуговування

$$n = \frac{ln P_{від}}{ln \rho - ln(\rho+1)}. \tag{4.46}$$

4.5.5 Приклади оцінювання й аналізу ефективності СМО з відмовами

Задача 1. Телефонна станція має $n = 6$ міжміських ліній зв'язку. До послуг станції звертаються абоненти з заявками на проведення переговорів з інтенсивністю $\lambda = 30$ заявок за годину. Середня тривалість однієї розмови $t_{обс} = 0{,}25$ год. Визначити основні показники функціонування системи та умови, за яких вона здатна виконати поставлену задачу.

Результати розрахунків за формулами Ерланга запишемо у табл. 4.1.

Висновок. В організацію роботи телефонної станції слід внести зміни, які б привели до істотного поліпшення функціонування системи, оскільки ймовірність обслуговування має недостатнє значення.

Таблиця 4.1 - Результати розрахунків за формулами Ерланга

n	λ	$\bar{t}_{обс}$	ρ	P_0	$P_{обс}$	$P_{від}$	A	$\bar{N}_з$	$\bar{N}_0$	$k_з$
6	30	0,25	7,5	0,0015	0,6385	0,3615	19,155	2,7884	1,2116	0,796

Задача 2. Для перевірки радіоелементів розроблена станція, яка містить три послідовно розміщені стенди. Перший має $s_1 = 36$ каналів для контролю, другий – $s_2 = 15$, а третій – $s_3 = 5$. Середнє число елементів, які надходять на станцію за 1 хвилину, $\lambda = 96$, а середній час перевірки одного елементу одним каналом $t_{обс} = 1$ хв. Нехай потік елементів підпорядковується пуассонівському, а час обслуговування – показниковому законам розподілу. Ймовірність контролю за одну

перевірку $P = 0{,}9$.

Оцінити ефективність функціонування станції контролю та стендів, які входять до неї.

Результати розрахунків зведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 - Ефективність функціонування станції контролю та стендів, які входять до неї

Номер п/п	Показник ефективності	Для 1-го стенда	Для 1-го та 2-го стендів	Для 1-го, 2-го та 3-го
1	$P_{від.36}, P_{від.51}, P_{від.57}$	0,6309	0,4796	0,4109
2	$P_{обс.36}, P_{обс.51}, P_{обс.57}$	0,3691	0,5204	0,5801
3	$P_{0.36}, P_{0.51}, P_{0.57}$	0	0	0
4	A_{36}, A_{51}, A_{57}	38,434	49,958	58,69
5	$\overline{N}_{з36}, \overline{N}_{з51}, \overline{N}_{з57}$	38,429	49,958	58,681
6	$\overline{N}_{036}, \overline{N}_{051}, \overline{N}_{057}$	0,5708	1,0422	1,3129
7	$k_{з36}, k_{з51}, k_{з57}$	0,9841	0,9796	0,977
8	$k_{п36}, k_{п51}, k_{п57}$	0,0159	0,0204	0,023
9	N_{36}, N_{51}, N_{57}	32	45	50

Висновок. З таблиці видно, що станція не може впоратися з контролем радіоелементів, оскільки перевіряється тільки до 50 елементів. Останні не контролюються, тобто необхідно станцію модернізувати.

Задача 3. Цех має контрольний стенд, обладнаний двома каналами, які зміщені послідовно. Канали перевіряють відповідність нормам основних параметрів виробів. Вироби надходять на стенд із щільністю $\lambda = 0{,}5$ вироб/хв. Оскільки різні вироби мають різні відхилення від норми, то канали втрачають на перевірку в кожному випадку різний час. Середній час, необхідний для перевірки одного виробу першим каналом, $t_{обс} = 5$ хв, а другим – $t_{обс} = 2{,}5$ хв.

Оцінити ефективність роботи двох послідовно розташованих каналів.

Результати розрахунків зведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3 - Ефективність роботи двох послідовно розташованих каналів

λ	μ_1	μ_2	$P_{від}$	P_{00}	P_{10}	P_{01}	k	$P_{обс}$
0,5	0,2	0,4	0,36	0,2048	0,352	0,08	0,81	0,64

Таким чином, тільки 64 % усіх виробів буде перевірено. Якщо ж першим поставити канал з більшою продуктивністю $t_{обс} = 2{,}5$ хв, то ймовірність перевірки буде $P_{обс} = 0{,}65$. Тобто, у цьому разі буде перевірено на 2% виробів більше, ніж у першому варіанті.

Задача 4. Знайти орієнтовний обсяг буферної пам'яті ЕОМ, яка має середній час оброблення масиву інформації $\bar{t}_{обс} = 5$ с. Потік повідомлень надходить зі щільністю $\lambda = 10$ повідомлень за секунду. Можливість втрати повідомлення не має перевищувати 1%.

Обчислимо параметр $\rho = \lambda \bar{t}_{обс} = 10 \times 5 = 50$. Після чого знаходимо, що $n = \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 50 - \ln 51} = 232$, тобто буферна пам'ять ЕОМ повинна мати обсяг 232 повідомлення.

4.6 Оптимізація систем масового обслуговування з відмовами

Функціонування системи в оптимальному режимі можна визначити через основні показники ефективності, їх числові значення виражаються через n число каналів обслуговування, $t_{обс}$ – середній час обслуговування, λ – середнє число заявок, які надходять в систему за одиницю часу. Тому ймовірність обслуговування можна записати як

$$P_{обс} = f(n, \bar{t}_{обс}, \lambda). \tag{4.47}$$

Обернені залежності мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} n &= \varphi(P_{обс}, \bar{t}_{обс}, \lambda), \\ \bar{t}_{обс} &= \psi(P_{обс}, n, \lambda), \\ \lambda &= \xi(P_{обс}, \bar{t}_{обс}, n). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Функціонування СМО з відмовами в оптимальному режимі проаналізуємо порівнянням протилежних показників ефективності – ймовірності обслуговування й коефіцієнта завантаження каналів. При цьому припускаємо, що інші параметри системи набувають сталого значення.

Визначимо число каналів обслуговування, воно буде оптимальним, якщо ймовірність обслуговування і коефіцієнт завантаження каналів набувають однакових значень за умови, що $n = const$ та $\bar{t}_{обс} = const$.

Тоді $n = n_{опт}$, якщо $P_{обс} = k_з$, при $\lambda = const$, $t_{обс} = const$. Оскільки $k_з = N_з / n$, то й $P_{обс} = \overline{N}_з / n_{опт}$, звідки випливає, що $n_{опт} = N_з / P_{обс}$.

Як відомо, середнє число каналів обслуговування $\overline{N}_з = \rho P_{обс}$. Тому остаточно маємо

$$n_{опт} = \rho = \lambda \bar{t}_{обс} \qquad (4.49)$$

при $\lambda = const, \bar{t}_{обс} = const$.

Для визначення оптимального середнього часу обслуговування запишемо

$$\bar{t}_{обс}^{опт} = n_{опт} / \lambda, \qquad (4.50)$$

якщо $P_{обс} = k_з$ при $\lambda = const, n = const$.

Для оптимального числа заявок, якщо $\lambda = \lambda_{опт}$, $P_{обс} = k_з$ при $n = const, \bar{t}_{обс} = const$, можна записати, що

$$\lambda_{опт} = n_{опт} / \bar{t}_{обс} \qquad (4.51)$$

при $n = const, \bar{t}_{обс} = const$.

Таким чином, основними шляхами впливу на режим функціонування системи є вихідні дані задачі. А підвищення ймовірності обслуговування як основного показника ефективності функціонування системи можливе, по-перше, при сталих значеннях λ та $t_{обс}$ і збільшенні числа каналів обслуговування, по-друге, при сталих значеннях n та λ і скороченні середнього часу обслуговування за умови, що якість обслуговування не зменшуватиметься, і по-третє, при сталих значеннях n та $t_{обс}$ і зменшенні потоку заявок на обслуговування.

4.7 Системи масового обслуговування з очікуванням

4.7.1 Розімкнені СМО з очікуванням

Система обслуговування, складається з обмеженого числа каналів, кожний канал здатний водночас обслуговувати тільки одну заявку. Кожна заявка, що надійшла заново, яка застає всі канали зайнятими, стає в чергу і перебуває в ній доти, доки один з каналів не звільниться. Якщо ж заявка надходить в систему, коли є вільні канали, вона зразу обслуговується.

Нехай у систему надходить пуассонівський потік заявок із щільністю λ із необмеженого за своєю спроможністю джерела. Час обслуговування однієї заявки $t_{обс}$ є випадковою величиною, яка задовольняє показниковий закон розподілу з параметром μ.

У стаціонарному режимі основні показники ефективності функціонування визначаються за формулами:

– ймовірність того, що всі канали вільні

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!(1 - \frac{\rho}{n})} \right]^{-1}, \text{ якщо } \frac{\rho}{n} < 1, \qquad (4.52)$$

– ймовірність того, що у системі знаходиться k заявок

$$P_k = P_0\, \rho^k / k!, \text{ якщо } 1 \le k < n,$$
$$P_k = \rho^k / n!\, n^{k-n}, \text{ якщо } k \ge n; \tag{4.53}$$

– ймовірність того, що всі канали зайняті обслуговуванням,

$$Л = \frac{\rho^n}{n!(1-\frac{\rho}{n})} P_0, \frac{\rho}{n} < 1; \tag{4.54}$$

– ймовірність того, що в черзі знаходиться рівно r заявок,

$$P_{n+r} = \rho^{n+r} / n!\, n^r, \tag{4.55}$$

якщо $r > 0;$

– середній час очікування обслуговування

$$\bar{t}_{оч} = \frac{Л\bar{t}_{обс}}{(n-\rho)}, \tag{4.56}$$

якщо $\frac{\rho}{n} < 1;$

– середня довжина черги

$$M_{оч} = \rho^{Л} \Big/ n(1-\frac{\rho}{n})^2; \tag{4.57}$$

– середнє число заявок, які знаходяться в системі

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \overline{M}_{оч} + \frac{n p_n}{1-\frac{\rho}{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} P_0; \tag{4.58}$$

– середнє число вільних від обслуговування каналів

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)\rho^k}{k!} P_0; \tag{4.59}$$

– коефіцієнт простою каналів

$$k_n = \overline{N}_0 / n; \tag{4.60}$$

– середнє число зайнятих каналів

$$\overline{N}_з = n - \overline{N}_0; \tag{4.61}$$

– коефіцієнт завантаження каналів

$$k_з = N_з / n; \tag{4.62}$$

– критерій вибору кращого варіанта системи обслуговування при її проектуванні

$$G_n = (q_{оч}\overline{M}_{оч} + q_{nn}\overline{N}_0 + q_n\overline{N}_з)\bar{t}_{оч}, \tag{4.63}$$

де G_n – величина втрат за час $t_{оч}$,

q_{jx} – вартість втрат, поєднаних з простоями заявок у черзі;

$q_{пп}$ – вартість одиниці часу простою каналу системи;

q_n – вартість експлуатації каналу при обслуговуванні за одиницю часу.

Приклад розв'язання задач

У майстерні по ремонту радіоапаратури працює $n = 5$ майстрів. У середньому протягом робочого дня від населення надходить на ремонт $\lambda = 10$ апаратів. Загальна кількість апаратури, яка знаходиться у населення, досить значна. Апаратура виходить з ладу незалежно одна від одної. Тому можна вважати, що потік заявок пуассонівський. Кожен майстер протягом робочого дня може відремонтувати в середньому $\mu = 2{,}5$ радіоапаратури. Оцінити показники якості обслуговування майстерні.

Результати розрахунків зведено у табл. 4.4.

Таблиця 4.4 - Показники якості обслуговування майстерні

ρ	P_0	$Л$	$t_{р.д}$	$\bar{t}_{обс}$	$\bar{t}_{оч}$	$\overline{M}_{оч}$	$\overline{M}$	$\overline{N}_0$
4	0,013	0,554	7	2,8	1,55	11,1	18,15	0,96

4.7.2 Замкнені СМО з очікуванням

Система має n каналів обслуговування, кожний з них може водночас обслуговувати тільки одну заявку. У систему надходить простіший потік заявок з параметром λ. Потік надходить із обмеженого джерела, так що в системі може знаходитися не більш як m заявок. Заявки, які надійшли в систему в момент, коли хоча б один канал був вільний, відразу ж йдуть на обслуговування. В протилежному випадку вони стають у чергу і очікують доки один з каналів не звільниться.

Наведемо остаточні результати для стаціонарного режиму.

1. Ймовірність того, що всі канали вільні від обслуговування

$$P_0 = \left[\sum \frac{m!\,\rho^k}{k!(m-k)!} + \sum \frac{m!\,\rho^k}{n!(m-k)!\,n^{k-n}}\right]. \tag{4.64}$$

2. Ймовірність того, що в системі знаходиться k заявок, з яких k-n очікують обслуговування

$$P_k = \frac{m!\,\rho^k}{n!(m-k)!\,n^{k-n}} P_0 \tag{4.65}$$

при $n \le k \le m$.

3. Середнє число заявок, які очікують початку обслуговування

$$\overline{M}_{оч} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n)m!\,\rho^k}{n!\,(m-k)!\,n^{k-n}} P_0. \qquad (4.66)$$

4. Коефіцієнт простою заявки

$$k_{n_{вим}} = M_{оч}/m. \qquad (4.67)$$

5. Середнє число заявок, які знаходяться в системі обслуговування

$$\overline{M} = \overline{M}_{оч} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m!\,\rho^k}{k!\,(m-k)!} P_0. \qquad (4.68)$$

6. Середнє число каналів, які вільні від обслуговування

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) p_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m!\,(n-k)\rho^k}{k!\,(m-k)!} P_0. \qquad (4.69)$$

7. Середній час перебування заявки у черзі

$$\bar{t}_{оч} = \overline{M}_{оч}/\mu(n-N_0). \qquad (4.70)$$

8. Коефіцієнт простою каналів обслуговування

$$k_n = N_0/n. \qquad (4.71)$$

Приклад розв'язання задач

Два робітники обслуговують шість верстатів. Зупинки кожного працюючого верстата трапляються в середньому кожні півгодини. Процес налагодження займає у робітників в середньому 10 хвилин. Оцінити ефективність обслуговування верстатів.

Дані обчислення наведено у табл. 4.5.

Таблиця 4.5 - Ефективність обслуговування верстатів

ρ	P_0	$\overline{M}_{оч}$	$k_{n_{вим}}$	$\overline{M}$	$\overline{N}_0$	k_n	$\bar{t}_{оч}$
0,33	0,156	0,137	0,073	1	0,62	0,31	1,9

Запитання і завдання для самоконтролю

1. У чому полягає задача масового обслуговування?
2. Які основні складові системи масового обслуговування?
3. Що є системою масового обслуговування з відмовами?
4. Наведіть два, три приклади СМО з відмовами.
5. Дайте постановку задачі аналізу СМО з відмовами.
6. Який вигляд має розмічений граф стану системи з відмовами?
7. Запишіть математичну модель СМО з відмовами.
8. Запишіть співвідношення для випадку стаціонарного режиму.
9. Які вихідні дані слід мати на увазі при оцінюванні СМО з

відмовами?

10. Які основні показники ефективності функціонування системи треба знайти при розв'язуванні задачі?

11. Опишіть роботу системи з послідовно розташованими каналами однакової і різної продуктивності.

12. Доведіть, що для підвищення продуктивності обслуговування системи із двох каналів перший повинен мати вищу продуктивність.

13. Поясніть, як працює система із збирачем заявок.

14. Як знайти необхідний обсяг збирача заявок?

15. Сформулюйте задачі оптимізації в СМО з відмовами.

16. Як визначити критерій, за яким оцінюють ефективність СМО?

17. Як обчислити оптимальне число каналів обслуговування?

18. Як визначити оптимальний час обслуговування?

19. Як обчислити оптимальне число заявок?

20. Які існують шляхи поліпшення організації обслуговування?

21. Як використати функцію втрат при оптимізації СМО з відмовами?

22. Як описати розімкнену СМО з очікуванням:
- диференціальні рівняння для ймовірностей стану;
- формули для ймовірностей стану;
- ймовірність того, що всі канали обслуговування зайняті;
- середня довжина черги;
- ймовірність того, що у черзі знаходиться рівно r заявок;
- середнє число заявок у системі;
- середнє число вільних каналів;
- середня тривалість очікування в системі.

23. Як описати замкнену СМО з очікуванням:
- диференціальні рівняння для ймовірностей стану;
- формули для ймовірностей стану;
- ймовірність знаходження частини заявок на обслуговуванні;
- середнє число заявок, які простоюють;
- середнє число каналів обслуговування, які простоюють?

Варіанти індивідуальних аудиторних і домашніх завдань

1. Для умов задачі 1 (п. 4.5.5) знайти число ліній зв'язку, яке слід мати на станції за умови, щоб жодне звернення не отримало відмови на переговори. Для цього припустити, що ймовірність відмови дуже мала $P_{від} = 0{,}0057$.

2. Для умов задачі 1 (п. 4.5.5) визначити, який середній час обслуговування $t_{обс}$ треба мати, щоб ймовірність обслуговування $P_{обс} = 0{,}738$.

3. Для умов задачі 1 (п. 4.5.5) знайти, яке середнє число звернень λ можна задовольнити, щоб ймовірність відмови $P_{від}$ була 0,1.

4. Спроектувати АТС, щоб ймовірність відмови в обслуговуванні не перевищувала 0,01. АТС проектується згідно з умовами, що потік викликів має щільність $\lambda = 0{,}5$ викликів за хвилину. Середня тривалість однієї розмови $t_{обс} = 2$ хв.

5. В умові задачі 3 (п. 4.5.5) перший канал вийшов з ладу. Водночас із його заміною прийнято рішення підвищити процент перевірених виробів до 80%. Яку продуктивність повинен мати перший канал?

6. Треба визначити обсяг бункера n та час оброблення $t_{обр}$ масиву деталей, щоб оброблялося не менше ніж 95 % деталей, що надійшли, при цьому вартість системи була б мінімальною. Щільність надходження деталей $\lambda = 1$ деталь на хвилину. Відомо, що вартість системи залежить від обсягу бункера та продуктивності блока обробки. Вартість бункера $C_{бун} = 3n$ одиниць вартості, а вартість блока обробки $C_{обр} = 8/t_{обр}$ вартості.

7. На міжміську телефонну станцію в середньому за 1 хвилину надходить дві заявки на розмови. Середня тривалість однієї розмови – 4 хвилини. Розрахувати, яке число ліній зв'язку має бути, щоб система працювала в оптимальному режимі.

8. На станцію контролю якості продукції надходять підсилювачі з щільністю $\lambda = 3$ одиниці/хвилину. Станція має 9 робочих місць. Обчислити оптимальний середній час перевірки одного підсилювача.

9. На складі готової продукції працює 6 чоловік. На склад надходять автомобілі з вантажем. Середній час, який витрачається одним працівником на розвантаження однієї машини, становить 0,5 год. Якщо всі працівники зайняті розвантаженням, то новий автомобіль надходить до другого складу. Скільки автомобілів треба надіслати на склад, яка ймовірність обслуговування та коефіцієнт завантаження працівників?

10. Готові електровимірювальні канали перевіряють на надійність роботи перед відправкою з підприємства на базу. Бригада складається з 6 осіб. Кожний з них може водночас перевіряти тільки один канал. Середній час перевірки одним робітником одного каналу 0,5 год. Середня щільність надходження каналів $\lambda = 20$ каналів/годину.

Оцінити ефективність функціонування бригади та, при необхідності, внести зміни в організацію її роботи.

11. За умовою попереднього завдання (№10) визначити, який середній час перевірки каналів має бути, щоб ймовірність обслуговування була 0,81.

12. За умовою завдання №10 знайти необхідне число працівників в бригаді, щоб ймовірність обслуговування була 0,95.

13. За умовою завдання №10 визначити, яке число каналів може перевірити бригада, якщо ймовірність перевірки каналів $P_{обс} = 0{,}98$.

14. АЗС з $n = 5$ колонками обслуговує потік автомашин з інтенсивністю $\lambda = 1$ машина за хвилину. Середній час обслуговування однієї машини $t_{обс} = 4$ хв. Оскільки в районі немає іншої АЗС, то черга машин може

зростати практично необмежено. Знайти характеристики АЗС.

15. Морський порт має $n = 5$ причалів для розвантажування суден. У середньому протягом місяця до порту надходить 20 суден великого тоннажу. Час розвантаження суден – величина випадкова, але в середньому на розвантаження одного судна витрачається шість робочих днів. Оцінити роботу порту.

16. З умов завдання №15 розглянути можливість збільшення пропускної здатності порту за рахунок збільшення кількості причалів ($n = 6$).

17. З умови завдання №15 розглянути можливість збільшення пропускної здатності порту за рахунок збільшення кількості причалів за умови, що простій судна $q_{оч} = 100$ од. на добу, як місячний простій причалу $q_{пп} = 1000$ од., а вартість місячної експлуатації причалу $q_п = 1000$ од.

18. Три робітники обслуговують 8 верстатів, в середньому кожні 0,5 год. один з працюючих верстатів зупиняється. Процес налагодження займає у робітника в середньому 12 хвилин. Визначити основні характеристики системи обслуговування.

19. Є $n = 3$ майстри по ремонту 10 зразків обчислювальної апаратури, яка розташована в різних підрозділах підприємства. Для виклику майстра та ремонту техніки в середньому потрібно 6 днів. Нехай щільність потоку $\lambda = 1$ апарат за місяць. Якщо заявка на ремонт надійшла, коли є вільні майстри, то вона одразу ж надходить у відповідний підрозділ. Інакше, заявка стає у чергу й очікує ремонту. Оцінити ефективність роботи майстрів.

5 МОДЕЛЮВАННЯ В ІГРОВИХ СИТУАЦІЯХ

Як уже неодноразово відзначалося, системний аналіз неможливий без врахування взаємодій даної системи із зовнішнім середовищем. Раніше згадувалася необхідність враховувати стани природи – здебільшого випадкових, стохастичних впливів на систему. Звичайно ж, природа не заважає (але і не допомагає) процесам системи усвідомлено, негативно або, навпаки, заохочуючи. Тому врахування зовнішніх природних впливів можна розглядати як «гру з природою», але в цій грі природа – не супротивник і не опонент, у неї немає мети існування взагалі, а тим більше – мети протидії нашій системі.

Зовсім інакше виглядає справа при врахуванні взаємодій даної системи з іншими, аналогічними або близькими за цілями свого функціонування. Як відомо, таку взаємодію називають конкуренцією.

Особливий розділ науки – ***теорія ігор*** (*game theory*) дозволяє хоча б частково вирішувати ускладнення, що виникають під час системного аналізу в умовах протидії. Цікаво відзначити, що одна з перших монографій з цих питань називалася «Теорія ігор і економічної поведінки» (автори – Нейман і Моргенштерн, 1953 р.) і послужила своєрідним каталізатором розвитку методів лінійного програмування і теорії статистичних рішень. Як простий приклад використання методів теорії ігор в економіці розглянемо таку задачу. Нехай ви маєте всього три варіанти стратегій в умовах конкуренції S_1, S_2 і S_3, наприклад, випускати протягом місяця один з 3-ох видів продукції). При цьому ваш конкурент має всього два варіанти стратегій C_1 і C_2 (випускати один з 2 видів своєї продукції, що можуть дещо замінювати вашу продукцію). При цьому змінювати вид продукції протягом місяця не дозволено ні вам, ні вашому конкуренту.

Нехай і вам, і вашому конкуренту вірогідно відомі наслідки кожного з власних варіантів поводінки, що описуються табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Наслідки гри

	C_1	C_2
S_1	-2000	+ 2000
S_2	-1000	+3000
S_3	+1000	+2000

Цифри у табл. 5.1 означають таке:

- ви несете збитки в 2000 гривень, а конкурент має ту ж суму прибутку, якщо ви прийняли стратегію S_1, а конкурент застосував C_1;

- ви маєте прибуток у 2000 гривень, а конкурент втрачає ту ж суму, якщо ви прийняли S_1 проти C_2;

- ви несете збитки в сумі 1000 гривень, а конкурент одержує такий прибуток, якщо ваш варіант S_2 виявився проти його варіанта C_1, і т.д.

Передбачається, що обидві сторони мають професійну підготовку в області ТССА і діють розумно, дотримуючись правила – варіант поведінки приймають один раз на весь місяць, не знаючи звичайно, що вирішив виконувати в цьому ж місяці конкурент.

По суті справи, у чисто життєвому сенсі – це звичайна «азартна» гра, у якій існує кінцевий результат, мета гри – ***виграш***.

Цієї мети домагається кожен гравець, але не кожний може її домогтися. Варіанти поведінки гравців можна вважати ***ходами***, а деяку множину ходів – розглядати як ***партію***.

Нехай партія складається всього лише з одного ходу від кожної сторони. Спробуємо знайти цей найкращий хід спочатку для вашого конкурента – порозмірковуємо за нього.

Оскільки таблиця відома як вам, так і конкуренту, то його міркування можна промоделювати.

Вашому конкуренту варіант C_2 явно невигідний – при будь-якому вашому ході ви будете у виграші, а конкурент у програші. Отже, з боку вашого супротивника буде, мабудь, прийнято варіант C_1, що дає йому мінімум втрат.

Тепер можна порозмірковувати за себе. Начебто варіант S_2 принесе нам максимальний виграш у 3000 гривень, але це за умови вибору стратегії C_2 вашим конкурентом, а він мабуть, вибере C_1.

Значить найкраще, що ми можемо зробити – вибрати варіант S_3, розраховуючи на найменший з можливих виграшів – у 1000 гривень.

5.1 Класифікація ігрових ситуацій

Ігри, у загальному випадку, можна класифікувати за кількома критеріями, наприклад, такими як:
- кількість гравців;
- кількість стратегій;
- характер взаємодії гравців;
- характер виграшу;
- кількість ходів тощо.

Залежно від кількості гравців розрізняють ігри двох і n гравців. Перші з них найбільш вивчені. Ігри трьох і більш гравців менш досліджені через виникаючі при цьому принципові труднощі і технічні можливості отримання рішень, тобто, чим більше гравців – тим більше проблем.

За кількістю стратегій ігри поділяються на скінченні і нескінченні. Якщо у грі всі гравці мають скінченне число можливих стратегій, то вона називається **скінченною** (*eventual game*). Якщо ж хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій гра називається **нескінченною** (*endless game*).

За характером взаємодії ігри поділяються на **безкоаліційні** (*coalitionless game*), де гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції і на **коаліційні** (кооперативні) (*coalition game*), де гравці можуть вступати в коаліції (у кооперативних іграх коаліції наперед визначені).

За характером виграшів ігри поділяються на **ігри з нульовою сумою** (*game with a zeroing sum*) (загальний виграш усіх гравців не змінюється, а ділиться між гравцями, при цьому сума усіх виграшів дорівнює нулю) і на ігри з ненульовою сумою.

За видом функцій виграшу ігри поділяються на матричні, біматричні, безперервні, опуклі, сепарабельні, типу дуелей та ін.

Матрична гра (*matrix game*) – це скінченна гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 2; стовпець – номеру застосовуваної стратегії гравця 2; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш гравця 1, що відповідає застосовуваним стратегіям). Для матричних ігор доведено, що кожна з них має розв'язок, що може бути знайдений шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Біматрична гра – це скінченна гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (рядок кожної матриці відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, а на їх перетині в першій матриці знаходиться виграш гравця 1, у другій матриці – виграш гравця 2.) Для таких ігор також розроблена відповідна теорія, однак розв'язувати їх значно складніше.

Безперервною (*continuous game*) вважається гра, де функція виграшів кожного гравця є безперервною залежно від застосовуваних стратегій. При цьому доведено, що ігри цього класу мають розв'язок, однак не розроблено практично прийнятних методів їх застосування.

Ігри, у яких функція виграшів опукла, називаються **опуклими** (*protuberant game*). Для них розроблено прийнятні методи моделювання (пошук чистої оптимальної стратегії (визначеного числа) для одного гравця й імовірностей застосування чистих оптимальних стратегій іншого). Такі задачі моделюються порівняно легко.

5.2 Моделювання ігрових ситуацій у чистих стратегіях

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою може розглядатися як така абстрактна гра двох гравців. Перший гравець має m стратегій $i = 1,2...m$, другий має n стратегій $j = 1,2,...,n$. Кожній парі стратегій (i,j) поставлено у відповідність число a_{ij}, що має сенс виграшу гравця 1 за рахунок гравця 2, якщо перший гравець прийме свою стратегію i, а 2 – свою стратегію j.

Кожен з гравців робить один хід: гравець 1 вибирає свою стратегію i

($i=\overline{1,m}$), гравець 2 – свою стратегію j ($j=\overline{1,n}$), після чого гравець 1 отримує виграш a_{ij} за рахунок гравця 2 (якщо $a_{ij}<0$, то це значить, що гравець 1 платить другому суму програшу $|a_{ij}|$). На цьому гра закінчується.

Кожна стратегія гравця $i=\overline{1,m}$ і $j=\overline{1,n}$ часто називається чистою стратегією. Якщо розглянути платіжну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

то проведення кожної партії матричної гри з матрицею A зводиться до вибору гравцем 1 i-го рядка, а гравцем 2 j-го стовпця і отримання гравцем 1 (за рахунок гравця 2) виграшу a_{ij}.

Головним у дослідженні ігор є поняття оптимальних стратегій гравців. У це поняття інтуїтивно вкладається такий зміст – стратегія гравця є оптимальною, якщо застосування цієї стратегії забезпечує йому найбільший гарантований виграш за будь-яких стратегій іншого гравця.

Виходячи з цих позицій, гравець 1 досліджує матрицю виграшів A таким чином: для кожного значення i ($i=\overline{1,m}$) визначається мінімальне значення виграшу залежно від застосовуваних стратегій гравця 2

$$\min_j a_{ij},\ (i=\overline{1,m}), \tag{5.2}$$

тобто визначається мінімальний виграш для гравця 1 за умови, що він прийме свою чисту стратегію i, потім з них відшукується така стратегія $i=i_o$, за якою цей мінімальний виграш буде максимальним, тобто знаходиться

$$\max_i \min_j a_{ij}=a_{i_o j_o}=\underline{\alpha}. \tag{5.3}$$

Означення 5.1. Число $\underline{\alpha}$ за виразом (5.3) називається *нижньою чистою ціною гри* і показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі перший гравець, застосовуючи свої чисті стратегії для будь-яких дій другого гравця.

Гравець 2 при оптимальній своїй поведінці повинен намагатись, по можливості, за рахунок своїх стратегій максимально зменшити виграш гравця 1. Тому для гравця 2 відшукується

$$\max_i a_{ij}, \tag{5.4}$$

тобто визначається максимальний виграш гравця 1, за умови, що гравець 2 застосує свою j-ту чисту стратегію. Потім гравець 2 шукає таку $j=j_1$ стратегію, за якою гравець 1 отримує мінімальний виграш, тобто знаходить

$$\min_j \max_i a_{ij}=a_{i_1 j_1}=\overline{\alpha}. \tag{5.5}$$

Означення 5.2 Число $\overline{\alpha}$, визначене за виразом (5.5), називається *чистою верхньою ціною гри* і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може собі гарантувати гравець 1. Іншими словами, застосовуючи свої чисті стратегії гравець 1 може забезпечити собі виграш не менше $\underline{\alpha}$, а гравець 2 за рахунок застосування своїх чистих стратегій може не допустити виграш гравця 1 більше, ніж $\overline{\alpha}$.

Означення 5.3. Якщо у грі з матрицею A $\underline{\alpha}=\overline{\alpha}$, то говорять, що ця гра має **сідлову точку** *(point of saddle)* в чистих стратегіях і чистій ціні гри $\upsilon=\underline{\alpha}=\overline{\alpha}$.

Сідлова точка – це пари чистих стратегій (i_o, j_o) відповідно до гравців 1 і 2, за якими досягається рівність $\underline{\alpha}=\overline{\alpha}$. У це поняття вкладено такий зміст: якщо один із гравців дотримується стратегії, що відповідає сідловій точці, то інший гравець не зможе діяти краще, ніж дотримуватись стратегії, що відповідає сідловій точці. Математично це можна записати й інакше:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j}, \qquad (5.6)$$

де i, j – будь-які чисті стратегії відповідно до гравців 1 і 2;

(i_o, j_o) – стратегії, що утворюють сідлову точку.

Таким чином, виходячи з (5.6), сідловий елемент $a_{i_o j_o}$ є мінімальним в i-ому рядку і максимальним у j-ому стовпці матриці A. Відшукання сідлової точки матриці A здійснюється таким чином. У матриці A послідовно в кожному *рядку* знаходять елемент з мінімальним його значенням і перевіряють, чи буде цей елемент максимальним у своєму ж *стовпці*. Якщо це так, то цей елемент і буде сідловим, а пари стратегій, що йому відповідають, утворюють сідлову точку.

Пари таких чистих стратегій (i_o, j_o) гравців 1 і 2, що утворюють сідлову точку і сідловий елемент $a_{i_o j_o}$, називаються *розв'язком гри.* При цьому i_o і j_o називаються *оптимальними чистими стратегіями* відповідно до першого і другого гравців.

Приклад 5.1

$$\begin{array}{ccc} & & \min\limits_j a_{ij} \\ A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\ \max\limits_i a_{ij} = \underbrace{2 \quad 5 \quad 4}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2} & & \end{array}$$

У наведеному прикладі сідловою точкою є пара $(i_o = 3; j_o = 1)$, задля якої $\upsilon=\underline{\alpha}=\overline{\alpha}=2$. При цьому відзначимо, що хоча виграш у ситуації (3; 3) також дорівнює $2 = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, відповідна їй клітинка матриці не буде сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

Приклад 5.2

$$\begin{array}{cccc} & & \min\limits_j a_{ij} & \\ H = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} & \left.\begin{array}{c} 10 \\ 20 \end{array}\right\} & \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\ \max\limits_i a_{ij} \downarrow \quad \downarrow & & & \\ \underbrace{40 \quad 30} & & & \\ \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30 & & & \end{array}$$

З аналізу наведеної платіжної матриці H видно, що $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, тобто дана матриця не має сідлової точки. Якщо перший гравець вибирає свою чисту максимінну стратегію $i = 2$, то другий гравець, вибравши свою мінімаксну стратегію $j = 2$, програє тільки 20. У цьому випадку першому гравцю вигідно обрати стратегію $i = 1$, тобто відхилитися від своєї чистої максмінної стратегії і виграти 30. Тоді гравцеві 2 буде вигідно обрати стратегію $j = 1$, тобто відхилитися від своєї чистої мінімаксної стратегії і програти 10. У свою чергу гравець 1 повинен обрати свою 2-у стратегію, щоб виграти 40, а гравець 2 відповість вибором 2-ї стратегії і т.д.

Якщо для i-ї та k-ї стратегій першого гравця виконується умова $a_{ij} \geq a_{kj}, j = \overline{1,n}$, то існує таке j, для якого $a_{ij} > a_{kj}$, то стратегія i домінує над стратегією k. Остання може бути виключена з аналізу платіжної матриці гри.

Для другого гравця, якщо стратегія j домінує над стратегією l, та $a_{ij} \geq a_{il}$, то існує таке i, для якого $a_{ij} > a_{il}$, стратегію j другого гравця можна вилучити при відшуканні розв'язку гри.

Можна довести, що неефективним чистим стратегіям першого гравця відповідають ті рядки платіжної матриці, які домінуються деякою опуклою лінійною комбінацією інших рядків цієї матриці, а неефективним чистим стратегіям другого гравця відповідають ті стовпці платіжної матриці, які домінують над деякою опуклою лінійною комбінацією інших стовпців цієї матриці. Отже, встановивши факти домінування, відповідні чисті стратегії гравців можна відкинути, викресливши з матриці їх стовпці та рядки. Таким чином, вдається спростити гру, особливо якщо факт домінування очевидний.

Приклад 5.3. Знайти неефективні чисті стратегії у наведеній нижче грі і спростити відповідну платіжну матрицю

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 0\\ 3 & 4 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

Оскільки третій рядок матриці домінує над першим, то викресливши з матриці перший рядок, маємо

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 4\\ 4 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

У новій матриці третій стовпець домінує над першим. Тому, викресливши перший стовпець, отримаємо

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 8\end{pmatrix}.$$

В отриманій матриці перший стовпець домінує над опуклою лінійною комбінацією другого та третього стовпців, оскільки

$$4>(1/2)\cdot 2+(1/2)\cdot 4;$$
$$2=(1/2)\cdot 4+(1/7)\cdot 0;$$
$$4=(1/2)\cdot 0+(1/2)\cdot 8.$$

Викресливши перший стовпець, маємо $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

У свою чергу, в цій матриці опукла лінійна комбінація другого й третього рядків домінує над першим рядком, оскільки

$$2=(1/2)\cdot 4+(1/2)\cdot 0;$$
$$4=(1/2)\cdot 0+(1/2)\cdot 8.$$

Викреслимо перший рядок і отримаємо матрицю $A'=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$. При цьому можна показати, що ціна гри з платіжною матрицею A' дорівнює ціні вихідної гри з платіжною матрицею A, а оптимальні стратегії гравців можна отримати, розв'язавши гру з матрицею A'.

5.3 Моделювання ігрових ситуацій у змішаних стратегіях

Дослідження в матричних іграх починається з пошуку її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, то пошуком цієї сідлової точки і закінчується дослідження гри. Якщо ж у грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, то можна знайти нижні і верхню чисті ціни цієї гри, які вказують, що гравець 1 не повинен сподіватися на виграш більший, ніж верхня ціна гри, і може бути упевнений в отриманні виграшу не менше нижньої ціни гри. Покращення рішень матричних ігор слід шукати у використанні таємності застосування чистих стратегій і можливості багаторазового повторення ігор у вигляді партії.

Цей результат досягається шляхом застосування чистих стратегій випадково, з визначеною імовірністю.

Означення 5.4. *Змішаною стратегією гравця* (*mixed player strategy*) називається повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій, тобто – це вектор, компонентами якого є ймовірності вибору чистих стратегій гравців.

Таким чином, якщо гравець 1 має m чистих стратегій $1,2,...,m$, то його змішана стратегія x – це набір чисел $x = (x_1, ..., x_m)$, що задовольняють співвідношення $x_i \geq 0$, $(i = \overline{1,m})$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Аналогічно для гравця 2, що має n чистих стратегій, змішана стратегія y – це набір чисел $y = (y_1, ..., y_n)$, $y_j \geq 0$, $(j = \overline{1,n})$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Оскільки застосування гравцем щораз тільки однієї чистої стратегії виключає застосування іншої, то чисті стратегії є *неспільними* подіями. Крім того, вони є єдиними можливими подіями.

Чиста стратегія – це окремий випадок змішаної стратегії. Дійсно, якщо в змішаній стратегії яка-небудь i-та чиста стратегія застосовується з ймовірністю 1, то всі інші чисті стратегії не застосовуються. І ця i-та чиста стратегія є частковим випадком змішаної стратегії. Для дотримання таємності кожен гравець застосовує свої стратегії незалежно від вибору іншого гравця.

Означення 5.5. Середній виграш гравця 1 у матричній грі з матрицею A описується у вигляді математичного очікування його виграшів

$$E\,(A, x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j = x\,A\,y. \qquad (5.7)$$

Перший гравець має на меті за рахунок зміни своїх змішаних стратегій x максимально збільшити свій середній виграш E (A, x, y), а другий – за рахунок своїх змішаних стратегій намагається зробити E (A, x, y) мінімальним, тобто для розв'язання гри необхідно знайти такі x і y, при яких досягається верхня ціна гри

$$\overline{\alpha} = \min_{y} \max_{x} \; E\,(A, x, y). \qquad (5.8)$$

Аналогічною повинна бути ситуація і для гравця 2, тобто нижня ціна гри повинна бути

$$\underline{\alpha} = \max_x \min_y \; E(A, x, y). \quad (5.9)$$

Подібно іграм, що мають сідлові точки в чистих стратегіях, вводиться таке означення: *оптимальними змішаними стратегіями* гравців 1 і 2 називаються такі набори x^o і y^o, згідно з якими задовольняються рівності

$$\min_y \max_x \; E(A, x, y) = \max_x \min_y \; E(A, x, y) = E(A, x^o, y^o). \quad (5.10)$$

Величина $E(A,\ x^o, y^o)$ при цьому називається *ціною гри* і позначається через символ υ.

Є також й інше означення оптимальних змішаних стратегій: x^o, y^o називаються оптимальними змішаними стратегіями відповідно до гравців 1 і 2, якщо вони утворять сідлову точку:

$$E(A, x, y^o) \le E(A, x^o, y^o) \le E(A, x^o, y). \quad (5.11)$$

Оптимальні змішані стратегії і ціна гри називаються *розв'язком матричної гри.*

Основна теорема матричних ігор має вигляд:

Теорема (про мінімакс). Для матричної гри з будь-якою матрицею A існують рівні між собою величини $\underline{\alpha} = \max_x \min_y \; E(A,\ x,\ y)$ і $\overline{\alpha} = \min_y \max_x \; E(A, x, y)$.

Звідси, для того щоб $\boldsymbol{x^*} = (x^*_1, \ldots, x^*_m)$ була оптимальною змішаною стратегією першого гравця для матричної гри з нульовою сумою, платіжною матрицею A та ціною гри ν, необхідно та достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^* \ge \nu, j = \overline{1,n}; \sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1, x_i^* \ge 0. \quad (5.12)$$

Для другого гравця $\boldsymbol{y^*} = (y^*_1, \ldots, y^*_n)$ буде оптимальною змішаною стратегією, якщо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le \nu, i = \overline{1,m}; \sum_{j=1}^{n} y_j^* = 1, y_j^* \ge 0. \quad (5.13)$$

Компонентами векторів $(\boldsymbol{x^*}, \boldsymbol{y^*})$ є ймовірності вибору чистих стратегій гравцями в змішаній стратегії.

5.4 Властивості математичних моделей ігрових ситуацій

Позначимо через $G\ (X, Y, A)$ гру двох осіб з нульовою сумою, у якій гравець 1 вибирає стратегію $x \in X$, гравець 2 – $y \in Y$, після чого гравець 1 отримує виграш $A = A\ (x, y)$ за рахунок гравця 2.

Означення 5.6. Стратегія x^1 гравця 1 *домінує* (*суворо домінує*) над стратегією x^2, якщо $A(x^1, y) \geq A(x^2, y)$ $(A(x^1, y) > A(x^2, y))$, $y \in Y$.

Стратегія y^1 гравця 2 *домінує* (*суворо домінує*) над стратегією y^2, якщо $A(x, y^1) \leq A(x, y^2)$ $(A(x, y^1) < A(x, y^2))$, $x \in X$.

При цьому стратегії x^2 і y^2 називаються *домінованими* (*суворо*).

Спектром змішаної стратегії (*mixed player strategy spectrum*) гравця у скінченній антагоністичній грі називається множина усіх його чистих стратегій, ймовірність яких відповідно до цієї стратегії позитивна.

Властивість 5.1. Якщо чиста стратегія одного з гравців знаходиться в спектрі деякої його оптимальної стратегії, то виграш цього гравця в ситуації, утвореній даною чистою стратегією і будь-якою оптимальною стратегією іншого гравця, дорівнює значенню скінченної антагоністичної гри.

Властивість 5.2. Жодна суворо домінована чиста стратегія гравця не знаходиться в спектрі його оптимальної стратегії.

Гра $G' = (X', Y', A')$ називається підгрою гри $G\ (X,\ Y,\ A)$, якщо $X' \subset X$, $Y' \subset Y$, а матриця A' є підматрицею матриці A. Матриця A' при цьому будується такий чином. В матриці A залишаються рядки і стовпці, що відповідають стратегіям X' і Y', а інші "викреслюються". Усі ті, що залишаться після цього в матриці A і будуть утворювати матрицю A'.

Властивість 5.3. Нехай $G = (X, Y, A)$ – скінченна антагоністична гра, а $G' = (X \setminus x', Y, A)$ – підгра гри G, а x' – чиста стратегія гравця 1 у грі G, що домінується деякою стратегією $\bar{x}$, і спектр якої не містить x'. Тоді будь-який розв'язок (x^o, y^o, υ) гри G' є розв'язком гри G.

Властивість 5.4. Нехай $G = (X, Y, A)$ – скінченна антагоністична гра, а $G' = (X, Y \setminus y', A)$ – підгра гри G, а y' – чиста стратегія гравця 2 у грі G, що домінується деякою стратегією $\bar{y}$, і спектр якої не містить y'. Тоді будь-який розв'язок гри G' є розв'язком G.

Властивість 5.5. Якщо для чистої стратегії x' гравця 1 виконуються умови властивості 5.3, а для чистої стратегії y' гравця 2 виконуються умови властивості 5.4, то будь-який розв'язок гри $G' = (X \setminus x', Y \setminus y', A)$ є розв'язком гри $G = (X, Y, A)$.

Властивість 5.6. Трійка (x^o, y^o, υ) є розв'язком гри $G = (X, Y, A)$ тоді і тільки тоді, коли $(x^o, y^o, k\upsilon + a)$ є розв'язком гри $G(X, Y, kA + a)$, де a – будь-яке дійсне число, $k > 0$.

Властивість 5.7. Для того, щоб $x^o = (x_1^o, \ldots x_i^o, \ldots x_m^o)$ була *оптимальною змішаною стратегією* матричної гри з матрицею A і ціною гри υ, необхідно і достатньо виконання таких нерівностей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i^o \geq \upsilon, \qquad (j = \overline{1,n}). \tag{5.14}$$

Для того, щоб $y^o = (y_1^o, \ldots, y_j^o, \ldots, y_n^o)$ була оптимальною змішаною стратегією гравця 2 необхідно і достатньо виконання нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^o \le \upsilon, \quad (i = \overline{1,m}). \qquad (5.15)$$

З останньої властивості випливає: щоб встановити, чи є передбачувані $(x,\ y)$ і υ розв'язком матричної гри, досить перевірити, чи задовольняють вони нерівності (5.14) і (5.15). З іншого боку, знайшовши ненегативні розв'язки нерівностей (5.14) і (5.15) спільно з рівняннями

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \qquad (5.16)$$

отримаємо розв'язок матричної гри.

Таким чином, розв'язок матричної гри зводиться до пошуку ненегативних параметрів розв'язань лінійних нерівностей (5.14) (5.15) і лінійних рівнянь (5.16). Однак, це вимагає великого обсягу обчислень, який зростає зі збільшенням числа чистих стратегій гравців.

Наприклад, для матриці 3×3 маємо систему з 6 нерівностей і 2 рівнянь. Тому, по-перше, слід, використовуючи властивості 5.2 і 5.3, зменшити, по можливості, число чистих стратегій. А, по-друге, в усіх випадках перевірити виконання рівності

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}. \qquad (5.17)$$

Якщо ця рівність виконується, то обидва гравці мають чисті оптимальні стратегії (гравець 1 - чисту максимінну, а гравець 2 - чисту мінімаксну). Інакше, хоча б в одного гравця оптимальні стратегії будуть змішаними. Для ігор невеликої розмірності ці розв'язки знаходять, застосовуючи властивості 5.1 – 5.5.

Зауваження. Слід відзначити, що виключення *не строго* домінованих стратегій може призвести до втрати деяких розв'язків. Якщо ж виключаються тільки *строго* доміновані стратегії, то множина розв'язків гри не зміниться.

Приклад 5.4. Нехай $G = (X,Y,A)$, де $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, а функція виграшу A задана таким чином:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & 3C/2 & C & 2C \\ 2C & 2C & C & C \\ C & C & C & C/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

де $C > 0$.

Розв'язання. Насамперед відзначимо, що за властивістю 5.6 досить розв'язати гру $G^I = (X,Y,A)$, де $A^I = A1/C$. У матричній формі гра G^I визначається матрицею виграшів

$$A^1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Елементи четвертого рядка цієї матриці " ≤ " відповідних елементів третього рядка, а тому третя стратегія гравця 1 домінує над четвертою. Крім того, елементи першого стовпця матриці A^1 " ≥ " відповідних елементів другого стовпця. Отже, друга стратегія гравця 2 домінує над його першою стратегією.

Далі із властивості 5.5 випливає, що будь-який розв'язок гри $G^2 = (X \setminus \{4\}, Y \setminus \{1\}, A^1)$ є розв'язком гри G^1. У матричній формі гру G^2 можна описати матрицею

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Очевидно, що елементи другого рядка " ≥" півсуми відповідних елементів першого і третього рядків. Крім того, елементи третього стовпця матриці A^2 " ≥" відповідних елементів другого стовпця.

Застосовуючи властивість 5.5 одержимо, що будь-який розв'язок гри $G^3 = (X \setminus \{4,2\}, Y \setminus \{1,4\}, A^2)$, тобто

$$A^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

є розв'язком гри G^2, а отже і гри G^1.

Матриця A^3 не має сідлової точки, тому що не виконується рівність (5.17), і, значить, гра G^3 не має розв'язку в чистих стратегіях, тобто оптимальні стратегії гравців є змішаними. Ці стратегії, у даному випадку, легко знайти з аналізу структури матриці A^3. Оскільки матриця A^3 симетрична, можна припустити, що гравці в оптимальній стратегії використовують свої чисті стратегії з рівними ймовірностями.

Дійсно, якщо гравець 1 вибирає з рівними ймовірностями стратегії 1 і 3, то під час застосування кожної з двох чистих стратегій гравцем 2 математичне сподівання виграшу гравця 1 буде рівним

$$(1/2)\cdot 1 + (1/2)\cdot 2 = 3/2 \quad \text{або} \quad (1/2)\cdot 2 + (1/2)\cdot 1 = 3/2.$$

Аналогічно, якщо гравець 2 використовує свої чисті стратегії 2 і 3 з рівними ймовірностями, то математичне сподівання його програшу буде дорівнювати 3/2. Отже, зазначені стратегії є оптимальними в грі G^3, а величини 3/2 – значенням гри G^3. З попереднього випливає, що ці стратегії оптимальні також і у грі G^I.

Таким чином, стратегія $X = (1/2\ ,\ 0,\ 1/2,\ 0)$ є оптимальною стратегією гравця 1, стратегія $Y = (0,\ 1/2,\ 1/2,\ 0)$ – оптимальною стратегією гравця 2 у грі G^I, а значення гри G^I дорівнює 3/2. У силу властивості 5.4 розв'язком гри G буде трійка $(X,\ Y,\ 3C/2\ )$.

5.5 Алгебраїчний метод моделювання ігрових ситуацій

Нехай задана матрична гра порядку 2×2, що описується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Насамперед необхідно перевірити, чи є в даній ігровій ситуації сідлова точка. Якщо це так, то гра має розв'язок в чистих стратегіях, причому оптимальними стратегіями гравців 1 і 2 відповідно будуть чиста максимінна і чиста мінімаксна стратегії.

Якщо ж гра не має чистих стратегій, то обидва гравці мають тільки такі оптимальні стратегії, що використовують усі свої чисті стратегії з позитивними ймовірностями.

Інакше один із гравців (наприклад 1) має чисту оптимальну стратегію, а інший – тільки змішані. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що оптимальною стратегією гравця 1 є вибір з ймовірністю 1 першого рядка. Далі з властивості 5.1 випливає, що $a_{11} = a_{12} = \upsilon$ і матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} \upsilon & \upsilon \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

Звідси легко побачити, що для матриць такого виду одна із стратегій гравця 2 є така, що домінує. Отже, за властивістю 5.4 цей гравець має чисту стратегію, що суперечить припущенню.

Нехай $X = (\xi\ \ 1-\xi)$ – змішана оптимальна стратегія гравця 1. Оскільки гравець 2 має змішану оптимальну стратегію, з властивості 5.1 отримаємо, що (див. також властивість 5.7)

$$\begin{cases} a_{11}\xi + a_{21}(1-\xi) = \upsilon, \\ a_{12}\xi + a_{22}(1-\xi) = \upsilon. \end{cases} \tag{5.20}$$

Звідси випливає, що при $\upsilon \neq 0$ стовпці матриці A не можуть бути пропорційними з коефіцієнтом, відмінним від одиниці. Якщо ж коефіцієнт пропорційності дорівнює одиниці, то матриця A приймає вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

і гравець 1 має чисту оптимальну стратегію (він вибирає з ймовірністю 1 той з рядків, елементи якого не менші відповідних елементів іншого), що суперечить припущенню. Отже, якщо $\upsilon \neq 0$ і гравці мають тільки змішані оптимальні стратегії, то визначник матриці A відмінний від нуля. З цього випливає, що остання система рівнянь має єдиний розв'язок. Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$\xi = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = x_1,$$

$$1 - \xi = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = x_2, \tag{5.22}$$

$$\upsilon = \frac{a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Аналогічні міркування приводять нас до того, що змішана оптимальна стратегія гравця 2 $Y = (\eta, 1 - \eta)$ задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} \mathrm{a}_{11}\ \eta + \mathrm{a}_{12}(1-\eta) = \upsilon, \\ \mathrm{a}_{21}\ \eta + \mathrm{a}_{22}(1-\eta) = \upsilon, \end{cases} \tag{5.23}$$

звідки

$$\eta = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = y_1;\ 1 - \eta = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} = y_2. \tag{5.24}$$

Якщо ж платіжна матриця має розмірність $m \times n$, то для того, щоб знайти розв'язок такої гри, треба відшукати такі невід'ємні x_i, $i = 1 \ldots m$, y_j, $j = 1 \ldots n$, які задовільняють співвідношення

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v,\ j = 1,n; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, i = 1,m; \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Замінимо всі нерівності на рівності й спробуємо розв'язати отриману систему рівнянь. Якщо всі $x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots, m$ і $y_j \geq 0, j = 1,\ldots, n$, то буде знайдено розв'язок гри. Інакше, якщо серед x_i чи y_j є хоч один недодатний елемент, це означає, що заміна всіх нерівностей рівностями несправедлива і треба тільки частину нерівностей замінити рівностями і розв'язати ту саму систему. Перебираючи послідовно всі комбінації рівностей і нерівностей та розв'язуючи їх, відшукуємо розв'язок гри. При цьому слід мати на увазі, якщо для будь-якого $i = 1,\ldots, m$ буде виконуватись нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j < v, \tag{5.26}$$

то $x_i = 0$.

Якщо ж для будь-якого $j = 1, \ldots, n$ буде

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i > v, \tag{5.27}$$

то $y_j = 0$.

Приклад 5.5. Розв'яжемо гру порядку 2 × 2, що описується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки у цій грі матриця сідлової точки немає, тому шукаємо розв'язок у змішаних стратегіях. Ймовірності використання окремих чистих стратегій обчислюються за наведеними вище формулами:

$$x_1 = \frac{0-5}{1-5-2+0} = \frac{5}{6}; \qquad x_2 = \frac{1-2}{1-5-2+0} = \frac{1}{6};$$

$$y_1 = \frac{0-2}{1-5-2+0} = \frac{1}{3}; \qquad y_2 = \frac{1-5}{1-5-2+0} = \frac{2}{3};$$

при цьому ціна гри визначиться як

$$v = \frac{0-10}{1-5-2+0} = \frac{5}{3},$$

а змішані стратегії гравців мають вигляд $X^* = (5/6,\ 1/6)$, $Y^* = (1/3,\ 2/3)$.

Приклад 5.6. Розв'яжемо гру порядку 2 × 2, що описується матрицею

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок, коли всі нерівності замінено на рівності:

$$\begin{array}{ll} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 = v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, & y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{array}$$

Ці рівняння не мають такого розв'язку, щоб ймовірності x_i та y_j були невід'ємні. Замінюючи рівності на нерівності, приходимо до такої системи:

$$\begin{array}{ll} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = v, & 3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = v, & -y_1 + 4y_2 + 2y_3 = v, \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 > v, & 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 = v, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, & y_1 + y_2 + y_3 = 1. \end{array}$$

З нерівностей $4x_1 + 2x_2 - 6x_3 > v$ і $3y_1 - 2y_2 + 4y_3 < v$ випливає, що $y_3 =$ 0 $x_1 = 0$.

Тепер вже розв'яжемо таку систему рівнянь:

$$\begin{array}{ll} -x_2+2x_3=\nu, & -y_1+4y_2=\nu, \\ 4x_2+2x_3=\nu, & 2y_1+2y_2=\nu, \\ x_2+x_3=1, & y_1+y_2=1. \end{array}$$

Вона має такий розв'язок: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $y_1 = 2/5$, $y_2 = 3/5$, $\nu = 2$. Таким чином, ціна гри дорівнює 2, оптимальна змішана стратегія першого гравця **X*** = (0, 0, 1), другого **Y*** = (2/5,3/5,0)

5.6 Графічний метод розв'язання ігор 2 × *n* і *m* × 2

Пояснимо метод на прикладах.

Приклад 5.7. Розглянемо гру, що задана платіжною матрицею

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & 2 & \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На площині xOy введемо систему координат і на осі Ox відкладемо відрізок одиничної довжини A_1, A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію гравця 1 (x, $1-x$) (рис.5.1). Зокрема точці A_1 (0;0) відповідає стратегія A_1, а A_2 (1;0) – стратегія A_2 і т. д.

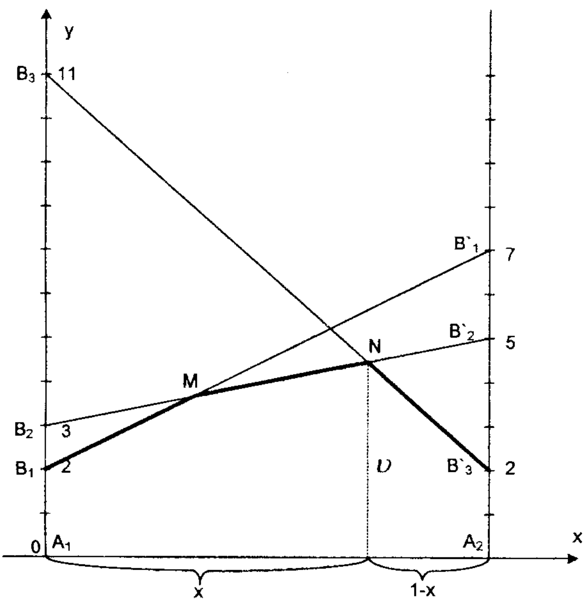

Рисунок 5.1 – Розв'язання приклада 5.7

У точках A_1 і A_2 відновимо перпендикуляри, на яких будемо відкладати виграші гравців. На першому перпендикулярі (у даному випадку він збігається з віссю $0y$) відкладемо виграш гравця 1 при стратегії A_1, а на другому – при стратегії A_2. Якщо гравець 1 застосує стратегію A_1, то виграє при стратегії B_1 гравця 2 – 2 у.о., при стратегії B_2 – 3 у.о., а при стратегії B_3 – 11у.о.. Числам 2, 3, 11 на осі $0x$ відповідають точки B_1, B_2 і B_3. Якщо ж гравець 1 застосує стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 дорівнює 7 у.о., при B_2 – 5 у.о., а при B_3 – 2 у.о.. Ці числа визначають точки B'_1, B_2', B_3'на перпендикулярі, відновленому в точці A_2.

З'єднуючи між собою точки B_1 і B'_1, B_2 і B'_2, B_3 і B'_3 отримаємо три прямі, відстань до яких від осі $0x$ визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка $B_1B'_1$ до осі $0x$ визначає середній виграш υ_1 при будь-якому поєднанні стратегій A_1 A_2 (з частотами x і $1–x$) і стратегією B_1 гравця 2. Ця відстань дорівнює

$$2x_1 + 6(1 - x_2) = \upsilon_1 .$$

(Згадаємо планіметрію і розглянемо трапецію A_1 B_1 B'_1 A_2). Таким чином, ординати точок, що належать ламаній B_1 M N B'_3 визначають мінімальний виграш гравця 1 при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці N. Отже цій точці відповідає оптимальна стратегія $X^* = (x, 1–x)$, а її ордината дорівнює ціні гри υ. Координати точки N знаходимо як точку перетинання прямих B_2 B'_2 і B_3 B'_3. Відповідні два рівняння мають вид

$$\begin{cases} 3x + 5(1 - x) = \upsilon \\ 11x + 2(1 - x) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{11},\ \upsilon = \frac{49}{11}.$$

Отже $X = (3/11; 9/11)$, при ціні гри $\upsilon = 49/11$. Таким чином, ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці $\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Оптимальні стратегії для гравця 2 можна знайти із системи

$$\begin{cases} 3y + 5(1 - y) = \upsilon \\ 5y + 2(1 - y) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{11}$$

і, отже, $Y = (0; 9/11; 2/11)$. (З рисунка видно, що стратегія B_1 не ввійде в оптимальну стратегію.

Приклад 5.8. Розв’яжемо гру, задану матрицею

$$
\begin{array}{ccc}
 & & 2 \\
 & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\
1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.
\end{array}
$$

Розв'язання. Матриця має розмірність 2 × 4. Будуємо прямі, що відповідають стратегіям гравця 1 (рис. 5.2). Ламана $A_1\,K\,A'_4$ відповідає верхній границі виграшу гравця 1, а відрізок NK – ціні гри. Розв'язок гри при цьому такий

$$Y = \left(\frac{3}{8}\ ;\ \frac{5}{8}\right); \quad X = \left(\frac{7}{8}\ ; 0; 0; \frac{1}{8}\right); \quad \upsilon = \frac{43}{8}.$$

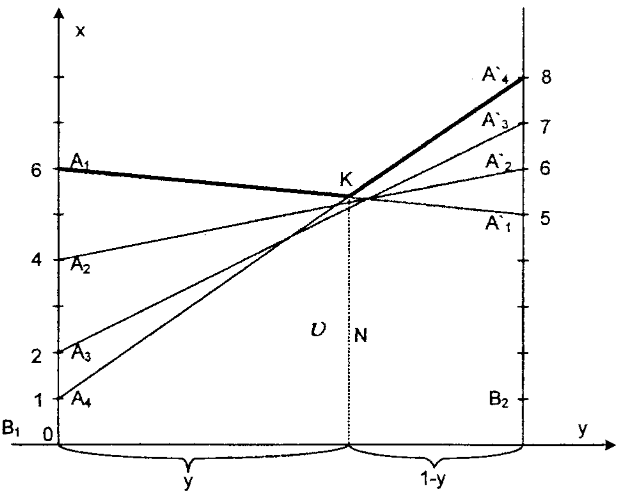

Рисунок 5.2 – Розв'язання прикладу 5.8

5.7 Матричний метод моделювання ігрових ситуацій

Нехай треба розв'язати гру з платіжною матрицею $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і нехай B – будь-яка квадратна підматриця матриці A, порядок якої $r \geq 2$. Тоді алгоритм матричного методу полягає у виконанні таких операцій.

І. Вибираємо квадратну підматрицю B матриці A і обчислюємо

$$\dot{X} = \frac{J_r \mathrm{adj} B}{J_r \mathrm{adj} B J_r^T}, \quad \dot{Y} = \frac{J_r (\mathrm{adj} B)^T}{J_r \mathrm{adj} B J_r^T}, \tag{5.28}$$

де $J_r = /1, 1, ..., 1/$ – одиничний вектор-рядок;

$adjB$ – матриця, приєднана до B;

$(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}$ – індекс транспонування (у даному випадку $\mathbf{x} = adjB$);

$\dot{X}$ – вектор, побудований з X викреслюванням елементів, які відповідають рядкам, викресленим з A під час побудови B;

$\dot{Y}$ – вектор, побудований із Y викреслюванням елементів, які відповідають стовпцям, викресленим з A під час побудови B.

2. Якщо деякі $x_i < 0$, $i = 1,\ldots, r$ або $y_j < 0$ $j = 1,\ldots, r$, то відкидаємо підматрицю B та спробуємо аналізувати другу.

3. Якщо всі $x_i \geq 0$, $i = 1,\ldots, r$ та $y_j \geq 0$, $j = 1,\ldots, r$, то обчислюємо

$$\nu = \frac{|B|}{J_r adjB J_r^T}. \qquad (5.29)$$

4. Будуємо X з $\dot{X}$ та Y з $\dot{Y}$, поширюючи ці вектори нулями на тих місцях, де ми викреслювали рядки чи стовпці під час побудови підматриці B.

5. Перевіряємо виконання співвідношень

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq \nu, j = 1...n, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \nu, i = 1...m. \qquad (5.30)$$

Якщо хоча б одне з них не виконується, відкидаємо підматриці і спробуємо аналізувати другу.

Приклад 5.9. Розв'яжемо гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця A квадратна, то її можна розглядати як підматрицю B, порядок якої $r = 3$. Тоді

$$\mathrm{J_r} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathrm{adjB} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 9 \\ 6 & 6 & -3 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix},$$

а розв'язок гри, обчислений за наведеними вище формулами, має вигляд

$$\mathrm{X} = \dot{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Y} = \dot{\mathrm{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \nu = 1.$$

З дев'яти підматриць порядку $r = 2$ лише одна має додатковий розв'язок, а саме $B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, для якої

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{adj} B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а $\dot{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\dot{Y} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\quad \nu = 1$,

звідки $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Як бачимо, перший гравець має єдину оптимальну стратегію, тоді як другий – множину оптимальних стратегій:

$$Y = \alpha_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ де } \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0.$$

Виникає запитання, чи можна зробити вибір між різними оптимальними стратегіями. Нехай перший гравець вибрав змішану стратегію X, а другий – чисту стратегію j. Тоді математичне сподівання виграшу першого гравця дорівнює $E(X, j)$.

Змішана стратегія X домінує над змішаною стратегією X', якщо для кожної чистої стратегії j другого гравця $E(X,j) \geq E(X^*,j)$ та існує хоча б одна така стратегія j, для якої $E(X, j) > E(X', j)$. У такому випадку стратегія X називається найкращою, якщо вона оптимальна та жодна інша стратегія не домінує над нею. В розглянутому вище прикладі в другого гравця найкраща стратегія – це $Y = (0, 2/3, 1/3)$.

5.8 Ітеративні методи моделювання ігрових ситуацій

Зведення матричних ігор до задач лінійного програмування. Припустимо, що ціна гри додатна ($\upsilon > 0$). Якщо це не так, то згідно з властивістю 5.6 завжди можна підібрати таке число c, додаток якого до всіх елементів матриці виграшів дає матрицю з додатними елементами, і отже, з додатними значеннями ціни гри. При цьому оптимальні змішані стратегії обох гравців *не змінюються*.

Отже, нехай дана матрична гра з матрицею A розмірністю $m \times n$. Відповідно до властивості 5.7 оптимальні змішані стратегії $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ щодо гравців 1 і 2 і ціна гри υ повинні задовольняти співвідношення.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge \upsilon \quad (j=\overline{1,n}), \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0, \ (i=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{5.31}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \upsilon \quad (i=\overline{1,m}), \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ y_j \ge 0, \ (j=\overline{1,n}). \end{cases} \tag{5.32}$$

Розділимо всі рівняння і нерівності в (5.31) і (5.32) на υ (це можна зробити, оскільки за припущенням $\upsilon > 0$) і введемо позначення :

$$\frac{x_i}{\upsilon} = p_i \quad (i=\overline{1,m}), \quad \frac{y_i}{\upsilon} = q_i \quad (j=\overline{1,n}).$$

Тоді (5.31) і (5.32) перепишеться у вигляді :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{\upsilon}, \quad p_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}), \tag{5.33}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{\upsilon}, \quad q_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}). \tag{5.34}$$

Оскільки перший гравець намагається знайти такі значення x_i і, отже, p_i, щоб ціна гри υ була максимальною, розв'язок першої задачі зводиться до пошуку таких додатних значень p_i $(i=\overline{1,m})$, для яких

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1. \tag{5.35}$$

Оскільки другий гравець намагається знайти такі значення y_j і, отже, q_j, щоб ціна гри υ була найменшою, розв'язок другої задачі зводиться до пошуку таких додатних значень q_j, $(j=\overline{1,n})$, для яких

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1. \tag{5.36}$$

Формули (5.35) і (5.36) описують двоїсті одна до одної задачі лінійного програмування (ЛП). Розв'язуючи ці задачі, отримаємо значення p_i $(i=\overline{1,m})$, q_j $(j=\overline{1,n})$ і υ. Тоді змішані стратегії отримуються за виразами:

$$x_i = \upsilon\, p_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right); \quad y_j = \upsilon\, q_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{5.37}$$

Приклад 5.10. Знайти розв'язок гри, що описується матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Під час розв'язання цієї гри до кожного елемента матриці A додамо 1 і отримаємо таку матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Складемо тепер пару взаємодвоїстих задач:

$$p_1 + p_2 + p_3 \to min \qquad\qquad q_1 + q_2 + q_3 \to max$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 2p_3 \ge 1, \\ 2p_1 + \qquad p_3 \ge 1, \\ \qquad\qquad p_3 \ge 1, \\ p_1, p_2, p_3 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 + 2q_2 \qquad \le 1, \\ q_1 \qquad + q_3 \le 1, \\ 2q_1 + q_2 \qquad \le 1, \\ q_1, q_2, q_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо другу з них

Б. п.	q_1	q_2	Q_3	q_4	q_5	q_6	Розв'язок	Σ	Відношення
	–1	–1	–1	0	0	0	0	–3	
q_4	1	2	0	1	0	0	1	5	—
q_5	1	0	1	0	1	0	1	4	1/1
q_6	2	1	0	0	0	1	1	5	—

Б. п.	q_1	Q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	Розв'язок	Σ	Відношення
	0	–1	0	0	1	0	1	1	
q_4	1	2	0	1	0	0	1	5	1/2
q_3	1	0	1	0	1	0	1	4	—
q_6	2	1	0	0	0	1	1	5	1/1 = 1

Б. п.	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	Розв'язок	Σ	Відношення
	1/2	0	0	1/2	1	0	3/2	7/2	
q_2	1/2	1	0	1/2	0	0	1/2	5/2	
q_3	1	0	1	0	1	0	1	4	
q_6	3/2	0	0		0	1	1/2	5/2	

З оптимальної симплекс-таблиці випливає, що

$$(q_1, q_2, q_3) = (0; \frac{1}{2}\ ; 1),$$

а із співвідношень подвійності випливає, що

$$(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{2}\ ; 1; 0).$$

Отже, ціна гри з платіжною матрицею A_1 дорівнює

$$\upsilon_1 = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{q_1 + q_2 + q_3}\right),$$

а гри з платіжною матрицею A:

$$\upsilon = \upsilon_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}.$$

При цьому оптимальні стратегії гравців мають вигляд:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (\upsilon p_1;\ \upsilon p_2;\ \upsilon p_3) = \left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\times 1; \frac{2}{3}\times 0\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right),$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (\upsilon q_1;\ \upsilon q_2;\ \upsilon q_3) = \left(\frac{2}{3}\times 0; \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\times 1\right) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

5.9 Метод послідовного наближення до ціни гри

Часто під час дослідження операцій виникає ситуація, коли немає потреби в точному розв'язку гри, або через якісь причини не можна знайти точного значення ціни гри та оптимальних змішаних стратегій гравців.

Суть методу полягає в тому, що гра в уяві розігрується кілька разів, тобто в кожній партії гри кожний партнер вибирає ту свою стратегію, яка дає йому найбільший сумарний виграш. Інакше кажучи, кожний гравець вибирає таку послідовність своїх чистих стратегій, яка забезпечує першому гравцю максимальний середній виграш, а другому – мінімальний середній програш.

Після реалізації кількох партій такої гри обчислюється середнє значення виграшу першого гравця, програшу другого гравця, а їх середнє арифметичне береться за приблизне значення ціни гри. Крім того, цей метод надає можливість визначити наближене значення оптимальних змішаних стратегій обох партнерів.

Розглянемо матричну гру двох гравців з платіжною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Результати застосування методу зведемо в табл. 5.2:

v_1 – найбільший сумарний виграш першого гравця за кілька партій гри, поділений на число партій;

v_2 – найменший сумарний програш другого гравця за те саме число партій гри, поділений на число партій

$$v=\frac{v_1+v_2}{2}. \qquad (5.38)$$

Таблиця 5.2 - Результати застосування методу послідовного наближення до ціни гри

Номер	Стратегія p_2	Сумарний виграш p_1			Стратегія p_2	Сумарний Виграш p_1			v_1	v_2	$v=\frac{v_1+v_2}{2}$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	1	4	5	1	2	5	3	5	5/1	3/1	8/2
2	2	9	8	8	1	9	8	8	9/2	8/2	17/4
3	2	14	11	11	1	13	13	11	14/3	11/3	25/6
4	3	17	16	15	1	17	18	14	16/4	14/4	30/8
5	3	20	21	19	2	22	21	19	21/5	19/5	30/10
6	3	23	26	23	2	27	24	24	26/6	24/6	50/12
7	2	28	29	28	2	32	27	29	29/7	27/7	56/14
8	2	33	32	33	1	36	32	32	33/8	32/8	65/8
9	2	38	35	38	1	40	37	35	38/9	35/9	73/18
10	3	41	40	42	3	41	42	39	42/10	39/10	81/20
11	3	44	45	46	3	42	47	43	46/11	42/11	88/22
12	1	48	50	47	2	47	50	48	50/12	47/12	97/14
13	1	52	55	48	2	52	53	53	55/13	51/13	106/26
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	1	56	60	49	2	57	56	56	60/14	56/14	116/28
15	2	61	63	54	2	62	59	63	63/15	59/15	122/30

Заповнюємо таблицю таким чином.

Нехай другий гравець вибрав свою першу стратегію, тоді перший виграв:

4, якщо вибере свою першу стратегію;

5, якщо вибере свою другу стратегію;

1, якщо вибере свою третю стратегію.

Ці значення запишемо в 2-5 стовпці табл. 5.2. Максимальний виграш першого гравця буде тоді, якщо він використав свою другу стратегію. При цьому другий гравець програв:

5, якщо вибере свою першу стратегію;

3, якщо вибере свою другу стратегію;

5, якщо вибере свою третю стратегію.

Ці дані запишемо в 6-9 стовпці табл. 5.2. Для другої стратегії першого гравця другий матиме найменший програш, якщо вибере свою другу стратегію. У стовпець 10 запишемо найбільший середній виграш першого гравця, який він має в першій партії гри, тобто 5/1, а у стовпець 11 занесемо найменший середній програш 3, який мав другий гравець у першій партії, в стовпець 12 запишемо середнє арифметичне, тобто наближене значення ціни гри: 5/1 + 3/1 : 2 = 8/2. Якщо другий гравець використовуватиме свою другу стратегію у другій партії гри, то перший має отримати 5, 3, 5 відповідно при своїх першій, другій, третій стратегіях, а сумарний виграш його за дві партії гри буде:

4 + 5 = 9 – при його першій стратегії;

5 + 3 = 8 – при його другій стратегії;

1 + 5 = 6 – при його третій стратегії.

Ці сумарні виграші запишемо в другий рядок табл. 5.2 (стовпці 3-5). З них найбільшим є 9, що відповідає першій стратегії першого гравця, тобто в цій партії йому необхідно вибрати цю свою стратегію. Другий гравець програв при цьому 4, 5, 3 відповідно при першій, другій, третій своїх стратегіях, а його сумарний програш за дві партії гри буде:

5 + 4 = 9 – при його першій стратегії;

3 + 5 = 8 – при його другій стратегії;

5 + 3 = 8 – при його третій стратегії.

Ці сумарні програші запишемо в другий рядок табл. 5.2 (стовпці 7-9).

Із цих програшів найменшим є 8, що відповідає другій та третій його стратегіям, тобто в третій партії гри другий гравець може використовувати будь-яку з цих двох стратегій, нехай другу. У стовпці 10 запишемо найбільший сумарний виграш першого гравця за дві партії, поділений на число партій, тобто 9/2, у стовпець 11 – відповідно 8/2 – найменший сумарний програш другого гравця за дві партії, поділений на число партій, а у стовпець 12 – їх середнє арифметичне – 17/4.

Продовжуючи далі цей процес, заповнимо всю табл. 5.2 для 15 партій. Звідси можна обчислити, що наближена змішана стратегія першого гравця має вигляд X = (5/15, 8/15, 2/15), другого – Y = (4/15, 6/15, 5/I5), а ціна гри – v = 61/15. Точне значення змішаних стратегій гравців буде:

$$X^* = (0,4;\quad 0,47;\quad 0,13), Y^* = (0,13;\quad 0,47;\quad 0,4).$$

а ціна гри $\nu = 4,067$. Таке наближення буде досить добрим.

5.10 Принцип мінімакса

Розглянуті вище міркування щодо пошуку найкращого плану ігор, зокрема, в умовах конкуренції – не єдиний спосіб розв'язання задач. Часто набагато швидшим і, головне, логічно стрункішим виявляється інший принцип пошуку оптимальних ігрових стратегій за ***принципом мінімакса.*** Для ілюстрації цього методу розглянемо попередній приклад гри з трохи видозміненою матрицею, яка зображена у вигляді табл. 5.3.

Таблиця 5.3 – Ігрова матриця

	C_1	C_2
S_1	-2000	-4000
S_2	-1000	+3000
S_3	+1000	+2000

Повторимо міркування, що використані для попереднього прикладу:

- ми ніколи не виберемо стратегію S_1, оскільки вона за будь-якої відповіді конкурента принесе нам значні збитки.

- з двох стратегій, що залишилися доцільніше вибрати S_3, оскільки за будь-якої відповіді конкурента ми дістанемо прибуток.

- вибираємо як оптимальну стратегію S_2.

Міркування нашого конкурента виявляться приблизно такими ж за змістом. Розуміючи, що ми ніколи не приймемо S_1 і виберемо, зрештою, S_3, він прийме рішення вважати оптимальною для себе стратегію C_1 – у цьому випадку він буде мати найменші збитки.

Можна застосувати й інший метод міркувань, що дає, зрештою, той же результат. При виборі найкращого плану гри для нас можна міркувати так:

- при стратегії S_1 мінімальний (***min***) «виграш» складе – 4000 гривень;
- при стратегії S_2 мінімальний (***min***) «виграш» складе – 1000 гривень;
- при стратегії S_3 мінімальний (***min***) виграш складе + 1000 гривень.

Виходить, що найбільший (***max***) з найменших (***min***) виграшів – це 1000 гривень і тому потрібно визначати стратегію S_3 оптимальною, з надією на відповідний хід конкурента його стратегією C_1. Таку стратегію і називають стратегією ***MaxMin.*** Якщо тепер спробувати змоделювати поведінку конкурента, то для нього:

- при стратегії C_1 максимальний (***max***) програш складе 1000 гривень;
- при стратегії C_2 максимальний (***max***) програш складе 2000 гривень.

Виходить, наш конкурент, якщо він буде міркувати тверезо, вибере стратегію C_1, оскільки саме вона забезпечує найменший (***min***) з найбільших (***max***) програшів. Таку стратегію і називають стратегією ***MiniMax.***

Легко помітити, що це те саме – ви робите хід S_3 у розрахунку на відповідь C_1, а ваш конкурент – хід C_1 у розрахунку на S_2.

Тому такі стратегії називають ***мінімаксними*** – ми сподіваємося на мінімум максимальних збитків або, що те саме, на максимум мінімального прибутку.

У двох розглянутих прикладах оптимальні стратегії «супротивників» збігалися, прийнято говорити – вони відповідали ***сідловій точці*** матриці гри.

Метод мінімакса відрізняється від стандартного шляху логічних міркувань таким важливим показником як *алгоритмічність.* Справді, можна довести, що якщо сідлова точка існує, то вона знаходиться на перетині деякого рядка S і деякого стовпця C. Якщо число в цій точці ***найбільше для даного рядка*** і, одночасно, ***найменше у даному стовпці***, то це і є сідлова точка.

Зазвичай, далеко не всі ігри характеризуються сідловою точкою. Однак якщо вона є, то пошук її для числа рядків і стовпців у кілька десятків, а то і сотень за стандартним логічним планом – справа практично безнадійна без використання комп'ютерних технологій. Але, навіть і при використанні комп'ютера, писати програму для реалізації всіх можливих *If ... Then* доведеться на спеціальних мовах програмування (наприклад – мова Prolog). Ці мови чудові для розв'язання логічних задач, але практично непридатні для звичайних обчислень. Якщо ж використовувати метод мінімакса, то весь алгоритм пошуку сідлової точки займе мовою Pascal або C++ не більше 5...10 рядків програми.

Розглянемо ще один простий приклад гри, але вже ***без сідлової точки***.

Початкові дані занесено в табл. 5.4.

Таблиця 5.4 – Початкові дані

	C_1	C_2
S_1	-3000	+7000
S_2	+6000	+1000

Задача в цьому випадку для нас (і для нашого розумного конкурента) буде полягати у зміні стратегій, у надії знайти таку їх комбінацію, за якою математичне сподівання виграшу або середній виграш за деяке число ходів буде максимальним.

Нехай ми прийняли рішення половину ходів у грі робити з використанням S_1, а іншу половину – з S_2. Звичайно, ми не можемо знати, яку зі своїх двох стратегій буде застосовувати конкурент, і тому доведеться розглядати два крайніх випадки його поведінки.

Якщо наш конкурент увесь час буде застосовувати C_1, то для нас виграш складе 0,5 (-3000) + 0,5 (+6000) = 1500 гривень.

Якщо ж він увесь час буде застосовувати C_2, то наш виграш складе 0,5 (+7000) + 0,5 (+1000) = 4000 гривень.

А це вже привід для міркувань, для аналізу. Зрештою, можна припустити, що ж ми будемо мати у випадку застосування конкурентом також змішаної стратегії? Відповідь уже готова – ми будемо мати виграш не менше 1500 гривень, оскільки виконані вище розрахунки охопили всі варіанти змішаних стратегій конкурента.

Поставимо запитання у більш загальному вигляді – а чи існує ***найкраща*** змішана стратегія (комбінація S_1 і S_2) для нас в умовах застосування змішаних стратегій (комбінації C_1 і C_2) з боку конкурента? Математична теорія ігор дозволяє відповісти на це запитання точно – оптимальна змішана стратегія завжди існує, але вона може гарантувати ***мінімум*** математичного сподівання ***виграшу***. Методи пошуку таких стратегій добре розроблені і наведені в літературі.

Таким чином, ми знову виявилися в ролі ОПР – системний підхід ***не може*** дати поради щодо ***безумовного*** одержання виграшу. Нам і тільки нам вирішувати – або скористатися рекомендацією і застосувати оптимальну стратегію гри, але при цьому рахуватися з ризиком можливого програшу (виграш виявиться гарантованим лише при дуже великому числі ходів).

Завершимо розгляд останнього прикладу демонстрацією пошуку найкращої змішаної стратегії.

Нехай ми застосовуємо стратегію S_1 з частотою ε, а стратегію S_2 з частотою $(1-\varepsilon)$. Тоді ми будемо мати виграш

$$W(C_1) = \varepsilon\,(-3000) + (1-\varepsilon)(+6000) = 6000 - 9000\varepsilon$$

при застосуванні конкурентом стратегії C_1, або будемо мати виграш

$$W(C_2) = \varepsilon\,(+7000) + (1-\varepsilon)(+1000) = 1000 + 6000\varepsilon$$

при застосуванні конкурентом стратегії C_2.

Теорія ігор дозволяє знайти найкращу стратегію для нас з умови

$$W(C_1) = W(C_2), \tag{5.39}$$

що приводить до найкращого значення $\varepsilon = 1/3$ і математичному сподіванню виграшу завбільшки (–3000) (1/3) + (+6000) (2/3) = 3000 гривень.

5.11 Моделювання в умовах протидії (моделі торгів)

До цього класу відносяться задачі аналізу систем із протидією (конкуренцією), також ігрових по суті, але з однією особливістю – «правила гри» не постійні в одному єдиному пункті – ціни за те, що продається.

Для невеликого числа учасників торгів цілком придатні описані вище прийоми теорії ігор, але коли число учасників велике і, що ще гірше, заздалегідь невідоме – приходиться використовувати трохи інші методи моделювання ситуацій у торгах. Найчастіше зустрічаються два види торгів:

- ***закриті торги*** (*auctions by a tender*), у яких два або більше учасники незалежно один від одного пропонують ціни (ставки) за той чи інший об'єкт, при цьому учасник має право лише на одну ставку, а ведучий торги приймає вищу (чи нижчу) із запропонованих;

- ***відкриті торги*** (*open auctions*) або ***аукціони,*** коли два або більше учасники підіймають ціни доти, поки надбавка пропонується.

Розглянемо спочатку найпростіший приклад закритих торгів. Нехай ми (А) і наш конкурент (В) беремо участь у закритих торгах двох об'єктів сумарною вартістю $C_1 + C_2$.

Ми маємо у своєму розпорядженні вільну суму S і нам відомо, що точно таку ж суму має наш конкурент. При цьому $S < C_1+C_2$, тобто купити обидва об'єкти без торгів не вдасться.

Ми повинні призначити свої ціни $A1$, $A2$ за перший і другий об'єкти в таємниці від конкурента, який запропонує за них свої ціни $B1$, $B2$. Після оголошення цін об'єкт дістанеться тому, хто запропонував найбільшу ціну, а якщо вони збіглися – за жеребом.

Припустимо, що і ми, і наш конкурент володіємо методом вибору найкращої стратегії. Отож – можна довести, що для ***рівних*** вільних сум з нашої і з протилежної сторони існує ***оптимальна*** для обох сторін стратегія призначення цін. Сутність її (скажемо, для нас) визначається з таких міркувань. Якщо нам вдасться купити перший об'єкт, то наш дохід складе $(C_1 - A_1)$ або ж, при покупці другого, ми будемо мати прибуток $(C_2 - A_2)$. Виходить, у середньому ми можемо очікувати прибуток

$$d = 0{,}5(C_1 + C_2 - A_1 - A_2) = 0{,}5(C_1 + C_2 - S). \qquad (5.40)$$

Таким чином, нам найвигідніше призначити ціни

$$A_1 = C_1 - d = 0{,}5(C_1 - C_2 + S);\ A_2 = C_2 - d = 0{,}5(C_2 - C_1 + S). \qquad (5.41)$$

Якщо ж одна з них з розрахунку виявиться негативною – позначимо її нульовою і вкладемо всі гроші в ціну за інший об'єкт.

Але і наш конкурент, маючи ту ж вільну суму і розмірковуючи так само, призначить за об'єкти такі ж ціни. Проте, якщо конкурент не має професійних знань? Що ж, тим гірше для нього – ми будемо мати прибуток більший, ніж конкурент.

Конкретний приклад. Сума вільних грошей складає по 10000 гривень у кожного, ціна першого об'єкта дорівнює 7500, другого 10000 гривень.

Призначимо ціну за перший об'єкт у

$$0{,}5(7500-10000+10000) = 3750,$$

а за другий у $\quad 0{,}5\,(10000-7500+10000) = 6250$ гривень.

Наш дохід при виграші першого або другого об'єкта складе 3750 гривень. Такий же дохід очікує і конкурента, якщо він вибрав таку ж, оптимальну стратегію. Але, якщо він призначив ціну за перший об'єкт 3500, а за другий 6000 гривень (намагаючись заощадити!), то в такому випадку ми можемо виграти торги по двох об'єктах відразу і будемо мати прибуток вже у 7500 гривень – отримуючи майно загальною вартістю в 17500 за ціну у 10000 гривень!

Звичайно, якщо стартові суми учасників торгів неоднакові, число об'єктів велике і велике число учасників, то задача пошуку оптимальної стратегії стає більш складною, але все-таки має аналітичне рішення.

Розглянемо тепер другий вид задачі – ***відкриті торги*** (аукціони). Нехай усі ті ж два об'єкти (з тими ж вартостями) продаються з аукціону, у якому беремо участь ми і наш конкурент.

На відміну від першої задачі вільні суми різні і складають S_A і S_B, причому кожна з них менша (C_1+C_2) і, крім того, відношення нашої суми до суми конкурента більше 0,5, але менше 2.

Нехай ми знаємо фінансову спроможність конкурента і, оскільки шукаємо оптимальну стратегію для себе, нам байдуже – або знає він те ж про наші фінансові можливості. Задача наша полягає у тому, що ми повинні знати – коли треба припинити підіймати ціну за перший об'єкт. Цю задачу не вирішити, якщо ми не визначимо мету своєї участі в аукціоні (системний підхід, нагадаємо, ***потребує*** цього). Тут можливі варіанти:

- ми хочемо мати максимальний прибуток;
- ми прагнемо мінімізувати дохід конкурента;
- ми бажаємо максимізувати різницю в доходах – свій побільше, а конкурента поменше.

Найбільш цікавий третій варіант ситуації – знайти нашу стратегію, що забезпечує

$$D_A - D_B = Max. \tag{5.42}$$

Оскільки об'єктів лише два, то все зважується у процесі торгів за перший об'єкт. Будемо розглядати свій хід у відповідь на чергову пропозицію ціни X за цей об'єкт з боку конкурента.

Ми можемо використовувати дві стратегії двома способами:

- прагнути поступитися першим об'єктом конкуренту – за найбільшу ціну, сподіваючись купити другий;
- прагнути купити перший об'єкт – за мінімальну ціну, поступившись конкуренту другим.

Нехай конкурент призначив за перший об'єкт чергову суму X. Якщо ми не додамо невелику суму (мінімальну надбавку Δ), то перший об'єкт дістанеться конкуренту. При цьому у конкурента в запасі залишиться сума $S_B - X$. Дохід конкурента складе при цьому (без врахування Δ) $D_B = З_1 - X$.

Ми напевно купимо другий об'єкт, якщо у нас є S_A=($S_B - X$) + Δ, тобто не на багато більше, ніж залишилося в конкурента. Виходить, ми будемо мати прибуток $D_A = C_2 - (S_B - X)$ і різниця доходів у цьому випадку складе

$$D_A - D_B = C_2 - C_1 - S_B + 2X. \quad (5.43)$$

Зрозуміло, що ця різниця буде позитивна тільки тоді, коли ми поступимося першим об'єктом за ціну

$$X > \frac{(C_1 - C_2) + S_B}{2}, \quad (5.44)$$

але ніяк не менше.

Будемо підвищувати ціну за перший об'єкт до суми $X+\Delta$ з метою *купити* його. Наш дохід складе при цьому $D_A = C_1 - (X + \Delta)$.

Другий об'єкт дістанеться конкуренту за суму $S_A - (X + \Delta) + \Delta$, оскільки йому доведеться підняти ціну за цей об'єкт до рівня, трохи більшого від залишку грошей у нас. Дохід конкурента складе $D_B = C_2 - (S_A - X + \Delta) + \Delta)$, а різниця доходів складе (без врахування Δ)

$$D_A - D_B = (C_1 - X) - (C_2 - S_A + X) = C_1 - C_2 + S_A - 2X. \quad (5.45)$$

Ця різниця буде додатна за умови

$$X < \frac{(C_1 - C_2) + S_A}{2}. \quad (5.46)$$

Ми знайшли дві «контрольні» суми для того, щоб знати – коли треба скористатися однією з двох доступних нам стратегій – вирази (5.44) і (5.46). Середнє цих величин складе

$$K = \frac{(C_1 - C_2)}{2} + \frac{S_A + S_B}{4}, \quad (5.47)$$

і визначає розумну межу для зміни стратегій нашої участі в аукціоні з метою одночасно отримати дохід собі побільше, а конкуренту – поменше.

Цікаво порахувати свій дохід і різницю доходів на цій межі.

– Якщо ми уступили перший об'єкт на цій межі, то за (5.43)

$$D_A - D_B = C_2 - C_1 - S_B + 2K = 0{,}5(S_A - S_B).$$

– Якщо ж ми купили перший об'єкт на цій межі, то за (5.45)

$$D_A - D_B = C_1 - C_2 + S_A - 2K = 0{,}5(S_A - S_B).$$

Для зручності супроводу числових даних задамо вільні суми і ціни об'єктів (за нашим уявленням про ці об'єкти):

$$S_A = 100 < 175;\ S_B = 110 < 175;\ C_1 = 75;\ C_2 = 100;\ 0{,}5 < (S_A/S_B) < 2$$

і приймемо дозволену надбавку до ціни, рівною 1.

У цьому конкретному випадку межа «бою» за перший об'єкт проходить через суму (5.47):

$$K = \frac{(C_1 - C_2)}{2} + \frac{S_A + S_B}{4} = -12{,}5 + 52{,}5 = 40\ \$$$

Якщо наш конкурент вважає, що об'єкти ***для нього*** коштують однаково (він знає нашу вільну суму, а ми знаємо його вільну суму, але іншої інформації ми і він не маємо), то він обчислить цю ж межу і ми будемо задовольнятися різницею доходів не на свою користь:

$$D_A - D_B = C_1 - C_2 + S_A - 2\,K = 0{,}5(S_A - S_B) = -5.$$

Що ж робити – коли у конкурента більший стартовий капітал. Можливо, що наш конкурент (граючи за себе) буде вважати вартості об'єктів зовсім іншими і для нього границя буде зовсім іншою. Або – мета конкурента у даному аукціоні зовсім не така як наша, що також обумовить іншу граничну суму участі в торгах за перший об'єкт. Іншими словами – оптимальна стратегія конкурента нам зовсім невідома. Тоді усе залежить від того, на якій сумі він «віддасть» нам перший об'єкт або навпаки, до якої межі він буде «боротися» за нього. Табл. 5.5 ілюструє цей випадок.

І на завершення питання про відкриті торги – аукціони, відзначимо, що в реальних умовах задача моделювання і вибору оптимальної стратегії поведінки виявляється дуже складною.

Справа не тільки у тому, що число об'єктів може бути набагато більше двох, а що стосується числа учасників, то воно також може бути великим і навіть не завжди відомим заздалегідь. Це призведе до чисто кількісних труднощів під час моделювання «вручну», однак, не відіграє особливої ролі при використанні комп'ютерних програм моделювання. Справа у іншому – здебільшого ситуація ускладнюється невизначеністю, стохастичністю поведінки наших конкурентів. Тому, прийдеться мати справу не із самими величинами (цінами, що замовляються, доходами і т.д.), а з їх математичними сподіваннями, обчисленими за вірогідними моделями, або із середніми значеннями, знайденими за підсумками спостережень статистичних експериментів.

Таблиця 5.5 – Випадок, коли у конкурента більший стартовий капітал

Межа 1 торгу за об'єкт	**Власник 1 об'єкта**	**Дохід D_A**	**Дохід D_B**	**Різниця $D_A - D_B$**
20	A	55	20	35
30	A	45	30	10
35	A	40	35	5
40	A	35	40	-5
40	B	25	35	-5
45	B	35	30	5
50	B	40	25	15
55	B	45	20	25
60	B	50	15	40
75	B	75	0	75

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Наведіть класифікацію ігрових ситуацій.
2. Дайте означення термінів *матрична* та *біматрична гра*.
3. Що Ви розумієте під поняттям *чиста стратегія гри*?
4. Що таке *сідлова точка*? Показати на прикладі.
5. Що таке змішана стратегія гравця?
6. Сформулюйте теорему про мінімакс.
7. Що таке домінування (строге домінування) стратегії одного гравця над стратегією іншого?
8. Наведіть властивості математичних моделей ігрових ситуацій та поясніть їх.
9. Поясніть алгебраїчний метод моделювання ігрових ситуацій на прикладі.
10. Покажіть та поясніть на прикладі графічний метод розв'язання ігор.
11. Який хід виконання операцій у матричному методі моделювання ігрових ситуацій? Наведіть приклад.
12. Опишіть ітеративний метод моделювання ігрових ситуацій.
13. В чому полягає суть методу послідовного наближення до ціни гри?
14. Поясніть на прикладі принцип мінімакса для пошуку оптимальних ігрових стратегій.
15. Поясніть на прикладі моделювання в умовах протидії. Розгляньте випадки закритих та відкритих торгів.

6 МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВЕЛИКИХ СИСТЕМ

6.1 Планування експериментів

Ще на початку розгляду питань про цілі і методи системного аналізу ми знайшли ситуації, у яких немає можливості описати елемент системи, підсистему і систему в цілому *аналітично*, використовуючи системи або рівняння хоча б нерівностей. Іншими словами – ми не завжди можемо побудувати чисто математичну модель на будь-якому рівні – елемента системи, підсистеми або системи у цілому. Такі системи іноді дуже влучно називають «погано організованими» або «слабко структурованими».

Так уже склалося, що протягом майже 200 років після Ньютона у науці вважалося непорушним положення про можливість «чистого» або ***однофакторного*** експерименту. Передбачалося, що для з'ясування залежності величини $Y=f(X)$ навіть за умови очевидної залежності Y від багатьох інших змінних завжди можна стабілізувати всі змінні, крім X, і знайти «особистий» вплив X на Y.

Лише порівняно недавно (див. роботи В. В. Налімова) погано організовані або, як їх ще називають – ***великі системи*** цілком «законно» стали вважатися особливим середовищем, у якому невідомими є не лише зв'язки всередині системи, але і самі елементарні процеси. Аналіз таких систем (у першу чергу соціальних та економічних) можливий лише при єдиному, науково обґрунтованому підході – визнанні прихованих, невідомих нам причин і законів процесів. Часто такі причини називають ***латентними факторами***, а особливі властивості процесів – ***латентними ознаками***.

Виявилася і вважається також загальновизнаною можливість аналізу таких систем з використанням двох, принципово різних підходів або методів.

Перший з них це ***метод багатовимірного статистичного аналізу***. Цей метод був обґрунтований і застосований відомим англійським статистиком Р. Фішером у 20-30 роках XX сторіччя. Подальший розвиток багатовимірної математичної статистики як науки, так і основи багатьох практичних додатків вважається причинно зв'язаним з появою й удосконаленням комп'ютерної техніки. Якщо у 30-і роки, під час ручного оброблення даних вдавалося розв'язувати задачі, в яких існувало 2 ... 3 незалежних змінних, то у 60-і роки розв'язувалися задачі з 6 змінними, а до 70..80 років їх число вже наближалося до 100.

Другий метод, який прийнято називати ***кібернетичним*** або ***«вінерівським»***, пов'язуючи його назву з батьком кібернетики Н. Вінером. Коротка сутність цього методу – чисто логічний ***аналіз процесу керування*** великими системами. Поява цього методу була цілком природною – оскільки ми визнаємо існування погано організованих систем, то логічним буде порушити питання про пошук методів і засобів керування ними. Зовсім безглуздо порушувати питання про розподіл струмів в електричних колах – ці процеси є добре організованою (законами природи) системою.

Цікаво, що обидва методи, незважаючи на розходження між собою, можуть застосовуватися і з успіхом застосовуються під час системного аналізу одних і тих самих систем.

Так, наприклад, інтелектуальна діяльність людини вивчається «фішерівським» методом – багато психологів, як іронічно зауважує В. В. Налімов, «упевнені, що їм вдасться розібратися в результатах численних тестових іспитів». З іншого боку, побудова так званих ***систем штучного інтелекту*** є спробою створення комп'ютерних програм, що імітують поведінку людини в області розумової діяльності, тобто застосування «вінерівського» методу.

Очевидно, що економічні системи, швидше за все, слід віднести саме до погано організованих, насамперед тому, що одним з видів елементів у них є людина. А якщо це так, то не дивно, що під час системного аналізу в економіці буде потрібний «реальний» ***експеримент***.

У найпростішому випадку мова може йти про деякий елемент економічної системи, про який нам відомі лише зовнішні впливи (що потрібно для нормального функціонування елементу) і вихідні його реакції (що повинен «робити» цей елемент).

Однією з рятівних ідей, може бути ідея розгляду такого елемента, як «чорний ящик». Використовуючи цю ідею, ми розуміємо, що не в змозі простежити процеси всередині елемента і сподіваємося побудувати його модель без таких знань. Нагадаємо класичний приклад – незнання процесів травлення в організмі людини не заважає нам організовувати своє харчування за «входом» (продукти, які ми споживаємо, режим харчування і т. д.) з врахуванням «вихідних» показників (ваги тіла, самопочуття й інших).

Отже, наші наміри цілком конкретні, а саме «що робити» – ми збираємося подавати на вхід елементу різні зовнішні, **керуючі впливи** *(control influences)* і слідкувати за його **реакціями** *(reactions)* на ці впливи.

Тепер треба настільки ж чітко вирішити – а навіщо ми це будемо робити, що ми сподіваємося отримати. Питання це непросте, нечасто можна дозволити собі просто задовольнити свою допитливість.

Як правило, експерименти над реальними системами є вимушеною процедурою, зв'язаною з певними витратами на сам експеримент і, крім того, з ризиком непоправних негативних наслідків.

Теоретичне обґрунтування і методика дій у таких ситуаціях складають предмет особливої галузі науки – ***теорії планування експерименту***.

Визначимо, яку термінологію будемо вживати:

- усе, що подається на вхід елементу, будемо називати ***керуючими впливами*** або просто ***впливами***;

- усе, що виходить на виході елементу, будемо називати ***реакціями***;

- якщо ми можемо виділити у системі (підсистемі) декілька ***однотипних*** елементів, то їх сукупність будемо називати ***блоком***;

- змістовний опис своїх дій щодо елементів блоку будемо називати ***планом*** експерименту.

Дуже важливо зрозуміти мету експерименту, що планується. Зрештою, ми можемо і не отримати ніякої інформації про сутність процесів у ланцюгу «вхід-вихід» у самому елементі. Але якщо ми знайдемо корисність деяких, доступних нам впливів на елемент і переконаємося в надійності отриманих результатів, то досягнемо головної мети експерименту – знаходження ***оптимальної стратегії керування*** елементом. Неважко зрозуміти, що поняття «керуючий вплив» дуже широке – від звичайних наказів до під'єднання до елементу джерел енергетичного або інформаційного «живлення». Виявляється, що вже саме складання плану експерименту потребує певних знань і деякої кваліфікації. Досвід доводить доцільність включення в план таких чотирьох компонентів:

- опис ***множини стратегій*** керування, серед яких ми сподіваємося вибрати найкращу;
- специфікацію або детальний порівняльний опис ***елементів*** блоку;
- правила ***розміщення стратегій*** на блоці елементів;
- ***специфікацію вихідних даних***, що дозволяють оцінювати ефективність елементів.

Детальний розгляд компонентів плану експерименту дозволяє помітити, що для його реалізації потрібні знання в різних областях науки, навіть якщо мова йде про економічну систему. Так, під час вибору керуючих впливів не обійтися без мінімальних знань з області ***технології***, дуже часто потрібні знання і в області юридичних законів, екології. Для реалізації третього компонента необхідні знання у області математичної статистики, оскільки потрібно використовувати поняття розподілів випадкових величин, їх математичних сподівань і дисперсій. Також можуть виникнути і ситуації, що вимагають застосування непараметричних методів статистики.

Для того, щоб показати труднощі, що виникають під час складання плану експерименту і навіщо потрібно розуміти методи використання результатів експерименту, розглянемо найпростіший приклад.

Нехай ми виконуємо системний аналіз фірми, що здійснює торгівлю за допомогою мережі «фірмових» магазинів і маємо можливість спостерігати той самий вихідний показник елемента такої системи (наприклад, денний виторг магазину фірми).

Очевидним є намагання знайти спосіб підвищення цього показника, а якщо таких способів виявиться декілька – потрібно вибрати найкращий. Припустимо, що відповідно до першого пункту правил планування експерименту, ми вирішили випробувати чотири стратегії керування магазинами. Коли вже таке рішення прийняте, то нерозумно обмежувати експеримент одним елементом, якщо їх у системі досить багато і ми не маємо впевненості в «еквівалентності» умов роботи всіх магазинів фірми.

Нехай ми маємо *N* магазинів – досить багато, щоб провести «масовий» експеримент, але їх не можна віднести до одного типу. Наприклад, ми можемо розрізняти чотири типи магазинів: *А*, *Б*, *В* і *Г* (аптечні, бакалійні, горілчані і галантерейні).

Зрозуміло також і те (хоча для цього потрібно розбиратися в технології торгівлі), що виторг магазина може цілком істотно залежати від дня тижня – нехай робочі дні всіх магазинів: *Ср*, *Пт*, *Сб*, *Нд*.

Перше, «просте» рішення – вибрати з *N* кілька магазинів навмання (застосувавши рівновірогідний розподіл їх номерів) і використовувати певний час нову стратегію керування ними. Але такі прості міркування приводять до думки, що це буде не краще рішення. І справді – ми розглядаємо елементи системи як «рівноправні» за декількома показниками:

- ми шукаємо єдину (найкращу) для фірми стратегію керування;
- ми використовуємо єдиний для всіх елементів показник ефективності (денний виторг).

У той же час, ми самі поділили об'єкти на групи і тим самим визнаємо розходження у зовнішніх умовах роботи для різних груп. Мовою ТССА це означає, що професійні знання в області керування торгівлею допомагають нам припустити наявність принаймні двох причин або факторів, від яких може залежати виторг: профіль товарів магазину і день тижня. Ні те, ні інше не може бути стабілізоване – інакше ми будемо шукати щось інше: стратегію керування лише горілчаними магазинами і лише по п'ятницях! А наша задача – пошук стратегії керування усіма магазинами і в усі дні їх роботи.

Хотілося б вирішити цю задачу таким чином: вибирати випадково як групи магазинів, так і дні тижня, але мати гарантію (уже не випадково!) показності вихідних даних іспитів стратегії.

Теорія планування експерименту пропонує особливий метод рішення цієї проблеми, метод забезпечення або випадковості ***рандомізації*** плану експерименту. Цей метод заснований на побудові спеціальної таблиці, що називають ***латинським квадратом*** для числа факторів рівному двом.

Для нашого прикладу, з числом стратегій 4, латинський квадрат може мати вигляд однієї з двох наведених нижче табл. 6.1 та 6.2.

Таблиця 6.1

	Ср	*Пт*	*Сб*	*Нед*
А	1	2	3	4
Б	3	4	1	2
В	2	1	4	3
Г	4	3	2	1

Таблиця 6.2

	1	2	3	4
Ср	А	Б	В	Г
Пт	В	Г	А	Б
Сб	Б	А	Г	В
Нед	Г	В	Б	А

У клітинках табл. 6.1 зазначено номери стратегій для днів тижня і магазинів даного профілю, причому такий план експерименту гарантує перевірку кожної стратегії у кожному профілі торгівлі у кожен день роботи магазину. Звичайно, таких таблиць може бути багато – правила комбінаторики дозволяють знайти повне число латинських квадратів: для «4×4» це число дорівнює 576, для квадрата «3×3» – лише 12, а для «5×5» – 161 280.

У загальному випадку, за наявності t стратегій і двох факторів, що визначають ефективність, буде потрібно $N = a \cdot t^2$ елементів для реалізації плану експерименту, де a у найпростішому випадку дорівнює 1. Це означає, що для нашого прикладу необхідно використовувати 16 «керованих» магазинів, оскільки дані другого рядка і третього стовпця нашого латинського квадрата означають, що по суботах в одному з обраних навмання бакалійних магазинів буде застосовуватися стратегія номер 1.

Відзначимо, що латинський квадрат для нашого прикладу може бути побудований зовсім інакше (табл. 6.2), однак як і раніше буде визначати той же, рандомізований план експерименту.

Нехай ми провели експеримент і отримали його результати у вигляді наведеної нижче табл. 6.3, у клітинках якої зазначені стратегії і результати їх застосування у вигляді сум денного виторгу:

Таблиця 6.3 – Результати експерименту

Дні	Магазини				Сума
	А	*Б*	*В*	*Г*	
Нед	2: 47	1: 90	3: 79	4:50	266
Ср	4: 46	3: 74	2: 63	1:69	252
Пт	1: 62	2: 61	4: 58	3:66	247
Сб	3: 76	4: 63	1: 87	2:59	285
Сума	231	288	287	244	1050
Разом за стратегіями	1308	2230	3295	4217	1050/4 = 262,5

Якщо обчислити, як і потрібно, середні значення, дисперсії і середньоквадратичні відхилення для четвірок значень денного виторгу (по днях, магазинах і стратегіях), то ми будемо мати такі дані, занесені в табл. 6.4.

Вже таке примітивне статистичне оброблення даних експерименту дозволяє зробити ряд важливих висновків:

- порівняно малі значення розсіювання даних по днях тижня і по категоріях магазинів, що вказує на правильний вибір плану експерименту;

- розкид значень по стратегіях швидше за усе свідчить про більшу залежність денного виторгу від стратегії, ніж від днів тижня або категорії магазину;

- помітна відмінність середнього по 1-й і 3-й стратегіях від середніх по 2-й і 4-й, з цього можна зробити висновок – шукати найкращу стратегію, вибираючи між 1-ою і 3-ою.

Таблиця 6.4 - Результати обробки даних експерименту

	Дні тижня	Магазини	Стратегії
Середнє	262,5	262,5	262,5
Дисперсія	217,3	646,3	1562,3
СКО	14,74	25,42	39,5
Коеф. варіації	0,056	0,097	0,151

У цьому і полягає прямий практичний результат використання рандомізованого плану побудови латинського квадрата.

Але це ще не все. Теорія планування експерименту дає, крім способів побудови планів з урахуванням можливих впливів на величину інших факторів, ще й особливі методи оброблення отриманих експериментальних даних. Сутність цих методів може бути подана таким чином.

Нехай W_{is} є виторг у i-у магазині при застосуванні до нього s-ї стратегії керування. Будемо розглядати цей виторг як суму складових

$$W_{is} = W_0 + \Delta_s + \varepsilon_i; \tag{6.1}$$

де W_0 – визначає середній виторг для всіх магазинів за умови застосування до кожного з них всіх стратегій по черзі з дотримання всіх інших умов, що впливають на виторг;

$W_0+\Delta_s$ – є середній виторг при застосуванні до всіх магазинів s-ї стратегії;

ε_i – розглядається як «помилка виміру» – випадкова величина з нульовим математичним сподіванням і нормальним законом розподілу.

Незважаючи на очевидну нереальність дотримання постійних зовнішніх факторів, що впливають, ми можемо отримати оцінку кожної із складових W_{is} і шукати оптимальну стратегію через збільшення від її застосування з урахуванням помилки спостереження. Можна вважати доведеною «нормальність» розподілу величини ε_i і використовувати «правило трьох сигм» для прийняття рішень за підсумками експерименту.

6.2 Методи аналізу великих систем, факторний аналіз

Вже зрозуміло, що ТССА здебільшого засновує свої практичні методи на основі математичної статистики. Загальновизнано, що в наш час можна виділити три підходи до розв'язання задач, у яких використовуються статистичні дані:

– алгоритмічний підхід, за яким ми маємо статистичні дані про деякий процес і через слабку вивченість процесу ми змушені самі будувати "розумні" правила оброблення даних, базуючись на своїх власних уявленнях про показник, що нас цікавить.

– апроксимаційний підхід, коли ми повністю розуміємо, який існує зв'язок даного показника з наявними у нас даними, але незрозуміла природа виникаючих помилок – відхилень від цих уявлень.

– теоретико-вірогідний підхід, коли потрібно глибоко розуміти суть процесу для з'ясування зв'язку показника із статистичними даними.

В наш час усі ці підходи досить суворо науково обґрунтовані і містять апробовані методи практичних дій. Однак існують ситуації, коли нас цікавить не один, а кілька показників процесу і, крім того, ми підозрюємо наявність декількох впливаючих на процес факторів, які є прихованими, латентними або їх не можна спостерігати.

Найцікавішим і корисним у плані розуміння сутності ***факторного аналізу*** – методу розв'язання задач у цих ситуаціях, є приклад використання спостережень експерименту, який проводить природа, ні про яке планування тут не йдеться – ми повинні задовольнятися ***пасивним експериментом***.

Дивно, але й у цих "важких" умовах ТССА пропонує методи виявлення таких факторів, як ***відсівання слабковиявляючих себе***, ***оцінок значимості*** отриманих залежностей показників роботи системи від цих факторів.

Нехай ми провели по n спостережень за кожним з k вимірюваних показників ефективності деякої системи і дані цих спостережень подали у вигляді таблиці-матриці 6.5 вхідних даних $E\ [n{\times}k]$.

Таблиця 6.5 – Матриця вхідних даних $E\ [n{\times}k]$

E_{11}	E_{12}	...	E_{1i}	...	E_{1k}
E_{21}	E_{22}	...	E_{2i}	...	E_{2k}
...	...	...	...	...	...
E_{j1}	E_{j2}	...	E_{ji}	...	E_{jk}
...	...	...	...	...	...
E_{n1}	E_{n2}	...	E_{ni}	...	E_{nk}

Нехай ми припускаємо, що на ефективність системи впливають і інші величини (фактори), які не спостерігаються, але їх можна легко інтерпретувати (з'ясувати зміст, причини і механізми впливу). Відразу ж зрозуміємо, що чим більше значення n і чим менше число факторів m (а може їх і немає взагалі), тим більша можливість оцінити їх показник E, що нас цікавить. Настільки ж легко зрозуміти і необхідність умови $m < k$, з'ясованої на простому прикладі аналогії – якщо ми досліджуємо деякі предмети з використанням усіх 5 людських почуттів, то наївно сподіватися на виявлення більше п'яти "нових" ознак у предметах, які можна легко пояснити, але не можна виміряти, навіть якщо ми "випробуємо" дуже велику їх кількість.

Повернемося до вихідної матриці спостережень $E[n{\cdot}k]$ і відзначимо, що перед нами, у дійсності, сукупності по n спостережень над кожною з k випадковими величинами $E_1, E_2, \ldots E_k$. Саме ці величини "підозрюються" у зв'язках одна з одною – або у взаємній корельованості.

З розглянутого раніше методу оцінок таких зв'язків випливає, що мірою розкиду випадкової величини E_i є її дисперсія, що обумовлена сумою квадратів усіх зареєстрованих значень цієї величини $\Sigma(E_{ij})^2$ і її середнім значенням (додавання ведеться по стовпцю).

Якщо ми застосуємо заміну змінних у вихідній матриці спостережень, тобто замість E_{ij} будемо використовувати випадкові величини

$$X_{ij} = \frac{E_{ij} - M(E_i)}{S(E_i)}, \qquad (6.2)$$

то ми перетворимо вихідну матрицю у нову таблицю-матрицю 6.6 $\boldsymbol{X}\,[n{\times}k]$.

Таблиця 6.6 – Матриця $\boldsymbol{X}\,[n{\times}k]$

X_{11}	X_2	...	X_{1i}	...	X_{1k}
X_{21}	X_{22}	...	X_{2i}	...	X_{2k}
...	...	...	...	...	...
X_{j1}	X_{j2}	...	X_{ji}	...	X_{jk}
...	...	...	...	...	...
X_{n1}	X_{n2}	...	X_{ni}	...	X_{nk}

Відзначимо, що всі елементи нової матриці $\boldsymbol{X}\,[n{\times}k]$ є безрозмірними, нормованими величинами і, якщо деяке значення X_{ij} складе, приміром, +2, то це буде означати тільки одне – у рядку j спостерігається відхилення від середнього по стовпцю i на два середньоквадратичних відхилення (у більшу сторону). Виконаємо тепер такі операції:

– підсумуємо квадрати всіх значень стовпця 1 і розділимо результат на $(n\text{-}1)$ – ми одержимо дисперсію (міру розкиду) випадкової величини X_1, тобто D_1. Повторюючи цю операцію, ми знайдемо так само дисперсії всіх величин, які спостерігаються, але вже є нормованими величинами.

– підсумуємо добуток відповідних рядків (від $j = 1$ до $j = n$) для стовпців 1, 2 і також розділимо на $(n\text{-}1)$. Те, що ми отримали, називається ***коваріацією*** C_{12} випадкових величин X_1, X_2 і служить мірою їх статистичного зв'язку.

– якщо ми повторимо попередню процедуру для всіх пар стовпців, то у результаті отримаємо ще одну квадратну таблицю-матрицю 6.7 $\boldsymbol{C}\,[k{\times}k]$, яку називають ***коваріаційною.*** На її головній діагоналі стоять дисперсії ВВ величин X_i, а інші її елементи – коваріації цих величин ($i = 1..k$).

Таблиця 6.7 – Коваріаційна матриця

D_1	C_{12}	C_{13}	...	...	C_{1k}
C_{21}	D_2	C_{23}	...	...	C_{2k}
...	...	...	...	...	...
C_{j1}	C_{j2}	...	C_{ji}	...	C_{jk}
...	...	...	...	...	...
C_{n1}	C_{n2}	...	C_{ni}	...	D_k

Якщо згадати, що зв'язок ВВ можна описувати не тільки коваріаціями, але й коефіцієнтами кореляції, то у відповідність цій матриці можна поставити матрицю парних коефіцієнтів або ***кореляційну*** матрицю $\boldsymbol{R}$ $[k \times k]$ (табл. 6.8) з одиничною діагоналлю, а всі її інші елементи – коефіцієнти парної кореляції.

Таблиця 6.8 – Кореляційна матриця

1	R_{12}	R_{13}	...	...	R_{1k}
R_{21}	1	R_{23}	...	...	R_{2k}
...	...	...	...	...	...
R_{j1}	R_{j2}	...	R_{ji}	...	R_{jk}
...	...	...	...	...	...
R_{n1}	R_{n2}	...	R_{ni}	...	1

Отже, нехай ми думали, що змінні E, за якими ми спостерігали, є незалежними одна від одної, тобто ми очікували побачити матрицю $\boldsymbol{R}$ $[k \times k]$ діагональною, з одиницями на головній діагоналі і нулями в інших місцях. Якщо тепер це не так, то наші здогади про наявність латентних факторів дещо отримали підтвердження.

Але ж як переконатися в правильності наших міркувань, оцінити достовірність нашої гіпотези – про наявність хоча б одного латентного фактора, як оцінити ступінь його впливу на основні (ті що спостерігаються) змінні? А якщо тим більше таких факторів лише декілька – то як їх проранжувати за ступенем впливу?

Відповіді на такі практичні запитання повинен давати факторний аналіз. У його основу покладено метод статистичного моделювання (за висловлюванням В. В. Налімова – модель замість теорії).

Подальший хід аналізу при з'ясуванні таких питань залежить від того, якою з матриць ми будемо користуватися. Якщо матрицею коваріацій $\boldsymbol{C}$ $[k \times k]$, то ми маємо справу з ***методом головних компонентів,*** якщо ж ми будемо користуватися лише матрицею $\boldsymbol{R}\,[k \times k]$, то ми використовуємо ***метод факторного аналізу*** у його звичайному вигляді.

Залишається з'ясувати, що дозволяють обидва ці методи, у чому полягає їх відмінність і як ними користуватися. Призначення обох методів однакове – встановити факт наявності латентних змінних (факторів), і якщо вони виявлені, то отримати кількісний опис їх впливу на основні змінні E_i.

Хід міркувань при виконанні пошуку *головних компонентів* полягає у такому. Ми припускаємо наявність некорельованих змінних Z_j ($j = 1..k$), кожна з яких описана комбінацією основних змінних (додавання по $i = 1..k$):

$$Z_j = \Sigma A_{ji} \cdot X_i, \tag{6.3}$$

і, крім того, має дисперсію, таку що

$$D(Z_1) \geq D(Z_2) \geq \ldots \geq D(Z_k). \tag{6.4}$$

Пошук коефіцієнтів A_{ji} (їх називають вагою *j-ого* компонента в змісті *i-ої* змінної) зводиться до розв'язання матричних рівнянь і не становить особливої складності при використанні комп'ютерних програм. Але сутність цього методу дуже цікава і на ній варто зупинитися.

Як відомо з векторної алгебри, діагональна матриця [2x2] може розглядатися як опис 2-х точок (точніше – вектора) у двовимірному просторі, а така ж матриця розмірністю $[k \times k]$ – як опис k точок k-мірного простору. Отож, заміна реальних, хоча і нормованих змінних X_i на точно таку ж кількість змінних Z_j означає не що інше, як поворот k осей багатовимірного простору.

"Перебираючи" по черзі осі, ми знаходимо спочатку ту з них, де дисперсія вздовж осі найбільша. Потім робимо перерахування дисперсій для k-1 осей, що залишилися і знову знаходимо "вісь-чемпіона" по дисперсії і т. д.

Тобто, ми розглядаємо куб (тривимірний простір) по черзі по трьох осях і спочатку шукаємо той напрямок, де бачимо найбільший "туман" (найбільша дисперсія говорить про найбільший вплив чогось стороннього); потім "усереднюємо" картинку по двох осях, що залишилися, і порівнюємо розкид даних по кожній з них – знаходимо "середнячка" і "аутсайдера". Тепер залишається розв'язати систему рівнянь – у нашому прикладі для 9 змінних, щоб відшукати матрицю коефіцієнтів (ваг) $A[k \times k]$.

Якщо коефіцієнти A_{ji} знайдено, то можна повернутися до основних змінних, оскільки доведено, що вони однозначно відображаються у вигляді (додавання по $j = 1..k$)

$$X_i = \Sigma A_{ji} \cdot Z_j. \tag{6.5}$$

Пошук матриці ваг $A[k \cdot k]$ потребує використання коваріаційної матриці і кореляційної матриці. Таким чином, метод головних компонентів відрізняється від усіх інших тим, що дає завжди єдиний розв'язок задачі. Правда, трактування цього розв'язку своєрідне:

– ми розв'язуємо задачу про наявність відповідно стількох факторів, скільки в нас спостерігається змінних, тобто питання про нашу згоду на менше число латентних факторів неможливо поставити;

– у результаті розв'язок, теоретично завжди єдиний, а практично пов'язаний з великими обчислювальними труднощами при різних фізичних розмірностях основних величин. Ми отримаємо відповідь приблизно такого вигляду – фактор такий-то (наприклад, привабливість продавців під час аналізу денного виторгу магазинів) займає третє місце за ступенем впливу на основні змінні.

Ця відповідь обумовлена тим, що дисперсія цього фактора виявилася третьою за величиною серед усіх інших. Більше нічого отримати у цьому випадку неможливо. Інша справа, якщо цей висновок виявився нам корисним або ми його проігноруємо – це наше право вирішувати, як використовувати системний підхід!

Трохи інакше здійснюється дослідження латентних змінних у випадку застосування факторного аналізу. Тут кожна реальна змінна розглядається як лінійна комбінація ряду факторів F_j, але у трохи незвичайній формі

$$X_i = \Sigma B_{ji} \cdot F_j + \Delta_i, \tag{6.6}$$

причому додавання виконується по $j = 1..m$, по кожному фактору.

Тут коефіцієнт B_{ji} прийнято називати ***навантаженням*** на *j-й* фактор з боку *i-ї* змінної, а останній доданок у (6.6) розглядається як перешкода – випадкове відхилення для X_i. Число факторів m цілком може бути менше від числа реальних змінних n і ситуації, коли ми хочемо оцінити вплив лише одного фактора (ввічливість продавців), тут цілком допустимі.

Саме поняття "латентний", схований, є фактором, який не можна виміряти безпосередньо. Звичайно ж, немає приладу і немає еталона ввічливості, освіченості, витривалості і под. Але це не заважає нам самим "виміряти" їх, застосувавши відповідну шкалу для таких ознак, розробивши тести для оцінювання таких властивостей по цій шкалі, і застосувавши ці тести до тих же продавців. Так у чому ж тоді "неспостережність"? А у тому, що в процесі експерименту (обов'язково) масового ми не можемо безупинно порівнювати всі ці ознаки з еталонами і нам потрібно брати попередні, усереднені дані, які отримані зовсім не в "робочих" умовах.

Розглянемо ще й такий приклад. Хто буде сперечатися, що результат спортсмена при стрибках у висоту залежить від фактора – "сила штовхаючої ноги". Так, цей фактор можна виміряти і в звичайних фізичних одиницях (ньютонах або побутових кілограмах), але коли?! Не під час же стрибка на змаганнях! Однак саме в цей робочий час фіксуються статистичні дані, накопичується матеріал для вихідної матриці.

Трохи складніше пояснити сутність самих процедур факторного аналізу простими елементарними поняттями (на думку деяких фахівців з області факторного аналізу – узагалі неможливо). Тому намагатимемося розібратися в цьому, використовуючи досить складний, але, на щастя, доведений у практичному змісті до повної досконалості, апарат векторної або матричної алгебри.

До того як стане зрозуміло необхідність у такому апараті, розглянемо основну теорему факторного аналізу. Суть її полягає в поданні моделі факторного аналізу (6.6) у матричному вигляді

$$\boldsymbol{X}[k\times l] = \boldsymbol{B}[k\times m] \times \boldsymbol{F}[m\times l]+\boldsymbol{\Delta}[k\times l], \tag{6.7}$$

і на наступному доведенні істинності виразу

$$\boldsymbol{R}[k\times k]=\boldsymbol{B}[k\times m] \times \boldsymbol{B}^{*}[m\times k], \tag{6.8}$$

для "ідеального" випадку, коли нев'язки Δ дуже малі.

Тут $B^{*}[m\cdot k]$ це транспонована матриця $B[k\cdot m]$.

Труднощі задачі пошуку матриці навантажень на фактори очевидна. Ще у шкільній алгебрі вказується на незліченну множину рішень системи рівнянь, якщо число рівнянь більше числа невідомих. Приблизний підрахунок говорить, що нам потрібно буде знайти km невідомих елементів матриці навантажень, у той час як тільки близько $k^2/2$ відомих коефіцієнтів кореляції. Дещо допомагає доведене у теорії факторного аналізу співвідношення між даним коефіцієнтом парної кореляції (наприклад R_{12}) і набором відповідних навантажень факторів:

$$R_{12}=B_{11}\cdot B_{21}+B_{12}\cdot B_{22}+\ \dots\ +B_{1m}\cdot B_{2m}.$$

Таким чином, немає нічого дивного у твердженні, що факторний аналіз (а, виходить, і системний аналіз у сучасних умовах) – більше мистецтво, ніж наука. Тут важливо володіти "навичками" і надзвичайно важливо розуміти як потужність, так і обмежені можливості цього методу.

Є ще одна обставина, яка призводить до труднощів при професійній підготовці в області факторного аналізу. Це необхідність бути професіоналом у "технологічному" плані. Однак, з іншого боку, стати професіоналом високого рівня навряд чи можливо, не маючи хоча б уявлень про можливості аналізу й ефективного керування системами на базі рішень, що знайдені за допомогою факторного аналізу.

Слід відзначити, що не треба спокушатися ненадійними обіцянками популяризаторів факторного аналізу, не слід вірити міфам про його всемогутність й універсальність. Цей метод "на вершині" тільки за одним показником – своєю складністю, як по сутності, так і за складністю практичної реалізації навіть при "повальному" використанні комп'ютерних програм.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які системи називають «погано організованими» або «слабко структурованими»?
2. Що таке латентний фактор?
3. Які Ви знаєте підходи для аналізу великих систем?

4. В чому суть методу багатовимірного статистичного аналізу?
5. В чому суть кібернетичного методу?
6. Сформулюйте предмет галузі науки – теорії планування експерименту.
7. Що називають впливами та реакціями системи?
8. Що таке план експерименту і які компоненти до нього входять?
9. В чому полягає метод рандомізації плану експерименту?
10. Яким чином формується латинський квадрат?
11. Назвіть три підходи до розв'язання задач, у яких використовуються статистичні дані.
12. Поясніть суть методу факторного аналізу.
13. Що таке коваріаційна матриця?
14. Що таке кореляційна матриця?
15. Поясніть відмінність методу головних компонентів від методу факторного аналізу.
16. Як здійснюється дослідження латентних змінних у випадку застосування факторного аналізу?

СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

Система (*system*) – сукупність (множина) окремих об'єктів (елементів) з наявними постійними зв'язками між ними.

Кібернетика (*cybernetics*) – наука про загальні закони отримання, збереження, передачі і перетворення інформації (***кібернетика*** в дослівному перекладі – ***мистецтво керувати***).

ТССА (*TSSA*) – теорія систем і системного аналізу (*Theory of systems and system analysis*)

Системний підхід (*system approach*) – всі елементи системи і всі операції у ній повинні розглядатися лише як одне ціле, і тільки у сукупності, тобто у взаємозв'язку один з одним.

Складна система (*complete system*) – система, у моделі якої недостатньо інформації для ефективного керування цією системою.

Велика система (*big system*) – система, для актуалізації моделі якої з метою керування бракує матеріальних ресурсів (машинного часу, ємності пам'яті, інших матеріальних засобів моделювання).

Динамічні системи (*dynamical system*) – характеризуються тим, що їх вихідні сигнали на даний момент часу визначаються характером вхідних впливів у минулому (залежать від передісторії). Інакше, системи називають **статичними.**

Детермінована система (*determined system*) – система, роботу якої можна абсолютно точно передбачити.

Стохастична система (*stochastic system*) – система, стани якої залежать не тільки від контрольованих, але і від неконтрольованих впливів або якщо у ній самій знаходиться джерело випадковості.

Лінійна система (*linear system*) – система, в якій реакція на суму двох чи більше різних впливів еквівалентна сумі реакцій на кожне збурення окремо, для **нелінійних систем** (*nonlinear system*) це не виконується.

Нестаціонарна система (*nonstationary system*) – система, параметри якої змінюються у часі. Протилежним поняттям є поняття **стаціонарної системи**.

Дискретна система (*discrete system*) – система, вхід і вихід якої вимірюється чи змінюється в часі дискретно, через крок *t*. Протилежним поняттям є поняття **неперервної системи**.

ОПР - особа (особи), що приймають рішення.

Коефіцієнт конкордації *(concordation rate)* – показник узгодженості думок експертів, що визначається за (2.24)

Випадкова величина (*random size*) – величина, що може набувати різні значення залежно від зовнішніх щодо них умов (величина, стохастична за природою).

Кореляція (*correlation*) - стохастичний, ймовірний і можливий зв'язок між двома (парна кореляція) або кількома (множинна кореляція) випадковими величинами.

Коефіцієнт правдоподібності (*plausibility rate*) – відношення умовних щільностей розподілу двох випадкових величин.

Критерій Байєса (*Bayesian criterion*) – правило, за яким стратегія прийняття рішень вибирається таким чином, щоб забезпечити мінімум середнього ризику.

Однорідний потік заявок (*homogeneous stream of requests*) – це потік, що задовольняє умови: 1) усі заявки потоку з погляду обслуговування є рівноправними; 2) замість заявок (подій) потоку, що за своєю природою можуть бути різними, розглядаються тільки моменти їх надходження.

Регулярний потік заявок (*regular stream of requests*) – це потік, в якому події випливають одна за одною через конкретні інтервали часу.

Випадковий потік заявок (*casual stream of requests*) – це потік, в якому події відбуваються у випадкові моменти часу.

Стаціонарний потік заявок (*stationary stream of requests*) – це потік, в якому ймовірність появи n подій на інтервалі часу $(t,\ t+T)$ залежить від його розташування на часовій осі t.

Ординарний потік заявок (*ordinary stream of requests*) – це потік, в якому ймовірність появи двох або більше подій протягом елементарного інтервалу часу є величина нескінченно мала у порівнянні з ймовірністю появи однієї події на цьому інтервалі, тобто $lim_{\Delta t \to 0} P(n, \Delta t) = 0$ для $n = 2, 3, \ldots$

Потік заявок без наслідків (*Stream of requests without the consequences*) – це потік, в якому для будь-яких інтервалів часу, що не перетинаються, число подій, які попадають на один з них, не залежить від числа подій, що попали на інший.

Найпростіший потік заявок (потік Пуассона) (*simplest stream of requests*) – це потік, який задовольняє властивості стаціонарності, ординарності і є без наслідків.

Потік Пальма (*Palm stream*) – це потік заявок, що характеризується властивостями стаціонарності, ординарності і незалежності інтервалів часу T між подіями.

Теорія ігор (*game theory*) - особливий розділ науки, який дозволяє хоча б частково вирішувати ускладнення, що виникають під час системного аналізу в умовах протидії.

Скінченна гра (*eventual game*) – це гра, у якій всі гравці мають скінченне число можливих стратегій.

Нескінченна гра (*endless game*) – це гра, у якій хоча б один з гравців має нескінченну кількість можливих стратегій.

Безкоаліційна гра (*coalitionless game*) – це гра, де гравці не мають права вступати в угоди, утворювати коаліції.

Коаліційна (кооперативна) гра (*coalition game*) – це гра, де гравці можуть вступати в коаліції (у кооперативних іграх коаліції наперед визначені).

Гра з нульовою сумою (*game*) – це гра, де загальний виграш усіх гравців не змінюється, а ділиться між гравцями, при цьому сума усіх виграшів дорівнює нулю.

Матрична гра (*game*) – це скінченна гра двох гравців з нульовою сумою, у якій задається виграш гравця 1 у вигляді матриці (рядок матриці відповідає номеру застосовуваної стратегії гравця 2; стовпець – номеру застосовуваної стратегії гравця 2; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш гравця 1, що відповідає застосовуваним стратегіям). Для матричних ігор доведено, що кожна з них має розв'язок, який може бути знайдений шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Біматрична гра (*zero sum game*) – це скінченна гра двох гравців з ненульовою сумою, у якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (рядок кожної матриці відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, а на їх перетині в першій матриці знаходиться виграш гравця 1, у другій матриці – виграш гравця 2).

Безперервна гра (*continuous game*) – це гра, де функція виграшів кожного гравця є безперервною залежно від застосовуваних стратегій.

Опукла гра (*protuberant game*) – це гра, у якої функція виграшів опукла. Для них розроблено прийнятні методи моделювання (пошук чистої оптимальної стратегії (визначеного числа) для одного гравця й імовірностей застосування чистих оптимальних стратегій іншого). Такі задачі моделюються порівняно легко.

Сідлова точка *(point of saddle)* – це пари чистих стратегій (i_o, j_o) відповідно гравців 1 і 2, за якими досягається рівність верхньої та нижньої ціни гри.

Змішана стратегія гравця (*mixed player strategy*) – це повний набір ймовірностей застосування його чистих стратегій, тобто – це вектор, компонентами якого є ймовірності вибору чистих стратегій гравців.

Спектр змішаної стратегії гравця (*mixed player strategy spectrum*) – множина усіх чистих стратегій гравця у скінченній антагоністичній грі, ймовірність яких відповідно до цієї стратегії позитивна.

Закриті торги (*auctions by a tender*) – це торги, в яких два або більше учасники незалежно один від одного пропонують ціни (ставки) за той або інший об'єкт, при цьому, учасник має право лише на одну ставку, а ведучий торгів приймає вищу (чи нижчу) із запропонованих.

Відкриті торги /аукціони/ (*open auctions)* – це, коли два або більше учасники підіймають ціни доти, поки надбавка пропонується.

Керуючі впливи або просто **впливи** *(control influences)* – усе, що подається на вхід елемента або системи.

Реакції *(reactions)* – усе, що виходить на виході елемента або системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аверьянов А. Н. Системное познание мира / Аверьянов А. Н. – М. : Политиздат, 1985.
2. Винер Н. Кибернетика / Винер Н. – М. : Наука, 1983
3. Денисов А. А. Теория больших систем управления / А. А. Денисов, Д. М. Колесников. – Л. : Энергоиздат, 1982.
4. Месарович М. Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, И. Такахара. – М. : Мир, 1975.— 344 с.
5. Канторович Л. В. Системный подход в методологии математики / Л. В. Канторович, В. Е. Плиско// Системные исследования. – М. : Наука, 1983. – С. 27-41.
6. Клир Дж. Наука о системах: новое измерение науки / Клир Дж. // Системные исследования. – М. : Наука, 1983. – С. 61-85.
7. Мороз А. И. Курс теории систем / Мороз А. И. – М. : ВШ, 1987.
8. Новик И. Б. Нильс Бор и вопросы системного мышления / И. Б. Новик // Системные исследования. – М. : Наука, 1991. – С. 91-108.
9. Перегудов Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. Л. Тарасенко. – М. : ВШ, 1989.
10. Моисеев Н. Я. Математические задачи системного анализа / Моисеев Н. Я. – М. : Наука, 1981. – 490 с.
11. Поспелов Д. А. Ситуационное управление. Теория и практика // Поспелов Д. А. – М. : Наука, 1986. – 204 с.
12. Рапорт А. Различные подходы к построению общей теории систем: элементаристский и организмический / Рапорт А. // Системные исследования. – М. : Наука, 1983. – С. 42-60.
13. Холл А. Опыт методологии для системотехники / Холл А. – М. : Советское радио, 1975.
14. Шугрин С. М. Космическая организованность биосферы и ноосферы / Шугрин С. М. – Новосибирск : Наука, 1999.
15. Садовский В. Н. Проблемы философского обоснования системных исследований / Садовский В. Н // Системные исследования. – М. : Наука, 1984. – С. 32-51.
16. Щедровицкий Г. П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок / Щедровицкий Г. П. // Системные исследования. – М. : Наука, 1981. – С. 192-227.
17. Глушков В. М. Введение в АСУ / Глушков В. М.— К. : Техника, 1984. – 167 с.
18. Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем / Месарович М., Мако Д., Такахара И.— М. : Мир, 1973. – 344 с.

19. Теория систем и методы системного анализа в управлении и связи / В. Н. Волков и др. – М. : Радио и связь, 1983. – 260 с.

20. Згуровський М. З. Основи системного аналізу / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. – К. : Видавнича група BHV, 2007. – 544 с., іл..

21. Катренко А. В. Дослідження операцій: [підручник] / Катренко А. В. – Львів : «Магнолія-плюс», 2004.

22. Зайченко Ю. П. Исследование операцій: 6-е изд. перераб. и доп. / Зайченко Ю. П. – К. : Издательский Дом „Слово", 2003. – 688 с.

23. Боровиков В. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: Для профессионалов. 2-е издание (+CD) / Боровиков В. – СПб. : Питер, 2003.

24. Вентцель Е. С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М. : Радио и связь, 1983. – 416с.

25. Жожикашвили В. А. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ / В. А. Жожикашвили, В. М. Вишневский. – М. : Радио и связь, 1988.

26. Спицнадель В. Н. Основы системного анализа: учеб. пособие / Спицнадель В. Н. — СПб. : «Изд. дом «Бизнесс-пресса», 2000. – 326 с.

27. Лямец В. И. Системный анализ. Вводный курс: учебное пособие / В. И. Лямец, А. Д. Тевяшев. – Харьков : ХТУРЭ, 1998. – 252 с.

Навчальне видання

Колесницький Олег Костянтинович
Роїк Олександр Митрофанович
Бокоцей Ірина Віталіївна

ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ ОБ'ЄКТІВ І ПРОЦЕСІВ КОМП'ЮТЕРИЗАЦІЇ

Навчальний посібник

Редактор О. Скалоцька

Оригінал-макет підготовлено О. Колесницьким

Підписано до друку 23.08.2013 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 9,1.
Наклад 75 прим. Зам. № 2013-053.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.