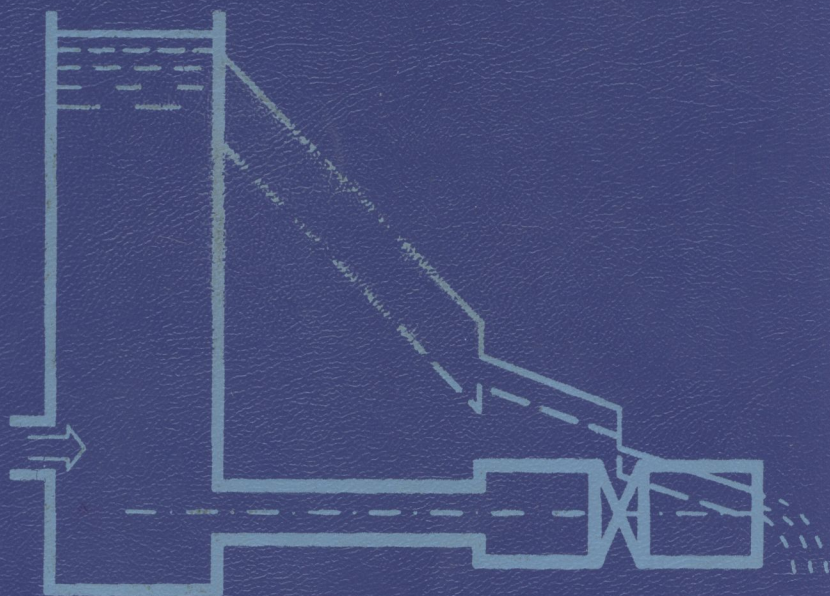


Ю.М.КОНСТАНТИНОВ, О.О.ГІЖА

# Технічна механіка рідини і газу



•ВИЩА ШКОЛА•

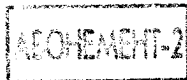
532(073)  
К 65

Ю.М.КОНСТАНТИНОВ, О.О.ГІЖА

# Технічна механіка рідини і газу

*Затверджено Міністерством  
освіти і науки України*

Підручник для студентів  
вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямками  
«Будівництво» і «Водні ресурси»



КИЇВ  
«ВИЩА ШКОЛА»  
2002

УДК 532(075.8)  
ББК 30.123я73  
К65

Гриф надано Міністерством освіти  
і науки України (лист від 2 листопа-  
да 2001 р. № 1/11-4229)

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. *І. А. Забабурін* (Харківський державний технічний університет будівництва і архітектури), проф. *О. М. Цабієв* (Одеський національний політехнічний університет), д-р техн. наук, проф. *О. М. Яхно* (Національний технічний університет України «КПІ»)

Редакція літератури з економіки і фундаментальних наук  
Редактор *Т. Ю. Ходирева*

421423

**Константинов Ю. М., Гіжа О. О.**

К65 Технічна механіка рідини і газу: Підручник. — К.:  
Вища шк., 2002. — 277 с.: іл.  
ISBN 966-642-093-7

Розглянуто рівновагу і рух нестисливої й стисливої рідини, гідравлічні опори, рух води в трубах і відкритих руслах, а також осідання твердих частинок у рідині та фільтрування рідини. Наведено основні методи розрахунку напірних трубопроводів, каналів і безнапірних водовідвідних труб при рівномірному русі води, розрахунки отворів та водозливів. Викладено основи гідравлічного моделювання.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямками «Будівництво» і «Водні ресурси». Може бути корисним для студентів інших технічних спеціальностей.

УДК 532(075.8)  
ББК 30.123я73

ISBN 966-642-093-7

© Ю. М. Константинов, О. О. Гіжа, 2002

**НТБ ВНТУ**  
**м.Вінниця**

У підручнику викладено основи технічної механіки рідини і газу (гідравліки), описано фізичні властивості, закони рівноваги і руху рідин та газів, особливості гідравлічних опорів, розглянуто питання моделювання гідравлічних явищ.

Підручник призначено для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за напрямами «Будівництво» і «Водні ресурси», і охоплює розділи технічної механіки рідини та газу, які є загальними для всіх спеціальностей указаних напрямів. Це гідростатика, кінематика і динаміка рідини, гідравлічні опори, розрахунки трубопроводів, отворів, дренажів, загальні питання з гідравліки відкритих русел. Детальне вивчення особливостей руху рідини та газів у водопровідних, водовідвідних, газо- і теплопровідних мережах, гідротехнічних спорудах, каналах та природних руслах для різних спеціальностей передбачено відповідними поглибленими курсами з гідравліки («Інженерна гідравліка», «Спецпитання гідравліки», «Гідравліка, гідрологія і гідрометрія», «Гідравліка і аеродинаміка»). Водночас для спеціальностей без поглиблених курсів у цьому підручнику розглянуто в скороченому вигляді розділи з указаних вище прикладних питань. Подано багато прикладів гідравлічних розрахунків трубопроводів, відкритих русел і споруд, а також необхідні довідкові дані для розрахунків.

Наведено результати досліджень останніх років. Звернуто також увагу на недостатньо вивчені явища, які викличуть інтерес у студентів до самостійних досліджень.

Автори із вдячністю сприймуть відгуки та пропозиції спеціалістів і колективів кафедр гідравліки вищих навчальних закладів, спрямовані на подальше вдосконалення підручника.

## В.1. Історія розвитку

Технічна механіка рідини та газу (гідравліка) — це наука, що вивчає закони рівноваги і руху рідини та газу, розробляє методи застосування цих законів для вирішення практичних питань.

Гідравліка складається з таких розділів: гідростатика, кінематика рідини і гідродинаміка. У гідростатиці розглядаються закони рівноваги рідини, у кінематиці — зв'язки між геометричними характеристиками руху і часом (це швидкість, прискорення), а у гідродинаміці — рух рідини і сили, які спричинюють цей рух.

Термін «гідравліка» походить від двох грецьких слів «ὕδωρ» — вода і «αὐλόξ» — трубка й означав спочатку вчення про водоводи. Зараз гідравліка вивчає рух різноманітних рідин у трубах, каналах, річках, у гідротехнічних спорудах тощо. Водночас гідравліка є основою гідравлічних розрахунків систем водопостачання, водовідведення, теплогазопостачання, опалення, вентиляції, насосних і компресорних станцій, гідротехнічних і гідромеліоративних споруд, систем дорожнього водовідведення.

Розвиток науки гідравліки пов'язаний з використанням людиною води. У Римі ще за 6 століть до нашої ери було споруджено водопровід, залишки якого збереглися до нашого часу.

Вода з давніх-давен використовувалася не тільки для питного водопостачання, зрошування земель, роботи простих гідравлічних приладів і гідравлічних машин. Річки і канали були водними шляхами для суден та човнів, ставали природними та штучними перешкодами, що захищали міста, їх населення від нападу ворогів. Сліди давніх цивілізацій були знайдені на берегах Тигру і Євфрату в Месопотамії, Інду в Індії, Нілу в Єгипті, Хуанхе у Китаї, у Закавказзі, Середній Азії, Росії, в Україні на берегах Дніпра, Сіверського Донця тощо. В цих регіонах будували зрошувальні системи, водопроводи, водяні млини. Це свідчить про те, що людство в ті часи мало достатні практичні

знання в галузі гідравліки, досвід будівництва об'єктів водного господарства, необхідну техніку і технологію.

Першою науковою працею з гідравліки була робота Архімеда «Про тіла, що плавають», яка була написана за 250 років до нашої ери.

Гідравліка активно розвивалася в епоху Відродження. В цей час з'явилися праці Леонардо да Вінчі, Стевіна, а пізніше, у XVII ст., Галілея, Торрічеллі, Паскаля, Ньютона. Так, Леонардо да Вінчі написав роботу «Про рух та вимірювання води», С. Стевін — «Основи гідростатики», Г. Галілей — «Міркування про тіла, що перебувають у воді, і про ті, що в ній рухаються». Е. Торрічеллі вивів формулу швидкості витікання нев'язкої рідини з отворів. Б. Паскаль сформулював закон про передачу тиску в рідині, що використовується у схемах і конструкціях різних гідравлічних машин. І. Ньютон визначив особливості внутрішнього тертя у рідині.

Подальший розвиток науки про рівновагу і рух рідини привів до появи науки близької до гідравліки — *гідромеханіки*. На відміну від гідравліки, де розглядаються питання механіки рідини, для вирішення яких використовують результати експериментів, у гідромеханіці розв'язуються задачі рівноваги і руху рідини за допомогою методів теоретичної механіки і математичного аналізу.

Значний вклад у розвиток механіки рідини і газу (гідромеханіки) внесли члени Петербурзької Академії наук: М. В. Ломоносов (закони збереження речовини і енергії для рідини, що рухається), Л. Ейлер (диференціальні рівняння рівноваги і руху рідини), Д. Бернуллі (рівняння, що ним виведено, є основою сучасних гідравлічних розрахунків трубопроводів, відкритих русел і споруд).

Ці теоретичні роботи сприяли подальшому розвитку експериментальної та прикладної гідравліки. Вагомий внесок у вивчення гідравлічних опорів при русі рідини зробили А. Шезі, Ю. Вейсбах, Д. Вентурі, О. Рейнольдс, Д. І. Менделєєв, М. П. Петров. М. Є. Жуковським була розроблена теорія гідравлічного удару, Б. О. Бахметєвим, М. М. Павловським — теорія нерівномірного руху у відкритих руслах, а також теорія фільтрації через греблі та під гідротехнічними спорудами.

Широко відомі праці вчених радянського періоду: М. Д. Чертоусова, Й. І. Агроскіна, І. І. Леві, Р. Р. Чугаєва, О. О. Саткевича, Б. Й. Єсьмана, А. Д. Альтшуля, Л. Г. Лойцяньського, Б. Т. Ємцева, Д. В. Штеренліхта; в Україні — Г. Й. Сухомела, Ю. М. Даденкова, О. А. Угінчуса, В. В. Сміслова, І. Л. Розовського, М. М. Беляшевського, І. А. Шеренкова, О. М. Грабовського, О. Я. Олійника, В. О. Большакова, О. М. Яхна, І. І. Науменка.

Гідравліка як прикладна наука потрібна для розрахунків при проектуванні мереж та споруд систем водопостачання, каналізації, гідротехнічних споруд, мостів, а також для розрахунків транспортування будівельних розчинів трубами тощо.

Розвиток та успіхи гідравліки у вирішенні багатьох завдань інженерної практики, у розробці нових гідравлічних методів розрахунку, з одного боку, та розвиток теоретичної гідромеханіки у зв'язку з використанням ЕОМ та нових методів розрахунку, з другого, дали змогу ще більше зблизити ці науки. Можна вважати, що сучасна гідравліка є технічною механікою рідини, яка спирається на теоретичну гідромеханіку. Тому цей підручник містить усі відомості з теоретичної гідромеханіки, які потрібні спеціалісту в галузі будівництва та водних ресурсів в його практичній діяльності.

## В.2. Основні фізичні властивості рідини

*Рідина* — це суцільне середовище, яке може легко змінювати свою форму під дією навіть незначних сил.

**Текучість.** Це найхарактерніша властивість рідини, легко рухливість її частинок, яка зумовлена неспроможністю рідини сприймати дотичні напруження в стані спокою. Рідина не може зберігати свою форму, вона набирає форми того резервуара, в якому вона міститься.

Рідини бувають *стисливі* та *нестисливі*. До нестисливих рідин належать вода, нафта, олія та інші (це краплинні рідини). Стисливими рідинами є повітря та інші гази. Краплинні рідини мають власний об'єм, що займає частину об'єму резервуара (рис. 1, а, б). Стисливі рідини такої властивості не мають і заповнюють весь об'єм закритого резервуара. Краплинні рідини також мають (на відміну від газів) вільну поверхню.

**Густина рідини (питома маса).** Густиною середовища називають границю відношення маси нескінченно малої частинки  $\Delta m$  навколо певної точки до її об'єму  $\Delta W$ , коли останній на-



Рис. 1

ближається до нуля:

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W} \quad (1)$$

або для безперервного середовища

$$\rho = m/W.$$

Значення густини  $\rho$  деяких рідин, кг/м<sup>3</sup>:

Вода при $t = 0$ °С	999,9
» при $t = 4$ °С	1000,0
» при $t = 20$ °С	998,2
» при $t = 40$ °С	992,2
» при $t = 99$ °С	952,1
» морська при $t = 20$ °С	1002...1029
Нафта при $t = 20$ °С	850...950
Ртуть при $t = 20$ °С	13547
Масло для гідравлічних систем	до 850
Повітря при атмосферному тиску і температурі 20 °С (стандартні умови)	1,2

**Стисливість рідини.** Густина нестисливої рідини мало змінюється при зміні тиску. Це характеризується залежністю

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_p dp = \frac{dp}{E_{\text{рід}}}, \quad (2)$$

де  $\beta_p$  — коефіцієнт об'ємного стискування. Для води  $\beta_p = 5 \times 10^{-6} \text{ см}^2/\text{Н} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ 1/кПа}$ ;  $E_{\text{рід}}$  — модуль об'ємної пружності рідини (для води  $E_{\text{рід}} = 2 \cdot 10^6 \text{ кПа}$ ).

**Температурне розширення рідини.** Густина також мало змінюється із зміною температури:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\beta_t dt, \quad (3)$$

де  $\beta_t$  — температурний коефіцієнт об'ємного розширення. Для води при температурі  $t = 10...20$  °С  $\beta_t = 0,00015 \text{ К}^{-1}$ .

Раніше було показано, що густина води має максимум при  $t = 4$  °С; при 0 °С вода переходить у твердий стан (крига), а при  $t = 100$  °С у газовий (пара).

Для газів при відносно невеликих температурах і тисках густину можна визначити з рівняння газового стану Клапейрона—Менделєєва:

$$\rho = \frac{p}{R_* T}, \quad (4)$$

де  $R_*$  — питома газова стала: для повітря  $R_* = 287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ , для метану  $R_* = 520 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $T$  — термодинамічна температура, К.



**Питома вага.** В гідравліці також використовують таку характеристику рідини, як питома вага, що є відношенням ваги рідини  $G$  до об'єму  $W$ , який вона займає:

$$\gamma = G/W.$$

Оскільки питома вага і густина — це відношення ваги та маси до однакового об'єму, то маємо такий зв'язок між ними:

$$\gamma = \rho g, \quad (5)$$

де  $g$  — прискорення вільного падіння.

Питому вагу вимірюють у ньютонгах на кубічний метр.

**Пружність.** Це здатність рідини відновлювати свій об'єм після припинення дії зовнішніх сил.

**Опір розтяжним зусиллям.** Міцність рідини на розрив характеризується дуже великими значеннями. Однак наявність у рідині дуже малих твердих частинок або бульбашок газу призводить до різкого її зменшення (практично до нуля). З урахуванням цього на практиці вважають, що рідина не чинить опору розтяжним зусиллям, і тому ними нехтують.

**Капілярність.** Поверхневий шар нестисливої рідини перебуває в особливому напруженому стані, що зумовлений неурівноваженістю дії молекулярних сил і характеризується силами поверхневого натягу. Вплив цих факторів більший у трубках малого діаметра, в яких рідина, що змочує стінки трубки (наприклад, вода), піднімається (рис. 2, *a*), а рідина, що не змочує стінки трубки (наприклад, ртуть), опускається (рис. 2, *б*). Це явище називають *капілярністю*.

Висота капілярного підняття води  $h$ , мм, у скляній трубці діаметром  $d$ , мм, при температурі  $t = 20^\circ\text{C}$  буде  $h = 30/d$ , а висота опускання ртуті —  $h = 10/d$ .

Висоту підняття (опускання) рідини треба враховувати при відліках у вимірювальних приладах, в яких використовують скляні трубки з рідиною.

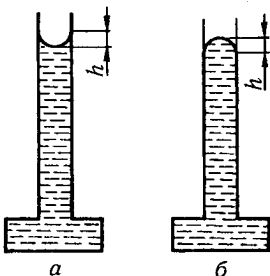


Рис. 2

**В'язкість рідини.** Це властивість рідини і газу чинити при своєму русі опір відносному зсуву своїх частинок.

У рідині, що рухається, швидкості різні в різних шарах (рис. 3). Вони від-

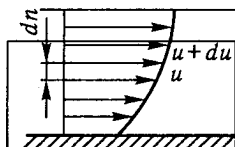


Рис. 3

різняються на величину зміни швидкості  $du$ . Між шарами рідини виникають сили внутрішнього тертя. За гіпотезою Ньютона закон внутрішнього тертя в рідині записують у вигляді, що запропонував М. П. Петров:

$$\tau = \pm \mu \frac{du}{dn}, \quad (6)$$

де  $\tau$  — дотичне напруження (або сила опору, що припадає на одиницю площі);  $\mu$  — динамічна в'язкість;  $\frac{du}{dn}$  — градієнт швидкості, тобто зміна швидкості на одиницю довжини в перпендикулярному напрямі.

З формули випливає, що в рідині, яка перебуває в стані спокою,  $\tau = 0$ , тобто в'язкість виявляється лише під час її руху.

Одиницею динамічної в'язкості є

$$|\mu| = \frac{|\tau|}{\left|\frac{du}{dn}\right|} = \frac{\left|\frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}}\right|}{\left|\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}\right|} = |\text{Па} \cdot \text{с}| \quad (\text{паскаль-секунда}). \quad (7)$$

Аналізуючи закон Ньютона, можна сказати, що динамічна в'язкість визначає силу, потрібну для переміщення одного шару рідини по другому при значеннях площі контакту шарів і градієнтів швидкості, що дорівнюють одиниці. В гідравлічних розрахунках часто використовують величину  $\nu$  — кінематичну в'язкість, яка є відношенням динамічної в'язкості  $\mu$  до густини  $\rho$ ,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\left|\frac{\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}\right|}{\left|\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right|}, \quad (8)$$

$\nu$  залежить від рідини і температури. З підвищенням температури для краплинної рідини в'язкість зменшується, а для газів збільшується (табл. 1).

**Поняття про в'язку і нев'язку рідину.** *Нев'язкою рідиною* називають уявну рідину, яка характеризується відсутністю внутрішнього тертя при її русі. Такої рідини в природі не існує, але абстрактна модель нев'язкої рідини зручна при вирішенні теоретичних питань і описуванні ряду явищ, пов'язаних із обтіканням твердих тіл і рухом рідини через деякі споруди і пристрої. Проте така модель не дає змоги пояснити походження втрат енергії при протіканні води трубопроводами, а також опору руху твердих тіл у рідині. Для описання цього використовують складнішу модель рідини — в'язку, де враховано вплив внутрішнього тертя.

Найпростішою моделлю в'язкої рідини є ньютонівська рідина, де дотичні напруження виражаються формулою (6).

Крім звичайних (ньютонівських) рідин існують аномальні (неньютонівські) рідини, до яких належать мастила, нафтопро-

Таблиця 1. Кінематична в'язкість деяких рідин і газів

Рідина	Температура $t$ , °C	$\nu$ , см <sup>2</sup> /с
Вода	5	0,0152
»	10	0,0131
»	15	0,0115
»	20	0,0101
»	45	0,0060
Нафта (густина 880 кг/м <sup>3</sup> )	15	0,28...0,34
Гас	15	0,027
Мазут	18	20
Масило машинне	50	0,001...0,015
»	10	0,0087...0,3080
Бітум	60	1,4...26
Повітря	5	0,137
»	10	0,141
»	20	0,151
»	40	0,168
Метан	5	0,149
»	10	0,154
»	20	0,165
»	40	0,185

дукти, колоїдні розчини. Для таких рідин закон внутрішнього тертя має вигляд [18]

$$\tau = \tau_{\phi} + \mu \frac{du}{dn}, \quad (9)$$

де  $\tau_{\phi}$  — дотичні напруження в нерухомій рідині (або початкові напруження зсуву).

**Сили, які діють в рідині.** В рідині діють масові і поверхневі сили. Масові сили діють на кожний елемент рідкого середовища і, за другим законом Ньютона, вони дорівнюють добутку маси тіла на прискорення.

До масових сил належать сили тяжіння

$$G = mg, \quad (10)$$

а також сили інерції

$$j = -m \frac{du}{dt}, \quad (11)$$

де  $\frac{du}{dt}$  — прискорення руху тіла ( $t$  — час); знак «-» показує, що сила інерції має напрям, протилежний прискоренню.

Поверхневі сили виявляються на граничних поверхнях розглядуваного рідкого тіла. Поверхневу силу, яка діє нормально до будь-якої площадки, називають *силою тиску*. Поверхневу силу, яка діє по дотичній до площадки, називають *силою опору*. Сили тиску виявляються як під час руху, так і за умови рівноваги рідини, сили опору, згідно з формулою (6), тільки при русі рідини.

## 1.1. Гідростатичний тиск і його властивості

Розглянемо довільний об'єм рідини (рис. 1.1), який перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил.

Розітнемо цей об'єм площиною  $\omega$  і уявно відкинемо його частину з одного боку від цієї площини.

Для того щоб збереглися умови рівноваги, дію відкинутої частини заміняємо рівнодієюною силою  $P$ . Тепер на площині  $\omega$  виділимо елементарну площу  $\Delta\omega$ . На неї буде діяти тільки частина рівнодієюної сили  $\Delta P$ . Відношення  $\Delta P$  до  $\Delta\omega$ , коли  $\Delta\omega$  наближається до нуля, називається *гідростатичним тиском у точці*:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta\omega}, \quad (1.1)$$

або

$$p = \frac{dP}{d\omega}. \quad (1.2)$$

Гідростатичний тиск має три основні властивості:

1. Гідростатичний тиск спрямований по нормалі і до поверхні, на яку він діє (тобто перпендикулярно до поверхні).

У рідині не виникають розтяжні напруження, а якщо вона перебуває в стані спокою, то в ній не виникають і дотичні напруження.

Тиск може діяти на площину тільки під кутом  $90^\circ$ , бо інакше його можна було б розкласти на дві складові: нормальну  $p$  і дотичну  $\tau$ . Проте, як уже було зазначено, дотичні напруження можуть виникати в рідині тільки під час її руху. Тому це ще раз доводить, що гідростатичний тиск діє тільки нормально до поверхні і викликає стискальні зусилля.

2. У будь-якій точці рідини гідростатичний тиск є однако-вим за всіма напрямками. Для ствердження цього положення виділимо в об'ємі рідини призму із основою у вигляді трикутника  $ABC$  (рис. 1.2, *a*) і замінимо дію об'єму рідини із зовнішнього боку від призми на її бокові грані відповідними силами. Оскільки призма перебуває у рівновазі, то многокутник (у цьо-

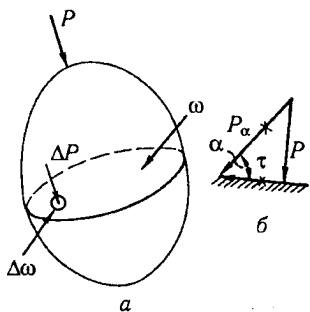


Рис. 1.1

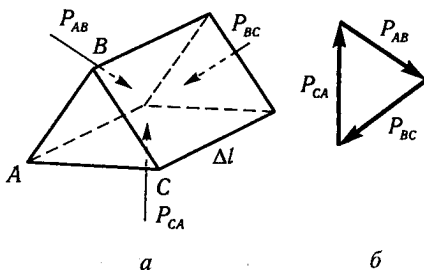


Рис. 1.2

му випадку трикутник) цих сил буде замкненим (рис. 1.2, б). Трикутник сил є подібним до трикутника  $ABC$  і із закону подібності випливає, що

$$\frac{P_{AB}}{AB} = \frac{P_{BC}}{BC} = \frac{P_{CA}}{CA}.$$

Поділимо всі члени цього рівняння на довжину призми  $\Delta l$ :

$$\frac{P_{AB}}{AB \cdot \Delta l} = \frac{P_{BC}}{BC \cdot \Delta l} = \frac{P_{CA}}{CA \cdot \Delta l}.$$

Добутки у знаменниках цього виразу є площами відповідних граней призми. Якщо розміри  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  і  $\Delta l$  будуть наближатися до нуля, то відповідно до виразу (1.1) маємо

$$P_{AB} = P_{BC} = P_{CA} = P. \quad (1.3)$$

Оскільки орієнтація граней призми була вибрана довільно, то треба вважати доведеним положення про рівність тиску в одній точці за всіма напрямками.

3. Значення тиску визначається тільки розташуванням певної точки в просторі, заповненому рідиною, тобто залежить від її координат:

$$p = f(x; y; z).$$

Тиск є скалярною величиною, тоді як сила тиску — це вектор. Вимірюють тиск у паскалях (Па):

$$|p| = |P/\omega| = |N/m^2| = |Па|.$$

У техніці застосовують також одиницю тиску — технічну атмосферу (ат):

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98 \, 100 \text{ Н/м}^2 = 98 \, 100 \text{ Па} = \\ = 98,1 \text{ кПа} \approx 0,1 \text{ МПа}.$$

## 1.2. Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера)

Виділимо в рідині, що перебуває в спокої, елементарний паралелепіпед із сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 1.3). В усіх точках будь-якої нескінченно малої грані тиск рідини приймаємо однако-вим. Уявно відкинемо рідину, яка оточує паралелепіпед, замі-нимо її дію відповідними силами.

Позначимо тиск у точці  $A$  з координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  у центрі лівої грані (на перехресті діагоналей) через  $p$ . Враховуючи вла-стивості гідростатичного тиску,  $p = f(x, y, z)$ . В інших точках паралелепіпеда тиск буде відрізнятися від  $p$ . Координати точ-ки  $A_1$  на правій грані будуть  $x + dx$ ;  $y$ ;  $z$ .

Отже, тиск на ліву грань в точці  $A$  дорівнює  $p$ , а на праву в точці  $A_1$  тиск  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ .

На всю ліву грань діє сила тиску:  $p dydz$ , а на праву —  $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz$ . Знак « $\leftarrow$ » тут вказує на те, що сила діє в напрямі, протилежному напрямку осі  $x$ , тому що на паралелепіпед діють стискні сили.

Крім того, на паралелепіпед можуть діяти масові сили (на-приклад, сила тяжіння, сила інерції або комбінація цих сил). Ці сили прикладені в центрі ваги рідини.

Проекція масових сил на вісь  $x$

$$\rho dx dy dz X,$$

де  $X$  — проекція прискорення масової сили на вісь  $x$ , або про-екція цієї сили, віднесена до одиниці маси.

Запишемо умову рівноваги сил, що проекціюються на вісь  $x$ :

$$p dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz + \rho dx dy dz X = 0.$$

Після перетворень

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = 0.$$

За аналогією можна записати і рівняння для осей  $y$  і  $z$ . Тоді дістанемо диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівнян-ня Ейлера):

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= 0; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

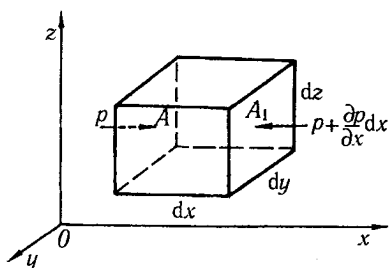


Рис. 1.3

Оскільки всі сили віднесені до маси, кожен член рівняння має розмірність прискорення ( $LT^{-2}$ ).

Кожне рівняння характеризує зміну тиску, якщо змінюється одна з координат.

Для того щоб встановити закономірності зміни тиску при зміні кількох координат, треба розглянути рівняння

Ейлера сумісно для трьох осей координат.

Для цього помножимо перше рівняння на  $\rho dx$ , друге на  $\rho dy$ , а третє на  $\rho dz$  і дістанемо

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx = \rho dx X;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} dy = \rho dy Y;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho dz Z.$$

Тепер складемо ці рівняння:

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (1.5)$$

Ліва частина цього рівняння є повним диференціалом тиску:

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (1.6)$$

Це основне диференціальне рівняння гідростатики.

Права частина рівняння може бути представлена повним диференціалом деякої потенціальної функції  $\Pi$ , частинні похідні від якої по осях  $x, y, z$  будуть

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = Z.$$

Тоді

$$dp = \rho d\Pi. \quad (1.7)$$

Після інтегрування рівняння маємо

$$p = \rho\Pi + \text{const}. \quad (1.8)$$

З виразу (1.6) можна дістати рівняння для поверхні однакового тиску (поверхні рівня).

Якщо  $\rho = \text{const}$ ,  $p = \text{const}$ ,  $dp = 0$ , то

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (1.9)$$

### 1.3. Рівновага рідини під дією сили тяжіння.

#### Основне рівняння гідростатики

Якщо з масових сил в умовах абсолютного спокою буде діяти тільки сила тяжіння, то

$$X = 0; Y = 0; Z = -g.$$

Знак «-» впливає з того, що прискорення вільного падіння напрямлене вниз, тоді як вісь  $z$  напрямлена вгору. Підставивши в рівняння (1.9), дістанемо

$$-gdz = 0; -g \int dz = \text{const.}$$

Після інтегрування одержимо

$$-gz = \text{const}; z = \text{const.}$$

Отже, в однорідній рідині, урівноваженій силами тяжіння, всі точки поверхні однакового тиску мають однакові вертикальні координати, і ця поверхня буде *горизонтальною*.

Основне диференціальне рівняння гідростатики (1.6), якщо діє тільки сила тяжіння, матиме вигляд

$$dp = -\rho g dz.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} \quad (1.10)$$

Це основне рівняння гідростатики.

**Абсолютний та манометричний тиск.** Приєднаємо до стінки резервуара (рис. 1.4) на висоті  $z$  над площиною порівняння  $O'-O'$  відкриту та закриту зверху трубки. Із закритої трубки викачаємо повітря. Під дією тиску рідини в трубках підніметься на висоти, які показані на рисунку.

Для рідини, що перебуває в стані рівноваги у закритій трубці, рівняння (1.10) можна записати

$$\frac{p_{\text{абс}}}{\rho g} + z = 0 + z'. \quad (1.11)$$

Тоді висота тиску або висота підняття рідини у закритій трубці, з якої викачаємо повітря,

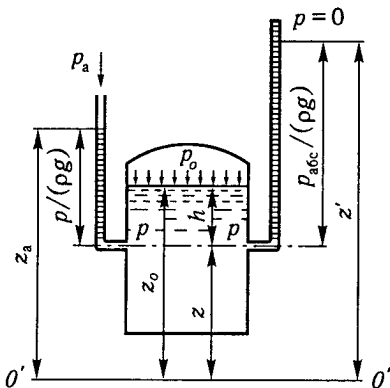


Рис. 1.4



$$\frac{P_{абс}}{\rho g} = z' - z.$$

Для рідини у відкритій трубці

$$\frac{P_{абс}}{\rho g} + z = \frac{P_a}{\rho g} + z_a,$$

або

$$\frac{P_{абс} - P_a}{\rho g} = z_a - z. \quad (1.12)$$

Перевищення абсолютного тиску над атмосферним  $P_{абс} - P_a$  називають *манометричним* або *надлишковим тиском*  $p$  у точці, висоту рідини у відкритій трубці  $z_a - z = \frac{P}{\rho g}$  називають *п'езометричною висотою*, а таку відкриту трубку — *п'езометром*. П'езометр — це найпростіший прилад для вимірювання манометричного тиску.

Для практичних цілей найбільший інтерес має визначення саме манометричного, а не абсолютного тиску, бо на стінки резервуарів, інженерних конструкцій з одного боку діє атмосферний тиск, а з іншого — тиск рідини, і манометричний тиск є різницею цих тисків.

Суму відмітки точки і п'езометричної висоти називають *п'езометричним напором*:

$$z + \frac{P}{\rho g} = H. \quad (1.13)$$

Для всіх точок рідини, що перебувають у спокої, п'езометричний напір згідно з формулою (1.10) є постійною величиною.

З викладеного вище випливає, що будь-який тиск характеризується деякою п'езометричною висотою. Наприклад, атмосферному тиску на рівні моря відповідає п'езометрична висота

$$\frac{P_a}{\rho g} = \frac{101\,324}{1000 \cdot 9,81} = 10,33 \text{ м.}$$

Для ртуті

$$\frac{P_a}{\rho g} = \frac{101\,324}{13\,600 \cdot 9,81} = 0,76 \text{ м} = 760 \text{ мм.}$$

**Вакуум.** Розглянемо тепер закритий резервуар, на вільній поверхні якого тиск менше атмосферного ( $p_0 < p_a$ ) (рис. 1.5).

*Вакуумметричним тиском*, або *вакуумом*, називають різницю між атмосферним тиском і абсолютним тиском у точці, коли абсолютний тиск менший від атмосферного,

$$P_{\text{вак}} = P_a - P_{абс}. \quad (1.14)$$

Виділимо в резервуарі точку  $A$ . За допомогою основного рівняння гідростатики можна визначити тиск у цій точці  $A$ :

$$\frac{P_{\text{абс}}}{\rho g} + z = \frac{P_a}{\rho g} + z_a;$$

$$z - z_a = \frac{P_a - P_{\text{абс}}}{\rho g},$$

де  $\frac{P_a - P_{\text{абс}}}{\rho g} = h_{\text{вак}}$  — вакуумметрична висота, або висота вакууму:

$$h_{\text{вак}} = \frac{P_{\text{вак}}}{\rho g} = z - z_a. \quad (1.15)$$

Вакуум — це від'ємний манометричний тиск. Максимально можливий вакуум дорівнює атмосферному тиску, він буде тоді, коли  $P_{\text{абс}} = 0$ . У цьому разі

$$h_{\text{вак}} = \frac{P_a - 0}{\rho g} = \frac{101324}{1000 \cdot 9,81} = 10,33 \text{ м вод. ст.}$$

При таких малих тисках вода може перетворитися на пару при  $t^\circ \approx 10...15^\circ \text{C}$  і тому у водопроводах та інших водних системах висота вакууму має бути не більшою ніж 7 м.

**Пристрої для вимірювання тиску.** Зігнута трубка, що показує висоту вакууму, називається *вакуумметром* (рис. 1.5). П'єзометрами та вакуумметрами, як правило, вимірюють невеликі тиски і вакууми, оскільки для вимірювання манометричного тиску або вакууму, що дорівнює, наприклад, атмосферному тиску, знадобилася б висота пристрою більша за 10 м. У таких випадках застосовують рідинні манометри (вакуумметри), заповнені ртуттю.

На рис. 1.6 показано диференціальний ртутний манометр для вимірювання різниці тисків води в резервуарах  $A$  і  $B$ . Для стовпа води у лівій трубці манометра можна записати такий вираз:

$$\frac{P_A}{\rho_B g} + z_A = \frac{P_1}{\rho_B g} + z_1;$$

аналогічно для правої трубки

$$\frac{P_B}{\rho_B g} + z_A = \frac{P_2}{\rho_B g} + z_2;$$

умова рівноваги ртуті в U-подібній трубці

$$\frac{P_1}{\rho_{\text{рт}} g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho_{\text{рт}} g} + z_2,$$

де  $\rho_B$  — густина води;  $\rho_{\text{рт}}$  — густина ртуті.

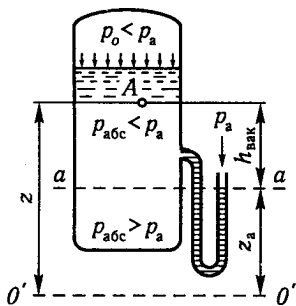


Рис. 1.5

101 4023

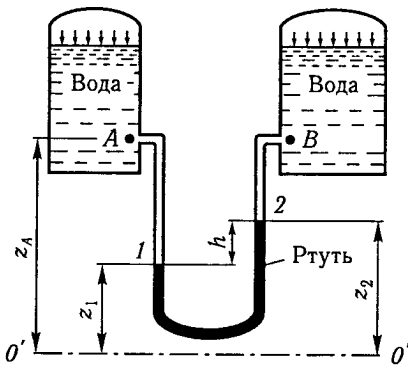
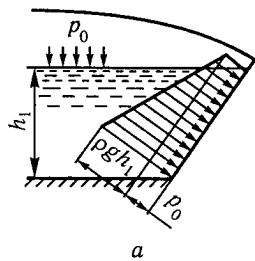
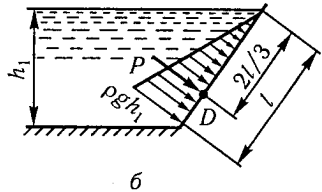


Рис. 1.6



a



b

Рис. 1.7

Розв'язуючи сумісно ці три рівняння з урахуванням того, що  $z_2 - z_1 = h$ , дістанемо

$$p_A - p_B = gh(\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}). \quad (1.16)$$

Можна підрахувати, що різниці тисків 0,1 МПа при  $\rho_{\text{рт}} = 13\,600 \text{ кг/м}^3$  відповідає різниця показань у трубках ртутного манометра  $h = 0,81 \text{ м}$ .

Ртутний манометр можна також застосовувати для вимірювання тиску повітря. Так, якщо у резервуарі А тиск повітря  $p_A = p_a = 101\,324 \text{ Па}$ , у резервуарі В тиск  $p = 0$ , то показання ртутного манометра (у цьому випадку незначною густиною повітря, порівняно з густиною ртуті, можна знехтувати)

$$h = \frac{p_a}{\rho_{\text{рт}} g} = \frac{101\,324}{13\,600 \cdot 9,81} = 0,76 \text{ м} = 760 \text{ мм}.$$

Для вимірювання більших тисків застосовують спеціальні пружинні манометри.

**Залежність тиску від глибини занурення.** Застосуємо рівняння (1.10) до точки, зануреної на глибину  $h$  від поверхні, і до точок, що розміщені на поверхні рідини (рис. 1.4),

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}.$$

Звідси

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho gh. \quad (1.17)$$

Ця формула дає змогу визначити тиск у точці залежно від глибини занурення (рис. 1.7, а). У відкритому резервуарі (рис. 1.7, б) манометричний тиск на поверхні  $p_0 = 0$  і

$$p = \rho gh. \quad (1.18)$$

Ці формули показують, що тиск змінюється за лінійним законом, а епюри тиску мають форму трикутників або трапецій (рис. 1.7, а, б).

Якщо поверхня, на яку діє тиск, є криволінійною, то епюра тиску також буде криволінійною (рис. 1.9).

■ **Приклад.** Визначити вакуум у резервуарі (рис. 1.8) при атмосферному тиску  $p_a = 98$  кПа, якщо задані  $h_1 = 200$  мм,  $h_2 = 220$  мм,  $h_3 = 250$  мм.

Для розв'язання цієї задачі застосовуємо основне рівняння гідростатики

$$p = p_0 + \rho gh.$$

Покажемо на рис. 1.8 характерні точки: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Визначимо тиск у цих точках.

Тиск у точці 1 дорівнює атмосферному:  $p_1 = p_a$ .

Тиск у точці 2

$$p_2 = p_a - \rho_{рт} \cdot g \cdot h_1; \quad p_2 = 98\,000 - 13\,600 \cdot 9,8 \cdot 0,2 = 71\,344 \text{ Па.}$$

Тиск у точці 3

$$p_3 = p_2 + \rho_v \cdot g \cdot h_1; \quad p_3 = 71\,344 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,2 = 73\,304 \text{ Па.}$$

Тиск у точці 4

$$p_4 = p_3 - \rho_{рт} \cdot g \cdot h_2; \quad p_4 = 73\,304 - 13\,600 \cdot 9,8 \cdot 0,22 = 43\,982,4 \text{ Па.}$$

Тиск у точці 5

$$p_5 = p_4 + \rho_v \cdot g \cdot h_2; \quad p_5 = 43\,982,4 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 0,22 = 46\,138,4 \text{ Па.}$$

Тиск у точці 6

$$p_6 = p_5 - \rho_{рт} \cdot g \cdot h_3; \quad p_6 = 46\,138,4 - 13\,600 \cdot 9,8 \cdot 0,25 = 12\,818,4 \text{ Па.}$$

Вакуумметричний тиск визначається як

$$p_{\text{вак}} = p_a - p_6; \quad p_{\text{вак}} = 98\,000 - 12\,818,4 = 85\,181,6 \text{ Па.}$$

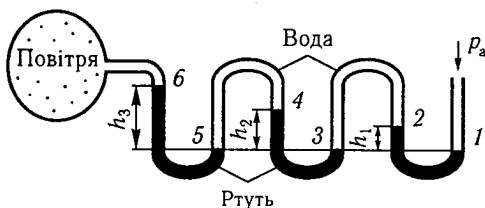


Рис. 1.8

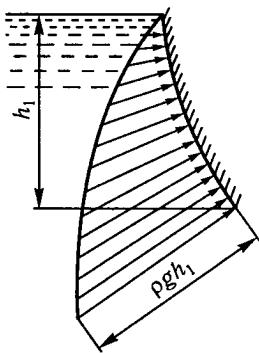


Рис. 1.9

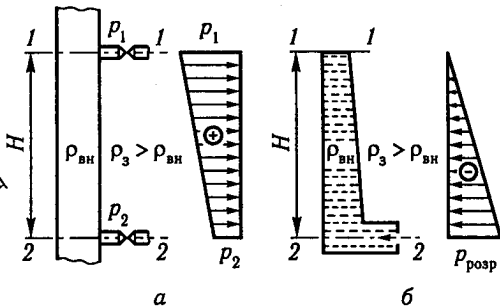


Рис. 1.10

Застосовуючи рівняння (1.17) і (1.18), зміну тиску атмосферного повітря із зовнішнього боку стінки резервуара не враховують, бо густина повітря значно менша, ніж густина води. Однак, розглядаючи характер зміни манометричного тиску по висоті газового стояка (рис. 1.10, а), не можна нехтувати впливом зовнішнього атмосферного тиску [15].

Тиск зовнішнього (атмосферного) повітря вздовж стояка заввишки  $H$

$$P_{a_1} = P_{a_2} - \rho_3 g H. \quad (1.19)$$

Тиск газу, що заповнює стояк,

$$P_{вн_1} = P_{вн_2} - \rho_{вн} g H, \quad (1.20)$$

де  $P_{a_1}$  і  $P_{a_2}$  — тиск зовнішнього повітря в перерізах 1-1 і 2-2;  $P_{вн_1}$  і  $P_{вн_2}$  — тиск газу в стояку (внутрішній тиск) у тих самих перерізах;  $\rho_3$  — густина зовнішнього повітря;  $\rho_{вн}$  — густина газу.

Сумісне розв'язання рівнянь (1.19) і (1.20) дає

$$P_{вн_1} - P_{a_1} = P_{вн_2} - P_{a_2} - g H (\rho_{вн} - \rho_3),$$

або

$$P_1 = P_2 - g H (\rho_{вн} - \rho_3), \quad (1.21)$$

де  $P_1$  і  $P_2$  — манометричний тиск у перерізах 1-1 і 2-2.

Рівняння (1.21) показує, що манометричний тиск газу по висоті стояка буде зростати, тому що густина газу  $\rho_{вн} < \rho_3$ . Тому, як правило, газові горілки на верхніх поверхах горять краще, ніж на нижніх.

✦ **Приклад.** Визначити манометричний тиск у перерізі 1-1 газового стояка (рис. 1.10, а), якщо у перерізі 2-2 манометричний тиск  $P_2 = 0,3$  кПа,

відстань між перерізами  $H = 10$  м, густина зовнішнього повітря  $\rho_3 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>, густина газу у стояку  $\rho_{\text{вн}} = 0,7$  кг/м<sup>3</sup>.

Згідно з формулою (1.21)

$$p_1 = p_2 - gH(\rho_{\text{вн}} - \rho_3) = 300 - 9,81 \cdot 10(0,7 - 1,2) = 349,05 \text{ Па} = 0,35 \text{ кПа}.$$

За допомогою рівняння (1.21) можна також пояснити наявність тяги в димовій трубі (рис. 1.10, б), де при підвищенні температури димових газів їхня густина стає меншою, ніж густина зовнішнього повітря. Якщо в перерізі 1-1 тиск у трубі і поза нею буде однаковим, то у перерізі 2-2 тиск у димовій трубі буде меншим, ніж атмосферний тиск, тобто тут виникає невеликий вакуум, який називають *розрідженням* [15].

Густина води значно більша, ніж густина повітря ( $\rho_{\text{вн}} \gg \rho_3$ ), і тому у водяних стояках зміну тиску зовнішнього повітря можна не враховувати.

■ **Приклад.** У резервуарі, що розділений на дві частини перегородкою з отвором у нижній частині, перебуває вода з температурою  $t_1 = 15$  °С і  $t_2 = 75$  °С (рис. 1.11). Визначити різницю рівнів  $\Delta h$ , за яких не відбуватиметься перетікання рідини поміж секціями, якщо  $h = 2,0$  м;  $a = 0,2$  м.

За таблицями довідника [13] визначимо густини води при різних температурах: при  $t_1 = 15$  °С  $\rho_1 = 1000,2$  кг/м<sup>3</sup>, при  $t_2 = 75$  °С  $\rho_2 = 976$  кг/м<sup>3</sup>.

Виділимо в горизонтальній площині  $O'-O'$  дві точки: 1 — у першому резервуарі і 2 — у другому резервуарі. Перетікання води з цих резервуарів не відбуватиметься, якщо тиски в цих точках, що розміщені в одній горизонтальній площині, будуть однаковими, тобто  $p_1 = p_2$ .

Визначимо тиск у кожній точці:

$$p_1 = \rho_1 g h_1 = \rho_1 g (h - a); \quad (1)$$

$$p_2 = \rho_2 g h_2 = \rho_2 g (h + \Delta h - a), \quad (2)$$

а оскільки  $p_1 = p_2$ , то прирівняємо рівняння (1) до рівняння (2):

$$\rho_1 g (h - a) = \rho_2 g (h + \Delta h - a);$$

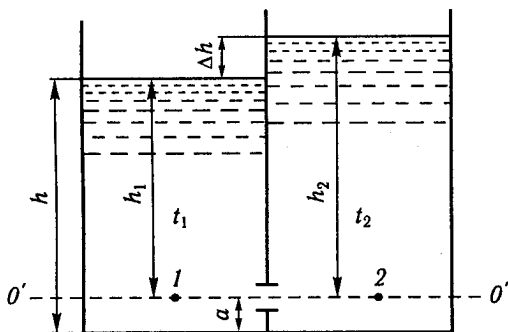


Рис. 1.11

$$\rho_2 \Delta h = \rho_1 (h - a) - \rho_2 (h - a);$$

$$\Delta h = \frac{(h - a)(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2}.$$

Підставивши всі вихідні дані, дістанемо

$$\Delta h = \frac{(2 - 0,2)(1000,2 - 976,0)}{976,0} = 0,0446 \text{ м} = 4,5 \text{ см.}$$

**Закон Паскаля.** Зовнішній тиск, який діє в рідині  $p_0$ , передається в усі точки рідини без змін. Згідно з формулою (1.17) маємо

$$p = p_0 + \rho gh,$$

і якщо зовнішній тиск  $p_0$  набагато більший, ніж  $\rho gh$ , то можна записати

$$p = p_0. \quad (1.22)$$

На законі Паскаля засновано принцип дії деяких гідравлічних пристроїв, за допомогою яких тиск передається на великі відстані.

Розглянемо роботу гідравлічного преса (рис. 1.12).

*Гідравлічний прес* — це система, яка складається з двох циліндрів з поршнями діаметрами  $D$  і  $d$ . Ці циліндри з'єднані між собою трубкою, через яку перетікає рідина.

Якщо в малому циліндрі на поршень діє сила  $P_1$ , то на одиницю площі поршня діє тиск  $p$ :

$$p = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{P_1 \cdot 4}{\pi d^2}.$$

Згідно із законом Паскаля цей тиск передається в усі точки рідини без змін. Цей тиск діє також на поршень у великому циліндрі.

Сила  $P_2$ , що діє на поршень у великому циліндрі,

$$P_2 = p \frac{\pi D^2}{4} = \frac{P_1 \cdot 4}{\pi d^2} \frac{\pi D^2}{4} = P_1 \frac{D^2}{d^2}. \quad (1.23)$$

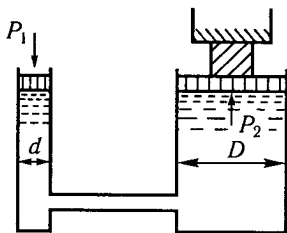


Рис. 1.12

Отже, збільшуючи площу другого поршня, можна виграти в силі.

За рахунок того що поршні труться об стінки циліндрів, фактична сила  $P_2$  буде трохи меншою, ніж визначена з формули. Це можна врахувати введенням коефіцієнта корисної дії  $\eta < 1,0$ .

▲ **Приклад.** Визначити діаметр  $d$  малого циліндра гідравлічного преса (рис. 1.12),

якщо його коефіцієнт корисної дії  $\eta = 0,92$ ,  $D = 200$  мм, співвідношення сил  $P_2/P_1 = 100$ .

З формули (1.23) з урахуванням тертя

$$\eta P_2 = P_1,$$

тоді

$$d = D \sqrt{\frac{P_1}{\eta P_2}} = 200 \sqrt{\frac{0,01}{0,92}} = 20,85 \text{ мм.}$$

#### 1.4. Відносна рівновага рідини

Якщо на рідину, яка міститься в резервуарі, діють сили тяжіння та інші масові сили, то такий стан рідини називають *відносною рівновагою*.

Розглянемо деякі приклади.

1. Рідина міститься в цистерні, яка рухається горизонтально з прискоренням  $X = j$  (рис 1.13). Треба врахувати, що на цистерну діє сила з прискоренням  $j$ , а на рідину — сила інерції з прискоренням  $(-j)$ .

У цьому разі диференціальне рівняння вільної поверхні (1.9) набирає вигляду

$$-j dx - g dz = 0$$

i

$$-j x - g z = C.$$

Якщо  $x = 0$ , то  $z = H$ ,  $C = -gH$

i

$$z = H - \frac{j}{g} x. \quad (1.24)$$

Це рівняння показує, що вільна поверхня рідини в цистерні є площиною з кутом нахилу  $\alpha = \text{arctg}(-j/g)$ . При зменшенні швидкості руху цистерни вільна поверхня рідини буде нахилена в протилежний бік.

■ **Приклад.** Визначити найбільший манометричний тиск на дно цистерни (рис. 1.13), заповнений бензином ( $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>) при глибині  $H = 1,5$  м, якщо цистерна рухається з прискоренням  $j = 0,8$  м/с<sup>2</sup>, її довжина  $l = 10$  м, висота 2 м.

Найбільша глибина бензину в цистерні буде навколо лівої стінки на відстані  $x = -\frac{l}{2}$  від центра

$$z_{\max} = H - \frac{j}{g} x = 1,5 - \frac{0,8}{9,81} \left( -\frac{10}{2} \right) = 1,91 \text{ м.}$$

Отже, найбільша глибина  $z$  менша, ніж висота цистерни (2 м), і вільна поверхня бензину займе положення, що показане на рис. 1.13. Тоді най-



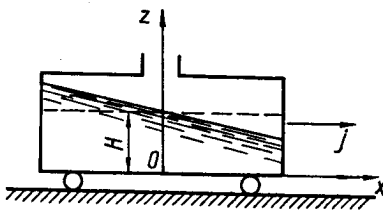


Рис. 1.13

більший тиск біля лівої стінки

$$P_{\max} = \rho g z_{\max} = 800 \cdot 9,81 \cdot 1,91 = 14\,990 \text{ Па} = 14,99 \text{ кПа.}$$

2. Рідина міститься в циліндрі, який обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю  $\Omega$  (рис. 1.14).

У цьому випадку нормально до осі діє відцентрова сила інерції з прискоренням  $j = \Omega^2 r$  (де  $r$  — радіус до точки  $M$ ), проекція якого на вісь  $x$

$$X = \Omega^2 r \cos(\widehat{r; x}) = \Omega^2 r \frac{x}{r} = \Omega^2 x$$

і на вісь  $y$

$$Y = \Omega^2 y.$$

Вертикальне прискорення  $Z = -g$ .

Рівняння вільної поверхні в циліндрі як поверхні однакового тиску (1.9) набирає вигляду

$$\Omega^2 x dx + \Omega^2 y dy - g dz = 0.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{\Omega^2 x^2}{2} + \frac{\Omega^2 y^2}{2} - g z = C.$$

У найнижчій точці вільної поверхні  $x = y = z = 0$  і  $C = 0$ . Враховуючи, що  $x^2 + y^2 = r^2$ , дістанемо

$$z = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}. \quad (1.25)$$

Така поверхня називається *параболоїдом обертання*.

Максимальне підвищення рідини біля стінок циліндра

$$z_{\max} = \frac{\Omega^2 r_0^2}{2g}, \quad (1.26)$$

де  $r_0$  — радіус циліндра.

■ **Приклад.** Вертикальний циліндр діаметром  $D = 200$  мм (рис. 1.15) обертається навколо вертикальної осі ( $n = 200$  об/хв). У циліндрі залита вода об'ємом  $W = 10$  л. Визначити місце максимального манометричного тиску та його величину.

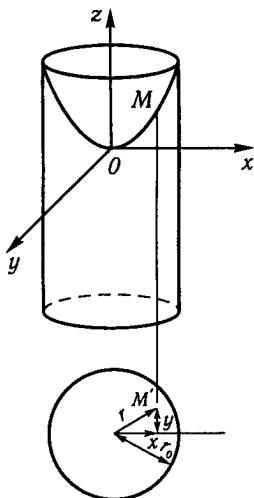


Рис. 1.14

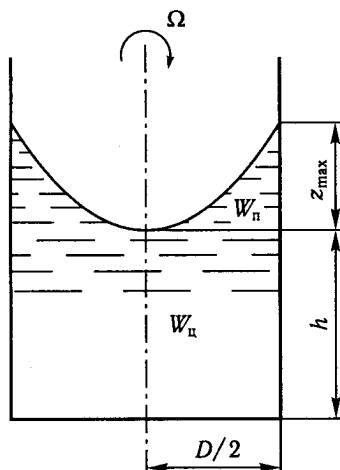


Рис. 1.15

Кутова швидкість

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 200}{30} = 20,93 \text{ с}^{-1}.$$

Висота параболоїда обертання

$$z_{\max} = \frac{\Omega^2 \left(\frac{D}{2}\right)^2}{2g} = \frac{20,93^2 \left(\frac{0,2}{2}\right)^2}{2 \cdot 9,81} = 0,223 \text{ м}.$$

При обертанні об'єм води у циліндрі не змінюється; він складається з двох частин: об'єму параболоїда  $W_n$  і об'єму циліндра  $W_u$  висотою  $h$ .

$$W = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{z_{\max}}{2} + \frac{\pi D^2}{4} h,$$

звідси

$$h = \frac{W - \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{z_{\max}}{2}}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{0,01 - \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} \cdot \frac{0,223}{2}}{\frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4}} = 0,207 \text{ м}.$$

Найбільша глибина в циліндрі встановлюється у точках біля стінки:

$$h_{\max} = z_{\max} + h = 0,223 + 0,207 = 0,43 \text{ м}.$$

У цих точках буде найбільший тиск:

$$p_{\max} = \rho g h_{\max} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 0,43 = 4218 \text{ Па} = 4,218 \text{ кПа}.$$

## 1.5. Сила тиску рідини на плоскі поверхні

Визначення сили тиску рідини на ту чи іншу поверхню (стінку, заглушку тощо) має велике практичне значення. При розрахунках має значення не тільки тиск в окремих точках, а й сила тиску на споруду чи її частину.

Розглянемо визначення сили тиску на плоску стінку довільної форми, яка утворює з горизонтом кут  $\alpha$  (рис. 1.16). На цьому рисунку плоска стінка показана також у іншій проекції, що повернена на  $90^\circ$ .

Рідина тисне на поверхню з площиною  $\omega$  в усіх точках, але цей тиск не рівномірний. У верхніх точках тиск менший, у нижніх — більший. Для того щоб знайти рівнодійну силу тиску на плоску стінку, треба обчислити силу тиску  $dP$  на елементарну площадку з площею  $d\omega$ , яка занурена на глибину  $h$ , а потім цей вираз проінтегрувати по всій площі стінки  $\omega$ .

Елементарну силу гідростатичного тиску на площу  $d\omega$  визначають як тиск у точці, помножений на площу площадки:

$$dP = p d\omega = (p_0 + \rho g h) d\omega,$$

де  $p_0$  — манометричний (надлишковий) тиск на поверхні рідини. Зробимо деякі перетворення: помножимо і поділимо праву частину на  $\rho g$ :

$$dP = \rho g \left( \frac{p_0}{\rho g} + h \right) d\omega = \rho g h' d\omega,$$

де  $h'$  — глибина занурення точки від п'єзометричної площини  $O''-O''$ , проведеної вище вільної поверхні на величину п'єзометричної висоти  $\frac{p_0}{\rho g}$ ;  $h' = \frac{p_0}{\rho g} + h$  або  $h' = y' \sin \alpha$ .

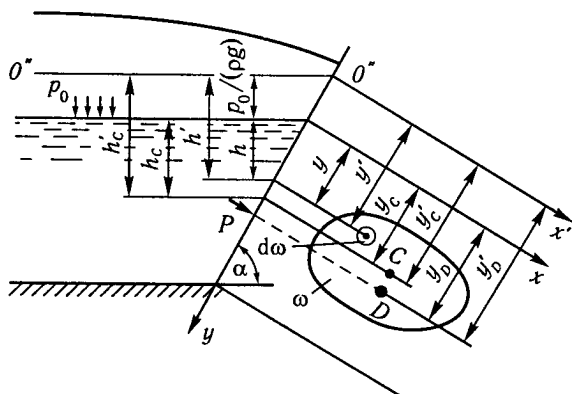


Рис. 1.16

Звідси

$$dP = \rho g y' \sin \alpha d\omega. \quad (1.27)$$

Після інтегрування по всій площі маємо

$$P = \rho g \sin \alpha \int_{\omega} y' d\omega.$$

Вираз  $\int_{\omega} y' d\omega$  є статичним моментом  $S_{x'}$  площі  $\omega$  відносно осі  $x'$ ; його визначають як добуток відстані  $y'_C$  від центра ваги  $C$  до осі  $x'$  на площину поверхні  $\omega$ :

$$\int_{\omega} y' d\omega = S_{x'} = y'_C \omega.$$

З урахуванням цього рівнодійна сила

$$P = \rho g \sin \alpha y'_C \omega, \quad (1.28)$$

або

$$P = \rho g h'_C \omega, \quad (1.29)$$

де  $h'_C$  — глибина занурення центра ваги плоскої поверхні від п'єзометричної площини.

Виразимо

$$h'_C = h_C + \frac{p_0}{\rho g}$$

і

$$P = (p_0 + \rho g h_C) \omega. \quad (1.30)$$

В окремому випадку, якщо резервуар відкритий ( $p_0 = 0$ ,  $h' = h$ ;  $y' = y$ ),

$$P = \rho g h_C \omega. \quad (1.31)$$

Силу тиску на плоску стінку визначають як тиск в її центрі ваги, помножений на площу змоченої поверхні.

Ці фактори, а не кількість рідини, визначають силу тиску, наприклад, для випадків, наведених на рис. 1.17, *a—в*. Сили тиску на дно резервуарів є однаковими при однакових площах дна  $\omega$  і глибинах рідини  $h$  у резервуарах. Однак вага рідини в резервуарах буде різною. Таке явище називають *гідравлічним парадоксом*. Тут треба пояснити, що різниця між силами тиску на дно  $P$  і реакціями опор  $R$  урівноважується вертикальними складовими сил тиску  $P_b$  на похилі стінки резервуарів.

**Центр тиску.** Після визначення сили тиску на плоску стінку слід знайти точку її прикладання — центр тиску (точку прикладання рівнодійної елементарних сил).

Для визначення центра тиску користуємося принципом, згідно з яким момент рівнодійної сили дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил.

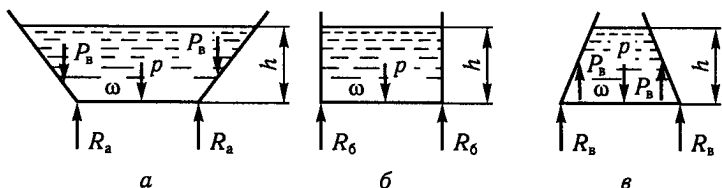


Рис. 1.17

Позначимо відстань від центра тиску  $D$  до осі  $x$  через  $y_D$ , а до осі  $x'$  — через  $y'_D$ . Тоді

$$Py'_D = \int_{\omega} dPy'. \quad (1.32)$$

Звідси з урахуванням формул (1.27) і (1.28) дістанемо

$$y'_D = \frac{\omega}{P} = \frac{\rho g \sin \alpha \int y' d\omega y'}{\rho g \sin \alpha y'_C \omega} = \frac{\int y'^2 d\omega}{y'_C \omega} = \frac{J_{x'}}{S_{x'}}. \quad (1.33)$$

Вираз  $\int y'^2 d\omega = J_{x'}$  є моментом інерції площі відносно осі  $x'$ ,  $y'_C \omega = S_{x'}$  — статичний момент площі відносно осі  $x'$ . Тому

$$y'_D = \frac{J_{x'}}{S_{x'}}.$$

Отже,  $y'_D$  — відстань від центра тиску до осі  $x'$  — дорівнює відношенню моменту інерції  $J_{x'}$  до статичного моменту  $S_{x'}$ . Для практичних розрахунків можна перетворити цей вираз.

З механіки відомо, що між моментом інерції  $J_{x'}$  і центральним моментом інерції  $J_C$  (це момент інерції відносно осі, що проходить через центр ваги плоскої стінки) існує такий зв'язок:

$$J_{x'} = J_C + y_C'^2 \omega.$$

Тоді дістанемо

$$y'_D = y'_C + \frac{J_C}{y'_C \omega}. \quad (1.34)$$

В окремому випадку, якщо резервуар відкритий,

$$y_D = y_C + \frac{J_C}{y_C \omega}. \quad (1.35)$$

Вираз  $\frac{J_C}{y_C \omega}$  показує, наскільки нижче центра ваги розміщений центр тиску.

Центр тиску — це точка прикладання рівнодійної сили тиску, яка проходить через центр ваги епюри тиску.

Для трикутної епюри центр тиску розміщений на відстані  $1/3$  від дна резервуара (див. рис. 1.7, б).

Для горизонтальної поверхні (дно резервуара) центр тиску і центр ваги розміщені на одному рівні.

■ **Приклад.** Для регулювання рівня води в напірному резервуарі встановлений затвор, що обертається, який має відкривати квадратний отвір у вертикальній стінці розмірами  $a \times a = 0,5 \times 0,5$  м при заданій глибині  $H = 1,5$  м (рис. 1.18). Визначити глибину занурення шарніра та силу тиску води на затвор, якщо манометричний тиск на вільній поверхні води в резервуарі  $p_{\text{ман}} = 10$  КПа.

Шарнір має бути розміщений у точці прикладання рівнодійної сили тиску рідини на затвор. Цю силу тиску визначаємо за формулою

$$P = (p_{\text{ман}} + \rho g h_C) \omega,$$

$\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> — густина води;  $h_C$  — глибина занурення центра ваги затвора:

$$h_C = H + \frac{a}{2} = 1,5 + \frac{0,5}{2} = 1,75 \text{ м},$$

де  $\omega$  — площа затвора,  $\omega = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$  м<sup>2</sup>.

Звідси дістанемо силу тиску

$$P = (10\,000 + 1000 \cdot 9,8 \cdot 1,75) 0,25 = 6787,5 \text{ Н} = 6,787 \text{ кН}.$$

Точку прикладання рівнодійної сили для закритого резервуара можна визначити за формулою

$$h'_D = h'_C + \frac{I_C}{h'_C \cdot \omega},$$

де  $h'_C$  — глибина занурення центра ваги затвора від п'єзометричної площини,  $h'_C = h_C + \frac{p_{\text{ман}}}{\rho g} = 1,75 + \frac{10\,000}{1000 \cdot 9,8} = 2,77$  м;  $I_C$  — момент інерції затвора,

$I_C = \frac{a^4}{12} = \frac{0,5^4}{12} = 0,0052$  м<sup>4</sup>;  $h'_D$  — глибина занурення шарніра від п'єзометричної площини,  $h'_D = 2,77 + \frac{0,0052}{2,77 \cdot 0,25} = 2,777$  м.

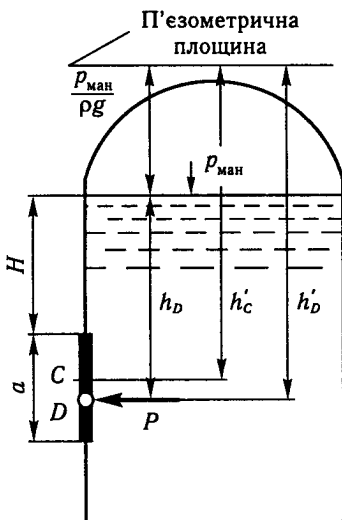


Рис. 1.18

## 1.6. Сила тиску рідини на криволінійні поверхні

При визначенні сили тиску рідини на криволінійні поверхні точка прикладання цієї сили та її напрям заздалегідь не відомі, бо в кожній точці тиск буде перпендикулярний (нормальний) до цієї поверхні.

Для криволінійних поверхонь елементарні сили тиску, залишаючись нормальними відносно відповідної площадки, вже не будуть паралельними між собою. В загальному випадку вони утворюють систему сил як завгодно розміщених у просторі; розрахунок їх зводиться до визначення головного вектора сил.

У загальному випадку для визначення сили тиску на криволінійну поверхню передусім треба визначити три її складові, паралельні координатним осям.

Розглянемо довільну криволінійну поверхню нескінченно малої товщини, на яку з двох боків діє рідина (рис. 1.19).

Сила тиску на елементарну площадку

$$dP = p d\omega = \rho g \left( \frac{P_0}{\rho g} + h \right) d\omega = \rho g h' d\omega, \quad (1.36)$$

де  $h' = \frac{P_0}{\rho g} + h$  — глибина занурення точки, розміщеної в центрі елементарної площадки і відкладеної від п'езометричної площини.

Складові сили  $dP$ , паралельні координатним осям, визначають як добуток цієї сили на косинус кута між напрямом сили і відповідною віссю:

$$dP_x = p d\omega \cos(dP, x);$$

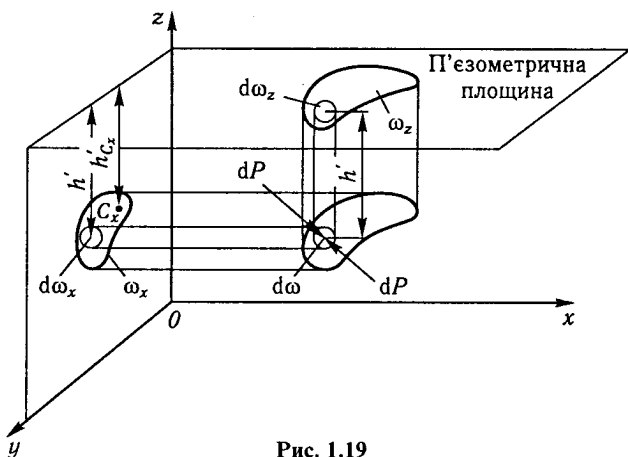


Рис. 1.19

$$dP_y = p d\omega \cos(dP, y);$$

$$dP_z = p d\omega \cos(dP, z).$$

Добуток  $d\omega$  на відповідний косинус кута між силою і координатною віссю є проекцією цієї площі на площину, перпендикулярну до відповідної осі, тобто

$$d\omega \cos(dP, x) = d\omega_x;$$

$$d\omega \cos(dP, y) = d\omega_y;$$

$$d\omega \cos(dP, z) = d\omega_z.$$

Звідси маємо

$$dP_x = p d\omega_x.$$

Після інтегрування дістанемо (аналогічно формулі (1.29))

$$P_x = \int_{\omega_x} p d\omega_x = \rho g \int_{\omega_x} h' d\omega_x = \rho g h'_{C_x} \omega_x; \quad (1.37)$$

$$P_y = \rho g h'_{C_y} \omega_y, \quad (1.38)$$

де  $\omega_x$  і  $\omega_y$  — проекції площі криволінійної поверхні на вертикальні площини, які перпендикулярні до осей  $x$  і  $y$ ,  $h'_{C_x}$  і  $h'_{C_y}$  — глибини занурення центрів ваги цих проекцій від п'єзометричної площини. Отже, горизонтальні складові сили тиску на криволінійну поверхню дорівнюють силам тиску на проекції цієї поверхні, які перпендикулярні до відповідних координатних осей.

Розглянемо тепер вертикальну складову силу тиску:

$$P_z = \int_{\omega_z} p d\omega_z = \rho g \int_{\omega_z} h' d\omega_z,$$

де  $h' d\omega_z = dW'$  — об'єм вертикального стовпця рідини, який спирається на площадку  $d\omega_z$ , висотою  $h'$ .

Інтеграл цього виразу є об'ємом  $W'$  всього вертикального стовпця рідини, який спирається на криволінійну поверхню й обмежується зверху п'єзометричною площиною.

Такий стовпець називають *тілом тиску*:

$$W' = \int_{\omega_z} h' d\omega_z = \int_{\omega_z} dW';$$

$$P_z = \rho g W'. \quad (1.39)$$

Це вертикальна складові сили тиску на криволінійну поверхню, що дорівнює вазі тіла тиску. Звідси рівнодійна сила тиску

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (1.40)$$



Товщину криволінійної поверхні вважають нескінченно малою, і тому глибина  $h'$  буде однаковою для обох боків поверхні. Отже, і сили  $dP$  будуть однаковими з обох боків площадки.

Сили  $P$  на всю криволінійну поверхню також будуть однаковими з обох боків поверхні, але з протилежним напрямом.

Якщо на вільній поверхні  $p_0 = p_a$ , тобто манометричний тиск  $p_m = 0$ , то

$$P_x = \rho g h_{C_x} \omega_x; \quad (1.41)$$

$$P_y = \rho g h_{C_y} \omega_y; \quad (1.42)$$

$$P_z = \rho g W, \quad (1.43)$$

де  $h_{C_x}$ ,  $h_{C_y}$  — відповідно глибини занурення центрів ваги проєкцій площ  $\omega_x$  і  $\omega_y$ , які вимірюються від вільної поверхні;  $W$  — об'єм тіла тиску, обмежений зверху вільною поверхнею.

На практиці криволінійні поверхні часто є циліндричними. У цьому випадку (рис. 1.20), якщо розмістити систему координат так, щоб вісь  $y$  була паралельною твірній циліндричної поверхні, дістанемо формулу рівнодійної сили тиску:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \quad (1.44)$$

де складові  $P_x$  і  $P_z$  визначають за наведеними вище формулами. Для практичних розрахунків важливо вміти визначати тіло тиску. На рис. 1.21 наведено деякі характерні випадки. У випадках, показаних на рис. 1.21, *а*, *б*, тіла тиску однакові за величиною, але у першому з них вертикальна складова напрямлена вгору (знак «-»), а у другому — вниз.

Тіло тиску, заповнене рідиною (рис. 1.21, *б*), називають дійсним на відміну від фіктивного, заповненого рідиною умовно (рис. 1.21, *а*).

Якщо одну частину криволінійної поверхні (*ab*) рідина стискує зверху, а другу (*bc*) знизу (рис. 1.21, *в*), то тіло тиску визначають як суму тіл тиску на кожен частину криволінійної поверхні з відповідними знаками.

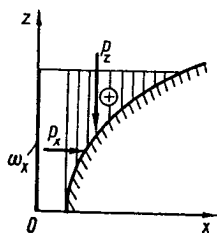


Рис. 1.20

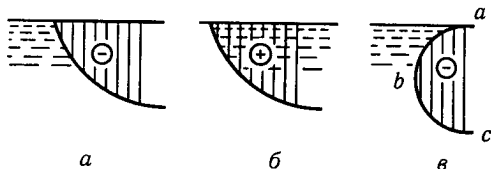


Рис. 1.21

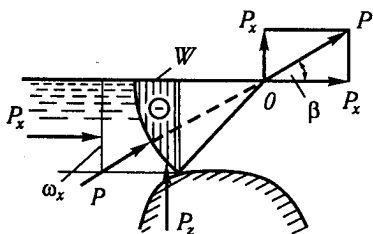


Рис. 1.22

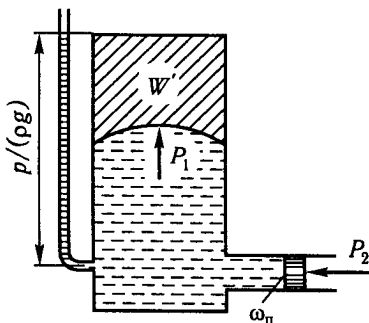


Рис. 1.23

Напряг рівнодійної сили тиску характеризують кутом нахилу її до горизонту:

$$\beta = \arctg P_z/P_x. \quad (1.45)$$

Якщо твірна циліндричної поверхні в основі циліндра описує коло, то рівнодійна  $P$  пройде через центр кола, оскільки вона нормальна до дотичної у точці прикладання, отже, має збігатися з напрямом радіуса. На рис. 1.22 наведено схему визначення складових та рівнодійної сили тиску, а також її напрям на криволінійну поверхню сегментного затвора. Точка прикладання рівнодійної розміщена на перетині її напрямку з криволінійною поверхнею.

Якщо вільної поверхні немає, то тіло тиску обмежується зверху п'єзометричною площиною, наприклад у вертикальному резервуарі, який має сферичну кришку (рис. 1.23), тиск у рідині утворюється дією поршня в циліндрі, який з'єднаний із резервуаром. Якщо на поршень із площею  $\omega_n$  діє сила  $P_2$ , то цей тиск ( $p = P_2/\omega_n$ ) залежить від сили  $P_2$ . Тіло тиску  $W'$  у цьому випадку обмежено знизу криволінійною поверхнею, а зверху — п'єзометричною площиною, проведеною на висоті  $\frac{p}{\rho g}$  від осі циліндра. Вертикальна сила тиску  $P_1$  на кришку резервуара

$$P_1 = \rho g W'.$$

Визначимо також допустимий тиск у трубі діаметром  $D$  із товщиною стінок  $\delta$  (рис. 1.24). Уявно розріжемо трубу діаметральною площиною  $l-1$  і визначимо силу, яка діє на кожену половину труби завдовжки  $l$  при тиску у трубі  $p_0$ :

$$P = p_0 \omega_x = p_0 D l.$$

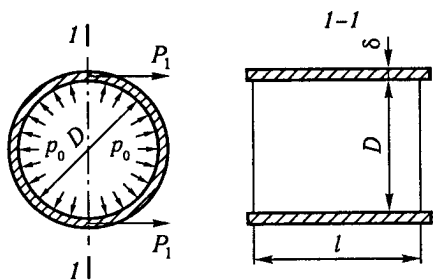


Рис. 1.24

Ця сила врівноважується двома силами  $P_1$ , що діють на стінки труби в місцях уявного перерізу:

$$P_1 = \sigma \delta l,$$

де  $\sigma$  — розтяжне напруження в стінках труби. Тоді  $P = 2P_1$  і  $p_0 D = 2\sigma \delta$ .

Якщо напруження в стінках труби буде до-

пустимим  $[\sigma]$ , то допустимий тиск у трубі

$$[p_0] = 2[\sigma] \frac{\delta}{D}. \quad (1.46)$$

Практично важливим є також визначення сили тиску на вигині труби (рис. 1.25). На зовнішню  $abc$  і внутрішню  $def$  частини вигину діють сили тиску рідини. Проекції цих сил  $P_1$  і  $P_2$  у напрямі  $m - n$  дорівнюють силам тиску на проекції цих криволінійних поверхонь (на рисунку вони заштриховані) на площину, нормальну до напрямку  $m - n$ . Рівнодійну цих сил визначають як добуток тиску в трубі  $p$  на площу перерізу труби:

$$P_3 = p \frac{\pi D^2}{4}.$$

У напрямі  $i - k$  діє така сама сила  $P_3$  та загальна сила  $P$ , що намагається зрушити трубопровід у місці вигину:

$$P = 2P_3 \cos \frac{180 - \alpha}{2} = p \frac{\pi D^2}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1.47)$$

Для запобігання зсуву на вигині трубопроводу, як правило, встановлюють спеціальний упор.

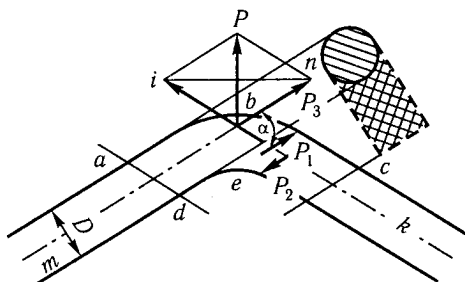


Рис. 1.25

■ **Приклад.** Визначити допустимий тиск рідини в круглій сталевій трубі  $D = 500$  м при товщині стінок  $\delta = 7$  мм і допустимому напруженні у стінці  $[\sigma] = 150$  МПа, а також силу тиску води на коліно труби при куті повороту  $\alpha = 90^\circ$  при цьому тиску.

За формулою (1.46)

$$[p_0] = 2 \cdot 150 \frac{7}{500} = 4,2 \text{ МПа.}$$

Сила тиску на коліно за формулою (1.47)

$$P = 4,2 \frac{3,14 \cdot 0,5^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,17 \text{ МН.}$$

■ **Приклад.** Визначити величину та напрям сили тиску води на 1 м ширини затвора (рис. 1.26), якщо радіус закруглення затвора  $R = 2,0$  м і глибина до нього  $h_1 = 2,0$  м та після нього  $h_2 = 0,6$  м.

Рівнодійну силу тиску води на криволінійну поверхню визначаємо за формулою

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2},$$

де  $P_x$  — горизонтальна складова сили тиску;  $P_z$  — вертикальна складова сили тиску.

Визначаємо горизонтальну складову зліва:

$$P_{x_1} = \rho g h_{Cx_1} \cdot \omega_{z_1} = \rho g \left( h_1 - \frac{R}{2} \right) R \cdot b,$$

$h_{Cx_1}$  — глибина занурення центра ваги проекції криволінійної поверхні зліва;  $\omega_{z_1}$  — площа проекції для води зліва;

$$P_{x_1} = 1000 \cdot 9,8 \left( 2 - \frac{2}{2} \right) 2 \cdot 1 = 19\,600 \text{ Н} = 19,6 \text{ кН.}$$

Тепер знаходимо горизонтальну складову для води з правого боку  $P_{x_2}$ :

$$P_{x_2} = \rho \cdot g h_{Cx_2} \cdot \omega_{z_2} = \rho \cdot g \frac{h_2}{2} h_2 \cdot b;$$

$$P_{x_2} = 1000 \cdot 9,8 \frac{0,6}{2} 0,6 \cdot 1 = 1766 \text{ Н} = 1,77 \text{ кН.}$$

Горизонтальна складова сили тиску

$$P_x = P_{x_1} - P_{x_2};$$

$$P_x = 19,6 - 1,77 = 17,83 \text{ кН.}$$

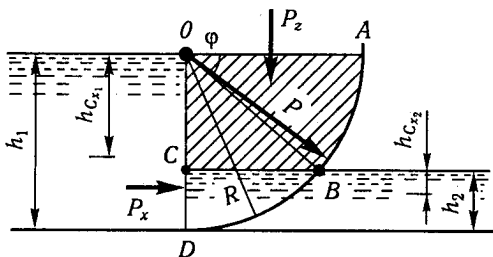


Рис. 1.26

Визначаємо тепер вертикальну складову сили тиску  $P_z$  за формулою

$$P_z = \rho \cdot g \cdot W, \quad W = W_{OABC},$$

де  $W_{OABC}$  — об'єм тіла тиску;  $W_{OABC} = W_{OABD} - W_{CBD}$ .

У цьому випадку тіло тиску є дійсним, тому (див. с. 32) сила  $P_z$  буде направлена вниз. Треба визначити об'єм  $W_{OABC}$ ;  $W_{OABC} = W_{OBC} + W_{OAB}$ . Розглянемо  $\triangle OBC$ , визначимо всі його сторони:

$$OC = OD - h_2 = R - h_2; \quad OC = 2 - 0,6 = 1,4 \text{ м}; \quad OB = R = 2 \text{ м};$$

$$CB = \sqrt{OB^2 - OC^2} = \sqrt{2^2 - 1,4^2} = 1,43 \text{ м};$$

$$W_{OBC} = \left(\frac{1}{2} OC \cdot BC\right) b = \frac{1,4 \cdot 1,43}{2} \cdot 1 = 1 \text{ м}^3.$$

Визначимо кут  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{CB}{OB} = \frac{1,43}{2} = 0,715 \rightarrow \alpha = 46^\circ; \quad \text{отже, кут } \gamma = 90^\circ - 46^\circ = 44^\circ.$$

Знайдемо об'єм сектора  $OAB$ :

$$W_{OAB} = \frac{44^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b = 0,122 \cdot 3,14 \cdot 4 \cdot 1 = 1,535 \text{ м}^3.$$

Весь об'єм тіла тиску буде  $W_{OABC} = W_{OBC} + W_{OAB} = 1 + 1,535 = 2,535 \text{ м}^3$ .

Тоді  $P_z = 1000 \cdot 9,8 \cdot 2,535 = 24\,844 \text{ Н} = 24,84 \text{ кН}$ .

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{17,85^2 + 24,84^2} = 30,59 \text{ кН}.$$

Кут нахилу рівнодійної сили до горизонту визначаємо за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_z}{P_x} = \frac{24,84}{17,85} = 1,39; \quad \text{звідси } \varphi = 54^\circ.$$

## 1.7. Плавання тіл. Закон Архімеда

Розглянемо тіло довільної форми, занурене в рідину (рис. 1.27). Визначимо сили тиску рідини на це тіло.

Горизонтальні і вертикальні сили, що діють на тіло, визначають як сили, що діють на криволінійні поверхні:  $P_{x_1}$  — горизонтальна сила, що діє на тіло зліва;  $P_{x_2}$  — горизонтальна сила, що діє на тіло справа.

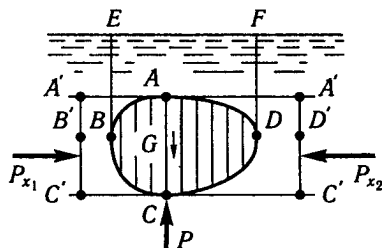


Рис. 1.27

Ці сили визначають так само, як і сили, що діють на вертикальні проекції криволінійних поверхонь  $ABC$  і  $ADC$ .

Оскільки площі цих проекцій  $A'B'C'$  і  $A'D'C'$  дорівнюють

ють одна одній, а центри їхньої ваги занурені на однакову глибину, то

$$P_{x_1} = P_{x_2}.$$

Якби ця рівність не зберігалася, тіло вийшло б зі стану рівноваги і почало б рухатися горизонтально.

Вертикальні сили тиску на криволінійні поверхні  $BAD$  і  $BCD$  визначають як сили ваги тіл тиску, опертих на ці поверхні.

Вертикальна складова сила для поверхні  $BAD$   $P_{BAD} = \rho g W_{BADFE}$  (сила давить зверху донизу).

Для поверхні  $BCD$

$P_{BCD} = -\rho g W_{BCDFE}$  (сила давить знизу вгору).

Результуюча сила

$$P = \rho g (W_{BADFE} - W_{BCDFE}) = -\rho g W_{ABCD}. \quad (1.48)$$

Отже, на тіло, яке міститься в рідкому середовищі, діє сила, що напрямлена вгору і дорівнює вазі рідини, витисненої тілом. Цю силу називають *архімедовою* або *виштовхувальною* (закон Архімеда):

$$P = -\rho g W = -mg. \quad (1.49)$$

Залежно від співвідношення ваги тіла  $G$  і виштовхувальної сили  $P$  можуть бути три варіанти стану тіла, зануреного в рідину:

1) якщо  $G > P$  — тіло потоне, бо рівнодійна сила напрямлена вниз;

2) якщо  $G = P$  — тіло перебуває в рівновазі на тій глибині, на яку воно занурене;

3) якщо  $G < P$  — тіло піднімається вгору (рис. 1.28).

Якщо частина тіла почне підніматися над поверхнею води, об'єм води, який був виштовхнутий тілом, зменшуватиметься, і від цього стане меншою й сила  $P$ . Коли  $P$  дорівнюватиме  $G$ , підняття догори закінчиться.

**Остійність.** *Водотоннажністю*  $W$  називають вагу рідини, яку витісняє тіло, а центр ваги маси рідини в об'ємі зануреної частини тіла — центром водотоннажності (точка  $D$ ) (рис. 1.29,  $a$ ). Точка  $C$  — центр ваги всього тіла, зануреного в рідину. Частіше всього точки  $C$  і  $D$  не збігаються між собою.

*Ватерлінія* (лінія  $A-A$ ) — це лінія перетину вільної поверхні рідини з боковою поверхнею судна (корабля), а площину всередині тіла, обмежену ватерлінією, називають *площиною плавання*.

*Вісь плавання* — це вертикальна вісь, що проходить крізь центр водотоннажності (точка  $D$ ).

*Ексцентриситет*  $e$  — це відстань між центром ваги (точка  $C$ ) і центром водотоннажності (точка  $D$ ).

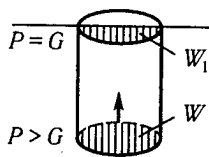


Рис. 1.28

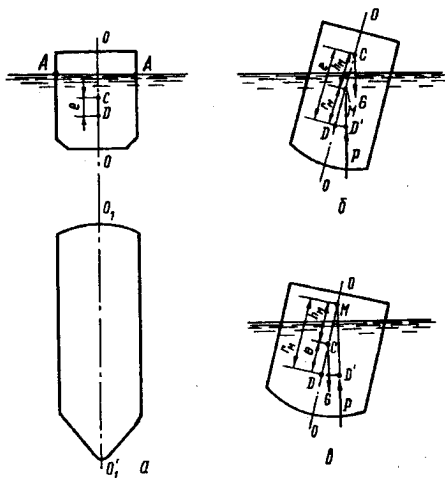


Рис. 1.29

Плаву́чістю називають здатність тіла плавати при певній вазі  $G$ . Очевидно, що мірою плавучості тіла є його водотоннажність, або підйомна сила.

Остійність судна — це його здатність повертатися в початковий стан рівноваги при невеликих відхиленнях від заданого положення після припинення дії сил, які зумовлюють крен.

Розглянемо умови остійності. При крені судна його центр ваги не змінить свого положення, а центр водотоннажності (точка  $D$ ) переміститься в положення точки  $D'$  (рис. 1.29, б, в).

Лінія дії виштовхувальної сили  $P$ , що проходить крізь точку  $D'$ , перетинає вісь плавання в точці  $M$ , яку називають *метацентром*. Відстань між метацентром і центром водотоннажності (точка  $D$ ) називають метацентричним радіусом  $r_M$ .

Виштовхувальна сила  $P$  і сила ваги  $G$  утворюють пару сил, яка діє на судно.

Якщо метацентр (точка  $M$ ) розташований нижче центра ваги (точка  $C$ ), то ця пара сил намагається перекинути судно (рис. 1.29, б).

Якщо точка  $M$  розміщена вище центра ваги (точка  $C$ ), то судно намагається відновити початкове положення (рис. 1.29, в).

У першому випадку плавання є неостійним, а в другому — остійним.

При остійному плаванні метацентричний радіус  $r_M > e$ , а при неостійному —  $r_M < e$ .

Різницю між цими величинами називають метацентричною висотою  $h_M$ :

$$h_M = r_M - e. \quad (1.50)$$

Метацентричний радіус визначають за формулою

$$r_m = J_0 / W, \quad (1.51)$$

де  $J_0$  — момент інерції, площини плавання відносно осі  $O'-O'$ ;  $W$  — водотоннажність. Звідси

$$h_m = J_0 / W - e. \quad (1.52)$$

При  $h_m > 0$  плавання буде остійним, а при  $h_m < 0$  — неостійним.

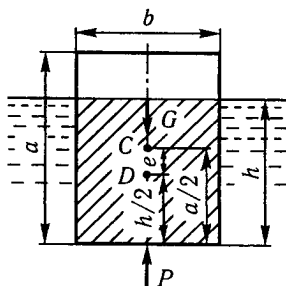


Рис. 1.30

■ **Приклад.** Визначити остійність плавання дерев'яного бруса ( $\rho_б = 800 \text{ кг/м}^3$ ) з розмірами  $a = 40 \text{ см}$ ,  $b = 30 \text{ см}$  і довжиною  $l = 1 \text{ м}$  (рис. 1.30).

Визначимо глибину занурення бруса  $h$ . За законом Архімеда вага  $G$  дорівнює виштовхувальній (архімедовій) силі  $P$ , тобто  $\rho_б g a b l = \rho_в g h b l$ , звідки

$$h = a \frac{\rho_б}{\rho_в} = 0,4 \frac{800}{1000} = 0,32 \text{ м.}$$

Центр ваги бруса  $C$  розміщений на відстані  $a/2$  від нижньої поверхні бруса, а центр водотоннажності  $D$  — на відстані  $h/2$  від цієї поверхні. Тоді ексцентриситет

$$e = a/2 - h/2 = \frac{0,4}{2} - \frac{0,32}{2} = 0,04 \text{ м.}$$

Момент інерції площини плавання

$$J_C = \frac{lb^3}{12} = \frac{1 \cdot 0,3^3}{12} = 0,00225 \text{ м}^4.$$

Об'єм водотоннажності

$$W = lbh = 1 \cdot 0,3 \cdot 0,32 = 0,096 \text{ м}^3.$$

Метацентрична висота

$$h_m = \frac{J_C}{W} - e = \frac{0,00225}{0,096} - 0,04 = -0,0156 \text{ м} < 0.$$

Отже, плавання такого бруса є неостійним.

Підставляючи в рівняння для метацентричної висоти вирази для моменту інерції, об'єму водотоннажності й ексцентриситету, можна визначити граничні відношення густин матеріалу бруса  $\rho_б$  і води  $\rho_в$ , при яких для заданих розмірів бруса плавання буде остійним:

$$h_m = \frac{lb^3}{12lb a \frac{\rho_б}{\rho_в}} - \left( \frac{a}{2} - \frac{a \rho_б}{2 \rho_в} \right) = 0,$$

звідки

$$\left( \frac{\rho_б}{\rho_в} \right)^2 - \frac{\rho_б}{\rho_в} + \frac{b^2}{6a^2} = 0.$$



Це квадратне рівняння має два корені. Якщо  $\frac{b}{a} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$ , їх значення  $\left(\frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{в}}}\right)_1 = 0,895$  і  $\left(\frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{в}}}\right)_2 = 0,105$ .

Отже, остійне плавання може бути в таких випадках:

$$1 > \frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{в}}} \geq 0,895,$$

або

$$0,105 \geq \frac{\rho_{\text{б}}}{\rho_{\text{в}}} > 0.$$

Таким чином, остійним такий брус буде при густині його матеріалу близькій до густини води, або при густині значно меншій, ніж густина води.

## 2 ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ І ДИНАМІКИ РІДИНИ

---

### 2.1. Основні поняття

*Кінематикою рідини* називають розділ технічної механіки рідини (гідравліки), в якому вивчаються можливі види і форми руху рідини і газу незалежно від сил, що діють. Отже, в кінематиці рідини вивчаються геометричні і кінематичні властивості руху.

*Гідродинаміка (динаміка рідини)* — це розділ гідравліки, в якому вивчаються закони руху рідини.

У гідравліці рідину розглядають як безперервне середовище, що заповнює весь простір. Існує ряд задач, в яких можна нехтувати в'язкістю рідини і вважати, що відсутні дотичні напруження, як це має місце в рідині, що перебуває в стані спокою, тобто вважати, що рідині властива абсолютна рухомість частинок. Рідину, в якій повністю відсутня в'язкість, називають *нев'язкою (ідеальною) рідиною*. Ця модель рідини дає можливість із достатньою точністю вирішувати деякі складні і важливі питання гідравліки, наприклад вивчення законів руху рідини.

До цих формул (законів) вносять доповнення, що враховують різницю між невід'язкою і в'язкою рідиною.

У гідравліці є зовнішня та внутрішня задачі. Перша — про обтікання тіл рідиною, або про рух тіла в рідині, і друга — про течію рідини в каналах, трубах і спорудах.

**Види руху рідини.** *Неусталений рух* — це такий рух, при якому всі його характеристики в окремих точках простору (швидкість, тиск) змінюються з часом.

*Усталений рух* — це такий рух, при якому швидкість і тиск в окремих точках простору, через який перетікає рідина, не змінюються з часом.

Отже, при усталеному одновимірному русі швидкості можуть змінюватися тільки залежно від координати  $l$ , тобто

$$u = f(l).$$

Усталений рух може бути рівномірним і нерівномірним.

При рівномірному русі швидкість, тиск та розподіл їх за перерізом при постійній формі і розмірах живого перерізу не змінюються вздовж шляху рідини (приклади — течія води в круглій трубі або в призматичному каналі при постійній глибині  $h$ ). При нерівномірному русі швидкість і тиск змінюються вздовж шляху.

Існує два методи вивчення руху рідини: метод Лагранжа і метод Ейлера.

*Метод Лагранжа* полягає в дослідженні руху окремих зафіксованих частинок рідини, тобто траєкторій їхнього руху. Аналіз свідчить, що такий метод пов'язаний зі значними труднощами при розв'язанні задач.

Тому в гідравліці замість того, щоб слідкувати за кожною окремою частинкою рідини, яка переміщується в потоці, віддають перевагу іншому методу — *Ейлера*. За цим методом вивчають швидкості і прискорення частинок, що проходять через задані точки простору. Тоді потік рідини можна охарактеризувати відповідним полем швидкостей і прискорень.

Компоненти швидкості задають як функції координат і часу:

$$u_x = f(x, y, z, t);$$

$$u_y = f(x, y, z, t);$$

$$u_z = f(x, y, z, t).$$

За цими рівняннями можна побудувати поле швидкостей.

Розглянемо точку 1 (рис. 2.1), в якій вектор швидкості дорівнює  $u_1$ . Якщо вибрати в напрямі цього вектора точку 2, в ній буде вектор швидкості  $u_2$ .

Аналогічно дістанемо вектори швидкостей  $u_3, u_4$  і т. д.

Сукупність цих векторів дає ламану лінію. При зменшенні відстані між точками дістанемо плавну криву, яка називається *лінією течії*.

Отже, лінія течії є уявною геометричною кривою, проведеною в просторі так, що дотична в будь-якій точці кривої характеризує напрям швидкості в цій точці в певний момент часу.

При усталеному русі лінія течії збігається з траєкторією руху частинки. В цьому разі (рис. 2.1) за час  $dt$  частинка при швид-

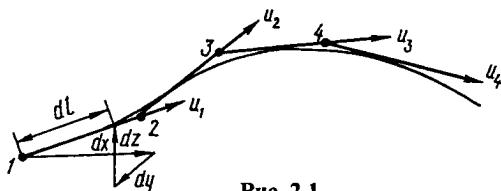


Рис. 2.1

кості  $u$  пройде шлях  $dl$ , проекції якого на осі будуть  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Складові швидкості на осі

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}.$$

Тоді

$$dt = \frac{dx}{u_x}; \quad dt = \frac{dy}{u_y}; \quad dt = \frac{dz}{u_z}.$$

Звідси маємо

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.1)$$

Це рівняння називають *рівнянням лінії течії*.

Проведемо в рухомій рідині нескінченно малий замкнений контур  $A$  (рис. 2.2, *a*), а через всі його точки — лінії течії. Сукупність ліній течії, що проходять крізь цей контур, утворює *трубку течії*.

Рідину, що тече всередині трубки течії, називають *елементарною струминкою*. Елементарна струминка має такі основні властивості:

1) при усталеному русі форма елементарної струминки з часом не змінюється, а при неусталеному — змінюється;

2) площі нормальних перерізів струминки нескінченно малі, але разом з тим неоднакові в різних місцях ( $d\omega_1 \neq d\omega_2$ ). Інакше кажучи, пучок ліній течії всередині трубки може згущуватися і розріджуватися;

3) в усіх точках певного нормального перерізу струминки швидкості однакові (рис. 2.2, *b*) (що впливає з умови нескінченно малої величини самих перерізів), але при переході від одного перерізу до іншого швидкості змінюються.

Витрата елементарної струминки  $dQ$  — це кількість рідини, що пройшла крізь переріз струминки за одиницю часу;

$$dQ = u d\omega, \quad (2.2)$$

де  $u$  — швидкість елементарної струминки, або місцева швидкість.

Сукупність елементарних струминок утворює потік рідини. Під потоком розуміють рух маси рідини, що обмежена жорсткими стінками або вільними поверхнями.

Проведемо в потоці рідини поверхню так, щоб лінії течії, які перетинають її, були нормальними до цієї поверхні. Така поверхня утворює живий переріз

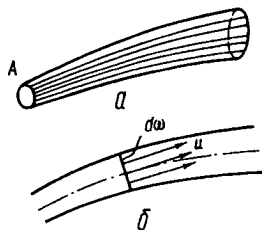


Рис. 2.2

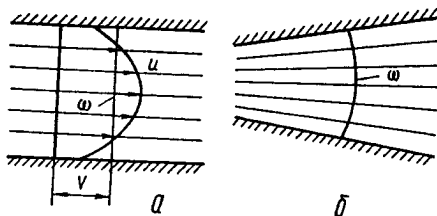


Рис. 2.3

потоків з площею  $\omega$ . Якщо лінії течії паралельні між собою, живий переріз має плоску форму (рис. 2.3, а), а якщо не паралельні — живий переріз утворює криволінійну поверхню (рис. 2.3, б).

Об'ємною витратою потоку  $Q$ ,  $\text{м}^3/\text{с}$ , називають кількість рідини, що протікає за одиницю часу крізь певний живий переріз:

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega. \quad (2.3)$$

Витрата потоку складається з суми витрат елементарних струминок.

Для практичних задач, як правило, треба знати не місцеву швидкість  $u$  в кожній точці потоку, а середню швидкість у живому перерізі  $V$ .

[Середня швидкість  $V$  — це така уявна однакова для всіх точок живого перерізу швидкість (рис. 2.3, а), за якої крізь цей переріз проходила б та сама витрата, що й при дійсних швидкостях, різних для різних точок перерізу. З урахуванням цього

$$Q = \int_{\omega} V d\omega = V\omega; \quad (2.4)$$

Середня швидкість

$$V = Q/\omega; \quad (2.5)$$

$$V = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega}. \quad (2.6)$$

При течії газу, крім об'ємної витрати, в гідравліці застосовують також поняття масової витрати  $M$ ,  $\text{кг}/\text{с}$ ,

$$M = \int_{\omega} \rho u d\omega = Q\rho. \quad (2.7)$$

## 2.2. Рух нескінченно малої частинки рідини (теорема Коші—Гельмгольца)

Нескінченно мала частинка рідини при русі змінює не тільки своє положення, а й форму. Зміна форми пов'язана з тим, що швидкості в різних точках частинки різні за значенням і напрямом, тому що  $u = f(x, y, z)$ , і відповідно проекції швидкості на осі будуть:

$$u_x = f_1(x, y, z); \quad u_y = f_2(x, y, z); \quad u_z = f_3(x, y, z).$$

Виділимо у прямокутній системі координат нескінченно малий об'єм рідини у вигляді паралелепіпеда із сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 2.4). У точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  швидкості можуть бути різними або однаковими.

Розглянемо деякі випадки.

1. Якщо швидкості в усіх точках однакові, тобто  $u_{x_A} = u_{x_B} = u_{x_C} = u_{x_D} = u_x$ , то грань  $ABCD$  переміститься в нове положення  $A'B'C'D'$  без деформації (рис. 2.5). Такий вид руху називають *лінійним переміщенням*.

2. Якщо  $u_{x_A} = u_{x_B}$ ;  $u_{x_C} = u_{x_D}$ , але  $u_{x_A} \neq u_{x_D}$ , то такий вид руху називають *лінійною деформацією* (рис. 2.6). За одиницю часу ліва грань паралелепіпеда переміститься на величину  $u_x$ , а права — на величину  $\left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)$ . Величина  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$  являє собою лінійну деформацію частинки. Паралелепіпед може подовжитися або вкоротитися.

3. Якщо  $u_{x_B} > u_{x_A}$ , то шлях, який пройшла точка  $B$  уздовж осі  $x$ , буде відрізнятись від шляху, який пройшла точка  $A$ , на

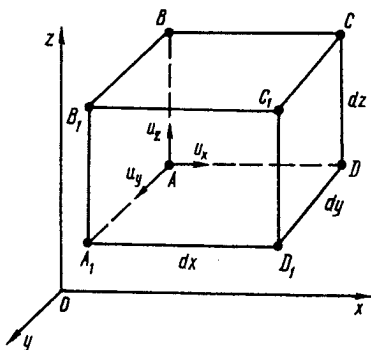


Рис. 2.4

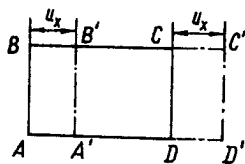


Рис. 2.5

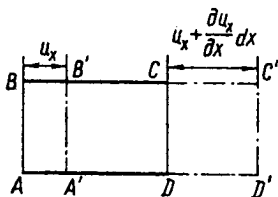


Рис. 2.6

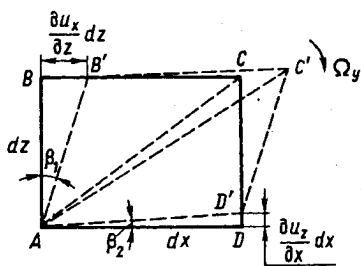


Рис. 2.7

величину  $\frac{\partial u_x}{\partial z} dz$ , тобто грань  $AB$  повернеться на кут  $\beta_1$  (рис. 2.7). Кут  $\beta_1$  через його малу величину можна прирівняти до його тангенса:

$$\beta_1 \approx \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dz} = \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

За аналогією при різних вертикальних швидкостях  $u_z$  у точках  $A$  і  $D$  ці точки перебуватимуть на різних рівнях. Кут повороту

$$\beta_2 = \frac{\partial u_z}{\partial x} \approx \operatorname{tg} \beta_2.$$

Повна кутова деформація грані паралелепіпеда у площині  $xz$  (відносно осі  $y$ ) внаслідок повороту граней  $AB$  і  $AD$

$$\beta_1 + \beta_2 = \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).$$

Умовно можна вважати, що на одну грань припадає половина цієї кутової деформації, тобто

$$\theta_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.8)$$

Індекс « $y$ » означає кутову деформацію відносно осі  $y$ . За аналогією відносно осі  $z$

$$\theta_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (2.9)$$

4. Унаслідок повороту граней  $AB$  і  $AD$  може змінити своє положення і діагональ  $AC$  (рис. 2.7), тобто частинка за одиницю часу повернеться на кут, що дорівнює кутовій швидкості обертання  $\Omega_y$ . Колову швидкість точки  $B$ , що обертається навколо осі  $z$  з кутовою швидкістю  $\Omega_y$ , визначають як

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} dz = \Omega_y dz. \quad (2.10)$$

З іншого боку, для точки  $D$  колова швидкість

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} dx = -\Omega_y dx. \quad (2.11)$$

Знак « $-$ » показує, що точка  $D$  обертається проти годинникової стрілки. Віднімаючи від рівняння (2.10) рівняння (2.11), дістанемо

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\Omega_y,$$

або

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (2.12)$$

За аналогією для осей  $x$  і  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} \Omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \Omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \Omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Ці вирази є проекціями кутових швидкостей обертання на відповідні координатні осі.

Отже, рух нескінченно малої частинки рідини складається з лінійного переміщення, лінійної і кутової деформації та *обертального руху* навкруги миттєвих осей обертання, які паралельні осям координат, що проходять через точку  $A$ . (Аналогічні вирази можна здобути і для інших осей.) Загальна кутова швидкість обертання

$$\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}. \quad (2.14)$$

Якщо обертання частинок відсутнє, то  $\Omega = 0$  і  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$ . Такий рух називають *безвихровим*. У цьому випадку

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (2.15)$$

Безвихровий рух має таку особливість. Уявімо деяку математичну функцію  $\varphi = f(x, y, z)$ , частинні похідні від якої по відповідних осях координат є компонентами швидкості:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2.16)$$

Продиференціюємо ці вирази:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$



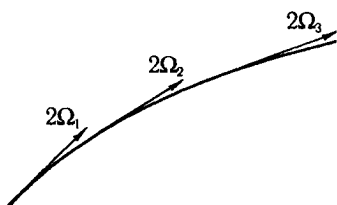


Рис. 2.8

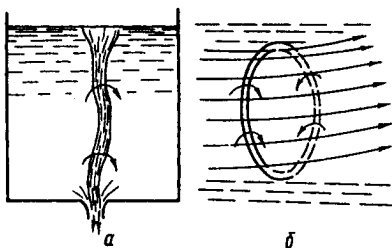


Рис. 2.9

Функцію  $\phi$  називають *потенціалом швидкості*. Якщо така функція існує, то виконується умова (2.15), тобто рух є безвихровим. Безвихровий рух називають також *потенціальним рухом*. Рух наближається до безвихрового при русі великих мас рідини на деякій відстані від стінок і дна русла.

При русі рідини поблизу твердої поверхні, при обтіканні перешкод, у трубах рух треба розглядати як вихровий. У цьому випадку  $\Omega \neq 0$ . Подвійне значення вектора кутової швидкості  $2\Omega$  називають *вихором*. Лінія, дотична до якої у кожній точці її збігається з напрямом вихора, називається *вихровою лінією* (рис. 2.8). Частинки рідини, що розташовані на вихровій лінії, обертаються навколо неї.

За аналогією з лінією течії рівняння вихрової лінії

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \quad (2.18)$$

Сукупність вихрових ліній, проведених через малий замкнений контур, називають *вихровою трубкою*, а сукупність частинок усередині її — *вихровим шнуром*, яке має кінці на границях рідини або може бути замкненим (рис. 2.9, а, б).

### 2.3. Рівняння нерозривності рідини

Умови руху рідини без утворення порожнин характеризуються рівнянням нерозривності, яке є законом збереження маси рідини.

Цей закон можна подати в диференціальній формі, для елементарної струминки і для потоку рідини.

**Рівняння нерозривності в диференціальній формі** (для точки в потоці). Виділимо в потоці при усталеному русі рідини нерухомий нескінченно малий контур у формі паралелепіпеда з ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 2.10). У центрі паралелепіпеда в точці  $A$  швидкість течії в напрямі  $x$  дорівнює  $u_x$ , а густина рідини  $\rho$ .

Швидкість у центрі лівої грані (точка  $B$ )  $u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ , а в центрі правої грані  $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$ . Аналогічно в центрі лівої грані густина  $\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$ , а в центрі правої  $\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2}$ . Тоді різниця мас, яка надходить через ліву грань і витікає через праву за одиницю часу,

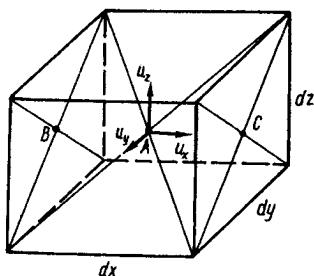


Рис. 2.10

$$\left( \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \left( u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) \times \frac{dx}{2} \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz = - \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz.$$

Аналогічно для напрямів  $y$  і  $z$  різниця мас

$$- \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz ;$$

$$- \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz.$$

Згідно із законом збереження мас сума цих приростів мас дорівнювати нулю. Тоді для стисливої рідини

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0, \quad (2.19)$$

а для нестисливої ( $\rho = \text{const}$ )

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.20)$$

Рівняння (2.19) і (2.20) називають *рівняннями нерозривності у диференціальній формі для усталеного руху рідини*.

■ **Приклад.** Перевірити, чи відповідають складові швидкості у заданій точці ( $u_x = -x$ ;  $u_y = 2y$ ;  $u_z = -z$ ) умові нерозривності руху нестисливої рідини.

Враховуючи задані умови, дістанемо

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 2; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -1.$$

Підставляючи ці значення в рівняння (2.20), одержимо

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = -1 + 2 - 1 = 0,$$

тобто умова нерозривності руху задовольняється і рух рідини із зазначеними складовими швидкостями є можливим.

Якщо б у вихідних даних рух характеризувався, наприклад, значеннями швидкостей

$$u_x = -x; \quad u_y = y; \quad u_z = -z,$$

то умова (2.20) не виконувалася б.

**Рівняння нерозривності руху для елементарної струминки** (рис. 2.11). Вважаємо, що рідина із струминки не витікає і не втікає до неї з боків. Якби ці умови не виконувались, то в будь-якій точці струминки швидкість була б напрямлена під кутом до лінії течії, що не відповідає визначенню лінії течії. Насправді ж, якщо із струминки деяка кількість рідини витікає в боки, то така сама кількість рідини має притікати до струминки з боків.

Розглянемо в струминці два перерізи  $1-1$  і  $2-2$  із швидкостями  $u_1$  і  $u_2$ . За час  $dt$  ці перерізи перемістяться відповідно на відстані  $dl_1$  і  $dl_2$  і займуть положення  $1'-1'$  і  $2'-2'$ .

Оскільки загальна маса рідини в струминці залишається незмінною, а також незмінною має бути маса між перерізами  $1'-1'$  і  $2-2$ , то звідси маємо, що маси між перерізами  $1-1$  і  $1'-1'$  і перерізами  $2-2$  і  $2'-2'$  мають дорівнювати одна одній:

$$\rho_1 dl_1 d\omega_1 = \rho_2 dl_2 d\omega_2,$$

де  $d\omega_1$  і  $d\omega_2$  — відповідно площі перерізів струминки  $1-1$  і  $2-2$ ;  $dl = u dt$ .

Тоді

$$\rho_1 u_1 d\omega_1 = \rho_2 u_2 d\omega_2. \quad (2.21)$$

Для нестисливої рідини ( $\rho = \text{const}$ )

$$u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2. \quad (2.22)$$

Вирази (2.21) і (2.22) є рівняннями нерозривності для елементарної струминки.

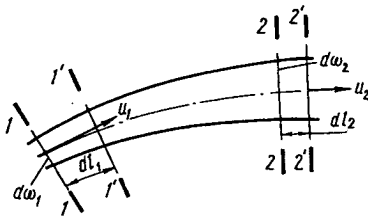


Рис. 2.11

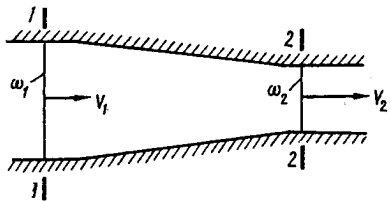


Рис. 2.12

Звідси маємо, що витрата вздовж елементарної струминки  $dQ = v d\omega$  залишається постійною при усталеному русі:

$$dQ_1 = dQ_2 = \text{const.}$$

**Рівняння нерозривності для потоку рідини.** Якщо між двома живими перерізами рідина не притікає і не витікає (рис. 2.12), то умови нерозривності є умовами постійної масової витрати:

$$M_1 = M_2$$

$$\rho_1 V_1 \omega_1 = \rho_2 V_2 \omega_2. \quad (2.23)$$

Для нестисливої рідини (при  $\rho = \text{const}$ )

$$V_1 \omega_1 = V_2 \omega_2. \quad (2.24)$$

Звідси маємо важливий висновок: в усталеному потоці нестисливої рідини середні швидкості руху обернено пропорційні площам відповідних живих перерізів:

$$V_1/V_2 = \omega_2/\omega_1. \quad (2.25)$$

При зменшенні площі живого перерізу середня швидкість зростає, а при збільшенні площі — зменшується.

Рівняння (2.24) і (2.23) є рівняннями нерозривності для потоку.

#### 2.4. Диференціальні рівняння руху рідини (рівняння Ейлера) та інтегрування їх

При складанні диференціальних рівнянь руху рідину розглядають як нев'язку (ідеальну). Це дає можливість не враховувати сили тертя і вважати, що масові сили і сили тиску, які зумовлюють рух, визначаються так само, як і у рідині, що перебуває у рівновазі.

Швидкість і тиск є безперервними функціями координат точки і часу, що дає можливість за допомогою математичного апарату одержувати необхідні рішення.

Виділимо у рідині, що рухається, нескінченно малу частинку у формі паралелепіпеда (рис. 2.13).

Розглянемо рівняння руху відносно осі  $x$ .

За аналогією з умовами рівноваги рідини на цю частинку діятимуть такі сили: сила тиску ліворуч  $p dydz$ ; сила тиску праворуч —  $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz$ ; масова сила  $\rho dx dydz$ . У цих виразах  $p$  — тиск у центрі лівої грані;  $X$  — проекція прискорення масової сили на вісь  $x$ .

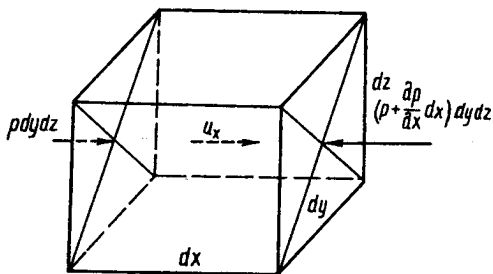


Рис. 2.13

Оскільки частинка рухається, то за принципом Д'Аламбера алгебраїчна сума проєкцій усіх діючих сил має дорівнювати проєкції сили інерції, що характеризує рух. Проєкцію цієї сили на вісь  $x$  визначають як  $\rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}$ , а сума проєкцій усіх сил на цю вісь

$$p dy dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz X = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}.$$

Після перетворень

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = \rho \frac{du_x}{dt},$$

або

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{du_x}{dt}.$$

Аналогічні рівняння і для осей  $y$  та  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Це диференціальні рівняння Ейлера, або диференціальні рівняння руху нев'язкої рідини. Вони відрізняються від відповідних рівнянь рівноваги тим, що в правій частині є проєкції прискорення руху частинки на відповідну вісь.

Із цих рівнянь неможливо визначити, вихровий рух чи безвихровий. Для цього треба розкрити праву частину рівнянь. Розглянемо це на прикладі для осі  $x$ .

Ураховуючи, що швидкість є функцією координат простору і часу, повний диференціал складової швидкості на вісь  $x$  матиме такий вигляд:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz + \frac{\partial u_x}{\partial t} dt.$$

Розділимо цей вираз на  $dt$  і, враховуючи, що  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ,  $\frac{dy}{dt} = u_y$ ,  $\frac{dz}{dt} = u_z$ , із рівнянь (2.26) для осі  $x$  дістанемо

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_x}{\partial t}. \quad (2.27)$$

Частинні похідні  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  і  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  можна виразити через компоненти вихора (кутової швидкості), враховуючи, що складові кутової швидкості  $\Omega$  на осі координат визначають як (див. п. 2.2)

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);$$

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Звідси

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + 2\Omega_y;$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2\Omega_z.$$

Тоді рівняння (2.27) матиме вигляд

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - 2\Omega_z \right) u_y + \\ + \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + 2\Omega_y \right) u_z, \end{aligned} \quad (2.28)$$

або

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_z \right) + \\ + 2(\Omega_y u_z - \Omega_z u_y). \end{aligned}$$

Розглянемо вираз у перших дужках:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_z &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u_x^2}{2} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Оскільки  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x$ , то  $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$ , а  $X = \frac{\partial \Pi}{\partial x}$  (див. п. 1.2), де  $\Pi$  — деяка потенціальна функція;  $\varphi$  — потенціал швидкості, тобто деяка математична функція, похідні від якої по осях дають компоненти швидкості (див. п. 2.2).

Підставимо ці дані в рівняння (2.28). Тоді

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) + 2(\Omega_y u_z - \Omega_z u_y),$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 2(\Omega_y u_z - \Omega_z u_y).$$

За аналогією запишемо для трьох осей

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 2(\Omega_y u_z - \Omega_z u_y); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 2(\Omega_z u_x - \Omega_x u_z); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= 2(\Omega_x u_y - \Omega_y u_x). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Це рівняння Ейлера в формі Громеки.

У такому вигляді ці рівняння дають змогу встановити наявність чи відсутність вихорів, а також показують розбіжності в особливостях руху рідини при безвихровому та вихровому русі.

Для інтегрування рівнянь Ейлера—Громеки помножимо перше рівняння на  $dx$ , друге на  $dy$  і третє на  $dz$ , поміняємо всі знаки на протилежні і складемо три рівняння. В цьому випадку в лівій частині маємо повний диференціал виразу в дужках

$$\begin{aligned} d \left( -\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) &= -2 [ (\Omega_y u_z - \Omega_z u_y) dx + \\ &+ (\Omega_z u_x - \Omega_x u_z) dy + (\Omega_x u_y - \Omega_y u_x) dz ]. \end{aligned}$$

Праву частину цього рівняння можна подати у вигляді визначника

$$d\left(-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \quad (2.30)$$

У загальному випадку це рівняння виражає закон змінення величини  $\left(-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$  в усьому об'ємі рідини, що рухається, тобто показує зв'язок між тиском, швидкістю, прискоренням масових сил і прискоренням руху.

Рівняння справедливе як для безвихрового усталеного і неусталеного руху при  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = \Omega = 0$ , так і для вихрового усталеного руху  $\left(\Omega \neq 0; \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\right)$ . У випадку вихрового неусталеного руху немає поняття потенціалу швидкості  $\varphi$  і рівняння (2.30) буде неправомірним. Загальний інтеграл цього рівняння найпростіше дістати, якщо права частина його дорівнює нулю. Тоді у визначений час

$$-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{const}. \quad (2.31)$$

Це інтеграл Лагранжа. В окремому випадку для усталеного руху  $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$  і

$$-\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.32)$$

Це інтеграл, або рівняння, Бернуллі.

Якщо з масових сил на рідину діє тільки сила тяжіння, то  $X = Y = 0$ ,  $Z = -g = \frac{\partial\Pi}{\partial z}$ . Тоді  $\partial\Pi = -g\,dz$ ,  $\Pi = -gz + C$ . З урахуванням цього рівняння Бернуллі набирає вигляду

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.33)$$

Помножимо всі члени рівняння на  $\rho$ :

$$\rho gz + \frac{u^2}{2}\rho + p = \text{const}. \quad (2.34)$$

Це рівняння Бернуллі у формі тисків (усі члени вимірюються в одиницях тиску). Поділивши всі члени рівняння (2.33) на  $g$ ,



дістанемо

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const.} \quad (2.35)$$

Це рівняння Бернуллі в формі напорів (всі члени вимірюються в метрах).

Всі ці рівняння справедливі, якщо права частина рівняння (2.30), тобто визначник, дорівнює нулю, що буває, коли нулю дорівнює будь-який рядок визначника або будь-які рядки, пропорційні одне одному.

Розглянемо окремо ці випадки.

1.  $u_x = u_y = u_z = 0$ . У цьому випадку руху немає. Рідина перебуває в стані спокою, і рівняння Бернуллі перетворюється в основне рівняння гідростатики (1.10):

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.}$$

2.  $dx = dy = dz = 0$ . Ці умови означають, що точка не пересувається, тобто для однієї точки сума величин, що входять у рівняння  $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}$ , завжди постійна.

Наприклад, вода витікає з резервуара (рис. 2.14). Якщо рух відсутній, то показання п'єзометра  $\frac{p}{\rho g}$ , а якщо відкрити вентиль і рух буде сталим, то п'єзометрична висота зменшиться до  $\frac{p_1}{\rho g}$  за рахунок того, що виникне величина  $\frac{u^2}{2g}$ :

$$z + \frac{p}{\rho g} = z + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

Звідси

$$u = \sqrt{2g \left( \frac{p}{\rho g} - \frac{p_1}{\rho g} \right)}.$$

Після цього можна обчислити витрату  $Q = V\omega$ , беручи  $u \approx V$ .

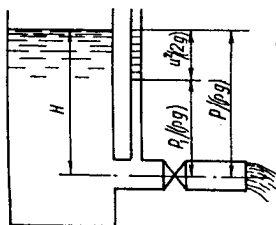


Рис. 2.14

★ Приклад. Визначити витрату води, що витікає з резервуара (рис. 2.14), якщо діаметр труби  $D = 200$  мм, а після відкриття вентиля п'єзометрична висота зменшилася на 12 см.

$$\text{Швидкість } u = V = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,12} = 1,53 \text{ м/с.}$$

$$\text{Витрата } Q = V \cdot \omega = 1,53 \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 0,048 \text{ м}^3/\text{с.}$$

3.  $\Omega_x = \Omega_y = \Omega_z = 0$ . Це умови безвихрового потенціального руху. В цьому ви-

падку рівняння Бернуллі можна застосовувати для всього потоку і стала  $C$  буде однаковою для всіх точок потоку.

$$4. \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \text{ Це рівняння лінії течії (2.1).}$$

Отже, рівняння Бернуллі справедливе для вихрового руху, але тільки окремо для кожної лінії течії; у рівнянні (2.35) для різних ліній течії будуть різні сталі:  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

$$5. \frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}. \text{ Це рівняння вихрової лінії (2.18).}$$

Рівняння (2.35) справедливе також і для кожної вихрової лінії з різними сталими:  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

$$6. \frac{\Omega_x}{u_x} = \frac{\Omega_y}{u_y} = \frac{\Omega_z}{u_z}. \text{ Позначимо ці відношення через } \eta.$$

Тоді

$$\Omega_x = \eta u_x;$$

$$\Omega_y = \eta u_y;$$

$$\Omega_z = \eta u_z.$$

Підставимо їх у рівняння вихрової лінії (2.18).

Запишемо  $\frac{dx}{\eta u_x} = \frac{dy}{\eta u_y} = \frac{dz}{\eta u_z}$ , або  $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$ . Це рівняння лінії течії і означає, що в цьому випадку лінії течії збігаються з вихровими лініями. Отже, частинки рухаються вздовж лінії течії і обертаються навколо неї. Такий рух називають *гвинтовим*.

Порівнюючи умову б) з рівняннями (2.29), визначаємо, що права частина цих рівнянь у цьому випадку дорівнює нулю, і незалежно від координат точок усталеного гвинтового потоку

$$-gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.}$$

Ще раз зазначимо, що рівняння Бернуллі у вигляді (2.35) застосовують тоді, коли визначник дорівнює нулю.

На практиці частіше трапляються випадки застосування рівняння Бернуллі для потенціального руху, лінії течії вихрового руху, а також тоді, коли рідина перебуває в стані рівноваги.

## 2.5. Плоский потенціальний рух рідини

У п. 2.2 було доведено, що потенціальний рух є безвихровим. Однак у природі немає ідеальних безвихрових течій, тому що біля стінок русла завжди утворюються вихори. Водночас

при відносно великих поперечних розмірах потоку на значній відстані від стінок вихори будуть незначними і такий потік можна вважати потенціальним. Якщо характеристики течії мають однакові значення в паралельних площинах, то такий рух називають *плоским*.

Для плоского руху рівняння нерозривності (2.20) має вигляд

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (2.36)$$

При потенціальному (безвихровому) русі швидкість має потенціал і  $u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ . Підставляючи ці значення в рівняння (2.36), дістанемо рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.37)$$

Це рівняння визначає потенціальний рух рідини. Його рішення дає сукупність ліній рівних потенціалів швидкості:

$$\varphi(x, y) = C, \quad (2.38)$$

де  $C$  має постійне значення для кожної окремої лінії рівного потенціалу швидкості, для якої

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

або

$$u_x dx + u_y dy = 0. \quad (2.39)$$

Це — диференціальне рівняння ліній рівних потенціалів швидкостей.

Розглянемо далі потік рідини, який характеризується лініями течії, наведеними на рис. 2.15. Вважаємо, що витрата між двома сусідніми лініями течії дорівнює  $\psi_k - \psi_l$ . Функцію  $\psi$  називають *функцією течії*, що має постійне значення для кожної лінії течії і змінюється при переході від однієї лінії течії до іншої. Тоді для кожної лінії течії

$$dQ = d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0. \quad (2.40)$$

Це рівняння відображає властивості лінії течії, рівняння якої (2.1) можна записати у вигляді

$$u_x dy - u_y dx = 0. \quad (2.41)$$

Порівнюючи рівняння (2.40) і (2.41), маємо

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.42)$$

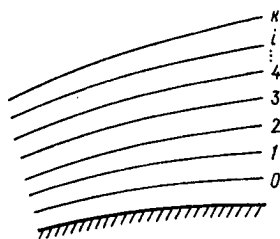


Рис. 2.15

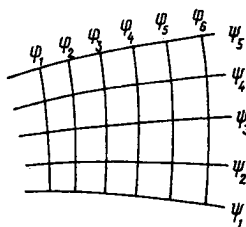


Рис. 2.16

а враховуючи вирази (2.16), дістанемо

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.43)$$

що свідчить про те, що функції течії й функції рівних потенціалів швидкостей взаємно перпендикулярні. Сукупність цих ліній утворює гідродинамічну сітку (рис. 2.16), яка визначає кінематичну картину руху рідини. В гідродинамічній сітці функції  $\phi$  і  $\psi$  є взаємними. Якщо ці функції поміняти місцями, вигляд сітки не зміниться. Функція течії, як і потенціал швидкості, відповідає рівнянню Лапласа. Дійсно, розглядаючи вирази для  $u_x$  і  $u_y$  (2.42) сумісно з умовами безвихрового руху  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}$  (2.15), маємо

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.44)$$

Розглянемо деякі випадки плоского потенціального руху рідини.

**Плоскопаралельний потік** (рис. 2.17) визначається функцією течії

$$\psi = ax + by, \quad (2.45)$$

де  $a$  і  $b$  — постійні коефіцієнти.

У цьому випадку  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0$  і  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$ . Згідно з формулою (2.44) цей рух є потенціальним.

Складові швидкості

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = b; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -a,$$

а загальна швидкість

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{const}. \quad (2.46)$$

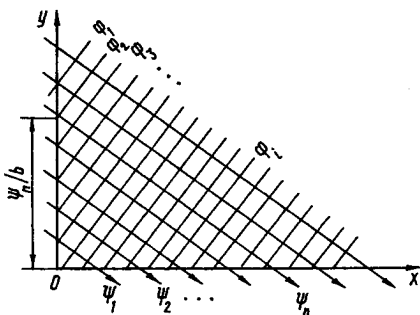


Рис. 2.17

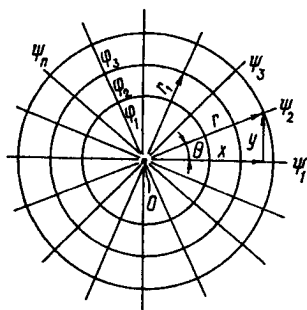


Рис. 2.18

Із рівняння Бернуллі (2.34) маємо, що тиск для всіх точок потоку теж буде постійним (при  $z = \text{const}$ ). Рівняння кожної лінії течії

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{\psi}{b} = \frac{u_y}{u_x}x + \frac{\psi}{u_x},$$

де  $\psi$  має окреме значення для кожної лінії течії. Лінії рівних потенціалів швидкостей треба провести нормально до ліній течії.

**Джерела і стоки.** Джерелом називають точку, з якої рідина витікає симетрично по радіусах в усі боки (рис. 2.18). Стік — це точка, яка вбирає рідину, що симетрично притікає до неї по радіусах. На практиці в дійсності замість точки маємо отвір обмежених розмірів. Як приклад стоків можна навести водозабірні споруди на водосховищах, до яких з усіх боків притікає вода.

Стік і джерело характеризуються однаковими гідродинамічними сітками, але з різними напрямками ліній течії.

Функція течії у цих випадках

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x}, \quad (2.47)$$

де  $Q$  — витрата стоку або джерела;  $\theta$  — кут радіуса-вектора в полярних координатах.

Визначимо відповідність виразу (2.47) рівнянню Лапласа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = u_x; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\frac{Q}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -u_y; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{Q}{\pi} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2}; \\ & & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

З цього визначаємо, що такий рух є дійсно потенціальним.

Лінії течії напрямлені по радіусах до центра  $O$  для стоку або від центра для джерела. Лінії рівних потенціалів швидкостей мають вигляд концентричних кіл із тим самим центром.

Радіальна швидкість у будь-якій точці

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2\pi r}. \quad (2.48)$$

Якщо тиск у точці на відстані  $r$  від центра дорівнює  $p_1$ , то рівняння Бернуллі для цієї точки і для будь-якої іншої

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{Q^2}{(2\pi r)^2 2g} = \frac{p_1}{\rho g} + \frac{Q^2}{(2\pi r_1)^2 2g}$$

і звідси тиск у будь-якій точці

$$p = p_1 - \frac{\rho Q^2}{8\pi^2 r_1^2} \left( \frac{r_1^2}{r^2} - 1 \right). \quad (2.49)$$

Треба зазначити, що формули (2.48) і (2.49) не можна застосовувати на ділянці поблизу центра  $O$ , тому що швидкість не може бути нескінченно великою.

■ **Приклад.** Вода з джерела в центрі споруди розтікається між двома горизонтальними плоскими круглими пластинами по радіусах крізь щілину товщиною  $\delta = 30$  мм (рис. 2.19). Радіус пластин  $r = 1$  м, витрата з джерела  $Q = 60$  л/с. Визначити тиск і швидкість у потоці на відстані  $0,5r$  від центра.

Швидкість у вихідному перерізі між пластинами визначають так:

$$V_{\text{вих}} = \frac{Q}{\omega_{\text{вих}}} = \frac{Q}{2\pi r \cdot \delta} = \frac{0,06}{2 \cdot 3,14 \cdot 1 \cdot 0,03} = 0,318 \text{ м/с.}$$

Швидкість на відстані  $0,5r$  від центра

$$V_{0,5r} = V_{\text{вих}} \frac{\omega_{\text{вих}}}{\omega_{0,5r}} = V_{\text{вих}} \frac{2\pi \cdot r \cdot \delta}{2\pi \cdot 0,5r \cdot \delta} = 2 \cdot 0,318 = 0,636 \text{ м/с.}$$

Тиск на відстані  $0,5r$  від центра дістаємо за формулою (2.49)

$$\begin{aligned} p_{0,5r} &= p_a - \frac{\rho \cdot Q^2}{8\pi^2 \cdot r^2} \left[ \frac{r^2}{(0,5r)^2} - 1 \right] = \\ &= 101324 - \frac{1000 \cdot 0,06^2}{8 \cdot 3,14^2 \cdot 1^2} \left( \frac{1^2}{0,5^2} - 1 \right) = 101323,9 \text{ Па.} \end{aligned}$$

**Циркуляційний рух.** Такий рух є взаємним відносно стоку (джерела). У цьому випадку лінії течії мають вигляд концент-

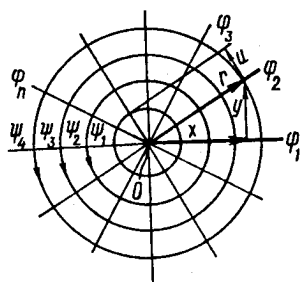
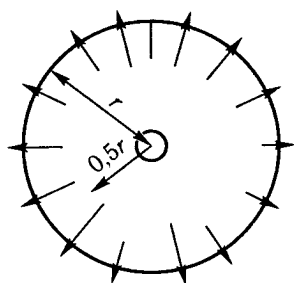


Рис. 2.20

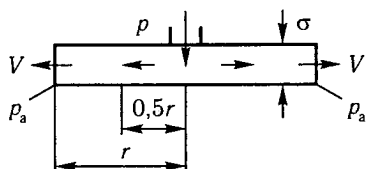


Рис. 2.19

ричних кіл, а функції рівних потенціалів швидкостей напрямлені по радіусах (рис. 2.20). Їх можна визначити так:

$$\varphi = C \cdot \operatorname{arctg} y/x, \quad (2.50)$$

де  $C$  — стала величина.

По аналогії з формулою (2.47) можна визначити

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

що задовольняє рівняння Лапласа, і циркуляційний рух буде потенціальним. Тоді

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -C \frac{y}{x^2 + y^2} = -C \frac{y}{r^2};$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = C \frac{x}{x^2 + y^2} = C \frac{x}{r^2}.$$

Лінійна швидкість у будь-якій точці потоку

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = C/r^2 \sqrt{y^2 + x^2} = C/r.$$

Звідси

$$u \cdot r = C. \quad (2.51)$$

Такий рух має назву — обертання за законом площин, тобто площа прямокутника, що утворюється радіусом  $r$  та перпендикулярною до нього швидкістю  $u$ , залишається сталою. Проте навколо самого центра цей закон не діє, бо при  $r \rightarrow 0$  швидкість не може бути нескінченно великою.

Підставляючи значення швидкості в рівняння Бернуллі (2.35), при сталому  $z$  дістанемо

$$\frac{p}{\rho g} + \frac{C^2}{2gr^2} = \text{const}.$$

Звідси випливає, що тиск  $p$  збільшується із збільшенням відстані від центра  $r$ .

Циркуляційний рух існує в апаратах для прояснення води — гідроциклонах. Гідроциклон є циліндром (рис. 2.21), в який вода надходить по дотичній до стінки через патрубок 1. Завислі частинки відцентровою силою притискуються до стінок та внаслідок тертя втрачають свою швидкість і випадають в осад, сповзаючи по стінках до випуску 2. Прояснена вода відводиться через патрубок 3.

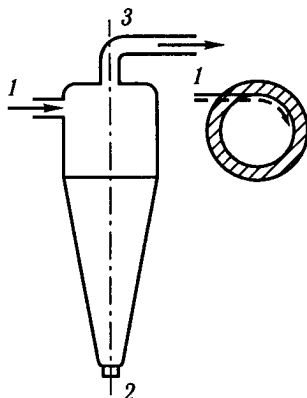


Рис. 2.21

**Складання потенціальних потоків.** Сума частинних рішень лінійних диференціальних рівнянь Лапласа є також рішенням цих рівнянь. Виходячи з цього можна складати прості потенціальні рухи, одержуючи в результаті більш складні види потенціальних рухів. Розглянемо, наприклад, наложення плоскопаралельного потоку на джерело (рис. 2.22, а).

У довільній точці одержаного складного руху є два вектори швидкості: радіального  $u_1$  і плоскопаралельного  $u_2$  потоків (рис. 2.22, б). Через однаковість масштабів потоків складові шляху  $\Delta l$ , що пройшла частинка вздовж напрямку швидкостей, мають бути пропорційними їхнім величинам:

$$\frac{u_1}{\Delta l_1} = \frac{u_2}{\Delta l_2}.$$

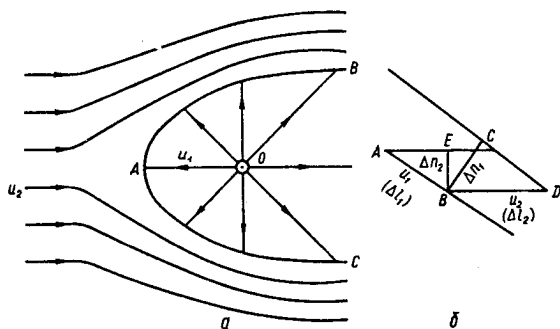


Рис. 2.22



Якщо густина ліній течії джерела велика, то їхні ділянки  $AB$  і  $CD$  можна розглядати як паралельні, і тоді з подібності трикутників  $ABE$  і  $BCD$  матимемо

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta n_2} = \frac{\Delta l_2}{\Delta n_1}.$$

Звідси

$$u_1 \Delta n_1 = u_2 \Delta n_2,$$

де  $\Delta n_1$  і  $\Delta n_2$  — відстані між лініями течій джерела і плоскопаралельного потоку.

Зважаючи на те що розмір потоку, перпендикулярного до площини креслення, дорівнює одиниці,

$$\Delta q_1 = \Delta q_2. \quad (2.52)$$

З цього рівняння випливає, що при складанні потенціальних потоків лінії течії рухів, що складаються, треба обирати так, щоб витрати між сусідніми лініями течії для обох випадків рухів були однаковими. Сумарна течія характеризується діагоналлю чарунки гідродинамічної сітки, що утворюється лініями течії обох потоків.

Ураховуючи рівняння (2.52) і те, що швидкість плоскопаралельного потоку дорівнює  $u_2$ , а витрата джерела  $Q$ , дістанемо

$$u_2 \Delta n_2 = \frac{Q}{k}, \text{ або } \Delta n_2 = \frac{Q}{ku_2},$$

де  $k$  — кількість променів (ліній течії), які проведені з джерела.

Швидкість потоку, що витікає з джерела,  $u_1 = \frac{Q}{2\pi r}$ , де  $r$  — відстань від центра  $O$ .

Знайдемо на горизонтальній осі точку  $A$  (рис. 2.22,  $a$ ), в якій швидкості плоскопаралельного потоку і джерела однакові за значенням і обернені за напрямом, тобто результуюча швидкість в ній дорівнює нулю. Цю точку  $A$  називають *критичною*, і вона розміщена від центра на відстані

$$OA = \frac{Q}{2\pi u_2}.$$

У точці  $A$  плоскопаралельний потік розділяється і обтікає джерело. У середині контура  $BAC$  буде течія з джерела, а поза ним — течія, що обтікає джерело.

Іншим прикладом на складання потенціальних потоків є накладання стоку на плоскопаралельний потік. На рис. 2.23 наведено схему щільного відсмоктування пари, що виділяється під час експлуатації промислових ванн. Пара піднімається вер-

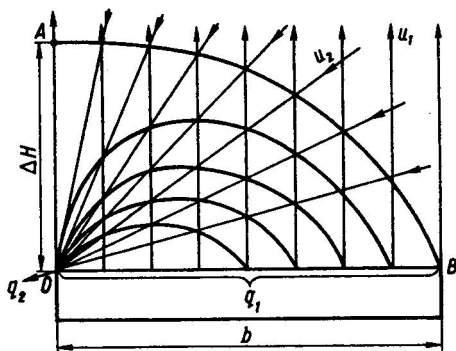


Рис. 2.23

тикально вгору як плоскопаралельний потік із швидкістю  $u_1 = q_1/b$ . Відсмоктування відбувається по радіусах до щільни  $O$  із швидкістю  $u_2 = \frac{2q_2}{\pi r}$ , де  $r$  — відстань за радіусом від точки  $O$ .

Всі пари мають бути вилучені за допомогою відсмоктування, тобто  $q_1 = q_2$ , і відповідно до формули (2.52) витрати між сусідніми лініями течії обох потоків також мають бути однаковими, тобто  $\Delta q_1 = \Delta q_2$ . Для цього обидва потоки слід розділити на однакову кількість частин (на рис. 2.23 на 8). Сумарна течія характеризується діагоналлю чарунки гідродинамічної сітки.

Спектр всмоктування характеризується крайньою лінією течії  $AB$ , а його висоту  $\Delta H$  приблизно можна визначити з умови, що в точці  $A$  швидкості паралельного потоку  $u_1$  і стоку  $u_2$  дорівнюють одна одній, тобто

$$\frac{q_1}{b} = \frac{2q_2}{\pi \cdot OA} \quad \text{і} \quad \Delta H = OA = \frac{2q_2 b}{\pi q_1} = \frac{2}{\pi} b.$$

## 2.6. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки нев'язкої рідини

Елементарна струминка характеризується нескінченно малими розмірами свого перерізу. Тому можна вважати, що в усіх точках перерізу струминки швидкості  $u$ , тиски  $p$  і відмітки  $z$  залишаються сталими. У той самий час у різних перерізах струминки  $u$ ,  $p$ ,  $z$  будуть різними (див. рис. 2.24). Тоді рівняння Бернуллі буде справедливе не тільки для лінії течії, а й для елементарної струминки, яка вибрана довкола цієї лінії течії.

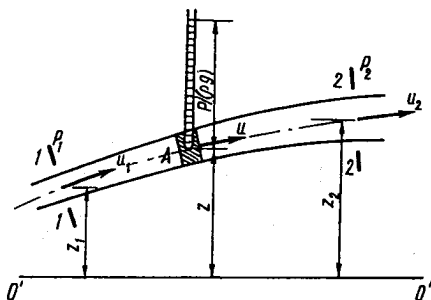


Рис. 2.24

Вибираючи вздовж струминки довільно два перерізи 1-1 і 2-2, можна записати

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (2.53)$$

Це — рівняння Бернуллі для елементарної струминки.

**Енергетичний зміст рівняння Бернуллі.** Для того щоб обчислити енергію нескінченно малої частинки з масою  $dm$  з центром у точці  $A$ , яка розміщена в межах елементарної струминки, розглянемо рис. 2.24.

Потенціальну енергію  $dE_{\text{п}}$  визначимо як добуток сили ваги  $gdm$ , що діє на цю частинку, на висоту розміщення частинки над площиною порівняння. Треба зазначити, що у цю висоту має входити не тільки геометрична висота  $z$ , а й п'езометрична  $\frac{p}{\rho g}$ , бо рідина піднімається під дією тиску, тобто

$$dE_{\text{п}} = gdm \left( z + \frac{p}{\rho g} \right).$$

Кінетична енергія для нескінченно малої частинки

$$dE_{\text{к}} = \frac{dm u^2}{2}.$$

Загальна механічна енергія складається з суми

$$dE = dE_{\text{п}} + dE_{\text{к}} = gdm \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{dm u^2}{2}. \quad (2.54)$$

Якщо розділити цю повну енергію на одиницю сили ваги ( $gdm$ ), то здобудемо питому енергію

$$e = \frac{dE}{gdm} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}. \quad (2.55)$$

Цей вираз для всіх перерізів струминки є величиною сталою. Отже, рівняння Бернуллі — це закон збереження енергії для елементарної струминки. Кожний параметр, який входить до цього рівняння, має свій енергетичний зміст:  $z + \frac{p}{\rho g}$  — питома потенціальна енергія;  $z$  — питома потенціальна енергія положення;  $\frac{p}{\rho g}$  — питома потенціальна енергія тиску;  $\frac{u^2}{2g}$  — питома кінетична енергія.

**В и с н о в о к:** для всіх перерізів елементарної струминки сума питомої потенціальної енергії і питомої кінетичної енергії є величиною сталою.

**Геометричний зміст рівняння Бернуллі.** Із гідростатики відомо, що вираз  $z + \frac{p}{\rho g} = H$  є п'єзометричним напором, який складається з лінійних величин — відмітки точки  $z$  і п'єзометричної висоти  $\frac{p}{\rho g}$ . Величина  $\frac{u^2}{2g}$  також має лінійну розмірність і її називають *швидкісним напором*.

Тоді

$$H_0 = H + \frac{u^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}. \quad (2.56)$$

Це повний, або гідродинамічний, напір рідини.

Отже, рівняння Бернуллі є також рівнянням напору.

Рівняння Бернуллі є найважливішим рівнянням гідравліки. Воно встановлює залежність між положенням точки, тиском і швидкістю в будь-якому перерізі елементарної струминки й аналогічними характеристиками в іншому перерізі цієї самої струминки.

При сталих значеннях координат  $z$  у різних перерізах із рівняння Бернуллі випливає дуже важлива властивість рідини, яка рухається: із зростанням швидкості тиск зменшується, а із зменшенням швидкості тиск збільшується.

## 2.7. Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є — Стокса) та інтегрування їх

Рівняння Нав'є — Стокса можна дістати додаванням до диференціальних рівнянь руху нев'язкої рідини (2.27) складових сил в'язкості, віднесених до одиниці маси  $X_B, Y_B, Z_B$ . Ці складові

за спрощеним методом Жуковського можна подати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} X_{\text{в}} &= v \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) = v \nabla^2 u_x ; \\ Y_{\text{в}} &= v \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) = v \nabla^2 u_y ; \\ Z_{\text{в}} &= v \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) = v \nabla^2 u_z , \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

де  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

З урахуванням цього диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є—Стокса) можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \\ &+ u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - v \nabla^2 u_x ; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \\ &+ u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} - v \nabla^2 u_y ; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + \\ &+ u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - v \nabla^2 u_z . \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

Загального рішення рівнянь Нав'є—Стокса поки що немає. Проте існують деякі частинні рішення для окремих випадків, для яких можуть бути задані граничні і початкові умови. Початковими умовами задається розподіл швидкостей в області руху у заданий момент часу. Граничними умовами можуть бути задані тиск і швидкість на границях потоку. Наприклад, біля стінки швидкість часто дорівнює нулю, а тиск на вільній поверхні потоку — атмосферному.

Диференціальні рівняння усталеного руху в'язкої рідини у формі Громеки за аналогією з рівнянням (2.29) можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v \nabla^2 u_x &= 2(\Omega_y u_z - \Omega_z u_y); \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v \nabla^2 u_y &= 2(\Omega_z u_x - \Omega_x u_z); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) + v \nabla^2 u_z &= 2(\Omega_x u_y - \Omega_y u_x). \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Помножимо ці рівняння відповідно на проекції елементарного переміщення  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  і складемо їх. За аналогією з рівнянням (2.30)

$$\begin{aligned} d \left( -\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) - v (\nabla^2 u_x dx + \nabla^2 u_y dy + \nabla^2 u_z dz) &= \\ &= -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Позначимо

$$dA_B = -v (\nabla^2 u_x dx + \nabla^2 u_y dy + \nabla^2 u_z dz). \quad (2.61)$$

Величина  $dA_B$  — це робота сил в'язкості на елементарному переміщенні вздовж лінії течії, віднесеної до одиниці маси рідини.

Оскільки для лінії течії визначник у рівнянні (2.58) дорівнює нулю, то

$$d \left( -\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + A_B \right) = 0. \quad (2.62)$$

Якщо під час руху рідини з усіх масових сил діє тільки сила ваги, то після інтегрування, за аналогією з рівнянням (2.35), можна записати рівняння Бернуллі для струминки в'язкої рідини:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} + \frac{A_B}{g} = \text{const}. \quad (2.63)$$

## 2.8. Плавномінний рух

При русі рідини лінії течії можуть бути прямолінійними або криволінійними, паралельними або непаралельними між собою. Ці обставини впливають на розподіл тиску в живих перерізах і вносять деякі обмеження для застосування рівняння Бернуллі.

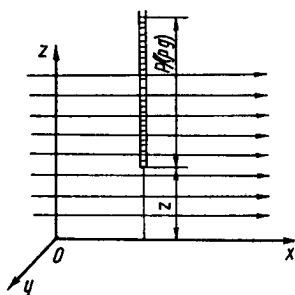


Рис. 2.25

У зв'язку з цим у гідравліці вводять поняття плавномірного руху. Це такий рух, при якому кут розходження між сусідніми лініями течії невеликий і кривина їх незначна.

Для такого руху в межах живих перерізів потоку прискорення і відповідні їм сили інерції такі незначні, що ними можна нехтувати.

Розглянемо такий потік з лініями течії, напрямленими паралельно одній із координатних осей, наприклад осі  $x$  (рис. 2.25).

У цьому випадку рух по осях  $y$  і  $z$  відсутній і прискорення вздовж цих осей дорівнює 0, тобто

$$\frac{du_y}{dt} = 0; \quad \frac{du_z}{dt} = 0.$$

З урахуванням цього рівняння Ейлера набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt}; \\ -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= 0; \\ -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

Друге і третє з цих рівнянь є диференціальними рівняннями рівноваги рідини для осей  $y$  і  $z$ . Розв'язавши ці рівняння, можна зробити висновок, що для цих осей, тобто для площини  $yOz$ , розподіл тиску відповідає рівнянню (1.17). Проте в цьому випадку ця площина збігається з живим перерізом потоку, і тому при плавномірному русі тиски в живих перерізах розподіляються за основним законом гідростатики. Для кожного перерізу

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.} \quad (2.65)$$

Для різних перерізів ця сума буде різною, тому що перше рівняння системи (2.64) не відповідає такому рівнянню для умов рівноваги рідини (1.4), які характеризують розподіл тиску в усьому об'ємі рідини.

На рис. 2.26, *a, б* зображено епюри тиску при безнапірному і напірному плавномірному русі. Якщо рух є неплавномірним, то в площині живого перерізу, крім прискорення сил тяжіння, виникають прискорення відцентрової сили (при значному ви-

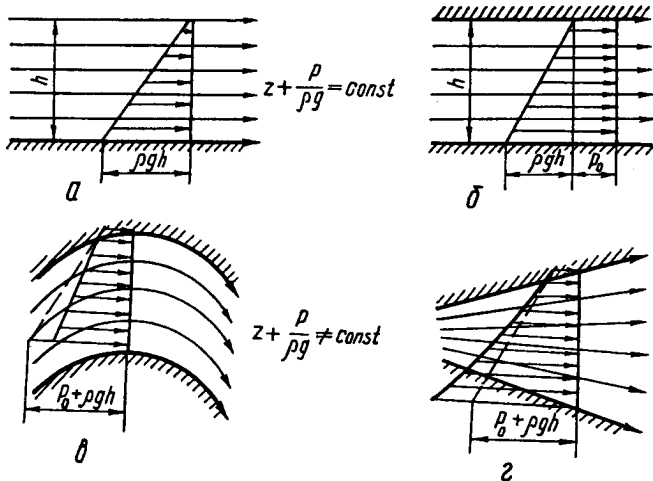


Рис. 2.26

кривленні лінії течії) або поперечної складової сили інерції (при значних кутах між лініями течії, якщо рух є прискореним або уповільненим).

У цих випадках умова (2.65) не здійснюється (рис. 2.26, в, г) і тому  $z + \frac{p}{\rho g} \neq \text{const.}$

Для порівняння на цих рисунках штриховими лініями показано розподіл тиску при плавномітному русі.

## 2.9. Рівняння Бернуллі для потоку і його енергетичний зміст

**Енергія потоку в живому перерізі.** Раніше було встановлено, що рівняння Бернуллі для елементарної струминки характеризує енергію в перерізі струминки. Очевидно, що енергія потоку (рис. 2.27) у живому перерізі  $E$  буде складатися з суми енергій усіх елементарних струминок:

$$E = \int_{\omega} \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) g dm + \int_{\omega} \frac{u^2 dm}{2}.$$

Маса, яка пройшла крізь переріз струминки  $dm$  за одиницю часу,

$$dm = \rho dQ = \rho u d\omega.$$



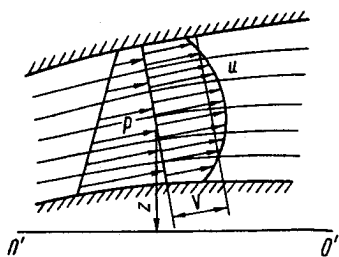


Рис. 2.27

Тоді

$$E = \int_{\omega} \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) \rho g u d\omega + \int_{\omega} \rho \frac{u^3 d\omega}{2}. \quad (2.66)$$

Для плавномірного руху  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$ . Крім того, згідно з формулою (2.3)  $\int u d\omega = Q = V\omega$ .

Тому перший інтеграл у рівнянні обчислити легко.

Другий інтеграл обчислити неможливо, тому що закон розподілу швидкостей по живому перерізу, як правило, невідомий. Проте цей інтеграл є кінетичною енергією, а її можна записати через середню швидкість. Тоді

$$E = V\omega\rho g \left( z + \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{\rho}{2} \alpha V^3 \omega, \quad (2.67)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт кінетичної енергії (коефіцієнт Кориоліса) — відношення дійсної кінетичної енергії до кінетичної енергії, обчисленої за середньою швидкістю;  $\alpha$  показує нерівномірність розподілу швидкостей по перерізу,

$$\alpha = \frac{\frac{\rho}{2} \int u^3 d\omega}{\frac{\rho}{2} V^3 \omega} = \frac{\int u^3 d\omega}{V^3 \omega}. \quad (2.68)$$

Уявимо місцеву швидкість  $u$  у вигляді  $u = V + \Delta V$ , де  $\Delta V$  — додатна або від'ємна різниця між місцевою і середньою швидкостями.

Тоді

$$\alpha = \frac{\int (V + \Delta V)^3 d\omega}{V^3 \omega} = \frac{V^3 \omega + 3V^2 \int (\Delta V) d\omega + 3V \int (\Delta V)^2 d\omega + \int (\Delta V)^3 d\omega}{V^3 \omega}.$$

Визначимо

$$\int_{\omega} (\Delta V) d\omega = \int_{\omega} (u - V) d\omega = \int_{\omega} u d\omega - V\omega = Q - Q = 0.$$

Четвертим параметром у чисельнику можна нехтувати, тому що величина  $(\Delta V)^3$  відносно мала і для різних струминок має різні знаки.

У результаті

$$\alpha = \frac{V^3 \omega + 3V \int (\Delta V)^2 d\omega}{V^3 \omega} = 1 + \frac{3 \int (\Delta V)^2 d\omega}{V^2 \omega} = 1 + 3\eta, \quad (2.69)$$

де

$$\eta = \frac{\int (\Delta V)^2 d\omega}{V^2 \omega}. \quad (2.70)$$

З рівняння (2.69) випливає, що значення  $\alpha$  завжди більше 1 при нерівномірному розподілі швидкостей по перерізу.

У трубопроводах і каналах  $\alpha \approx 1,05 \dots 1,1$ . Водночас у деяких випадках коефіцієнт  $\alpha$  може бути і значно більшим за 1. Його визначають за дослідними даними.

**Рівняння Бернуллі для потоку нев'язкої рідини.** За аналогією з енергетичною інтерпретацією рівняння Бернуллі для елементарної струминки поділимо рівняння (2.67) на силу тяжіння і дістанемо рівняння питомої енергії

$$e = \frac{E}{\rho g Q} = \frac{E}{\rho g V \omega} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}. \quad (2.71)$$

За законом збереження енергії питома енергія потоку буде постійною для різних живих перерізів, тому можна записати рівняння Бернуллі для потоку нев'язкої рідини

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} = \text{const} \quad (2.72)$$

або для двох живих перерізів

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g}. \quad (2.73)$$

Енергетичний зміст усіх членів, які входять до рівняння Бернуллі:  $z$  — питома потенціальна енергія положення;  $\frac{p}{\rho g}$  — питома потенціальна енергія тиску;  $\frac{\alpha V^2}{2g}$  — питома кінетична енергія.

Рівняння Бернуллі можна використовувати для всього усталеного потоку рідини не тільки при безвихровому русі, а й для живих перерізів  $l-l \dots b-b$  вихрового руху, якщо в цих перерізах рух є плавномінімним.

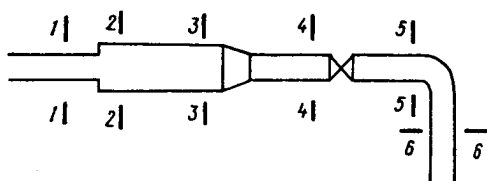


Рис. 2.28

Водночас на ділянках між цими перерізами рух рідини може і не бути плавнотзмінним (рис. 2.28). У вибраних перерізах значення  $z$  і  $\frac{p}{\rho g}$  беруть для однієї будь-якої точки, тому що для всіх точок живого перерізу вираз  $z + \frac{p}{\rho g}$  є величиною сталою.

## 2.10. Питома енергія перерізу і критична глибина

При аналізі умов нерівномірного руху у відкритих руслах застосовують поняття питомої енергії перерізу  $e_*$  і критичної глибини  $h_k$ , яка відповідає мінімальному значенню  $e_*$ . Питому енергію перерізу визначають відносно площини порівняння  $O'-O'$  (рис. 2.29, а), яка проведена через найнижчу точку перерізу,

$$e_* = h + \frac{\alpha V^2}{2g},$$

або, враховуючи, що  $V = Q/\omega$ ,

$$e_* = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}. \quad (2.74)$$

Питома енергія перерізу наочно характеризує енергетичні особливості потоку. При сталій витраті  $Q$ , зміні глибини не-

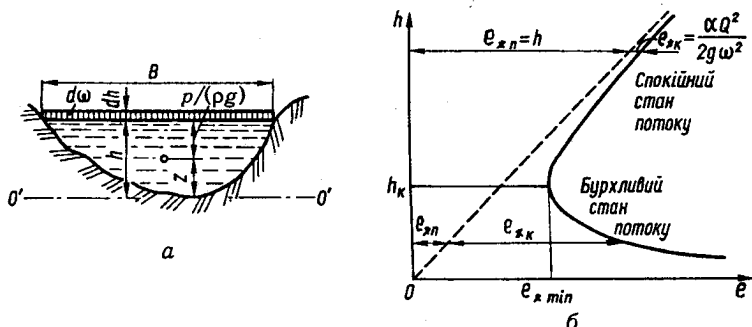


Рис. 2.29

рівномірного руху  $h$  і площі перерізу  $\omega$  змінюється і питома енергія перерізу, яка складається з питомої потенціальної енергії

$$e_{*п} = h \text{ та питомої кінетичної енергії } e_{*к} = \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}.$$

Залежно від співвідношення глибини нерівномірного руху  $h$  і критичної глибини  $h_k$  потоки мають різні енергетичні особливості. Аналізуючи залежність  $e_* = f(h)$  (рис. 2.29, б), можна встановити, що при  $h < h_k$  питома енергія перерізу  $e_*$  збільшується із зменшенням глибини  $h$ , тобто  $\frac{de_*}{dh} < 0$ . Якщо  $h > h_k$ , то збільшення питомої енергії перерізу відбувається із збільшенням глибини  $h$ , тобто  $\frac{de_*}{dh} > 0$ . Візуальне спостереження дає можливість виявити і зовнішню якісну різницю потоків у цих випадках. При  $h > h_k$  потік протікає спокійно і такий його стан називають *спокійним станом потоку*. Якщо ж  $h < h_k$ , то стан потоку називають *бурхливим*. При глибині, що дорівнює критичній ( $h = h_k$ ), потік перебуває у критичному стані.

Отже, встановлення критичної глибини  $h_k$  є важливою обставиною при дослідженні особливостей нерівномірного руху у відкритих руслах та його розрахунках.

Критичну глибину можна визначити на основі дослідження функції питомої енергії перерізу  $e_*$  на мінімум.

Візьмемо похідну

$$\frac{de_*}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g\omega^3} \frac{d\omega}{dh}. \quad (2.75)$$

Приріст площі живого перерізу запишемо як  $d\omega = Bdh$ , де  $B$  — ширина живого перерізу зверху (рис. 2.29, а). Тоді

$$\frac{de_*}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}. \quad (2.76)$$

При глибині  $h = h_k$  похідна  $\frac{dE_*}{dh} = 0$  і

$$\frac{\omega_k^3}{B_k} = \frac{\alpha Q^2}{g}, \quad (2.77)$$

де  $\omega_k$  і  $B_k$  — площа живого перерізу і ширина його по верху при критичній глибині.

■ **Приклад.** Визначити критичну глибину в руслі трапецеїдального перерізу (рис. 2.30) з шириною по дну  $b = 1$  м; коефіцієнт закладання укосів  $m = 1$ , витрата  $Q = 1,1 \text{ м}^3/\text{с}$ .

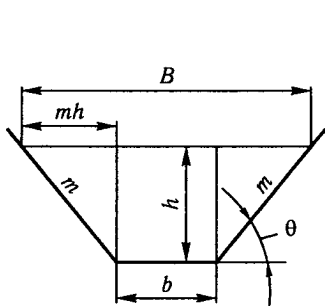


Рис. 2.30

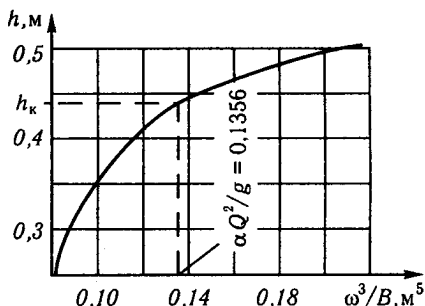


Рис. 2.31

Для трапецієдального перерізу площу живого перерізу визначаємо за формулою

$$\omega = b \cdot h + m \cdot h^2,$$

ширину по верху

$$B = b + 2mh.$$

Призначаємо кілька довільних значень глибин  $h$ , для них знаходимо величини  $B$ ,  $\omega$ ,  $\omega^3/B$ , будемо графік залежності  $\omega^3/B = f(h)$  (рис. 2.31).

Далі визначаємо значення  $\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{1,1 \cdot 1,1^2}{9,8} = 0,1356$  і відкладаємо це значення на осі абсцис. По осі ординат визначаємо значення критичної глибини  $h_k = 0,44$  м. Всі розрахунки зводимо в таблицю:

№ пор.	$h$ , м	$B$ , м	$\omega$ , м <sup>2</sup>	$\omega^3/B$ , м <sup>5</sup>
1	0,50	2,00	0,7500	0,2109
2	0,48	1,96	0,7104	0,1829
3	0,46	1,92	0,6716	0,1577
4	0,44	1,88	0,6336	0,1355
5	0,42	1,84	0,5964	0,1153

Рівняння (2.77) дає можливість визначити критичну глибину у руслах будь-якої форми. Оскільки  $h_k$  входить у це рівняння у неявній формі, то в загальному випадку критичну глибину визначають методом підбору.

Для русел прямокутного перерізу  $\omega_k = b \cdot h_k$  і  $B_k = b$ . Тоді

$$\frac{b^3 \cdot h_k^3}{b} = \frac{\alpha Q^2}{g}.$$

Критичну глибину визначають за формулою

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g b^2}}. \quad (2.78)$$

## 2.11. Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини

При русі в'язкої рідини частина механічної енергії потоку втрачається на подолання сили опору між живими перерізами. Отже, у рівнянні Бернуллі питома енергія у другому і в наступних перерізах буде меншою, ніж у першому ( $e_1 > e_2 > e_3 > \dots > e_n$ ).

З урахуванням цього

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_{\text{втр}1-2}, \quad (2.79)$$

де  $h_{\text{втр}1-2}$  — втрати питомої енергії між розглядуваними перерізами 1-1 і 2-2 (втрати енергії).

Рівняння (2.79) називають *рівнянням Бернуллі для потоку в'язкої рідини*. Це рівняння є рівнянням балансу питомої енергії потоку.

З енергетичної точки зору рівняння (2.79) виражає явище розсіювання (дисипації) енергії. Інакше кажучи, при русі частина механічної енергії рідини внаслідок в'язкості переходить необоротно в теплову форму енергії, тобто для потоку втрачається.

Рівняння (2.79) можна дістати після складання виразів сум енергій для елементарних струминок у вигляді рівняння (2.63) і наступного інтегрування по всій площі живого перерізу. Проте здебільшого закон зміни роботи сил в'язкості  $A_p$  за перерізом є невідомим і вказаний підхід спричинює певні труднощі.

З геометричної точки зору рівняння Бернуллі є сумою трьох лінійних величин:  $z$ ,  $\frac{p}{\rho g}$ ,  $\frac{\alpha V^2}{2g}$ . Розглянемо рівняння для потоку в'язкої рідини між перерізами 1-1 і 2-2 (рис. 2.32).

Точки  $A$  і  $B$ , розміщені в перерізах 1-1 і 2-2, мають відмітки  $z_1$  і  $z_2$  над горизонтальною площиною порівняння  $O' - O'$ . *П'єзометричні висоти* в цих точках  $\frac{p_1}{\rho g}$  і  $\frac{p_2}{\rho g}$ .

*П'єзометричні напори* в кожному перерізі  $z + \frac{p}{\rho g} = H$ .

*П'єзометрична лінія* — це лінія, що з'єднує відмітки п'єзометрів.

*П'єзометричний похил*

$$i_p = -\frac{dH}{dl} = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)}{dl},$$

де  $dl$  — нескінченно малий відрізок уздовж руху.

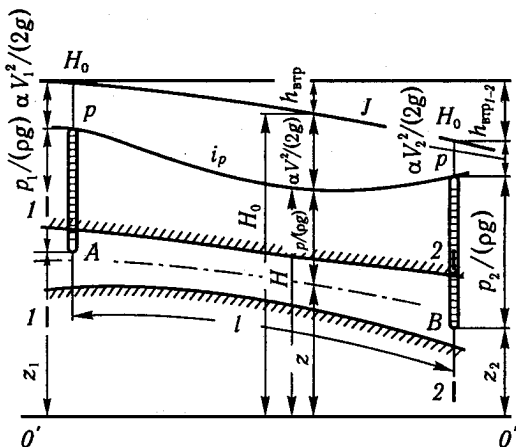


Рис. 2.32

Величину  $\frac{\alpha V^2}{2g}$  називають швидкісним напором. Її можна відкласти в кожній точці від п'єзометричної лінії.

Суму п'єзометричного і швидкісного напорів називають повним напором  $H_0$ :

$$H_0 = H + \frac{\alpha V^2}{2g} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}. \quad (2.80)$$

Лінію  $H_0 - H_0$ , що з'єднує відмітки гідродинамічних напорів уздовж потоку, називають напірною лінією, а похил напірної лінії — гідравлічним похилом  $J$ :

$$J = -\frac{dH_0}{dl} = -\frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g}\right)}{dl} = \frac{dh_{\text{втр}}}{dl}, \quad (2.81)$$

де  $J$  — це втрати напору, віднесені до одиниці довжини.

Оскільки приріст  $dH_0$  завжди є від'ємним (напір зменшується вздовж руху), то гідравлічний похил завжди додатний. Водночас тиск уздовж руху може зменшуватися або збільшуватися (якщо збільшується або зменшується швидкість). Тому п'єзометричний похил  $i_p$  може бути додатним або від'ємним.

У загальному випадку втрати напору можуть виникати за рахунок зменшення всіх або деяких величин, що входять до рівняння Бернуллі.

На практиці водопровідні труби мають постійний переріз, і швидкість в них постійна, а втрати напору відбуваються за

рахунок зменшення п'єзометричного напору  $H = z + \frac{p}{\rho g}$ . У горизонтальних трубах втрати напору відбуваються за рахунок зменшення тиску  $p$ . У безнапірних трубах втрати виникають за рахунок зменшення відмітки  $z$ .

## 2.12. Приклади застосування рівняння Бернуллі

На закономірностях, виведених із рівняння Бернуллі, засновано принцип роботи деяких гідравлічних приладів.

**Трубка Піто.** Розглянемо визначення швидкості за допомогою гідродинамічної трубки, яку також називають трубкою Піто 2 (рис. 2.33).

Цю трубку розміщують в потоці рідини так, щоб загнутий кінець трубки був напрямлений проти течії; працює ця трубка в комплексі із п'єзометром 1.

Потік набігає на отвір трубки Піто, і тому рідина в ній піднімається вище, ніж у п'єзометрі.

Проведемо площину порівняння  $O'-O'$  через центр отвору в загнутому кінці трубки і запишемо рівняння Бернуллі (2.53) для перерізів 1-1 перед входом у трубку і 2-2 на поверхні води в трубці.

Оскільки рідина в трубці Піто не рухається, то втрати напору в рівнянні Бернуллі враховувати не треба. Це рівняння записуємо для елементарної струминки, тому що трубка Піто вимірює місцеву швидкість у точці, в якій вона встановлена. В цьому разі  $z_1 = 0$ ,  $u_1 = u$ ,  $u_2 = 0$ ,  $p_2 = 0$  ( $p_2$  — манометричний тиск на вільній поверхні в трубці).

Тоді

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = z_2; \quad \frac{u^2}{2g} = z_2 - \frac{p_1}{\rho g} = h$$

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (2.82)$$

Часто трубку Піто об'єднують в одному корпусі з п'єзометром. Таку трубку називають трубкою Піто—Прандтля. Її виконують невеликим діаметром з обтічним кінцем (носком), але і при цьому вона вносить збурення в потік. Тому значення швидкості, визначене за формулою (2.82), треба помножити на тарувальний коефіцієнт  $\varphi \approx 1,0 \dots 1,04$ .

**Водомір Вентурі (труба Вентурі).** Труба Вентурі — це пристрій для вимірювання витрати рідини; він має вигляд дуже плав-

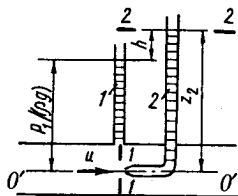


Рис. 2.33



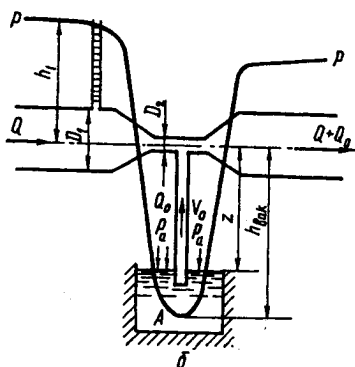
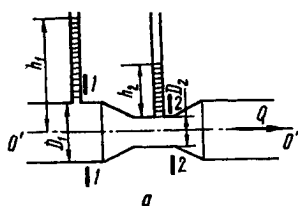


Рис. 2.34

ної збіжно-розбіжної вставки, до якої підключено п'єзометри (рис. 2.34, а);  $D_1$  — діаметр головного трубопроводу;  $D_2$  — діаметр звуження.

У звуженій частині трубопроводу швидкість зростає, а тиск і п'єзометрична висота зменшуються порівняно з тиском  $p$  і п'єзометричною висотою до звуження  $h_1$ .

Для виведення формули витрати застосуємо рівняння Бернуллі і рівняння витрати  $Q = V\omega$ .

Проведемо площину порівняння  $O'-O'$  через вісь труби і виберемо два перерізи: 1-1 — до звуження і 2-2 — у звуженій частині.

Якщо вісь горизонтальна, то  $z_1 = z_2 = 0$ . Рівняння Бернуллі матиме вигляд

$$h_1 + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = h_2 + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_{\text{втр}}.$$

Ураховуючи, що  $\alpha \approx 1$ ,  $Q = V\omega$ , дістанемо

$$\frac{Q^2}{2g\omega_2^2} - \frac{Q^2}{2g\omega_1^2} = h_1 - h_2 - h_{\text{втр}}$$

і

$$\frac{Q^2}{2g\omega_2^2} \left( 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right) = h_1 - h_2 - h_{\text{втр}}.$$

Для круглої труби  $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$ .

Тоді

$$\frac{Q^2}{2g \left( \frac{\pi D_2^2}{4} \right)^2} \left[ 1 - \frac{\left( \frac{\pi D_2^2}{4} \right)^2}{\left( \frac{\pi D_1^2}{4} \right)^2} \right] = h_1 - h_2 - h_{\text{втр}}.$$

Звідси

$$Q = \frac{\sqrt{2g\pi^2 D_2^4 (h_1 - h_2 - h_{\text{втр}})}}{\sqrt{16 \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}\right)}} = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{\frac{2g (h_1 - h_2 - h_{\text{втр}})}{1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}}}. \quad (2.83)$$

Оскільки відстань між перерізами 1—1 і 2—2 невелика, при плавному звуженні труби втрати напору  $h_{\text{втр}}$  будуть невеликими. Тому ними можна знехтувати у першому наближенні.

Тоді витрата  $Q_1$  (без урахування втрат)

$$Q_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{\frac{2g (h_1 - h_2)}{1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}}} = M_1 \sqrt{h_1 - h_2},$$

де  $M_1$  — стала величина для кожного водоміра,

$$M_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}}}.$$

Фактична витрата  $Q$  буде трохи меншою, ніж  $Q_1$ , тому що є втрати напору:

$$Q = Q_1 \mu,$$

де  $\mu$  — тарувальний коефіцієнт, значення якого менше ніж 1. Як правило,  $\mu = 0,95 \dots 0,97$ .

Позначаючи  $M = \mu M_1$ , маємо

$$Q = M \sqrt{h_1 - h_2}. \quad (2.84)$$

✱ **Приклад.** Побудувати графік для визначення витрати води у трубі діаметром  $D_1 = 100$  мм, якщо діаметр водоміра  $D_2 = 75$  мм, тарувальний коефіцієнт  $\mu = 0,95$  (рис. 2.34, а).

Визначаємо сталі величини водоміра

$$M_1 = \frac{3,14 \cdot 0,075^2}{4} \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81}{1 - \left(\frac{0,075}{0,1}\right)^4}} = 0,0237 \text{ м}^{2,5} / \text{с},$$

$$M = \mu M_1 = 0,95 \cdot 0,0237 = 0,0225 \text{ м}^{2,5} / \text{с}.$$

За формулою (2.84) дістанемо  $Q = 0,0225 \sqrt{h_1 - h_2}$  та побудуємо графік  $Q = f(h_1 - h_2)$  (рис. 2.35).

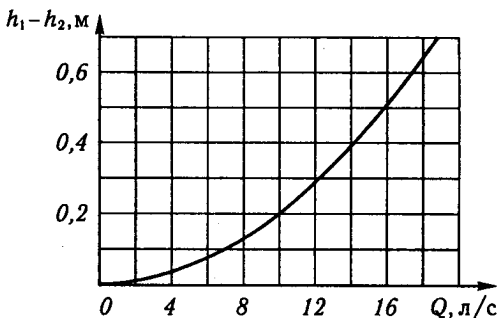


Рис. 2.35

**Водострумний насос.** Із рівняння (2.83) можна визначити п'єзометричну висоту у звуженій частині труби. Нехтуючи втратами напору, дістанемо

$$h_2 = h_1 - \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D_2^4} \left( 1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right).$$

З цього рівняння випливає, що при зменшенні діаметра звуженої частини труби  $D_2$  або при збільшенні витрати  $Q$  п'єзометрична висота у звуженій частині  $h_2$  може бути від'ємною (тобто п'єзометрична лінія  $p-p$  може бути розміщена нижче осі труби).

Це означає, що тут утворюється вакуум із висотою

$$h_{\text{вак}} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 D_2^4} \left( 1 - \frac{D_2^4}{D_1^4} \right) - h_1. \quad (2.85)$$

Цей принцип створення вакууму використовують у водострумних насосах, які застосовують для того, щоб відкачувати воду з колодязів, а також для змішування різних рідин (рис. 2.34, б).

Оскільки тиск у звуженій частині в цьому разі менший, ніж у резервуарі  $A$ , то рідина з резервуара  $A$  буде всмоктуватися в трубу на висоту  $z$ , яка трохи менша ніж  $h_{\text{вак}}$ , тому що частина вакууму витрачається на створення швидкісного напору у вертикальній трубі  $\frac{V_0^2}{2g}$  та на подолання опорів у цій трубі.

★ **Приклад.** Визначити, при яких витратах  $Q$  у звуженій частині труби (рис. 2.34, б) установиться вакуум, якщо  $D_1 = 300$  мм,  $D_2 = 100$  мм, а п'єзометрична висота у перерізі  $l-l$   $h_1 = 1$  м.

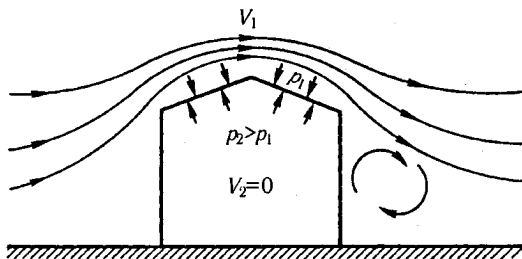


Рис. 2.36

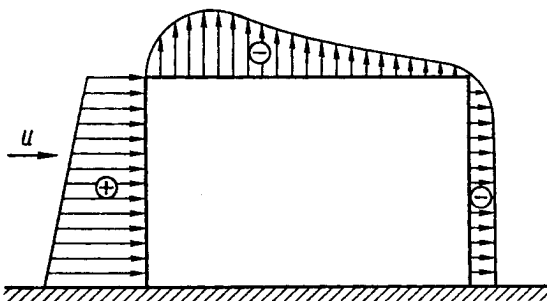


Рис. 2.37

З формули (2.85) при  $h_{\text{вак}} = 0$  визначимо

$$Q = \frac{\pi D_2^2}{2} \sqrt{\frac{gh_1}{2 \left(1 - \frac{D_2^4}{D_1^4}\right)}} = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{2} \sqrt{\frac{9,81 \cdot 1}{2 \left(1 - \frac{0,1^4}{0,3^4}\right)}} = 0,035 \text{ м}^3/\text{с} = 35 \text{ л/с} .$$

Отже, при  $Q > 35$  л/с у звуженій частині встановиться вакуум.

**Обтікання споруд вітровим потоком** (рис. 2.36). Швидкість вітрового потоку  $V_1 > V_2 = 0$  (тому що під дахом немає руху повітря). В зоні підвищеної швидкості  $V_1$  утворюється знижений тиск повітря, а в зоні, де швидкість  $V_2 = 0$ , утворюється підвищений тиск ( $p_2 > p_1$ ). Тому при великих швидкостях вітру дах може відірватися.

Важливо також знати розподіл тиску по контуру будівлі або споруди (рис. 2.37). Величину тиску в окремих точках контура зручно характеризувати безрозмірним аеродинамічним коефіцієнтом

$$k = \frac{P}{\rho / (V_1^2 / 2)} . \quad (2.86)$$

На навітряному боці споруди тиск більше від атмосферного ( $k = +(0,7...0,8)$ ), на тильному боці і над дахом утворюється розрідження, тобто  $k = -(0,1...0,3)$ .

### 2.13. Рівняння Бернуллі для стисливої рідини

При невеликих змінах тиску вздовж руху рівняння Бернуллі для газів (повітря) можна використовувати у вигляді (2.33) для нестисливої рідини:

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = \text{const},$$

або

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.87)$$

При значній зміні тиску змінюється і густина  $\rho$  (газопроводи високого тиску, повітродувні установки та інше). Тому в цьому випадку таке рівняння застосовувати не можна, бо  $\rho \neq \text{const}$ . При великих тисках величиною  $gz$  у цьому рівнянні можна знехтувати.

Тоді

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.88)$$

Після диференціювання цього рівняння матимемо

$$d\frac{p}{\rho} + d\frac{u^2}{2} = 0. \quad (2.89)$$

Інтегруємо цей вираз уздовж елементарної струминки

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.90)$$

Цей вираз є рівнянням Бернуллі для стисливої рідини.

З енергетичної точки зору член  $\int \frac{dp}{\rho}$  характеризує потенціальну енергію газу з урахуванням перетворення його внутрішньої енергії. Тому рівняння (2.90) можна сформулювати так: при усталеній течії газу вздовж трубки течії сума питомої потенціальної і кінетичної енергії є величиною сталою.

Для обчислення інтеграла  $\int \frac{dp}{\rho}$  потрібно знати характеристики процесу зміни стану газу в розглядуваному випадку течії. Якщо газ тече без теплообміну із навколишньою атмосферою, то такий процес у загальному випадку називають *адіабатичним*. Якщо при цьому вважати газ нев'язким, то процес буде

мати зворотний характер і називатися *ізоентропічним*. Його можна описати рівнянням

$$\frac{p}{\rho^k} = C, \quad (2.91)$$

де  $k$  — показник адиабати процесу (для повітря  $k = 1,4$ );  $C$  — сталие число.

З рівняння (2.91) визначимо

$$\rho = \frac{p^{1/k}}{C^{1/k}}. \quad (2.92)$$

Тепер обчислимо інтеграл  $\int \frac{dp}{\rho}$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\rho} &= \int \frac{dp}{p^{1/k} / C^{1/k}} = C^{1/k} \int \frac{dp}{p^{1/k}} = \\ &= C^{1/k} \frac{p^{(k-1)/k}}{(k-1)/k} = C^{1/k} \frac{k}{k-1} \cdot p^{(k-1)/k}. \end{aligned}$$

Виконаємо заміну

$$C^{1/k} = \frac{p^{1/k}}{\rho}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{\rho} &= \frac{p^{1/k}}{\rho} \cdot \frac{k}{k-1} p^{(k-1)/k} = \\ &= \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{\rho} p^{1/k} p p^{-1/k} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}. \end{aligned}$$

Рівняння (2.87) можна записати як

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}, \quad (2.93)$$

або, враховуючи рівняння газового стану Клапейрона—Менделєєва (4),

$$\frac{k}{k-1} R_* T + \frac{u^2}{2} = \text{const}. \quad (2.94)$$

Із рівняння (2.94) випливає, що зміна швидкості вздовж струминки стисливого газу пов'язана із зміною температури. При збільшенні швидкості температура спадає.

Для потоку нев'язкого газу, беручи  $\alpha \approx 1,0$ , маємо рівняння Бернуллі у вигляді

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.} \quad (2.95)$$

Це рівняння використовують для розрахунків витікання газів із резервуарів і балонів при великому тиску.

## 2.14. Рівняння зміни кількості руху для потоку рідини

У деяких випадках руху рідини заздалегідь важко оцінити величину втрат енергії через значну зміну їх під впливом різних факторів. Це призводить до труднощів при застосуванні рівняння Бернуллі, яке вимагає обгрунтованого врахування втрат енергії. Тому в таких випадках для розрахунків руху рідини доцільно використовувати закон (рівняння) зміни кількості руху для відсіку рідини між перерізами 1-1 і 2-2 (рис. 2.38). Цей закон можна сформулювати так: зміна кількості руху рідини  $\Delta K P$ , яка протікає через певний відсік за будь-який час, дорівнює сумі імпульсів  $\Sigma I$  зовнішніх сил, прикладених до цього відсіку за той самий час:

$$\Delta K P = \Sigma I. \quad (2.96)$$

У проекціях на вісь  $x$  рівняння (2.96) набирає вигляду

$$\Delta K P_x = \Sigma I_x, \quad (2.97)$$

де індексами  $x$  позначають проекції кількості руху й імпульсів сил на вісь  $x$ ; аналогічні рівняння можна скласти і для інших координатних осей.

Зміна кількостей руху  $\Delta K P_x$  — це їхня різниця у перерізах 1-1 і 2-2, тобто  $\Delta K P_x = K P_{2x} - K P_{1x}$ .

Якщо між перерізами 1-1 і 2-2 відбувається приєднання або відділення мас рідини, то треба враховувати також проекції кількостей руху цих мас.

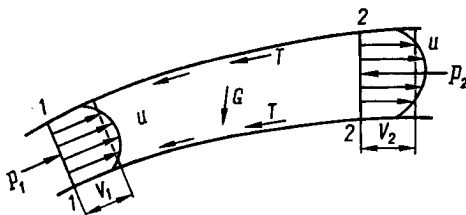


Рис. 2.38

Секундна кількість руху у живому перерізі потоку

$$KP = \int_{\omega} dm u, \quad (2.98)$$

де  $dm$  — маса нескінченно малої частинки, яка перебуває в межах елементарної струминки навколо заданої точки,  $dm = \rho dQ$ ;  $u$  — місцева швидкість, тобто швидкість у перерізі елементарної струминки.

Звідси

$$KP = \int_{\omega} \rho dQ u = \rho \int_{\omega} u^2 d\omega. \quad (2.99)$$

Оскільки закон зміни місцевої швидкості  $u$  по перерізу в загальному випадку невідомий, то за аналогією з визначенням кінетичної енергії потоку (п. 2.9) кількість руху також можна виразити через середню швидкість:

$$KP = \rho \alpha_0 V^2 \omega, \quad (2.100)$$

де  $\alpha_0$  — коефіцієнт кількості руху (коефіцієнт Буссінеска), який враховує нерівномірність розподілу швидкостей по перерізу.

Позначивши  $u = V + \Delta V$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\int u^2 d\omega}{V^2 \omega} = \frac{\int (V + \Delta V)^2 d\omega}{V^2 \omega} = \\ &= \frac{V^2 \omega + 2V \int \Delta V d\omega + \int (\Delta V)^2 d\omega}{V^2 \omega}. \end{aligned}$$

Згідно з п. 2.9  $\int_{\omega} \Delta V d\omega = 0$ , тому

$$\alpha_0 = 1 + \frac{\int (\Delta V)^2 d\omega}{V^2 \omega} = 1 + \eta. \quad (2.101)$$

Порівнюючи формули (2.69) і (2.101), можна дійти висновку, що  $1 < \alpha_0 < \alpha$ . Як і кінетична енергія, кількість руху потоку залежить від пульсації швидкостей за часом, що має впливати на значення коефіцієнта  $\alpha_0$ . Однак на практиці це здебільшого не враховують. У турбулентних потоках беруть  $\alpha_0 \approx 1,03 \dots 1,04$ .



Секундні імпульси сил дорівнюють цим силам:

$$I = P. \quad (2.102)$$

Якщо рух води в перерізі потоку є плавномінним, то сила тиску в цьому перерізі

$$P = p_i \omega, \quad (2.103)$$

де  $p_i$  — тиск у центрі ваги цього перерізу.

Крім сил тиску в перерізах потоку, в рівняння (2.102) також можуть входити сили тяжіння  $G$ , тертя  $T$ ; реакції стінок русла або споруд, на які діє потік. Конкретні випадки застосування рівняння зміни кількості руху буде розглянуто у відповідних розділах гідравліки.

## 3 ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ І ВТРАТИ НАПОРУ ПРИ РУСІ РІДИНИ

---

### 3.1. Фізична природа гідравлічних опорів

Як уже було зазначено раніше, при русі в'язкої рідини виникають втрати енергії (напору). Причиною цих втрат є різні гідравлічні опори, складний механізм визначення яких не дає змоги одержати теоретичні залежності для втрат напору. Тому в цьому випадку використовують експериментальні дослідження, в яких визначають величини  $z$ ,  $\frac{p}{\rho g}$ ,  $\frac{\alpha V^2}{2g}$ , а потім уже обчислюють втрати напору.

У процесі розрахунків встановлюють не тільки кількісні значення втрат, а й вплив на них різних факторів: форми живого перерізу потоку, швидкості протікання рідини, її в'язкості, кінематичної структури потоку. В результаті дістають емпіричні та напівемпіричні формули для визначення втрат напору.

Опори характеризуються в'язкісними або інерційними силами. Перші залежать від внутрішнього тертя між частинками рідини, яка рухається, а другі — від здатності рідини чинити опір при русі.

Опори бувають двох видів.

1. Опори, що виявляються рівномірно по всій довжині потоку. Ці опори називають *опорами по довжині*. Вони виникають при протіканні рідини в трубах, каналах при рівномірному або нерівномірному русі.

2. Другий вид опору виявляється на короткій відстані в місцях різкої зміни конфігурації потоку. Такі опори називають *місцевими*.

Відповідно до викладеного в загальному випадку в потоці виникають також два види втрат напору (по довжині та місцеві), значення їх треба складати при визначенні загальних втрат.

У результаті дії сил опору частина механічної енергії рідини переходить у теплову енергію, рідина нагрівається, а тепло з часом розсіюється. Тобто ця частина енергії незворотно втрачається потоком.

### 3.2. Основне рівняння рівномірного руху. Втрати напору по довжині

Для того щоб встановити залежність втрат напору від сил опору по довжині, треба розглянути такий потік рідини, в якому є тільки опори по довжині й немає місцевих опорів.

Якщо виконуються ці умови, потік може протікати при ustalеному рівномірному русі.

Виділимо відсік такого потоку між перерізами 1-1 і 2-2 та розглянемо дію на нього зовнішніх сил і сил тертя (рис. 3.1).

Застосуємо до відсіку рідини між перерізами 1-1 і 2-2 рівняння зміни кількості руху в проекціях на вісь потоку (2.97). Оскільки рух рівномірний, то  $V_1 = V_2$  і зміна кількості руху  $\Delta KР = 0$ , тобто і сума проекцій імпульсів сил  $\Sigma I$  за 1 с на вісь потоку дорівнює нулю:

$$\Delta KР = \Sigma I = 0. \quad (3.1)$$

При рівномірному русі немає прискорення руху і сили, які викликають рух, урівноважуються силами, що чинять опір йому.

На розглядуваний відсік рідини діють такі сили: сила тяжіння  $G$ , сили тиску  $P_1$  і  $P_2$  у перерізах 1-1 і 2-2 з боку відкинутих об'ємів рідини, сила опору по довжині  $T$ ; нормальні сили тиску з боку стінок русла на бокові поверхні потоку  $N$ .

Запишемо рівняння проекцій всіх сил на вісь потоку.

Проекції сил  $N$  дорівнюватимуть нулю, тому що вони проєкціюються в точку.

Тоді

$$P_1 - P_2 + G \cos(90 - \beta) - T = 0, \quad (3.2)$$

де  $\beta$  — кут нахилу осі потоку до горизонту.

Оскільки в перерізах 1-1 і 2-2 рух плавномізмний, то тиск у них розподіляється за основним законом гідростатики і сили

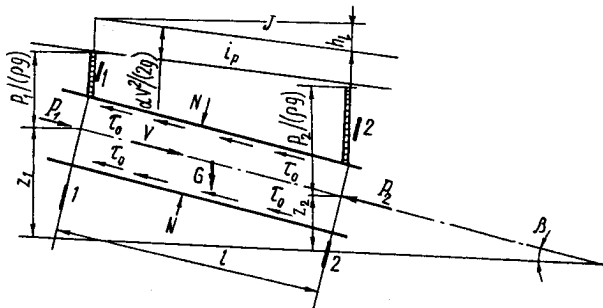


Рис. 3.1

тиску:

$$P_1 = p_1 \omega_1; \quad P_2 = p_2 \omega_2,$$

де  $p_1$  і  $p_2$  — тиски в центрах ваги відповідних перерізів;  
 $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  — площа живого перерізу потоку.

Сила тяжіння  $G = \rho g \omega l$ ,  
 величина

$$\cos(90 - \beta) = \sin \beta = \frac{z_1 - z_2}{l}.$$

Сила тертя  $T$  характеризується тертям між потоком і стінками русла:

$$T = \tau_0 \chi l,$$

де  $\tau_0$  — середнє значення дотичних напружень на одиницю площі зіткнення потоку з руслом;  $\chi$  — змочений периметр, тобто частина периметра живого перерізу, яка торкається стінок русла (рис. 3.2).

При напірному русі  $\chi$  збігається з периметром живого перерізу (рис. 3.2, а), а при безнапірному є лише частиною останнього (рис. 3.2, б).

Підставимо вирази всіх сил у рівняння (3.2):

$$p_1 \omega - p_2 \omega + \rho g \omega l \frac{z_1 - z_2}{l} = \tau_0 \chi l. \quad (3.3)$$

Поділимо всі частини рівняння (3.3) на силу тяжіння  $G$  і після перетворень запишемо

$$\frac{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)}{l} = \frac{\tau_0 \chi}{\rho g \omega}. \quad (3.4)$$

Ліва частина цього рівняння — п'езометричний похил  $i_p$ . Раніше (п. 2.7) було доведено, що в кожному живому перерізі сума  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$  для будь-якої точки перерізу. При рівномір-

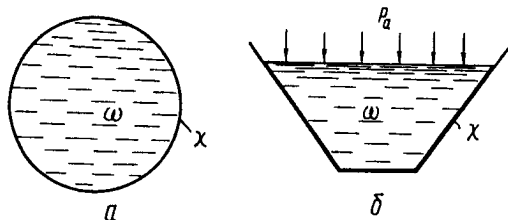


Рис. 3.2

ному русі гідравлічні опори є сталими по довжині для всієї ділянки рівномірного руху, тому  $i_p = \text{const}$ .

Відношення  $\omega/\chi = R$  називають *гідравлічним радіусом*, що характеризує форму і розмір живого перерізу.

Враховуючи це, маємо

$$i_p = \frac{\tau_0}{\rho g R}. \quad (3.5)$$

Вираз (3.5) називають *основним рівнянням рівномірного руху*. При рівномірному русі швидкість для будь-якої точки перерізу стала і  $\frac{V^2}{2g} = \text{const}$ , тому і напірна лінія буде паралельна п'езометричній, і гідравлічний похил  $J$  дорівнюватиме п'езометричному  $i_p$ :

$$J = i_p. \quad (3.6)$$

Враховуючи це й те, що гідравлічний похил  $J = h_l/l$  (де  $h_l$  — втрати напору по довжині), маємо

$$h_l = \frac{\tau_0 l}{\rho g R}. \quad (3.7)$$

**Втрати напору по довжині в трубах.** У круглих трубах  $R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4}$ .

З урахуванням цього рівняння (3.7) набуває вигляду

$$h_l = \frac{4\tau_0 l}{\rho g D}. \quad (3.8)$$

На основі багатьох дослідів, проведених на паризькому водопроводі, французький вчений Дарсі в 1857 р. встановив, що втрати напору в трубах пропорційні швидкісному напору  $\frac{V^2}{2g}$ , і запропонував формулу

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}, \quad (3.9)$$

де  $\lambda$  — гідравлічний коефіцієнт тертя, який визначають за дослідними даними.

Порівнюючи формули (3.8) та (3.9), дістанемо формулу для дотичних напружень на стінках русла

$$\tau_0 = \frac{\rho \lambda V^2}{8}. \quad (3.10)$$

Розрахунковою формулою є рівняння (3.9).

Із формули (3.10) випливає, що  $\lambda$  залежить від факторів, що впливають на  $\tau_0$ . Це особливо виявляється при різних режимах руху рідини.

### 3.3. Режими руху рідини. Число Рейнольдса

Спостереження свідчать, що існує два режими руху рідини: ламінарний і турбулентний.

При *ламінарному русі* частинки рідини рухаються шарами, паралельно один одному без перемішування, рух упорядкований.

При *турбулентному режимі* йде інтенсивне перемішування частинок рідини, рух стає невпорядкованим.

При різних режимах сили тертя визначають по-різному.

Найбільш докладні досліді по вивченню режимів руху рідини зробив англійський вчений Рейнольдс у ХІХ ст.

Розглянемо методіку досліджень (рис. 3.3).

Рідина з бака *A* витікає через скляну трубку *B*, у кінці якої встановлений кран *C*, щоб регулювати витрату і швидкість. Водночас з бачка *D* трубкою меншого діаметра сюди подають фарбу. При невеликому відкритті крана *C* вода рухається по трубці *B* з відносно малою швидкістю, а фарба в цій трубці рухається у вигляді тонкої струминки без перемішування з потоком. Це ламінарний рух.

При більшому відкритті крана і збільшенні швидкості протікання води в трубі характер руху зміниться. При деякому значенні швидкості струминка стає хвилястою, а її контури нестійкими (рис. 3.4, *a*). При подальшому збільшенні швидкості в струминці виникають розриви (рис. 3.4, *б*), а далі і повне руйнування її, внаслідок чого фарба повністю перемішується в трубі *B* (рис. 3.4, *в*). Рух стає турбулентним.

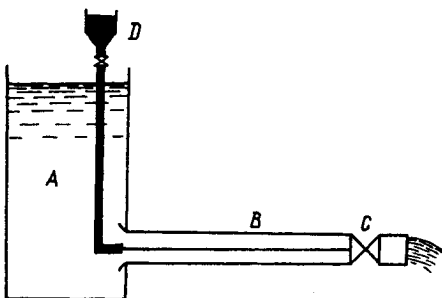


Рис. 3.3

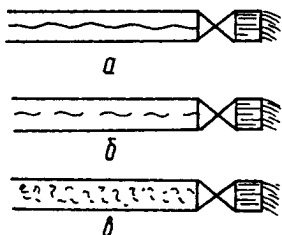


Рис. 3.4

При зворотному зменшенні швидкості руху рідини режим знову стає ламінарним, але цей перехід відбувається при меншій швидкості, ніж перехід від ламінарного режиму до турбулентного.

Швидкість, з якою ламінарний режим переходить у турбулентний, називають *верхньою критичною швидкістю*  $V_{в.к}$ , а швидкість, з якою турбулентний режим переходить в ламінарний, називають *нижньою критичною швидкістю*  $V_{н.к}$ .

Було встановлено, що найбільш повно режим руху рідини характеризується значенням безрозмірного параметра — числа Рейнольдса

$$Re = \frac{VD}{\nu}, \quad (3.11)$$

де  $\nu$  — кінематична в'язкість (див. табл. 1).

Рейнольдс дійшов висновку, що існує таке критичне число  $Re_k$ , яке відмежовує ламінарний режим руху від турбулентного. Турбулентний режим переходить у ламінарний при нижньому критичному числі  $Re_{н.к} = \frac{V_{н.к}D}{\nu}$ , а ламінарний режим переходить у турбулентний при верхньому числі  $Re_{в.к} = \frac{V_{в.к}D}{\nu}$ . Проте це число, як і верхня критична швидкість, має несталі значення, і тому на практиці беруть  $Re_k = Re_{н.к} = 2320$ .

Для відкритих каналів

$$Re = \frac{VR}{\nu}, \quad (3.12)$$

а критичне число  $Re_k = 300 \dots 700$ .

На практиці ламінарний режим встановлюється в капілярних трубах при малих швидкостях руху, при русі між частинками ґрунту (фільтрація) або при русі рідини з великою в'язкістю (нафта, олія і т. д.).

У системах водопостачання і водовідведення, як правило, встановлюється турбулентний режим руху.

✱ **Приклад.** За якої швидкості руху води в трубі діаметром  $D = 100$  мм відбудеться перехід ламінарного режиму руху в турбулентний?

Беручи кінематичну в'язкість  $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с, з формули (3.11) визначимо

$$V = \frac{Rc\nu}{D}$$

Оскільки зміна режимів руху відбувається при критичному числі Рейнольдса  $Re_k = 2320$ , то

$$V_k = \frac{2320 \cdot 0,01}{10} = 2,32 \text{ см/с.}$$

### 3.4. Ламінарний рух рідини в трубі

При ламінарному режимі спостерігається значна нерівномірність розподілу швидкостей по живому перерізу (рис. 3.5, а).

Біля стінки труби рідина прилипає до неї, швидкість при цьому дорівнює нулю. Другий шар ковзає по першому, третій — по другому і т. д. При віддаленні від стінки швидкість руху збільшується і досягає максимального значення на осі труби. При такій схемі руху сили тертя характеризуються зчепленням частинок рідини, що розміщені у двох сусідніх шарах і рухаються з різними швидкостями. Сили тертя залежать від в'язкості рідини.

Розподіл дотичних напружень і швидкостей по перерізу. Для того щоб встановити характер зміни дотичних напружень у різних точках перерізу, використовуємо основне рівняння рівномірного руху (3.5)

$$i_p = \frac{\tau_0}{\rho g R}.$$

Для круглої труби  $R = D/4 = r_0/2$  (де  $r_0$  — радіус труби).

З урахуванням цього рівняння запишемо у вигляді

$$i_p = \frac{2\tau_0}{\rho g r_0}. \quad (3.13)$$

Якщо уявити собі деякий циліндричний шар рідини з радіусом  $r$  (рис. 3.5, б), який ковзає по зовнішньому сусідньому шару, то на границі цих шарів виникають дотичні напруження  $\tau$ .

Враховуючи, що для всіх точок кожного перерізу  $z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}$ ,  $i_p = \text{const}$ , маємо

$$i_p = \frac{2\tau}{\rho g r}. \quad (3.14)$$

Прирівнюючи рівняння (3.13) і (3.14), дістанемо

$$\frac{2\tau_0}{\rho g r_0} = \frac{2\tau}{\rho g r}; \quad \tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}. \quad (3.15)$$

Це рівняння виражає лінійний закон зміни дотичних напружень по перерізу (рис. 3.5, в). Напруження зменшуються

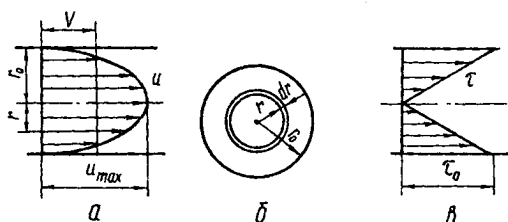


Рис. 3.5



до нуля на осі труби, де швидкості сусідніх шарів вирівнюються.

Дотичні напруження можна також представити у вигляді виразу (6):

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}. \quad (3.16)$$

У правій частині рівняння беремо знак «-» у зв'язку з тим, що швидкість при віддаленні від осі труби зменшується, тобто градієнт швидкості  $\frac{du}{dr}$  є величиною від'ємною, а дотичні напруження — додатною.

Розв'язавши сумісно рівняння (3.15) і (3.16), матимемо

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{r}{r_0} &= -\mu \frac{du}{dr}; \\ du &= -\frac{\tau_0}{\mu r_0} r dr. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Інтегруємо цей вираз:

$$u = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} \frac{r^2}{2} + C.$$

Сталу інтегрування  $C$  визначимо з умови, що при  $r = r_0$   $u = 0$  (на стінці труби):

$$C = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu}.$$

Звідси

$$u = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu} - \frac{\tau_0}{\mu r_0} \frac{r^2}{2}; \quad (3.18)$$

$$u = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right). \quad (3.19)$$

Це рівняння показує, що швидкість у живому перерізі розподіляється за параболічним законом.

Максимальну швидкість на осі труби визначимо з умови того, що якщо  $r = 0$ , тоді

$$u_{\max} = \frac{\tau_0 r_0}{2\mu}. \quad (3.20)$$

Швидкість у будь-якій точці перерізу можна обчислити за формулою

$$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right). \quad (3.21)$$

Визначимо середню швидкість у живому перерізі з виразу (2.6) при  $d\omega = 2\pi r dr$ :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\int u d\omega}{\omega} = \frac{u_{\max} \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \\ &= \frac{2u_{\max} \pi \left( \int_0^{r_0} r_0^2 r dr - \int_0^{r_0} r^2 r dr \right)}{\pi r_0^2 r_0^2} = \frac{2u_{\max}}{r_0^4} \left( \frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) = \\ &= \frac{2u_{\max}}{r_0^4} \frac{r_0^4}{4} = \frac{u_{\max}}{2}. \end{aligned}$$

Отже, при ламінарному режимі руху в круглій трубі середня швидкість у живому перерізі дорівнює половині максимальної швидкості:

$$V = \frac{u_{\max}}{2}. \quad (3.22)$$

Визначимо тепер коефіцієнт кінетичної енергії  $\alpha$  при ламінарному режимі:

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{V^3 \omega} = \frac{u_{\max}^3 \int_0^{r_0} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)^3 2\pi r dr}{(u_{\max}/2)^3 \pi r_0^2} = \frac{u_{\max}^3 \cdot 2\pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2)^3 r dr}{\frac{u_{\max}^3}{8} \pi r_0^2 r_0^6}.$$

Після перетворення

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{16}{r_0^8} \left( \int_0^{r_0} r_0^6 r dr - 3 \int_0^{r_0} r_0^4 r^3 dr + 3 \int_0^{r_0} r_0^2 r^5 dr - \int_0^{r_0} r^7 dr \right) = \\ &= \frac{16}{r_0^8} \left( \frac{r_0^6 r_0^2}{2} - \frac{3r_0^4 r_0^4}{4} + \frac{3r_0^2 r_0^6}{6} - \frac{r_0^8}{8} \right) = \\ &= \frac{16}{r_0^8} \left( \frac{4r_0^8 - 6r_0^8 + 4r_0^8 - r_0^8}{8} \right) = 2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Отже, при ламінарному русі  $\alpha = 2,0$ .

Таке велике відхилення коефіцієнта  $\alpha$  від одиниці пов'язане з тим, що при ламінарному русі існує дуже значна нерівномірність розподілу швидкостей по перерізу.

**Втрати напору по довжині при ламінарному режимі.** З формули (3.20) визначимо

$$\tau_0 = \frac{2\mu u_{\max}}{r_0},$$

а з формули (3.22)

$$u_{\max} = 2V.$$

Підставивши ці вирази у рівняння (3.13), дістанемо

$$i_p = \frac{2 \cdot 2\mu u_{\max}}{\rho g r_0 r_0} = \frac{8\mu V}{\rho g r_0^2},$$

або

$$i_p = \frac{8\nu V \cdot 4}{gD^2} = \frac{32\nu V}{gD^2};$$

$i_p = J$  при рівномірному русі

$$J = \frac{h_l}{l} = \frac{32\nu V}{gD^2},$$

або

$$h_l = \frac{32\nu V}{gD^2} l. \quad (3.24)$$

Це втрати напору по довжині при ламінарному режимі (формула Пуазейля—Хагена).

Звідси випливає характерна особливість ламінарного режиму: втрати напору по довжині прямо пропорційні в'язкості рідини і швидкості у першому степені і не залежать від характеристики поверхні стінок труби.

Прирівнюємо втрати напору по довжині за формулами (3.9) і (3.24):

$$\frac{32\nu V l}{gD^2} = \frac{\lambda V^2}{2gD}.$$

Звідси гідравлічний коефіцієнт тертя при ламінарному русі

$$\lambda = \frac{32 \cdot 2\nu}{VD}, \text{ або } \lambda = 64/\text{Re}. \quad (3.25)$$

З цього випливає, що втрати напору при ламінарному режимі можна також визначити за формулою Дарсі (3.9), а гідравлічний коефіцієнт тертя — за формулою (3.25).

Рівняння (3.25) показує, що коефіцієнт  $\lambda$  прямо пропорційний в'язкості рідини і не залежить від шорсткості стінок труби.

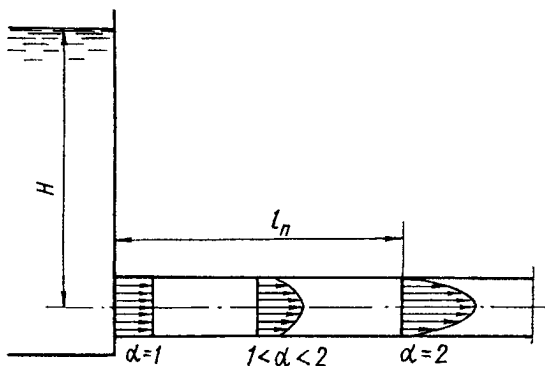


Рис. 3.6

Ця обставина підтверджує те положення, що перший шар рідини прилипає до стінки труби, а другий — ковзає по першому, нерухомому. Це дає можливість дійти висновку, що ламінарний рух є вихровим. Виникнення вихорів зумовлено в'язкістю рідини і різними швидкостями поступального руху сусідніх шарів, що спричинює закручування частинок рідини.

**Початкова ділянка ламінарного руху.** Спостереження свідчать, що місцеві швидкості при ламінарному режимі розподіляються за параболічним законом [див. формулу (3.21)]. Проте це відбувається на деякій відстані від початку труби, тобто тоді, коли закінчується початкова ділянка (рис. 3.6).

Наявність початкової ділянки зумовлена умовами входу в трубу. Наприклад, якщо вода надходить у трубу з резервуара під дією напору  $H$ , який в кілька разів більше діаметра труби  $D$ , то можна вважати, що для всіх точок перерізу на вході напір  $H = \text{const}$ . Швидкість при цьому розподіляється рівномірно. У границях довжини початкової ділянки відбувається переформування епюри швидкостей від рівномірної, якщо  $\alpha = 1$ , до параболічної, якщо  $\alpha = 2$ .

Є різні рекомендації щодо визначення довжини початкової ділянки. Наприклад, формула Шіллера

$$l_n = 0,029D \text{ Re}. \quad (3.26)$$

Гідравлічний похил  $J$  і гідравлічний коефіцієнт тертя  $\lambda$  на початковій ділянці є більшими, ніж на іншій частині труби. У коротких трубах, якщо  $l_{\text{тр}} < l_n$ ,  $\lambda$  визначають за формулою Френкеля

$$\lambda = B/\text{Re}, \quad (3.27)$$

де  $B$  визначають за такими даними:

$\frac{l}{D \cdot \text{Re}}$	0,029	0,025	0,015	0,01	0,005	0,0025
$B$	69,5	72	80	89	105	120

Значення  $\lambda$  за формулою (3.27) підставляють у формулу для втрат напору (3.9). Якщо довжина труби більша ніж  $l_n$ , то втрати напору за довжиною складаються з втрат напору на початковій ділянці та на решті частини труби. Вважаючи, що для всієї початкової ділянки  $\lambda = \frac{69,5}{\text{Re}}$ , дістаємо

$$\begin{aligned} h_l &= \left[ \frac{69,5 \cdot l_n}{\text{Re} \cdot D} + \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{(l - l_n)}{D} \right] \frac{V^2}{2g} = \left[ \frac{(69,5 - 64) \cdot l_n}{\text{Re} \cdot D} + \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{D} \right] \frac{V^2}{2g} = \\ &= \left( \frac{5,5 l_n}{\text{Re} \cdot D} + \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{D} \right) \frac{V^2}{2g} = \\ &= \frac{64 \cdot l}{\text{Re} \cdot D} \left( \frac{5,5 \cdot l_n \cdot \text{Re} \cdot D}{\text{Re} \cdot D \cdot 64 \cdot l} + 1 \right) \frac{V^2}{2g}. \end{aligned}$$

Вважаємо  $\frac{l_n}{\text{Re} \cdot D} = 0,029$  і  $\text{Re} = \frac{VD}{\nu}$ . Тоді

$$h_l = \frac{32 \cdot \nu}{g \cdot D^2} \left( 1 + \frac{\text{Re} \cdot D}{400 \cdot l} \right) V \cdot l. \quad (3.28)$$

Якщо довжина труби  $l > 0,05 \text{Re} \cdot D$ , величиною  $\frac{\text{Re} \cdot D}{400 \cdot l}$  у цій формулі можна знехтувати. Тоді розрахунок втрат напору зводиться до користування формулою (3.24).

★ **Приклад.** Визначити втрати напору у трубі діаметром  $D = 100$  мм довжиною  $l = 8$  м при протіканні нафти ( $\nu = 0,3$  см<sup>2</sup>/с) з витратою  $Q = 5$  л/с. Швидкість течії нафти в трубі

$$V = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{0,005 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,1^2} = 0,637 \text{ м/с.}$$

Визначаємо число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{0,637 \cdot 0,1}{0,3 \cdot 10^{-4}} = 2123 > 2320.$$

Режим руху ламінарний.

Тепер обчислюємо довжину початкової ділянки:

$$l_{\text{п}} = 0,029 \cdot D \cdot \text{Re} = 0,029 \cdot 0,1 \cdot 2123 = 6,15 \text{ м.}$$

Визначаємо втрати напору по довжині за формулою (3.28):

$$h_l = \frac{32 \cdot \nu}{g \cdot D^2} \left( 1 + \frac{\text{Re} \cdot D}{400 \cdot l} \right) \nu \cdot l = \frac{32 \cdot 0,3 \cdot 10^{-4}}{9,81 \cdot 0,1^2} \left( 1 + \frac{2123 \cdot 0,1}{400 \cdot 8} \right) 0,637 \cdot 8 = 0,053 \text{ м.}$$

### 3.5. Турбулентний рух рідини

Механізм турбулентного руху значно складніший, ніж ламінарного. При турбулентному русі частинки рідини неупорядковано перемішуються, а швидкості в будь-якій точці безперервно змінюються за величиною і напрямом навколо деякого середнього значення. Це називають *пульсацією швидкості* (рис. 3.7).

Швидкість у певний момент часу в певній точці турбулентного потоку називають *місцевою миттєвою швидкістю*  $u$ .

Якщо в турбулентному потоці взяти будь-який період часу осереднення  $T$ , то можна дістати осереднену місцеву швидкість

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt. \quad (3.29)$$

Величина  $\bar{u}$  — осереднена швидкість. Її визначають як висоту прямокутника завширшки  $T$ . Цей прямокутник рівновеликий із фігурою, що має границі: осі координат, ординату  $T$  і криву, що характеризує зміну миттєвої швидкості  $u$  з часом.

Введення поняття осередненої швидкості дає можливість вважати турбулентний потік квазіусталеним, тобто умовно усталеним. У цьому випадку до нього можна застосовувати рівняння нерозривності і рівняння Бернуллі.

Миттєву швидкість можна вимірювати за допомогою кіно- і фотозйомки, вводячи у потік пофарбовані тверді частинки, або спеціальними датчиками з малою інерцією.

Для визначення осередненої швидкості, навпаки, треба мати пристрої, що мають значну інерцію. Це, наприклад, трубка Піто.

Різницю між миттєвою і осередненою швидкістю називають *пульсаційною швидкістю* або *пульсацією*  $u'$ :

$$u' = u - \bar{u}. \quad (3.30)$$

Складові пульсаційної швидкості по осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= u_x - \bar{u}_x; \\ u'_y &= u_y - \bar{u}_y; \\ u'_z &= u_z - \bar{u}_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

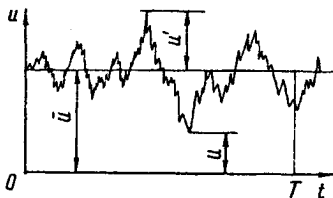


Рис. 3.7

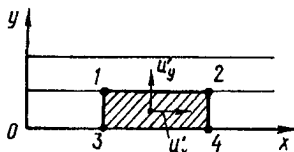


Рис. 3.8

Оскільки швидкість і тиск пов'язані між собою рівнянням Бернуллі, то пульсація швидкості приводить і до пульсації тиску:

$$\left. \begin{aligned} p'_x &= p_x - \bar{p}_x; \\ p'_y &= p_y - \bar{p}_y; \\ p'_z &= p_z - \bar{p}_z. \end{aligned} \right\}$$

Введення поняття осередненої швидкості дає змогу застосовувати до турбулентного потоку основні поняття і рівняння руху без урахування пульсації швидкостей.

Фактично пульсації існують і впливають на значення дотичних напружень у турбулентному потоці і на втрати енергії.

Розглянемо умовну струминну модель руху з урахуванням дії пульсації.

Виділимо в потоці частину шару рідини 1-2-3-4, що рухається вздовж осі  $x$  (рис. 3.8).

Унаслідок дії поперечної пульсаційної швидкості  $u'_y$  крізь бокову поверхню шару 1-2 з площею  $\Delta S$  за час  $dt$  проходить маса рідини:

$$\Delta m' = \rho \Delta S dt u'_y. \quad (3.32)$$

Ця маса в результаті дії поздовжньої пульсації  $u'_x$  створює кількість руху

$$Kp = \rho \Delta S u'_y dt u'_x. \quad (3.33)$$

Ця кількість руху втрачається у вищерозміщеному шарі, внаслідок чого виникає імпульс сили

$$I = \Delta F dt, \quad (3.34)$$

де  $\Delta F$  — зсувна сила, прикладена до вищерозміщеного шару з боку нижчерозміщеного.

У свою чергу, верхній шар діє на нижній із силою опору  $\Delta T$ , яка дорівнює силі  $\Delta F$ , а напрямлена у протилежний бік.

Зміна кількості руху дорівнює імпульсу діючих сил:

$$\Delta T dt = -\rho \Delta S u'_x u'_y dt. \quad (3.35)$$

Відомо, що відношення  $\Delta T / \Delta S$  дорівнює дотичним напруженням у турбулентному потоці:

$$\Delta T / \Delta S = \tau_{\text{турб}}.$$

Звідси

$$\tau_{\text{турб}} = -\rho u'_x u'_y. \quad (3.36)$$

Це рівняння показує залежність дотичних напружень від пульсації швидкості при турбулентному русі, тобто від обміну кількістю руху між шарами рідини.

Оскільки  $u'_x$  і  $u'_y$  характеризують пульсації швидкості в певний момент часу, то  $\tau_{\text{турб}}$  за формулою (3.36) буде величиною миттєвою. Тому осереднені дотичні напруження можна записати так:

$$\bar{\tau}_{\text{турб}} = -\overline{\rho u'_x u'_y}. \quad (3.37)$$

У правій частині цього рівняння треба осереднювати добуток складових пульсаційних швидкостей, тому що осереднені значення окремих складових  $u'_x$  і  $u'_y$  дорівнюватимуть нулю через взаємну компенсацію від'ємних і додатних пульсацій.

При однакових знаках в один і той самий момент часу  $u'_x$  і  $u'_y$  їхній осереднений добуток буде завжди додатним, а при різних знаках — від'ємним, але не дорівнюватиме нулю.

Поздовжні і поперечні складові пульсації швидкості  $u'_x$  і  $u'_y$  прямо пропорційні осередненій швидкості  $\bar{u}$  і середній швидкості  $V$ .

Згідно з цим, а також із формулою (3.37) дотичні напруження пропорційні квадрату середньої швидкості. Ця важлива особливість турбулентного режиму відрізняє його від ламінарного, при якому дотичні напруження пропорційні швидкості у першому степені.

Водночас у турбулентному потоці крім дотичних напружень, зумовлених перемішуванням рідини, виявляються також сили в'язкості (сили внутрішнього тертя), зумовлені зчепленням частинок між собою, а також зчепленням між шарами рідини потоку і стінками русла. З урахуванням цього повні дотичні напруження

$$\bar{\tau} = \tau_{\text{турб}} + \bar{\tau}_{\text{в'язк}}, \quad (3.38)$$

або

$$\bar{\tau} = -\overline{\rho u'_x u'_y} + \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy}. \quad (3.39)$$

Цей вираз можна подати у вигляді

$$\bar{\tau} = \varepsilon_T \frac{d\bar{u}_x}{dy} + \mu \frac{d\bar{u}_x}{dy}, \quad (3.40)$$



де  $\epsilon_T$  — турбулентна в'язкість,

$$\epsilon_T = -\frac{\overline{\rho u'_x u'_y}}{\frac{d\bar{u}_x}{dy}}. \quad (3.41)$$

Турбулентна в'язкість на відміну від динамічної враховує не молекулярну структуру рідини, а особливості турбулентного режиму. Вона не є постійною, а залежить від кінематичних характеристик потоку і числа  $Re$ . Пульсації швидкості збільшуються зі збільшенням числа  $Re$ , тому збільшується і  $\epsilon_T$ . При великому ступені турбулентності  $\epsilon_T$  набагато більша, ніж  $\mu$ , і тому в цьому випадку  $\mu$  можна знехтувати. При меншій турбулентності  $\mu$  сумірна  $\epsilon_T$ , і тому при визначенні втрат напору треба враховувати як в'язкісні, так і інерційні сили.

У цьому випадку порушується висновок, зроблений із рівняння  $\bar{\tau} = -\overline{\rho u'_x u'_y}$ , про те, що дотичні напруження залежать від квадрата швидкості, тому що за рахунок впливу в'язкісних сил дотичні напруження стають пропорційними швидкості у степені менше двох (як правило, 1,75...2,0).

### 3.6. Структура турбулентного потоку в трубі

Дослідження свідчать, що турбулентний потік у трубі розподіляється на дві зони. Безпосередньо біля стінки створюється дуже тонка зона чисто в'язкого руху — *в'язкий підшарок*. Інша частина потоку утворює *турбулентне ядро*. Це зона турбулентного перемішування, яка практично не залежить від в'язкості (рис. 3.9).

У межах в'язкого підшарку динамічна в'язкість  $\mu$  значно більша турбулентної  $\epsilon_T$  і напруження в'язкого тертя значно більші від напружень, що виникають під дією сил інерції.

Інше відбувається в турбулентному ядрі. Тут дотичні напруження від турбулентного перемішування у багато разів більші, ніж напруження в'язкісного тертя.

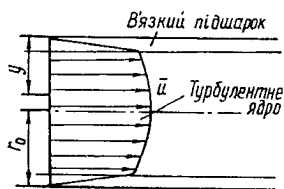


Рис. 3.9

Треба зазначити, що розподіл потоку на дві зони є умовним. Насправді з віддаленням від стінки труби вплив в'язкості зменшується поступово, і між в'язким підшарком і турбулентним ядром можна було б ще виділити *перехідну зону* (область), в якій величини  $\mu$  і  $\epsilon_T$  мають однаковий порядок.

Проте найчастіше в гідромеханіці розглядають схему з двох зон: в'язкого підшарку і турбулентного ядра.

**Розподіл осереднених швидкостей по перерізу труби.** Механізм турбулентного потоку дуже складний, тому і характер розподілу осереднених швидкостей по живому перерізу можна визначити лише дослідним шляхом або за допомогою напівемпіричної теорії турбулентності.

Так, для в'язкого підшарку можна припустити, що в його границях  $\tau_0 = \text{const}$ . Тоді, враховуючи формулу (6), дістанемо

$$\tau_0 = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \rho\nu \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

Звідси

$$d\bar{u} = \frac{\tau_0 dy}{\rho\nu} = \frac{dy}{\nu} u_*^2, \quad (3.42)$$

де  $\nu$  — кінематична в'язкість;  $y$  — відстань точки від стінки труби;

$$u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}, \quad (3.43)$$

$u_*$  визначають у метрах за секунду і називають *динамічною швидкістю*.

Після інтегрування виразу (3.42) маємо

$$\bar{u} = u_*^2 \frac{y}{\nu} + C. \quad (3.44)$$

Біля самої стінки  $y = 0$ ,  $\bar{u} = 0$ ; тоді  $C = 0$  і

$$\bar{u} = u_*^2 \frac{y}{\nu}. \quad (3.45)$$

За теорією Прандтля для турбулентного ядра вважають, що поздовжні і поперечні пульсації пропорційні відстані від стінки і градієнту осередненої швидкості, тобто

$$u'_x = \kappa_x y \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right); \quad u'_y = \kappa_y y \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad (3.46)$$

де  $\kappa_x, \kappa_y$  — коефіцієнти пропорційності.

Позначивши  $\kappa^2 = -\kappa_x \kappa_y$  ( $\kappa$  — стала Прандтля—Кармана) і враховуючи формулу (3.37), дістанемо

$$\bar{\tau}_{\text{турб}} = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2.$$

Звідси

$$d\bar{u} = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_{\text{турб}}}{\rho}} \frac{dy}{\kappa y}. \quad (3.47)$$

Згідно з теорією Прандтля припускають також, що дотичні напруження в зоні турбулентного ядра приблизно дорівнюють дотичним напруженням на стінці ( $\bar{\tau}_{\text{турб}} \approx \bar{\tau}_0$ ). Це положення ґрунтується на тому, що в цій зоні градієнт швидкості незначний, тому що швидкості мало змінюються.

З урахуванням цього

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + C.$$

На осі труби  $y = r_0$ ,  $\bar{u} = \bar{u}_{\text{max}}$ . Тоді  $C = \bar{u}_{\text{max}} - \frac{u_*}{\kappa} \ln r_0$ . Звідси

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln y + \bar{u}_{\text{max}} - \frac{u_*}{\kappa} \ln r_0;$$

$$\bar{u}_{\text{max}} - \bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} (\ln r_0 - \ln y).$$

Враховуючи, що за даними дослідів  $\kappa \approx 0,4$ , можна записати закон змінення осередненої швидкості:

$$D = \frac{\bar{u}_{\text{max}} - \bar{u}}{u_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{y}, \quad (3.48)$$

де  $D$  — дефіцит місцевої швидкості.

Ця формула показує, що при турбулентному режимі руху місцева швидкість змінюється за логарифмічним законом, тобто зміна відбувається більш плавно, ніж при ламінарному режимі.

Враховуючи (3.43) та (3.10), дістанемо формулу для динамічної швидкості

$$u_* = \sqrt{\frac{\rho \lambda V^2}{8\rho}} = \frac{V \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}}. \quad (3.49)$$

За аналогією з визначенням дефіциту місцевої швидкості можна обчислити дефіцит середньої швидкості. З урахуванням досліджень Прандтля, Кармана та інших маємо

$$D_{\text{сер}} = \frac{\bar{u}_{\text{max}} - V}{u_*} = \frac{1,5}{\kappa} = \frac{1,5}{0,4} \approx 3,75. \quad (3.50)$$

Звідси залежність між максимальною і середньою швидкостями

$$\bar{u}_{\text{max}} = V + 3,75u_*. \quad (3.51)$$

Коефіцієнт кінетичної енергії в круглих трубах при турбулентному режимі визначають за формулою

$$\alpha = 1,0 + 2,65\lambda, \quad (3.52)$$

$\alpha$  змінюється в межах 1,03...1,13.

Абсолютне значення швидкості при турбулентному режимі після деяких перетворень формули (3.48)

$$\bar{u} \approx u_* \left( 5,75 \lg \frac{yu_*}{\nu} + 5,5 \right). \quad (3.53)$$

Це закон розподілу швидкостей по перерізу при турбулентному режимі.

**Гідралічно гладкі та шорсткі труби.** Залежно від співвідношення абсолютної висоти виступів шорсткості  $\Delta$  і товщини в'язкого підшарку  $\delta$  по-різному виявляється вплив в'язкісного тертя і сил інерції на дотичні напруження і втрати енергії в потоці. Товщину в'язкого підшарку визначимо за таких умов. Дотичні напруження у в'язкому підшарку згідно з формулою (6)

$$\tau_0 = \mu \frac{d\bar{u}}{dy}.$$

У межах в'язкого підшарку (рис. 3.10) швидкість змінюється від нуля біля стінки до  $\bar{u}_{в.п}$  на границі підшарку, тобто на відстані  $\delta$  від стінки. Тому можна записати

$$\frac{d\bar{u}}{dy} \approx \frac{\bar{u}_{в.п}}{\delta} \quad \text{і} \quad \tau_0 = \mu \frac{\bar{u}_{в.п}}{\delta} = \rho \nu \frac{\bar{u}_{в.п}}{\delta}.$$

Звідси

$$\delta = \frac{\bar{u}_{в.п} \nu \rho}{\tau_0} = \frac{\bar{u}_{в.п}}{u_*} \frac{\nu}{u_*}. \quad (3.54)$$

Відношення  $\bar{u}_{в.п} / u_*$  називають числом Нікурадзе і позначають  $N$ . Тоді

$$\delta = N \frac{\nu}{u_*}. \quad (3.55)$$

Значення  $N$  змінюється у межах 10,5...11,1. Взнявши  $N = 10,6$  і підставивши значення  $u_*$  з формули (3.49) у формулу (3.55), дістанемо

$$\delta = 10,6 \frac{\nu \cdot 2\sqrt{2}}{V\sqrt{\lambda}} \frac{D}{D} = \frac{30\nu D}{VD\sqrt{\lambda}},$$

або

$$\delta = \frac{30D}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}. \quad (3.56)$$

Це значення  $\delta$  треба порівняти з висотою виступів шорсткості. Оскільки фактична висота всіх виступів неоднакова, то вводять поняття еквівалентної шорсткості  $\Delta_{\text{екв}}$ , тобто такої рівномірної шорст-



Рис. 3.10

кості, яка дає при розрахунках однакове із заданою шорсткістю значення гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ . Наведемо деякі значення еквівалентної шорсткості для різних труб:

Труби	$\Delta_{\text{екв}}$ , мм
Сталеві цільнотягнуті нові	0,02...0,05
Те саме, ненові (ті, що були в експлуатації)	0,15...0,3
Сталеві зварні нові	0,04...0,1
Чавунні нові	0,25...1,0
Чавунні і сталеві зварні ненові	0,8...1,5
Азбестоцементні нові	0,05...0,1
Те саме, ненові	0,6
Бетонні та залізобетонні	0,3...0,8

Схематично можна розглядати такі три області гідравлічних опорів:

1. Область гідравлічно гладких труб: виступи шорсткості вкриті в'язким підшарком ( $\Delta_{\text{екв}} \ll \delta$ ) і не порушують його цілісності (рис. 3.11, а). Виступи обтікаються без відривів і не утворюється вихорів. У цьому випадку шорсткість не впливає на гідравлічні опори і гідравлічний коефіцієнт тертя, який залежить тільки від числа Рейнольдса. За даними А. Д. Альтшуля, ця область існує при  $Re \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} < 10$ .

2. При  $Re \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} > 500$  має місце область гідравлічно шорстких труб: виступи шорсткості виходять за межі в'язкого підшарку ( $\Delta_{\text{екв}} \gg \delta$ ). Відривне обтікання виступів (рис. 3.11, в) зводить опір тертя до опору обтікання тіл з різкою зміною конфігурації, який не залежить від числа Рейнольдса і пропорційний швидкісному напору потоку та розмірам виступів шорсткості. Саме ці фактори пов'язані з інерційним опором частинок рідини, що переміщуються.

3. При  $10 < Re \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} < 500$  існує перехідна область: висота виступів шорсткості  $\Delta_{\text{екв}}$  того самого порядку, що й товщина в'язкого підшарку  $\delta$  (рис. 3.11, б). У цьому випадку на гідравлічний опір впливають число Рейнольдса і величина виступів шорсткості.

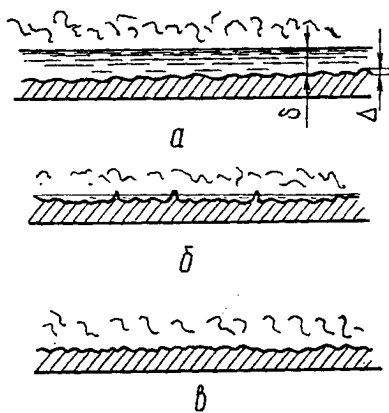


Рис. 3.11

Досліди І. К. Нікітіна внесли уточнення в характеристики турбулентного руху поблизу шорсткої стінки, біля якої утворюється пристінний шар, що характеризується найбільшими поздовжніми пульсаціями швидкості на його границі.

Всередині цього шару течія турбулентна й окремі виступи обтікаються з утворенням вихорів. Для практичних розрахунків достатньо надійні результати дають наведені далі емпіричні формули для гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ , структура яких ґрунтується на викладеній вище умовній моделі турбулентної течії.

**Гідравлічний коефіцієнт тертя (коефіцієнт Дарсі).** Виходячи з вищевикладеного матеріалу, можна визначити, що в загальному випадку гідравлічний коефіцієнт тертя залежить від числа Рейнольдса і відносної шорсткості труби, тобто  $\lambda = f\left(\text{Re}; \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}\right)$ . Однією з найбільш відомих праць у цій області є дослідження І. Нікурадзе, які показано у вигляді графіка на рис. 3.12.

На графіку показано, що при ламінарному режимі  $\lambda$  залежить тільки від числа Рейнольдса.

При значеннях  $\text{Re} = 2320 \dots 4000$  у зоні періодичної зміни режимів  $\lambda$  швидко зростає. В області гідравлічно гладких труб  $\lambda$  залежить тільки від числа Рейнольдса, зменшуючись зі збільшенням числа  $\text{Re}$  (крива *a*).

У перехідній області на графіку показано сукупність кривих *b* для різних відносних шорсткостей. У цій області значення  $\lambda$  взагалі зростають зі збільшенням  $\text{Re}$ , але для малих шорсткостей на початковій ділянці відбувається спад. В області гідравлічно шорстких труб коефіцієнт  $\lambda$  представлений сукупністю горизонтальних прямих *v* для різних шорсткостей.

Досліди І. Нікурадзе проводилися в трубах із штучною рівномірною шорсткістю, наклеєною на стінки труби у вигляді піщаник однакового розміру.

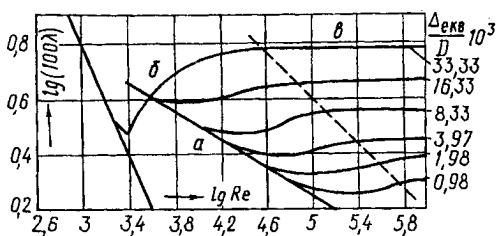


Рис. 3.12

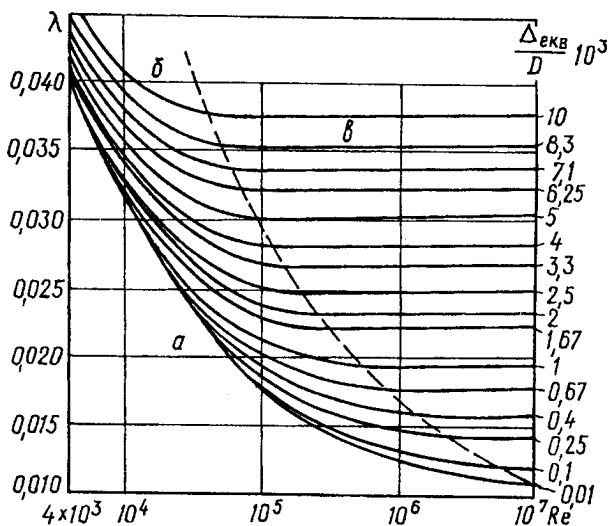


Рис. 3.13

Для практичних розрахунків важливе значення мають результати дослідів К. Кольбрука, Г. А. Муріна, Ф. О. Шевелева та інших, які наведено для промислових труб із природною нерівномірною шорсткістю. Узагальнені результати цих досліджень наведено на графіку (рис. 3.13). В області гідравлічно гладких труб *a* коефіцієнт  $\lambda$  зменшується зі збільшенням числа  $Re$ , але на відміну від графіка Нікурадзе у перехідній області *b* значення  $\lambda$  стають більшими, ніж у квадратичній *v*. Штриховою лінією позначено границю між областями.

Це треба враховувати при розрахунках труб, що працюють в перехідній області. Треба також зазначити, що кожна труба є не тільки гладкою або шорсткою. Залежно від числа  $Re$  одна і та сама труба може працювати в області гідравлічно гладких, шорстких труб або у перехідній області. У трубах з порівняно великою шорсткістю при переході до турбулентного режиму в'язкий підшарок не вкриває виступи шорсткості й область гідравлічно гладких труб відсутня. Залежно від особливостей кожної області є різні емпіричні формули для визначення гідравлічного коефіцієнта тертя [1, 6, 8, 9, 12].

Для гідравлічно гладких труб використовують формулу Блазіуса

$$\lambda = 0,3164 / Re^{0,25} \quad (3.57)$$

Враховуючи залежності (3.9) і  $Re = VD/v$ , легко переконатися, що втрати напору для гідравлічно гладких труб про-

порційні швидкості в степені 1,75:

$$h_l = k_{гг} V^{1,75}, \quad (3.58)$$

де  $k_{гг}$  — коефіцієнт пропорційності для гідравлічно гладких труб.

У перехідній області опору гідравлічний коефіцієнт тертя визначають за формулою Альтшуля

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{екв}}{D} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}. \quad (3.59)$$

Цю формулу можна застосовувати для всіх областей опору. При малих числах Рейнольдса величина  $\Delta_{екв} / D$  значно менша від величини  $68 / Re$  і нею можна нехтувати. У цьому випадку формула (3.59) перетворюється на формулу (3.57). При великих числах  $Re$  величиною  $68 / Re$  можна нехтувати порівняно з  $\Delta_{екв} / D$ , та для гідравлічно шорстких труб формула (3.59) перетворюється на формулу Шифрінсона

$$\lambda = 0,11 (\Delta_{екв} / D)^{0,25}. \quad (3.60)$$

Оскільки в останньому випадку гідравлічний коефіцієнт тертя не залежить від швидкості руху води, то з формули (3.9) випливає, що втрати напору пропорційні квадрату швидкості:

$$h_l = k_{ш} V^2. \quad (3.61)$$

У зв'язку з цим область гідравлічно шорстких труб також називають *областю квадратичного опору*.

Для перехідної області

$$h_l = k_{п} V^{1,75 \dots 2}. \quad (3.62)$$

У формулах (3.61) і (3.62)  $k_{ш}$  і  $k_{п}$  — коефіцієнти пропорційності відповідно для гідравлічно шорстких труб і перехідної області.

Для окремих випадків руху рідини є емпіричні формули для гідравлічного коефіцієнта тертя. Так, для водопровідних труб Ф. О. Шевелєвим запропоновані формули:

для поліетиленових труб, які працюють в області гідравлічно гладких труб,

$$\lambda = \frac{0,0134}{(DV)^{0,226}}; \quad (3.63)$$

для перехідної області

$$\lambda = \frac{m}{D^n} \left( 1 + \frac{f}{V} \right)^n; \quad (3.64)$$



Таблиця 3.1. Коефіцієнти  $m, m_1, n, f$  для формул Шевелєва

Труби	Коефіцієнти			
	$m$	$n$	$f$	$m_1$
Сталеві нові	0,0159	0,226	0,648	0,0121
Чавунні нові	0,0144	0,284	2,36	0,0143
Сталеві і чавунні ненові:				
при $V \leq 1,2$ м/с	0,0179	0,3	0,867	—
при $V > 1,2$ м/с	—	0,3	—	0,021
Азбестоцементні	0,011	0,19	3,51	—

для області гідравлічно шорстких труб

$$\lambda = m_1 / D^n. \quad (3.65)$$

У цих формулах діаметр  $D$  визначають у метрах, швидкість — у метрах за секунду, а коефіцієнти  $m, m_1, n, f$  беруть із табл. 3.1.

Азбестоцементні труби найчастіше працюють у перехідній області опору. Ненові сталеві та чавунні труби при швидкостях руху води  $V \leq 1,2$  м/с також працюють у цій області, а при  $V > 1,2$  м/с — в області гідравлічно шорстких труб. Формули (3.63)—(3.65) одержані для води з кінематичною в'язкістю  $\nu = 0,013$  см<sup>2</sup>/с, значення якої разом із значенням еквівалентної шорсткості враховано коефіцієнтами, що наведено в табл. 3.1. Ф. О. Шевелєвим складено таблиці для визначення втрат напору у водопровідних трубах на основі наведених вище формул.

■ **Приклад.** Побудувати графік залежності втрат напору по довжині в трубі  $D = 150$  мм, довжиною  $l = 100$  м, якщо кінематичний коефіцієнт в'язкості  $\nu = 0,013$  см<sup>2</sup>/с, при зміні витрати в діапазоні  $Q = 0,2 \dots 30$  л/с. Труби нові сталеві.

Визначаємо еквівалентну шорсткість (див. с. 108) для нової сталеві труби  $\Delta_{\text{екв}} = 0,04$  мм.

Призначаємо кілька значень витрати від 0,2 до 30 л/с. Для кожного значення  $Q$  знаходимо швидкість  $V$  та число Рейнольдса  $Re$ . Далі залежно від числа Рейнольдса встановлюємо режим руху рідини та область гідравлічних опорів (див. формулу (3.11), с. 108). Після цього вибираємо відповідну формулу для визначення гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$  та за формулою  $h_f = \lambda \frac{l V^2}{D 2g}$  визначаємо втрати напору по довжині  $h_f$ . Всі розрахунки зводимо в таблицю:

$Q$ , л/с	$V$ , м/с	$Re$	Формула для визначення $\lambda$	$\lambda$	$h_f$ , м
0,2	0,011	1304	(3.25)	0,049	0,00032
1,0	0,057	6580	(3.57)	0,035	0,00540
2,5	0,141	16330	(3.57)	0,028	0,02800

$Q$ , л/с	$V$ , м/с	Re	Формула для визначення $\lambda$	$\lambda$	$h_l$ , м
5,0	0,283	32650	(3.57)	0,024	0,10000
10,0	0,566	65300	(3.59)	0,021	0,34300
20,0	1,132	130610	(3.59)	0,018	1,18000
30,0	1,700	196030	(3.59)	0,017	2,50000

Будуємо графік  $h_l = f(Q)$  (рис. 3.14).

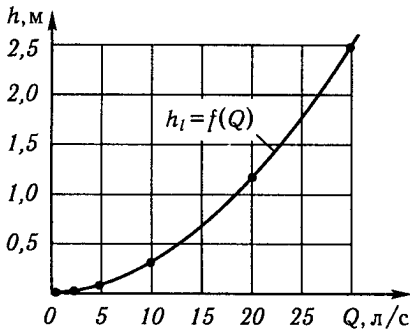


Рис. 3.14

При розрахунках руху стічних вод у круглих напірних трубах систем водовідведення застосовують формулу Федорова [6, 7]

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[ \lg \left( \frac{\Delta_2}{3,42D} + \frac{a_2}{\text{Re}} \right) \right]^2}, \quad (3.66)$$

де  $\Delta_2$  і  $a_2$  — еквівалентна абсолютна шорсткість і безрозмірний коефіцієнт, які визначають дослідним шляхом; вони наведені у довідниках;  $\text{Re} = \frac{VD}{\nu}$  — число Рейнольдса, при визначенні якого кінематичну в'язкість стічних вод беруть залежно від кількості завислих частинок у них на 5...30 % більше, ніж в'язкість чистої води.

Тому значення гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$  для труб при русі стічних вод є більшими, ніж при русі чистої води у водопровідних трубах. Формулу (3.66) з відповідними корективами використовують також для розрахунків безнапірних водовідвідних труб (див. п. 6.5).

**Формули швидкості при рівномірному русі.** З основного рівняння рівномірного руху  $i_p = \frac{\tau_0}{\rho g R}$ , підставляючи в нього

значення дотичних напружень  $\tau_0 = \rho \frac{\lambda}{8} V^2$  (див. (3.10)), дістаємо

$$i_p = \frac{\rho \lambda V^2}{8 \rho g R} = \frac{\lambda V^2}{8 g R}. \quad (3.67)$$

Запишемо рівняння для швидкості

$$V = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{Ri_p}, \text{ або } V = C \sqrt{Ri_p}, \quad (3.68)$$

де  $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$  — коефіцієнт Шезі, або швидкісний множник, який визначають за формулою Павловського

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (3.69)$$

де  $n$  — коефіцієнт шорсткості, що залежить від характеру стінок труби або русла:

Характеристика поверхні	$n$
Нові гончарні і сталеві труби, що добре укладені та з'єднані	0,011
Водопровідні труби в нормальних умовах утримання, дуже чисті водовідвідні труби	0,012
Водовідвідні труби в нормальних умовах утримання, трохи забруднені водопровідні труби	0,013
Забруднені водопровідні й водовідвідні труби	0,014
Залізобетонні і бетонні тунелі й трубопроводи:	
без штукатурки	0,012...0,020
із штукатуркою	0,012...0,014
Бетонування каналів у середніх умовах утримання	0,014
Порівняно грубе бетонування; добра бутова кладка	0,017
Бруківка	0,020
Канали, що чисто висічені в скелі, канали у щільному льосі, мілкому піску або землі, де частково почищене дно й укоси після землерийної машини	0,0225
Земляні канали при порівняно поганих умовах утримання, що помітно заросли травою, з місцевими обвалами укосів, місцями з водоростями, булижником або гравієм на дні	0,03

$y = f(n; R)$ ; як правило,  $y \approx 1/4 \dots 1/7$ .

Формулу для швидкості можна подати у вигляді

$$V = W \sqrt{i_p}, \quad (3.70)$$

де  $W$  — швидкісна характеристика.

$$W = C \sqrt{R} = \frac{1}{n} R^{y+0,5} = \frac{1}{n} R^z, \quad (3.71)$$

де  $z = y + 0,5$ .

За даними М. М. Павловського, показник степеня  $z$  можна визначити за формулою

$$z = 0,37 + 2,5\sqrt{n} - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R}. \quad (3.72)$$

Для спрощення розрахунків В. М. Попов запропонував користуватися з достатнім ступенем точності осередненими значеннями  $z$  за табл. 3.2.

Таблиця 3.2. Осереднені значення показника степеня  $z$

$n$	Значення $z$ при $R, \text{ м}$			
	0,1...0,5	0,51...1	1...2	2..3
0,011...0,016	0,65	0,65	0,65	0,65
0,0165...0,017	0,70	0,65	0,65	0,65
0,0175...0,018	0,70	0,70	0,65	0,65
0,019...0,02	0,70	0,70	0,70	0,65
0,021...0,0225	0,70	0,70	0,70	0,70
0,025...0,0275	0,75	0,75	0,70	0,70
0,030...0,04	0,80	0,80	0,75	0,75

Залежність швидкісної характеристики  $W$  від гідравлічного радіуса  $R$  і коефіцієнта шорсткості  $n$  наведено на рис. 3.15. Для більш детальних розрахунків швидкісну характеристику  $W$  можна визначати за табл. 3.3.

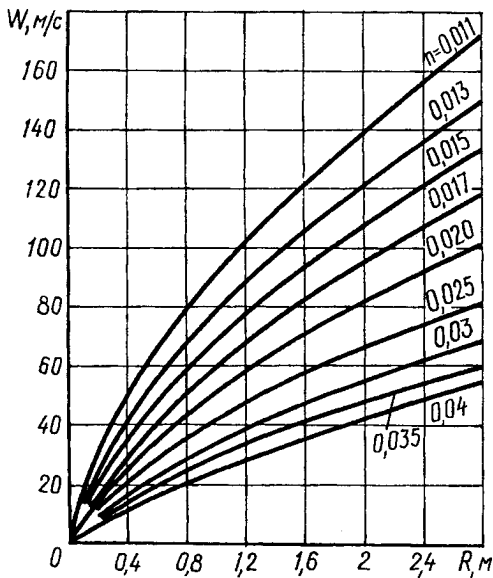


Рис. 3.15

Таблиця 3.3. Швидкісні характеристики  $W$ , м/с, при різних значеннях коефіцієнта шорсткості

$R, \text{м}$	Коефіцієнт шорсткості $n$													
	0,011	0,012	0,013	0,014	0,015	0,017	0,018	0,02	0,0225	0,025	0,0275	0,03	0,035	0,04
0,10	21,3	19,0	17,2	15,6	14,2	12,0	11,2	9,67	8,22	7,09	6,19	5,46	4,35	3,56
0,12	23,9	21,4	19,3	17,6	16,1	13,7	12,7	11,0	9,41	8,15	7,14	6,32	5,07	4,18
0,14	26,3	23,6	21,4	19,5	17,9	15,2	14,1	12,3	10,6	9,17	8,06	7,16	5,77	4,78
0,16	28,6	25,7	23,3	21,3	19,5	16,7	15,5	13,6	11,7	10,2	8,95	7,97	6,45	5,36
0,18	30,8	27,8	25,2	23,0	21,2	18,1	16,9	14,8	12,7	11,1	9,81	8,75	7,12	5,94
0,20	33,0	29,7	27,0	24,7	22,7	19,5	18,2	16,0	13,8	12,0	10,7	9,52	7,78	6,50
0,22	35,0	31,6	28,7	26,3	24,2	20,8	19,4	17,1	14,8	12,9	11,5	10,3	8,42	7,06
0,24	37,0	33,4	30,4	27,5	25,7	22,1	20,7	18,2	15,8	13,8	12,3	11,0	9,05	7,61
0,26	38,9	35,2	32,1	29,4	27,1	23,4	21,9	19,3	16,7	14,7	13,1	11,7	9,67	8,15
0,28	40,8	36,9	33,7	30,9	28,5	24,6	23,0	20,3	17,7	15,6	13,8	12,4	10,3	8,69
0,30	42,6	38,6	35,2	32,3	29,9	25,8	24,2	21,4	18,6	16,4	14,6	13,1	10,9	9,22
0,32	43,5	39,4	36,0	33,1	30,5	26,4	24,7	21,9	19,0	16,8	15,0	13,5	11,2	9,48
0,34	46,1	41,8	38,2	35,1	32,5	28,1	26,4	23,4	20,4	18,0	16,1	14,5	12,1	10,3
0,36	47,8	43,4	39,6	36,5	33,8	29,3	27,5	24,3	21,2	18,8	16,8	15,2	12,6	10,8
0,38	49,4	44,9	41,1	37,8	35,0	30,4	28,5	25,3	22,1	19,6	17,5	15,8	13,2	11,3
0,40	51,1	46,4	42,5	39,1	36,2	31,5	29,5	26,2	22,9	20,3	18,2	16,5	13,8	11,8
0,45	55,0	50,0	45,9	42,3	39,2	34,1	32,1	28,5	25,0	22,2	20,0	18,1	15,2	13,0
0,50	58,8	53,5	49,1	45,3	42,1	36,7	34,5	30,7	27,0	24,0	21,6	19,6	16,5	14,2
0,55	62,4	58,9	52,2	48,3	44,8	39,2	36,9	32,9	28,9	25,8	23,2	21,1	17,8	15,4
0,60	65,9	60,2	55,3	51,1	47,5	41,6	39,1	35,0	30,8	27,5	24,8	22,6	19,1	16,5
0,65	69,3	63,3	58,2	53,9	50,1	43,9	41,4	37,0	32,7	29,2	26,4	24,0	20,4	17,6
0,70	72,6	66,4	61,1	56,6	52,6	46,2	43,5	39,0	34,5	30,8	27,9	25,4	21,6	18,7
0,75	75,8	69,4	63,9	59,2	55,1	48,4	45,0	40,9	36,2	32,4	29,4	26,8	22,8	19,8
0,80	79,0	72,3	66,6	61,7	57,5	50,6	47,7	42,8	37,9	34,8	30,8	28,2	24,0	20,9
0,85	82,1	75,1	69,3	64,2	59,9	52,7	49,7	44,7	39,6	35,6	32,2	29,5	25,2	21,9
0,90	85,1	77,9	71,9	66,7	62,2	54,8	51,7	46,5	41,2	37,1	33,6	30,8	26,3	23,0
0,95	88,0	80,6	74,4	69,1	64,4	56,8	53,7	48,3	42,9	38,5	35,0	32,1	27,5	24,0
1,0	90,9	83,3	76,9	71,4	66,7	58,8	55,6	50,0	44,4	40,0	36,4	33,3	28,6	25,0
1,1	96,5	88,5	81,8	76,0	71,0	62,7	59,3	53,4	47,5	42,8	39,0	35,8	30,7	27,0
1,2	102	93,6	86,5	80,4	75,2	66,5	62,9	56,7	50,5	45,6	41,5	38,2	32,9	28,9
1,3	107	98,5	91,1	84,7	79,2	70,1	66,3	59,9	53,4	48,3	44,0	40,5	34,9	30,7
1,4	112	103	95,5	88,9	83,1	73,7	69,7	60,3	56,3	50,9	46,4	42,7	36,9	32,5
1,5	117	108	99,8	92,9	87,0	77,1	73,0	66,0	59,0	53,4	48,8	44,9	38,8	34,3
1,6	122	112	104	96,9	90,7	80,5	76,2	69,0	61,7	55,9	51,1	47,1	40,7	36,0
1,7	127	117	108	101	94,3	83,8	79,4	71,8	64,3	58,3	53,3	49,1	42,6	37,7
1,8	131	121	112	105	97,9	87,0	82,4	74,6	66,9	60,6	55,5	51,2	44,4	39,3
1,9	136	125	116	108	101	90,1	85,4	77,4	69,3	62,9	57,6	53,2	46,2	40,9
2,0	140	129	120	112	105	93,2	88,4	80,1	71,8	65,1	59,7	55,1	47,9	42,5
2,2	149	137	127	119	111	99,1	94,0	85,3	76,5	69,5	63,7	58,9	51,2	45,5
2,4	157	145	135	126	118	105	99,5	90,3	81,1	73,7	67,6	62,5	54,4	48,4
2,6	165	152	142	132	124	110	105	95,2	85,5	77,7	71,3	66,0	57,5	51,1
2,8	173	160	148	138	130	116	110	99,8	89,7	81,6	74,9	69,3	60,5	53,8
3,0	181	167	155	145	136	121	115	104	93,8	85,3	78,4	72,5	63,3	56,4

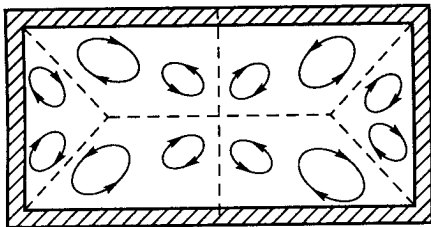


Рис. 3.16

Формулу (3.70) застосовують для труб круглого (при  $R = \frac{D}{4}$ ) та некруглого (рис. 3.16) перерізів, а також для відкритих каналів (див. рис. 3.2, б). В останніх випадках течія не є вісесиметричною, що позначається на величині дотичних напружень у різних точках змоченого периметра. Очевидно, це — одна з причин появи вторинних течій у площині живого перерізу, тобто поперечної циркуляції. За даними Л. Г. Лойцяньського [9], оцінка гідравлічних опорів для некруглих перерізів залежно від гідравлічного радіуса є досить грубою, оскільки останній недостатньо враховує форму живого перерізу. Це явище недостатньо вивчене, але для деяких типів перерізів у літературі є рекомендації щодо інженерних розрахунків.

Окрім формули Павловського є й інші пропозиції щодо визначення швидкісного множника  $C$  або швидкісної характеристики  $W$ . Деякі з них розглядаються при вивченні рівномірного руху води у відкритих руслах.

### 3.7. Місцеві гідравлічні опори і втрати напору

Місцеві опори в трубах і каналах зумовлені різними факторами. До них належать: різка зміна конфігурації потоку; течія із зміною швидкості; поперечна циркуляція потоку; злиття потоків.

Розглянемо окремо кожний із цих факторів.

1. Різка зміна конфігурації потоку (рис. 3.17, а—г). При різкій зміні конфігурації живого перерізу або при різкому повороті потік обтікає кути, що утворилися при зміні напряду стінок русла. При обтіканні цих кутів за ними утворюються коловоротні зони, на обертальний рух рідини в яких витрачається енергія (напір).

Найбільші коловоротні зони виникають поряд із великими швидкостями транзитного потоку, які сприяють збільшенню інтенсивності закручування води в них. Це відбувається безпосередньо за місцевим опором.

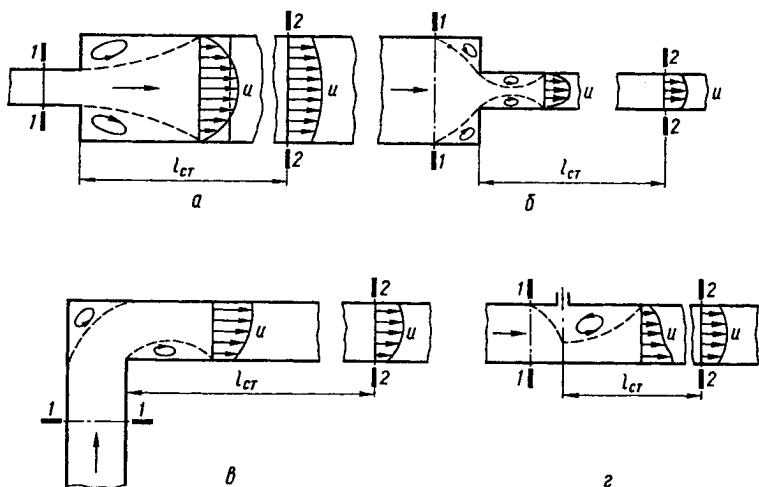


Рис. 3.17

Між транзитним потоком і коловоротними зонами виникають поверхні розподілу (на рис. 3.17 показано штриховими лініями).

На поверхні розподілу утворюються окремі вихори, які безперервно переміщуються. Течію в таких зонах називають *відривною*.

Відрив потоку відбувається також при протіканні рідини крізь різні фасонні частини — арматуру (вентилі, засувки, клапани, фільтри).

2. При течії рідини із зменшенням швидкості на ділянках, які розширюються (дифузори), тиск збільшується (рис. 3.18, а). Рух

при розширенні йде від перерізу з меншим тиском до перерізу з більшим. Цей протиск утруднює поступальний рух частинок рідини, особливо біля стінок труби, де швидкості мінімальні.

При кутах розширення  $\beta > 8...10^\circ$  частинки рідини біля стінок можуть зупинитися і навіть почати рухатися в протилежний бік, що призводить до відриву основного потоку від стінок і утворення коловоротних зон.

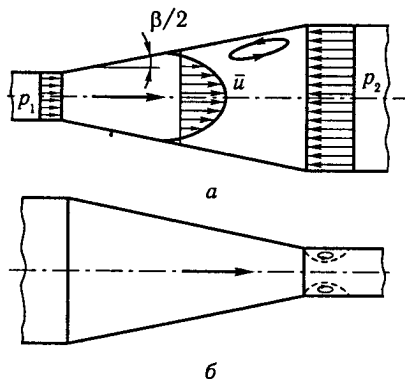


Рис. 3.18

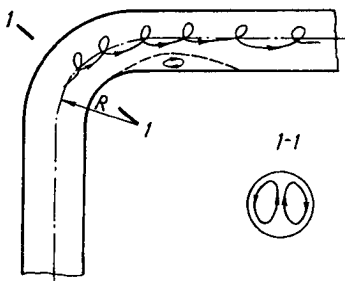


Рис. 3.19

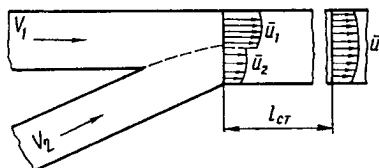


Рис. 3.20

При русі на звужених ділянках (конфузорах) такі явища не відбуваються (рис. 3.18, б), тому що різниця тисків тут не перешкоджає руху, а сприяє йому і втрати напору в конфузорах менші, ніж у дифузорах.

3. Поперечна циркуляція потоку (рис. 3.19). При плавному повороті труби або каналу виникають відцентрові сили, що збільшують тиск біля угнутої стінки труби і зменшують його біля опуклої. Внаслідок цього складаються умови для руху рідини в поперечному напрямі від області більшого тиску до області меншого тиску. Таке явище називають *поперечною циркуляцією*.

Після повороту рух стає поступально-обертальним. Поперечна циркуляція затухає на деякій відстані від повороту.

4. Злиття потоків (рис. 3.20). При злитті двох потоків виникає поверхня розподілу з різними швидкостями частинок з обох боків від неї.

Втрати енергії зумовлюються витратою її на переформування кінематичної структури потоку.

Для переформування кінематичної структури потоку після місцевих опорів, згасання поперечних циркуляцій і пульсацій швидкостей необхідна прямолінійна ділянка потоку, яку називають *ділянкою стабілізації*  $l_{ст}$  (рис. 3.17, 3.20). Втрати напору (енергії) на стабілізацію потоку на цій ділянці входять у загальні місцеві втрати напору (енергії).

**Формула Вейсбаха для визначення місцевих втрат напору.** Визначити загальну теоретичну залежність для місцевих втрат напору неможливо через велику різноманітність їх.

У 1840 р. Ю. Вейсбах запропонував визначати місцеві втрати напору за формулою

$$h_m = \xi \frac{V^2}{2g}, \quad (3.73)$$

де  $\xi$  — коефіцієнт місцевих опорів, який визначають за даними експериментів. Деякі значення для квадратичної області опору наведено в табл. 3.4.



Таблиця 3.4. Коефіцієнти місцевих опорів  $\xi_{\text{кв}}$  і коефіцієнти  $B$ , що враховують вплив числа Рейнольдса

Вид опору	$\xi_{\text{кв}}$	$B$
Пробковий кран	0,4...1,5	150
Вентиль	2,5...6,0	900...3000
Засувка, повністю відкрита (див. рис. 3.17, з)	0,15	75
Вхід із резервуара в трубу	0,5	30
Вихід із труби в резервуар	1	30
Вхід у трубу з сіткою	6	—
Те саме, з оборотним клапаном	10	—
Різкий поворот труби на кут $30^\circ$	0,155	—
Те саме, на кут $45^\circ$	0,318	—
» на кут $60^\circ$	0,555	—
» на кут $90^\circ$ (див. рис. 3.17, в)	1,19	400
Плавний поворот труби на кут $\varphi^\circ$ : при радіусі повороту $R_{\text{п}} = 1,5D$	$0,45 \frac{\varphi}{90^\circ}$	180
те саме, $R_{\text{п}} = 2,5D$	$0,42 \frac{\varphi}{90^\circ}$	180

Примітка. Для заірної арматури при повному відкритті та відсутності необхідних даних про величину  $B$  можна наближено брати  $B = 500\xi_{\text{кв}}$ .

Коефіцієнт опору при раптовому розширенні потоку (див. рис. 3.17, а) визначають за формулою

$$\xi_{\text{р.р}} = \alpha_1 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2, \quad (3.74)$$

де  $\omega_1$  і  $\omega_2$  — відповідно площі живих перерізів до і після розширення потоку. Коефіцієнт опору при раптовому звуженні (див. рис. 3.17, б) можна визначити за приблизною формулою Ідельчика

$$\xi_{\text{р.з}} = 0,5 \left( 1 - \frac{D_2^2}{D_1^2} \right), \quad (3.75)$$

де  $D_1$  і  $D_2$  — відповідно діаметри труб до і після звуження потоку.

Швидкісний напір  $\frac{V^2}{2g}$  у формулі (3.73) звичайно обчислюють залежно від швидкості за місцевим опором.

Місцеві втрати напору  $h_{\text{м}}$  визначають із рівняння Бернуллі для перерізів до місцевого опору і в кінці ділянки стабілізації. Між цими перерізами виникають втрати напору на місцевому

опорі і по довжині на ділянці стабілізації (рис. 3.21). Наприклад, для горизонтальної труби

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + h_m + \lambda \frac{l_{ст}}{D} \frac{V_2^2}{2g}.$$

Звідси

$$h_m = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha(V_1^2 - V_2^2)}{2g} - \lambda \frac{l_{ст}}{D} \frac{V_2^2}{2g}, \quad (3.76)$$

а якщо  $D_1 = D_2 = D = \text{const}$  і  $V_1 = V_2$ , то

$$h_m = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} - \lambda \frac{l_{ст}}{D} \frac{V^2}{2g}. \quad (3.77)$$

**Стабілізація потоку за місцевими опорами і взаємний вплив їх.** Кожний місцевий опір деформує потік, збільшує пульсацію і перерозподіляє осереднені швидкості по перерізу. Як правило, коефіцієнт кінетичної енергії  $\alpha$  за місцевим опором більший, ніж при рівномірному стабілізованому русі. Розглянемо процес стабілізації потоку на прикладі протікання рідини крізь засувку, яка не повністю відкрита (рис. 3.22). Безпосередньо за місцевим опором епюра може бути як завгодно деформована, іноді можуть виникати навіть зворотні течії.

Далі при збільшенні відстані від місцевого опору епюра буде змінювати свою форму. За рахунок взаємного впливу при перемішуванні частинок із великою і малою швидкостями останні

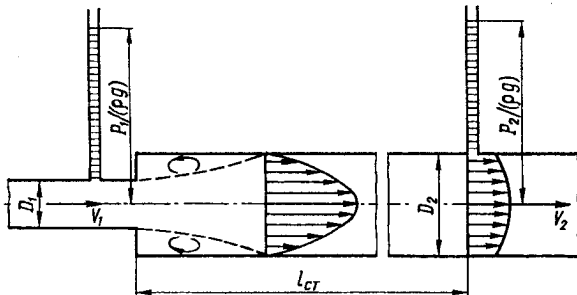


Рис. 3.21

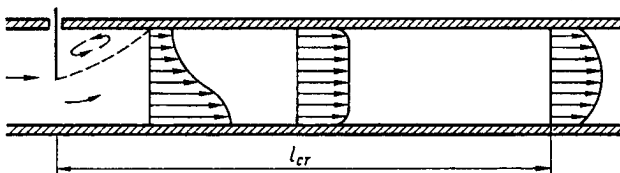


Рис. 3.22

будуть вирівнюватися, а еюра швидкостей буде наближатися до прямокутника з коефіцієнтом кінетичної енергії  $\alpha \approx 1$ . При подальшому русі рідини під впливом сил тертя на стінках труби еюра буде поступово витягуватися і на деякій відстані набере форми, що відповідає стабілізованому руху ( $\alpha \approx 1,08 \dots 1,1$ ). Довжина ділянки стабілізації  $l_{\text{ст}}$  залежить від коефіцієнта місцевого опору  $\xi$ , гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda_{\text{ст}}$  при стабілізованому русі, діаметра труби  $D$ . За даними О. О. Гіжі,

$$l_{\text{ст}} = 19D(1 - e^{-0,6\xi}) + \frac{0,45D}{\lambda_{\text{ст}}}. \quad (3.78)$$

Відносну довжину ділянки стабілізації можна визначити за графіком  $l_{\text{ст}}/D = f(\lambda_{\text{ст}}; \xi)$  (рис. 3.23).

Якщо в трубі є кілька місцевих опорів, то втрати напору в них треба складати. Проте якщо відстані між опорами відносно невеликі, загальні втрати напору можуть відрізнитися від суми втрат на кожному з них.

Це можна пояснити тим, що потік після першого місцевого опору не встигає стабілізуватися до другого. Якщо довжина труби між цими опорами  $l_{\text{тр}}$  менше довжини ділянки стабілізації, то втрати напору на першому опорі виявляються неповністю.

Коефіцієнт такого місцевого опору можна обчислити за формулою

$$\xi_1 = \beta\xi, \quad (3.79)$$

де  $\xi$  — коефіцієнт місцевого опору, який визначають за табл. 3.4;  $\beta$  — коефіцієнт зменшення місцевого опору, який визначають за графіком (рис. 3.24).

Формулу (3.79) можна застосовувати при  $l_{\text{тр}}/l_{\text{ст}} = 0,15 \dots 1,0$ .

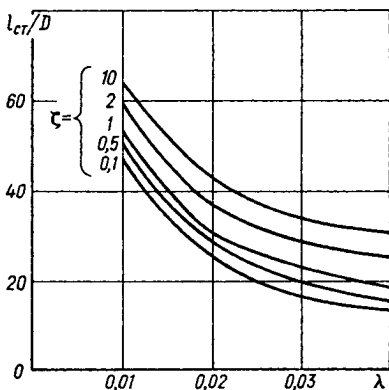


Рис. 3.23

■ **Приклад.** У трубі довжиною  $l = 20$  м і діаметром  $D = 100$  мм є ділянка довжиною  $l_1 = 1$  м, на початку і в кінці якої встановлені засувки з коефіцієнтами опорів  $\xi_1 = 10$  і  $\xi_2 = 2$ . Гідравлічний коефіцієнт тертя  $\lambda = 0,03$ . Визначити втрати напору в трубі при витраті води  $Q = 80$  л/с.

За графіком (рис. 3.23) при  $\lambda = 0,03$  і  $\xi_1 = 10$  визначаємо довжину ділянки стабілізації  $l_{ст} = 34 \cdot D = 3,4$  м.

Відстань між засувками  $l_1 = 1$  м менша, ніж ділянка стабілізації. То-

му до коефіцієнта опору першої засувки треба ввести коефіцієнт  $\beta$ . При

$\frac{l_1}{l_{ст}} = \frac{1}{3,4} = 0,294$  і  $\lambda = 0,03$  за графіком (рис. 3.24) дістанемо  $\beta = 0,83$ .

Тоді втрати напору в трубі

$$h_{втр} = \left( \lambda \frac{l}{D} + \beta \cdot \xi_1 + \xi_2 \right) \frac{Q^2}{2g\omega^2};$$

$$h_{втр} = \left( 0,03 \frac{20}{0,1} + 0,83 \cdot 10 + 2 \right) \frac{0,08^2 \cdot 16}{2 \cdot 9,8 \cdot 3,14^2 \cdot 0,1^4} = 0,86 \text{ м.}$$

Наведені вище рекомендації стосуються розвинутого турбулентного руху з великими числами Рейнольдса, тобто руху при незначному впливі в'язкості на коефіцієнти місцевих опорів. При малих числах Рейнольдса на значення місцевих опорів (як і на величину гідравлічного коефіцієнта тертя) впливають також сили в'язкісного тертя, що враховано формулою Альтшуля

$$\xi = \frac{B}{Re} + \xi_{кв}, \quad (3.80)$$

де  $B$  — коефіцієнт, який визначають для різних місцевих опорів за табл. 3.4;  $\xi_{кв}$  — коефіцієнт розглядуваного місцевого опору, який визначають за наведеними вище рекомендаціями.

### 3.8. Опір при відносному русі твердого тіла та рідини

При вивченні відносного руху твердого тіла і рідини розглядають два якісно подібних випадки: рух тіла в рідині, яка не рухається, або обтікання нерухомого тіла потоком рідини. Ці випадки належать до зовнішньої задачі гідродинаміки, основою якої є визначення сили опору рідини руху тіла або сили тиску рідини на тіло.

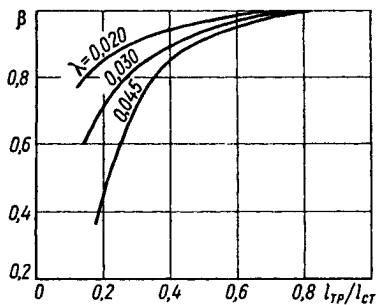


Рис. 3.24

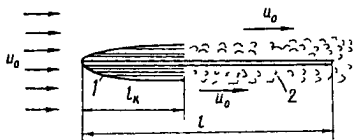


Рис. 3.25

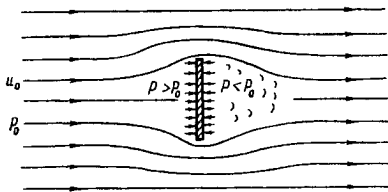


Рис. 3.26

Опір рідини руху тіла  $F$  можна подати як суму опорів тертя  $F_{\text{тер}}$  і тиску  $F_{\text{тис}}$ :

$$F = F_{\text{тер}} + F_{\text{тис}}. \quad (3.81)$$

Опір тертя в чистому вигляді можна подати як опір тонкої пластинки, встановленої вздовж напрямку руху потоку (рис. 3.25). Опір тиску можна визначити, розглядаючи опір такої самої пластинки, встановленої нормально до напрямку руху потоку (рис. 3.26).

Звичайно діють обидва види опорів, хоча один із них може переважати інший.

**Опір тертя і поняття про пограничний шар.** При встановленні пластинки паралельно лініям течії (рис. 3.25) уздовж неї утворюється пограничний шар рідини, в якому кінематика руху рідини відрізняється від кінематики руху решти потоку. Біля самої пластинки швидкість наближається до нуля, а з віддаленням від стінки поступово збільшується до швидкості незбуреного потоку. Практично вважають, що границя пограничного шару проходить там, де швидкість  $u = 0,99u_0$  ( $u_0$  — швидкість незбуреного потоку).

Пограничний шар починається біля переднього краю пластинки і поступово розширюється зі збільшенням відстані від цього краю.

Пограничний шар може бути ламінарним чи турбулентним. Ламінарний пограничний шар  $l$  встановлюється найчастіше у передній частині пластинки. На деякій відстані  $l_k$  від переднього краю пластинки ламінарний пограничний шар переходить у турбулентний 2.

Критерій переходу визначають за числом Рейнольдса

$$\text{Re}_k = \frac{u_0 l_k}{\nu} = (3 \dots 4,85) \cdot 10^5. \quad (3.82)$$

Якщо довжина пластинки  $l < l_k$ , а отже,  $\text{Re} = \frac{u_0 l}{\nu} < \text{Re}_k$ , то весь пограничний шар буде ламінарним. При великих числах

Ре частина пограничного шару буде ламінарною, а частина турбулентною.

Опір тертя можна визначити за формулою

$$F_{\text{тер}} = C_{\text{тер}} \omega \rho \frac{u_0^2}{2}, \quad (3.83)$$

де  $C_{\text{тер}}$  — коефіцієнт опору тертя;  $\omega$  — площа обтічної поверхні тіла (у цьому випадку площа пластинки з обох боків).

При ламінарному пограничному шарі за Блазіусом

$$C_{\text{тер}} = 1,33/\sqrt{\text{Re}}. \quad (3.84)$$

При турбулентному пограничному шарі коефіцієнт опору можна визначити за формулою Альтшуля

$$C_{\text{тер}} = 0,03 \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{l} + \frac{83}{\text{Re}} \right)^{0,2}, \quad (3.85)$$

де  $\Delta_{\text{екв}}$  — еквівалентна шорсткість.

При малих шорсткостях і малих швидкостях руху води  $\left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{l} \ll \frac{83}{\text{Re}} \right)$  ця формула перетворюється у формулу Кармана

$$C_{\text{тер}} = 0,072 \text{Re}^{-0,2}, \quad (3.86)$$

а для великих швидкостей і значних шорсткостей

$$C_{\text{тер}} = 0,03 (\Delta_{\text{екв}}/l)^{0,2}. \quad (3.87)$$

**Опір тиску.** Якщо пластинка встановлена нормально до напрямку руху потоку (рис. 3.26), то струминки рідини чинять додатковий тиск на її лобову поверхню. Із зворотного боку пластинки струмінь відривається від неї і виникає коловоротна область зі зниженим тиском. Унаслідок дії збільшеного тиску з лобового боку і зниження із зворотного боку виникає опір тиску, напрямлений назустріч потоку.

Опір тиску можна визначити за формулою, запропонованою Ньютоном,

$$F_{\text{тис}} = C_{\text{тис}} \omega \rho \frac{u_0^2}{2}, \quad (3.88)$$

де  $C_{\text{тис}}$  — коефіцієнт опору тиску, який залежить від форми тіла, що обтікається, і числа Рейнольдса;  $\omega$  — площа міделевого перерізу, тобто проекція тіла на площину, яка нормальна до напрямку руху тіла (або рідини);  $\rho$  — густина рідини;  $u_0$  — швидкість цього руху.

Число Рейнольдса істотно впливає на характер обтікання.

При обтіканні кулі за дуже малих чисел  $Re = \frac{u_0 d}{\nu} < 1$  ( $d$  — еквівалентний діаметр частинки) коефіцієнт опору визначають за теоретичною формулою Стокса

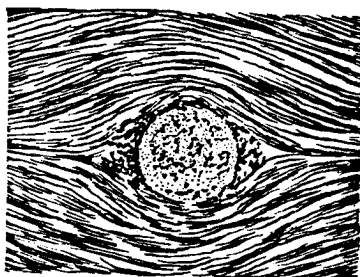
$$C_{\text{тис}} = 24 / Re, \quad (3.89)$$

де  $C_{\text{тис}}$  — коефіцієнт опору тиску.

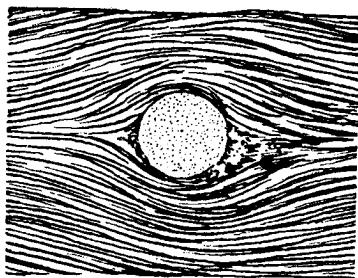
При великих числах Рейнольдса коефіцієнт опору визначають за дослідними даними. Деякі з них наведено в табл. 3.5.

Характерною особливістю обтікання плавно окреслених тіл (кулі, циліндра) є різке зменшення коефіцієнтів опору при значному збільшенні чисел Рейнольдса (рис. 3.27, табл. 3.5). Дослідження свідчать, що при цьому відбувається відрив ламінарного пограничного шару й утворення вихрової доріжки (рис. 3.27), при числі Рейнольдса  $Re = 250$ .

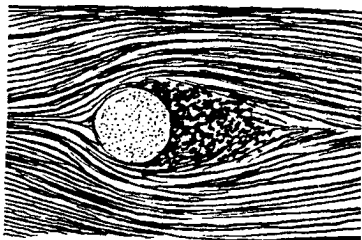
Падіння твердих частинок у рідині. Залежності по визначенню сили опору руху тіл у рідині набувають подальшого розвитку при розгляданні умов пересування твердих частинок у рідині. Це пов'язано з розв'язанням таких практичних задач,



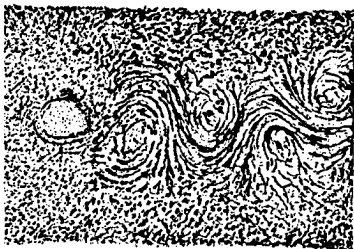
$Re = 0,25$



$Re = 1,5$



$Re = 9$



$Re = 250$

Рис. 3.27

Таблиця 3.5. Коефіцієнти опору тиску деяких тіл

Форма тіла	$C_{\text{тис}}$	Re
Куля	0,47	1000...300 000
Круглий циліндр нескінченної довжини	0,22	300 000
	1,2	200 000
Куб	0,3	500 000
	1,2	—

як відстоювання рідини, розрахунки відстійників, гідро- та пневмотранспорту.

Розглянемо падіння твердих частинок у рідині. Умовно вважатимемо, що тверда частинка має форму кулі з діаметром  $d$  (рис. 3.28). Падіння її відбувається під дією сили тяжіння

$$G = (\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{р}}) g \frac{\pi d^3}{6}, \quad (3.90)$$

де  $\rho_{\text{т}}$  — густина твердої частинки;  $\rho_{\text{р}}$  — густина рідини;  $g$  — прискорення вільного падіння.

Дослідження свідчать, що падіння частинки відбувається рівномірно із швидкістю  $V_{\text{г.к}}$ , яку при температурі 10 °С називають *гідралічною крупністю частинки*. Під час падіння частинки виникає опір, який з урахуванням виразу (3.88) визначають за формулою

$$F = C_{\text{тис}} \frac{\pi d^2}{4} \rho_{\text{р}} \frac{V_{\text{г.к}}^2}{2}. \quad (3.91)$$

Оскільки падіння відбувається рівномірно, то сили тяжіння й опору  $G = F$ , тобто

$$(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{р}}) g \frac{\rho d^3}{6} = C_{\text{тис}} \frac{\pi d^2}{4} \rho_{\text{р}} \frac{V_{\text{г.к}}^2}{2}. \quad (3.92)$$

Звідси гідралічна крупність

$$V_{\text{г.к}} = \sqrt{\frac{4(\rho_{\text{т}} - \rho_{\text{р}})gd}{3\rho_{\text{р}}C_{\text{тис}}}}. \quad (3.93)$$

При  $Re > 1$  коефіцієнт опору залежить від числа Рейнольдса і від форми частинки. На рис. 3.29 наведено дослідні дані О. П. Зегжда для піску та гравію і Л. І. Седова для куль.

Графік показує, що для частинок неправильної форми коефіцієнт опору є більшим, ніж для куль. При великих числах



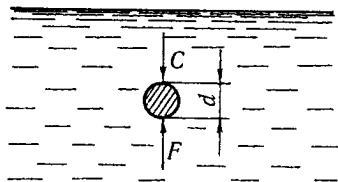


Рис. 3.28

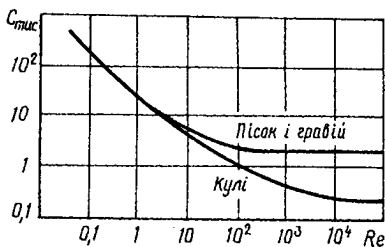


Рис. 3.29

Рейнольдса значення коефіцієнта опору не залежить від  $Re$  (наприклад, для піску і гравію при  $Re \geq 240$ ).

При числах  $Re = \frac{V_{г.к} \cdot d}{\nu} \leq 1$  коефіцієнт опору тиску визначається за теоретичною формулою Стокса  $C_{тис} = \frac{24}{Re}$ . Тоді

$$V_{г.к} = \frac{\rho_T - \rho_P}{18\mu} g \cdot d^2, \quad (3.94)$$

де  $\mu = \rho_P \cdot \nu$  — динамічна в'язкість рідини.

✦ **Приклад.** Визначити гідравлічну крупність частинки ґрунту з еквівалентним діаметром  $d_{екв} = 0,1$  мм при  $t = 10$  °С, якщо густина твердих частинок  $\rho_T = 1600$  кг/м<sup>3</sup>.

У першому наближенні беремо коефіцієнт опору тиску  $C_{тис} = 2$ , що відповідає числам Рейнольдса  $Re > 240$ . Тоді

$$V_{г.к} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{\rho_T - \rho_P}{\rho_P} \cdot \frac{g \cdot d}{C_{тис}}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{1600 - 1000}{1000} \cdot \frac{9,81 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,0198 \text{ м/с.}$$

Уточнюємо число Рейнольдса  $Re = \frac{0,0198 \cdot 0,0001}{0,0152 \cdot 10^{-4}} = 1,3$ . За графіком (рис. 3.29)  $C_{тис} = 20$ , тоді у другому наближенні

$$V_{г.к} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{1600 - 1000}{1000} \cdot \frac{9,81 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3}}{20}} = 0,006 \text{ м/с.}$$

Зміна  $V_{г.к}$  порівняно із першим наближенням значна, тому проводимо третє наближення:

$$Re = \frac{0,006 \cdot 0,0001}{0,0152 \cdot 10^{-4}} = 0,39.$$

При числах  $Re < 1$

$$V_{г.к} = \frac{\rho_T - \rho_p}{18 \cdot \rho_p \cdot \nu} g \cdot d^2 = \frac{1600 - 1000}{18 \cdot 1000 \cdot 0,0152 \cdot 10^{-4}} 9,81 \cdot 0,0001^2 = 0,002 \text{ м/с};$$

$$V_{г.к} = 2 \text{ мм/с.}$$

При падінні твердих частинок у повітрі швидкість падіння називають швидкістю витання  $V_{\text{вит}}$ . Оскільки густина повітря  $\rho_{\text{пов}}$  значно менша від густини твердих частинок, то в різниці  $(\rho_T - \rho_p)$  у формулі (3.93) без великої помилки можна нехтувати величиною  $\rho_p = \rho_{\text{пов}}$ .

Тоді швидкість витання

$$V_{\text{вит}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{\rho_T g d}{\rho_{\text{пов}} C_{\text{тис}}}} \quad (3.95)$$

# 4 УСТАЛЕНИЙ РУХ РІДИНИ В НАПІРНИХ ТРУБОПРОВОДАХ

## 4.1. Короткі та довгі трубопроводи

Трубопроводи розраховують за рівнянням Бернуллі (2.68) з урахуванням втрат напору місцевих та по довжині.

Трубопровід може складатися із кількох ділянок із різними діаметрами труб або з труб із різних матеріалів, а також може мати по своїй довжині різні місцеві опори. В цьому випадку в праву частину рівняння Бернуллі треба вводити суму втрат напору по довжині на різних ділянках і суму місцевих втрат напору:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \Sigma \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} + \Sigma \zeta \frac{V^2}{2g}. \quad (4.1)$$

Якщо довжина трубопроводу велика, то втрати напору по довжині можуть виявитися значно більшими, ніж місцеві. В цьому випадку місцевими втратами можна нехтувати. Такі трубопроводи називають *довгими*.

У *коротких трубопроводах* місцеві втрати напору сумірні з втратами по довжині, і тому при розрахунках треба враховувати обидва види втрат напору.

На практиці трубопровід вважають коротким, якщо місцеві втрати становлять більше ніж 5...10 % втрат по довжині.

При розрахунках водопроводів трубопровід можна вважати коротким, якщо його довжина  $l < 50$  м, і довгим, якщо  $l > 100$  м.

Якщо  $l \approx 50...100$  м, трубопровід може бути як довгим, так і коротким.

## 4.2. Розрахунки коротких трубопроводів

**Всмоктувальна лінія насоса** (рис. 4.1). Мета розрахунків — визначення висоти всмоктування насоса  $h_{\text{вс}}$ . Для розрахунку  $h_{\text{вс}}$  беремо перерізи на поверхні рідини в резервуарі 1-1 і перед входом у насос 2-2. Площина порівняння проходить через переріз 1-1.

Складаємо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2 з урахуванням усіх втрат напору:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \Sigma h_m + \Sigma h_l.$$

У цьому випадку

$$p_1 = p_a; \quad z_1 = 0; \quad V_1 = 0; \quad z_2 = h_{\text{вс}}; \quad \alpha \approx 1, 0; \quad V_2 = V = Q/\omega.$$

З урахуванням цього рівняння Бернуллі набирає вигляду

$$\frac{p_a}{\rho g} = h_{\text{вс}} + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{Q^2}{2g\omega^2} + \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g\omega^2} + \Sigma \zeta \frac{Q^2}{2g\omega^2}.$$

Оскільки

$$\frac{p_a - p_2}{\rho g} = h_{\text{вак}},$$

то висота всмоктування насоса

$$h_{\text{вс}} = h_{\text{вак}} - \frac{Q^2}{2g\omega^2} \left( 1 + \lambda \frac{l}{D} + \Sigma \zeta \right). \quad (4.2)$$

Це рівняння показує, що висота всмоктування завжди менша, ніж вакуумметрична висота, тому що частина вакууму витрачається на створення швидкісного напору  $\frac{Q^2}{2g\omega^2}$  (тобто на створення руху рідини), а також на подолання гідравлічних опорів. Для надійної роботи насосів, щоб запобігти переходу води у пароподібний стан при низьких тисках, частіше беруть  $h_{\text{вак}} \leq 6 \dots 7$  м. Тому гранична висота всмоктування насоса не повинна перевищувати 4...6 м.

**Скидна труба з резервуара** (рис. 4.2). Таку трубу встановлюють для того, щоб запобігти переповненню резервуара.

Вибираємо розрахункові перерізи 1-1 на поверхні води в резервуарі та 3-3 на виході води з труби. Площина порівняння проходить через переріз 3-3;  $p_1 = p_3 = 0$  (манометричний тиск);  $z_1 = H$ ;  $V_1 = 0$ .

Тоді рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 3-3 матиме вигляд

$$H = \frac{Q^2}{2g\omega^2} \left( 1 + \lambda \frac{l}{D} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}} \right), \quad (4.3)$$

де  $\zeta_{\text{вх}}$  і  $\zeta_{\text{пов}}$  — коефіцієнти місцевих опорів відповідно на вході в трубу і на повороті.

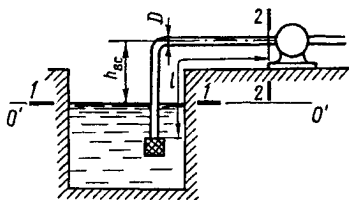


Рис. 4.1

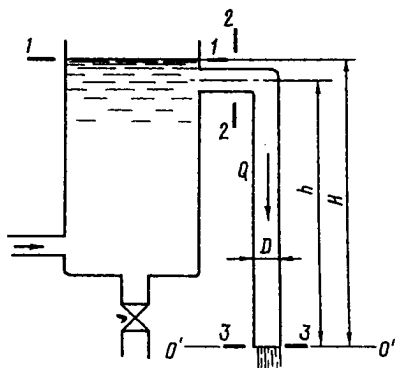


Рис. 4.2

Рівняння показує, що чим більша скидна витрата  $Q$ , тим більшою має бути різниця відміток виходу з труби і поверхні резервуара  $H$ . Якщо скидну трубу обрізати на більш високій відмітці, то вона пропустить меншу витрату. Це явище пояснюють тим, що в скидній трубі виникає вакуум, який має найбільше значення в перерізі 2-2. Значення вакууму можна визначити з рівняння Бернуллі для перерізів 2-2 і 3-3:

$$h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_3^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{D} + \zeta_{\text{пов}} \right) + \frac{p_a}{\rho g}.$$

Оскільки  $V_2 = V_3 = V$  і  $l = h$ , то

$$\frac{p_a - p_2}{\rho g} = h + \frac{V^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} - \lambda \frac{h}{D} \frac{V^2}{2g} - \zeta_{\text{пов}} \frac{V^2}{2g}$$

і

$$h_{\text{вак}} = h \left( 1 - \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} \right) - \zeta_{\text{пов}} \frac{V^2}{2g}. \quad (4.4)$$

Із рівняння випливає, що чим нижче буде кінець труби, тим більшими будуть вакуум, швидкість та витрата в трубі і тим меншим тиск. Вакуумметрична висота не повинна бути більшою, ніж допустима ( $h_{\text{вак}} \leq 7$  м).

**Напірний резервуар з трубопроводом, що складається з двох ділянок різного перерізу (рис. 4.3).** Посередині другої ділянки встановлено вентиль. Площину порівняння проведемо через вісь труби. Рівняння Бернуллі (4.1) запишемо для перерізів  $O-O$  на поверхні резервуара і  $2'-2'$  у кінці другої ділянки:

$$H = \frac{\alpha V_2^2}{2g} + \zeta_{\text{вх}} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1 V_1^2}{D_1 2g} + \zeta_{\text{розш}} \frac{V_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2 V_2^2}{D_2 2g} + \zeta_{\text{вент}} \frac{V_2^2}{2g}.$$

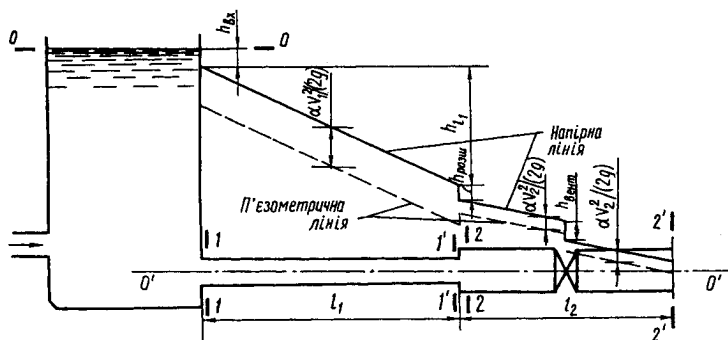


Рис. 4.3

Згідно з рівнянням нерозривності (2.24)

$$V_1 = V_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} = V_2 \frac{D_2^2}{D_1^2}.$$

Тоді

$$H = \frac{V_2^2}{2g} \left( \alpha + \zeta_{\text{вх}} \frac{D_2^4}{D_1^4} + \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{D_2^4}{D_1^4} + \zeta_{\text{розш}} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} + \zeta_{\text{вигт}} \right). \quad (4.5)$$

Із рівняння (4.5) при відомому напорі  $H$  можна визначити швидкість на другій ділянці труби  $V_2$  і витрату  $Q = V_2 \omega_2$ . Якщо задана витрата, то можна визначити швидкість  $V_2 = Q / \omega_2$ , а потім напір у резервуарі  $H$ . Із рівняння (2.24) за швидкістю на другій ділянці труби обчислюють швидкість  $V_1$  на першій ділянці.

При відомих швидкостях  $V_1$  і  $V_2$  та напорі  $H$  можна побудувати напірну та п'езометричну лінії, які повніше характеризують умови протікання води в трубі. Для цього треба заздалегідь обчислити втрати напору на кожній ділянці і на кожному місцевому опорі. Для побудови напірної лінії при вході в трубу із резервуара від відмітки напору  $H$  відкладають вниз значення втрат напору на вході  $h_{\text{вх}}$ . У кінці першої ділянки напір зменшується ще й на величину  $h_{l_1}$ , причому це зменшення відбувається поступово на всій довжині ділянки. Аналогічно відкладають і величини інших втрат напору. П'езометричну лінію будують паралельно напірній, нижче останньої на величину швидкісного напору  $\frac{\alpha V^2}{2g}$  для кожної ділянки.

У місцях раптового розширення труби п'езометрична лінія може підніматися через зменшення швидкості та збільшення тиску.

■ **Приклад.** Визначити витрату води, побудувати напірну та п'єзометричну лінії з урахуванням гідравлічних опорів для трубопроводу (рис. 4.4), що складається з трьох ділянок, які з'єднують два резервуари. Гідравлічні коефіцієнти тертя  $\lambda_1 = \lambda_3 = 0,022$ ,  $\lambda_2 = 0,028$ , довжини ділянок відповідно  $l_1 = 30$  м,  $l_2 = 30$  м,  $l_3 = 40$  м. Діаметри труб  $D_1 = D_3 = 200$  мм,  $D_2 = 100$  мм, у центрі другої ділянки встановлено засувку. Різниця рівнів води в резервуарах  $\Delta H = 14$  м.

Покажемо на схемі розрахункові перерізи  $O-O$  та  $4-4$ . Складемо рівняння Бернуллі для цих перерізів відносно площини порівняння  $O'-O'$ , що проходить по осі трубопроводу:

$$H_1 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha V_0^2}{2g} = H_4 + \frac{p_4}{\rho g} + \frac{\alpha V_4^2}{2g} + \Sigma h_{вт},$$

де  $\alpha = 1,0$ ;  $H_1 - H_4 = \Delta H$ ,  $p_0 = p_4 = p_a$ ,  $V_0 \approx 0$ ,  $V_4 \approx 0$ ;  $\Sigma h_{вт}$  — сума всіх втрат напору.

Усі втрати напору

$$\begin{aligned} \Delta H = \Sigma h_{вт} = & \xi_{вх} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \xi_{р.зв} \frac{V_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \\ & + \xi_{зас} \frac{V_2^2}{2g} + \xi_{р.розш} \frac{V_3^2}{2g} + \lambda_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} + \xi_{вих} \frac{V_3^2}{2g}. \end{aligned}$$

За табл. 3.4 визначасмо всі коефіцієнти місцевих опорів:  $\xi_{вх} = 0,5$  — коефіцієнт входу з резервуара в трубу;  $\xi_{вих} = 1,0$  — коефіцієнт виходу з труби в резервуар;  $\xi_{зас} = 0,15$  — коефіцієнт опору засувки;  $\xi_{р.зв}$  — коефіцієнт раптового звуження труби; при  $\frac{D_2}{D_1} = \frac{100}{200} = 0,5 \rightarrow \xi_{р.зв} = 0,4$ ;

$\xi_{р.розш}$  — коефіцієнт раптового розширення труби; при  $\frac{D_3}{D_2} = \frac{200}{100} = 2,0 \rightarrow \xi_{р.розш} = 9,0$ .

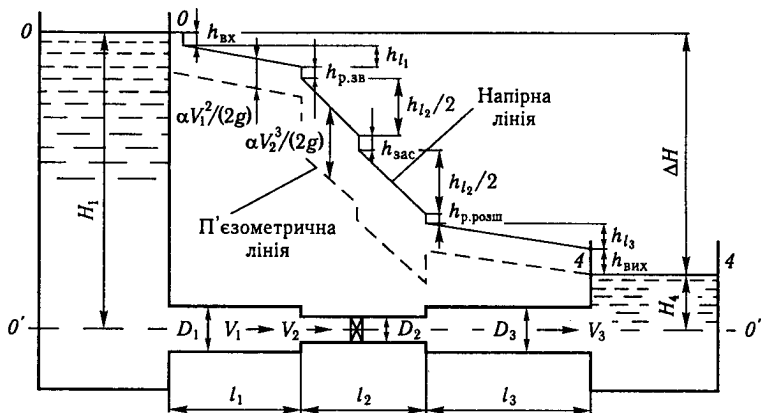


Рис. 4.4

Згідно з рівнянням нерозривності середні швидкості  $V_1 = V_3 = \frac{4 \cdot Q}{\pi D_1^2}$ ;  
 $V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi D_2^2}$ .

Тоді рівняння Бернуллі набирає вигляду

$$\Delta H = \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D_1^4} \left( \xi_{\text{вх}} + \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \xi_{\text{р.розш}} + \lambda_3 \frac{l_3}{D_3} + \xi_{\text{вих}} \right) + \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D_2^4} \left( \xi_{\text{р.зв}} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} + \xi_{\text{зас}} \right).$$

Звідси визначимо витрату

$$Q = \sqrt{\frac{2g\pi^2 \Delta H}{16 \left[ \left( \frac{\xi_{\text{вх}} + \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} + \xi_{\text{р.розш}} + \lambda_3 \frac{l_3}{D_3} + \xi_{\text{вих}}}{D_1^4} \right) + \left( \frac{\xi_{\text{р.зв}} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} + \xi_{\text{зас}}}{D_2^4} \right) \right]}}$$

Підставимо вихідні дані:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,8 \cdot (3,14)^2 \cdot 14}{16 \left[ \left( \frac{0,5 + 0,022 \frac{30}{0,2} + 9 + 0,022 \frac{40}{0,2} + 1}{(0,2)^4} \right) + \left( \frac{0,4 + 0,028 \frac{30}{0,1} + 0,15}{(0,1)^4} \right) \right]}} = 0,041 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Тепер визначимо середні швидкості та швидкісні напори:

$$V_1 = V_3 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,041}{3,14 \cdot (0,2)^2} = 1,3 \text{ м/с}; \quad \frac{V_1^2}{2g} = 0,087 \text{ м};$$

$$V_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,041}{3,14 \cdot (0,1)^2} = 5,22 \text{ м/с}; \quad \frac{V_2^2}{2g} = 1,39 \text{ м}.$$

Для побудови напірної лінії знайдемо всі втрати напору:

$$h_{\text{вх}} = \xi_{\text{вх}} \frac{V_1^2}{2g} = 0,5 \cdot 0,087 = 0,0435 \text{ м};$$

$$h_{l_1} = \lambda_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} = 0,022 \frac{30}{0,2} \cdot 0,087 = 0,287 \text{ м};$$

$$h_{\text{р.зв}} = \xi_{\text{р.зв}} \frac{V_2^2}{2g} = 0,4 \cdot 1,39 = 0,557 \text{ м};$$

$$h_{l_2} = \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} = 0,028 \frac{30}{0,1} \cdot 1,39 = 11,676 \text{ м};$$



$$h_{\text{зас}} = \xi_{\text{зас}} \frac{V_2^2}{2g} = 0,15 \cdot 1,39 = 0,2085 \text{ м};$$

$$h_{l_3} = \lambda_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{V_3^2}{2g} = 0,022 \cdot \frac{40}{0,2} \cdot 0,087 = 0,383 \text{ м};$$

$$h_{\text{р.розш}} = \xi_{\text{р.розш}} \frac{V_3^2}{2g} = 9 \cdot 0,087 = 0,783 \text{ м}.$$

Тепер від початкового напору  $H_1$  відкладаємо вниз послідовно всі втрати напору. Напірна лінія має більший похил на тих ділянках, де швидкість у трубі є більшою. П'єзометричну лінію відкладаємо паралельно напірній лінії, але нижче її на величину швидкісного напору  $\frac{\alpha V^2}{2g}$ .

**Дюкер** — це напірний трубопровід, що споруджується при перетинанні водоводом річки, каналу, дороги, іншого трубопроводу або будь-якої іншої перешкоди (рис. 4.5).

✦ **Приклад.** Визначити діаметр залізобетонного дюкера для течії води з витратою  $Q = 1 \text{ м}^3/\text{с}$ , якщо різниця відміток поверхні води до і після дюкера  $H = 0,8 \text{ м}$ . Дюкер має 2 повороти з кутом  $\alpha = 30^\circ$  і довжину  $l = 50 \text{ м}$ .

У цьому випадку рівняння Бернуллі застосовують для перерізів до і після дюкера, площину порівняння беремо по поверхні води після дюкера. Тоді  $z_1 - z_2 = H$ ;  $V_1 = V_2$ ;  $p_1 = p_2 = p_a$ . Вся різниця напорів  $H$  витрачається на подолання гідравлічних опорів, тобто

$$H = \left( \xi_{\text{вх}} + 2\xi_{\text{пов}} + \xi_{\text{вих}} + \lambda \frac{l}{D} \right) \frac{V^2}{2g} = \left( \xi_{\text{вх}} + 2\xi_{\text{пов}} + \xi_{\text{вих}} + \lambda \frac{l}{D} \right) \frac{8Q^2}{g\pi^2 D^4}.$$

Це рівняння розв'язують відносно діаметра  $D$  підбором. Вважаємо, що дюкер працює в квадратичній області опору і визначаємо гідравлічний коефіцієнт тертя за формулою (3.60) при еквівалентній шорсткості  $\Delta_{\text{екв}} = 0,8 \text{ мм}$ . Для зручності можна задати кілька значень діаметра  $D$  і побудувати графік  $H = f(D)$  (рис. 4.6). З графіка випливає, що значенню  $H = 0,8 \text{ м}$  відповідає діаметр  $D = 740 \text{ мм}$ . Беремо стандартний діаметр  $800 \text{ мм}$ . Визначаємо середню швидкість у дюкері

$$V = \frac{Q \cdot 4}{\pi D^2} = \frac{1 \cdot 4}{3,14 \cdot 0,8^2} = 1,99 \text{ м/с}.$$

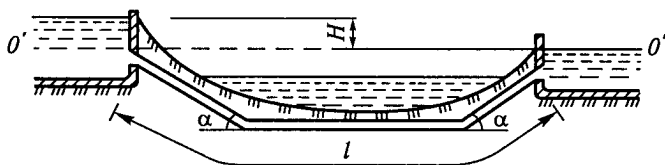


Рис. 4.5

Число Рейнольдса при кінематичній в'язкості  $\nu = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$

$$Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{1,99 \cdot 0,8}{0,01 \cdot 10^{-4}} = 1\,592\,000.$$

Таке значення  $Re > 500 \frac{D}{\Delta_{\text{екв}}} = 500 \frac{800}{0,8} = 500\,000$ , тобто дюкер працює в квадратичній області опору. Уточнення  $\lambda$  не потрібне.

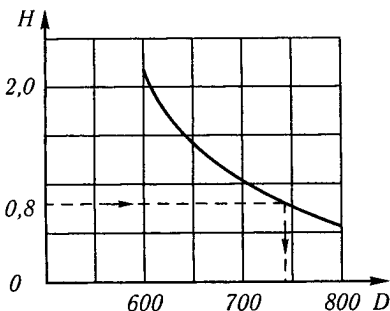


Рис. 4.6

### Сифонний трубопровід

(рис. 4.7). Сифонним трубопроводом називають трубо-

провід, який працює в умовах вакууму. Частина такого трубопроводу розміщена вище відміток водоймища  $A$  і резервуара  $B$ . Особливістю розрахунку є необхідність перевірки величини вакууму в найвищій точці сифона. Проведемо площину порівняння на поверхні резервуара  $B$  і запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 2-2

$$H + \frac{P_a}{\rho g} = H + h + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{D} + \sum_1^2 \zeta \right),$$

де  $h$  — перевищення найвищої точки сифона над поверхнею водоймища  $A$ ;  $l$  — відстань цієї точки від початку сифона;  $\sum_1^2 \zeta$  — сума коефіцієнтів місцевих опорів від початку трубопроводу до перерізу 2-2.

З урахуванням того, що  $\frac{P_a - P_2}{\rho g} = h_{\text{вак}}$ , дістанемо

$$h_{\text{вак}} = h + \frac{V^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{D} + \sum_1^2 \zeta \right). \quad (4.6)$$

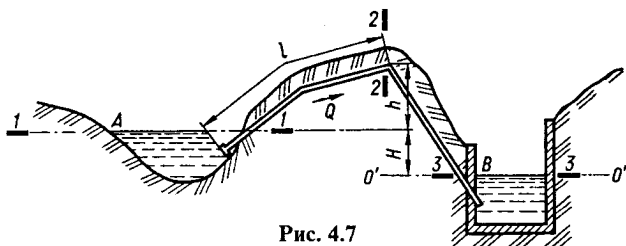


Рис. 4.7

Потім запишемо рівняння Бернуллі для перерізів 1-1 і 3-3:

$$H = \frac{V^2}{2g} \left( \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta \right), \quad (4.7)$$

де  $L$  — повна довжина сифона;  $\Sigma \zeta$  — сума коефіцієнтів усіх місцевих опорів. Визначивши з рівняння (4.7) значення швидкісного напору  $\frac{V^2}{2g}$  і підставивши його у формулу (4.6), можна записати

$$h_{\text{вак}} = h + H \frac{1 + \lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta}{\lambda \frac{L}{D} + \Sigma \zeta}. \quad (4.8)$$

Вакуумметрична висота, як правило, має бути не більше ніж 7 м. У протилежному разі робота сифона може стати нестійкою і виникне погроза так званого зриву вакууму. Для усунення цього недоліку треба змінити геометричні параметри сифона (як правило,  $h$  або  $H$ ) так, щоб зазначена вище умова ( $h_{\text{вак}} \leq 7$  м) задовольнялася.

■ **Приклад.** Визначити максимальне перевищення найвищої точки сифона (рис. 4.7) над поверхнею водоймища  $A$  при довжині сифона  $L = 50$  м, відстані від його початку до найвищої точки  $l = 30$  м, діаметрі  $D = 200$  мм, різниці рівнів води у водоймищі і резервуарі  $H = 4$  м, гідравлічному коефіцієнті тертя  $\lambda = 0,025$ , коефіцієнтах опору на вході  $\zeta_{\text{вх}} = 5$ , повороті  $\zeta_{\text{пов}_1} = 0,3$  і  $\zeta_{\text{пов}_2} = 0,5$ , виході  $\zeta_{\text{вих}} = 1$ .

З формули (4.8)

$$\begin{aligned} h &= h_{\text{вак}} - H \frac{1 + \lambda \frac{l}{D} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}_1}}{\lambda \frac{l}{D} + \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{пов}_1} + \zeta_{\text{пов}_2} + \zeta_{\text{вих}}} = \\ &= 7 - 4 \frac{1 + 0,025 \frac{30}{0,2} + 5 + 0,3}{0,025 \frac{50}{0,2} + 5 + 0,3 + 0,5 + 1} = 3,92 \text{ м.} \end{aligned}$$

### 4.3. Розрахунки довгих трубопроводів

При розрахунках довгих трубопроводів місцевими втратами напору в рівнянні Бернуллі можна знехтувати через їхню незначну величину порівняно з втратами напору по довжині:

$$\Sigma \zeta \frac{V^2}{2g} \ll \Sigma \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

Якщо для водопровідних мереж брати  $z$  як відмітку землі над певним перерізом трубопроводу, то величину  $\frac{P}{\rho g}$  (п'єзометричну висоту в певному перерізі) називають *вільним напором*  $H_B = \frac{P}{\rho g}$  (тобто напором над поверхнею землі).

Тоді

$$H = z + H_B. \quad (4.9)$$

Вільні напори для водопроводу беруть залежно від кількості поверхів приміщення, але не менше ніж 10 м. Тому і п'єзометричні напори теж будуть більшими за 10 м.

Швидкісні напори при звичайних швидкостях руху води в трубі  $V = 1 \dots 3$  м/с мають такий діапазон:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1,05(1 \dots 3)^2}{2 \cdot 9,81} = 0,05 \dots 0,48 \text{ м.}$$

Звідси випливає, що швидкісними напорами також можна знехтувати, оскільки вони дуже малі порівняно з п'єзометричним напором:  $H = z + \frac{P}{\rho g}$ .

Отже, рівняння Бернуллі (4.1) матиме вигляд

$$H_1 = H_2 + \Sigma \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g}.$$

При розв'язанні практичних задач витрата або відома, або її треба визначити. Тому формулу для втрат напору по довжині більш зручно подати у вигляді

$$h_l = \frac{\lambda l V^2}{2gD} = \lambda \frac{l}{D} \frac{16Q^2}{2g\pi^2 D^4} = S_0 Q^2 l,$$

де  $S_0$  — питомий опір труби, що залежить від її діаметра і гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ ,  $S_0 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}$ .

Як і  $\lambda$ , питомий опір залежить також від відносної еквівалентної шорсткості труби  $\Delta_{\text{екв}}/D$  і від числа  $Re$ .

В окремому випадку для водопровідних труб  $S_0$  можна визначити залежно від матеріалу труби і  $D$ , а також від середньої швидкості. Значення  $S_0$  наведено у довідниках.

Як приклад у табл. 4.1 наведено питомі опори  $S_0, \text{с}^2/\text{м}^6$ , для деяких типів сталевих і чавунних труб у квадратичній області опору (при швидкості  $V \geq 1,2$  м/с).

Таблиця 4.1. Питомі опори сталевих і чавунних труб при швидкості  $V \geq 1,2$  м/с

Діаметр умовного проходу, $D$ , мм	Сталеві труби		Чавунні труби	
	Розрахунковий внутрішній діаметр $D_p$ , мм	$S_{0\text{кв}}$ , $\text{с}^2/\text{м}^6$	Розрахунковий внутрішній діаметр $D_p$ , мм	$S_{0\text{кв}}$ , $\text{с}^2/\text{м}^6$
50	64	3686	51,6	11540
60	70	2292	—	—
75	83	929	—	—
80	95	454	82,6	953
100	114	173	102,0	312
125	133	76,4	127,2	96,7
150	158	30,7	152,4	37,1
175	170	20,8	—	—
200	209	6,96	202,6	8,09
250	260	2,19	253,0	2,53
300	311	0,85	304,4	0,95
350	363	0,373	352,4	0,437
400	414	0,186	401,4	0,219
450	466	0,099	450,6	0,199
500	516	0,058	500,8	0,0678
600	616	0,0226	600,2	0,0260
700	706	0,0110	699,4	0,0115
800	804	0,00551	799,8	0,00567
900	904	0,00296	899,2	0,00305
1000	1004	0,00170	998,4	0,00175
1200	1202	0,000654	1199,2	0,000663
1400	1400	0,000292	—	—
1500	1500	0,000202	—	—
1600	1600	0,000144	—	—

При швидкості руху води в трубі  $V < 1,2$  м/с (перехідна область опору) питомі опори таких труб обчислюють за формулою

$$S_0 = S_{0\text{кв}} \cdot \theta, \quad (4.10)$$

де  $\theta$  — коефіцієнт, що визначають залежно від швидкості води  $V$ :

швидкість $V$ , м/с	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8	0,6	0,4	0,2
коефіцієнт $\theta$	1,0	1,015	1,03	1,04	1,06	1,11	1,2	1,41

Більш істотно швидкість впливає на питомі опори азбестоцементних та поліетиленових труб (табл. 4.2), які в практичних умовах працюють в перехідній області опору або навіть в області гідравлічно гладких труб.

З урахуванням викладеного довгі трубопроводи розраховують за формулою

$$H_1 - H_2 = \Sigma S_0 Q^2 l. \quad (4.11)$$

Таблиця 4.2. Питомі опори азбестоцементних і поліетиленових труб

Діаметр умовного проходу $D$ , мм	Розрахунковий внутрішній діаметр $D_p$ , мм	Питомий опір $S_0$ , $\text{с}^2/\text{м}^6$ , при швидкості $V$ , $\text{м}/\text{с}$				
		0,5	0,75	1	1,5	2
<i>Азбестоцементні труби</i>						
50	50	7640	7160	6850	6470	6230
75	75	931	873	835	788	760
100	100	210	196	188	177	171
125	119	84,9	79,5	76,1	71,8	69,3
150	141	35,1	32,9	31,5	29,7	28,7
200	189	8,81	8,26	7,9	7,46	7,19
250	235	2,49	2,33	2,23	2,11	2,03
300	279	1,01	0,95	0,91	0,86	0,83
350	322	0,48	0,45	0,43	0,41	0,39
400	368	0,242	0,227	0,217	0,205	0,198
500	456	0,079	0,074	0,071	0,067	0,065
600	576	0,024	0,022	0,021	0,02	0,019
700	672	0,0106	0,0099	0,0095	0,009	0,0086
800	768	0,0054	0,0050	0,0048	0,0045	0,0044
900	864	0,0029	0,0027	0,0026	0,0025	0,0024
1000	960	0,0017	0,0016	0,0015	0,0014	0,0014
<i>Поліетиленові труби</i>						
50	57,2	7070	6460	6051	5525	5170
60	68,1	2843	2594	2431	2220	2076
80	81,8	1084	990	927	847	792
100	100,0	379	346	324	296	277
125	127,2	108	99	93	85	79
150	145,4	53,7	49	45,9	41,9	39,3
200	212,2	5,94	5,41	5,07	4,63	4,33
250	269,2	1,53	1,40	1,31	1,19	1,12
300	302,8	0,83	0,76	0,71	0,65	0,61

У літературі наведено також метод розрахунку довгих труб, заснований на формулі середньої швидкості при рівномірному русі. За цим методом швидкість руху води в трубі за формулою (3.70)

$$V = W \sqrt{i_p}.$$

Звідси

$$Q = \omega W \sqrt{i_p} = K \sqrt{i_p}, \quad (4.12)$$

де  $K$  — витратна характеристика,  $K = \omega W = f(D; n)$ .

Тоді

$$Q^2 = K^2 i_p = K^2 \frac{h_l}{l}$$

i

$$h_l = H_1 - H_2 = \frac{Q^2 l}{K^2}. \quad (4.13)$$

Порівнюючи залежності (4.11) і (4.12), можна записати

$$S_0 = \frac{1}{K^2}. \quad (4.14)$$

Як приклад у табл. 4.3 наведено значення витратної характеристики  $K_{\text{кв}}$  для деяких діаметрів сталевих (при коефіцієнті шорсткості  $n = 0,013$ ), бетонних та залізобетонних ( $n = 0,015$ ) труб, що працюють у квадратичній області опору.

При роботі сталевих труб у перехідній області опору ( $V < 1,2$  м/с) витратну характеристику визначають за формулою

$$K = K_{\text{кв}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}. \quad (4.15)$$

У проектних організаціях для розрахунків водопровідних мереж використовують таблиці Ф. О. Шевелева, що ґрунтуються на формулі

$$H_1 - H_2 = S_0 Q^2 l,$$

зведеної до вигляду

$$1000 i_p = 1000 \frac{h_l}{l} = 1000 S_0 Q^2 = f(D, Q, \text{матеріал труби}).$$

Таблиця 4.3. Витратна характеристика  $K_{\text{кв}}$  для деяких діаметрів труб

$D$ , мм	$K_{\text{кв}}$ , м <sup>3</sup> /с, для труб		$D$ , мм	$K_{\text{кв}}$ , м <sup>3</sup> /с, для труб	
	сталевих	бетонних та залізобетонних		сталевих	бетонних та залізобетонних
100	0,0763	—	700	9,57	7,99
125	0,115	—	800	13,49	11,42
150	0,180	—	900	18,37	15,65
175	0,190	—	1000	28,24	20,75
200	0,378	—	1100	—	26,77
250	0,679	—	1200	39,01	33,78
300	1,089	0,75	1300	—	41,83
350	1,637	—	1400	58,50	50,99
400	2,268	1,79	1500	70,40	61,31
450	3,165	—	1600	83,35	72,84
500	4,160	3,25	1700	—	85,64
600	6,649	5,29	1800	—	99,77

Примітка. Розрахунковий діаметр  $D_p$  сталевих труб беруть згідно з даними табл. 4.1; для залізобетонних труб  $D_p = D$ .

Величина  $1000i_p$  — це втрати напору в трубі завдовжки 1000 м, підраховані для різних витрат у трубах із різними діаметрами з різних матеріалів.

При більших або менших довжинах труби втрати напору пропорційно збільшуються або зменшуються.

**Зменшення пропускної здатності труби в процесі експлуатації.** Треба зазначити, що в нових чавунних та сталевих трубах виникають менші втрати напору. З часом стінки труби зазнають корозії, на них утворюються відкладення, що призводить до збільшення  $\lambda$  і  $S_0$  і зменшення витратної характеристики  $K$ .

Унаслідок цього для чавунних труб зменшення пропускної здатності труби з часом досягає 6...20 %, а для сталевих це зменшення ще більше.

#### 4.4. Основні типи задач при розрахунках трубопроводів

Для трубопроводів, що складаються з однієї ділянки, можна виділити такі розрахункові випадки:

Відомі величини	Величини, що треба визначити
1) напори на початку і в кінці труби $H_1$ і $H_2$ , довжина $l$ , діаметр труби $D$	1) витрата $Q$
2) $H_2$ , $l$ , $Q$ , $D$	2) $H_1$
3) $H_2$ , $l$ , $Q$ , $H_1$	3) $D$

Перший випадок має місце при перевірці пропускної здатності труби, а другий і третій — при проектуванні нового трубопроводу, коли треба визначити необхідний напір на початку  $H_1$  або діаметр  $D$  для забезпечення заданої пропускної здатності і напору в кінці трубопроводу. Розрахунки проводять за формулами

$$H_1 - H_2 = S_0 Q^2 l; \quad Q = K \sqrt{i}; \quad H_1 - H_2 = \frac{Q^2 l}{K^2}.$$

У третьому випадку із формул визначають  $S_0$  або  $K$ , а потім із довідкових таблиць беруть значення  $D$ . Беруть найближчий більший діаметр, бо інакше втрати напору будуть більше заданих і в кінці трубопроводу не буде забезпечено необхідний вільний напір.

**Економічний діаметр трубопроводу.** При проектуванні і розрахунках нових водопроводів можуть бути невідомі дві величини: діаметр труби  $D$  і напір на його початку  $H_1$ . У цьому випадку з точки зору гідравліки може бути стільки розв'язків, скільки є різних діаметрів труб, що випускає промисловість. Проте не всі ці розв'язки прийнятні. Найбільш придатний розв'язок



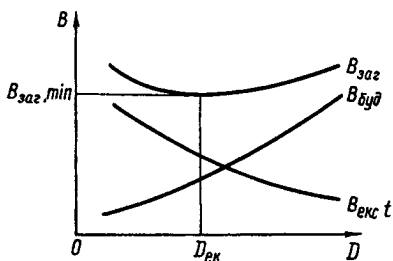


Рис. 4.8

можна відшукати при сумісному розв'язанні задач гідравліки й економіки.

Зі збільшенням діаметра труби збільшується вартість будівництва  $V_{буд}$  (рис. 4.8). У той самий час зі збільшенням  $D$  зменшуються втрати напору в трубопроводі, що потребує меншої потужності насоса для подавання води і

відповідно меншої витрати електроенергії. Це дає зменшення щорічної вартості експлуатації  $V_{екс}$ .

Будівельні витрати одноразові, а експлуатаційні — щорічні, тому загальні витрати на будівництво й експлуатацію трубопроводу за  $t$  років (термін окупності трубопроводу)

$$V_{заг} = V_{буд} + V_{екс} t. \quad (4.16)$$

Мінімум функції  $V_{заг} = f(D)$  відповідає економічному діаметру трубопроводу.

Для двох сусідніх за сортаментом діаметрів труб існує гранична витрата  $Q_{гр}$  і гранична швидкість  $V_{гр}$ , за яких ці діаметри будуть економічно рівноцінними.

Таблиця 4.4. Граничні витрати  $Q_{гр}$ , л/с, для водопровідних труб

Діаметр умовного проходу $D_y$ , мм	Труби			
	сталеві	чавунні	азбестоцементні	пластмасові
100	6,7...11,7	4,4...7,3	≤ 7	3,4...5,7
125	11,7...16,6	7,3... 11,6	—	5,7...9,1
150	16,6...21,8	11,6...19,6	7,0...15,2	9,1...15,8
175	21,8...29,2	—	—	—
200	29,2...46	19,6...35,5	15,2...28,5	15,8...30,7
250	46...71	35,5...57	28,5...45,6	30,7...48,3
300	71...103	57,0...83,8	45,6...68,7	48,3...64,1
350	103...140	83,8...116	68,7...96,4	64,1...85,6
400	140...184	116...174	96,4...140	85,6...114
450	184...226	—	—	114...150
500	226...301	174...273	≥ 140	150...195
550	—	—	—	195...250
600	301...424	273...402	—	250
700	424...571	402...560	—	—
800	571...751	560...749	—	—
900	751...959	749...970	—	—
1000	959...1199	≥ 970	—	—

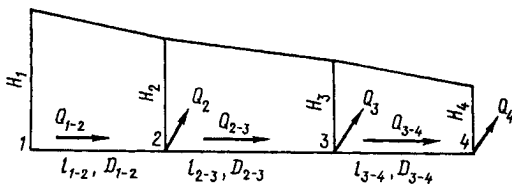


Рис. 4.9

У довідкових таблицях наведено граничні витрати. Наприклад, у табл. 4.4 наведено наближені значення граничних витрат для деяких труб, що працюють в умовах України, Білорусії, центральних районів європейської частини Росії.

Визначивши рекомендований діаметр трубопроводу, далі обчислюють необхідний напір  $H_1$  на його початку за формулою

$$H_1 = H_2 + S_0 Q^2 l.$$

**Трубопроводи з послідовно з'єднаних труб.** Витрати на ділянках 1-2, 2-3, 3-4 можуть бути однаковими або різними залежно від того, чи немає витрат води у вузлах (рис. 4.9).

Втрати напору у таких трубопроводах треба складати:

$$H_1 - H_4 = (S_0 Q^2 l)_{1-2} + (S_0 Q^2 l)_{2-3} + (S_0 Q^2 l)_{3-4}. \quad (4.17)$$

■ **Приклад.** Визначити пропускну здатність трубопроводу, що складається з трьох послідовних ділянок (рис. 4.10) з довжинами  $l_1 = 1000$  м,  $l_2 = 1200$  м та  $l_3 = 1500$  м, якщо геодезична відмітка на початку трубопро-

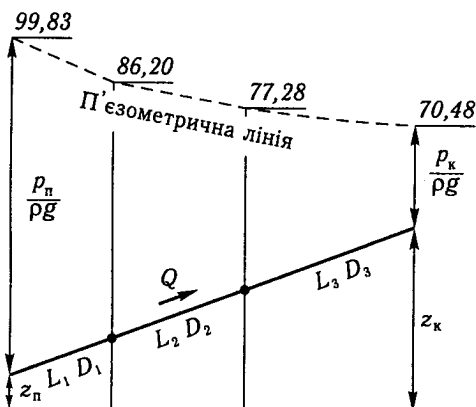


Рис. 4.10

воду  $z_{\text{п}} = 8$  м, у кінці трубопроводу  $z_{\text{к}} = 45$  м, тиск — відповідно  $p_{\text{п}} = 0,9$  мПа,  $p_{\text{к}} = 0,25$  мПа, діаметри умовних проходів  $D_1 = 800$  мм,  $D_2 = 900$  мм,  $D_3 = 1000$  мм, труби азбестоцементні.

Цей трубопровід розраховуємо як довгий, з урахуванням тільки втрат напору за довжиною, за рівнянням (4.11)

$$H_{\text{п}} - H_{\text{к}} = \Sigma S_0 Q^2 l,$$

де  $H_{\text{п}} = z_{\text{п}} + \frac{p_{\text{п}}}{\rho g}$  — напір на початку трубопроводу;  $H_{\text{к}} = z_{\text{к}} + \frac{p_{\text{к}}}{\rho g}$  — напір у кінці трубопроводу.

Тоді рівняння набирає вигляду

$$z_{\text{п}} + \frac{p_{\text{п}}}{\rho g} - z_{\text{к}} - \frac{p_{\text{к}}}{\rho g} = Q^2 (S_{01} \cdot l_1 + S_{02} \cdot l_2 + S_{03} \cdot l_3).$$

За табл. 4.2 для азбестоцементних труб знаходимо в першому наближенні при швидкості  $V = 1,0$  м/с питомі опори труб:  $S_{01} = 0,0048$   $\text{с}^2/\text{м}^6$ ;  $S_{02} = 0,0026$   $\text{с}^2/\text{м}^6$ ;  $S_{03} = 0,0015$   $\text{с}^2/\text{м}^6$ .

Далі визначаємо витрату  $Q$ :

$$Q = \sqrt{\frac{z_{\text{п}} + \frac{p_{\text{п}}}{\rho g} - z_{\text{к}} - \frac{p_{\text{к}}}{\rho g}}{S_{01} l_1 + S_{02} l_2 + S_{03} l_3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8 + \frac{900\ 000}{1000 \cdot 9,8} - 45 - \frac{250\ 000}{1000 \cdot 9,8}}{0,0048 \cdot 1000 + 0,0026 \cdot 1200 + 0,0015 \cdot 1500}} = 1,7 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Перевіряємо середні швидкості в кожній трубі:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 1,7}{3,14 \cdot 0,8^2} = 3,3 \text{ м/с};$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 1,7}{3,14 \cdot 0,9^2} = 2,67 \text{ м/с};$$

$$V_3 = \frac{4 \cdot Q}{\pi D_3^2} = \frac{4 \cdot 1,7}{3,14 \cdot 1,0^2} = 2,16 \text{ м/с}.$$

Оскільки середні швидкості є набагато більшими ніж 1,0 м/с, то треба зробити уточнення значень питомих опорів у другому наближенні з урахуванням швидкостей. Після уточнення дістанемо (із табл. 4.2 випливає, що для заданих діаметрів при  $V > 2$  м/с питомі опори  $S_0$  практично не змінюються)

$$S_{01} = 0,0044 \text{ с}^2/\text{м}^6; S_{02} = 0,0024 \text{ с}^2/\text{м}^6; S_{03} = 0,0014 \text{ с}^2/\text{м}^6.$$

Остаточно визначаємо витрату  $Q$ :

$$Q = \sqrt{\frac{29,326}{0,0044 \cdot 1000 + 0,0024 \cdot 1200 + 0,0014 \cdot 1500}} = 1,76 \text{ м}^3/\text{с}.$$

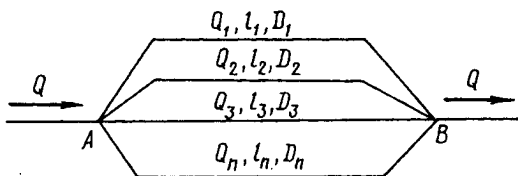


Рис. 4.11

**Паралельно з'єднані трубопроводи.** Такі трубопроводи мають спільні вузлові точки на початку і в кінці (рис. 4.11). Це забезпечує більшу надійність водопостачання, тому що у випадку, коли одна ділянка труби буде виведена з експлуатації, вода буде надходити іншими ділянками.

У точці  $A$  для всіх паралельних ділянок напір однаковий, тому що в одній точці тиск однаковий у всіх напрямках.

Для всіх трубопроводів однаковим буде також напір у точці  $B$ . Тому і втрати напору на всіх паралельних ділянках будуть однаковими:

$$h_l = H_A - H_B.$$

Якщо довжини і діаметри на всіх ділянках однакові, то однаковими будуть і витрати на ділянках. Проте в загальному випадку

$$H_A - H_B = (S_0 Q^2 l)_1 = (S_0 Q^2 l)_2 = \dots = (S_0 Q^2 l)_n. \quad (4.18)$$

Звідси можна визначити витрату на будь-якій ділянці:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= Q_1 \sqrt{\frac{S_{01} l_1}{S_{02} l_2}} = Q_1 \frac{K_2}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}; \\ Q_3 &= Q_1 \sqrt{\frac{S_{01} l_1}{S_{03} l_3}} = Q_1 \frac{K_3}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_3}}; \\ &\dots \\ Q_n &= Q_1 \sqrt{\frac{S_{01} l_1}{S_{0n} l_n}} = Q_1 \frac{K_n}{K_1} \sqrt{\frac{l_1}{l_n}}; \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n &= Q. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Розв'язання системи рівнянь дає змогу визначити витрати на всіх паралельних ділянках. Втрати напору між точками  $A$  і  $B$  визначають як втрати напору на одній із ділянок.

■ **Приклад.** У сталевому трубопроводі (рис. 4.12) з паралельними лініями, довжини яких  $l_1 = 400$  м,  $l_2 = 430$  м,  $l_3 = 460$  м, діаметри відповідно  $D_1 = 125$  мм,  $D_2 = 150$  мм,  $D_3 = 175$  мм, витрата  $Q = 45$  л/с. Визначити витрати в окремих лініях та напір у точці  $A$ , якщо напір у точці  $B$   $H_B = 10$  м.

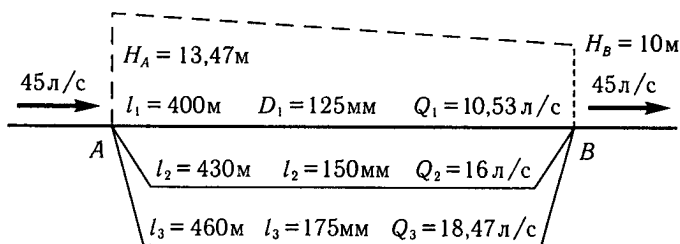


Рис. 4.12

При паралельному з'єднанні трубопроводів втрати напору на всіх паралельних ділянках однакові, а сумарна витрата складається із суми витрат на окремих ділянках:

$$\begin{cases} H_A - H_B = (S_0 Q^2 l)_1 = (S_0 Q^2 l)_2 = (S_0 Q^2 l)_3, \\ Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{cases}$$

За табл. 4.1 залежно від діаметра труби знаходимо питомі опори труб:

$$S_{01} = 76,4 \text{ с}^2/\text{м}^6; \quad S_{02} = 30,7 \text{ с}^2/\text{м}^6; \quad S_{03} = 20,8 \text{ с}^2/\text{м}^6.$$

Із першого рівняння системи представимо витрати  $Q_2$  та  $Q_3$  через  $Q_1$ :

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{S_{01} \cdot l_1}{S_{02} \cdot l_2}} = Q_1 \sqrt{\frac{76,4 \cdot 400}{30,7 \cdot 430}} = 1,52 \cdot Q_1;$$

$$Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{S_{01} \cdot l_1}{S_{03} \cdot l_3}} = Q_1 \sqrt{\frac{76,4 \cdot 400}{20,8 \cdot 460}} = 1,787 \cdot Q_1.$$

Тоді загальна витрата

$$Q = Q_1 + 1,52 \cdot Q_1 + 1,787 \cdot Q_1 = 4,31 \cdot Q_1.$$

Визначаємо тепер послідовно:

$$Q_1 = \frac{Q}{4,31} = \frac{0,045}{4,31} = 0,0104 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$Q_2 = 1,52 \cdot Q_1 = 1,52 \cdot 0,0104 = 0,0159 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$Q_3 = 1,787 \cdot Q_1 = 1,787 \cdot 0,0104 = 0,01858 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$Q = \Sigma Q \approx 0,045 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Напір у точці А

$$H_A = H_B + (S_0 Q^2 l)_1 = 10 + 76,4 \cdot 0,0104^2 \cdot 400 = 13,305 \text{ м}.$$

Оскільки на початку розрахунку ми брали питомі опори  $S_0$  для квадратичної області опору, тобто без урахування швидкостей, то тепер треба

визначити швидкості на окремих ділянках трубопроводу та уточнити витрати:

$$V_1 = \frac{4 \cdot Q_1}{\pi D_1^2} = \frac{4 \cdot 0,0104}{3,14 \cdot 0,125^2} = 0,848 \text{ м/с};$$

$$V_2 = \frac{4 \cdot Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 0,0159}{3,14 \cdot 0,15^2} = 1,05 \text{ м/с};$$

$$V_3 = \frac{4 \cdot Q_3}{\pi D_3^2} = \frac{4 \cdot 0,0186}{3,14 \cdot 0,175^2} = 0,774 \text{ м/с}.$$

В усіх випадках швидкості менші ніж 1,2 м/с, отже, потрібно уточнювати значення питомих опорів. Визначаємо поправкові коефіцієнти  $\theta$  (див. с. 140) та обчислюємо нові значення  $S_0$ :

$$S_{0_1} = S_{0\text{кв.1}} \cdot \theta_1 = 76,4 \cdot 1,05 = 80,22 \text{ с}^2/\text{м}^6;$$

$$S_{0_2} = S_{0\text{кв.2}} \cdot \theta_2 = 30,7 \cdot 1,02 = 31,31 \text{ с}^2/\text{м}^6;$$

$$S_{0_3} = S_{0\text{кв.3}} \cdot \theta_3 = 20,8 \cdot 1,07 = 22,26 \text{ с}^2/\text{м}^6.$$

Після цього знову дістанемо витрати:

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{80,22 \cdot 400}{31,31 \cdot 430}} = 1,544 \cdot Q_1;$$

$$Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{80,22 \cdot 400}{22,26 \cdot 460}} = 1,77 \cdot Q_1;$$

$$Q = Q_1 + 1,544 \cdot Q_1 + 1,77 \cdot Q_1 = 4,314 \cdot Q_1;$$

$$Q_1 = \frac{0,045}{4,314} = 0,01053 \text{ м}^3/\text{с} = 10,53 \text{ л/с};$$

$$Q_2 = 1,544 \cdot 0,01043 = 0,016 \text{ м}^3/\text{с} = 16,0 \text{ л/с};$$

$$Q_3 = 1,77 \cdot 0,01043 = 0,01847 \text{ м}^3/\text{с} = 18,47 \text{ л/с};$$

$$\Sigma Q = 0,0449 \text{ м}^3/\text{с} \approx 0,045 \text{ м}^3/\text{с} = 45 \text{ л/с}.$$

Уточнюємо напір у точці  $A$ :

$$H_A = 10,0 + 80,22 \cdot 0,01043^2 \cdot 400 = 13,47 \text{ м}.$$

**Особливості розрахунку довгих сифонних трубопроводів.** У практиці водопровідного будівництва часто використовують довгі сифонні трубопроводи, якими воду з водоймища  $A$  подають у приймальний резервуар  $B$  насосної станції, розташований на значній відстані від водоймища (див. рис. 4.7). Вважаю-

чи у цьому випадку, що величина  $\lambda \frac{l}{D}$  у формулі (4.8) є значно більшою від  $1 + \sum_1^2 \zeta$ , а  $\lambda \frac{L}{D}$  — від  $\Sigma \zeta$  і нехтуючи меншими з цих величин, запишемо умову стійкої роботи довгого сифонного трубопроводу (при допустимій вакуумметричній висоті  $h_{\text{вак}} \leq 7$  м):

$$h + H \frac{l}{L} \leq 7 \text{ м}, \quad (4.20)$$

з якої при заданих (за умовами місцевості) значеннях  $h$ ,  $l$ ,  $L$  можна визначити граничне зниження  $H$  рівня води в приймальному резервуарі  $B$  порівняно з відміткою води у водоймищі  $A$ , при якому вакуум у сифоні буде допустимим. Далі з формули (4.11) при  $H_1 - H_2 = H$  визначають необхідний питомий опір  $S_0$  і за таблицями — відповідний йому діаметр сифона  $D$  (найближчий більший).

**Приблизне врахування місцевих втрат напору.** При розрахунках довгих трубопроводів місцевими втратами напору нехтують. Проте таке нехтування не дає певного запасу в розрахунках, а, навпаки, дещо занижує значення загальних втрат напору і завищує пропускну здатність трубопроводу.

Тому для більшої надійності здобутих результатів рекомендується брати розрахункову довжину трубопроводу на 5...10 % більше її фізичної довжини, тобто

$$l_p = (1,05 \dots 1,10) l_{\text{тр.}}$$

Формула для розрахунку довгих трубопроводів у цьому випадку матиме вигляд

$$H_1 - H_2 = S_0 Q^2 l_p = (1,05 \dots 1,10) l_{\text{тр.}} S_0 Q^2. \quad (4.21)$$

**Трубопроводи з безперервним роздаванням води вздовж шляху.** З трубопроводів, прокладених уздовж вулиці населених пунктів, воду подають до окремих будівель. Такі зосереджені роздачі у багатьох точках при розрахунках схематично можна замінити на рівномірну роздачу  $Q_{\text{ш}}$  уздовж всього трубопроводу. Аналіз свідчить, що така заміна приводить до незначної похибки у визначенні втрат напору.

Для розв'язання цієї задачі розглядають умови руху рідини з перемінною масою.

Розберемо деякі положення з цього розділу.

Розглянемо горизонтальний трубопровід із рівномірною роздачею витрати на одиницю довжини труби  $q_0$  (питома шляхова витрата) (рис. 4.13).

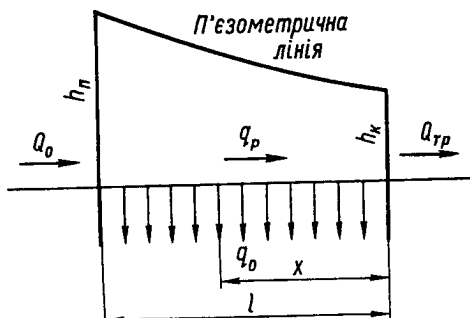


Рис. 4.13

Вважаємо, що до початкового перерізу надходить витрата  $Q_0$ , а на ділянці завдовжки  $l$  роздається шляхова витрата

$$Q_{\text{ш}} = q_0 l.$$

Частину витрати, що залишилася без змін і надійшла до наступної ділянки, називають *транзитною витратою*  $Q_{\text{тр}}$ .

Втрати напору по довжині  $dh_l$  на нескінченно малій ділянці можна визначити як

$$dh_l = S_0 Q^2 dx,$$

де  $Q$  — витрата в перерізі на відстані  $x$  від кінця трубопроводу,  $Q = Q_{\text{тр}} + q_0 x$ . Тоді

$$dh_l = S_0 (Q_{\text{тр}} + q_0 x)^2 dx.$$

Після інтегрування в границях від  $0 < x < l$  дістанемо

$$h_l = S_0 \int_0^l (Q_{\text{тр}} + q_0 x)^2 dx = S_0 \left( Q_{\text{тр}}^2 l + 2 \frac{Q_{\text{тр}} q_0 l^2}{2} + \frac{q_0^2 l^3}{3} \right)$$

і

$$h_l = S_0 \left( Q_{\text{тр}}^2 + Q_{\text{тр}} Q_{\text{ш}} + \frac{Q_{\text{ш}}^2}{3} \right) l.$$

Вираз у дужках визначають як  $Q_p^2$ , де  $Q_p$  — розрахункова витрата.

Тоді

$$h_l = h_{\text{п}} - h_{\text{к}} = S_0 Q_p^2 l. \quad (4.22)$$

Розрахункову витрату  $Q_p$  можна подати як

$$Q_p = \sqrt{Q_{\text{тр}}^2 + Q_{\text{тр}} Q_{\text{ш}} + \frac{Q_{\text{ш}}^2}{3}}. \quad (4.23)$$



На практиці при розрахунках водопровідних мереж використовують спрощену формулу для  $Q_p$  :

$$Q_p = Q_{\text{тр}} + \beta Q_{\text{ш}} = Q_{\text{тр}} + \beta q_0 l. \quad (4.24)$$

Прирівнявши вирази (4.24) і (4.23), визначають коефіцієнт  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{Q_{\text{ш}}} \sqrt{Q_{\text{тр}}^2 + Q_{\text{тр}} Q_{\text{ш}} + \frac{Q_{\text{ш}}^2}{3}} - \frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{ш}}}.$$

У граничних умовах при  $Q_{\text{тр}} = 0$ ,  $\beta = \sqrt{1/3} = 0,58$ , а при

$Q_{\text{тр}} \gg Q_{\text{ш}}$  коефіцієнт  $\beta = \frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{ш}}} \sqrt{1 + \frac{Q_{\text{ш}}}{Q_{\text{тр}}} + \frac{Q_{\text{ш}}^2}{3Q_{\text{тр}}^2}} - 1$ . Враховуючи,

що  $1 + \frac{Q_{\text{ш}}}{Q_{\text{тр}}} \gg \frac{Q_{\text{ш}}^2}{3Q_{\text{тр}}^2}$ , розкладемо вираз  $\sqrt{1 + \frac{Q_{\text{ш}}}{Q_{\text{тр}}}}$  у степеневий ряд. Тоді

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{ш}}} \left( \sqrt{1 + \frac{Q_{\text{ш}}}{Q_{\text{тр}}}} - 1 \right) = \\ &= \frac{Q_{\text{тр}}}{Q_{\text{ш}}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{\text{ш}}}{Q_{\text{тр}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \frac{Q_{\text{ш}}^2}{Q_{\text{тр}}^2} + \dots - 1 \right) \approx 0,5. \end{aligned}$$

Отже,  $\beta$  змінюється у межах 0,5...0,58; найчастіше  $\beta = 0,55$ . Формула набирає вигляду

$$Q_p = Q_{\text{тр}} + 0,55 q_0 l. \quad (4.25)$$

Це рівнозначно заміні безперервного роздавання води умовною схемою, за якою воду забирають на початку та в кінці ділянки. При цьому на початку забирають 45 % шляхової витрати  $Q_{\text{ш}}$ , а в кінці — 55 %  $Q_{\text{ш}}$  (рис. 4.14).

■ **Приклад.** Визначити втрати напору в сталевому трубопроводі довжиною  $l = 100$  м, діаметром  $D = 200$  мм, по якому тече вода з транзитною витратою  $Q_{\text{тр}} = 30$  л/с і шляховою витратою  $Q_{\text{ш}} = 4$  л/с.

Визначасмо питому шляхову витрату

$$q_0 = \frac{Q_{\text{ш}}}{l} = 0,02 \text{ л/с.}$$

Розрахункова витрата

$$Q_p = Q_{\text{тр}} + 0,55 q_0 \cdot l =$$

$$= 30 + 0,55 \cdot 0,02 \cdot 200 = 32,2 \text{ л/с.}$$

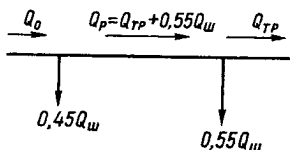


Рис. 4.14

Дістаємо розрахункову швидкість

$$V_p = \frac{Q_p \cdot 4}{\pi D^2} = \frac{32,2 \cdot 10^{-3} \cdot 4}{3,14 \cdot 0,209^2} = 0,94 \text{ м/с.}$$

Визначаємо питомий опір труби  $S_0$  з поправкою на швидкість, яка менша ніж 1,2 м/с:

$$S_0 = S_{0\text{кв}} \cdot \theta = 6,96 \cdot 1,04 = 7,24 \text{ с}^2/\text{м}^6.$$

Тоді втрати напору в трубі

$$h_l = S_0 \cdot Q_p^2 \cdot l = 7,24 \cdot 0,0322^2 \cdot 200 = 1,50 \text{ м.}$$

#### 4.5. Принципи розрахунку розгалужених і кільцевих гідравлічних мереж

Гідравлічні мережі можуть бути водопровідними, газовими, тепловими. Гідравлічна мережа — це система трубопроводів, якою рідину подають у різні точки міста чи промислового підприємства. Мережі можуть бути розгалуженими чи кільцевими.

*Розгалужена мережа* (рис. 4.15) складається з основної магістралі та розгалужень від неї. Основна магістраль з'єднує початкову точку мережі 1 з тією кінцевою точкою, в яку найбільш складно подавати воду (чи газ). Це може бути точка, яка найвіддаленіша від початку мережі, з найбільшим напором або з найбільшою витратою. Якщо ці параметри є різними для різних кінцевих точок, то основну магістраль можна вибрати шляхом порівняльних розрахунків. Якщо відомий напір у кінцевій точці цієї магістралі, задані або визначені за техніко-економічними показниками діаметри її ділянок, то, визначивши втрати напору на кожній ділянці, можна визначити п'езометричні напори в кожній вузловій точці основної магістралі. Потім за різницею напорів на початку і в кінці кожного розгалуження обчислюють їхні діаметри.

*Кільцева гідравлічна мережа* (рис. 4.16) — це система суміжних між собою замкнених кілець (контурів). Такі мережі більш надійні, ніж розгалужені, тому що при виході з ладу будь-якої ділянки подавання води у вузлові точки можна здійснити іншими ділянками.

У кільцевих мережах заздалегідь невідомі напрями та величини витрат на окремих ділянках, тому при розрахунках таких мереж невідомих величин значно більше, а сам розрахунок складніший.

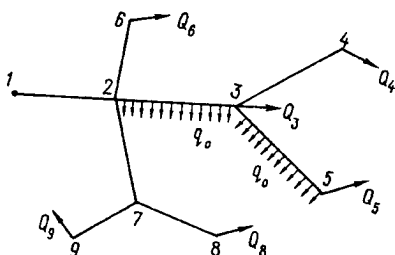


Рис. 4.15

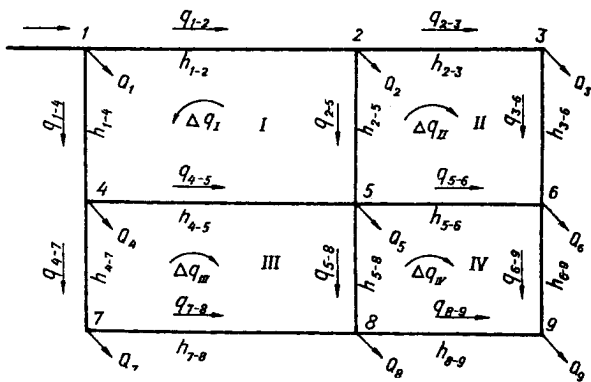


Рис. 4.16

При розрахунках таких мереж треба пам'ятати, що в кожному вузлі сума витрат, що надходять до нього, має дорівнювати сумі витрат, що відходять від вузла (враховуючи витрату у вузлі, що йде до споживача).

Крім того, у кожному кільці рідина рухається від початкової до кінцевої точки у двох напрямках — за годинниковою стрілкою та проти неї (наприклад, у кільці I за напрямками 1-2-5 та 1-4-5), тобто по системах паралельних трубопроводів, втрати напору в яких мають бути однаковими. З урахуванням цього уточнюють розрахунком попередньо намічені витрати на ділянках (шляхом введення поправкових витрат  $\Delta q$ ), втрати напору на них та напори у всіх вузлових точках. Такі розрахунки звичайно проводять на ЕОМ.

Більш докладно розрахунки гідравлічних мереж розглядають у спеціальних курсах гідравліки, водопостачання, водовідведення, газопостачання та тепlopостачання [5, 6, 7, 12, 13, 14, 16, 17].

#### 4.6. Гідравлічний удар у трубах

Гідравлічним ударом називають зміну (підвищення або зниження) тиску в трубопроводі при різкій зміні швидкості руху.

Підвищення тиску при гідравлічному ударі може бути настільки великим, що це може призвести до розриву трубопроводу.

Вивчати гідравлічний удар почали у зв'язку з частими аваріями на мережах Московського водопроводу наприкінці XIX ст. Причини аварій проаналізував російський вчений М. Є. Жуковський, який і розробив теорію гідравлічного удару.

У разі швидкого закриття засувки в трубопроводі швидкість руху рідини в ньому зменшується до нуля і відбувається перехід

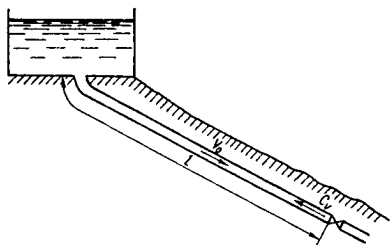


Рис. 4.17

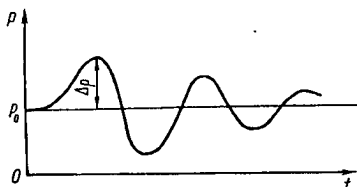


Рис. 4.18

кінетичної енергії потоку в потенціальну, що призводить до різкого збільшення тиску.

Чим більша довжина труби, тим більшими будуть маса рідини і кінетична енергія і тим значнішим буде збільшення тиску при гідравлічному ударі.

Якщо на трубопроводі, яким протікає вода (рис. 4.17), різко закрити засувку, то рух рідини зупиниться спочатку не в усій трубі, а тільки безпосередньо перед засувкою. Це можливо тому, що завдяки пружним властивостям рідини і матеріалу труби рідина трохи стискується, а труба розширюється. Далі збільшення тиску швидко поширюється по трубопроводу від засувки до резервуара.

Швидкість поширення підвищення тиску називають *швидкістю ударної хвилі*  $C_V$ . Після того як в усій трубі тиск підвищиться, рідина почне виходити із зони підвищеного тиску назад у резервуар, і тиск у трубі знижуватиметься. Потім у зону зниженого тиску знову піде рідина з резервуара, і тиск підвищиться. Внаслідок пружних властивостей рідини і стінок труби цей процес поступово згасає (рис. 4.18). Найбільш небезпечне перше підвищення тиску.

Ударна хвиля пройде усім трубопроводом за час  $l/C_V$ . Час одного циклу, який включає підвищення і зниження тиску, називають *фазою удару*  $T$  і визначають за формулою

$$T = 2l / C_V. \quad (4.26)$$

Якщо час закриття засувки менший або дорівнює фазі удару  $T$  ( $t_3 \leq T$ ), то удар є *прямим*.

Якщо  $t_3 > T$ , то за час підвищення і зниження тиску засувка ще не буде закритою, рух рідини в трубі не зупиниться і не вся кінетична енергія перейде в потенціальну, тобто підвищення буде меншим, ніж при прямому ударі. Такий удар називають *непрямим*.

Удар може виникати і при раптовому зупиненні насоса, який подає воду нагнітальним трубопроводом у резервуар (рис. 4.19).

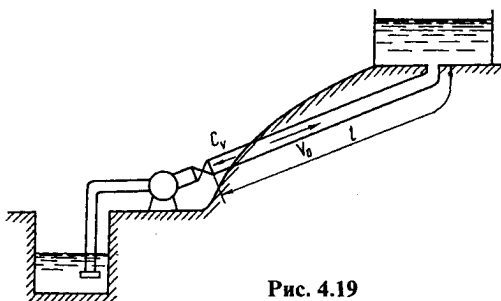


Рис. 4.19

Після виключення насоса рідина за інерцією деякий час рухається, і в трубопроводі виникає зниження тиску (безпосередньо біля насоса). Потім починається зворотний рух води з резервуара в область зниженого тиску в трубопроводі, і тиск підвищиться, як це було при прямому ударі (рис. 4.20).

З цього випливає, що характеристики руху рідини при гідравлічному ударі змінюються з часом. Отже, удар належить до категорії неусталеного руху.

**Прямий удар. Швидкість ударної хвилі.** Розглянемо гідравлічний удар у трубопроводі при миттєвому закритті засувки в кінці трубопроводу (рис. 4.21).

За нескінченно малий відрізок часу  $dt$  після закриття засувки рух рідини припиняється на відстані  $C_v dt$  від засувки.

На цій нескінченно малій ділянці трубопроводу виникає підвищення тиску на величину  $\Delta p$ . Цю величину можна визначити за допомогою закону змінення кількості руху.

Кількість руху в об'ємі між перерізами 1-1 і 2-2 до закриття засувки

$$KР = \rho \omega C_v dt V_0,$$

де  $\omega$  — площа перерізу труби;  $V_0$  — швидкість руху рідини в трубі до закриття засувки.

Після закриття засувки рух зупиняється, швидкість зменшується до нуля ( $V = 0$ ), тобто в цьому випадку зміна кількості руху дорівнює початковій кількості руху.

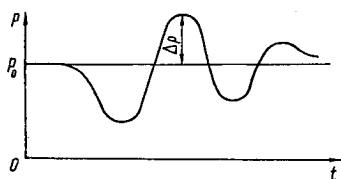


Рис. 4.20

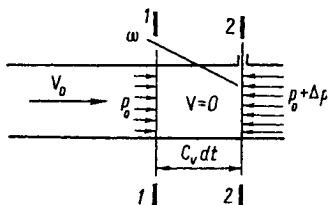


Рис. 4.21

Ця зміна має дорівнювати імпульсу діючих сил. У перерізі 1-1 тиск ще не підвищився і має значення  $p_0$ , а в перерізі 2-2 тиск підвищився до значення  $(p_0 + \Delta p)$ .

Імпульс сил тиску на розглядуваний об'єм

$$I = (p_0 + \Delta p)\omega dt - p_0\omega dt = \Delta p\omega dt.$$

Прирівняємо імпульс сил і значення кількості руху:

$$\rho\omega C_V dt V_0 = \Delta p\omega dt.$$

Звідси

$$\Delta p = \rho V_0 C_V. \quad (4.27)$$

Це формула Жуковського для визначення підвищення тиску при прямому ударі.

Гідравлічний удар можна також характеризувати підвищенням напору:

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{V_0 C_V}{g}. \quad (4.28)$$

Швидкість поширення ударної хвилі  $C_V$  визначимо з умови збереження маси рідини при ударі. До удару між перерізами 1-1 і 2-2 маса рідини була

$$\rho\omega C_V dt.$$

За час  $dt$  після закриття засувки внаслідок деякого стиснення рідини (збільшення густини) і розширення труби між перерізами 1-1 і 2-2 нагромадилася маса

$$(\rho + d\rho)(\omega + d\omega) C_V dt.$$

Це відбулося тому, що після закриття засувки маса рідини, яка надійшла раніше, вже не виходила з цього об'єму, а через переріз 1-1 у нього надійшла додаткова маса  $\rho\omega V_0 dt$ .

Звідси умови збереження маси при гідравлічному ударі

$$\rho\omega V_0 dt = (\rho + d\rho)(\omega + d\omega) C_V dt - \rho\omega C_V dt.$$

Скоротивши цей вираз на  $dt$  і знехтувавши нескінченно малою величиною другого порядку, маємо

$$\rho\omega V_0 = \rho d\omega C_V + d\rho\omega C_V = C_V (\rho d\omega + \omega d\rho). \quad (4.29)$$

Це закон збереження маси при гідравлічному ударі. Звідси

$$C_V = \frac{V_0 \rho \omega}{\rho d\omega + d\rho\omega} = \frac{V_0}{\frac{d\omega}{\omega} + \frac{d\rho}{\rho}}. \quad (4.30)$$

Отже,  $C_V$  залежить від деформації труби і стиснення рідини, які характеризуються пружними властивостями матеріалу труби і рідини.

Запишемо вираз для відносної деформації площі труби

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{2dD}{D}. \quad (4.31)$$

З механіки пружних тіл відомо, що відносну деформацію можна виразити залежно від розтяжного напруження в матеріалі труби  $\Delta\sigma$  і модуля його пружності  $E_{\text{тр}}$  за законом Гука:

$$\frac{dD}{D} = \frac{\Delta\sigma}{E_{\text{тр}}}. \quad (4.32)$$

Напруження  $\Delta\sigma$ , викликані ударною хвилею в стінках труби, визначають як відношення сили, що діє на проекцію криволінійної поверхні (див. п. 1.6)  $\Delta p D l$ , до площі стінок  $2\delta l$ :

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta p D l}{2\delta l} = \frac{\Delta p D}{2\delta}, \quad (4.33)$$

де  $\delta$  — товщина стінок труби.

Ураховуючи залежності (4.32) і (4.33), вираз (4.31) можна записати у вигляді

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2dD}{D} = \frac{2\Delta p D}{2\delta E_{\text{тр}}} = \frac{\Delta p D}{\delta E_{\text{тр}}}. \quad (4.34)$$

Відносна зміна густини  $\frac{d\rho}{\rho}$  залежить від підвищення тиску  $\Delta p$  і модуля об'ємної пружності рідини  $E_{\text{рід}}$ :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{E_{\text{рід}}}. \quad (4.35)$$

Підставимо  $\frac{d\omega}{\omega}$  і  $\frac{d\rho}{\rho}$  у рівняння для  $C_V$  (4.30):

$$C_V = \frac{V_0}{\frac{\Delta p D}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\Delta p}{E_{\text{рід}}}}.$$

Ураховуючи, що  $\Delta p = \rho V_0 C_V$ , дістанемо

$$C_V = \frac{V_0}{\frac{\rho V_0 C_V D}{\delta E_{\text{тр}}} + \frac{\rho V_0 C_V}{E_{\text{рід}}}} = \frac{V_0}{V_0 C_V \left( \frac{\rho D}{E_{\text{тр}} \delta} + \frac{\rho}{E_{\text{рід}}} \right)}.$$

Звідси

$$C_V^2 = \frac{1}{\left( \frac{\rho D}{E_{\text{тр}} \delta} + \frac{\rho}{E_{\text{рід}}} \right)}$$

і

$$C_V = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E_{\text{рід}}} + \frac{\rho D}{E_{\text{тр}} \delta}}}. \quad (4.36)$$

У граничному випадку при  $E_{\text{тр}} = \infty$ , тобто якщо удар відбувається в трубі з абсолютно neprужного матеріалу,

$$C'_V = \frac{1}{\sqrt{\rho/E_{\text{рід}}}} = \sqrt{E_{\text{рід}}/\rho}. \quad (4.37)$$

Це швидкість поширення звуку в рідині.

Для води  $C'_V = 1425$  м/с.

У другому граничному випадку при  $E_{\text{рід}} = \infty$  можна вважати, що удар відбувається в абсолютно neprужній рідині. Тоді

$$C''_V = \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{\delta} \frac{\rho}{E_{\text{тр}}}}} = \sqrt{\frac{\delta E_{\text{тр}}}{D \rho}}. \quad (4.38)$$

З урахуванням  $C'_V$  і  $C''_V$  маємо

$$C_V = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{C_V'^2} + \frac{1}{C_V''^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{E_{\text{рід}}}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{D}{\rho} \frac{E_{\text{рід}}}{E_{\text{тр}}}}}. \quad (4.39)$$

Для трубопроводу з водою швидкість ударної хвилі, м/с,

$$C_V = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{\delta} \frac{E_{\text{рід}}}{E_{\text{тр}}}}}. \quad (4.40)$$



Для води відношення  $E_{\text{рід}} / E_{\text{тр}}$  залежить від матеріалу труби:

Труби	$E_{\text{рід}}/E_{\text{тр}}$
Сталеві	0,01
Чавунні	0,02
Бетонні	0,1...0,14
Азбестоцементні	0,11
Вінілпластові	0,68...0,73
Поліетиленові	1...1,45
Гумові	333...1000

Для залізобетонних труб з урахуванням армування їх

$$\frac{E_{\text{рід}}}{E_{\text{тр}}} = \frac{0,1...0,14}{1 + 9,5 \frac{f}{\delta}}, \quad (4.41)$$

де  $f$  — площа перерізу кільцевої арматури на 1 м довжини стінки труби; звичайно  $f/\delta = 0,015...0,050$ .

Знаменник у формулі (4.40) для деяких труб (особливо металевих) незначно більше одиниці, тобто швидкість ударної хвилі може бути кілька сотень метрів за секунду і навіть більше ніж 1000 м/с. При цьому підвищення тиску може бути дуже великим. Наприклад, при середній швидкості руху води в трубі  $V_0 = 1$  м/с, швидкості ударної хвилі  $C_V = 1000$  м/с і густині води  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> підвищення тиску при прямому ударі досягне  $\Delta p = \rho V_0 C_V = 1000 \cdot 1 \cdot 1000 = 10^6$  Па = 1 МПа.

**Непрямий удар.** Якщо час закриття засувки більший, ніж фаза удару ( $t_3 > T$ ), то має місце непрямий гідравлічний удар.

У цьому випадку за час  $T$  рух води в трубопроводі ще не зупинився, і тому не вся кінетична енергія переходить у потенціальну. Це приводить до меншого, ніж при прямому ударі, підвищення тиску.

При непрямому ударі втрачається не вся початкова швидкість  $V_0$ , а тільки її частина, так звана втрачена швидкість  $V_{\text{втр}}$  (рис. 4.22):

$$V_{\text{втр}} = V_0 - V, \quad (4.42)$$

де  $V$  — швидкість при заданому ступені відкриття засувки.

Підставимо  $V_{\text{втр}}$  у формулу (4.27):

$$\Delta p = \rho C_V (V_0 - V). \quad (4.43)$$

Крім того, при частковому закритті засувки на трубопроводі збільшений тиск на початку трубопроводу має дорівнювати збільшеним втратам тиску в ньому.

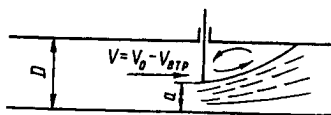


Рис. 4.22

Враховуючи формули

$$h_l = \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \text{і} \quad h_m = \zeta \frac{V^2}{2g}$$

і переходячи до тисків, маємо

$$p_{\text{поч}} + \Delta p = \rho \left( \lambda \frac{l}{D} + \Sigma \zeta + \zeta_3 \right) \frac{V^2}{2}, \quad (4.44)$$

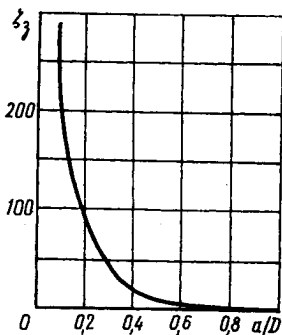


Рис. 4.23

де  $p_{\text{поч}}$  — тиск до закриття засувки на початку трубопроводу;  $\Sigma \zeta$  — сума коефіцієнтів місцевих опорів;  $\zeta_3$  — коефіцієнт опору засувки при певному ступені її відкриття  $a/D$  (рис. 4.23).

Звичайно величина  $\zeta_3$  зростає повільно на початку закриття засувки і швидко — наприкінці закриття, тобто при малих відношеннях  $a/D$  (рис. 4.23). Можна вважати, що ступінь відкриття засувки  $a/D$  змінюється рівномірно із зміною часу (рис. 4.24). Якщо час зміни  $a/D$  від 1 до 0 дорівнює  $t_3$ , то ступінь відкриття засувки наприкінці першої фази удару

$$a/D = (t_3 - T)/t_3 = 1 - T/t_3. \quad (4.45)$$

Зміна ступеня відкриття засувки на протязі будь-якої фази удару

$$\Delta a/D = T/t_3. \quad (4.46)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (4.43) і (4.44), можна знайти підвищення тиску  $\Delta p$  і швидкість  $V$  наприкінці першої фази удару при

відповідному значенні коефіцієнта опору засувки  $\zeta_{3_1} = f\left(\frac{a_1}{D}\right)$ .

У такій самій послідовності можна знайти підвищення тиску наприкінці другої і наступних фаз удару. В цих випадках у формулу (4.43) замість  $V_0$  підставляють швидкість наприкінці першої фази удару, а в формулу (4.44) замість  $p_{\text{поч}}$  — підвищений тиск у цей самий час і відповідне значення коефіцієнта  $\zeta_3$ .

При повному закритті засувки непрямий удар є повним. У цьому разі підвищення тиску визначають як суму підвищення тиску у всіх фазах удару за час закриття засувки. Неповний удар буде при неповному закритті засувки. Підвищення тиску в цьому разі визначають сумісним розв'язанням рівнянь (4.43) та (4.44) при коефіцієнті опору засувки  $\zeta_3$ , що відповідає ступеню її відкриття  $a/D$ .

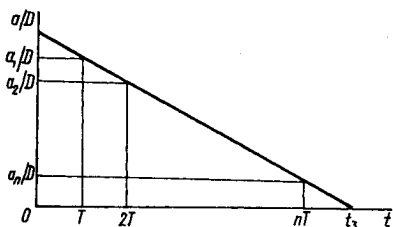


Рис. 4.24

У гідравлічній літературі наведено також спрощений (наближений) спосіб визначення підвищення тиску при непряму ударі. При цьому вважають, що в разі непрямого удару втрачається не вся швидкість  $V_0$ , а швидкість  $V$ , що пропорційна відношенню фази удару до часу

закриття засувки  $t_3$ , тобто  $V = V_0 \frac{T}{t_3}$ . Тоді, враховуючи формулу (4.27),

$$\Delta p = \rho V C_V = \rho V_0 \frac{T}{t_3} C_V;$$

$$\Delta p = \frac{2\rho V_0 l}{t_3}. \quad (4.47)$$

■ **Приклад.** Визначити підвищення тиску в трубопроводі довжиною  $l = 1,5$  км, що пропускає витрату  $Q = 23$  л/с при закритті засувки в його кінці за час  $t_3 = 5$  с, якщо діаметр трубопроводу  $D = 125$  мм, товщина стінок труби  $\delta = 6$  мм, труба азбестоцементна.

Визначаємо за формулою (4.40) швидкість поширення ударної хвилі

$$C_V = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{E}{E_{\text{тр}}} \frac{D}{\delta}}},$$

де  $\frac{E}{E_{\text{тр}}} = 0,11$  — для азбестоцементної труби;

$$C_V = \frac{1425}{\sqrt{1 + 0,11 \frac{125}{6}}} = 785,43 \text{ м/с.}$$

Знаходимо швидкість руху води по трубі до удару:

$$V_0 = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 0,023}{3,14 \cdot 0,125^2} = 1,87 \text{ м/с.}$$

Визначаємо фазу удару за формулою (4.26):

$$T = \frac{2l}{C_V} = \frac{2 \cdot 1500}{785,43} = 3,82 \text{ с.}$$

Порівнюємо  $T$  і  $t_3$ . Оскільки  $T < t_3$ , то удар непрямої. Для непрямого удару за формулою (4.47) дістаємо підвищення тиску

$$\Delta p = \frac{2\rho V_0 l}{t_3} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1,87 \cdot 1500}{5,0} = 1\,122\,000 \text{ Па} = 1,12 \text{ МПа.}$$

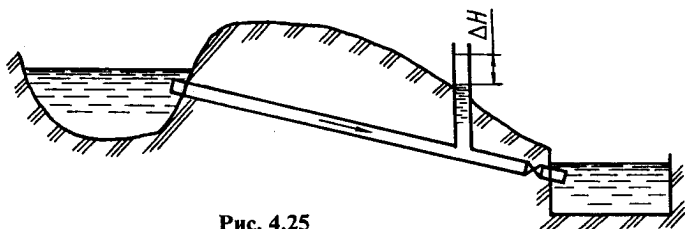


Рис. 4.25

**Способи боротьби з гідравлічним ударом.** Підвищення тиску при гідравлічному ударі залежить від характеру зміни опору засувки. Тому ефективним способом зменшення впливу удару є підбір такого закону закриття засувки, за яким тиск не буде перевищувати допустимий.

Підвищення тиску буде тим меншим, чим меншою буде втрачена швидкість:  $V_{втр} = V_0 - V$ . Чим повільніше закривають засувку, тобто чим менша фаза удару  $T$  часу повного закриття засувки  $t_3$ , тим меншою буде зміна ступеня відкриття засувки в кожній фазі.

Одним із найістотніших засобів боротьби або запобігань гідравлічному удару є повільне закриття засувок. Для трубопроводів малих діаметрів  $D$  треба встановлювати вентиля, що закриваються досить повільно.

На насосних станціях на початку напірних трубопроводів встановлюють протиударні апарати. При зупинці насоса і зниженні тиску в трубі клапани апарату автоматично відчиняються і при зворотному підході води частина її виливається з клапана без підвищення тиску. Потім клапан закривається.

На трубопроводах можна встановлювати вирівнювальні резервуари (рис. 4.25). При гідравлічному ударі в резервуар надходить частина води, що знижує додатковий тиск у трубопроводі.

Таке саме явище відбувається і в повітряних ковпаках, де стискання повітря амортизує підвищення тиску (рис. 4.26).

**Гідравлічний таран.** Підвищення тиску при гідравлічному ударі може бути використано у корисних цілях, наприклад для підйому води за допомогою гідравлічного тарана (рис. 4.27). При цьому частину води, яка надходить із водойми  $A$  з напором  $H_1$ , можна підняти на висоту  $H_2 > H_1$ .

Таран складається з робочої коробки  $B$  з ударним клапаном  $1$  і нагнітальним клапаном  $2$  та повітряного ковпака  $C$  на напірному трубопроводі. Принцип дії тарана такий. При відкритті ударного клапана  $1$  вода надходить із резервуара у коробку тарана. Завдяки тиску обтічного потоку ударний клапан закривається, і у коробці виникає

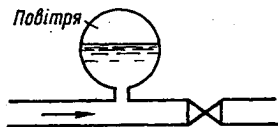


Рис. 4.26

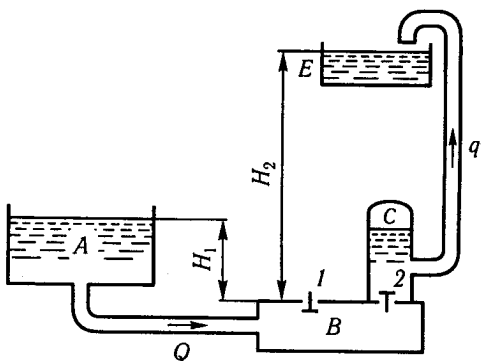


Рис. 4.27

гідравлічний удар. Унаслідок підвищення тиску відкривається нагнітальний клапан 2, частина води увійде у повітряний ковпак, стискуючи повітря, яке міститься в ньому, а останній витискує після цього воду по напірному трубопроводу в резервуар  $E$  на висоту  $H_2$ . Через витиснення частини води з робочої коробки тиск у ній зменшиться, і клапан 1 під дією власної ваги знову відкриється. У цей час клапан 2 під дією тиску повітря у ковпаку буде закритим. Потім знову потік води закриває клапан 1, і цикл повторюється.

ККД тарана являє собою відношення корисної роботи до витраченої:

$$\eta = \frac{\rho g q H_2}{\rho g Q H_1} = \frac{q H_2}{Q H_1}, \quad (4.48)$$

де  $q$  — подача (витрата) тарана;  $Q$  — витрата, яка надходить у таран з водойми.

Висота нагнітання тарана  $H_2 = (2 \dots 10) H_1$ ; при цьому подача  $q = (0,4 \dots 0,07) Q$ , а ККД  $\eta = 0,85 \dots 0,40$ .

Гідравлічні тарани, які випускає промисловість, можуть піднімати воду на висоту до 60 м при подачі до 20...22 л/хв. Вони прості в експлуатації і можуть безперервно працювати довгий час, постачаючи воду в невеликі селища та на підприємства.

#### 4.7. Особливості розрахунку трубопроводів при русі стисливої рідини

У трубопроводах повітродувних систем на водоочисних станціях, а також у газопроводах течія газу (повітря) відбувається при сталій температурі, яка дорівнює температурі навколишнього середовища. Такий процес називають *ізотермічним*. При

значній довжині трубопроводу в ньому встановлюється великий перепад тисків, що, згідно з формулою (4), приводить до істотної зміни густини газу (повітря) і, відповідно, до потреби врахування його стиснення.

Застосуємо для такої течії рівняння Бернуллі (2.89). Переходячи до рівняння для потоку і враховуючи втрати тиску по довжині  $d(\Delta p_l)$ , запишемо

$$\frac{dp}{\rho} + d\frac{V^2}{2} + d(\Delta p_l) = 0,$$

або

$$dp + \rho V dV + \lambda \frac{dl}{D} \rho \frac{V^2}{2} = 0. \quad (4.49)$$

Оскільки масова витрата  $M = \rho Q$ , то швидкість течії газу у газопроводі з урахуванням рівняння газового стану (4)

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{M}{\rho \omega} = \frac{M}{\omega} \frac{R_* T}{p},$$

а її диференціал

$$dV = -\frac{M}{\omega} R_* T \frac{dp}{p^2}.$$

Підставляючи ці вирази у рівняння (4.49), дістаємо

$$dp - \frac{M^2}{\omega^2} R_* T \frac{dp}{p^2} + \lambda \frac{dl}{D} \frac{M^2}{2\omega^2} \frac{R_* T}{p} = 0,$$

або

$$-p dp = \left( \lambda \frac{dl}{D} - 2 \frac{dp}{p} \right) \frac{M^2}{2\omega^2} R_* T = 0. \quad (4.50)$$

Інтегруючи це рівняння при сталих  $M$  та  $T$  і при  $\lambda = \text{const}$ , маємо

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} = \left( \lambda \frac{l}{D} + 2 \ln \frac{p_1}{p_2} \right) \frac{M^2}{2\omega} R_* T. \quad (4.51)$$

Для довгих газопроводів величина  $2 \ln \frac{p_1}{p_2}$ , як правило, значно менша ніж  $\lambda \frac{l}{D}$ , і нею можна знехтувати. З урахуванням рівняння газового стану (4) можна записати

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2 p_1} = \lambda \frac{l}{D} \frac{M^2}{2\omega^2 \rho_1}. \quad (4.52)$$

При русі нестисливого газу ( $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ ) втрати тиску з урахуванням формули (3.9)

$$\Delta p_0 = p_1 - p_2 = \rho g h_l = \rho g \lambda \frac{l}{D} \frac{Q^2 \rho^2}{2g\omega^2 \rho^2} = \lambda \frac{l}{D} \frac{M^2}{2\omega^2 \rho}. \quad (4.53)$$

Порівнюючи вирази (4.52) і (4.53), бачимо, що праві частини в них однакові. Оскільки

$$\frac{p_1^2 - p_2^2}{2p_1} = \frac{p_1 - p_2}{2p_1} (p_1 + p_2),$$

то втрати тиску при русі стисливого газу у газопроводі можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{2p_1}{p_1 + p_2} \Delta p_0 = \frac{2}{1 + \frac{p_2}{p_1}} \Delta p_0 = \\ &= \frac{2}{2 - \frac{\Delta p}{p_1}} \lambda \frac{l}{D} \frac{M^2}{2\omega^2 \rho_1}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

де  $\Delta p = p_1 - p_2$  — різниця тисків на початку та в кінці трубопроводу. Із формули (4.54) випливає, що врахування впливу стисливості газу необхідно, якщо множник біля  $\Delta p_0$  істотно відрізняється від одиниці. У більшості технічних розрахунків можна припускати похибку до 5%; при цьому відносний перепад тиску  $\frac{\Delta p}{p_1}$  не повинен перевищувати 9,5%.

Із рівняння (4.54) можна знайти пропускну здатність газопроводу (масову витрату)

$$M = \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) \left(1 - 0,5 \frac{p_1 - p_2}{p_1}\right) D \rho_1}{\lambda l}}. \quad (4.55)$$

Якщо  $\Delta p = p_1 - p_2 \leq 0,095 p_1$ , то формула (4.55) спрощується:

$$M = \omega \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2) D \rho_1}{\lambda l}}. \quad (4.56)$$

У формулах (4.51—4.56)  $p_1$  і  $p_2$  є абсолютними тисками.

Більш докладно розрахунки повітроводів і газопроводів з урахуванням стисливості розглянуто у спеціальній літературі [1, 15].

✱ **Приклад.** Визначити перепад тисків у газопроводі довжиною  $l = 1000$  м, діаметром  $D = 200$  мм, при масовій витраті  $M = 7200$  кг/год та манометричному тиску на початку газопроводу  $p_1 = 300$  кПа. Гідравлічний коефіцієнт тертя  $\lambda = 0,031$ , термодинамічна температура  $T = 275$  К.

Абсолютний тиск на початку газопроводу  $p_1 = 300\,000 + 101\,324 = 401\,324$  Па.

Із рівняння газового стану густина газу на початку газопроводу

$$\rho = \frac{p_m + p_a}{R_g T} = \frac{401\,324}{520 \cdot 275} = 2,806 \text{ кг/м}^3.$$

Площа трубопроводу

$$\omega = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 0,0314 \text{ м}^2.$$

Масова витрата за 1 с  $M = \frac{7200}{3600} = 2$  кг/с.

У першому наближенні вважаємо, що стисливість газу можна не враховувати. Тоді з формули (4.53) дістанемо перепад тиску

$$\Delta p_0 = \lambda \frac{l}{D} \frac{M^2}{2\omega^2 \rho} = 0,031 \frac{1000}{0,2} \frac{2^2}{2 \cdot 0,0314^2 \cdot 2,806} = 112\,051 \text{ Па.}$$

Виявляється, що  $\Delta p_0 > 0,095 p_1$ , тобто  $112\,051 > 0,095 \cdot 401\,324$ , тому треба вести розрахунки як для стисливого газу за формулою (4.52). Звідси

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - 2 p_1 \lambda \frac{l}{D} \frac{M^2}{2\omega^2 \rho_1}} = \sqrt{401\,324^2 - \frac{2 \cdot 401\,324 \cdot 0,031 \cdot 1000 \cdot 2^2}{0,2 \cdot 2 \cdot 0,0314^2 \cdot 2,806}} = 266\,655 \text{ Па.}$$

Перепад тисків

$$p_1 - p_2 = 401\,324 - 266\,655 = 134\,669 \text{ Па} = 134,669 \text{ кПа.}$$



В інженерній практиці часто розглядають задачі розрахунку витікання рідини з отворів у стінках або дні резервуарів, у дамбах водосховищ, стінках водозабірних споруд тощо. Особливості витікання залежать від розмірів отвору, його форми та інших факторів.

## 5.1. Витікання рідини з малого отвору в тонкій стінці при сталому напорі

Отвір називають *малим*, якщо в усіх його точках геометричний напір  $H$  практично однаковий. У цьому випадку швидкості у верхніх і нижніх точках отвору приблизно однакові.

Як правило, отвір вважають малим, якщо його висота  $a$  менша або дорівнює  $(0,2 \dots 0,1) H$  (рис. 5.1).

Якщо товщина стінки не впливає на умови витікання рідини, то такий отвір вважають отвором у тонкій стінці. У цьому випадку рідина торкається тільки кромки отвору, що може бути при зрізі кромки під гострим кутом (рис. 5.1, б) або при товщині стінки  $\delta$ , яка менша від половини його діаметра ( $\delta \leq 0,5d$ , рис. 5.1, в). Сталий напір  $H$  забезпечується припливом рідини до резервуара з витратою  $q$ , яка дорівнює витраті витікання  $Q$ .

Для визначення швидкості витікання використовуємо рівняння Бернуллі для перерізів  $O-O$  і  $C-C$  відносно площини порівняння  $O'-O'$ , яка проходить через центр отвору. Переріз  $O-O$  обирають на поверхні води в резервуарі, а для вибору другого перерізу треба враховувати те, що витічний з отвору струмінь стискається. Безпосередньо в отворі лінії течії мають різне викривлення і живий переріз не є плоским. На відстані приблизно  $0,5d$  від входу в отвір, де струмінь має найбільше стиснення (переріз  $C-C$ ), криволінійні струмінки вирівнюються.

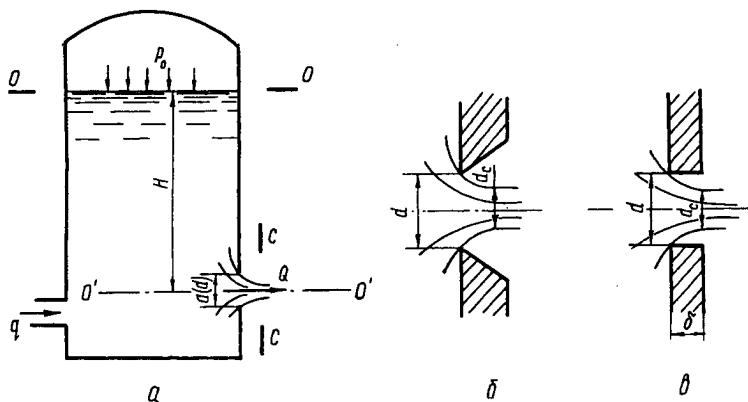


Рис. 5.1

ся. Переріз  $C-C$  називають *стисненим перерізом*:

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha V_0^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{\alpha V_C^2}{2g} + \zeta_{\text{отв}} \frac{V_C^2}{2g}, \quad (5.1)$$

де  $p_0$  — манометричний тиск на вільній поверхні води в резервуарі;  $V_0$  — середня швидкість у перерізі  $O-O$ ;  $z_C$  — координата центра перерізу  $C-C$ ,  $z_C = 0$ ;  $p_C$  — манометричний тиск у перерізі  $C-C$ ,  $p_C = 0$ ;  $V_C = V$  — швидкість у перерізі  $C-C$ ;  $\zeta_{\text{отв}}$  — коефіцієнт місцевих опорів в отворі.

Позначимо  $H' = H + \frac{p_0}{\rho g}$ . Це зведений напір.

Повний, або гідродинамічний, напір

$$H_0 = H' + \frac{\alpha V_0^2}{2g}. \quad (5.2)$$

Прийнявши  $\alpha \approx 1,0$ , після перетворень дістанемо

$$H_0 = \frac{V^2}{2g} (1 + \zeta_{\text{отв}}). \quad (5.3)$$

Звідси швидкість витікання рідини з малого отвору

$$V = \varphi \sqrt{2gH_0}, \quad (5.4)$$

де  $\varphi$  — коефіцієнт швидкості, що залежить від виду отвору,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}}}}. \quad (5.5)$$

Коефіцієнт  $\varphi$  завжди менший за одиницю. Він характеризує зменшення швидкості в'язкої (реальної) рідини порівняно зі

швидкістю нев'язкої рідини за рахунок втрат енергії при витіканні води через отвір. Наприклад, для круглого отвору  $\varphi = 0,97$ . Витрата  $Q$  при витіканні рідини через отвори є добутком її швидкості в перерізі  $C-C$  на площу живого перерізу струменя  $\omega_C$ . Оскільки струмінь у цьому перерізі стискується, то

$$\omega_C = \varepsilon \omega, \quad (5.6)$$

де  $\varepsilon$  — коефіцієнт стиснення, що залежить від форми отвору й умов стиснення (для круглого отвору  $\varepsilon = 0,64$ );  $\omega$  — площа перерізу отвору.

Звідси маємо

$$Q = V \omega_C = \varphi \varepsilon \omega \sqrt{2gH_0}$$

і

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}, \quad (5.7)$$

де  $\mu$  — коефіцієнт витрати,

$$\mu = \varepsilon \varphi < 1. \quad (5.8)$$

**Витікання з відкритого резервуара і резервуарів великих розмірів.** В окремому випадку при витіканні рідини з відкритого резервуара

$$H' = H; \quad H_0 = H + \frac{\alpha V_0^2}{2g}.$$

У резервуарах, що мають великі поперечні розміри, швидкість у перерізі  $O-O$  дуже мала, і величиною швидкісного напору  $\frac{\alpha V_0^2}{2g}$  можна нехтувати. Тоді формули матимуть вигляд для закритого резервуара:

$$V = \varphi \sqrt{2gH'}; \quad (5.9)$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH'}; \quad (5.10)$$

для відкритого резервуара

$$V = \varphi \sqrt{2gH}; \quad (5.11)$$

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}. \quad (5.12)$$

**Трасекторія струменя. Визначення коефіцієнтів швидкості, витрати і стиснення струменя.** Струмінь витікає з отвору (рис. 5.2) з горизонтальною швидкістю  $V$ , і за час  $t$  частина рідини в струмені подолає відстань по горизонталі

$$x = Vt. \quad (5.13)$$

За цей самий час  $t$  частинка рідини в умовах вільного падіння пройде вертикальний шлях

$$y = \frac{gt^2}{2}. \quad (5.14)$$

Визначивши  $t$  із формули (5.13) і підставивши його у вираз (5.14), отримаємо рівняння траєкторії струменя, що рухається в повітрі:

$$y = \frac{gx^2}{2V^2}. \quad (5.15)$$

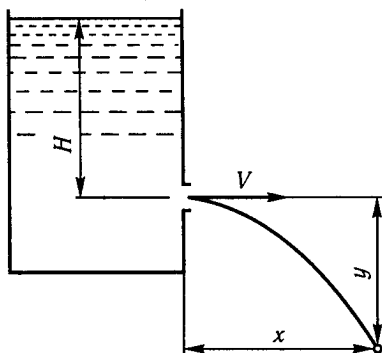


Рис. 5.2

Координати  $x$  і  $y$  у будь-якій точці струменя можна визначити за допомогою експерименту і потім знайти швидкість:

$$V = x \sqrt{\frac{g}{2y}}. \quad (5.16)$$

При достатній величині значень  $x$  і  $y$  таке визначення швидкості є більш точним, ніж безпосереднє вимірювання швидкості в струмені при невеликих його поперечних розмірах. Потім із формули (5.11) коефіцієнт швидкості

$$\varphi = V / \sqrt{2gH}. \quad (5.17)$$

Витрату  $Q$  можна визначити об'ємним способом, а потім знайти коефіцієнт витрати:

$$\mu = \frac{Q}{\omega \sqrt{2gH}}, \quad (5.18)$$

а також коефіцієнт стиснення струменя

$$\varepsilon = \mu / \varphi. \quad (5.19)$$

Таке визначення коефіцієнта  $\varepsilon$  є більш точним, ніж безпосереднє вимірювання розмірів перерізу струменя в повітрі.

■ **Приклад.** Визначити коефіцієнти витрати, швидкості і стиснення струменя, якщо вимірювані координати точки струменя  $x = 70$  см,  $y = 30$  см (рис. 5.2), вимірювальна посудина об'ємом  $W = 2,5$  л, що підставлена під струмінь, заповнюється за 24 с. Діаметр отвору 10 мм, напір над отвором  $H = 0,42$  м.

Витрата

$$Q = \frac{W}{t} = \frac{2,5}{24} = 0,104 \text{ л/с} = 0,000104 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Площа отвору

$$\omega = \frac{3,14 \cdot 0,01^2}{4} = 0,0000785 \text{ м}^2.$$

Коефіцієнт витрати

$$\mu = \frac{Q}{\omega \sqrt{2gH}} = \frac{0,000104}{0,0000785 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,42}} = 0,61.$$

Швидкість

$$V = x \sqrt{\frac{g}{2y}} = 0,7 \sqrt{\frac{9,81}{2 \cdot 0,3}} = 2,79 \text{ м/с.}$$

Коефіцієнт швидкості

$$\varphi = \frac{V}{\sqrt{2gH}} = \frac{2,79}{\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,42}} = 0,972.$$

Коефіцієнт стиснення струменя

$$\epsilon = \frac{\mu}{\varphi} = \frac{0,61}{0,972} = 0,629.$$

Звичайно втрати енергії при витіканні рідини з отворів у тонкій стінці, де струмінь торкається тільки кромки стінки, відносно невеликі. Тому для круглого отвору в тонкій стінці коефіцієнт місцевого опору  $\zeta = 0,06$  і коефіцієнт швидкості згідно з формулою (5.5)  $\varphi = 0,97$ . Проте стиснення струменя є істотним, його діаметр порівняно з діаметром отвору зменшується на 20 % і більше. Тоді коефіцієнт стиснення  $\epsilon \leq 0,64$ , і, як свідчать дослідження, він може зменшуватися до 0,61. Враховуючи залежність (5.8), коефіцієнт витрати в середньому може бути  $\mu = 0,59 \dots 0,66$ . Більш детальні дані про коефіцієнти витрати для круглих і квадратних отворів наведено в табл. 5.1.

У разі витікання струменя із некруглих отворів форма його перерізу може змінюватися. Так, струмінь, що витікає з квадратного отвору, на деякій відстані від останнього має переріз у формі хреста. Таке явище називається *інверсією струменя*.

Таблиця 5.1. Коефіцієнти витрати для малих круглих і квадратних отворів

Напір над центром отвору $H$ , м	Коефіцієнт витрати $\mu$					
	для круглого отвору з діаметром $d$ , м			для квадратного отвору із стороною квадрата $d$ , м		
	0,015	0,06	0,3	0,015	0,06	0,3
0,2	0,62	0,60	—	0,63	0,61	—
0,3	0,62	0,60	0,59	0,62	0,61	0,6
0,5	0,61	0,60	0,59	0,62	0,61	0,6
1	0,61	0,60	0,60	0,61	0,61	0,6
2	0,60	0,60	0,60	0,61	0,60	0,6
6	0,60	0,60	0,59	0,60	0,60	0,6
15	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,6

**Повне досконале, недосконале і неповне стиснення.** Дані, що наведені вище, стосуються так званого повного стиснення, при якому відстань від будь-якої межі контуру отвору до вільної поверхні рідини або краю стінки, в межах якої розміщений отвір, буде не менше, ніж потрібний поперечний розмір отвору (рис. 5.3).

Якщо хоча б одна з таких відстаней буде меншою за потрібний розмір отвору, то стиснення буде недосконалим (рис. 5.3, II). Тоді коефіцієнт витрати збільшується і його можна визначити за формулою

$$\mu_n = \mu \left[ 1 + 0,641(\omega/\Omega)^2 \right], \quad (5.20)$$

де  $\omega$  — площа отвору;  $\Omega$  — площа стінки, в якій розміщений отвір.

Якщо при підході до отвору потік з одного або кількох боків не має стиснення (рис. 5.3, III, рис. 5.4), то стиснення буде неповним. Коефіцієнт витрати в цьому випадку визначають за формулою

$$\mu_{\text{нп}} = \mu \left( 1 + k \frac{\chi_1}{\chi} \right), \quad (5.21)$$

де  $k$  — коефіцієнт, який залежить від форми отвору; для круглих отворів  $k = 0,128$ , для квадратних  $k = 0,152$ ;  $\chi_1$  — частина периметра, де відсутнє стиснення;  $\chi$  — повний периметр отвору.

**Вплив числа Рейнольдса на витікання рідини з отворів.** Коефіцієнти швидкості, витрати, стиснення струменя, що наведені вище, характеризують квадратичну область опорів і відповідають числам Рейнольдса  $Re = \frac{\sqrt{2gHd}}{v} \geq 10^5$ . При менших числах Рейнольдса вказані коефіцієнти залежать від його значень; їх наведено на графіку А. Д. Альтшуля (рис. 5.5). Звичайно малі числа Рейнольдса характеризують витікання рідини з підвищеною в'язкістю (нафта, бітум, машинні мастила тощо).

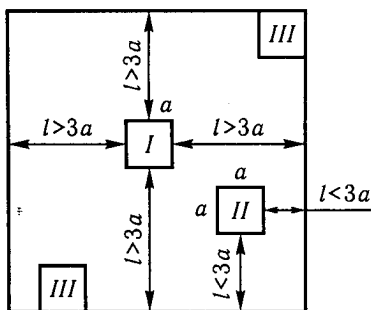


Рис. 5.3

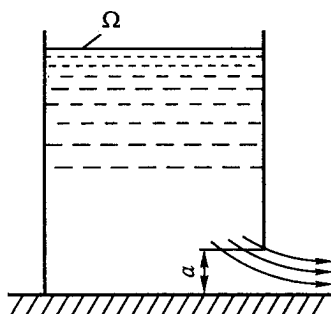


Рис. 5.4

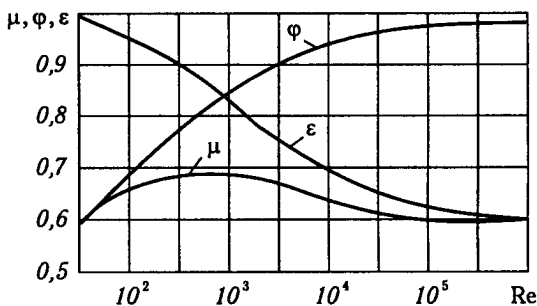


Рис. 5.5

**Вимірювальні діафрагми.** Витрата води, що витікає з отвору, залежить від різниці напорів до і після отвору. Це положення використовують для встановлення на трубопроводах витратомірів у вигляді діафрагм із круглим отвором (рис. 5.6). Якщо вимірювані показники п'єзометрів  $H_1$  і  $H_2$ , то витрата

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = M \sqrt{H_1 - H_2}, \quad (5.22)$$

де  $M = \mu \omega \sqrt{2g}$  визначають експериментально для кожної діафрагми. При великих витратах різниця  $H_1 - H_2$  теж буде великою і таким витратоміром користуватися незручно. У таких випадках краще користуватися диференціальним ртутним манометром, що з'єднаний із витратоміром (рис. 5.7). Враховуючи вираз (1.16), після деяких перетворень дістаємо

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g(H_1 - H_2) \frac{\rho_p - \rho_B}{\rho_B}} = M' \sqrt{H_1 - H_2} = M' \sqrt{H}, \quad (5.23)$$

де  $M' = \mu \omega \sqrt{2g \frac{\rho_p - \rho_B}{\rho_B}}$  також визначають за допомогою експерименту.

■ **Приклад.** Визначити витрату води, що протікає через вимірювальну діафрагму діаметром 40 мм. Показник ртутного манометра  $H = 350$  мм, коефіцієнт витрати  $\mu = 0,6$ .

Стала витратоміра

$$M' = 0,6 \frac{3,14 \cdot 0,04^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \frac{13\,600 - 1000}{1000}} = 0,01185 \text{ м}^{2,5}/\text{с}.$$

Витрата

$$Q = M' \sqrt{H} = 0,01185 \sqrt{0,35} = 0,007 \text{ м}^3/\text{с} = 7 \text{ л/с}.$$

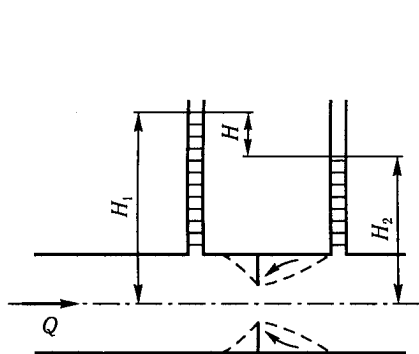


Рис. 5.6

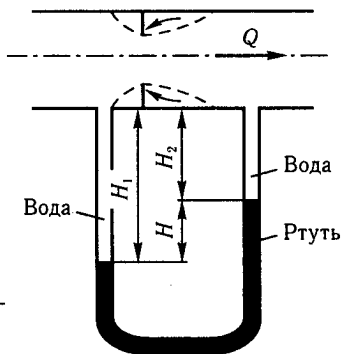


Рис. 5.7

**Витікання через затоплені отвори (під рівень).** У цьому випадку розрахункові перерізи 1-1 і 2-2 вибирають на поверхнях рідини в обох резервуарах (рис. 5.8), а площина порівняння проходить через центр отвору.

Для відкритих резервуарів рівняння Бернуллі можна записати у вигляді (нехтуємо швидкісними напорами у перерізах 1-1 і 2-2)

$$H_1 = H_2 + \frac{V^2}{2g} (\zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{вих}}), \quad (5.24)$$

де  $V$  — швидкість протікання рідини в стисненому перерізі;  $\zeta_{\text{отв}}$  — коефіцієнт опору отвору;  $\zeta_{\text{вих}}$  — коефіцієнт опору на виході з отвору в резервуар.

При великих розмірах резервуара можна записати  $\zeta_{\text{вих}} \approx \alpha \approx 1$ . Тоді

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}}}} \sqrt{2g(H_1 - H_2)},$$

або

$$V = \phi \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \phi \sqrt{2gH}, \quad (5.25)$$

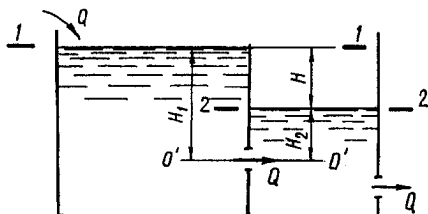


Рис. 5.8



де

$$H = H_1 - H_2.$$

Аналогічно витрата

$$Q = \mu \omega \sqrt{2g(H_1 - H_2)} = \mu \omega \sqrt{2gH}. \quad (5.26)$$

## 5.2. Витікання рідини з великих отворів

Під час витікання рідини з великих отворів геометричні напори у верхніх та нижніх точках істотно відрізняються один від одного.

Виділимо горизонтальну смугу в площині отвору з нескінченно малою висотою  $dh$  (рис. 5.9).

Для такої смуги напір буде однаковим в усіх точках.

Тому можна застосувати формулу для малого отвору

$$dQ = \mu b_h dh \sqrt{2gh}$$

і

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} b_h h^{1/2} dh, \quad (5.27)$$

де  $b_h dh = d\omega$ ;  $b_h$  — ширина отвору на глибині  $h$ .

Коефіцієнт  $\mu$  не є постійним для всіх струминок:  $\mu = f\left(\frac{H_2 - H_1}{H}\right)$ , але, маючи на увазі те, що даних про зміну  $\mu$  недостатньо, вважаємо, що у формулу витрати буде входити узагальнений коефіцієнт  $\mu$ .

В окремому випадку для прямокутного отвору  $b = \text{const}$  (рис. 5.10) і

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \int_{H_1}^{H_2} h^{1/2} dh = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}). \quad (5.28)$$

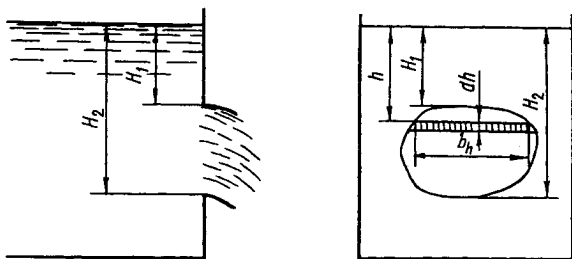


Рис. 5.9

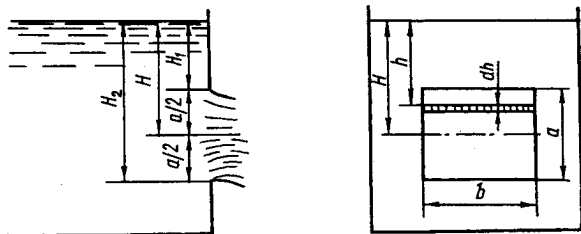


Рис. 5.10

Експериментальних даних для великих отворів недостатньо, рекомендації для коефіцієнтів витрати різних дослідників відрізняються одна від одної. Приблизно можна брати для досконалого стиснення  $\mu = 0,65$ , для недосконалого  $\mu = 0,7$ .

✎ **Приклад.** Ширина прямокутного отвору, з якого вода витікає з водоймища в канал,  $b = 1,2$  м (рис. 5.10). Відстань від нижньої кромки отвору до вільної поверхні води у водоймищі  $H_2 = 3,0$  м.

Визначити витрату води  $Q$ , якщо висота отвору  $a = 1,0$  м.

Глибина занурення центра отвору  $H = H_2 - \frac{a}{2} = 3 - \frac{1}{2} = 2,5$  м. При  $a > (0,1 \dots 0,2) H$  отвір вважають великим; витрату в цьому випадку визначають за формулою

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_2^{3/2} - H_1^{3/2}),$$

$\mu = 0,65$  — коефіцієнт витрати великого отвору;  $H_1 = H_2 - a = 3 - 1 = 2,0$  м.  
Тоді витрата

$$Q = \frac{2}{3} \cdot 0,65 \cdot 1,2 \sqrt{2 \cdot 9,81} (\sqrt{3^3} - \sqrt{2^3}) = 5,458 \text{ м}^3/\text{с}.$$

### 5.3. Витікання рідини з насадків

У п. 5.1 зазначено, що внаслідок стиснення струменя коефіцієнт витрати отвору істотно зменшується, тобто зменшується пропускна здатність отвору.

Збільшити її можна, усунувши стиснення струменя. Для цього і застосовують різні типи насадків.

*Насадком* називають короткий патрубок, прикріплений до отвору. Залежно від форми цього патрубку насадки бувають різних типів.

**Зовнішній циліндричний насадок** (рис. 5.11, а, б). При вході в насадок потік обтікає гострі його краї і струмінь стискується так само, як і при витіканні через отвори.

Струмінь, протікаючи, захоплює повітря, яке на початку витікання перебувало між ним і стінками насадка. В результаті

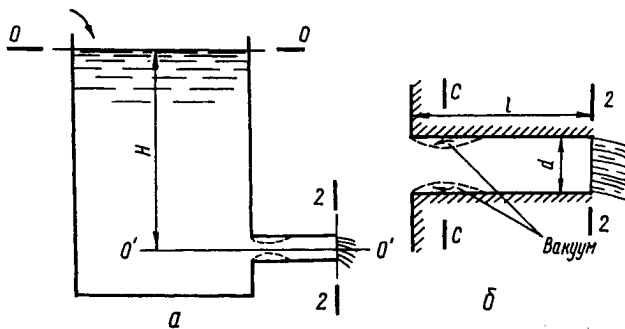


Рис. 5.11

в цьому просторі створюється вакуум, який притягує струмінь до стінок. Струмінь розширюється і витікає з насадки вже повним живим перерізом без стиснення на виході.

Витікання через насадку розраховують аналогічно витіканню через отвір за допомогою рівняння Бернуллі для перерізів  $O-O$  і  $2-2$  на виході з насадки.

Розглянемо випадок витікання з відкритого резервуара, припускаючи, що  $V_0 \approx 0$  і  $H_0 = H$ .

Тоді маємо

$$H = \frac{V^2}{2g} + \zeta_{\text{нас}} \frac{V^2}{2g};$$

звідси

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{нас}}}} \sqrt{2gH} = \varphi_{\text{нас}} \sqrt{2gH}, \quad (5.29)$$

де  $\zeta_{\text{нас}}$  — коефіцієнт опору для насадки;  $\varphi_{\text{нас}}$  — коефіцієнт швидкості для насадки.

Коефіцієнт швидкості  $\varphi_{\text{нас}}$  у цьому випадку буде відрізнятися від коефіцієнта швидкості для отвору  $\varphi_{\text{отв}}$ , тому що крім втрат на обтікання країв у насадку будуть ще і втрати напору на розширення струменя після перерізу  $C-C$ . Можна вважати, що загальний опір у насадку буде аналогічним опору при вході в трубу з резервуара ( $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ ) (див. п. 3.7). Тоді маємо

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{розш}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{вх}}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,5}} = 0,82, \quad (5.30)$$

де  $\zeta_{\text{отв}}$  — коефіцієнт опору для отвору;  $\zeta_{\text{розш}}$  — коефіцієнт опору при розширенні струменя після стисненого перерізу.

Результати дослідів близькі до результату, здобутого за формулою (5.30) при довжині насадки  $l = (3 \dots 4)d$  (де  $d$  — діаметр насадки). При довжинах насадки  $l > (3 \dots 4)d$  до опорів на об-

тікання країв і розширення струменя треба додавати опір по довжині насадка, що зменшує коефіцієнт швидкості:

$$\varphi_{\text{нас}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{\text{отв}} + \zeta_{\text{розш}} + \lambda \frac{l}{d}}}. \quad (5.31)$$

Якщо  $l < (3 \dots 4) d$ , ділянка розширеного струменя в насадку буде дуже короткою і неспроможною протистояти різниці атмосферного тиску на виході з насадка і зниженого тиску ( $p_c < p_a$ ) в зоні перерізу  $C-C$ . У цьому випадку зовнішнє повітря час від часу проривається до насадка, ліквідує вакуум; течія рідини стає нестійкою, що неприпустимо в інженерних спорудах. Тому наведена вище довжина насадка є оптимальною.

Витрату через насадок визначають за формулою

$$Q = \mu_{\text{нас}} \omega \sqrt{2gH}. \quad (5.32)$$

Однак коефіцієнт витрати  $\mu_{\text{нас}}$ , унаслідок того що відсутнє стиснення струменя на виході з насадка, є значно більшим, ніж при витіканні через отвір.

При  $\varphi_{\text{нас}} = 0,82$ ,  $\epsilon_{\text{нас}} = 1,0$ ,  $\mu_{\text{нас}} = \varphi_{\text{нас}} \epsilon_{\text{нас}} = 0,82 \cdot 1,0 = 0,82$ .  
Для порівняння  $\mu_{\text{отв}} = 0,62$ .

$$\frac{\mu_{\text{нас}} - \mu_{\text{отв}}}{\mu_{\text{отв}}} 100\% = \frac{0,82 - 0,62}{0,62} 100\% = 30\%.$$

Це означає, що витрата через насадок на 30 % більша, ніж через отвір. Швидкість протікання через насадок на 15 % менша, ніж швидкість протікання через отвір:

$$\frac{\varphi_{\text{отв}} - \varphi_{\text{нас}}}{\varphi_{\text{отв}}} 100\% = \frac{0,97 - 0,82}{0,97} 100\% = 15\%.$$

■ **Приклад.** Із закритого бака з малого отвору в тонкій стінці витікає вода у відкритий резервуар, а з нього з циліндричного насадка — в атмосферу (рис. 5.12). Визначити рівень води у відкритому резервуарі при манометричному тиску на поверхні води в закритому резервуарі  $p_M = 20$  кПа і глибині в ньому  $z_1 = 4$  м. Діаметр отвору  $d_1 = 12$  мм, діаметр насадка  $d_2 = 18$  мм.

У разі усталеного руху води  $Q_{\text{от}} = Q_{\text{нас}}$ . Витрату через затоплений отвір визначають за формулами (5.26) і (5.10):

$$Q_{\text{от}} = \mu_{\text{от}} \omega_{\text{от}} \sqrt{2g[z_1 + p_M / (\rho g) - z_2]}.$$

При виведенні формули витікання з насадка рівняння Бернуллі застосовують для перерізів по поверхні води і на виході з насадка.

Тому

$$Q_{\text{нас}} = \mu_{\text{нас}} \omega_{\text{нас}} \sqrt{2g(z_2 + l)},$$

де  $l$  — довжина насадка ( $l \cong 4d_2$ ).

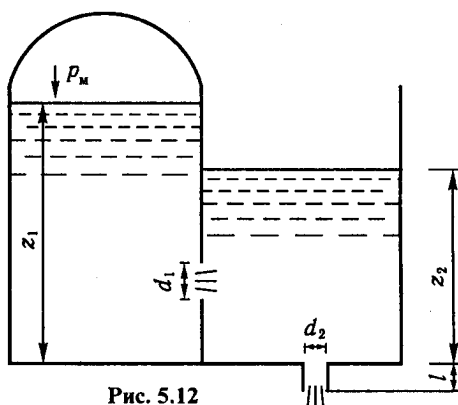


Рис. 5.12

Звідси

$$\mu_{от} \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{2g(z_1 + p_m / \rho g - z_2)} = \mu_{нас} \frac{\pi d_2^2}{4} \sqrt{2g(z_2 + l)}.$$

Після підстановки даних дістанемо

$$\begin{aligned} 0,6 \frac{3,14 \cdot 0,012^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 \left( 4 + \frac{20\,000}{1000 \cdot 9,81} - z_2 \right)} = \\ = 0,82 \frac{3,14 \cdot 0,018^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81 (z_2 + 4 \cdot 0,018)}. \end{aligned}$$

Звідси  $z_2 = 0,57$  м.

**Вакуум у насадку** встановлюється тим більшим, чим більшою буде швидкість витікання, тобто чим більше напір перед входом до насадку.

Оскільки вакуум має граничне значення, то і напір перед насадком не може бути як завгодно великим і теж має граничне значення. Його можна визначити з рівняння Бернуллі для стисненого перерізу  $C-C$  і перерізу  $2-2$  на виході з насадку (рис. 5.11, б):

$$\frac{p_C}{\rho g} + \frac{\alpha V_C^2}{2g} = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} + h_{втр C-2}. \quad (5.33)$$

Вважаємо втрати між перерізами  $C-C$  і  $2-2$  як втрати на раптове розширення потоку (див. формулу (3.73)) і з урахуванням формули (3.74)

$$h_{втр C-2} = \alpha \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g} = \alpha \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2 \frac{V^2}{2g}, \quad (5.34)$$

де  $\varepsilon$  — коефіцієнт стиснення струменя в перерізі  $C-C$ .

Згідно з формулою (5.29)  $\frac{V^2}{2g} = \varphi_{\text{нас}}^2 H$  і  $\alpha = 1,0$ .  
З рівняння (2.25)

$$\frac{V_C^2}{V^2} = \frac{\omega^2}{\omega_C^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Із рівняння (5.33) з урахуванням формули (5.34) дістаємо

$$\begin{aligned} \frac{p_a - p_C}{\rho g} = h_{\text{вак}} &= \frac{V_C^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \frac{V^2}{2g} = \\ &= \varphi_{\text{нас}}^2 \cdot H \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Вважаючи, що коефіцієнт стиснення струменя в перерізі С-С, як і для малого отвору,  $\varepsilon = 0,64$  і  $\varphi_{\text{нас}} = 0,82$ , дістаємо

$$h_{\text{вак}} = H \cdot 0,82^2 \left[ \frac{1}{0,64^2} - 1 - \left(\frac{1}{0,64} - 1\right)^2 \right] = 0,75 \cdot H.$$

Звідси

$$H = \frac{h_{\text{вак}}}{0,75}. \quad (5.35)$$

Теоретично граничним вважають такий вакуум, при якому вода перетворюється на пару, тобто тиск у цьому випадку є тиском пароутворення. Наприклад, для води при  $t = 20^\circ\text{C}$  гізометрична висота, яка відповідає тиску пароутворення,  $\frac{p_{\text{п}}}{\rho g} = 0,24$  м. Тоді

$$H_{\text{пр}} = \frac{\frac{p_a}{\rho g} - \frac{p_{\text{п}}}{\rho g}}{0,75} = \frac{10,33 - 0,24}{0,75} = 13,5 \text{ м.}$$

В інженерній практиці з деяким запасом (з метою запобігання зриву вакууму) рекомендують брати  $h_{\text{вак.пр}} = 8$  м, тобто  $H_{\text{пр}} \leq 10,7$  м.

По типу зовнішнього циліндричного насадка влаштовують отвори в тілі греблі для випуску води з водосховища (рис. 5.13).

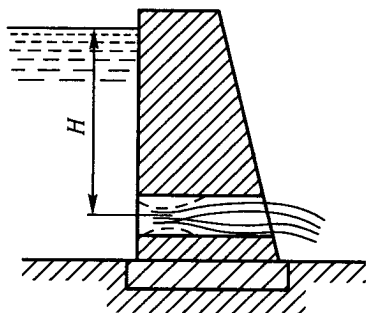


Рис. 5.13

■ **Приклад.** З резервуара вода витікає із зовнішнього циліндричного насадка (рис. 5.11) діаметром  $d = 50$  мм,

напір  $H = 7$  м. Як зміниться витрата через насадок, якщо манометричний тиск на поверхні води збільшити з  $p_{m_1} = 30$  кПа до  $p_{m_2} = 40$  кПа?

Визначимо зведені напори:

$$H'_1 = 7 + \frac{30\,000}{1000 \cdot 9,8} = 10,06 \text{ м};$$

$$H'_2 = 7 + \frac{40\,000}{1000 \cdot 9,8} = 11,08 \text{ м}.$$

У другому випадку  $H'_2 > H_{зв} = 10,7$  м, тобто можливий зрив вакууму, насадок буде працювати нестійко і його можна розраховувати як отвір у тонкій стінці. Тоді витрата

$$Q_1 = 0,82 \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 10,06} = 0,0226 \text{ м}^3/\text{с} = 22,6 \text{ л/с};$$

$$Q_2 = 0,62 \frac{3,14 \cdot 0,05^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 11,08} = 0,0179 \text{ м}^3/\text{с} = 17,9 \text{ л/с}.$$

Отже, у зв'язку з можливим зривом вакууму в другому випадку витікання вважається як витікання з отвору, і витрата буде меншою, ніж у першому випадку при сталому (стійкому) витіканні.

**Інші типи насадків.** Хоча витрата з насадків значно більша, ніж з отворів у тонкій стінці, її можна ще збільшити в результаті подальшого вдосконалення конструкції насадків.

Наприклад, при плавному вході в насадки (рис. 5.14, а) не відбувається стиснення струменя з подальшим його розширенням. У цьому випадку втрати напору зменшуються і коефіцієнти швидкості і витрати збільшуються до 0,93...0,95. Якщо

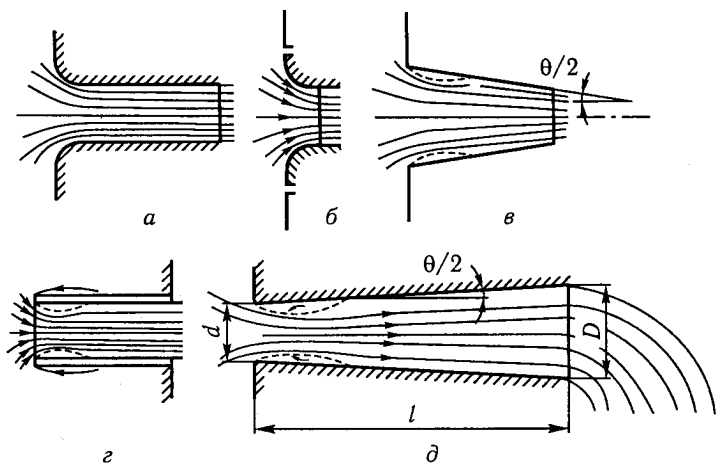


Рис. 5.14

профіль насадка виконати відповідно до форми струменя, який витікає з отвору, то такий насадок називають *коноїдальним* (рис. 5.14, б), для нього  $\varphi = \mu = 0,97$ . На практиці замість коноїдального часто застосовують конічно збіжні насадки з кутом  $\theta = 12 \dots 14^\circ$  (рис. 5.14, в), простіші у виготовленні і з дещо меншим коефіцієнтом витрати, ніж у коноїдальних ( $\varphi = \mu = 0,94 \dots 0,95$ ). Такі насадки застосовують у пожежних брендспойтах, гідромоніторах та різних струминних апаратах. Існують також внутрішні циліндричні насадки (рис. 5.14, з) з  $\mu = 0,71$ , які збільшують витрату порівняно з отвором у тонкій стінці. Такі насадки використовують, якщо з конструктивних умов неможливо застосувати зовнішній циліндричний насадок.

У конічно розбіжному насадку (рис. 5.14, д) після стисненого перерізу розширення потоку стає більшим, ніж у циліндричному насадку, що призводить до більших втрат напору і зменшенню коефіцієнтів швидкості і витрати.

У той самий час витрата через такий насадок збільшується, тому що збільшується площа розрахункового вихідного перерізу, діаметр якого

$$D = d + 2l \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad (5.36)$$

де  $d$  — діаметр отвору в стінці;  $\theta$  — кут конусності насадка.

Відношення площі вихідного перерізу до площі отвору в стінці резервуара

$$\frac{\omega}{\omega_{\text{от}}} = \frac{D^2}{d^2} = \left(1 + 2 \frac{l}{d} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right)^2. \quad (5.37)$$

Кут конусності має бути не більше ніж  $\theta = 12^\circ$ , інакше струмінь може відірватися від стінок насадка і витікання перетвориться у витікання з отвору в тонкій стінці. За дослідями оптимальні значення  $\theta \approx 8^\circ$ ,  $l = 9d$ . У цьому випадку коефіцієнти  $\mu = \varphi = 0,45$ ;  $\omega = 5,1\omega_{\text{от}}$ , а витрата рідини через насадок у 3,7 раза більша, ніж через отвір у тонкій стінці. Такий насадок може пропустити велику витрату при відносно малій швидкості. Струмінь при цьому розподіляється на окремі тонкі струминки, що розбризкуються. У разі випуску води на ґрунт зменшується небезпека розмиву.

Конічно розбіжні насадки застосовують у коротких водоводах для наповнення шлюзових камер, в ерліфтах та інших пристроях, де необхідний значний всмоктувальний ефект для збільшення витрати, а також у механізмах для уповільнення подачі мастильних речовин.

У техніці використовують також інші види насадків. Наприклад, для охолодження води промислових підприємств застосо-



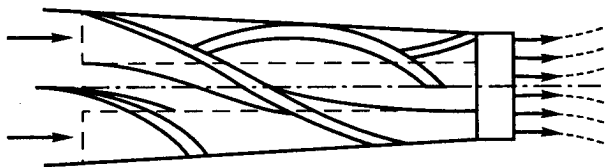


Рис. 5.15

вують гвинтові насадки (рис. 5.15), які розсіюють струмені в атмосфері, що сприяє швидкому охолодженню. В паркових фонтанах за допомогою насадків утворюють декоративні струмені різних форм.

#### 5.4. Витікання рідини з отворів і насадків при змінному напорі

Розглянемо витікання рідини з резервуара, коли витрата з резервуара  $Q$  не дорівнює витраті, яка надходить до резервуара  $q$  (рис. 5.16, а).

При  $q > Q$  рівень води в резервуарі збільшуватиметься, а при  $q < Q$  — зменшуватиметься. Витікання рідини в цьому випадку є рух неусталений.

За час  $dt$  об'єм рідини в резервуарі зміниться на величину  $\Omega dz$  ( $\Omega$  — площа поверхні рідини в резервуарі на відмітці  $z$ ;  $dz$  — змінення відмітки  $z$  за час  $dt$ ).

Ця зміна об'єму дорівнює різниці об'єму, який надійшов у резервуар  $qdt$ , і об'єму, який витік з резервуара  $Qdt$ :

$$\Omega dz = qdt - Qdt. \quad (5.38)$$

Це рівняння балансу води (рівняння неусталеного руху води в резервуарі).

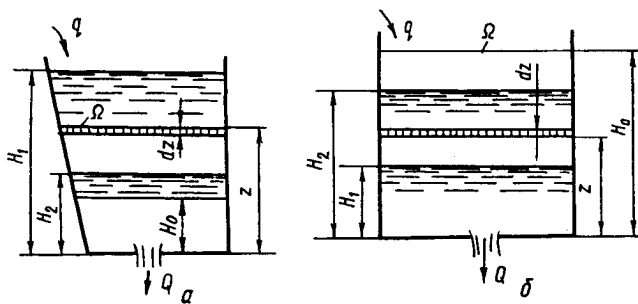


Рис. 5.16

При сталому припливі  $q$  неусталений рух намагається стати усталеним. У будь-який період часу витрата з резервуара

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gz}. \quad (5.39)$$

Якщо  $q \geq Q$ , то рівень рідини в резервуарі  $z$  збільшуватиметься або зменшуватиметься. При цьому витрата витікання  $Q$  збільшується (або зменшується) доти, доки вона не дорівнюватиме припливу рідини  $q$ . Тоді рух стане усталеним.

При  $Q = q$  напір

$$H_0 = \frac{q^2}{\mu^2\omega^2 2g}. \quad (5.40)$$

Час, потрібний для зміни рівня рідини в резервуарі на величину  $dz$ , визначають за формулою (5.38) з урахуванням залежностей (5.39) і (5.40):

$$\Omega dz = dt \left( \mu\omega\sqrt{2gH_0} - \mu\omega\sqrt{2gz} \right).$$

Звідси

$$dt = \frac{\Omega dz}{\mu\omega\sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{z})}.$$

Найчастіше  $\mu = f(\text{Re})$ , але для рідин із невеликою в'язкістю (вода) можна вважати, що  $\mu = \text{const}$ . Зінтегруємо цей вираз. Час зміни рівня води від рівня  $H_1$  до  $H_2$

$$t = \frac{1}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{\Omega dz}{\sqrt{H_0} - \sqrt{z}}. \quad (5.41)$$

Для розв'язання цього рівняння треба знати закон зміни площі поверхні води  $\Omega$  залежно від її відмітки  $\Omega = f(z)$ .

**Час зміни рівня води в резервуарі сталого поперечного перерізу при сталому припливі** (рис. 5.7, б). У цьому випадку з рівняння (5.41) маємо

$$t = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz}{\sqrt{H_0} - \sqrt{z}}. \quad (5.42)$$

Введемо нову змінну величину  $y = \sqrt{H_0} - \sqrt{z}$ . Тоді

$$dy = -\frac{dz}{2\sqrt{z}} \quad (5.43)$$

i

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{(-2\sqrt{z}) dy}{y} = \frac{-\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{2(\sqrt{H_0} - y) dy}{y} = \\
 &= \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left( 1 - \frac{\sqrt{H_0}}{y} \right) dy. \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

Звідси

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{y_1}^{y_2} \left( 1 - \frac{\sqrt{H_0}}{y} \right) dy. \quad (5.45)$$

Після інтегрування в межах від  $y_1 = \sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}$  до  $y_2 = \sqrt{H_0} - \sqrt{H_2}$  дістанемо

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left( \sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_0} \ln \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_2}} \right). \quad (5.46)$$

Ця формула дає змогу визначити час зміни рівня води в резервуарі від  $H_1$  до  $H_2$ .

Згідно із формулою (5.46) при зниженні рівня води час  $t$  буде додатним, а при підвищенні — від'ємним. Якщо витрата витікання  $Q$  наближається до значення припливу  $q$ , то  $H_2 \rightarrow H_0$  і за формулою (5.46) час  $t$  наближається до нескінченності. Практично час зміни рівня в цьому випадку можна визначити, беручи  $H_2 \approx (1,01 \dots 1,02) H_0$  при зниженні рівня води або  $(0,99 \dots 0,98) H_0$  при його підвищенні.

**Час опорожнення резервуара без припливу води.** При  $q = 0$  з формули (5.40) маємо  $H_0 = 0$  і тоді

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (5.47)$$

Це час часткового опорожнення резервуара від рівня  $H_1$  до  $H_2$ .

В окремому випадку при повному опорожненні резервуара ( $H_2 = 0$ ) рівняння (5.32) набирає вигляду

$$t = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}},$$

або

$$t = \frac{2W_1}{Q_1}, \quad (5.48)$$

де  $W_1$  — початковий об'єм води в резервуарі;  $Q_1$  — витрата на початку витікання.

Час повного опорожнення резервуара удвічі більший від часу витікання такого самого об'єму рідини при сталому напорі.

Формула (5.48) показує час витікання основної маси рідини, тому що під час зниження рівня рідини в резервуарі умови руху її змінюються. При малих напорах утворюється воронка (рис. 5.17). Разом із рідиною проривається повітря, витрата рідини зменшується, і час витікання збільшується. Наприкінці опорожнення тільки окремі струминки і краплини стікатимуть крізь кромки отвору.

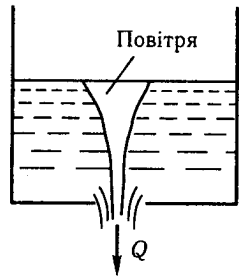


Рис. 5.17

■ **Приклад.** Визначити час опорожнення резервуара з площею поверхні води  $\Omega = 100 \text{ м}^2$  від рівня  $H_1 = 6 \text{ м}$  до  $H_2 = 0,4 \text{ м}$ . Витікання відбувається через зовнішній циліндричний насадок діаметром  $d = 100 \text{ мм}$ .

За формулою (5.32)

$$t = \frac{2 \cdot 100}{0,82 \cdot 3,14 \cdot \frac{0,1^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81}} (\sqrt{6} - \sqrt{0,4}) = 12\,700 \text{ с} = 3 \text{ год } 32 \text{ хв.}$$

**Час опорожнення водосховищ із змінною площею поверхні води.** Цей час визначають за формулою (5.41), якщо відома залежність площі поверхні  $\Omega$  води у водосховищі від рівня води в ньому, тобто  $\Omega = f(z)$ .

Якщо водосховище утворено в природному руслі річки (рис. 5.18) або западині, то, як правило, такої математичної залежності не існує.

У цьому випадку об'єм водосховища поділяють на частини з глибинами від поверхні до центра отвору  $z_0, z_1, z_2, \dots$ . Тоді площі поверхонь кожної частини  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \dots$ , а середні площі поверхонь кожної частини  $\Omega_{0-1} = \frac{\Omega_0 + \Omega_1}{2}$ ;  $\Omega_{1-2} = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$ .

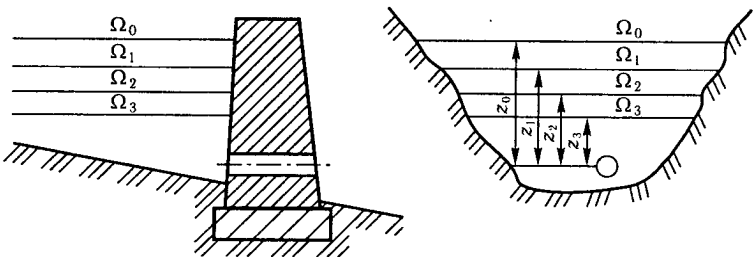


Рис. 5.18

Час опорожнення кожної частини:

$$\begin{aligned}
 t_{0-1} &= \frac{2\Omega_{0-1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}); \\
 t_{1-2} &= \frac{2\Omega_{1-2}}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}); \\
 &\dots\dots\dots \\
 t_{i-k} &= \frac{2\Omega_{i-k}}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{z_i} - \sqrt{z_k}).
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

Загальний час опорожнення водосховища від відмітки  $z_0$  до  $z_k$

$$t_{0-k} = t_{0-1} + t_{1-2} + \dots + t_{i-k}. \tag{5.50}$$

✱ **Приклад.** Визначити час зниження рівня поверхні води у водоймищі з  $H_{\text{п}} = 5$  м до  $H_{\text{к}} = 3,5$  м при витіканні води зі скидного отвору в греблі діаметром  $d = 0,2$  м, довжиною  $l = 0,75$  м. Залежно від відмітки поверхні води її площа має такі значення:

$$\begin{aligned}
 z_0 &= H_{\text{п}} = 5 \text{ м}; \quad \Omega_0 = 500 \text{ м}^2; \\
 z_1 &= 4,5 \text{ м}; \quad \Omega_1 = 420 \text{ м}^2; \\
 z_2 &= 4,0 \text{ м}; \quad \Omega_2 = 300 \text{ м}^2; \\
 z_3 &= H_{\text{к}} = 3,5 \text{ м}; \quad \Omega_3 = 160 \text{ м}^2.
 \end{aligned}$$

Визначасмо, що  $\frac{l}{d} = 3,75$ , тобто скидний отвір можна розраховувати як зовнішній циліндричний насадок.

За рівняннями (5.49) визначасмо відрізки часу зниження рівнів від  $z_0$  до  $z_1$ ; від  $z_1$  до  $z_2$ ; від  $z_2$  до  $z_3$ :

$$\begin{aligned}
 t_{0-1} &= \frac{2 \frac{500+420}{2}}{0,82 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81}} (\sqrt{5} - \sqrt{4,5}) = 936 \text{ с}; \\
 t_{1-2} &= \frac{2 \frac{420+300}{2}}{0,82 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81}} (\sqrt{4,5} - \sqrt{4}) = 758 \text{ с}; \\
 t_{2-3} &= \frac{2 \frac{300+160}{2}}{0,82 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} \sqrt{2 \cdot 9,81}} (\sqrt{4} - \sqrt{3,5}) = 525 \text{ с}.
 \end{aligned}$$

Загальний час зниження рівня

$$t_{0-3} = 936 + 758 + 525 = 2219 \text{ с} = 36 \text{ хв } 59 \text{ с} \approx 37 \text{ хв}.$$

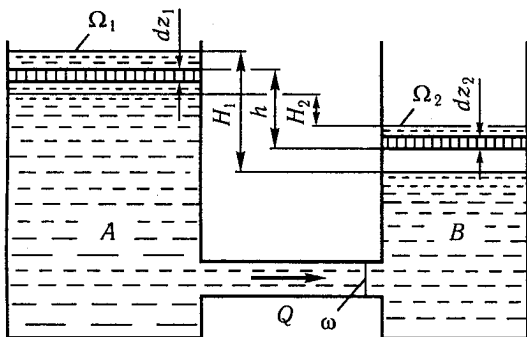


Рис. 5.19

**Витікання рідини при змінному напорі під змінний рівень.** Ця задача виникає при визначенні часу вирівнювання рівнів у двох резервуарах, які з'єднуються один з одним. У резервуарі (рис. 5.19) *A* рівень рідини знижується, а в резервуарі *B* збільшується до того часу, як різниця рівнів  $h$  не буде дорівнювати нулю.

У будь-яку мить часу витрата з резервуара *A* до резервуара *B*

$$Q = \mu_c \omega \sqrt{2gh}, \quad (5.51)$$

де  $h$  — різниця рівнів у резервуарах у розглядуваний час;  $\mu_c$  — коефіцієнт витрати системи:

$$\mu_c = \frac{1}{\sqrt{\xi_{\text{вх}} + \lambda \frac{l}{D} + \xi_{\text{вих}}}}. \quad (5.52)$$

За час  $dt$  рівень рідини у резервуарі *A* знизиться на величину  $dz_1$ , а в резервуарі *B* збільшиться на  $dz_2$ . Об'єм, на який зменшиться початковий об'єм у резервуарі *A*, дорівнює об'єму наповнення резервуара *B*, а також кількості рідини, яка витікла з першого до другого резервуара:

$$-\Omega_1 dz_1 = \Omega_2 dz_2 = Q dt. \quad (5.53)$$

При цьому різниця рівнів у резервуарах зміниться на величину

$$dh = dz_1 - dz_2. \quad (5.54)$$

Розв'язуючи сумісно рівняння (5.53) і (5.54), дістанемо

$$dz_1 = dh + dz_2 = dh - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} dz_1$$

$$dz_1 = \frac{dh}{1 + \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} dh. \quad (5.55)$$

Інтегруємо рівняння (5.53), враховуючи (5.54) і (5.55):

$$t = -\frac{\Omega_1}{\mu_c \omega \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dz_1}{\sqrt{h}} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_c \omega \sqrt{2g}} \int_{H_2}^{H_1} \frac{dh}{\sqrt{h}} =$$

$$= \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{(\Omega_1 + \Omega_2) \mu_c \omega \sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (5.56)$$

Це час зменшення різниці рівнів у резервуарах від  $H_1$  до  $H_2$ . При повному вирівнюванні рівнів у резервуарах  $H_2 = 0$  і

$$t = \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\mu_c \omega \sqrt{2g}}. \quad (5.57)$$

В окремому випадку витікання з резервуара може відбуватися у водоймищі значно більших розмірів ( $\Omega_2 \gg \Omega_1$ ). Тоді

$$t = \frac{2\Omega_1 \sqrt{H_1}}{\mu_c \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1}} = \frac{2W_1}{Q_1}. \quad (5.58)$$

Якщо наповнення другого резервуара відбувається із значно більшого водосховища ( $\Omega_1 \gg \Omega_2$ ), то

$$t = \frac{2\Omega_2 \sqrt{H_1}}{\mu_c \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1}} = \frac{2W_2}{Q_1}. \quad (5.59)$$

У цих формулах  $W_1 = \Omega_1 H_1$ ;  $W_2 = \Omega_2 H_1$  — об'єми води в першому і другому резервуарах при глибині  $H_1$ ;  $Q_1$  — витрата в початковий момент часу при різниці рівнів  $H_1$ .

■ **Приклад.** Визначити час вирівнювання рівнів води в резервуарах (рис. 5.19) із діаметрами  $D_1 = 5$  м і  $D_2 = 4$  м, якщо початкова різниця рівнів  $H_1 = 1,5$  м, діаметр сполучної труби  $d = 50$  мм, її довжина  $l = 5$  м, гідравлічний коефіцієнт тертя  $\lambda = 0,02$ .

Визначаємо коефіцієнт витрати системи за формулою (5.52):

$$\mu_c = \frac{1}{\sqrt{0,5 + 0,02 \frac{5}{0,05} + 1}} = 0,534.$$

Час вирівнювання рівнів за формулою (5.57)

$$t = \frac{\frac{2\pi D_1^2}{4} \cdot \frac{\pi D_2^2}{4}}{\frac{\pi D_1^2}{4} + \frac{\pi D_2^2}{4}} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\mu_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g}} = 2 \frac{D_1^2 \cdot D_2^2}{D_1^2 + D_2^2} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\mu_c d^2 \sqrt{2g}} =$$

$$= 2 \frac{5^2 \cdot 4^2}{5^2 + 4^2} \cdot \frac{\sqrt{1,5}}{0,534 \cdot 0,05^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} = 404,2 \text{ с} = 6 \text{ хв } 44 \text{ с}.$$

## 5.5. Вільні струмені рідини

*Вільним струменем* називають потік, не обмежений жорсткими стінками. Вільні струмені можуть бути *незатопленими*, якщо вони оточені газовим (повітряним) середовищем. Це пожежні струмені, фонтанні, струмені дощувальних апаратів.

*Затопленим вільним струменем* називають струмінь, що витікає в середовище з тією самою густиною, що й сам струмінь. Такі струмені бувають при випусках відпрацьованих промислових вод у басейни в системах водопостачання.

**Незатоплені вільні струмені.** Розглянемо вертикальний струмінь, що витікає з насадка (рис. 5.20).

Струмінь має дві різні ділянки: 1) компактний суцільний струмінь; 2) роздроблений струмінь, який насичений повітрям і розпадається на окремі струмінки та бризки.

Загальна висота вертикального струменя  $h_B$  завжди менша від напору  $H$  на виході з насадка:

$$H - h_B = \Delta h. \quad (5.60)$$

За аналогією із втратами напору в трубах припустимо, що

$$\Delta h = k \frac{h_B}{d} \frac{V^2}{2g}, \quad (5.61)$$

де  $\Delta h$  — втрати напору;  $k$  — дослідний коефіцієнт;  $d$  — діаметр вихідної частини насадка.

Швидкісний напір на виході з насадка згідно з формулою (5.29)

$$\frac{V^2}{2g} = \varphi^2 H. \quad (5.62)$$

Розв'язуємо сумісно рівняння (5.60)—(5.62):

$$H - h_B = k \frac{h_B}{d} \varphi^2 H,$$

або

$$H - h_B = k_1 \frac{H}{d} h_B,$$

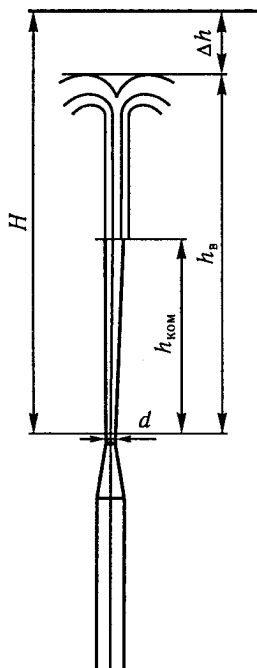


Рис. 5.20



де  $k_1 = k\varphi^2$  залежно від діаметра вихідної частини насадка має такі значення:

$d, \text{мм}$	10	15	20	25	30	40	50
$k_1 \cdot 10^3$	0,230	0,210	0,180	0,150	0,132	0,096	0,070

Висота вертикального струменя

$$h_B = \frac{H}{k_1 \frac{H}{d} + 1}. \quad (5.63)$$

Відносна висота компактної частини струменя  $\frac{h_{\text{КОМ}}}{h_B}$  (рис. 5.21) залежить від його загальної висоти  $h_B$ :

$h_B, \text{м}$	7	15	25	30	35	40	50
$\frac{h_{\text{КОМ}}}{h_B}$	0,84	0,82	0,78	0,73	0,69	0,65	0,57

Якщо насадок, з якого витікає струмінь, нахилити до горизонту під різними кутами  $\beta$ , то крайні струмені опишуть граничну криву, за границі якої струмінь не виходить (рис. 5.21).

Радіус дії нахиленого струменя збільшується порівняно з його вертикальною висотою:

$$R_H = k_2 h_B, \quad (5.64)$$

де  $k_2$  залежить від кута нахилу струменя (рис. 5.21) до горизонту і визначається за такими даними:

$\beta_0$	0	15	30	45	60	75	90
$k_2$	1,4	1,3	1,2	1,12	1,06	1,02	1,0

Гранична крива для компактної частини струменя наближена до кола, тобто  $R_{\text{КОМ}} \approx h_{\text{КОМ}}$ .

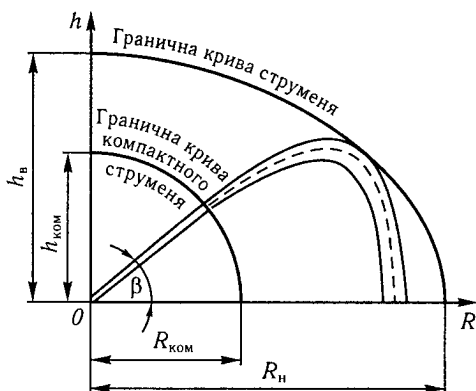


Рис. 5.21

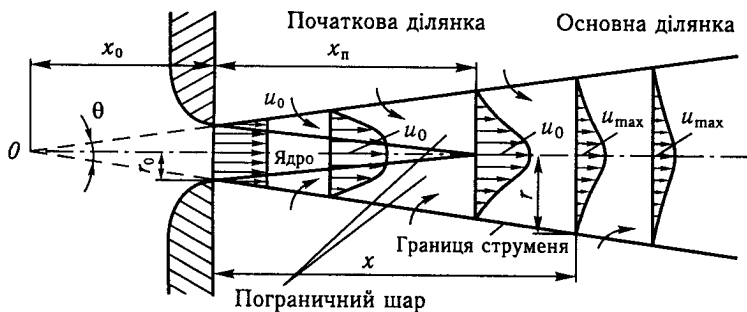


Рис. 5.22

■ **Приклад.** Вільний незатоплений струмінь води витікає з конічно збіжного насадка з діаметром вихідного отвору  $d = 30$  мм при витраті  $Q = 18,76$  л/с. Визначити висоту вертикального струменя  $h_B$ , його компактної частини  $h_{\text{КОМ}}$ , радіус дії струменя при його куті нахилу до горизонту  $\beta = 60^\circ$ .

Визначаємо швидкість витікання струменя з насадка:

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{0,01876}{\frac{3,14 \cdot 0,03^2}{4}} = 26,55 \text{ м/с.}$$

Напір на виході з насадка ( $\varphi = 0,94$ )

$$H = \frac{V^2}{2g \cdot \varphi^2} = \frac{26,55^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,94^2} = 40,65 \text{ м.}$$

При діаметрі  $d = 30$  мм коефіцієнт  $k_1 = 0,000132$ . Висота вертикального струменя

$$h_B = \frac{40,65}{1 + 0,000132 \frac{40,65}{0,03}} = 34,42 \text{ м.}$$

Висота компактної частини струменя при  $h_B = 34,42$

$$\frac{h_{\text{КОМ}}}{h_B} = 0,694, \quad h_{\text{КОМ}} = 0,694 \cdot 34,42 = 23,89 \text{ м.}$$

Радіус струменя, що має нахил при  $\beta = 60^\circ$ ,

$$R_H = k_2 \cdot h_B = 1,06 \cdot 34,42 = 36,49 \text{ м.}$$

**Затоплені вільні струмені.** Затоплений струмінь, що витікає з насадка в рідке середовище такої самої густини, що й струмінь, рухається в ньому, поступово розширюючись (рис. 5.22). Кут між віссю струменя та його границею  $\theta = 13^\circ 20' \dots 15^\circ 10'$ .

Хоча струмінь має чітку границю, через неї в струмінь надходять нові частинки, і маса струменя збільшується при зменшенні її швидкості.

Точка  $O$  — точка перетину зовнішніх границь струменя (поліус струменя) — розміщена на відстані  $x_0$  від кромки насадку,

$$x_0 = \frac{0,29}{a} r_0, \quad (5.65)$$

де  $a = 0,07...0,08$  — константа;  $r_0$  — радіус насадку.

За вихідним перерізом насадку утворюється ядро струменя, яке поступово звужується до нуля в границях початкової ділянки. В ядрі зберігаються постійні швидкості, що дорівнюють швидкостям виходу струменя з насадку  $u_0$ .

Довжина початкової ділянки

$$x_{\text{п}} = \frac{0,67}{a} r_0. \quad (5.66)$$

Між зовнішніми границями струменя і його ядром виникає турбулентний пограничний шар зі швидкостями, які зменшуються від  $u_0$  біля границі ядра до нуля біля границі струменя.

Після початкової ділянки в струмені утворюється основна ділянка, що складається цілком з пограничного шару.

Швидкість на осі основної ділянки струменя  $u_{\text{max}}$  зменшується зі збільшенням відстані від початкового перерізу  $x$ :

$$u_{\text{max}} = \frac{0,96}{\frac{ax}{r_0} + 0,29} u_0. \quad (5.67)$$

Радіус струменя на відстані  $x$  від початкової ділянки

$$r = \left( 3,4 \frac{ax}{r_0} + 1 \right) r_0. \quad (5.68)$$

## 5.6. Сила тиску струменя на плоскі і криволінійні поверхні

Струмінь витікає з отвору з витратою  $Q_0$  і швидкістю  $V_0$ , зустрічає на своєму шляху тверду перешкоду і розтікається вздовж неї (рис. 5.23, а).

Для плоскої стінки це розтікання відбувається по обидва боки від місця зустрічі з перешкодою зі швидкостями  $V_1$  і  $V_2$  і витратами  $Q_1$  і  $Q_2$ .

Струмінь діє на перешкоду з силою  $P$ . Для визначення сили  $P$  застосовуємо рівняння зміни кількості руху для відсіку струменя, обмеженого перерізами  $O-O$ ,  $1-1$  і  $2-2$ .

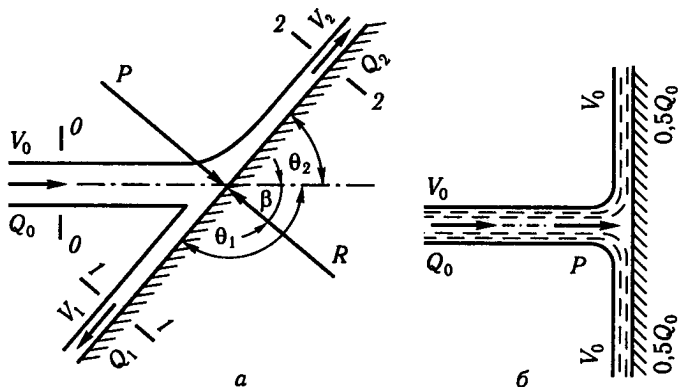


Рис. 5.23

Кількість руху у будь-якому перерізі струменя за одиницю часу (за 1 с)

$$K\rho = \rho Q \alpha_0 V, \quad (5.69)$$

де  $\alpha_0$  — коефіцієнт кількості руху,  $\alpha_0 \approx 1,0$ .

Сила тиску струменя на перешкоду дорівнює реактивній силі тиску перешкоди на струмінь ( $P = -R$ ).

Проекція імпульсу цієї сили на вісь струменя дорівнює зміні проекції кількості руху в струмені до і після його розтікання:

$$P \cos \beta = \rho V_0 Q_0 - \rho V_1 Q_1 \cos \theta_1 - \rho V_2 Q_2 \cos \theta_2. \quad (5.70)$$

Якщо струмінь діє на плоску поверхню, розташовану перпендикулярно до напрямку струменя (рис. 5.23, б), то  $\beta = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ;  $\cos 90^\circ = 0$ ,  $\cos 0^\circ = 1$ .

Тоді

$$P = \rho V_0 Q_0 = \rho V_0^2 \omega. \quad (5.71)$$

Досліди свідчать, що в дійсності сила тиску становить приблизно 92...96 % значення  $P$ , визначеного за цією формулою. Це зменшення пояснюють викривленням ліній течії при взаємодії струменя з перешкодою.

Для порівняння розглянемо динамічний і статичний тиск рідини на плоску поверхню.

Наприклад, струмінь витікає з резервуара через зовнішній циліндричний насадок під дією напору  $H$ . Швидкість витікання

$$V_0 = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Сила тиску струменя на перешкоду, встановлену поблизу від виходу з насадка (рис. 5.24, а), з урахуванням зменшення її до 94 %

$$P = \rho V_0^2 \omega \cdot 0,94 = \rho \varphi^2 2gH\omega \cdot 0,94 = 1,88\rho\varphi^2 g\omega H. \quad (5.72)$$

Якщо перешкоду перемістити впритул до виходу з насадка, то витікання припиниться і на перешкоду діятиме сила статичного тиску (рис. 5.24, б):

$$P_{ст} = \rho g H \omega. \quad (5.73)$$

Відношення сили тиску струменя до сили статичного тиску для зовнішніх циліндричних насадків

$$\frac{P}{P_{ст}} = \frac{1,88\rho\varphi^2 g\omega H}{\rho g\omega H} = 1,88\varphi^2 = 1,88 \cdot 0,82^2 = 1,26.$$

Отже, динамічний тиск більше статичного тиску в 1,26 раза.

Якщо поверхня, на яку діє тиск струменя, має вигляд, як на рис. 5.25, а, то кути  $\theta_1 = \theta_2 > 90^\circ$  і косинус цих кутів буде мен-

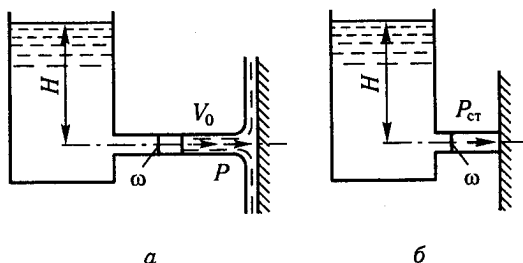


Рис. 5.24

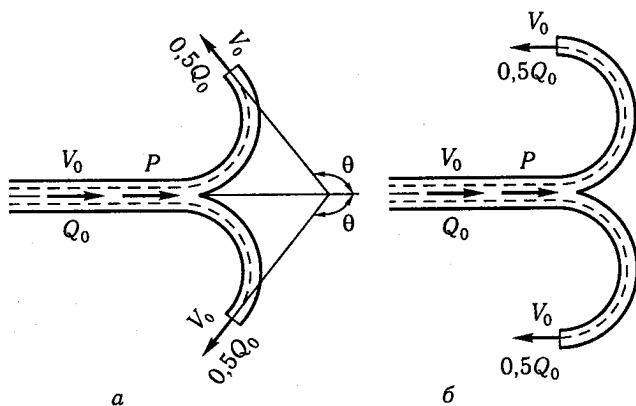


Рис. 5.25

ше нуля. Таке положення збільшує силу тиску струменя; це використовують при проектуванні робочих коліс гідротурбін. Найбільшою сила тиску буде при  $\theta_1 = \theta_2 = 180^\circ$  (рис. 5.25, б).

## 5.7. Витікання стисливої рідини з отворів

Якщо різниця тисків перед отвором та за ним (рис. 5.26) досить велика, витікання газу треба розглядати як витікання стисливої рідини. Вважатимемо зміну стану газу при витіканні адиабатичною. Це положення ґрунтується на тому, що в разі великої різниці тисків виникає настільки велика швидкість витікання, що потік не встигає віддати своє тепло навколишньому середовищу. Нехтуючи у першому наближенні втратами тиску, застосуємо у цьому випадку рівняння Бернуллі для стисливої рідини.

Позначаючи через  $p_0$  і  $\rho_0$  тиск і густину газу в резервуарі, а через  $p$ ,  $V$ ,  $\rho$  — відповідно тиск, швидкість і густину у струмені, що витікає, запишемо рівняння (2.95) у вигляді

$$\frac{p_0}{\rho_0} \frac{k}{k-1} = \frac{p}{\rho} \frac{k}{k-1} + \frac{V^2}{2}. \quad (5.74)$$

Звідси

$$V = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right)}. \quad (5.75)$$

Вираз у дужках з урахуванням того, що  $\rho = \left( \frac{p}{C} \right)^{1/k}$  (див. п. 2.12), перетворимо так:

$$\begin{aligned} \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) &= \frac{p_0}{\rho_0} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho} \right) = \\ &= \frac{p_0}{\rho_0} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \frac{p_0^{1/k} C^{1/k}}{p^{1/k} C^{1/k}} \right) = \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]. \end{aligned}$$

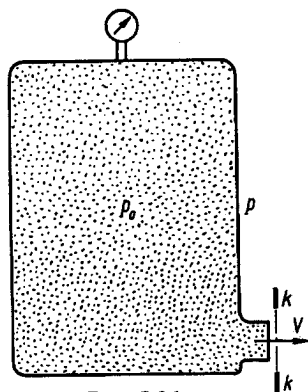


Рис. 5.26

Далі, після врахування втрат тиску за допомогою введення коефіцієнта швидкості  $\varphi$ , дістанемо

$$V = \varphi \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}. \quad (5.76)$$

Ця формула Сен-Венана для швидкості витікання газу. Масову витрату з урахуванням стиснення струменя визначають за формулою

$$M = V \omega \rho = \mu \omega \rho \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}, \quad (5.77)$$

де  $\mu = \varphi \epsilon$  — коефіцієнт витрати ( $\epsilon$  — коефіцієнт стиснення струменя).

Згідно з формулою (2.91)  $p/\rho^k = p_0/\rho_0^k$  і  $\rho = \rho_0 (p/p_0)^{1/k}$ . Підставимо цей вираз у формулу (5.77) і підведемо його під корінь. Тоді

$$M = \mu \omega \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{2/k} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} = \mu \omega \Psi \sqrt{p_0 \rho_0}, \quad (5.78)$$

де функція

$$\Psi = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{2/k} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}. \quad (5.79)$$

Аналіз залежностей (5.78) і (5.79) свідчить, що витрата газу через отвір при заданих  $p_0$ ,  $\rho_0$  для різних газів, тобто при різних  $k$ , залежить від відношення  $p/p_0$ , що входить у функцію  $\Psi$ .

Графік зміни цієї функції залежно від  $p/p_0$  для повітря ( $k = 1,4$ ) наведено на рис. 5.27. Функція  $\Psi = 0$  при  $p/p_0 = 0$  і при  $p/p_0 = 1$ , а при значеннях  $p/p_0 = 0 \dots 1$   $\Psi > 0$ . При так званому критичному відношенні тисків  $p_{кр}/p_0 = 0,53$  функція  $\Psi$  досягає максимуму:  $\Psi_{max} = \Psi_{кр} = 0,68$ . При  $p/p_0 < 0,53$  згідно з формулою (5.79) значення  $\Psi$  має зменшуватися (штрихова лінія на графіку) і, відповідно, при збільшенні перепаду тисків  $p_0 - p$  має зменшуватися і витрата  $M$ , що природно важко пояснити. Дослідження свідчать, що при  $p/p_0 < p/p_{кр}$  витрата зберігає

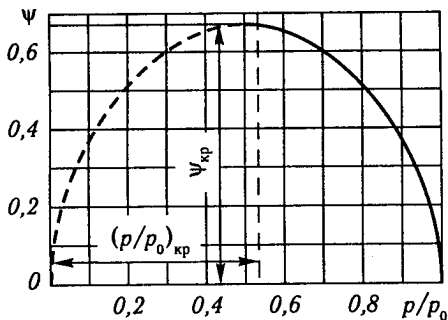


Рис. 5.27

стале значення, яке дорівнює критичному (горизонтальна лінія для  $\Psi$  у діапазоні  $p/p_0 = 0 \dots 0,53$ ). Це пояснюють тим, що при досягненні швидкості критичного значення (при  $p = p_{кр}$ ) тиск зовнішнього середовища  $p$  вже не може поширюватися на переріз  $k-k$  за виходом з отвору. А на струмінь у цьому випадку впливають параметри газу в резервуарі, і у перерізі  $k-k$  встановлюється тиск  $p = p_{кр}$ , що треба враховувати у формулах (5.76) і (5.78).

Якщо при визначенні витрати обмежитися точністю до 5%, то у діапазоні  $p/p_0 = 1 \dots 0,4$  можна користуватися формулою гідравліки у вигляді (без урахування стиснення)

$$M = \mu \omega \sqrt{2 \frac{p_0 - p}{\rho}} \quad (5.80)$$

■ **Приклад.** Визначити масову витрату повітря, що витікає з балона крізь отвір (температура  $t = 20^\circ\text{C}$ , діаметр  $d = 10$  мм) у двох випадках:

1) якщо манометричний тиск у балоні  $p_m = 0,03$  МПа;

2) якщо  $p_m = 0,3$  МПа.

1) Абсолютний тиск у балоні

$$p_0 = p_m + p_a = 0,03 + 0,101324 = 0,131324 \text{ МПа} = 131\,324 \text{ Па.}$$

Густина газу в резервуарі

$$\rho_r = \frac{p_0}{R_* \cdot T} = \frac{131\,324}{287(273 + 20)} = 1,56 \text{ кг/м}^3.$$

При відношенні  $\frac{p_a}{p_0} = \frac{101\,324}{131\,324} = 0,77$  за графіком (рис. 5.27) визначаємо  $\psi = 0,53$ . Тоді за формулою (5.78)

$$M = \mu \omega \sqrt{p_0 \cdot \rho_0} = 0,62 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,01^2}{4} \cdot 0,53 \sqrt{131\,324 \cdot 1,56} = 0,012 \text{ кг/с.}$$



2) Аналогічно для другого випадку

$$p_0 = 0,3 + 0,101324 = 0,401324 \text{ МПа} = 401\,324 \text{ Па};$$

$$\rho_0 = \frac{401\,324}{287(273 + 20)} = 4,77 \text{ кг/м}^3;$$

$$\frac{p_a}{p_0} = \frac{101\,324}{401\,324} = 0,252; \quad \Psi = 0,56;$$

$$M = 0,62 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,01^2}{4} \cdot 0,56 \sqrt{401\,324 \cdot 4,77} = 0,038 \text{ кг/с.}$$

## 5.8. Особливості протікання рідини через водозливи

*Водозлив* — це перешкода в потоці, що стискає його знизу та з боків. Перевищення рівня вільної поверхні над відміткою порогу водозливу називають *геометричним напором*  $H$  на водозливі (рис. 5.28), який вимірюють на відстані  $(3 \dots 4)H$  від верхньої грані водозливу. Напір з урахуванням швидкості підходу  $V_0$  називають повним напором на водозливі  $H_0$ :

$$H_0 = H + \frac{\alpha V_0^2}{2g}. \quad (5.81)$$

За класифікаційними ознаками водозливи бувають різних типів. Наприклад, за обрисом у профілі водозливи бувають з тонкою стінкою при  $\delta < 0,67H$  (рис. 5.29, а), з широким порогом при  $(2 \dots 3)H < \delta < (8 \dots 10)H$  (рис. 5.29, б) і практичного профілю полігонального або криволінійного обрису (рис. 5.29, в, г).

За формою водозливного отвору бувають прямокутні, трикутні, трапецеїдальні та криволінійні водозливи (рис. 5.30, а, б, в, г).

За обрисом у плані можуть бути водозливи без бокового стиснення при  $b = B$  та водозливи з боковим стисненням при  $b < B$  (рис. 5.31).

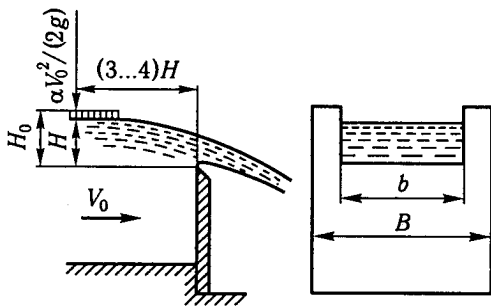


Рис. 5.28

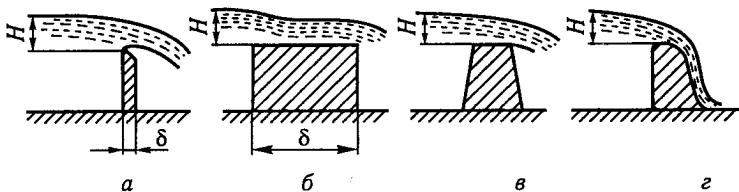


Рис. 5.29

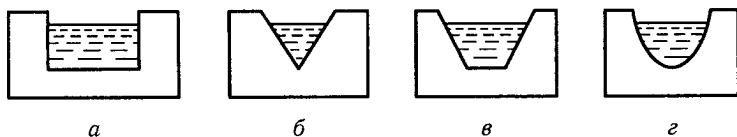


Рис. 5.30

За характером протікання води водозливи бувають: незатоплені (рис. 5.32, а), коли глибина потоку за водозливом  $h_{н.б}$  не впливає на умови протікання води через водозлив, тобто на напір  $H$  або витрату  $Q$ , та затоплені (рис. 5.32, б), якщо глибина потоку за водозливом  $h_{н.б}$  впливає на умови протікання води через водозлив, тобто на величини  $H$  або  $Q$ .

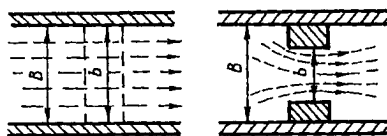


Рис. 5.31

Витрату потоку на водозливі визначають за аналогією з витратою через великий отвір (без верхньої кромки). У загальному випадку, беручи у формулі (5.28)  $H_1 = 0$ ,  $H_2 = H$ ,  $\frac{2}{3}\mu = m$  і враховуючи швидкість підходу за формулою (5.81), дістанемо

$$Q = mb\sqrt{2gH_0^{3/2}}, \quad (5.82)$$

де  $m$  — коефіцієнт витрати водозливу, який визначають залежно від типу водозливу, співвідношення геометричних розмірів потоку та водозливу і деяких інших особливостей течії на водозливі;  $b$  — ширина отвору водозливу.

У формулу (5.82) для різних типів водозливів вводять деякі додаткові коефіцієнти. Так, для водозливів з тонкою стінкою (рис. 5.32)

$$Q = \sigma_3 \cdot m_0 b \sqrt{2gH}^{3/2}, \quad (5.83)$$

де коефіцієнт витрати, що враховує швидкість підходу,

$$m_0 = 0,4 + 0,05 \frac{H}{P}, \quad (5.84)$$

$P$  — висота водозливу.

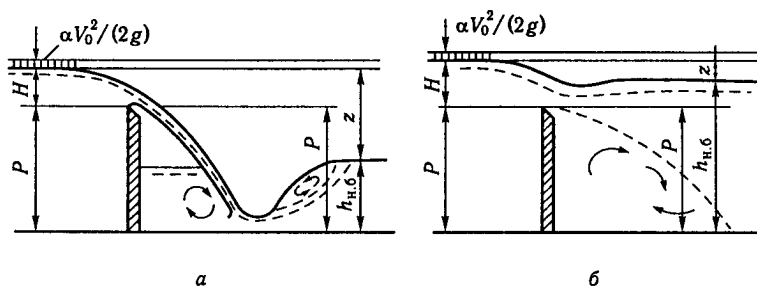


Рис. 5.32

Коефіцієнт затоплення

$$\sigma_3 = 1,05 \left( 1 + 0,2 \frac{h_{н.б} - P}{P} \right) \sqrt[3]{\frac{z}{H}}, \quad (5.85)$$

де  $z = H + P - h_{н.б}$  — різниця відміток поверхні води до і після водозливу. Коефіцієнт  $\sigma_3 \leq 1$  враховують при  $h_{н.б} > P$  і при  $\frac{z}{P} < \left(\frac{z}{P}\right)_k$ , що визначають за такими даними:

$\frac{H}{P}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$\left(\frac{z}{P}\right)_k$	1	0,75	0,88	0,68	0,69	0,76	0,85

Якщо  $b < B$  (рис. 5.31, б), то витрата потоку через водозлив зменшується, що враховується введенням додаткового коефіцієнта стиснення  $\sigma_{ст} < 1$ . При нахилі водозливної стінки (рис. 5.33, а) витрата

$$Q = K_H \cdot m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}, \quad (5.86)$$

де коефіцієнт  $K_H$  залежно від котангенса кута нахилу  $\alpha$  за Базеном має такі значення:

$\text{ctg } \alpha$	2	1	0,67	0,33	0	-0,33	-0,67	-1
$K_H$	1,13	1,11	1,08	1,04	1	0,96	0,94	0,93

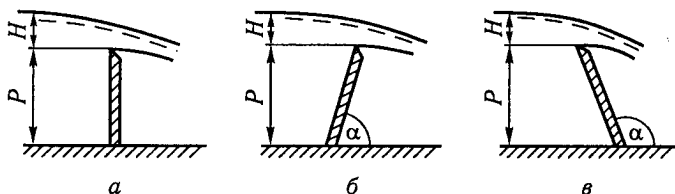


Рис. 5.33

Якщо разом із нахилом є боковий підхід до водозливу (рис. 5.34), то пропускна здатність водозливу збільшується. За даними Ю. М. Константінова і О. О. Гіжі,

$$Q = A \cdot m_0 b \sqrt{2gH^{3/2}}, \quad (5.87)$$

де

$$A = K_n + K_c.$$

Коефіцієнт  $K_c$  урахує вплив бокового підходу і залежно від  $\text{ctg } \alpha$ , відношення  $H/b$  і  $b/b_1$  змінюється в діапазоні  $K_c = 0 \dots 0,54$  [6, 7]. Для водозливів практичного профілю коефіцієнти витрати  $m$  змінюються від 0,33...0,44 для водозливів прямокутного і трапецеїдального (рис. 5.29, в) і до 0,49...0,50 для водозливів криволінійного окреслення (рис. 5.29, з) [6, 7, 13, 14].

Для водозливів із широким порогом (рис. 5.35, а, б) залежно від відношення їх ширини  $\delta$  і висоти  $P$  коефіцієнт витрати  $m$  змінюється від 0,32 до 0,38. Такі водозливи також можна розраховувати за формулою

$$Q = \varphi \cdot b \cdot h \sqrt{2g(H_0 - h)}, \quad (5.88)$$

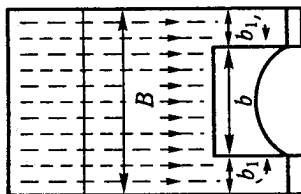
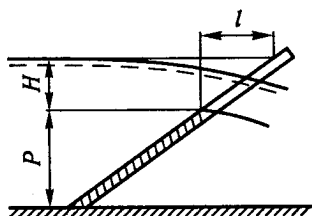
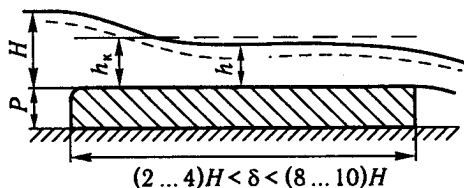
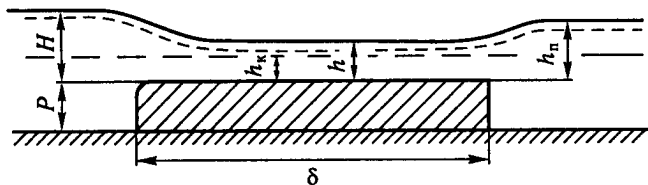


Рис. 5.34



а



б

Рис. 5.35

де  $\varphi$  — коефіцієнт швидкості;  $h$  — глибина на порозі водозливу, що визначають за формулою

$$h = k \cdot H. \quad (5.89)$$

Залежно від зміни  $m$  від 0,32 до 0,38 коефіцієнт  $k$  змінюється від 0,45 до 0,62, а  $\varphi$  — від 0,96 до 0,996 [6, 7, 13, 14].

Якщо  $h_{\text{п}} > 0,8$ , то водозлив із широким порогом буде затопленим (рис. 5.35, б). Тоді

$$Q = \varphi \cdot b \cdot h_{\text{п}} \sqrt{2g(H_0 - h_{\text{п}})}, \quad (5.90)$$

де  $h_{\text{п}}$  — глибина підтоплення.

★ **Приклад.** Визначити пропускну здатність незатопленого водозливу з тонкою стінкою, якщо його висота  $P = 1$  м, ширина  $b = 1,5$  м, напір перед водозливом  $H = 0,5$  м.

Коефіцієнт витрати згідно з формулою (5.84)

$$m_0 = 0,4 + 0,05 \frac{0,5}{1} = 0,425.$$

Тоді витрата через водозлив

$$Q = 0,425 \cdot 1,5 \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,5^{3/2}} = 0,998 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Водозливи широко застосовують у водозабірних та інших гідротехнічних спорудах. Більш докладні відомості про водозливи наведено в спеціальних курсах гідравліки [6, 7, 12, 13, 14, 16, 17].

# 6 РІВНОМІРНИЙ РУХ РІДИНИ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ

## 6.1. Особливості руху рідини у відкритих руслах

Рух у відкритих каналах характеризується наявністю вільної поверхні; при цьому змочений периметр  $\chi$  є лише частиною загального периметра живого перерізу (рис. 6.1, а, б).

Під час рівномірного руху у відкритому руслі  $V = \text{const}$ . Сталими будуть також площа  $\omega$ , форма русла, глибина  $h$ , ширина  $b$ , змочений периметр  $\chi$ , гідравлічний радіус  $R$ .

Крім середньої швидкості  $V$  мають бути постійними також і місцеві швидкості вздовж кожної лінії течії. Це значить, що епюри місцевих швидкостей у різних живих перерізах мають бути однаковими.

Якщо ці умови не виконуються, рух не можна вважати рівномірним, тому що на переформування швидкісної структури потоку витрачається додаткова енергія, яку не можна характеризувати звичайними втратами енергії по довжині при рівномірному русі.

Глибину рівномірного руху називають *нормальною глибиною*  $h_0$ .

При постійних  $V$  і  $h_0$  (і тиску  $p = \rho g h_0$ ) уздовж руху потоку втрати енергії в рівнянні Бернуллі можуть виникати за рахунок зниження відмітки  $z$  (рис. 6.2).

Різницю відміток ( $z_1 - z_2$ ) у двох перерізах, віднесена до довжини  $l$ , називають *похилом дна русла*  $i$ :

$$i = \frac{z_1 - z_2}{l}. \quad (6.1)$$

При рівномірному русі похил дна русла має бути додатним ( $i > 0$ ), тоді як при рівномірному русі в трубах зменшується п'єзометричний напір  $\left( H = z + \frac{p}{\rho g} \right)$ , і при зменшенні тиску  $p$  відмітка  $z$  може бути незмінною і навіть зростати.

Якщо в дні русла або в стінках встановити п'єзометри, то рівень води в них збігається з рівнем води в цьому перерізі. Враховуючи це, а також вираз (3.6), можна дійти висновку, що

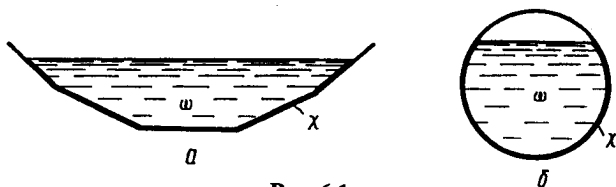


Рис. 6.1

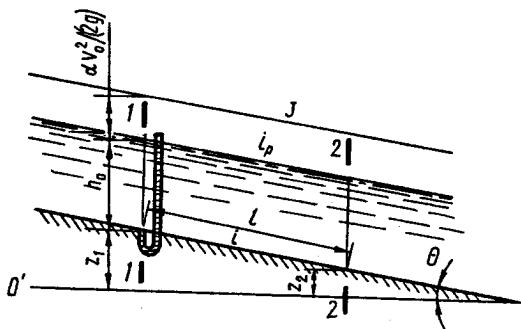


Рис. 6.2

п'езометричний похил  $i_p$  дорівнює похилу поверхні потоку, гідравлічному похилу  $J$  і похилу дна русла  $i$ :

$$J = i_p = i. \quad (6.2)$$

Це рівняння рівномірного руху у відкритих каналах.

Середню швидкість у живому перерізі потоку, яку визначають із формул (3.63) або (3.70), урахувавши рівняння (6.2), можна подати у вигляді

$$V = C\sqrt{Ri}, \quad (6.3)$$

або

$$V = W\sqrt{i}. \quad (6.4)$$

Витрата потоку при рівномірному русі рідини у відкритому руслі

$$Q = \omega W\sqrt{i}. \quad (6.5)$$

У формулах (6.3)—(6.5)  $C$  — коефіцієнт Шезі, або швидкісний множник;  $W$  — швидкісна характеристика.

Для визначення  $C$  і  $W$  використовують різні емпіричні формули, наприклад формулу Павловського (3.69)

$$C = \frac{1}{n}R^y,$$

або

$$W = \frac{1}{n}R^z, \quad (6.6)$$

де  $n$  — коефіцієнт шорсткості, який залежить від характеристики поверхні стінок та дна русла (див. с. 114);  $z = y + \frac{1}{2}$  — показник степеня, який визначають за видозміненою формулою Павловського,  $z = 0,37 + 2,5\sqrt{n} - 0,75(\sqrt{n} - 0,1)\sqrt{R}$  або за табл. 3.2.

Для визначення  $C$  і  $W$  є таблиці (див. табл. 3.3) або графіки (див. рис. 3.15), які полегшують розрахунки.

Наведені формули для  $C$  і  $W$  широко застосовують в інженерній практиці. Проте ці формули мають і свої недоліки. Так, раніше було доведено, що  $C$  залежить від гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$  (див. п. 3.6):

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}. \quad (6.7)$$

Отже, і  $C$  у загальному випадку залежить від тих самих факторів, що і  $\lambda$ , тобто від відносної шорсткості і числа Рейнольдса. З урахуванням того, що на відміну від напірних труб відкриті русла характеризуються лінійним розміром — гідравлічним радіусом  $R$ , формули для  $C$  при турбулентному русі в загальному випадку можна записати

$$C = f\left(\frac{\Delta_{\text{екв}}}{R}; \text{Re} = \frac{VR}{\nu}\right), \quad (6.8)$$

де  $\Delta_{\text{екв}}$  — еквівалентна висота виступів шорсткості, що залежить, як і коефіцієнт шорсткості  $n$ , від стану поверхні.

При турбулентному русі мають місце три області опору: гідравлічно гладка, перехідна та квадратична.

У перших двох областях на  $\lambda$  впливає число  $\text{Re}$ , тобто і  $C$ , і  $W$  залежать від нього. Проте наведені вище формули цієї залежності не показують.

Отже, формули (6.6) і (3.69) справедливі тільки для квадратичної області опору.

При роботі каналів у перехідній області значення  $\lambda$  збільшуються, а швидкісний множник  $C$  має зменшуватися. Ці формули цього не враховують, тобто вони практично завищують швидкість і пропускну здатність каналу.

У перехідній області опору працюють безнапірні каналізаційні труби. Для таких труб використовують формулу Федорова [6, 7]

$$W = -4 \lg \left( \frac{\Delta_2}{13,68R} + \frac{a_2}{\text{Re}} \right) \sqrt{2gR}, \quad (6.9)$$

де  $\Delta_2$  — еквівалентна шорсткість;  $a_2$  — коефіцієнт, що залежить від матеріалу труб (табл. 6.1).



Таблиця 6.1. Коефіцієнти  $\Delta_2$  і  $a_2$  для формули Федорова

Труби	$\Delta_2$ , мм	$a_2$
Азбестоцементні	0,6	73
Керамічні	1,35	90
Бетонні та залізобетонні	2	100

Ця формула відображає залежність швидкісної характеристики  $W$  від відносної шорсткості  $\Delta_2 / R$  і числа Рейнольдса.

## 6.2. Гідравлічно найвигідніший переріз каналу

Враховуючи формули (6.5) і (6.6) і значення гідравлічного радіуса  $R = \omega / \chi$ , витрату у відкритому каналі можна визначити за формулою

$$Q = \omega \frac{1}{n} \left( \frac{\omega}{\chi} \right)^z \sqrt{i}. \quad (6.10)$$

Русла різних форм поперечного перерізу (рис. 6.3) при однаковій площі  $\omega$  мають різні змочені периметри  $\chi$  і різні гідравлічні радіуси  $R$ .

Якщо задано похил русла  $i$ , площу  $\omega$  і коефіцієнт шорсткості  $n$ , найбільша пропускна здатність буде у того русла, яке має найбільший гідравлічний радіус  $R$  і найменший змочений периметр.

Такі перерізи називають *гідравлічно найвигіднішими*.

Може бути і інше визначення гідравлічно найвигіднішого перерізу: при заданих витраті  $Q$ , похилі  $i$  і коефіцієнті шорсткості  $n$  він має найменшу площу живого перерізу.

На будівництво каналів із гідравлічно найвигіднішим перерізом витрачають мінімум земляних робіт і матеріалів для укріплення дна і берегів. Із різних форм живого перерізу (рис. 6.3) найвигіднішим є круглий або напівкруглий переріз, тому що для нього при заданій площі буде найменшим значення  $\chi$  і найбільшим  $R$ .

На практиці частіше використовують трапецеїдальний або параболічний переріз, тому що півколо має у верхній частині вертикальні стінки і потребує бетонного або залізобетонного укріплення, оскільки земляні стінки не можуть бути вертикальними.

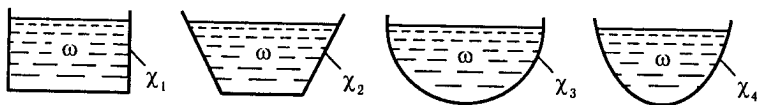


Рис. 6.3

Для визначення гідравлічно найвигіднішого перерізу потрібно визначити максимальний гідравлічний радіус  $R_{\max}$ .

Помноживши і розділивши праву частину рівняння (6.10) на  $R^2$ , дістанемо

$$Q = \omega \frac{1}{n} (R)^z \sqrt{i} \frac{R^2}{R^2},$$

або

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}\psi} = R^{2+z}, \quad (6.11)$$

де

$$\psi = \omega / R^2. \quad (6.12)$$

В окремому випадку для русел гідравлічно найвигіднішого перерізу  $R = R_{\max}$ , а  $\psi = \psi_{\min} = \psi_{г.н}$ .

Тоді

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}\psi_{г.н}} = R_{\max}^{2+z}, \quad (6.13)$$

або

$$R_{\max} = \left( \frac{Qn}{\sqrt{i}\psi_{г.н}} \right)^{\frac{1}{2+z}} = f \left( \frac{Qn}{\sqrt{i}\psi_{г.н}}, z \right). \quad (6.14)$$

Отже, для визначення максимального гідравлічного радіуса  $R_{\max}$  треба знати: витрату  $Q$ , похил  $i$ , коефіцієнт шорсткості  $n$ , величину  $\psi_{г.н}$ , показник степеня  $z$ .

Значення  $\psi_{г.н}$  залежить від форми русла. Так, для сегментного русла гідравлічно найвигідніше значення  $\psi_{г.н} = \psi_{\min}$

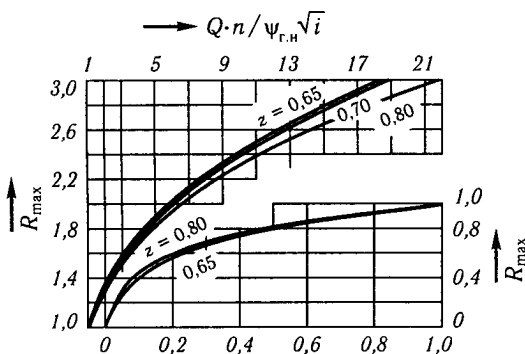


Рис. 6.4

відповідає півколу; при цьому

$$\omega = \frac{\pi D^2}{8}; \quad \chi = \frac{\pi D}{2}; \quad R = \frac{\omega}{\chi} = \frac{D}{4};$$

$$\Psi_{г.н} = \frac{\omega}{R^2} = \frac{\pi D^2 \cdot 16}{8D^2} = 2\pi = 6,28.$$

При відомому значенні  $\Psi_{г.н}$  за формулою (6.14) можна визначити  $R_{\max}$ . Для спрощення розрахунків  $R_{\max}$  визначають залежно від значення  $\frac{Qn}{\sqrt{i}\Psi_{г.н}}$  і  $z$  за графіком (рис. 6.4) або за таблицями, які наведено в довідниках.

Аналіз свідчить, що для більшості практичних випадків можна брати осереднені значення показника степеня  $z = 0,7$  (фор-

Таблиця 6.2. Максимальний гідравлічний радіус, який відповідає гідравлічно найвигіднішому профілю русла

$R_{\max}, \text{ м}$	$R_{\max}^2, \text{ м}^2$	Значення $\frac{Qn}{\Psi_{г.н}\sqrt{i}}$ при $z = 0,7$	$R_{\max}, \text{ м}$	$R_{\max}^2, \text{ м}^2$	Значення $\frac{Qn}{\Psi_{г.н}\sqrt{i}}$ при $z = 0,7$
0,10	0,01	0,002	0,85	0,72	0,64
0,12	0,0144	0,0033	0,9	0,81	0,75
0,14	0,0196	0,0049	0,95	0,9	0,87
0,16	0,0256	0,0071	1	1	1
0,18	0,0324	0,0097	1,1	1,21	1,29
0,20	0,04	0,0129	1,2	1,44	1,63
0,22	0,0484	0,0167	1,3	1,69	2,03
0,24	0,0576	0,021	1,4	1,96	2,48
0,26	0,0676	0,026	1,5	2,25	2,99
0,28	0,0784	0,032	1,6	2,56	3,56
0,30	0,09	0,039	1,7	2,89	4,19
0,32	0,1024	0,046	1,8	3,24	4,9
0,34	0,1156	0,054	1,9	3,61	5,65
0,36	0,1296	0,063	2	4	6,5
0,38	0,1444	0,074	2,1	4,41	7,41
0,40	0,16	0,084	2,2	4,84	8,42
0,45	0,2025	0,116	2,3	5,29	9,48
0,50	0,25	0,154	2,4	5,76	10,62
0,55	0,3025	0,199	2,5	6,25	11,87
0,60	0,36	0,252	2,6	6,76	13,18
0,65	0,4225	0,313	2,7	7,29	14,61
0,70	0,49	0,381	2,8	7,84	16,11
0,75	0,5625	0,459	2,9	8,41	17,72
0,80	0,64	0,547	3	9	19,42

мула Форхгеймера  $W = \frac{1}{n} R^{0,7}$ , формула Манинга  $W = \frac{1}{n} R^{2/3}$ ).  
У табл. 6.2 наведено значення  $R_{\max}$ , обчислені за формулою (6.14) при  $z = 0,7$ .

Якщо переріз русла не є гідравлічно найвигіднішим, то гідравлічний радіус  $R < R_{\max}$ . Розв'язуючи сумісно рівняння (6.11) і (6.13), дістаємо

$$(R/R_{\max})^{2+z} = \psi_{г.н} / \psi. \quad (6.15)$$

### 6.3. Залежності між основними геометричними і гідравлічними характеристиками русел трапецеїдального перерізу

Для трапецеїдального перерізу (рис. 2.30) площу і змочений периметр визначають із рівнянь

$$\chi = b + 2h_0 \sqrt{1+m^2}, \quad (6.16)$$

$$\omega = bh_0 + mh_0^2 = h_0(b + mh_0), \quad (6.17)$$

де  $m = \text{ctg } \theta$  — коефіцієнт закладання укосів.

Розв'язуючи сумісно рівняння (6.16) і (6.17) відносно  $\chi$ , дістаємо

$$\begin{aligned} \chi - \frac{\omega}{h_0} &= b + 2h_0 \sqrt{1+m^2} - b - mh_0 = \\ &= h_0 \left( 2\sqrt{1+m^2} - m \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Поділимо обидві частини цього рівняння на  $R$ :

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{R} - \frac{\omega}{Rh_0} &= \frac{h_0}{R} \left( 2\sqrt{1+m^2} - m \right), \\ \psi - \psi \frac{R}{h_0} &= \frac{h_0}{R} \left( 2\sqrt{1+m^2} - m \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\text{де } \psi = \frac{\omega}{R^2}; \quad \chi = \frac{\omega}{R}; \quad \frac{\chi}{R} = \frac{\omega}{R^2} = \psi.$$

$$\text{Позначимо } \eta = \frac{h_0}{R}; \quad m' = \left( 2\sqrt{1+m^2} - m \right).$$

Тоді

$$\psi - \frac{\psi}{\eta} = \eta m'; \quad \psi \left( 1 - \frac{1}{\eta} \right) = \eta m'$$

і

$$\psi = \frac{\eta^2 m'}{(\eta - 1)}. \quad (6.20)$$

Звідси випливає, що при заданому коефіцієнті закладання укосів  $m$  значення  $\psi$  залежить від  $\eta$ .

Для визначення  $\psi_{г.н} = \psi_{\min}$  треба дослідити рівняння (6.20) на мінімум. Для цього візьмемо похідну

$$\frac{d\psi}{d\eta} = m' \frac{2\eta(\eta-1) - \eta^2}{(\eta-1)^2} = m' \frac{2\eta^2 - 2\eta - \eta^2}{(\eta-1)^2} = m' \frac{\eta(\eta-2)}{(\eta-1)^2}. \quad (6.21)$$

При  $\psi = \psi_{г.н}$  похідна  $\frac{d\psi}{d\eta} = 0$ . Це може бути тоді, коли чисельник дорівнює нулю:

$$\eta_{г.н}(\eta_{г.н} - 2) = 0; \quad \eta_{г.н} = 2, \quad (6.22)$$

тобто для всіх гідравлічно найвигідніших перерізів трапецеїдальних русел

$$R_{\max} = h_{г.н} / 2. \quad (6.23)$$

Підставимо  $\eta_{г.н} = 2$  у рівняння (6.20):

$$\psi_{г.н} = \frac{m' \cdot 2^2}{2-1} = 4m',$$

або

$$\psi_{г.н} = 8\sqrt{1+m^2} - 4m. \quad (6.24)$$

За цією формулою можна визначити  $\psi_{г.н}$  для різних значень коефіцієнта закладання укосів. Рівняння (6.20) є квадратним відносно  $\eta$  і при  $R < R_{\max}$  має два кореня, тобто два значення  $\eta$  і  $h_0$ .

Якщо  $h_0 < 2R$ , то це розширений переріз — р. п. (порівняно із гідравлічно найвигіднішим перерізом — г. н. п., рис. 6.5). При  $h_0 > 2R$  переріз називають звуженим — з. п.

У табл. 6.3 наведено значення  $\eta_h = h_0 / R_{\max}$  залежно від  $\eta_R = R / R_{\max}$  для звужених і розширених русел. Підставляючи в рівняння (6.15) значення  $\psi$ , за формулою (6.12) можна визначити відносну площу живого перерізу  $\eta_{\omega} = \frac{\omega}{\psi_{г.н} R_{\max}^2}$ , а потім

із формули (6.17) обчислити значення ширини русла по дну  $b$  і відносної ширини  $\eta_b = b / R_{\max}$ . Значення  $\eta_{\omega}$  і  $\eta_b$  також наведено в табл. 6.3.

Якщо відносна площа живого перерізу менше ніж на 5% відрізняється від одиниці (тоб-

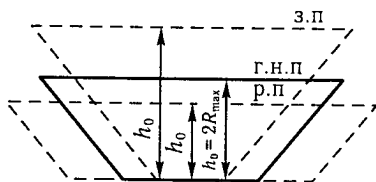


Рис. 6.5

Таблиця 6.3. Основні геометричні співвідношення для трапецеїдальних каналів

	$\eta_R = \frac{R}{R_{\max}}$	$\eta_h = \frac{h_0}{R_{\max}}$	$\eta_\omega = \frac{\omega}{\Psi_{г.н} R_{\max}^2}$	$\eta_b = \frac{b}{R_{\max}}$ , якщо $m$					Перерізи
				0	0,5	1	1,5	2	
	0,65	0,71	1,35	15,20	12,90	13,20	15,00	17,40	Розширені ↓
	0,70	0,78	1,28	13,10	11,00	11,20	12,70	14,70	
	0,75	0,86	1,22	11,33	9,43	9,52	10,70	12,30	
	0,80	0,96	1,17	9,80	8,00	7,98	8,88	10,20	
	0,85	1,06	1,12	8,43	6,77	6,64	7,26	8,27	
	0,90	1,20	1,08	7,16	5,62	5,35	5,75	6,46	
	0,92	1,22	1,06	6,67	5,15	4,83	5,13	5,70	
Область гідравлічно вигідних перерізів	0,94	1,35	1,044	6,20	4,65	4,31	4,50	4,95	
	0,96	1,44	1,029	5,70	4,23	3,77	3,83	4,16	
	0,98	1,60	1,014	5,07	3,61	3,04	2,95	3,07	
	0,99	1,70	1,017	4,74	3,26	2,63	2,44	2,46	
	0,998	1,87	1,001	4,30	2,80	2,07	1,72	1,58	
	1	2	1	4	2,47	1,66	1,21	0,94	г. н. п.
	0,999	2,10	1,001	3,80	2,24	1,37	0,84	0,54	Звужені ↑
	0,998	2,15	1,001	3,72	2,17	1,25	0,69	0,34	
	0,997	2,19	1,002	3,65	2,07	1,15	0,56	<u>0,13</u>	
	0,990	2,37	1,007	3,39	1,77	0,74	<u>0,04</u>		
0,980	2,53	1,014	3,21	1,53	0,42				
0,970	2,70	1,021	3,03	1,29	<u>0,08</u>				
0,960	2,87	1,029	2,87	1,06					
0,940	3,09	1,044	2,70	0,83					
	0,92	3,34	1,06	2,54	0,53				
	0,90	3,58	1,08	2,40	0,26				
	0,85	4,21	1,12	2,13					

то  $\eta_\omega \leq 1,05$ ), то такі перерізи належать до області гідравлічно вигідних перерізів (рис. 6.6), що виділено у табл. 6.3.

При гідравлічних розрахунках русел трапецеїдального перерізу, якщо відомі  $R_{\max}$  і одна з величин  $R, h_0, b, \omega$ , за допомогою цієї таблиці можна визначити інші величини.

■ **Приклад.** Визначити необхідну ширину по дну і середню швидкість течії води у трапецеїдальному каналі з похилом дна  $i = 0,0001$ , коефіцієнтом закладання укосів  $m = 1$ , коефіцієнтом шорсткості  $n = 0,013$ , глибиною течії води  $h_0 = 1,15$  м, при витраті  $Q = 15$  м<sup>3</sup>/с.

Для  $m = 1$  значення  $\Psi_{г.н} = 8\sqrt{1+1-4 \cdot 1} = 7,312$ .

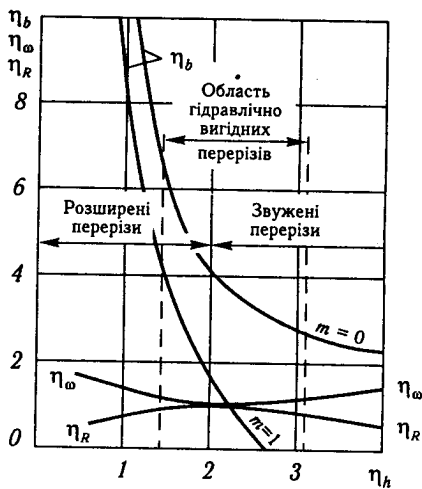


Рис. 6.6

Визначаємо величину

$$\frac{Q \cdot n}{\sqrt{i} \cdot \psi_{г.п}} = \frac{15 \cdot 0,013}{\sqrt{0,0001} \cdot 7,312} = 2,64.$$

Згідно з графіком (рис. 6.4) при  $z = 0,7$   $R_{\max} = 1,45$  м. За табл. 6.3 при  $\eta_h = \frac{h_0}{R_{\max}} = \frac{1,15}{1,45} = 0,79$  дістаємо  $\eta_b = 8,29$ ;  $\eta_\omega = 1,18$ .

Необхідна ширина каналу  $b = \eta_b \cdot R_{\max} = 8,29 \cdot 1,45 = 12,02$  м.  
Площа живого перерізу

$$\omega = \eta_\omega \cdot \psi_{г.п} \cdot R_{\max}^2 = 1,18 \cdot 7,312 \cdot 1,45^2 = 18,14 \text{ м}^2.$$

Середня швидкість у живому перерізі

$$V = \frac{Q}{\omega} = \frac{15}{18,14} = 0,83 \text{ м/с.}$$

Визначимо також нормальну глибину  $h_0$  і швидкість  $V$  при обмеженні ширини каналу по дну величиною  $b = 10$  м.

$$\text{У цьому випадку } \eta_b = \frac{b}{R_{\max}} = \frac{10}{1,45} = 6,9.$$

Тоді з табл. 6.3 маємо  $\eta_h = 1,04$ ,  $\eta_\omega = 1,13$ . Глибина  $h_0 = \eta_h \cdot R_{\max} = 1,04 \cdot 1,45 = 1,51$  м, площа живого перерізу  $\omega = \eta_\omega \cdot \psi_{г.п} \cdot R_{\max}^2 = 1,13 \times 7,312 \cdot 1,45^2 = 17,37 \text{ м}^2$ .

$$\text{Середня швидкість у живому перерізі } V = \frac{Q}{\omega} = \frac{15}{17,37} = 0,86 \text{ м/с.}$$

#### 6.4. Особливості розрахунку русел параболічного перерізу

Ширина параболічного русла (рис. 6.7) визначають за формулою

$$B = 2\sqrt{2ph_0}, \quad (6.25)$$

де  $p$  — параметр параболи.

Таблиця 6.4. Основні геометричні співвідношення для параболічних каналів

	$\frac{h}{p}$	$\frac{R}{R_{\max}}$	$\frac{h_0}{R_{\max}}$	$\frac{B}{R_{\max}}$	$\frac{p}{R_{\max}}$	$\frac{\omega}{\Psi_{г.н.} R_{\max}^2}$	Перерізи
		0,10 0,15 0,20 0,30 0,40	0,75 0,80 0,83 0,88 0,91	1,16 1,26 1,33 1,44 1,53	10,38 9,17 8,41 7,45 6,85	11,60 8,37 6,65 4,81 3,83	
Область гідравлічно вигідних перерізів	0,5	0,930	1,61	6,43	3,21	1,049	Розширені ↓ г.н.п. ↑ Звужені
	0,6	0,950	1,67	6,10	2,79	1,037	
	0,7	0,960	1,73	5,85	2,47	1,027	
	0,8	0,970	1,78	5,64	2,23	1,021	
	0,9	0,980	1,83	5,46	2,03	1,015	
	1,0	0,984	1,88	5,31	1,88	1,011	
	1,2	0,992	1,96	5,06	1,63	1,006	
	1,4	0,996	2,03	4,86	1,45	1,003	
	1,6	0,999	2,10	4,69	1,31	1,001	
	1,885	1	2,19	4,50	1,16	1	
	2,0	1	2,220	4,44	1,110	1,002	
	2,2	0,998	2,280	4,35	1,040	1,003	
	2,4	0,997	2,320	4,26	0,970	1,004	
	2,6	0,996	2,370	4,18	0,913	1,005	
	2,8	0,995	2,420	4,10	0,864	1,006	
	3,0	0,989	2,470	4,03	0,820	1,008	
3,5	0,986	2,566	3,88	0,730	1,011		
4,0	0,978	2,656	3,76	0,660	1,016		
4,5	0,972	2,748	3,67	0,610	1,022		
5,0	0,965	2,825	3,57	0,565	1,028		
5,5	0,957	2,900	3,50	0,527	1,031		
6,0	0,949	2,970	3,43	0,495	1,035		



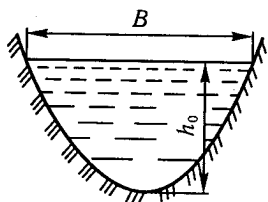


Рис. 6.7

са, або нормальної глибини  $h_0$ , або ширини по верху  $B$ , або площі живого перерізу  $\omega$ . У табл. 6.4 наведено також гідравлічно вигідні перерізи.

Для русел параболічних перерізів  $\Psi_{г.н} = 6,56$  [6, 7, 13, 14, 17]. В табл. 6.4 залежно від  $\frac{R}{R_{\max}}$  наведено відношення  $p/R_{\max}$ ,  $h_0/R_{\max}$ ,  $B/R_{\max}$  і  $\omega/\Psi_{г.н} R_{\max}^2$ .

Якщо відоме одне з цих відношень, то за таблицею можна дістати невідомі інші відношення, а потім і відповідні фізичні величини гідравлічного радіуса

### 6.5. Допустимі середні в перерізі швидкості

Залежно від характеристики ґрунтів стінок і дна каналу, а також здатності його протистояти розмиванню встановлюють *допустимі максимальні швидкості* протікання води у каналі. Допустимі швидкості також встановлюють для різних кріплень укріплених каналів. Різноманітність ґрунтів і штучних укріплень ускладнює встановлення загальних залежностей для граничних максимальних швидкостей у різних випадках. Для визначення допустимих швидкостей на практиці застосовують емпіричні рекомендації залежно від призначення споруд і ролі їх у народному господарстві [13, 14].

У табл. 6.5 наведено орієнтовані значення допустимих максимальних швидкостей для земляних і укріплених каналів [6, 7, 13, 14].

Таблиця 6.5. Максимальні допустимі швидкості для земляних і укріплених каналів

Характеристика стінок і дна каналу	$V_{\text{доп}}$ , м/с
Пил, мул, рослинна земля	0,15...0,45
Пісок дрібний	0,2...0,6
Пісок великий	0,5...0,9
Гравій	0,65...1,30
Суглинок, глина	0,35...20
Конгломерат, сланці, пухкий і шаруватий вапняки	2,0...4,5
Граніти, базальти, діабазы	15...20
Кам'яна кладка	4...10
Поодинокі мостіння	2,3...4,5
Подвійне мостіння	2,8...4,7
Бетонне облицювання	9...25
Дерево	25...36

Широкий діапазон зміни максимальних допустимих швидкостей пояснюється різними глибинами потоку в каналі (нижня границя  $V_{\text{доп}}$  відповідає глибинам  $h = 0,4 \text{ м}$ , а верхня  $h = 3 \text{ м}$ ), а також різними розмірами частинок ґрунту, бруківки, різними марками бетону і т. д.

Мінімальні допустимі середні у перерізі швидкості встановлюють з умови недопущення замулювання каналу і залежать від розмірів і кількості завислих у потоці частинок.

Наприклад, допустиму мінімальну незамулюючу швидкість, м/с, можна визначити за формулою Гіршкана

$$V_{\text{min}} = A Q^{0,2}, \quad (6.26)$$

де  $Q$  — витрата,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $A$  — коефіцієнт, що беруть залежно від гідравлічної крупності  $V_{\text{г.к}}$  частинок за такими даними:

$V_{\text{г.к}}, \text{мм/с}$	< 1,5	1,5...3,5	> 3,5
$A$	0,33	0,44	0,55

Якщо розрахункова швидкість буде більшою, ніж допустима швидкість на розмив, або меншою, ніж допустима мінімальна швидкість, то слід змінити деякі параметри каналу або тип укріплення русла.

## 6.6. Особливості гідравлічного розрахунку водовідвідних труб та інших русел замкненого перерізу

Безнапірні русла замкненого перерізу широко застосовують у різних галузях водного господарства. В системах водовідведення (каналізації) використовують круглі, а також зворотно-овоїдальні, лоткові та інші перерізи (рис. 6.8, а, б, в). Русла коритоподібного перерізу (рис. 6.8, г) застосовують при будівництві гідротехнічних тунелів.

При рівномірному русі рідини у частково заповненому водоводі швидкість і витрату можна визначити за формулами для відкритих русел. Значення площі живого перерізу  $\omega$ , змоченого периметра  $\chi$ , гідравлічного радіуса  $R$  можна розглядати як функції величин  $\omega_{\text{п}}$ ,  $\chi_{\text{п}}$ ,  $R_{\text{п}}$  при повному наповненні водоводу і ступеня його наповнення  $\Delta = h_0/r$  (де  $r$  — радіус перерізу водоводу, його характерний лінійний розмір), тобто

$$\omega = \omega_{\text{п}} f_1(\Delta); \quad (6.27)$$

$$\chi = \chi_{\text{п}} f_2(\Delta); \quad (6.28)$$

$$R = R_{\text{п}} f_3(\Delta). \quad (6.29)$$

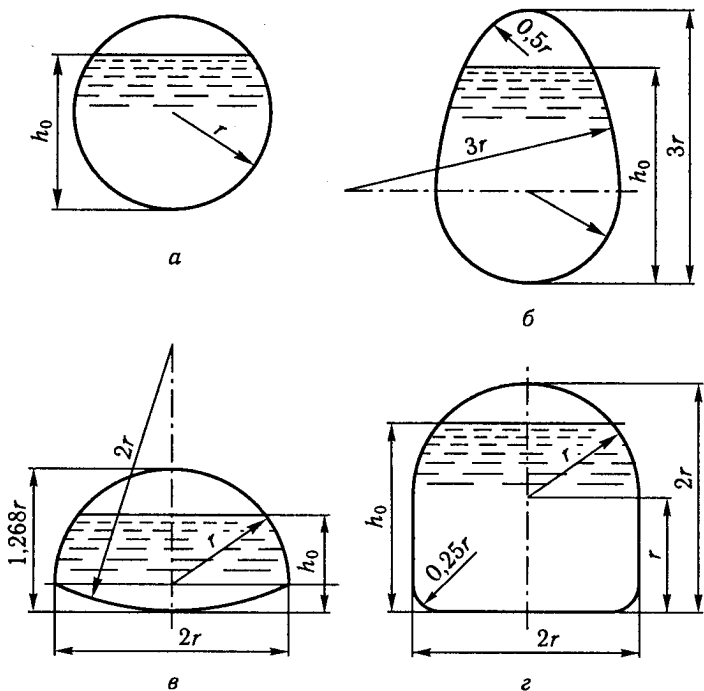


Рис. 6.8

У замкнених водоводах ширина їх зверху  $B$  починаючи з деякого значення глибини  $h$  зі збільшенням останньої зменшується. У верхній частині водоводу зі збільшенням глибини змочений периметр збільшується швидше, ніж площа живого перерізу, що приводить до зменшення гідравлічного радіуса  $R$ .

Таке становище згідно з формулами (6.5), (6.4), (6.6) має привести до зменшення швидкості і витрати у трубі, але це не підтверджується дослідами. У зв'язку з цим для замкнених перерізів за пропозицією Ю. М. Константінова й О. О. Сапугіна швидкісну характеристику рекомендують визначати за формулою

$$W = \frac{k'}{n} R^z, \quad (6.30)$$

де  $k'$  — поправковий коефіцієнт,

$$k' = f_4(\Delta); \quad (6.31)$$

значення  $k'$  беруть за дослідними даними [6, 7].

З урахуванням викладеного і беручи  $z = 2/3$ , середню швидкість у перерізі безнапірного водоводу можна визначити як

$$V = W\sqrt{i} = \frac{f_4(\Delta)}{n} R_{\Pi}^{2/3} [f_3(\Delta)]^{2/3} \sqrt{i} =$$

$$= f_4(\Delta) [f_3(\Delta)]^{2/3} \frac{1}{n} R_{\Pi}^{2/3} \sqrt{i}, \quad (6.32)$$

або

$$V = BW_{\Pi} \sqrt{i},$$

де  $B = f_4(\Delta) [f_3(\Delta)]^{2/3}$  — відносна швидкісна характеристика, яка залежить від наповнення водоводу  $\Delta$ ;  $W_{\Pi} = \frac{1}{n} R_{\Pi}^{2/3}$  — швидкісна характеристика при повному наповненні водоводу, що залежить від його радіуса і матеріалу;  $W_{\Pi}$  визначають за таблицями, наведеними у довідниках.

Витрату у безнапірному замкненому водоводі можна записати як

$$Q = \omega V = f_1(\Delta) \omega_{\Pi} B W_{\Pi} \sqrt{i}, \quad (6.33)$$

або

$$Q = AK_{\Pi} \sqrt{i},$$

де  $A = f_1(\Delta) B$  — відносна витратна характеристика, що залежить від наповнення водоводу;  $K_{\Pi} = \omega_{\Pi} W_{\Pi}$  — витратна харак-

Таблиця 6.6. Основні геометричні і гідравлічні характеристики труб круглого поперечного перерізу при різних відносних наповненнях

$\Delta$	$f_1(\Delta)$	$f_3(\Delta)$	$f_4(\Delta) = k'$	$A$	$B$
0,2	0,052	0,254	0,990	0,020	0,385
0,4	0,142	0,482	0,970	0,084	0,592
0,6	0,252	0,683	0,875	0,180	0,710
0,8	0,374	0,858	0,878	0,297	0,794
1,0	0,500	1,000	0,880	0,440	0,880
1,1	0,564	1,060	0,881	0,515	0,914
1,2	0,623	1,105	0,882	0,589	0,945
1,3	0,688	1,152	0,884	0,670	0,974
1,4	0,748	1,184	0,885	0,740	0,989
1,5	0,804	1,206	0,887	0,800	0,995
1,6	0,857	1,216	0,890	0,870	1,015
1,7	0,905	1,212	0,892	0,917	1,013
1,8	0,942	1,183	0,895	0,952	1,010
1,9	0,987	1,152	0,898	0,993	1,006
2,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Таблиця 6.7. Швидкісні і витратні характеристики при повному наповненні труб

D, мм	n = 0,013		n = 0,014		n = 0,015		n = 0,017	
	W <sub>п</sub> , м/с	K <sub>п</sub> , м <sup>3</sup> /с	W <sub>п</sub> , м/с	K <sub>п</sub> , м <sup>3</sup> /с	W <sub>п</sub> , м/с	K <sub>п</sub> , м <sup>3</sup> /с	W <sub>п</sub> , м/с	K <sub>п</sub> , м <sup>3</sup> /с
500	19,86	3,90	18,07	3,55	16,54	3,25	14,07	2,76
600	22,38	6,33	20,41	5,77	18,71	5,29	15,97	4,52
700	24,75	9,61	22,61	8,70	20,77	7,99	17,78	6,84
800	27,01	13,58	24,71	12,42	22,73	11,42	19,51	9,81
900	29,17	18,56	26,62	16,93	24,61	15,65	21,17	13,47
1000	31,25	24,54	28,66	22,51	26,42	20,75	22,77	17,88
1100	33,26	31,60	30,52	29,01	28,17	26,77	24,32	23,12
1200	35,20	39,81	32,34	36,58	29,87	33,78	25,83	29,21
1300	37,09	49,23	34,10	45,26	31,52	41,83	27,30	36,23
1400	38,93	59,92	35,82	55,13	33,13	50,99	28,73	44,23
1500	40,72	68,79	37,49	66,24	34,70	61,13	30,13	53,25

теристика труби, що залежить від її радіуса і матеріалу (наведено в таблицях довідників).

У табл. 6.6 наведено значення  $f_1(\Delta)$ ,  $f_3(\Delta)$ ,  $f_4(\Delta) = k'$ , A і B для круглих перерізів, а в табл. 6.7 — значення швидкісних  $W_{п}$  і витратних  $K_{п}$  характеристик при повному наповненні труб різних діаметрів з різними коефіцієнтами шорсткості n.

Для порівняння на рис. 6.9 наведено значення A, B і  $k'$ , а також значення A і B при  $k' = 1$ , які приводять до завищених ве-

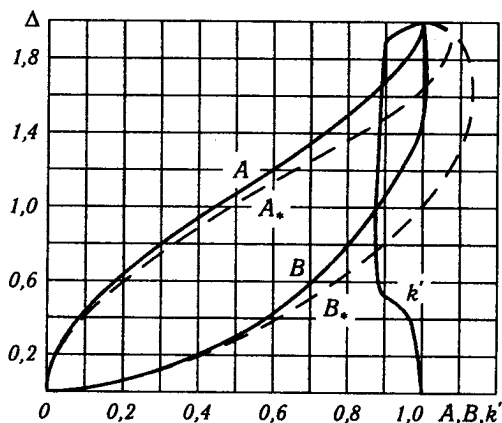


Рис. 6.9

личин швидкості і витрати у трубі, але ще трапляються в гідравлічній літературі.

Аналогічні таблиці і графіки є в довідниках і для інших форм живих перерізів замкнених русел (рис. 6.8).

■ **Приклад.** Визначити діаметр труби системи водовідведення і середню у перерізі швидкість течії стічної води, якщо похил труби  $i = 0,004$ , витрата  $Q = 0,55 \text{ м}^3/\text{с}$ , відносне наповнення труби  $\Delta = 1,5$ , коефіцієнт шорсткості  $n = 0,015$ .

За графіком (рис. 6.9) визначаємо значення відносної витратної характеристики  $A = 0,8$  (при  $\Delta = 1,5$ ). Тоді витратна характеристика труби при повному наповненні

$$K_{\text{п}} = \frac{Q}{A\sqrt{i}} = \frac{0,55}{0,82 \cdot \sqrt{0,004}} = 10,87 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Беремо трубу діаметром  $D = 800 \text{ мм}$  з витратною характеристикою  $K_{\text{п}} = 11,42 \text{ м}^3/\text{с}$  (табл. 6.7). Уточнюємо  $A$  і відносне наповнення:

$$A = \frac{Q}{K_{\text{п}}\sqrt{i}} = \frac{0,55}{11,42 \cdot \sqrt{0,004}} = 0,762.$$

Цьому значенню  $A$  за графіком (рис. 6.9) відповідає значення  $\Delta = 1,435$ , при якому відносна швидкісна характеристика  $B = 0,99$ . Для труби  $D = 800 \text{ мм}$  швидкісна характеристика при повному наповненні  $W_{\text{п}} = 22,73 \text{ м/с}$ . Тоді середня швидкість

$$V = BW_{\text{п}}\sqrt{i} = 0,99 \cdot 22,73 \cdot \sqrt{0,004} = 1,42 \text{ м/с}.$$

**Допустимі наповнення і швидкості у водовідвідних трубах.** При розрахунку труб дощового водовідведення допускається повне наповнення труби  $\Delta_0 = \frac{h_0}{r} = 2$ , а в трубах для відведення промислових і побутових стічних вод ступінь наповнення не допускається більше ніж  $\Delta_0 = \frac{h_0}{r} = 1,5$ , якщо діаметри труб  $D > 900 \text{ мм}$ , а для менших діаметрів розрахунковий ступінь наповнення беруть  $1,2 \dots 1,5$ .

Мінімальні середні у перерізі швидкості  $V_{\text{min}}$ , за яких не відбувається замулювання водовідвідних труб, називаються самоочисними швидкостями. Мінімальні допустимі швидкості, м/с, можна обчислити за формулою Яковлева

$$V_{\text{min}} = 12,5V_{\text{г.к}} \cdot R^{0,2}, \quad (6.34)$$

де  $V_{\text{г.к}}$  — гідравлічна крупність, м/с;  $R$  — гідравлічний радіус, м.

**Дренажні труби.** Такі труби також розраховують як безнапірні, але за умови повного наповнення. Якщо  $A = 1$ , то з формули (6.33) дістають значення витратної характеристики  $K_{\Pi} = \frac{Q}{\sqrt{i}}$ , залежно від якого визначають потрібний діаметр труби. Наприклад, для гончарних дренажних труб при коефіцієнті шорсткості  $n = 0,012$  витратні характеристики мають такі значення:

$D$ , мм	40	50	65	80	100	130	160	200
$K_{\Pi}$ , л/с	4,5	8,1	16,4	28,6	52,0	106,8	184,0	335,0

# 7 ОСОБЛИВОСТІ УСТАЛЕНОГО НЕРІВНОМІРНОГО РУХУ РІДИНИ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ

## 7.1. Основні поняття і визначення

Під час нерівномірного усталеного руху у відкритих руслах середня швидкість та глибина потоку змінюються вздовж русла, але не змінюються у будь-якому перерізі з часом. Нерівномірний рух встановлюється в таких випадках:

1) у разі влаштування в руслі перепаду (рис. 7.1, а), греблі (рис. 7.1, б) або іншої споруди, а також при зміні похилу;

2) у руслах із горизонтальним дном або із зворотним похилом (з гл. 6 відомо, що рівномірний рух може бути тільки при прямому похилі дна);

3) у руслах непризматичних, переріз яких змінюється по довжині.

При нерівномірному русі глибини можуть зменшуватися або збільшуватися. У першому випадку криву вільної поверхні називають *кривою спаду* (рис. 7.1, а), а в другому — *кривою підпору* (рис. 7.1, б).

Основною задачею при розрахунку нерівномірного руху є побудова кривих вільної поверхні. При цьому в разі кривих підпору можна визначити відмітки підйому рівня води в руслі і вжити заходів проти затоплення відповідних територій та споруд на них. При кривих спаду внаслідок зменшення глибин і збільшення швидкостей треба розрахувати необхідне кріплення русла, яке забезпечує нормальну його роботу без розмиву.

Для характеристики і розрахунку нерівномірного руху потрібно знати критичну глибину і критичний похил. Визначення критичної глибини у загальному вигляді розглянуто в п. 2.10.

В окремому випадку для русла прямокутного перерізу критична глибина згідно з формулою (2.78)

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}}.$$

Звідси випливає, що критична глибина  $h_k$  від похилу дна  $i$  не залежить, а нормальна глибина  $h_0$  залежить (див. п. 6.1).



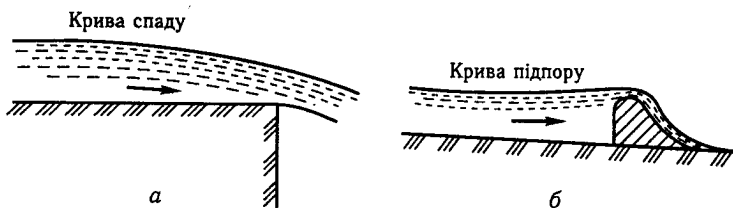


Рис. 7.1

Тому при зміні похилу буде змінюватися і нормальна глибина. Якщо при певному похилі нормальна глибина дорівнюватиме критичній, то такий похил називають *критичним*  $i_k$ . У цьому випадку згідно з формулою (6.5)

$$Q = \omega_k W_k \sqrt{i_k}, \quad (7.1)$$

де  $\omega_k$  і  $W_k$  — відповідно площа живого перерізу і швидкісна характеристика при критичній глибині.

Звідси

$$i_k = \frac{Q^2}{\omega_k^2 W_k^2}. \quad (7.2)$$

Критичний похил у відкритих руслах, як правило, змінюється в межах  $i = 0,001 \dots 0,02$ .

■ **Приклад.** Визначити критичний похил у бетонному русі прямокутного перерізу з шириною  $b = 2$  м, витратою  $Q = 2,4$  м<sup>3</sup>/с.

Визначаємо критичну глибину за формулою (2.78)

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g b^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,1 \cdot 2,4^2}{9,81 \cdot 2^2}} = 0,544 \text{ м.}$$

Визначаємо при критичній глибині площу  $\omega_k = b \cdot h_k = 2 \cdot 0,544 = 1,09$  м<sup>2</sup>; змочений периметр  $\chi_k = b + 2h_k = 2 + 2 \cdot 0,544 = 3,09$  м; гідравлічний радіус

$$R_k = \frac{\omega_k}{\chi_k} = \frac{1,09}{3,09} = 0,35 \text{ м.}$$

За табл. 3.3 визначаємо швидкісну характеристику (при  $R_k = 0,35$  м і коефіцієнті шорсткості  $n = 0,014$  для бетону)  $W = 35,8$  м/с.

$$\text{Критичний похил } i_k = \frac{Q^2}{\omega_k^2 \cdot W_k^2} = \frac{2,4^2}{1,09^2 \cdot 35,8^2} = 0,038.$$

## 7.2. Основне диференціальне рівняння усталеного нерівномірного плавномірного руху рідини у відкритих руслах

Розглянемо поздовжній довільний профіль потоку (рис. 7.2), який протікає при нерівномірному русі. Для цього застосуємо рівняння Бернуллі для двох вертикальних перерізів 1-1 і 2-2, розміщених на нескінченно малій відстані  $dl$  одне від одного. Відмітка дна в першому перерізі  $z$ , глибина  $h$ , середня швидкість потоку в живому перерізі  $V$ , а в другому перерізі відповідно  $z + dz$ ,  $h + dh$ ,  $V + dV$  (прирости  $dz$ ,  $dh$ ,  $dV$  можуть бути як додатними, так і від'ємними).

З урахуванням цього

$$z + h + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha V^2}{2g} = z + dz + h + dh + \frac{p_a}{\rho g} + \frac{\alpha (V + dV)^2}{2g} + dh_l,$$

де  $dh_l$  — втрати енергії по довжині на ділянці між розрахунковими перерізами.

Нехтуючи величиною другого порядку малості  $\frac{\alpha}{2g}(dV)^2$ , після перетворень дістаємо

$$dh + \frac{\alpha}{2g} 2VdV = -dz - dh_l. \quad (7.3)$$

Зважаючи на те що  $\frac{\alpha}{2g} 2VdV = d\frac{\alpha V^2}{2g}$ , а  $dh + d\frac{\alpha V^2}{2g} = de_*$  (див. п. 2.10) та поділивши обидві частини рівняння (7.3) на  $dl$ , маємо

$$\frac{de_*}{dl} = i - i_f, \quad (7.4)$$

де  $i = -\frac{dz}{dl}$  — похил дна русла;  $i_f = \frac{dh_l}{dl}$  — похил тертя, тобто гідралічний похил  $J$  при врахуванні тільки втрат напору по довжині.

Рівняння (7.5) називають *основним диференціальним рівнянням усталеного нерівномірного плавномірного руху рідини у відкритих руслах*.

Припускають, що похил тертя при нерівномірному русі можна визначати так само, як і при рівномірному, але для кожного перерізу. Так, якщо для рівномірного руху

$$i_f = J = i = \frac{Q^2}{\omega_0^2 W_0^2} = \text{const}, \quad (7.5)$$

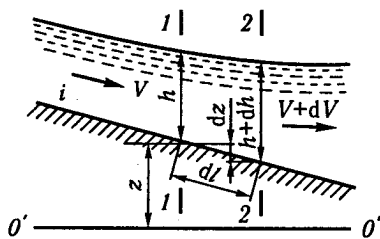


Рис. 7.2

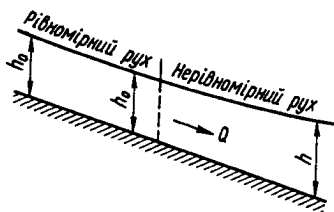


Рис. 7.3

то для нерівномірного руху

$$i_f = \frac{Q^2}{\omega^2 W^2} \neq \text{const.} \quad (7.6)$$

У цих рівняннях  $\omega_0$  і  $W_0$  належать до рівномірного руху, а  $\omega$  і  $W$  — до нерівномірного.

У призматичному руслі та сама витрата може бути при нерівномірному русі й при рівномірному в разі прямого похилу дна ( $i > 0$ ) (рис. 7.3).

У другому випадку

$$Q = \omega_0 W_0 \sqrt{i} = K_0 \sqrt{i}, \quad (7.7)$$

де  $K_0 = \omega_0 W_0$  — витратна характеристика при нормальній глибині  $h_0$ . Підставляючи значення  $Q$  із залежності (7.7) у (7.6), запишемо

$$i_f = i \frac{K_0^2}{\omega^2 W^2} = i \frac{K_0^2}{K^2}, \quad (7.8)$$

де  $K = \omega W$  — витратна характеристика при глибині нерівномірного руху  $h$ .

Помноживши у лівій частині рівняння (7.4) чисельник та знаменник на  $dh$ , дістанемо

$$\frac{dh}{dl} = \frac{i - i_f}{\frac{de_*}{dh}} \quad (7.9)$$

і з урахуванням виразів (7.8), (2.76) та (2.78) здобудемо диференціальне рівняння нерівномірного плавномірного руху в призматичному руслі при прямому похилі дна

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - K_0^2/K^2}{1 - h_k^3/h^3} = i \frac{1 - K_0^2/K^2}{1 - Fr}, \quad (7.10)$$

де  $Fr = (h_k/h)^3$  — число Фруда; при бурхливому стані потоку  $h < h_k$  і  $Fr > 1$ , при спокійному —  $h > h_k$  і  $Fr < 1$ .

Це рівняння характеризує залежність зміни глибини вздовж руху потоку від співвідношень  $K$  і  $K_0$ ,  $h$  і  $h_k$ . Воно дає можливість встановити основні форми кривих вільної поверхні потоку при додатному похилі дна.

Слід зазначити: якщо  $h \rightarrow h_0$ , то  $K \rightarrow K_0$  і  $dh/dl \rightarrow 0$ , тобто глибина наближається до постійної. Це означає, що до лінії нормальних глибин крива вільної поверхні наближається асимптотично (рис. 7.4, а). З іншого боку, якщо  $h \rightarrow h_k$ , то  $dh/dl \rightarrow \infty$ , тобто функція  $h = f(l)$  має розрив безперервності і крива вільної поверхні підходить до лінії критичних глибин круто (теоретично під прямим кутом) (рис. 7.4, б).

Якщо  $h \rightarrow \infty$ , то  $dh/dl \rightarrow i$ , а оскільки похил дна також дорівнює  $i$ , то крива вільної поверхні наближається до горизонтальної лінії (рис. 7.5).

Якщо похил дна  $i < i_k$ , нормальна глибина  $h_0 > h_k$  (рис. 7.6). Глибини потоку при нерівномірному русі можна встановлювати в трьох зонах: а ( $h > h_0$ ); б ( $h_0 > h > h_k$ ); с ( $h < h_k$ ).

У зоні а  $h_0 > h > h_k$ . У цьому випадку  $K > K_0$ ,  $Fr < 0$  і згідно з рівнянням (7.10)  $dh/dl > 0$ . Відповідно  $h$  зростає плавно від нормальної глибини і при великих глибинах вільна поверхня наближається до горизонтальної. Така угнута крива підпору типу Ia встановлюється перед греблею водосховища або запруді (рис. 7.7).

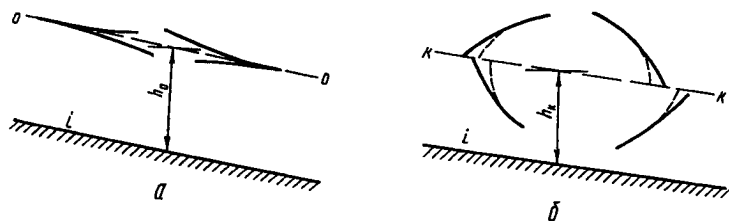


Рис. 7.4

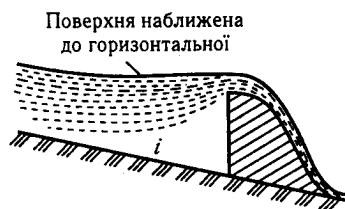


Рис. 7.5

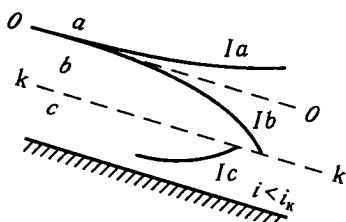


Рис. 7.6

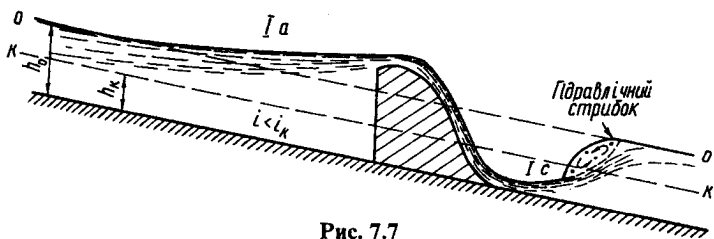


Рис. 7.7

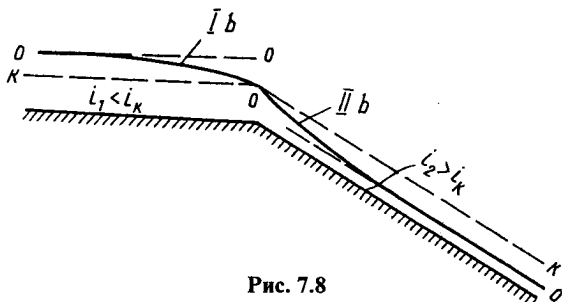


Рис. 7.8

У зоні  $b$   $h < h_0$  і  $h > h_k$ . У цьому випадку  $dh/dl < 0$  і глибини вздовж потоку зменшуються, крива вільної поверхні плавно відходить від лінії нормальних глибин і круто підходить до лінії критичних глибин (рис. 7.6). Така опукла крива спаду типу  $Ib$  встановлюється на ділянці перед зміною похилу від  $i_1 < i_k$  до  $i_2 > i_k$  (рис. 7.8).

У зоні  $c$   $h < h_k < h_0$ . У цьому випадку  $dh/dl > 0$  і встановлюється угнута крива підпору типу  $Ic$ , яка круто підходить до лінії критичних глибин (рис. 7.6). Така крива має місце після водозливу (рис. 7.7), вона здебільшого закінчується різким переходом через критичну глибину, який називають *гидравлічним стрибком*.

Якщо похил дна  $i > i_k$ , нормальна глибина  $h_0$  є меншою, ніж критична  $h_k$  (рис. 7.9). У зоні  $a$   $h > h_k > h_0$  і, як і у попередньому випадку,  $dh/dl > 0$ , а глибини вздовж потоку збільшуватимуться. Оскільки від лінії критичних глибин крива підпору відходить круто, то в цьому випадку встановлюється опукла крива підпору типу  $IIa$ . Це має місце перед греблею в гірських річках. Перед кривою підпору утворюється *гидравлічний стрибок* (рис. 7.10).

У зоні  $b$   $h < h_k$  і  $h > h_0$ . У цьому випадку  $dh/dl < 0$  і глибина потоку

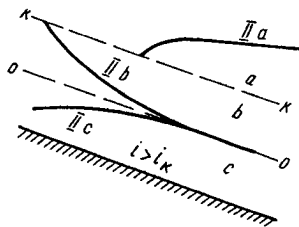


Рис. 7.9

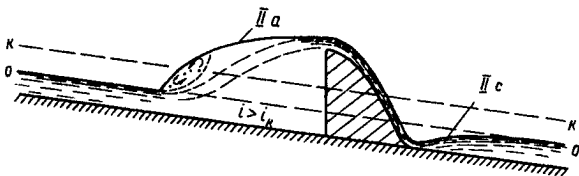


Рис. 7.10

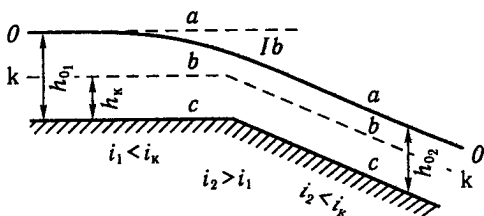


Рис. 7.11

зменшується від  $h_k$  до  $h_0$ . Крива спаду типу *IIb* буде угнутою (рис. 7.9 та 7.8).

У зоні *c*  $h < h_0 < h_k$  і  $dh/dl > 0$ . Глибина збільшується до нормальної  $h_0$ , крива підпору буде опуклою типу *IIc*. Така крива має місце після греблі при похилі дна  $i > i_k$  (рис. 7.10).

Аналогічно можна встановити форми кривих вільної поверхні при  $i = i_k$  та  $i \leq 0$ . Методи інтегрування диференціальних рівнянь (7.4) та (7.10) і побудову кривих вільної поверхні наведено у спеціальних курсах гідравліки [5, 6, 7, 12, 13, 14, 17].

✦ **Приклад.** Визначити форму кривої вільної поверхні при зміні похилу каналу від  $i_1$  до  $i_2 > i_1$ , якщо похили  $i_1$  і  $i_2$  менші за критичний.

Якщо похили менші критичного, то нормальні глибини будуть більше критичної глибини. Проте  $i_2 > i_1$ , тоді  $h_{0_2} < h_{0_1}$  (рис. 7.11). У цьому випадку для аналізу застосовують схему (див. рис. 7.6). Зниження глибини на другій ділянці відбуватися не може, тому що в зоні *a* може бути тільки крива підпору. На першій ділянці глибини можуть знижуватися в зоні *b* (крива *Ib*) від нормальної глибини  $h_{0_1}$  до глибини в кінці ділянки  $h_{\text{кін}} = h_{0_2}$ .

### 7.3. Гідравлічний стрибок

**Основні визначення і класифікація гідравлічних стрибків.** Гідравлічним стрибком називають стрибкоподібний перехід від бурхливого стану потоку до спокійного, тобто перехід від глибин менших за критичну до глибин більших за критичну (рис. 7.12).

Глибини перед стрибком  $h_1$  та після стрибка  $h_2$  називають *спряженими* або *взаємними глибинами*.

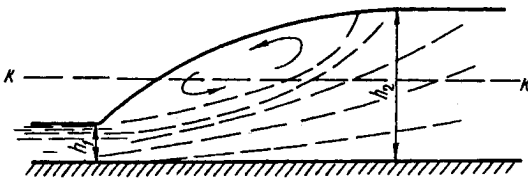


Рис. 7.12

Існує кілька видів гідравлічних стрибків. Залежно від співвідношення спряжених глибин стрибок може бути досконалим або хвилястим.

**Досконалий гідравлічний стрибок у призматичному руслі.** Гідравлічний стрибок, при якому над основним транзитним струменем утворюється область з коловоротним рухом (поверхневий валець), називають *досконалим* (рис. 7.12). За даними експериментальних досліджень досконалий стрибок у руслах прямокутного перерізу виникає при співвідношенні спряжених глибин  $h_2/h_1 \geq 2$  або  $Fr_1 = h_1^3/h_2^3 > 3$ . Гідравлічний стрибок викликає дуже різкі зміни в конфігурації потоку й умовах його протікання; зокрема, у стрибку відбувається значне зменшення швидкості, що призводить до значних втрат енергії (див. п. 3.7).

Втрати енергії можуть бути різними залежно від параметрів стрибка, що ускладнює застосування до гідравлічного стрибка рівняння Бернуллі, яке вимагає знання втрат енергії. У зв'язку з цим для виведення основного рівняння гідравлічного стрибка застосовують рівняння зміни кількості руху (2.96) для відсіку рідини, розташованого між перерізами 1-1 і 2-2 (рис. 7.13).

При виведенні рівняння гідравлічного стрибка використовують такі припущення:

похил дна русла  $i$  є настільки малим, що проекцією сили тяжіння  $G$  на лінію дна можна знехтувати;

враховуючи те, що відстань між розрахунковими перерізами невелика, можна вважати, що сили тертя  $\tau_0$  на стінках русла в границях стрибка такі малі, що ними можна знехтувати;

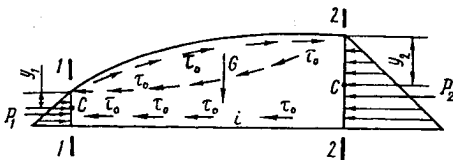


Рис. 7.13

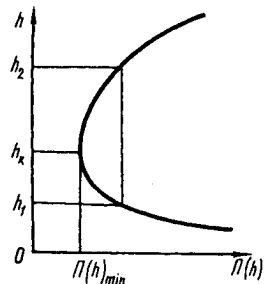


Рис. 7.14

у перерізах 1-1 і 2-2 рух плавномісний, тому тиск у цих перерізах розподіляється за законом гідростатики;

коефіцієнти кількості руху в розрахункових перерізах дорівнюють одне одному:  $\alpha_{01} \approx \alpha_{02} \approx \alpha_0$ .

Імпульси сил тиску за 1 с у розрахункових перерізах із врахуванням (2.102) і (1.31) визначають як  $P = \rho g y \omega$  ( $y$  — глибина занурення центра ваги перерізу  $C$ ). Тоді рівняння (2.96) набирає вигляду

$$\alpha_{0\rho} V_2^2 \omega_2 - \alpha_{0\rho} V_1^2 \omega_1 = \rho g y_1 \omega_1 - \rho g y_2 \omega_2.$$

Оскільки  $V = Q/\omega$ , то

$$\frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_1} + y_1 \omega_1 = \frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega_2} + y_2 \omega_2. \quad (7.11)$$

Це рівняння називають *основним рівнянням досконалого гідравлічного стрибка*. Його можна записати й більш лаконічно:

$$\Pi(h_1) = \Pi(h_2), \quad (7.12)$$

де  $\Pi(h)$  — стрибкова функція, яку визначають за формулою

$$\Pi(h) = \frac{\alpha_0 Q^2}{g \omega} + y \omega. \quad (7.13)$$

З рівняння (7.12) випливає, що стрибкові функції для спряжених глибин дорівнюють одна одній. Формула (7.13) пока-

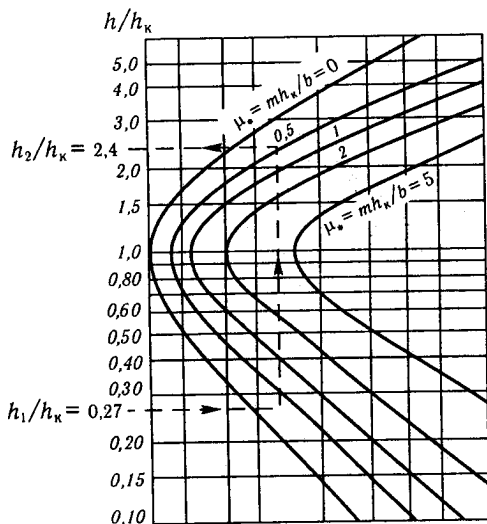


Рис. 7.15



зує, що стрибкова функція наближається до нескінченності при  $h \rightarrow 0$  (тобто  $\omega \rightarrow 0$ ) і при  $h \rightarrow \infty$  (тобто  $\omega \rightarrow \infty$ ). Це означає, що стрибкова функція має мінімум (рис. 7.14). Оскільки до стрибка глибини менші, а після стрибка більші за критичну, то мінімум стрибкової функції відповідає саме критичній глибині  $h_k$ .

Рівняння (7.11) у загальному випадку відносно глибин  $h_1$  або  $h_2$  розв'язують методом підбору, або побудовою графіка стрибкової функції. Для деяких форм поперечних перерізів русел є графіки для визначення однієї із взаємних глибин, якщо відома інша. На рис. 7.15 наведено графік Рахманова для стрибка в руслах трапецеїдальної форми, а на рис. 7.16 — графік Константінова для стрибка у безнапірних трубах систем водовідведення (користування графіками — на рис. 7.14). Відкладаючи по вертикальній осі глибину  $h_1$  (або  $h_2$ ) згідно зі схемою (рис. 7.14) дістають взаємну глибину  $h_2$  (або  $h_1$ ) для відповідної стрибкової функції при  $\mu \frac{h_k}{b}$  (для трапецеїдального перерізу русла) або витратного параметра труби  $\Pi_Q = \frac{\alpha Q^2}{gr^5}$  (для безнапірної круглої труби).

■ **Приклад.** Визначити більшу взаємну глибину  $h_2$  гідравлічного стрибка в руслі трапецеїдального перерізу шириною по дну  $b = 1$  м, із коефіцієнтом закладання укосів  $m = 1$ , при витраті  $Q = 1,1$  м<sup>3</sup>/с, глибини на початку стрибка  $h_1 = 0,12$  м.

Критична глибина при заданих параметрах русла і потоку ( $b, m, Q$ )  $h_k = 0,44$  м (див. приклад на с. 75).

$$\text{Параметр } \mu_* = \frac{m \cdot h_k}{b} = \frac{1 \cdot 0,44}{1} = 0,44 \text{ м.}$$

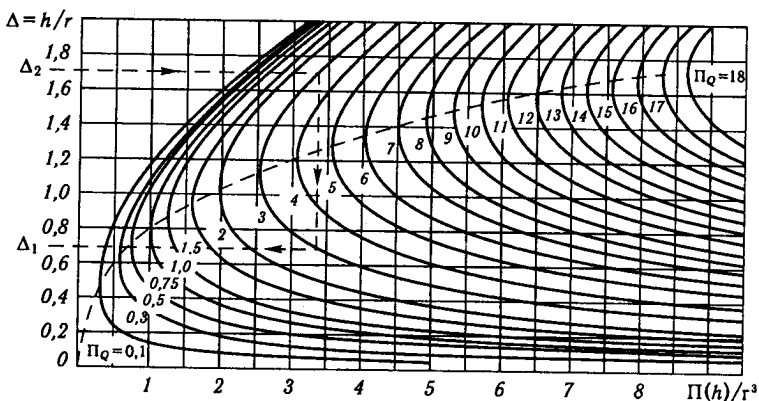


Рис. 7.16

За графіком (рис. 7.15) при  $\frac{h_1}{h_k} = \frac{0,12}{0,44} = 0,27$  і  $\mu_* = 0,44$  визначаємо відносну глибину після стрибка  $\frac{h_2}{h_k} = 2,4$ .

Тоді глибина після стрибка

$$h_2 = \frac{h_2}{h_k} h_k = 2,4 \cdot 0,44 = 1,06 \text{ м.}$$

✦ **Приклад.** Визначити меншу взаємну глибину гідравлічного стрибка в безнапірній круглій трубі системи водовідведення діаметром  $D = 1200$  мм при витраті  $Q = 1,442 \text{ м}^3/\text{с}$ , якщо глибина після стрибка  $h_2 = 1,02$  м.

Визначаємо витратний параметр труби:

$$\Pi_Q = \frac{\alpha Q^2}{gr^5} = \frac{1,1 \cdot 1,442^2}{9,81 \left(\frac{1,2}{2}\right)^5} = 3,0.$$

Відносна глибина після стрибка

$$\Delta_2 = \frac{1,02}{0,6} = 1,7.$$

За графіком (рис. 7.16)  $\Delta_1 = 0,69$ . Глибина перед стрибком  $h_1 = \Delta_1 \cdot r = 0,69 \cdot 0,6 = 0,414$  м.

Для гідравлічного стрибка у прямокутному руслі можна використати аналітичне рішення рівняння (7.11). Для прямокутного перерізу  $\omega = bh$ ;  $\frac{\alpha_0 Q^2}{gb^2} = h_k^3$ ;  $y = \frac{h}{2}$  і рівняння (7.11) набуває вигляду

$$\frac{h_k^3}{h_1} + \frac{h_1^2}{2} = \frac{h_k^3}{h_2} + \frac{h_2^2}{2}, \quad (7.14)$$

або

$$2h_k^3 \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} \right) = h_2^2 - h_1^2. \quad (7.15)$$

Звівши вираз у дужках до одного знаменника і скоротивши обидві частини рівняння на  $(h_2 - h_1)$ , після перетворень можна записати

$$2h_k^3 = h_1 h_2^2 + h_1^2 h_2. \quad (7.16)$$

Це квадратне рівняння є симетричним відносно глибин до стрибка  $h_1$  і після нього  $h_2$ . Якщо відома одна з цих глибин,

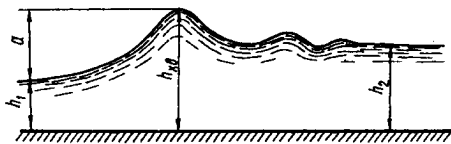


Рис. 7.17

можна визначити другу:

$$\left. \begin{aligned} h_2 &= \frac{h_1}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \frac{h_{кр}^3}{h_1^3}} - 1 \right); \\ h_1 &= \frac{h_2}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \frac{h_{кр}^3}{h_2^3}} - 1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

**Хвилястий стрибок.** У руслах прямокутного перерізу при співвідношенні спряжених глибин  $h_2 / h_1 < 2$  або  $Fr_1 = h_{кр}^3 / h_1^3 < 3$  виникає хвилястий стрибок (рис. 7.17). У цьому випадку поверхневий валець не утворюється, а потік переходить з бурхливого стану до спокійного за допомогою утворення ряду хвиль (з найбільшою глибиною  $h_{хв}$ ), які поступово згасають за напрямом руху води.

Висоту першої хвилі  $a$  можна визначити за формулою Краснитського

$$a = h_{хв} - h_1 = 0,72h_1 (Fr_1 - 1), \quad (7.18)$$

а співвідношення між спряженими глибинами при  $h_{кр}^3 / h_1^3 = 1,5 \dots 3$  — за формулою Модзалевського

$$h_2 / h_1 = 1,15\sqrt{Fr_1} - 0,15. \quad (7.19)$$

Розрахунки гідротехнічних споруд, в яких виникає гідравлічний стрибок, наведено в спеціальній літературі з гідравліки відкритих русел [5, 6, 7, 13, 16, 17].

#### 7.4. Особливості спряження б'єфів

Частину потоку до водозливу називають *верхнім б'єфом*, а після водозливу — *нижнім б'єфом*. Розділ гідравліки, що розглядає перехід потоку з верхнього б'єфа у нижній, називають *спряженням б'єфів*.

Безпосередньо за водозливом унаслідок падіння струменя швидкість потоку стає максимальною, а глибина мінімальною.

Переріз із цією глибиною називають *стисненим* (рис. 7.18). Глибину в стисненому перерізі  $h_C$  можна визначити з рівняння Бернуллі, що записане для перерізу перед водозливом і стисненого перерізу (аналогічно рівнянню (5.1))

$$P + H + \frac{\alpha V_0^2}{2g} = h_C + \frac{\alpha V_C^2}{2g\varphi^2}, \quad (7.20)$$

де  $P$  — висота водозливу;  $H$  — геометричний напір на водозливі;  $V_0$  — швидкість підходу до водозливу;  $V_C$  — швидкість у стисненому перерізі;  $\varphi$  — коефіцієнт швидкості, що враховує втрати енергії на водозливі ( $\varphi < 1,0$ ).

Ліва частина цього рівняння є питомою енергією у верхньому б'єфі відносно дна нижнього б'єфа:

$$T_0 = P + H + \frac{\alpha V_0^2}{2g}. \quad (7.21)$$

Для русла прямокутного перерізу  $V_C = \frac{Q}{bh_C}$ , і тоді

$$T_0 = h_C + \frac{\alpha Q^2}{2gb^2 h_C^2 \varphi^2}. \quad (7.22)$$

Із цього рівняння в загальному випадку підбором визначають глибину у стисненому перерізі  $h_C$ . Для полегшення розрахунків у довідниках наведено допоміжні таблиці і графіки.

Як приклад на рис. 7.19 наведено графік Рахманова для визначення глибини в стисненому перерізі  $h_C$  і взаємної з нею глибини  $h_C^*$  у нижньому б'єфі споруд у руслах прямокутного перерізу. Після відкладання на осі абсцис значення  $\xi_0 = T_0 / h_K$  для відповідного коефіцієнта  $\varphi$  на осі ординат дістаємо значення  $\xi_C = h_C / h_K$ . На перетинанні горизонтальної лінії  $\xi_C$  з кривою  $AB$  здобувають значення  $\xi_C = h_C^* / h_K$  (порядок користування графіком — див. пунктирну лінію).

Як було зазначено у п. 7.2, якщо похил дна нижнього б'єфа менший, ніж критичний ( $i < i_K$ ), то у нижньому б'єфі встановлюється крива підпору  $I_C$ , яка може закінчуватися гідравлічним стрибком (див. рис. 7.7).

У цьому випадку глибина на початку стрибка  $h_6' > h_C$  (рис. 7.20, а), а глибина, спряжена з глибиною в стисненому перерізі,  $h_C^* > h_6$  ( $h_6$  — глибина у нижньому б'єфі). Такий стри-

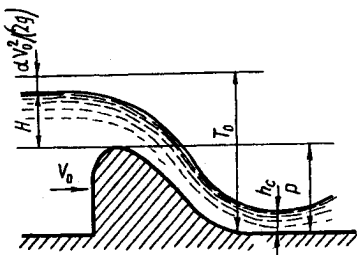


Рис. 7.18

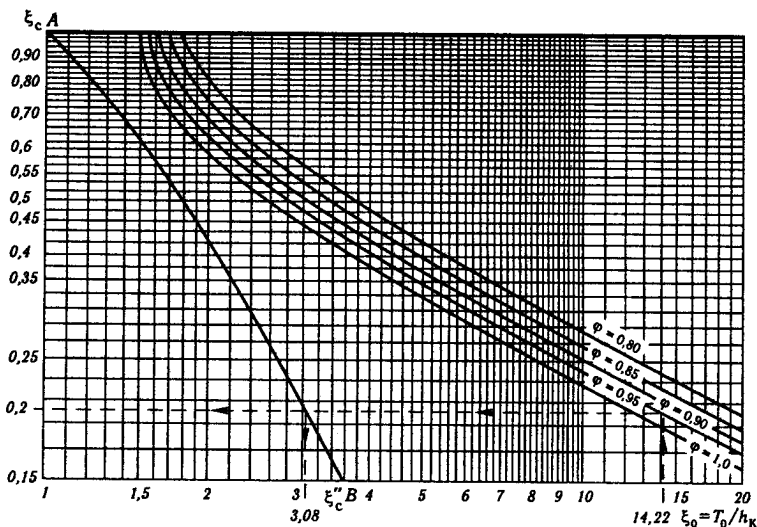


Рис. 7.19

бок називають *відігнаним*. Глибини  $h'_6$ ,  $h_6$ ,  $h_C$ ,  $h''_C$  відкладають на графіку стрибкової функції (рис. 7.21).

Якщо глибина у нижньому б'єфі  $h_6 = h''_C$ , то стрибок встановлюється в стисненому перерізі (рис. 7.20, б), а якщо  $h_6 > h''_C$ , то стрибок насувається на водозлив і його називають *насуваним* (рис. 7.20, в).

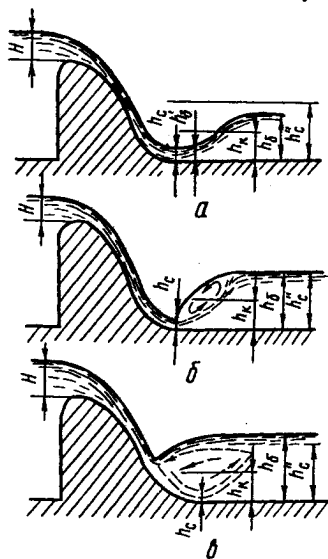


Рис. 7.20

✱ **Приклад.** Визначити глибину в стисненому перерізі і форму спряження б'єфів після водозливу практичного профілю криволінійного окреслення з висотою  $P = 10$  м, шириною русла прямокутного перерізу і водозливного от-

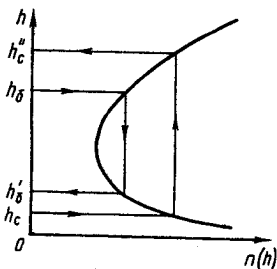


Рис. 7.21

вору  $b = 16$  м, витратою  $Q = 32$  м<sup>3</sup>/с, глибиною в нижньому б'єфі  $h_6 = 2$  м.

Із формули (5.82) визначаємо повний напір на водозливі

$$H_0 = \left( \frac{Q}{mb\sqrt{2g}} \right)^{2/3} = \left( \frac{32}{0,49 \cdot 16 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \right)^{2/3} = 0,95 \text{ м.}$$

Питома енергія у верхньому б'єфі

$$T_0 = P + H + \frac{\alpha V_0^2}{2g} = P + H_0 = 10 + 0,95 = 10,95 \text{ м.}$$

Критична глибина

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1,1 \cdot 32^2}{9,81 \cdot 16^2}} = 0,77 \text{ м.}$$

За графіком при  $\xi_0 = \frac{T_0}{h_k} = \frac{10,95}{0,77} = 14,22$  і  $\varphi = 0,95$  дістаємо  $\xi_c = 0,2$  і  $\xi_c'' = 3,08$ . Тоді  $h_c = \xi_c \cdot h_k = 0,2 \cdot 0,77 = 0,154$  м;  $h_c'' = \xi_c'' \cdot h_k = 3,08 \cdot 0,77 = 2,37$  м.

Оскільки  $h_c'' > h_6$ , то в нижньому б'єфі встановлюється відігнаний гідравлічний стрибок.

У практиці проектування слід прагнути до випадку насунутого стрибка, коли у нижньому б'єфі відсутня ділянка з бурхливим станом потоку і великими швидкостями.

Якщо глибина після стрибка  $h_6$  недостатня для створення насунутого стрибка, то її можна штучно збільшити, застосовуючи гасителі енергії. Наприклад, у водобійному колодязі (рис. 7.22) глибина за стрибком збільшується за рахунок зниження відмітки дна і створення напору на виході з колодязя (аналогічно

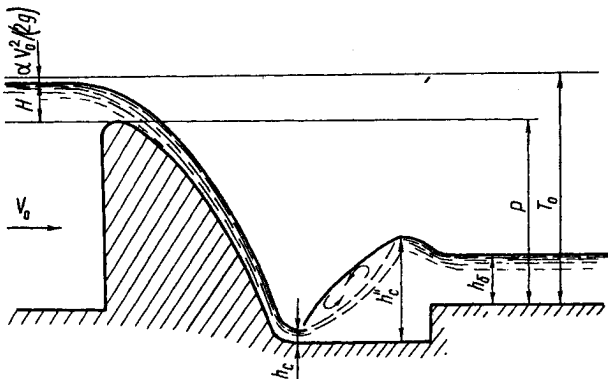


Рис. 7.22

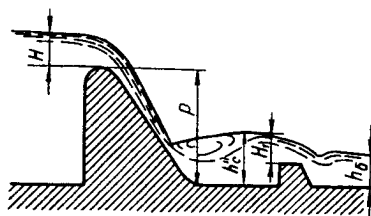


Рис. 7.23

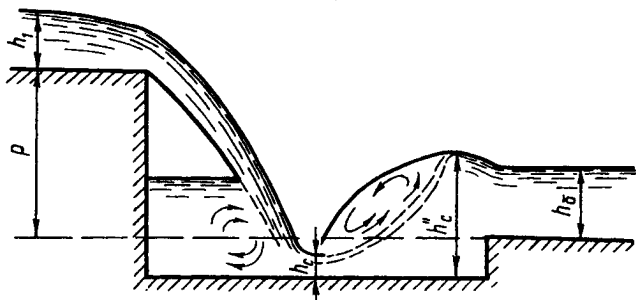


Рис. 7.24



Рис. 7.25

напору перед водозливом із широким порогом). Глибину за стрибком можна збільшити і за допомогою водобійної стінки (рис. 7.23), перед якою також створюється напір  $H_1$ .

Гасителі енергії застосовують також після перепадів (рис. 7.24) і швидкотоків (рис. 7.25). Більш докладно розрахунки спряження б'єфів і гасителів енергії розглянуто в спеціальній літературі [5, 6, 7, 13, 14, 16, 17].

## 8.1. Види фільтрації. Основний закон фільтрації. Коефіцієнт фільтрації

Рух ґрунтових вод є окремим випадком руху рідини в пористому середовищі, який називають *фільтрацією*. Ґрунтові води — важливе джерело водопостачання. Рівень ґрунтових вод впливає на остійність гідротехнічних споруд, тому для регулювання рівня і припливу ґрунтових вод улаштовують різні дренажні споруди.

**Види фільтрації.** Фільтрація відбувається через пори ґрунту і може бути обмежена знизу і зверху водонепроникними шарами ґрунту. Таку фільтрацію називають *напірною* (рис. 8.1).

Якщо водотривкий шар обмежує потік тільки знизу, то така фільтрація є *безнапірною* (рис. 8.2).

Залежно від витрати фільтраційного потоку поверхня його може займати різне положення аналогічно положенню вільної поверхні у відкритих руслах.

Поверхню фільтраційного потоку називають *депресійною поверхнею*, а криву вільної поверхні — *кривою депресії*.

Як і у відкритих руслах, рух води у пористому середовищі може бути усталеним і неусталеним, рівномірним та нерівномірним.

Безнапірний рух ґрунтових вод є здебільшого нерівномірним, оскільки гідравлічний похил  $J$  частіше не дорівнює похилу водотривкого шару  $i$  (рис. 8.2). У цьому випадку рівномірний рух неможливий.

Фільтрація може бути ламінарною та турбулентною. Ламінарний рух, як і в трубах (див. п. 3.4), характеризується втратами напору, що прямо пропорційні швидкості фільтрації у першому степені. Такий рух відбувається у дрібнозернистих ґрунтах (піски, глина, суглинки і т. д.).

У крупнозернистих пісках і матеріалах (гравій, галька, щебін, каміння) встановлюється турбулентна фільтрація, за якою втрати напору пропорційні швидкості у степені вищому, ніж перший.

У цьому курсі в основному розглядатимемо усталений безнапірний нерівномірний рух ґрунтових вод.

**Основний закон фільтрації.** При фільтрації вода проходить через пори між частинками ґрунту. Позначимо площу пор у



Із формули (8.6) випливає, що коефіцієнт фільтрації  $k$  характеризує швидкість фільтрації при гідравлічному похилі  $J = 1$  і має розмірність швидкості. Порівнюючи цю формулу з формулою (3.70), бачимо, що коефіцієнт фільтрації за своїм значенням аналогічний швидкісній характеристиці.

При ламінарній фільтрації залежності (8.5) і (8.6) з урахуванням  $m = 1$  можна представити формулами Дарсі:

$$Q = \omega k J; \quad (8.8)$$

$$V = k J. \quad (8.9)$$

Формули Дарсі — це основний закон ламінарної фільтрації. Границі застосування рівняння Дарсі недостатньо вивчені. В літературі наведено різні рекомендації щодо критерію переходу від ламінарної фільтрації до турбулентної. Одним із таких критеріїв є те, що при

$$Re = \frac{Vd}{\nu} < 1...7 \quad (8.10)$$

встановлюється ламінарна фільтрація, а при  $Re > 1...7$  — турбулентна ( $d$  — середній діаметр частинок ґрунту).

М. М. Павловський запропонував критерії існування ламінарної фільтрації у вигляді

$$Re = \frac{Vd}{\nu(0,75p + 0,23)} < 7...9. \quad (8.11)$$

За іншими рекомендаціями для однорідного пористого середовища із зернами у вигляді куль з діаметром  $d$  ламінарна фільтрація відбувається при

$$Re = \frac{Vd}{\nu p^{1/3}} < 5. \quad (8.12)$$

Розглядаючи залежності (8.10)—(8.12) з урахуванням того, що коефіцієнт пористості  $p = 0,3...0,5$ , кінематична в'язкість води  $\nu \approx 0,01$  см<sup>2</sup>/с (при  $t = 20$  °С), а розміри частинок дрібнозернистих ґрунтів, як правило, 1...2 мм та менше, можна встановити, що при ламінарній фільтрації швидкості фільтрації дуже незначні і на практиці, як правило, становлять кілька міліметрів за секунду і менше. У зв'язку з цим у фільтраційних розрахунках нехтують значенням швидкісного напору  $\alpha V^2 / (2g)$  і вважають, що повний напір дорівнює п'єзометричному ( $H_0 = H$ ), а гідравлічний похил — п'єзометричному ( $J = i_p$ ).

**Коефіцієнт фільтрації та методи його визначення.** Існують такі методи визначення коефіцієнта фільтрації: польовий, ла-

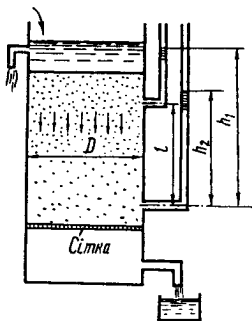


Рис. 8.3

бораторний, метод використання емпіричних формул.

*Польовий метод* звичайно використовують геологи і гідрогеологи під час дослідних робіт. Сутність його полягає в штучному утворенні кривої депресії шляхом відкачування води із спеціального колодязя або накачування води в цей колодязь, вимірюванні параметрів цієї кривої та визначенні значення коефіцієнта фільтрації за спеціальними формулами. При цьому ґрунт перебуває у природному стані і визначення коефіцієнта фільтрації є достатньо точним.

*Лабораторний метод* передбачає визначення коефіцієнта фільтрації за допомогою пристрою Дарсі (рис. 8.3). Пристроєм є циліндр із дірчастим дном і виведеними з його бокової поверхні п'єзометрами. Циліндр заповнюють ґрунтом, витягнутим із шурфа з додержанням умов зберігання його структури. Усталений рух води через пристрій забезпечують підтриманням постійної відмітки поверхні води в пристрої завдяки відведенню надлишку води в скидну трубу.

Витрату фільтраційного потоку вимірюють об'ємним методом після проходження води через пристрій. Втрати напору визначають як різницю показань п'єзометрів:  $h_l = h_1 - h_2$ . Коефіцієнт фільтрації обчислюють за формулою

$$k = \frac{Q}{\omega J}, \quad (8.13)$$

де  $\omega = \frac{\pi D^2}{4}$  — площа перерізу циліндра ( $D$  — його діаметр);  $J$  — гідравлічний похил, який визначають за формулою (8.7).

Коефіцієнти фільтрації  $k$ , см/с, для деяких ґрунтів мають такі орієнтовні значення:

Ґрунти	$k$
Глина	$1 \cdot 10^{-7}$
Суглинок	$1 \cdot 10^{-7} \dots 1 \cdot 10^{-5}$
Супісок	$1 \cdot 10^{-5} \dots 1 \cdot 10^{-3}$
Пісок:	
дрібнозернистий	$1 \cdot 10^{-4} \dots 1 \cdot 10^{-3}$
середньозернистий	$1 \cdot 10^{-3} \dots 1 \cdot 10^{-2}$
крупнозернистий	$1 \cdot 10^{-2} \dots 1 \cdot 10^{-1}$
Галька і гравій	$1 \cdot 10^{-1} \dots 1 \cdot 10$

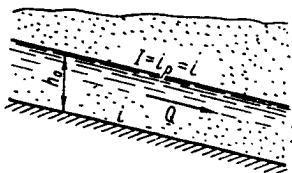


Рис. 8.4

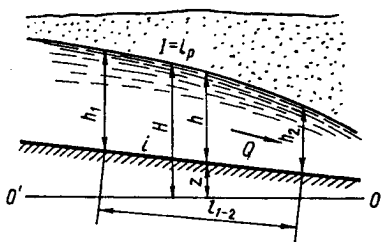


Рис. 8.5

**Рівномірний безнапірний рух ґрунтових вод.** При рівномірному русі ґрунтових вод гідравлічний і п'езометричний похили дорівнюють похилу водотривкого шару  $i$  (рис. 8.4):

$$J = i_p = i. \quad (8.14)$$

У цьому випадку

$$Q = \omega ki. \quad (8.15)$$

Для плоскої задачі  $\omega = bh_0$ , а глибина рівномірного руху

$$h_0 = \frac{Q}{bki} = \frac{q}{ki}, \quad (8.16)$$

де  $q = Q/b$  — витрата на одиницю ширини потоку.

Як уже було зазначено раніше, рівномірний безнапірний рух ґрунтових вод буває дуже рідко.

**Нерівномірний безнапірний рух ґрунтових вод.** У цьому випадку глибина фільтраційного потоку змінюється по довжині (рис. 8.5), отже, у будь-якому перерізі буде змінний похил кривої депресії:

$$J = -\frac{dH}{dl}, \quad (8.17)$$

де  $H$  — п'езометричний напір над площиною порівняння. Оскільки  $H = z + h$  (де  $z$  — відмітка водотривкого шару;  $h$  — глибина фільтраційного потоку), то

$$J = -\frac{d}{dl}(z + h) = -\frac{dz}{dh} - \frac{dh}{dl}, \quad (8.18)$$

або

$$J = i - \frac{dh}{dl}, \quad (8.19)$$

де  $i = -\frac{dz}{dl}$  — похил водотривкого шару.

З урахуванням цього рівняння (8.8) можна подати у вигляді

$$Q = k\omega \left( i - \frac{dh}{dl} \right) \quad (8.20)$$

або для плоскої задачі

$$q = kh \left( i - \frac{dh}{dl} \right). \quad (8.21)$$

Це диференціальне рівняння нерівномірного плавномірного руху ґрунтових вод. Для його інтегрування виразимо питому витрату через нормальну глибину відповідно до формули (8.16):

$$h_0 ki = kh \left( i - \frac{dh}{dl} \right). \quad (8.22)$$

Скоротивши на  $k$  та поділивши обидві частини цього рівняння на  $h_0 i$ , дістанемо

$$1 - \frac{h}{h_0} = - \frac{h}{h_0 i} \frac{dh}{dl}. \quad (8.23)$$

Звідси

$$dl = - \frac{hdh}{\left(1 - \frac{h}{h_0}\right) i h_0} = \frac{hdh}{\left(\frac{h}{h_0} - 1\right) i h_0}$$

і

$$dl = \frac{h_0}{i} \cdot \frac{\frac{h}{h_0}}{\frac{h}{h_0} - 1} d\left(\frac{h}{h_0}\right). \quad (8.24)$$

У цій формулі позначимо  $\eta = h/h_0$ . Тоді

$$dl = \frac{h_0}{i} \frac{\eta}{\eta - 1} d\eta. \quad (8.25)$$

Зінтегрувавши це рівняння, запишемо

$$l_{1-2} = \frac{h_0}{i} \left( \eta_2 - \eta_1 + 2,3 \lg \frac{\eta_2 - 1}{\eta_1 - 1} \right), \quad (8.26)$$

де  $l_{1-2}$  — відстань між перерізами з глибинами  $h_1 = \eta_1 h_0$  і  $h_2 = \eta_2 h_0$ .

Рівняння (8.26) характеризує як криві спаду, так і криві підпо-ру (рис. 8.6), які можуть виникати при похилі  $i > 0$ .

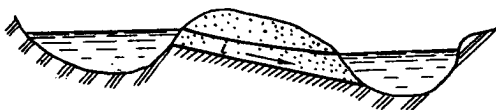


Рис. 8.6

На практиці часто похил водотривкого шару  $i = 0$ . Тоді рівняння (8.21) набуває вигляду

$$\frac{q}{k} dl = -hdh \quad (8.27)$$

або після інтегрування в границях від  $h_1$  до  $h_2$

$$\frac{q}{k} = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l_{1-2}} \quad (8.28)$$

Це рівняння Дюпюї.

## 8.2. Приплив води до водозбірної галереї та до дренажних колодязів. Основи розрахунку дренажу

У цьому пункті наведено випадки практичного застосування основного закону фільтрації та виведених із нього рівнянь для розрахунку дренажних споруд.

**Приплив води до галереї, що розташована на водотривкому шарі** (рис. 8.7). Галерея призначена для збирання та відведення ґрунтових вод, а також для зниження рівня ґрунтових вод (РГВ).

Приплив води виражають рівнянням Дюпюї (8.28), поданим у вигляді

$$\frac{q}{k} = \frac{h^2 - h_T^2}{2x}, \quad (8.29)$$

де  $q$  — питомий приплив з одного боку галереї;  $h$  — глибина води в довільному перерізі фільтраційного потоку, розташованому на відстані  $x$  від галереї;  $h_T$  — глибина води в галереї.

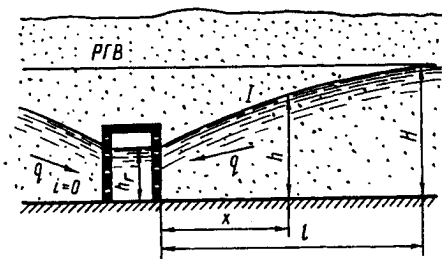


Рис. 8.7

На відстані  $l$  від галереї зниження рівня ґрунтових вод практично не відбувається, і глибина фільтраційного потоку в цьому перерізі дорівнює товщині водоносного шару  $H$ . Тому в граничному випадку

$$\frac{q}{k} = \frac{H^2 - h_T^2}{2l}. \quad (8.30)$$

Звідси

$$q = \frac{k}{2}(H + h_T) \frac{H - h_T}{l} = \frac{k}{2}(H + h_T) \bar{J}, \quad (8.31)$$

де  $\bar{J} = \frac{H - h_T}{l}$  — середній похил кривої депресії, який залежно від виду ґрунту має такі значення:

Щільні глини	0,15
Глинисті ґрунти	0,1
Піщано-глинисті ґрунти	0,05...0,1
Пісок	0,005...0,015
Крупний пісок, галька	0,003...0,005

Обчислене значення  $q$  підставляють у рівняння (8.29), після чого будують криву депресії.

Для зниження рівня ґрунтових вод можна влаштувати ряд паралельних галерей (рис. 8.8). Відстань  $L$  між ними визначають залежно від заданого зниження  $a$ :

$$L = \frac{(H - a)^2 - h_T^2}{q} k. \quad (8.32)$$

✎ **Приклад.** Визначити відстань між паралельними дренажними галереями у піщано-глинистих ґрунтах для забезпечення зниження рівня ґрунтових вод на величину  $a = 1$  м, якщо товщина водоносного шару  $H = 5$  м, глибина води в галереї  $h_T = 0,1$  м (рис. 8.8).

Визначасмо відношення питомого припливу до коефіцієнта фільтрації  $q/k$  за формулою (8.31), якщо середній похил кривої депресії  $\bar{J} = 0,05$ :

$$\frac{q}{k} = \frac{H - a + h_T}{2} \bar{J} = \frac{5 - 1 + 0,1}{2} 0,05 = 0,1025 \text{ м.}$$

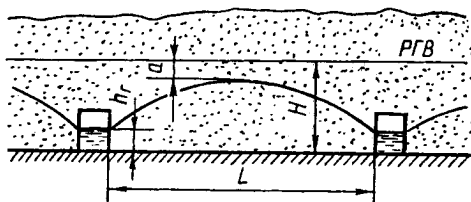


Рис. 8.8

Тоді необхідна відстань між галереями

$$L = \frac{(H - a)^2 - h_r^2}{q} k = \frac{(5 - 1)^2 - 0,1^2}{0,1025} = 156 \text{ м.}$$

**Приплив води до круглого досконалого дренажного колодязя.**  
 Досконалим називають колодязь, розміщений на водотривкому шарі (рис. 8.9). При відкачуванні глибина води в колодязі буде знижуватися, і через різницю рівнів ґрунтових вод та відмітки води в колодязі вона буде з усіх боків припливати в колодязь за радіальними напрямками.

Через деякий час у колодязі встановиться постійна глибина  $h_0$ , а рух фільтраційного потоку до колодязя буде усталеним, тобто приплив до колодязя дорівнюватиме величині відкачування.

Живі перерізи фільтраційного потоку в цьому випадку є круглоциліндричними поверхнями з вертикальними твірними і віссю, що проходить через центр колодязя. Площа живого перерізу, розміщеного на відстані  $r$  від центра колодязя,

$$\omega = 2\pi r h, \quad (8.33)$$

де  $h$  — глибина в цьому перерізі.

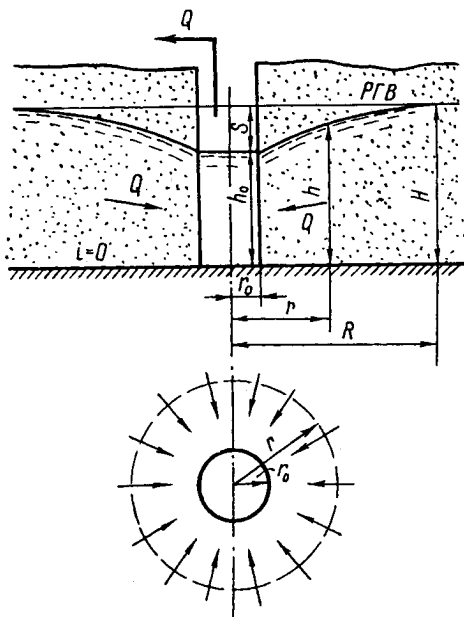


Рис. 8.9

Вважаючи, що водотривкий шар є горизонтальним ( $i = 0$ ), гідравлічний похил або похил кривої депресії можна записати у вигляді

$$J = \frac{dh}{dr}. \quad (8.34)$$

З урахуванням залежностей (8.33) і (8.34) основний закон фільтрації набирає вигляду

$$Q = 2\pi rhk \frac{dh}{dr}. \quad (8.35)$$

Звідси диференціальне рівняння кривої вільної поверхні

$$hdh = \frac{Q}{2\pi kr} dr. \quad (8.36)$$

Інтегруємо це рівняння при зміні  $r$  від  $r_0$  (радіус колодязя) до довільного значення  $r$ , яке відповідає перерізу з глибиною  $h$ :

$$\frac{h^2 - h_0^2}{2} = \frac{Q}{2\pi k} \ln \frac{r}{r_0},$$

або

$$h^2 - h_0^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (8.37)$$

Це рівняння кривої депресії для досконалого колодязя.

У граничному випадку  $h = H$  (товщина водоносного шару) і  $r = R$  (де  $R$  — радіус впливу колодязя). Перейшовши до десяткових логарифмів, запишемо приплив води до колодязя або необхідну величину відкачування

$$Q = 1,36k \frac{H^2 - h_0^2}{\lg \frac{R}{r_0}}. \quad (8.38)$$

Радіус впливу колодязя можна визначити на основі гідравлічних досліджень.

На практиці для визначення радіуса впливу колодязя  $R$ , м, використовують емпіричну формулу Зіхарда

$$R = 3000S\sqrt{k}, \quad (8.39)$$

де  $S = H - h_0$  — зниження рівня води в колодязі, м;  $k$  — коефіцієнт фільтрації, м/с.

**Приплив води до досконалого артезіанського колодязя.** Артезіанський колодязь забирає воду з водоносного шару, обмеженого зверху та знизу водотривкими ґрунтами (рис. 8.10). Вода



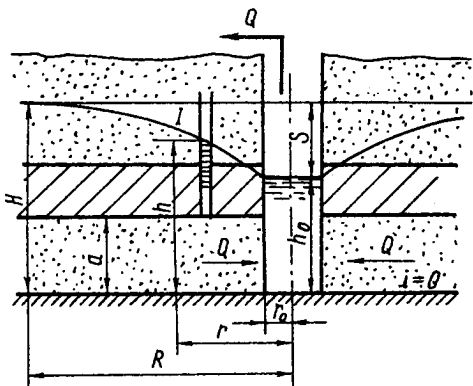


Рис. 8.10

в такому шарі перебуває під тиском і її називають *артезіанською водою*.

У цьому випадку статичний напір  $H$  і напір у будь-якому перерізі  $h$  відрізняються від товщини водоносного шару  $a$ . Гідравлічний похил характеризує падіння напірної лінії на одиницю довжини:

$$J = \frac{dh}{dr}. \quad (8.40)$$

Площа перерізу фільтраційного потоку

$$\omega = 2\pi r a. \quad (8.41)$$

З урахуванням цього

$$Q = 2\pi r a k \frac{dh}{dr}, \quad (8.42)$$

або

$$dh = \frac{Q}{2\pi a k} \frac{dr}{r}. \quad (8.43)$$

Інтегруючи в межах зміни  $h$  від  $h_0$  (глибина води в колодязі) до  $H$  та  $r$  від  $r_0$  до  $R$ , дістанемо

$$H - h_0 = \frac{Q}{2\pi a k} \ln \frac{R}{r_0}. \quad (8.44)$$

Позначивши  $H - h_0 = S$  та перейшовши до десяткових логарифмів, запишемо дебіт (витрату) артезіанського колодязя

$$Q = 2,73 \frac{a k S}{\lg \frac{R}{r_0}}. \quad (8.45)$$

✦ **Приклад.** Визначити дебіт досконалого артезіанського колодязя діаметром  $D = 30$  см, який забирає воду з водоносного піщаного шару завтовшки  $a = 10$  м при коефіцієнті фільтрації  $k = 0,003$  см/с, напорі у водоносному шарі в природному стані  $H = 25$  м, глибині води в колодязі  $h_0 = 12$  м.

Визначимо глибину відкачування

$$S = H - h_0 = 25 - 12 = 13 \text{ м.}$$

Радіус впливу колодязя за формулою (8.39)

$$R = 3000 \cdot 13 \sqrt{0,00003} = 213,5 \text{ м.}$$

Дебіт колодязя за формулою (8.45)

$$Q = 2,73 \frac{10 \cdot 0,00003 \cdot 13}{\lg \frac{213,5}{0,15}} = 0,0034 \text{ м}^3/\text{с.}$$

**Досконалий вбирний круглий колодязь** (рис. 8.11). Цей колодязь призначений для скидання поверхневої води, що фільтрується у водоносний шар.

Крива депресії у цьому випадку має форму, зворотну до кривої депресії дренажного колодязя.

Вбирна здатність колодязя

$$Q = -2\pi k r h \frac{dh}{dr}. \quad (8.46)$$

Ця формула відрізняється від формули (8.35) тільки знаком «-», який показує, що в цьому випадку вода рухається від колодязя, а не до нього.

Після інтегрування, аналогічно до випадку дренажного колодязя, маємо

$$Q = 1,36k \frac{h_0^2 - H^2}{\lg \frac{R}{r_0}}. \quad (8.47)$$

Формули (8.38) і (8.47) відрізняються виглядом чисельника, тому що вони характеризують рух ґрунтових вод за різними напрямками.

Основні залежності фільтрації застосовують також при розрахунках руху ґрунтової води через земляну греблю, під гідротехнічними спорудами, при розрахунках фільтрів для очищення рідини і газів від завислих домішок.

Такі питання розглядаються в спеціальних курсах гідравліки, водопостачання, вентиляції і т. ін. [5, 6, 7, 13, 14, 15, 17].

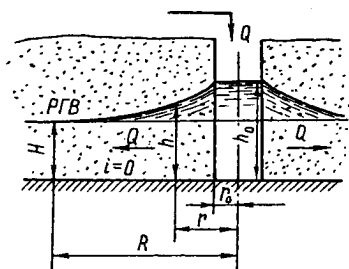


Рис. 8.11

## 9.1. Геометрична, кінематична та динамічна подібності

**Подібність гідравлічних явищ.** Вище було зазначено, що при розв'язанні багатьох інженерних задач поряд із теоретичними залежностями застосовують і експериментальні або у рівняння, одержані теоретично, вводять дослідні коефіцієнти. Так, результатами експериментальних досліджень є значення і формули гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ , коефіцієнтів місцевих опорів  $\zeta$ , коефіцієнтів швидкості  $\phi$ , витрати  $\mu$  (або  $m$ ) і стиснення струменя  $\epsilon$  при протіканні рідини через отвори і водозливи, коефіцієнтів шорсткості  $n$  стінок труб та каналів і т. ін.

Експериментальні коефіцієнти і формули одержують на основі дослідження споруд у природних умовах або, частіше, на лабораторних моделях.

Складні гідротехнічні, водопровідні і водовідвідні споруди не підлягають точному розрахунку і при проектуванні потрібно проводити дослідження на моделях для якісної та кількісної оцінки явища.

Під час проведення досліджень у лабораторних умовах вивчають такі характеристики споруди, як пропускна здатність, втрати напору, розподіл місцевих швидкостей, напрям лінії течії тощо. Геометричні розміри моделі, як правило, менші, ніж подібні розміри натурних споруд, і тому треба встановити відповідні їм значення витрат, швидкостей і глибин потоку на моделі, значення шорсткості русла моделі і, якщо це необхідно, в'язкість рідини, яку використовують для дослідження на моделі. Слід також встановити порядок перенесення одержаних на моделі результатів на умови роботи споруди в натурі. Всі ці питання розглянуто в теорії моделювання гідравлічних явищ.

Можна розглядати моделювання математичне і фізичне. Математичне моделювання передбачає вивчення інших, відмінних від натурних, фізичних явищ, які описуються аналогічними математичними залежностями. Прикладом такого моделювання є *метод електрогідродинамічних аналогій*, який вико-

ристовуюють для вивчення фільтрації і роботи водопровідних мереж.

При *фізичному моделюванні* на моделі відтворюють те саме явище, що і в натурі, але в іншому масштабі. У цій главі буде-мо розглядати особливості саме фізичного моделювання.

**Геометрична, кінематична і динамічна подібності. Закон подібності Ньютона.** Для того щоб модель була фізично (механічно) подібною споруди в натурі, треба дотримуватися геометричної, кінематичної та динамічної подібностей.

*Геометрична подібність* передбачає умову, згідно з якою всі лінійні розміри потоку і споруди в натурі мають належати до відповідних розмірів на моделі у певному масштабі. Тоді відношення довжин, площ і об'ємів

$$l_H / l_M = a = \text{const}; \quad (9.1)$$

$$\omega_H / \omega_M = a^2 = \text{const}; \quad (9.2)$$

$$W_H / W_M = a^3 = \text{const}, \quad (9.3)$$

де  $a$  — лінійний масштаб.

Однієї геометричної подібності недостатньо для встановлення гідравлічної подібності. Так, у натурі може існувати турбулентний режим руху, а на геометрично подібній моделі — ламінарний, тобто явища в натурі будуть якісно і кількісно відрізнятися (наприклад, у відношенні втрат напору) між собою. У відкритих потоках при невідповідності певних умов у натурі і на моделі можуть встановлюватися різні стани потоків (бурхливий та спокійний), що суперечить вимогам гідравлічної подібності.

*Кінематична подібність* буде, якщо при усталеному русі лінії течії у подібних точках природи і моделі займатимуть однакове положення, а відношення швидкостей у цих точках та співвідношення середніх швидкостей у відповідних перерізах буде сталим:

$$V_H / V_M = a_v = \text{const}, \quad (9.4)$$

де  $a_v$  — масштаб швидкостей.

Прискорення є другою похідною шляху  $dS$  за часом  $dt$ , тому масштаб прискорення

$$a_w = \frac{d^2 S_H dt_M^2}{d^2 S_M dt_H^2} = \frac{a}{a_t^2} = \text{const}, \quad (9.5)$$

де  $dS_H$  та  $dS_M$  — шляхи, які пройдуть частинки в натурі і на моделі за відповідні відрізки часу  $dt_H$  і  $dt_M$ ;  $a_t = t_H / t_M$  — масштаб часу.

Оскільки час  $t = \frac{dS}{dV}$ , то

$$a_t = \frac{dS_H dV_M}{dV_H dS_M} = \frac{a}{a_v} = \text{const.} \quad (9.6)$$

*Динамічна подібність* передбачає дотримання таких умов, за яких у будь-якій точці моделі має діяти сила, аналогічна за своєю природою і напрямом силі у відповідній точці природи; така сама умова має дотримуватися і для сил, що діють на елементи конструкції споруд. Відношення сил у природі  $F_H$  та на моделі  $F_M$  для всіх подібних точок потоку називають *масштабом сил*  $a_F$ , який є постійним для всіх точок:

$$a_F = F_H / F_M = \text{const.} \quad (9.7)$$

Якщо гідравлічне явище задовольняє геометричні, кінематичні та динамічні подібності, то можна переходити до встановлення гідравлічної або гідродинамічної подібності. Для цього потрібно встановити зв'язок між зазначеними вище видами подібності, тобто між масштабами  $a$ ,  $a_v$ ,  $a_F$ , які характеризують геометричну, кінематичну і динамічну подібності. Цей зв'язок не є довільним, а підпорядковується певній закономірності. Оскільки сила  $F$  є добутком маси  $m = \rho W$  на прискорення  $w$ , то залежність (9.7) можна записати у вигляді

$$a_F = \frac{\rho_H W_H w_H}{\rho_M W_M w_M} = a_\rho a^3 a_w, \quad (9.8)$$

де  $a_\rho$  — масштаб густини.

З урахуванням формул (9.5) та (9.6) залежність (9.8) набирає вигляду

$$a_F = a_\rho a^2 a_v^2. \quad (9.9)$$

Цей вираз називають *законом подібності Ньютона в масштабних множниках*. При деяких заданих або обраних масштабах із залежності (9.9) можна знайти невідомий масштаб, а потім за наведеними вище залежностями й інші масштаби.

Виражаючи масштабні множники у рівнянні (9.9) як відношення відповідних величин у природі й на моделі, дістанемо

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{\rho_H l_H^2 V_H^2}{\rho_M l_M^2 V_M^2},$$

або

$$\frac{F_H}{\rho_H l_H^2 V_H^2} = \frac{F_M}{\rho_M l_M^2 V_M^2} = \text{Ne.} \quad (9.10)$$

Критерій  $Ne = \frac{F}{\rho l^2 V^2}$  має назву критерію Ньютона. Для будь-яких схожих точок при подібних явищах у натурі та на моделі критерії Ньютона мають бути однаковими, тобто

$$Ne_n = Ne_m. \quad (9.11)$$

Критерії Ньютона можна також подати у вигляді

$$Ne = \frac{Fl}{\rho l^3 V^2} = \frac{Fl}{MV^2}, \quad (9.12)$$

де  $M = \rho l^3$  — маса рідини в об'ємі, що розглядається. У цьому випадку закон подібності Ньютона у фізичних величинах набирає вигляду

$$\frac{F_n l_n}{M_n V_n^2} = \frac{F_m l_m}{M_m V_m^2}. \quad (9.13)$$

## 9.2. Критерії гідравлічної подібності

Умови моделювання гідравлічних явищ для повної подібності потребують дотримання рівняння (9.10) для всіх сил, під дією яких відбувається певне явище (сил тяжіння, тиску, тертя, поверхневого натягу і т. ін.) і сил інерції. Аналіз залежностей величин, які входять у ці рівняння, свідчить, що для всіх сил одночасне виконання цих умов практично неможливе, але можна визначити окремі критерії для випадків, коли деякі з діючих сил мають переважне значення порівняно з іншими. Наприклад, при дослідженні руху рідини в трубопроводах найважливішу роль відіграють сили тертя.

Сила тертя є добутком дотичних напружень  $\tau_0$  і площі зіткнення потоку зі стінками труби:

$$F_{\text{тер}} = \tau_0 l^2. \quad (9.14)$$

Підставивши цей вираз в обидві частини рівняння (9.10), можна записати

$$\frac{\tau_{0n}}{\rho_n V_n^2} = \frac{\tau_{0m}}{\rho_m V_m^2} \quad (9.15)$$

або з урахуванням того, що дотичні напруження на стінці труби згідно з формулою (3.10)  $\tau_0 = \rho \frac{\lambda}{8} V^2$ ,

$$\lambda_n = \lambda_m, \quad (9.16)$$

тобто потоки рідини у трубопроводах будуть гідравлічно подібними, якщо гідравлічні коефіцієнти тертя в натурі і на моделі дорівнюватимуть один одному.

При ламінарному режимі рідини або при турбулентному режимі в області гідравлічно гладких труб гідравлічний коефіцієнт тертя, згідно з формулами (3.25) і (3.57), залежить тільки від числа Рейнольдса. Тому для окремих випадків можна замість рівняння (9.16) записати

$$\text{Re}_H = \text{Re}_M, \quad (9.17)$$

або

$$\frac{V_H l_H}{\nu_H} = \frac{V_M l_M}{\nu_M}, \quad (9.18)$$

де лінійний розмір  $l$  у кожному конкретному випадку може бути діаметром або радіусом труби.

Вираз

$$\frac{Vl}{\nu} = \text{Re} \quad (9.19)$$

називають *числом (критерієм) Рейнольдса*.

Отже, при переважному впливі сил тертя та русі рідини при ламінарному режимі або в області гідравлічно гладких труб при турбулентному режимі потоки будуть подібними, якщо для схожих точок або схожих перерізів природи і моделі числа (критерії) Рейнольдса будуть однаковими.

У разі використання на моделі тієї самої рідини, що і в натурі ( $a_v = 1$ ), згідно з формулою (9.18)

$$V_M = V_H \frac{l_H}{l_M} = V_H a, \quad (9.20)$$

тобто при моделюванні за критерієм Рейнольдса швидкість на моделі має бути у  $a$  разів більше, ніж швидкість в натурі, що не завжди зручно.

Якщо при моделюванні гідравлічних явищ переважають сили тиску, що можна подати як добуток тиску на площу його дії ( $F_p = p\omega$ ), то вираз (9.10) у цьому випадку перетвориться на вираз

$$\frac{P_H \omega_H}{\rho_H l_H^2 V_H^2} = \frac{P_M \omega_M}{\rho_M l_M^2 V_M^2}, \quad (9.21)$$

або з урахуванням формул (9.1) і (9.2)

$$\frac{P_H}{\rho_H V_H^2} = \frac{P_M}{\rho_M V_M^2} = \text{Eu}, \quad (9.22)$$

де  $\text{Eu}$  — *критерій Ейлера*, який має бути однаковим для природи і моделі при переважному значенні сил тиску.

Рух рідини в трубопроводі характеризують не абсолютним тиском, а різницею тисків  $\Delta p$  у розрахункових перерізах. Тому критерій Ейлера  $Eu$  виражають ще й так:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho V^2}. \quad (9.23)$$

Треба зазначити, що при дотриманні критерію Рейнольдса критерій Ейлера виконується автоматично. Дійсно, згідно з формулою (3.9) втрати тиску по довжині

$$\Delta p = \rho g h_l = \rho g \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2g} = \rho \lambda \frac{l}{D} \frac{V^2}{2}. \quad (9.24)$$

Тоді

$$Eu = \lambda \frac{l}{2D}, \quad (9.25)$$

або

$$\lambda_m \frac{l_m}{D_m} = \lambda_n \frac{l_n}{D_n}. \quad (9.26)$$

Оскільки під час моделювання передбачають геометричну подібність, то  $\frac{l_m}{D_m} = \frac{l_n}{D_n}$  і, отже,  $\lambda_n = \lambda_m$ , тобто виникає умова (9.16), яка при ламінарному режимі або русі в області гідравлічно гладких труб при турбулентному режимі відповідає рівності критеріїв Рейнольдса в натурі і на моделі (3.15).

У разі вивчення питань протікання води через водозливи та інші споруди, явища гідравлічного стрибка переважною силою є сила тяжіння ( $F_G = gM$ ). У цьому випадку рівняння (9.13) набуває вигляду

$$\frac{V_n^2}{g_n l_n} = \frac{V_m^2}{g_m l_m} = Fr, \quad (9.27)$$

або

$$Fr_n = Fr_m. \quad (9.28)$$

Вираз (9.27) називають *критерієм Фруда*. Якщо рух відбувається при переважному впливі сили тяжіння, то критерії Фруда в натурі й на моделі мають бути однаковими. Оскільки здебільшого  $g_n = g_m$ , то згідно з рівнянням (9.27) можна записати

$$V_m = V_n \sqrt{l_m / l_n} = V_n / \sqrt{a}. \quad (9.29)$$



Звідси випливає, що масштаб швидкостей при моделюванні за критерієм Фруда

$$a_v = V_H / V_M = \sqrt{a}, \quad (9.30)$$

а масштаб витрат

$$a_Q = a_v a^2 = a^{2,5}. \quad (9.31)$$

Формули (9.30) та (9.31) наочно показують зручність моделювання за критерієм Фруда, при якому в лабораторних умовах на моделях можуть бути значно зменшені порівняно з натурою швидкість потоку й особливо витрати.

Порівнюючи вирази (9.29) і (9.20), бачимо, що вони несумісні, тобто неможливо моделювати явища сумісно за критеріями Рейнольдса і Фруда, якщо на моделі використовують ту саму рідину, що і в натурі. Якщо можна на моделі використовувати іншу рідину, то згідно з формулою (9.18) дістанемо

$$V_M = V_H \frac{l_H}{l_M} \frac{v_M}{v_H} = V_H \frac{a}{a_v}, \quad (9.32)$$

де  $a_v = \frac{v_H}{v_M}$  — масштаб кінематичних в'язкостей.

Порівнюючи вирази (9.29) і (9.32), здобудемо

$$a_v = a^{3/2}, \quad (9.33)$$

або

$$v_M = v_H / a^{3/2}, \quad (9.34)$$

тобто для одночасного виконання критеріїв Рейнольдса і Фруда потрібно, щоб кінематична в'язкість рідини, яку застосовують на моделі, була б меншою, ніж кінематична в'язкість рідини, яка протікає у натурній споруді, у  $a^{3/2}$  разів (де  $a$  — лінійний масштаб моделі).

На практиці цю умову виконати практично неможливо, оскільки якщо в натурних спорудах протікає вода, то важко знайти рідину з кінематичною в'язкістю, яка є значно меншою, ніж в'язкість води. Проте можна діяти навпаки, тобто на зменшених моделях за допомогою води моделювати явища, які пов'язані з рухом рідин із більшою в'язкістю.

Крім розглянутих вище критеріїв Рейнольдса, Ейлера, Фруда, існують також критерії Вебера (при переважному впливі сил поверхневого натягу), Маха (при моделюванні руху стисливої рідини — повітря), Струхалія (при моделюванні неусталеного руху) тощо.

### 9.3. Моделювання напірних трубопроводів, відкритих русел і гідротехнічних споруд

**Основні правила гідравлічного моделювання.** Вибираючи масштаб моделі, потрібно дотримуватися ряду умов, що впливають із загальних законів подібності. Наприклад, якщо потік у природі є турбулентним, то він має бути турбулентним і на моделі. Тому мінімальний розмір моделі вибирають так, щоб забезпечувалося дотримання цієї умови.

Слід дотримуватися також умови, яка полягає в тому, що стан потоку (бурхливий або спокійний) на моделі має бути таким самим, як і в природі. При моделюванні треба прагнути до геометричної подібності шорсткості, але найчастіше це не можна виконати. Тому слід забезпечити подібність опорів на моделі і в природі, щоб виконати умову (9.15).

Під час моделювання деяких явищ виникають серйозні труднощі. Так, неможливо змоделювати аерацію потоку, тобто насичення його повітрям.

Великі труднощі викликає моделювання кавітації. При моделюванні вакууму перенесення здобутих результатів на натурну споруду є можливим тільки за умови, що вакуум у природі не перевищить граничної величини.

Іноді при моделюванні доводиться спотворювати (викривлювати) масштаб моделі. Якщо розміщення моделі в лабораторії ускладнене, можна використати різні горизонтальні та вертикальні масштаби. Різні масштаби застосовують також тоді, коли на моделі неможливо встановити шорсткість, яка буде подібною натурній. У такому випадку подібність гідравлічних опорів можна дістати зміною величини гідравлічного радіуса, тобто змінивши (спотворивши) вертикальний масштаб. Приклади моделювання з порушеним масштабом наведено в спеціальній літературі.

**Моделювання напірних трубопроводів.** Вище було встановлено, що при усталеному русі рідини подібність гідравлічних явищ вимагає постійності критеріїв Рейнольдса, Ейлера і Фруда.

У трубопроводах визначальним є критерій Рейнольдса, оскільки пропускна здатність їх і втрати напору залежать від сил тертя, що виникають при русі рідини. Критерій Ейлера для горизонтального трубопроводу визначають за формулою (9.23), тобто він залежить від гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ , який, у свою чергу, у загальному випадку залежить від числа Рейнольдса, а також відносно шорсткості труби.

Однак гідравлічний коефіцієнт тертя може і не залежати від числа Рейнольдса у широкому діапазоні зміни його значень. Це стосується області гідравлічно шорстких труб, або області

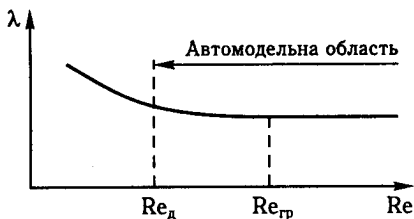


Рис. 9.1

квадратичного опору, і характеризується великими числами Рейнольдса (рис. 9.1).

Відомо, що при великих значеннях  $Re$  вплив їх на величину коефіцієнта місцевих опорів стає незначним [6, 7]. Це означає, що у таких випадках єдиною умовою, яка забезпечує подібність гідравлічних явищ, є подібність умов однозначності, тобто геометрична подібність виступів шорсткості, конфігурації місцевих опорів і тіл, що обтікаються. Звідси випливає, що при великих значеннях чисел Рейнольдса зміна цього числа не впливає на характер явища. Такі явища, а також області зміни чисел Рейнольдса називаються *автомодельними*. У межах автомодельної області при зменшенні розмірів моделі порівняно з розмірами природи явище якісно не змінюється, незважаючи на зменшення чисел Рейнольдса. Треба зазначити, що умова автомодельності при геометричній подібності шорсткості і місцевих опорів еквівалентна дотриманню критерію Ейлера. У цьому випадку число Ейлера не залежить від числа Рейнольдса, а умовою подібності є рівність  $\lambda_n = \lambda_m$  (9.16). Проте останню вимогу не завжди легко виконати, оскільки важко забезпечити повну геометричну подібність виступів шорсткості у трубах різного діаметра при різній технології виготовлення їх. У цьому разі критерій Ейлера є більш строгим, ніж критерій рівності гідравлічних коефіцієнтів тертя.

З цього випливає, що якщо в природі потік перебуває в автомодельній області, то на моделі число Рейнольдса має перевищувати величину, яка відповідає нижній границі зони квадратичного опору  $Re_{гр}$ .

Для труб із рівнозернистою шорсткістю граничне число Рейнольдса  $Re_{гр}$  можна також визначити за даними І. Нікурадзе:

$$Re_{гр} = \frac{84D_m}{\Delta_m \sqrt{\lambda_m}}, \quad (9.35)$$

де  $D_m$  — діаметр труби;  $\Delta_m$  — висота виступів шорсткості;  $\lambda_m$  — гідравлічний коефіцієнт тертя на моделі.

У квадратичній області опору гідравлічний коефіцієнт тертя не залежить від числа Рейнольдса. У значній частині перехідної області опору зміна  $\lambda$  здебільшого неістотна. Згідно з дослідженнями О. П. Зегзда таке положення має місце при числах Рейнольдса, що дорівнюють або є більшими, ніж допустиме. Такі числа визначають за формулою

$$Re_d = \frac{14D_M}{\Delta_M \sqrt{\lambda_M}}. \quad (9.36)$$

При числах Рейнольдса  $Re \geq Re_d$  (вважається, що  $\lambda_M \approx \lambda_H$ ) не виникає істотних похибок при моделюванні.

Відношення допустимих чисел Рейнольдса на моделі  $Re_d$  і в натурі

$$\frac{Re_d}{Re_H} = \frac{V_M D_M v_H}{V_H D_H v_M} = \frac{a_v}{a}. \quad (9.37)$$

★ **Приклад.** Гас із кінематичною в'язкістю  $\nu_H = 0,027 \text{ см}^2/\text{с}$  протікає в трубопроводі діаметром  $D_H = 150 \text{ мм}$  і витратою  $Q_H = 30 \text{ л/с}$ . Визначити граничну витрату  $Q_M$  води ( $\nu_M = 0,01 \text{ см}^2/\text{с}$ ) на моделі трубопроводу діаметром  $D_M = 32 \text{ мм}$  з еквівалентною шорсткістю  $\Delta_{\text{екв}} = 0,1 \text{ мм}$  в умовах гідродинамічної подібності.

Визначаємо характеристики натурального трубопроводу:  
швидкість

$$V_H = \frac{4 \cdot Q_H}{\pi D_H^2} = \frac{4 \cdot 0,03}{3,14 \cdot 0,15^2} = 1,7 \text{ м/с};$$

число Рейнольдса

$$Re_H = \frac{V_H D_H}{\nu_H} = \frac{1,7 \cdot 0,15}{0,027 \cdot 10^{-4}} = 94\,361;$$

гідравлічний коефіцієнт тертя на моделі в автомобільній області

$$\lambda_M = 0,11 \left( \frac{\Delta_{\text{екв } M}}{D_M} \right)^{0,25} = 0,11 \left( \frac{0,1}{32} \right)^{0,25} = 0,026.$$

Допустиме число Рейнольдса

$$Re_d = \frac{14 \cdot D_M}{\Delta_M \sqrt{\lambda_M}} = \frac{14 \cdot 32}{0,1 \cdot \sqrt{0,026}} = 27\,826.$$

Масштаб в'язкості

$$a_v = \frac{\nu_H}{\nu_M} = \frac{0,027}{0,01} = 2,7.$$

Лінійний масштаб

$$a = \frac{D_H}{D_M} = \frac{150}{32} = 4,69.$$

Із формули (9.37) визначаємо масштаб швидкостей

$$a_v = \frac{a_v \cdot \text{Re}_H}{a \cdot \text{Re}_d} = \frac{2,7 \cdot 94\,361}{4,69 \cdot 27\,826} = 1,95.$$

Швидкість на моделі

$$V_M = \frac{V_H}{a_v} = \frac{1,7}{1,95} = 0,87 \text{ м/с.}$$

Витрата води на моделі

$$Q_M = V_M \cdot \omega_M = 0,87 \frac{3,14 \cdot 0,032^2}{0,4} = 0,0007 \text{ м}^3/\text{с} = 0,7 \text{ л/с.}$$

У разі використання на моделі тієї самої рідини, що й в натурі ( $a_v = 1$ ), граничне зменшення лінійних розмірів моделі при моделюванні за критерієм Рейнольдса

$$a = \frac{1}{a_v} \frac{\text{Re}_H}{\text{Re}_d}. \quad (9.38)$$

Звідси масштаб швидкостей

$$a_v = \frac{1}{a} \frac{\text{Re}_H}{\text{Re}_d}. \quad (9.39)$$

З урахуванням того, що  $Q = V\omega$ , масштаб витрати

$$a_Q = a_v a^2 = a \frac{\text{Re}_H}{\text{Re}_d}. \quad (9.40)$$

Під час моделювання треба також мати на увазі, що турбулентний потік навіть при одних і тих самих значеннях критеріїв подібності ( $\text{Re}$ ,  $\text{Fr}$ ) може бути неоднозначним і залежно від умов входу в трубу або протікання через місцеві опори може мати різні характеристики турбулентності і, отже, різний опір руху. Проте досліді свідчать, що турбулентна течія має властивість стабілізації. На деякій відстані від входу або іншого місцевого опору характеристики турбулентності стають такими самими, які властиві для певної форми перерізу русла і його шорсткості. Довжину ділянки стабілізації можна визначити за формулою Гіжі

$$l_{\text{ст}} = 19D \left(1 - e^{-0,6\xi}\right) + \frac{0,45D}{\lambda}, \quad (9.41)$$

що визначає мінімальну відстань, при якій не відбувається взаємного впливу місцевих опорів ( $e$  — основа натурального логарифма).

У практиці є трубопроводи, що працюють як гідравлічно гладкі труби, наприклад поліетиленові, скляні, дерев'яні, іноді сталеві і т. ін. Як відомо, у цьому випадку  $\lambda = f(Re)$ , і подібність можна досягнути при рівності чисел Рейнольдса в натурі і на моделі. При застосуванні на моделі тієї самої рідини, що і в натурі ( $a_v = 1$  і  $a_p = 1$ ), зв'язок між масштабами різних величин з урахуванням залежностей (9.20) і (9.23) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} a_v &= 1/a; \\ a_{\Delta p} &= a_v^2 = 1/a^2; \\ a_Q &= a_v a^2 = a. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Ці вимоги при різних розмірах моделей виконати досить важко, тому в практиці моделювання набуває поширення метод, що враховує масштабний ефект сил в'язкості. Сутність його полягає в дослідженні розглядуваного явища в кількох масштабах при достатньо широкому діапазоні зміни чисел Рейнольдса. Це дає змогу побудувати емпіричні залежності між характеристиками, що досліджуються, і числами Рейнольдса, наприклад  $\lambda = f(Re)$  або  $\xi = f(Re)$ . Ці залежності дають змогу внести відповідні корективи у дані модельних досліджень. Треба мати на увазі, що питання про вплив числа Рейнольдса на різні характеристики руху рідини є досить висвітленими у літературі, що дає змогу часто визначати масштабний ефект в'язкості і без додаткових різномасштабних досліджень.

**Моделювання відкритих русел.** У відкритому руслі рідина рухається під дією сил тяжіння і тертя. При рівномірному русі складова сили тяжіння урівноважується силами тертя. Під час моделювання природних і штучних русел у більшості випадків доводиться мати справу з нерівномірним рухом. Критеріями, що визначають явища при цьому, є критерії Фруда і Рейнольдса. За формулою (9.30) масштаб швидкостей  $a_v = \sqrt{a}$ .

Якщо в натурі потік перебуває в автономельній області, то для виконання критерію Рейнольдса потрібно, щоб на моделі число  $Re_m$  перевищувало його допустиме значення, при якому не буде істотної похибки в моделюванні. По аналогії з формулою (9.36)

$$Re_{R_d} = \frac{14R_m}{\Delta_m \sqrt{\lambda_m}}, \quad (9.43)$$

де  $Re_R = \frac{V \cdot R}{\nu}$  — число Рейнольдса, яке підраховане за гідравлічним радіусом.

Відношення допустимого на моделі і в натурі чисел Рейнольдса для однакової рідини ( $a_v = 1$ ) з урахуванням залежності (9.29)

$$\frac{\text{Re}_{R_d}}{\text{Re}_{R_H}} = \frac{V_M R_M v_H}{V_H R_H v_M} = \frac{1}{a_v a} = \frac{1}{a^{3/2}}. \quad (9.44)$$

Звідси максимальний лінійний масштаб

$$a = \left( \frac{\text{Re}_{R_H}}{\text{Re}_{R_d}} \right)^{2/3} = \left( \frac{V_H R_H \Delta_M \sqrt{\lambda_M}}{v 14 R_M} \right)^{2/3} = a^{2/3} \left( \frac{V_H \Delta_M \sqrt{\lambda_M}}{14 v} \right)^{2/3},$$

або

$$a = \left( \frac{V_H \Delta_M \sqrt{\lambda_M}}{14 v} \right)^2. \quad (9.45)$$

► **Приклад.** Визначити максимальне зменшення розмірів потоку, швидкість і витрату на бетонній моделі каналу прямокутного перерізу з шириною  $b_H = 10$  м, глибиною  $h_{0_H} = 1$  м і витратою  $Q_H = 5$  м<sup>3</sup>/с.

Визначаємо характеристики потоку в натурних умовах:

площа живого перерізу  $\omega_H = b_H \cdot h_{0_H} = 10 \cdot 1 = 10$  м<sup>2</sup>;

змочений периметр  $\chi_H = b_H + 2h_{0_H} = 10 + 2 \cdot 1 = 12$  м;

гідрравлічний радіус  $R_H = \frac{\omega_H}{\chi_H} = \frac{10}{12} = 0,83$  м;

середня швидкість у перерізі  $V_H = \frac{Q_H}{\omega_H} = \frac{5}{10} = 0,5$  м/с.

Беремо попередньо для бетону еквівалентну шорсткість  $\Delta_{\text{екв } M} = 0,6$  мм, коефіцієнт шорсткості  $n = 0,014$ . Гідрравлічний коефіцієнт тертя  $\lambda_M = 0,03$ .

За формулою (9.45) визначаємо лінійний масштаб моделювання (при кінематичній в'язкості води  $\nu = 0,01$  см<sup>2</sup>/с)

$$a = \left( \frac{V_H \cdot \Delta_M \sqrt{\lambda_M}}{14 \nu} \right)^2 = \left( \frac{0,5 \cdot 0,0006 \cdot \sqrt{0,03}}{14 \cdot 0,01 \cdot 10^{-4}} \right)^2 = 13,77.$$

Тоді гідрравлічний радіус на моделі

$$R_M = \frac{R_H}{13,77} = \frac{0,83}{13,77} = 0,06 \text{ м.}$$

Швидкісна характеристика за формулою (3.71)

$$W_M = \frac{1}{n} R_M^{2/3} = \frac{1}{0,014} \cdot 0,06^{2/3} = 10,93 \text{ м/с.}$$

Гідрравлічний коефіцієнт тертя з виразу  $C_M = \sqrt{\frac{8g}{\lambda_M}}$  (див. с. 114), враховуючи, що  $W_M = C_M \sqrt{R_M}$  (див. с. 114),

$$\lambda_M = \frac{8g}{C_M^2} = \frac{8g \cdot R_M}{W_M^2} = \frac{8 \cdot 9,81 \cdot 0,06}{10,93^2} = 0,039.$$

Виявляється, що здобує значення  $\lambda_M$  більше, ніж передбачалося попередньо. Тому нове значення  $\lambda_M$  підставляємо знову у формулу (9.45), дістаємо нове значення  $a$ ,  $R_M$ ,  $W_M$  і знову  $\lambda_M$ . Розрахунки припиняємо, коли два послідовних значення  $\lambda_M$  відрізняються одне від одного менше ніж на 5%. Після цих підстановок у нашому прикладі остаточно отримуємо  $\lambda_M = 0,044$ , лінійний масштаб  $a = 20$ . Тоді

$$b_M = \frac{b_H}{a} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ м}; \quad h_{0M} = \frac{h_{0H}}{a} = \frac{1}{20} = 0,05 \text{ м.}$$

Швидкість на моделі, враховуючи формулу (9.30),

$$V_M = \frac{V_H}{a_v} = \frac{V_H}{\sqrt{a}} = \frac{0,5}{\sqrt{20}} = 0,11 \text{ м/с.}$$

Витрата на моделі

$$Q_M = V_M \cdot \omega_M = V_M \cdot b_M \cdot h_{0M} = 0,11 \cdot 0,5 \cdot 0,05 = 0,00275 \text{ м}^3/\text{с} = 2,75 \text{ л/с.}$$

При дуже малій шорсткості русла у натурних умовах звичайно на моделі не вдається виконати умову (9.16) рівності гідравлічних коефіцієнтів тертя в натурі і на моделі. У цьому випадку застосовують перекручування вертикального і горизонтального масштабів моделі й допускають збільшення гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda_M > \lambda_H$ . Випускаючи тут докладні викладки, покажемо, що масштаб витрати в цьому випадку

$$a_Q = a_l a_h a_v = a_l a_h^{3/2}, \quad (9.46)$$

де  $a_l$  — масштаб довжин;  $a_h = a_v^2$  — масштаб глибин.

Масштаб похилів дна

$$a_i = a_h / a_l. \quad (9.47)$$

При широких руслах масштаб гідравлічних коефіцієнтів тертя

$$a_\lambda = a_h / a_l. \quad (9.48)$$

О. О. Сабанєєв встановив, що можна допускати таке перекручування вертикального і горизонтального масштабів моделі, яке приводить до співвідношення між шириною і глибиною потоку на моделі не менше ніж 6. При більшому перекручуванні вертикальних і горизонтальних масштабів моделей застосовують моделювання відкритих потоків на повітряно-напірних моделях, де вільна поверхня замінюється жорсткою горизонтальною поверхнею. Докладніше цей спосіб розглянуто у спеціальній літературі [10].

**Моделювання гідротехнічних споруд.** Під час проектування гідротехнічних споруд велику увагу слід приділити експериментальному дослідженню коефіцієнтів швидкості, витрати, боко-



вого і вертикального стиснення потоків (струменів), умов спряження б'єфів, роботи гасителів енергії, а також вивченню характеристик турбулентності в зоні гідравлічного стрибка і на післястрибковій ділянці.

Явища, що пов'язані із вказаними факторами, відбуваються на порівняно короткій ділянці потоку, на якій роль сил тертя невелика і переважний вплив має сила тяжіння. Тому визначальним критерієм подібності є критерій Фруда. Проте у деяких випадках руху води через гідроспоруди потрібно враховувати також вплив сил тертя, наприклад при русі по швидкотокку, по водозливній поверхні великої висоти греблі і т. ін.

У разі моделювання при переважному значенні сили тяжіння масштаб швидкості беруть відповідно до формули (9.30), а швидкість в натурі

$$V_H = a_v V_M = V_M \sqrt{a}. \quad (9.49)$$

Витрата потоку в натурі

$$Q_H = V_H \omega_H = V_M \sqrt{a} \omega_M a^2 = Q_M a^{2,5}. \quad (9.50)$$

Під час моделювання гідравлічних явищ у гідротехнічних спорудах важливо встановити допустиме значення числа Рейнольдса  $Re_d$ , при перевищенні якого для забезпечення подібності явищ достатньо виконати геометричну подібність. Для водозливів число Рейнольдса можна підрахувати за напором перед водозливом:

$$Re_H = \frac{VH}{\nu} = \frac{q}{\nu}, \quad (9.51)$$

де  $q$  — питома витрата на одиницю ширини водозливу,

$$q = \frac{Q}{b} \cdot \frac{H}{H} = VH.$$

Досліди свідчать, що коефіцієнти витрати водозливів залежно від їхніх типів стають незалежними від числа Рейнольдса при його значеннях  $Re_d > 5000 \dots 10\,000$ . У цьому випадку зазначені числа Рейнольдса відповідають автономній області.

Максимальне зменшення розмірів моделі можна визначити за допомогою відношення числа Рейнольдса в натурі до допустимого числа на моделі.

При  $v_M = v_H$

$$\frac{Re_H}{Re_d} = \frac{V_H H_M v_M}{V_M H_M v_H} = a_v a = a^{3/2}. \quad (9.52)$$

Звідси з урахуванням формули (9.51)

$$a = \left( \frac{Re_n}{Re_d} \right)^{2/3} = \left( \frac{q_n}{v_n (5 \dots 10) 10^3} \right)^{2/3} \quad (9.53)$$

Результати розрахунків за формулою (9.53) показують, що при питомих витратах  $q = 3 \dots 40 \text{ м}^2/\text{с}$  і при допустимих на моделі числах Рейнольдса  $Re_d = 5000 \dots 10\,000$  максимальні лінійні масштаби моделювання перебувають у межах  $a = 45 \dots 450$ .

✱ **Приклад.** Водоскидна споруда у вигляді водозливу практичного профілю (див. рис. 5.29, з) з отвором  $b_n = 20 \text{ м}$  розрахована на витрату  $Q_n = 100 \text{ м}^3/\text{с}$  і призначена для перевірки на моделі, що зменшена у 70 разів порівняно з натурою. Встановити можливість такого масштабу моделювання і визначити необхідну витрату на моделі.

Беручи кінематичну в'язкість  $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ , за формулою (9.53) визначимо лінійний масштаб моделювання

$$a = \left( \frac{Q}{b_n \cdot v_n \cdot Re_d} \right)^{2/3} = \left( \frac{100}{20 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4} \right)^{2/3} = 63.$$

Отже, моделювати водоскид із зменшенням у 70 разів неприпустимо. Беремо лінійний масштаб моделі  $a = 63$ . Витрата на моделі відповідно до формули (9.50)

$$Q_m = \frac{Q_n}{a^{2,5}} = \frac{100}{63^{2,5}} = 0,0032 \text{ м}^3/\text{с} = 3,2 \text{ л/с}.$$

Отвір водозливу на моделі

$$b_m = \frac{b_n}{a} = \frac{20}{63} = 0,317 \text{ м} = 31,7 \text{ см}.$$

Під час моделювання гідротехнічних споруд треба уникати перекручування впливу сил тертя на моделі порівняно з впливом сил тертя в натурі.

Як уже зазначалося, це особливо може виявлятися у разі дослідження високих гребель або довгих швидкотоків і водоспусків. Дослідження свідчать, що при лінійному масштабі  $a \leq 60$  модель водозливу можна виконати з гладкою цегляною штукатуркою, а при  $a > 60$  треба переходити до більш гладких поверхонь (оргскло, лакування тощо).

При моделюванні слід також ураховувати згасання підвищеної турбулентності після водозливу на післястрибковій ділянці, інакше модель може дати більш швидкий розвиток процесів згасання, ніж у натурі.

#### 9.4. Принципи застосування методу аналізу розмірностей до дослідження законів гідравліки

**Пі-теорема.** У деяких випадках не вдається отримати теоретичні залежності, що характеризують ті чи інші гідравлічні явища. Однак фізичні фактори, які характеризують розглядувані явища, можна вважати відомими на основі дослідів і логічних міркувань. Метод аналізу розмірностей дає змогу встановити структуру формули, яка зв'язує вказані фактори, що потрібно для оброблення дослідних даних і наступних узагальнень.

Метод аналізу розмірностей заснований на відомій Пі-теоремі, яку формулюють так: рівняння, яке зв'язує між собою  $n$  розмірних фізичних величин, що характеризують розглядуване явище, серед яких  $k$  мають незалежну розмірність, може бути перетворено у  $n-k$  безрозмірних комплексів, що складені з вказаних фізичних величин.

Фізичне рівняння, тобто залежність між величинами  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , можна записати у вигляді

$$f(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0. \quad (9.54)$$

Відповідно до Пі-теорема це рівняння можна замінити таким:

$$\Phi(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k}) = 0, \quad (9.55)$$

де кожне число  $\Pi$  являє собою безрозмірний добуток кількох  $A$ . При цьому число членів у фізичному рівнянні (9.54) скоротилося до  $n-k$  у рівнянні (9.55).

У задачах гідравліки (технічної механіки рідини) є звичайно три фізичні величини, які мають незалежні розмірності: маса  $[M]$ , час  $[T]$  і довжина  $[L]$ , тобто потрібно брати у цих задачах  $k = 3$ .

Пі-теорема встановлює зв'язок між теорією подібності і теорією розмірностей. Група явищ однакової фізичної природи, які мають однакові безрозмірні числа  $\Pi$ , належить до подібних явищ, оскільки всі ці явища відповідають рівнянню (9.54) і, отже, рівнянню (9.55).

Як приклади розглянемо застосування Пі-теорема у разі встановлення структур формул для критичного числа Рейнольдса  $Re_k$ , дотичних напружень на стінках труби  $\tau_0$  і гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ , витрати через водозлив, опорів при відносному русі рідини і тіла.

**Критичне число Рейнольдса.** З гідромеханіки відомо, що межу між ламінарним і турбулентним режимами руху рідини харак-

теризує критичне число Рейнольдса  $Re_{\kappa}$ . Дослідження свідчать, що ця межа залежить переважно від чотирьох фізичних величин: діаметра труби  $D$ , динамічної в'язкості рідини  $\mu$ , її густини  $\rho$  і критичної швидкості  $V_{\kappa}$  у перерізі труби. Ці фізичні величини мають такі розмірності:

$$[D] = [L]; [\mu] = [ML^{-1}T^{-1}]; [\rho] = [ML^{-3}]; [V_{\kappa}] = [LT^{-1}]. \quad (9.56)$$

Отже, у цьому випадку тільки одна фізична величина — діаметр трубопроводу — характеризується незалежною розмірністю довжини  $[L]$ , а інші фізичні величини  $\mu$ ,  $\rho$  і  $V$  характеризуються похідними розмірностями, що включають у себе три незалежні розмірності  $[M]$ ,  $[T]$ ,  $[L]$ , тобто  $k = 3$ . Отже, число безрозмірних комплексів  $n - k = 4 - 3 = 1$ .

Розглядувану залежність можна виразити в узагальненому вигляді

$$\Pi = D^x \mu^y \rho^z V_{\kappa}^j, \quad (9.57)$$

де  $x, y, z, j$  — невідомі показники степеня.

Виразимо фізичні величини у рівнянні (9.57) через розмірності їх, а оскільки величина  $\Pi$  є безрозмірною, то виразимо її через незалежні розмірності у нульовому степені:

$$M^0 T^0 L^0 = L^x M^y L^{-y} T^{-y} M^z L^{-3z} L^j T^{-j}. \quad (9.58)$$

Прирівнюємо показники степеня у лівій і правій частинах біля однакових основ:

$$\left. \begin{aligned} x - y - 3z + j &= 0; \\ y + z &= 0; \\ -y - j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.59)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь і виражаючи через  $j$  всі інші невідомі, дістанемо, що  $y = -j$ ,  $z = j$ ,  $x = j$ . Тоді безрозмірний комплекс набирає вигляду

$$\Pi = \left( \frac{V_{\kappa} \rho D}{\mu} \right)^j, \quad (9.60)$$

де невідомий показник степеня  $j$  може бути будь-яким числом, що відрізняється від нуля ( $j \neq 0$ ), оскільки безрозмірне число у будь-якому степені є безрозмірним числом. Якщо  $j = 1$ , дістанемо відомий вираз для критичного числа Рейнольдса:

$$\Pi = \frac{V_{\kappa} \rho D}{\mu} = \frac{V_{\kappa} D}{\nu} = Re_{\kappa}. \quad (9.61)$$

Дотичні напруження на стінках труби і гідравлічний коефіцієнт тертя. Рівняння (9.55) часто записують у іншому вигляді, а саме, одну з фізичних величин (звичайну шукану) переносять у ліву частину, а безрозмірний комплекс  $\Pi$  — у праву як коефіцієнт пропорційності. Проте в такому випадку слід дотримуватися правила: розмірності фізичних величин у лівій і правій частинах рівняння, які виражені через розмірності незалежних величин маси  $[M]$ , часу  $[T]$  і довжини  $[L]$ , мають відповідати одна одній.

Наприклад, розглянемо залежність для дотичних напружень на стінках труби і пов'язані з нею залежності для гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ .

Вважатимемо, що дотичні напруження на стінках труби  $\tau_0$  залежать від діаметра труби  $D$ , середньої швидкості  $V$  у живому перерізі, густини рідини  $\rho$  і її динамічної в'язкості  $\mu$ . Тобто і в цьому випадку  $n = 4$ , а  $k = 3$ , і ми повинні здобути один ( $n - k = 4 - 3 = 1$ ) безрозмірний комплекс  $\Pi$ . З урахуванням викладеного

$$\tau_0 = \Pi D^x V^y \rho^z \mu^j. \quad (9.62)$$

Розмірність  $\tau_0 = [FL^{-2}] = [MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$ , а розмірності інших величин у формулі (9.62) визначають за залежністю (9.56). Для безрозмірного комплексу  $\Pi$  як коефіцієнта пропорційності розмірності величин, що входять до нього, не пропоставлятимемо. Тоді

$$ML^{-1}T^{-2} = \Pi [L^x L^y T^{-y} M^z L^{-3z} M^j L^{-j} T^{-j}]. \quad (9.63)$$

Прирівнюючи показники степенів біля однакових основ, дістанемо

$$\left. \begin{aligned} 1 &= z + j; \\ -1 &= x + y - 3z - j; \\ -2 &= -y - j. \end{aligned} \right\} \quad (9.64)$$

Звідси  $j = 2 - y$ ;  $z = y - 1$ ;  $x = y - 2$ , і рівняння (9.62) можна записати у вигляді

$$\tau_0 = \Pi D^{y-2} V^y \rho^{y-1} \mu^{2-y}. \quad (9.65)$$

Помножимо і поділимо праву частину цього рівняння на  $V^{2-y} \rho$ , здобудемо

$$\tau_0 = \Pi \frac{\rho V^2 \mu^{2-y}}{V^{2-y} D^{2-y} \rho^{2-y}}, \quad (9.66)$$

або з урахуванням того, що  $\mu = \rho \nu$ , а  $\frac{VD}{\nu} = \text{Re}$ ,

$$\tau_0 = \Pi \frac{\rho V^2}{\text{Re}^{2-y}}. \quad (9.67)$$

З гідромеханіки відомо, що дотичні напруження на стінках труби  $\tau_0$  можна подати так:

$$\tau_0 = \rho \frac{\lambda}{8} V^2. \quad (9.68)$$

Тоді, беручи до уваги формулу (9.67), дістанемо

$$\lambda = \frac{8\Pi}{\text{Re}^{2-y}}. \quad (9.69)$$

Залежність (9.69) є узагальненим виразом для гідравлічного коефіцієнта тертя  $\lambda$ . Відомо, що при ламінарному режимі руху дотичні пропорційні швидкості в першому степені (тобто  $y = 1$ ); вважаючи, що коефіцієнт пропорційності  $\Pi = 8$ , дістанемо відому формулу

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (9.70)$$

При турбулентному режимі руху в області гладких труб показник степеня  $y = 1,75$ , коефіцієнт пропорційності  $\Pi = 0,03955$  і формула (9.69) перетворюється у відому формулу Блазіуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{1/4}}. \quad (9.71)$$

В області шорстких труб (тобто області квадратичного опору)  $y = 2$  і формула (9.69) характеризує незалежність  $\lambda$  від числа Рейнольдса. В цьому випадку  $\lambda = 8\Pi$ . У гідравліці для квадратичної області опору використовують емпіричну формулу Шифрінсона

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25}. \quad (9.72)$$

Звідси коефіцієнт пропорційності

$$\Pi = \frac{0,11}{8} \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25} = 0,0138 \left( \frac{\Delta_{\text{екв}}}{D} \right)^{0,25}. \quad (9.73)$$

Це означає, що в цьому випадку число  $\Pi$  характеризує відносну шорсткість  $\frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}$ .

У перехідній області опору  $y$  звичайно буває в межах  $y = 1,75 \dots 2$ , що приводить до залежності  $\lambda$  як від числа Рейнольдса  $Re$  (або швидкості  $V$ ), так і відносної шорсткості  $\frac{\Delta_{\text{екв}}}{D}$  за формулами Альтшуля, Шевелєва тощо [6, 7].

Відповідно і втрати напору в різних областях опору будуть залежати від швидкості в різних степенях (1 — при ламінарному режимі; 1,75 — при турбулентному режимі в області гідравлічно гладких труб; 1,75...2 — при перехідній області опору; 2 — в області гідравлічно шорстких труб).

**Пропускна здатність водозливу.** Витрата через водозлив залежить від напору  $H$  і форми водозливу. Течія через водозлив залежить від сили тяжіння, тобто в рівняння (9.54) треба ввести прискорення вільного падіння  $g$ . Відносна витрата на одиницю ширини водозливного отвору  $b$ ,  $m^2/c$ ,

$$q = \frac{Q}{b}.$$

Тоді

$$q = f(H, g, \Pi), \quad (9.74)$$

де  $\Pi$  — безрозмірний параметр, що залежить від форми водозливу.

Звідси

$$q = H^x g^y \Pi, \quad (9.75)$$

або

$$L^2 T^{-1} = L^x L^y T^{-2y} \Pi. \quad (9.76)$$

Прирівняємо показники степеня в обох частинах рівняння біля однакових основ:

$$2 = x + y;$$

$$-1 = -2y.$$

Звідси  $y = 0,5$ ,  $x = 1,5$ .

Тоді

$$q = \Pi \cdot g^{0,5} \cdot H^{1,5}, \quad (9.77)$$

або

$$q = m\sqrt{2g}H^{1,5}, \quad (9.78)$$

де  $m = \Pi/\sqrt{2}$ , тобто здобули звичайну формулу пропускної здатності водозливу.

**Сила тиску і коефіцієнт опору при відносному русі рідини і тіла.** Така сила залежить від густини  $\rho$ , динамічної в'язкості рідини  $\mu$ , швидкості  $V$ , площі міделіва перерізу  $\omega$ , тобто

$$F = \rho^x \mu^y \omega^z V^j \Pi, \quad (9.79)$$

де  $\Pi$  — безрозмірний комплекс.

Записуємо рівняння (9.79) за допомогою невідомих степенів при незалежних фізичних величинах, маючи на увазі, що  $F = mw$  ( $w$  — прискорення),  $\omega = L^2$ :

$$M \cdot LT^{-2} = M^x L^{-3x} M^y L^{-y} T^{-y} L^{2z} V^j \Pi. \quad (9.80)$$

Прирівнюючи показники степенів при однакових фізичних величинах в обох частинах рівняння (9.80), дістанемо  $x = 1 - y$ ;  $j = 2 - y$ ;  $z = 1 - \frac{y}{2}$ .

Тоді

$$F = \rho^{1-y} \mu^y L^{2-y} V^{2-y} \Pi. \quad (9.81)$$

Чисельник і знаменник правої частини помножимо на  $\rho^y V^y L^y$ .

Звідси

$$F = \frac{\mu^y}{\rho^y V^y L^y} L^2 V^2 \rho \Pi. \quad (9.82)$$

Оскільки

$$\mu/\rho = \nu \text{ і } \frac{VL}{\nu} = Re,$$

то

$$F = \frac{\Pi}{Re^y} \rho \omega V^2. \quad (9.83)$$

Порівняння з формулою (3.88) показує, що коефіцієнт опору тиску

$$C_{\text{тис}} = \frac{2\Pi}{Re^y}. \quad (9.84)$$



Як свідчать дослідження,  $y$  змінюється в межах  $y = 1 \dots 0$ . При  $y = 1$  з формули (3.89) випливає, що  $2\Pi = 24$ , а  $\Pi = 12$ . Це має місце лише при  $Re \leq 1$ .

При  $y = 0$   $C_d = 2\Pi$  залежить від форми і шорсткості поверхні тіла (табл. 3.5 і формула (3.87)). При  $y = 1 \dots 0$  на коефіцієнт опору впливають форма тіла, шорсткість поверхні й число Рейнольдса  $Re$ .

Теорія розмірностей і Пі-теорема дають можливість аналізу різноманітних гідравлічних і аеродинамічних закономірностей. За допомогою Пі-теорема можна зручно замінити рівняння з  $n$  розмірних величин у  $n-k$  безрозмірних комплексів, а також можна визначити загальний вигляд залежності між різними фізичними величинами. Це можуть бути різні гідравлічні опори, особливості течії у різних спорудах, підйомної сили в літальних апаратах, поширення різких змін тиску в рідині і повітрі тощо.

## Список рекомендованої літератури

---

1. *Альтшуль А. Д., Животовский Л. С., Иванов Л. П.* Гидравлика и аэродинамика. — М.: Стройиздат, 1987.
2. *Большаков В. А., Попов В. Н.* Гидравлика: Общий курс. — К.: Вища шк., 1989.
3. *Грабовський О. М., Цабієв О. М.* Гідравліка і нагнітачі. — К.: НМК ВО, 1992.
4. *Емцев Б. Т.* Техническая гидромеханика. — 2-е изд. — М.: Высш. шк., 1987.
5. *Константинов Н. М., Петров Н. А., Высоцкий Л. И.* Гидравлика, гидрология и гидрометрия: В 2 ч. — М.: Высш. шк., 1987. — Ч. 1—2.
6. *Константинов Ю. М.* Гидравлика. — 2-е изд. — К.: Вища шк., 1988.
7. *Константинов Ю. М., Гіжа О. О.* Інженерна гідравліка. — К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1995.
8. *Левіцький Б. Ф., Лецій Н. П.* Гідравліка. Загальний курс. — Л.: Світ, 1994.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — 6-е изд. — М.: Наука, 1987.
10. *Лятхер В. М., Прудовский А. М.* Гидравлическое моделирование. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
11. *Мандрус В. І., Лецій Н. П., Звягін В. М.* Машинобудівна гідравліка. — Л.: Світ, 1995.
12. *Науменко І. І.* Технічна механіка рідини і газу. — Рівне: Вид-во Рівнен. держ. ун-ту, 2000.
13. *Сборник задач по гидравлике / В. А. Большаков, Ю. М. Константинов, В. Н. Попов и др.* — 4-е изд. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1979.
14. *Справочник по гидравлике / В. А. Большаков, Ю. М. Константинов, В. Н. Попов и др.* — 2-е изд. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984.
15. *Смислов В. В.* Гідравліка і аеродинаміка. — К.: Вища шк., 1971.
16. *Чугаев Р. Р.* Гидравлика. — 4-е изд. — М.: Энергоиздат, 1982.
17. *Штерелихт Д. В.* Гидравлика : В 4 кн. — 2-е изд. — М.: Энергоатомиздат, 1991. — Кн. 1—4.
18. *Яхно О. М., Желяк В. І.* Гідравліка неньютонівських рідин. — К.: Вища шк., 1995.

Передмова .....	3
Вступ .....	4
В.1. Історія розвитку .....	4
В.2. Основні фізичні властивості рідини .....	6
<b>1. ГІДРОСТАТИКА .....</b>	<b>11</b>
1.1. Гідростатичний тиск і його властивості .....	11
1.2. Диференціальні рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера) .....	13
1.3. Рівновага рідини під дією сили тяжіння. Основне рівняння гідростатики .....	15
1.4. Відносна рівновага рідини .....	23
1.5. Сила тиску рідини на плоскі поверхні .....	26
1.6. Сила тиску рідини на криволінійні поверхні .....	30
1.7. Плавання тіл. Закон Архімеда .....	36
<b>2. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ І ДИНАМІКИ РІДИНИ .....</b>	<b>41</b>
2.1. Основні поняття .....	41
2.2. Рух нескінченно малої частинки рідини (теорема Коші—Гельмгольца) .....	45
2.3. Рівняння нерозривності рідини .....	48
2.4. Диференціальні рівняння руху рідини (рівняння Ейлера) та інтегрування їх .....	51
2.5. Плоский потенціальний рух рідини .....	57
2.6. Рівняння Бернуллі для елементарної струминки нев'язкої рідини .....	65
2.7. Диференціальні рівняння руху в'язкої рідини (рівняння Нав'є—Стокса) та інтегрування їх .....	67
2.8. Плавномісний рух .....	69
2.9. Рівняння Бернуллі для потоку і його енергетичний зміст .....	71
2.10. Питома енергія перерізу і критична глибина .....	74
2.11. Рівняння Бернуллі для потоку в'язкої рідини .....	77
2.12. Приклади застосування рівняння Бернуллі .....	79
2.13. Рівняння Бернуллі для стисливої рідини .....	84
2.14. Рівняння зміни кількості руху для потоку рідини .....	86
<b>3. ГІДРАВЛІЧНІ ОПОРИ І ВТРАТИ НАПОРУ ПРИ РУСІ РІДИНИ .....</b>	<b>89</b>
3.1. Фізична природа гідравлічних опорів .....	89

3.2. Основне рівняння рівномірного руху. Втрати напору по довжині .....	90
3.3. Режими руху рідини. Число Рейнольдса .....	93
3.4. Ламінарний рух рідини в трубі .....	95
3.5. Турбулентний рух рідини .....	101
3.6. Структура турбулентного потоку в трубі .....	104
3.7. Місцеві гідравлічні опори і втрати напору .....	117
3.8. Опір при відносному русі твердого тіла та рідини .....	123
<b>4. УСТАЛЕНИЙ РУХ РІДИНИ В НАПІРНИХ ТРУБОПРОВОДАХ .....</b>	<b>130</b>
4.1. Короткі та довгі трубопроводи .....	130
4.2. Розрахунки коротких трубопроводів .....	130
4.3. Розрахунки довгих трубопроводів .....	138
4.4. Основні типи задач при розрахунках трубопроводів .....	143
4.5. Принципи розрахунку розгалужених і кільцевих гідравлічних мереж .....	153
4.6. Гідравлічний удар у трубах .....	154
4.7. Особливості розрахунку трубопроводів при русі стисливої рідини .....	164
<b>5. ВИТІКАННЯ РІДИНИ З ОТВОРІВ .....</b>	<b>168</b>
5.1. Витікання рідини з малого отвору в тонкій стінці при сталому напорі .....	168
5.2. Витікання рідини з великих отворів .....	176
5.3. Витікання рідини з насадків .....	177
5.4. Витікання рідини з отворів і насадків при змінному напорі .....	184
5.5. Вільні струмені рідини .....	191
5.6. Сила тиску струменя на плоскі і криволінійні поверхні .....	194
5.7. Витікання стисливої рідини з отворів .....	197
5.8. Особливості протікання рідини через водозливи .....	200
<b>6. РІВНОМІРНИЙ РУХ РІДИНИ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ .....</b>	<b>205</b>
6.1. Особливості руху рідини у відкритих руслах .....	205
6.2. Гідравлічно найвигідніший переріз каналу .....	208
6.3. Залежності між основними геометричними і гідравлічними характеристиками русел трапецеїдального перерізу .....	211
6.4. Особливості розрахунку русел параболічного перерізу .....	215
6.5. Допустимі середні в перерізі швидкості .....	216
6.6. Особливості гідравлічного розрахунку водовідвідних труб та інших русел замкнутого перерізу .....	217
<b>7. ОСОБЛИВОСТІ УСТАЛЕНОГО НЕРІВНОМІРНОГО РУХУ РІДИНИ У ВІДКРИТИХ РУСЛАХ .....</b>	<b>223</b>
7.1. Основні поняття і визначення .....	223
7.2. Основне диференціальне рівняння усталеного нерівномірного плавномірного руху рідини у відкритих руслах .....	225
7.3. Гідравлічний стрибок .....	229
7.4. Особливості спряження б'єфів .....	234

<b>8. РУХ ҐРУНТОВИХ ВОД</b> .....	239
8.1. Види фільтрації. Основний закон фільтрації. Коефіцієнт фільтрації .....	239
8.2. Приплив води до водозбірної галереї та до дренажних колодязів. Основи розрахунку дренажу .....	245
<b>9. ОСНОВИ ГІДРАВЛІЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ</b> .....	251
9.1. Геометрична, кінематична та динамічна подібності .....	251
9.2. Критерії гідравлічної подібності .....	254
9.3. Моделювання напірних трубопроводів, відкритих русел і гідротехнічних споруд .....	258
9.4. Принципи застосування методу аналізу розмірностей до дослідження законів гідравліки .....	267
<i>Список рекомендованої літератури</i> .....	274

Навчальне видання

*Константинов Юрій Михайлович  
Гіжа Олена Олександрівна*

# **Технічна механіка рідини і газу**

Оправа і титул художника *В. С. Жиборовського*  
Художній редактор *Г. С. Муратова*  
Технічний редактор *А. І. Омоховська*  
Коректор *Л. М. Байбородіна*  
Комп'ютерна верстка *Н. П. Довлетукасові*

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000  
серія ДК № 268

Підп. до друку 31.10.2002. Формат 84 × 108/32. Папір офс. № 1.  
Гарнітура Times New Roman. Офс. друк. Ум. друк. арк. 14,70.  
Обл.-вид. арк. 14,30. Тираж 3000 пр. Вид. № 9812. Зам. № 2–303

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7г

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві «Вища школа»,  
у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,  
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4

# Шановні друзі!



01054, КИЇВ-54,

вул. Гоголівська, 7г

Видавництво «Вища школа»

тел/факс (044) 216-32-44

тел/факс (044) 216-33-05



Літературу видавництва «Вища школа»  
можна придбати за такими адресами:

*М. Київ:* вул. Радищева, 12/16

Головне оптово-роздрібне книготорговельне підприємство «УКРКНИГА»

тел. (044) 488-52-97, 483-50-21

факс (044) 488-65-33

*М. Донецьк:* вул. Артема, 147а

ТОВ «Дом книги»

тел. (0622) 55-74-49

*М. Івано-Франківськ:* Вічевий майдан, 3

ТОВ «Арка»

тел. (03422) 2-04-60, 3-04-60

*М. Львів:* вул. Фурманська, 5, книгарня «Скарбниця»

тел/факс (0322) 72-60-15, 72-35-34

Видавництво «Аверс»

тел. (0322) 40-30-40, 40-30-42

*М. Суми:* вул. Кірова, 27 (п'ятий поверх), оф. 516

Торговельно-видавничий дім «Університетська книга»

тел. (0542) 27-51-43, факс (0542) 21-26-12

*М. Тернопіль:* вул. Йосипа Сліпого, 1

ТОВ «Видавництво "Навчальна книга — Богдан"»

тел. (03052) 25-18-09, 43-00-46

Оптовим покупцям надаються знижки!