

621.396.6(075)

К84

Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов

**ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ
ЧАСТИНА 1**

4021-7

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Ю. В. Крушевський, Д. В. Гаврілов

ОСНОВИ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ ЧАСТИНА 1

НТБ ВНТУ



4021-7

621.396.6(075 K84 2007

Крушевський Ю.В. Основи радіоелектроніки

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник для студентів спеціальностей: 6.050902 – Радіоелектронні апарати, 6.050903 – Телекомунікації. Протокол № 5 від 28 грудня 2006 р.

Вінниця ВНТУ 2007

Рецензенти:

В. М. Лисогор, доктор технічних наук професор

С. М. Злепко, доктор технічних наук професор

Г. Г. Бортник, кандидат технічних наук доцент

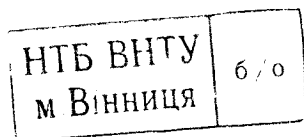
Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Крушевський Ю. В., Гаврілов Д. В.

К 84 **Основи радіоелектроніки. Частина 1.** Навчальний посібник.
– Вінниця: ВНТУ, 2007. – 152 с.

В навчальному посібнику розглянуті фундаментальні теоретичні основи радіоелектроніки. Посібник розроблений у відповідності з планом кафедри та програмою дисципліни "Основи радіоелектроніки."

УДК 621.3.01



ЗМІСТ

Вступ.....	6
1 Кола постійного струму.....	8
1.1 Електричне коло.....	8
1.2 Вибір напрямку протікання струму та напрямку напруги	9
1.3 Резистор і опір. Закон Ома.....	11
1.4 Енергія і потужність електричного струму.....	13
1.5 Генератор напруги (е.р.с.) та генератор струму	14
1.6 Основні поняття електричної схеми	17
1.7 Лінійні, нелінійні та параметричні кола.....	19
1.8 Розподіл потенціалів вздовж електричного кола	21
1.9 Закони Кірхгофа.....	22
1.10 Еквівалентні перетворення електричних схем методом згортання.....	24
1.11 Взаємне перетворення трикутника і зірки опорів	28
1.12 Запитання та задачі для закріплення.....	30
2 Гармонічний струм	32
2.1 Генерування гармонічних е.р.с. та струму	32
2.2 Математична і графічні моделі та параметри гармонічного струму.....	34
2.3 Середнє та діюче значення гармонічного струму	39
2.4 Резистор і активний опір	41
2.5 Котушка індуктивності та індуктивність	44
2.6 Конденсатор і електрична ємність	48
2.7 Запитання та задачі для закріплення	52
3 Кола гармонічного струму і символічний метод їх розрахунку	53
3.1 Комплексні числа та прості математичні операції над ними.....	53
3.2 Подання вектора, що обертається, комплексною функцією	55
3.3 Закони Ома і Кірхгофа у комплексній формі.....	57
3.4 Застосування законів Ома і Кірхгофа для комплексних амплітуд при розрахунку електричних кіл	59
3.5 Комплексна потужність та її складові	66
3.6 Баланс потужностей.....	68
3.7 Комплексно-спряжене узгодження генератора і приймача енергії	69
3.8 Запитання та задачі для закріплення.....	71
4 Перетворення схем електричних кіл гармонічного струму.....	73
4.1 Послідовне, паралельне та змішане з'єднання	73
4.2 Еквівалентні схеми реальних котушки індуктивності і конденсатора.....	77

4.3	Взаємне перетворення трикутника та зірки комплексних опорів.....	80
4.4	Еквівалентний генератор струму та генератор напруги	80
4.5	Перетворення схем з паралельно увімкненими генераторами	82
4.6	Перетворення схем з електричною симетрією.....	83
4.7	Запитання та задачі для закріплення.....	85
5	Одиничний коливальний контур	86
5.1	Вільні коливання в ідеальному контурі.....	86
5.1.1	Рівняння коливань і його розв'язування	86
5.1.2	Процес коливань та його механічна модель	87
5.1.3	Параметри ідеального контуру	90
5.2	Вільні коливання в реальному контурі.....	93
5.2.1	Рівняння коливань та його розв'язування.....	93
5.2.2	Параметри реального контуру.....	95
5.3	Вимушені коливання у послідовному контурі.....	99
5.3.1	Вхідний опір та його складові.....	100
5.3.2	Резонанс напруг	102
5.3.3	Вплив опору навантаження на параметри контуру	103
5.3.4	Вхідний опір контуру при невеликих розстроюваннях	105
5.3.5	Амплітудно-частотні характеристики за напругою.....	107
5.3.6	Фазочастотні характеристики за напругою	109
5.3.7	Настроювальні криві	110
5.3.8	Рівняння вибірності та смуга пропускання при невеликих розстроюваннях.....	111
5.4	Вимушені коливання у паралельному контурі	115
5.4.1	Паралельний контур загального виду	115
5.4.2	Паралельний контур I виду.....	118
5.4.2.1	Вхідний опір.....	118
5.4.2.2	Частотні характеристики вхідного опору.....	119
5.4.2.3	Векторні діаграми і еквівалентні схеми контуру при розстроюванні	121
5.4.2.4	Резонанс струмів	122
5.4.2.5	Енергетичне пояснення характеру вхідного опору паралельного контуру.....	124
5.4.2.6	Вплив внутрішнього опору генератора та навантаження на параметри контуру	125
5.4.2.7	Амплітудно-частотна характеристика за напругою.....	127

5.4.2.8	Вибірність і смуга пропускання.....	128
5.4.2.9	Порівняння послідовного і паралельного контурів.....	129
5.4.3	Паралельний контур II виду.....	130
5.4.4	Паралельний контур III виду.....	132
5.5	Запитання та задачі для закріплення.....	135
6	Симетричні кола трифазного струму.....	136
6.1	Трифазні електричні кола.....	136
6.2	З'єднання зіркою.....	137
6.3	З'єднання трикутником.....	140
6.4	Запитання та задачі для закріплення.....	142
7	Деякі методи аналізу складних електричних кіл.....	143
7.1	Застосування законів Кірхгофа.....	143
7.2	Метод накладання.....	144
7.3	Вхідні та передатні (взаємні) провідності і опори.....	147
7.4	Коефіцієнт передачі напруги і струму.....	148
7.5	Метод еквівалентного генератора.....	148
7.6	Запитання та задачі для закріплення.....	151
	Література.....	151

Життя сучасного суспільства практично неможливе без радіоелектронних засобів. Радіомовлення, телебачення, телефон, телеграф, телетайп, радіолокація, промислова електроніка, медицина, сільське господарство – далеко не повний перелік електронних пристроїв та систем, які широко використовуються у нашому житті.

Але будь-яка система забезпечується сукупністю електричних і електронних пристроїв різної складності, які складаються з елементів, до яких прикладені електричні напруги або протікають електричні струми. Будь-які складні радіоелектронні пристрої складаються з різноманітних електричних кіл, які мають певні електричні властивості. Таким чином, щоб розробляти, виготовляти грамотно експлуатувати різну радіоелектронну апаратуру, необхідно, перш за все, знати процеси, які протікають в електричних колах при певних умовах, а також закони, за якими ці процеси протікають; основні з таких законів вивчаються в дисципліні "Основи радіоелектроніки".

Вже в кінці 60-х років минулого століття стало зрозумілим, що відомості, які повинні мати інженери і техніки у галузі передачі інформації, значно відрізняються від відомостей, необхідних фахівцям у галузях електроенергетики, електромеханіки і т. ін. Енергетика базується, перш за все, на постійному або періодичному струмі промислової частоти і займається виробленням, передаванням та використанням електричної енергії для нагрівання, освітлення, роботи електричних моторів тощо. Для радіоспеціалістів основними задачами є отримання та використання електричних сигналів з певним спектром частот з метою передавання та обробки інформації, забезпечуючи при цьому мінімальне її спотворення і т. ін. Посібник "Основи радіоелектроніки" включає розділи, які розглядалися в різних дисциплінах, у тому числі – в електротехніці, радіотехніці, теорії зв'язку і в деяких інших. Ця теорія не мала б сучасного вигляду, якби багаточисельні дослідники не внесли свій вклад в науку про властивості електромагнітних полів, електричних кіл та їх технічного застосування. Згадаємо лише деяких з них. Серед багатьох заслуг виділимо відкриття англійським фізиком-самоучкою Майклом Фарадеєм у 1831 році явища електромагнітної індукції. Його співвітчизник, блискучий теоретик Джеймс Клерк Максвелл, розробив теорію електромагнітних явищ, передбачивши існування електромагнітних хвиль (1883 рік), а німецький вчений Генріх Герц у 1888 році експериментально довів їх існування. Петербурзький професор О.С.Попов у 1895 році винайшов радіо, побудував перший радіоприймач, у 1897 році встановив можливість радіолокації, а в 1900 році організував перший радіозв'язок острова Гюгланд з материком. Подальші багаточисельні роботи з теорії і практики радіоприймальних, радіопередавальних пристроїв на базі досягнень

електроніки, радіотехнічних систем і т.ін, породили цілий світ, який ми сьогодні називаємо радіоелектронікою.

Радіоелектроніка продовжує інтенсивно розвиватися і вдосконалюватися і сучасному спеціалісту у цій галузі прийдеться займатися пристроями, які сьогодні знаходяться ще у стадії розробки або проектування, а до цього потрібно бути готовим.

1 КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1 Електричне коло

Електричне коло – це сукупність пристроїв, призначених для передачі електричної енергії від її джерела до споживача. Функціонально усі пристрої, що складають електричне коло, можна поділити на три групи: перша група – це **джерела** електричної енергії, друга – проміжні пристрої, третя – **споживачі** електричної енергії.

Прикладами джерел електричної енергії є гальванічні елементи, акумулятори, термоелементи, електричні генератори, тобто будь-які пристрої, в яких відбувається перетворення хімічної, теплової, механічної чи будь-якого іншого виду енергії в електричну. Джерелом енергії є і приймальна антена лінії радіозв'язку, але в ній не відбувається перетворення одного виду енергії в інший.

Прикладами споживачів (приймачів) електричної енергії є електричні лампи, електронагрівні прилади (електроплити, електропраски), електричні двигуни, радіоприймачі та будь-які інші пристрої, де електрична енергія перетворюється у будь-який інший вид енергії. До приймачів електричної енергії можна віднести і передавальні антени, де електрична енергія випромінюється у вільний простір без її перетворення в інший вид.

Проміжні пристрої є безпосередніми приймачами енергії від її джерела і призначені для передавання цієї енергії у потрібній кількості кінцевому споживачеві. Прикладами проміжних пристроїв є електродроти, трансформаторні підстанції тощо.

Усі електричні кола можна розділити за видом струму, який у них протікає: кола постійного струму та кола змінного струму. У даному розділі будемо розглядати лише кола постійного струму.

Окрім прості пристрої, які входять до складу електричного кола і виконують у ньому певні функції, називаються елементами цього електричного кола. Усі елементи електричних кіл розділяються на **активні і пасивні** елементи.

Активними елементами вважаються джерела електричної енергії: генератори напруги (е.р.с.) або генератори струму. Пасивними елементами електричного кола є резистори, котушки індуктивності, конденсатори тощо. Відповідно розрізняють **активні і пасивні кола**. Активні кола – це електричні кола, які містять джерела енергії, а пасивні електричні кола складаються лише з пасивних елементів.

Зрозуміло також, що в електричному колі джерело енергії можна назвати генератором (напруги або струму), а споживача – н авантаженням цього генератора.

Слід зауважити, що поняття "джерело" ("генератор") і "споживач" ("навантаження") не є строго прив'язаним до певних елементів електричного кола. Для прикладу розглянемо просте електричне коло

(рис. 1.1), яке складається з джерела електричної енергії 1, проміжного пристрою 2 (проводи лінії електропередачі) та кінцевого споживача електричної енергії 3.

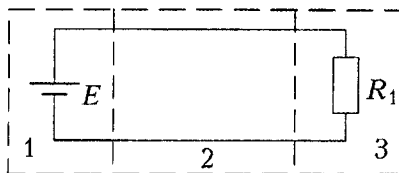


Рисунок 1.1 – Схема простого електричного кола

На границі між джерелом і лінією електропередачі, лінія 2 є навантаженням (споживачем) джерела (генератора) 1, але, у свою чергу, на границі лінія електропередачі 2 та кінцевий споживач 3 лінія електропередачі виступає у ролі джерела (генератора) для споживача (навантаження) 3. Тобто складне електричне коло можна розділити на пари: генератор – навантаження, де навантаження у попередній парі буде генератором у наступній. Такий підхід дозволяє швидше розібратися і з'ясувати принцип дії досить складних вузлів радіотехнічних пристроїв.

1.2 Вибір напрямку протікання струму та напрямку напруги

Відомо, що електричний струм провідності у металах є спрямованим рухом від'ємних зарядів (електронів), а струм провідності в електролітах та газах – спрямованим рухом позитивних зарядів (додатних іонів) і негативних зарядів (від'ємних іонів). При цьому, додатні та від'ємні іони рухаються у протилежних напрямках. За додатний напрямок протікання електричного струму було прийнято напрямок руху додатних іонів. Отже, у металах напрямок протікання електричного струму є протилежним напрямку руху електронів, від'ємних зарядів, напрямлений рух яких власне і є електричним струмом. Подібна ситуація спостерігається, наприклад, в електровакуумному приладі, де електричний струм вважається напрямленим від анода до катода, хоча фактично потік електронів переноситься від катода до анода.

Кількісно постійний електричний струм визначається як відношення кількості електричного заряду, що проходить через провідник деякого поперечного перерізу за певний проміжок часу, до величини цього часового проміжку. Якщо йдеться про провідник з чисто електронною провідністю (носіями струму є тільки електрони), то ця кількість заряду q визначається відповідно кількістю електронів. Коли ж йдеться про провідник з іонною провідністю (носіями струму є додатні і від'ємні заряди, що рухаються у протилежних напрямках), то ця кількість заряду $q = q^+ + q^-$ дорівнюватиме сумарній кількості заряду, що пройшов через переріз за визначений відрізок часу t . Тоді струм (сила струму) I через цей

переріз дорівнюватиме:

$$I = q/t. \quad (1.1)$$

Нагадаємо, що кількість заряду q визначається у кулонах (Кл), час – в секундах (с), а сила струму (струм) – в амперах (А).

Напрямок струму характеризується знаком струму. Поняття позитивний струм чи негативний струм мають сенс тільки тоді, коли порівнюється напрямок струму у провіднику з деяким заздалегідь вибраним напрямком, який назовемо додатним напрямком.

Додатний напрямок струму вибирається довільно і позначається стрілкою. Якщо після розрахунків виявиться, що струм має знак плюс ($I > 0$), то це означає, що його напрямок збігається з вибраним додатним напрямком. У протилежному випадку, коли струм матиме знак мінус ($I < 0$), він напрямлений у протилежному напрямку.

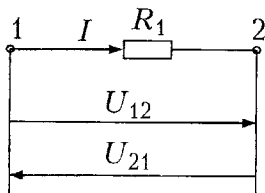


Рисунок 1.2 – Ділянка електричного кола 1-2 з елементом R

Розглянемо деяку ділянку кола (рис. 1.2), через яку протікає електричний струм I . Різниця електричних потенціалів між кінцями цієї ділянки 1 і 2 є напругою (спадом напруги) на цій ділянці. Вона є скалярною величиною і дорівнює роботі електричних сил із перенесення одиничного позитивного заряду з точки 1 в точку 2. Якщо точка 1 має потенціал вищий за потенціал точки 2, то ця робота є додатною і дорівнює напрузі U_{12} . Очевидно, робота виконана у протилежному напрямку буде від'ємною, тобто $U_{21} = -U_{12}$.

Різниця потенціалів вважається позитивною, коли на ділянці кола напрямок вищий – нижчий потенціал збігається з додатним напрямком струму, тобто, на будь-якій ділянці кола електричний струм буде протікати у напрямку від точки з більшим потенціалом до точки з меншим потенціалом. Це виправдовує і термін спад напруги на ділянці 1-2 від більш високого потенціалу точки 1 до меншого потенціалу точки 2.

У подальшому вираз "додатний напрямок протікання електричного струму" будемо для скорочення замінювати виразом "напрямок струму".

На закінчення зауважимо, що напруга (різниця потенціалів) вимірюється у вольтах (В).

При силі струму 1 ампер через поперечний переріз провідника за 1 секунду переноситься 1 кулон заряду.

$$q = It.$$

Спад напруги на ділянці кола дорівнює роботі електричних сил джерела енергії із перенесення 1 кулона позитивного електричного заряду через цю ділянку і вимірюється у вольтах.

1.3 Резистор і опір. Закон Ома

Електричний опір – це властивість провідного матеріалу чинити опір електричному струму, який через нього протікає. За законом Ома, експериментально установленим у 1826 р. фізиком Георгом Омом, сила електричного струму I прямо пропорційна напрузі U , що діє на ділянці кола і обернено пропорційна опором R цієї ділянки:

$$I = U/R.$$

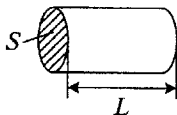
Тобто, при незмінному значенні напруги U струм буде тим менший, чим більший буде опір R цієї ділянки протіканню струму.

Виходячи із закону Ома опір R дорівнюватиме:

$$R = U/I. \quad (1.2)$$

Одиницею вимірювання опором є ом (Ом). Ділянка кола матиме опір 1 Ом, коли при напрузі на цій ділянці 1 вольт (В) через неї протікатиме електричний струм із силою 1 ампер (А). Отже:

$$\text{Вольт (В)/ампер (А)} = \text{ом (Ом)}.$$



Якщо взяти відрізок провідника довжиною l , наприклад циліндричної форми з поперечним перерізом S , виготовленого з матеріалу з питомим опором ρ , то, як відомо з курсу фізики, опір R такого відрізка буде дорівнювати:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (1.3)$$

де ρ має розмірність у системі СІ – 1 Ом·м.

На практиці прийнято виражати довжину провідника (металевого дроту, наприклад), у метрах, поперечний переріз в мм², тому у довідниках питомий опір дається – в Ом·мм²/м.

Величина обернена опором R провідника електричного струму називається його провідністю G :

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{l}. \quad (1.4)$$

σ – питома провідність провідника, яка вимірюється в системі СІ у сіменсах (См)/метр (м), а у довідниках, для зручності практичного використання, у м/Ом·мм².

Резистор – елемент електричного кола, радіодеталь, основною функцією якого є зменшити силу струму, що протікає в ділянці кола з

певною різницею потенціалів. Опір же цього резистора є його основним параметром, який оцінюється в омах.

При збільшенні температури провідника збільшується хаотичний (тепловий) рух, що збільшує кількість зіткнень і утруднює упорядкований рух електронів. Цим пояснюється збільшення питомого електричного опору металів зі зростанням температури.

В металах при робочих температурах питомий опір зі зростанням температури зростає за законом:

$$\rho(t) = \rho_0[1 + \alpha(t - t_0)]. \quad (1.5)$$

де $\rho(t)$ – питомий опір при заданій температурі,

ρ_0 – питомий опір при початковій температурі,

α – температурний коефіцієнт опору (TKR), величина стала для даного металу.

Для резисторів будь-яких номіналів за аналогією до формули (1.5) можна записати:

$$R(t) = R_0[1 + \alpha(t - t_0)]. \quad (1.6)$$

Залежність між струмом і напругою $I = GU$ називається вольт-амперною характеристикою резистора.

Якщо провідність (опір) резистора не залежить від прикладеної напруги та струму, що протікає через нього, то залежність $I = GU$, $I = U/R$ є лінійним рівнянням, графік якого подано на рис. 1.3 для двох значень провідностей G_1 , G_2 . При одному і тому ж значенні напруги U у резисторі з більшою провідністю G_1 (меншим опором R_1) протікатиме струм I_1 більший від струму I_2 , який протікає у резисторі з меншою провідністю G_2 (більшим опором R_2).

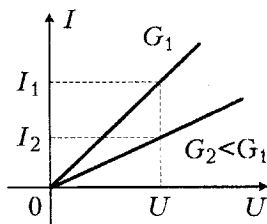


Рисунок 1.3 – Вольт-амперна характеристика лінійних резисторів

Струм у провіднику дорівнює відношенню напруги на ділянці провідника до електричного опору цієї ділянки.

$$I = U/R.$$

Один Ом – це опір провідника у якому, при різниці потенціалів на його кінцях в 1 вольт, протікатиме електричний струм з силою 1 Ампер.

$$1\text{Ом} = 1\text{В}/1\text{А}.$$

На практиці крім вольта, ампера та ома зручно користуватися кратними їх значеннями: $10^3 \text{ В} = 1 \text{ кіловольт (кВ)}$, $10^{-3} \text{ В} = 1 \text{ мілівольт (мВ)}$, $10^{-6} \text{ В} = 1 \text{ мікровольт (мкВ)}$;
 $10^3 \text{ А} = 1 \text{ кілоампер (кА)}$, $10^{-3} \text{ А} = 1 \text{ міліампер (мА)}$, $10^{-6} \text{ А} = 1 \text{ мікроампер (мкА)}$;
 $10^3 \text{ Ом} = 1 \text{ кілоом (кОм)}$, $10^6 \text{ Ом} = 1 \text{ мегаом (МОм)}$, $10^9 \text{ Ом} = 1 \text{ гігоом (ГОм)}$.

1.4 Енергія і потужність електричного струму

При проходженні електричного струму через коло можуть відбуватися різні дії: нагрівання провідника, хімічні зміни в електролітах, механічне переміщення магнітної стрілки або провідника, по якому тече струм, виконуючи при цьому певну механічну роботу.

У дослідах Джеймса Джоуля та Емілія Ленца (1842 р.) струм проходив через нерухомі металеві провідники. Тому єдиним результатом роботи струму було нагрівання цих провідників, а за законом збереження енергії уся робота, виконана електричним струмом, перетворилася на тепло.

Якщо на ділянці кола зі струмом I діє різниця потенціалів U , то за час t , згідно із законом Джоуля-Ленца, на цій ділянці кола буде виконана робота:

$$A = U \cdot I \cdot t \text{ джоулів (Дж)}. \quad (1.7)$$

Скориставшись законом Ома для цієї ділянки кола вираз (1.7) можна переписати:

$$A = I^2 \cdot R \cdot t \text{ або } A = \frac{U^2}{R} \cdot t.$$

Підкреслимо, що застосування виразу $A = U \cdot I \cdot t$, який дає роботу струму, для оцінки тепла, яке виділяється в провадах, можливе тільки у тих випадках, коли уся ця робота переходить у тепло $A = Q = 0.24 U \cdot I \cdot t$ (кал), тобто, коли на цій ділянці кола відбувається нагрівання, але не виконується механічна робота (у моторах, наприклад) і не йдуть інші процеси, які супроводжуються виділенням чи поглинанням енергії (роботи).

Отже, у результаті протікання електричного струму I через ділянку кола з опором R за час t на цій ділянці кола виділиться енергія, $W = I^2 \cdot R \cdot t$, яка витратиться на нагрівання.

Знаючи роботу, яка виконується електричним струмом за деякий проміжок часу, можна розрахувати і **потужність** струму, під якою розуміють роботу (затрачену енергію) за одиницю часу. Очевидно потужність P дорівнюватиме:

$$P = \frac{F}{t} = U \cdot I. \quad (1.8)$$

$$P = I^2 R \text{ або } P = U^2 / R.$$

Таким чином, потужність постійного струму на будь-якій ділянці кола виражається добутком сили струму на напругу між кінцями ділянки кола.

Коли ми говоримо про потужність електричного струму, який споживається в електромережі, то розуміємо, що саме цим струмом виконується робота електромоторами, світять електролампи, нагріваються електроплити і т. ін.

На ділянці кола виділиться потужність в один Ват (Вт), коли в ній протікатиме електричний струм із силою 1 ампер (А) при різниці потенціалів на кінцях ділянки один вольт (В), тобто

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ В} \cdot 1 \text{ А} = 1 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ В} \cdot \text{А} \cdot \text{с} = 1 \text{ Вт} \cdot \text{с}.$$

Енергія електричного струму є та робота, яку виконає електричний струм I , який протікатиме через ділянку кола протягом часу t , при різниці потенціалів на її кінцях U .

$$W = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t.$$

Потужність електричного струму – це є робота (енергія) виконана (затрачена) цим струмом за одиницю часу.

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R}.$$

На практиці часто зручно користуватися одиницями енергії або потужності, кратними 1 джоулю або вату:

$10^3 \text{ Дж} = 1 \text{ кілоджоуль} = 1 \text{ кДж}$, $10^6 \text{ Дж} = 1 \text{ мегаджоуль (МДж)}$

$10^{-6} \text{ Вт} = 1 \text{ мікват (мкВт)}$, $10^{-3} \text{ Вт} = 1 \text{ міліват (мВт)}$,

$10^3 \text{ Вт} = 1 \text{ кіловат (кВт)}$, $10^6 \text{ Вт} = 1 \text{ мегават (МВт)}$.

1.5 Генератор напруги (е.р.с.) та генератор струму

Розглянемо електричне коло, яке складається з джерела електричної енергії з е.р.с. E , внутрішнім опором R_i , навантаженого резистором з опором R_H (рис. 1.4).

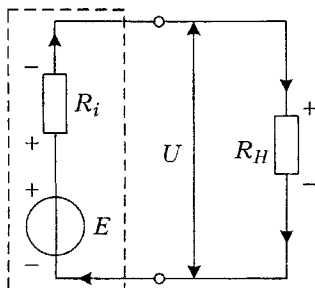


Рисунок 1.4 – Схема джерела енергії з підімкненим до нього навантаженням

У відповідності до закону Ома для повного кола струм I у цьому колі прямо пропорційний е.р.с. E та обернено пропорційний сумі внутрішнього R_i та зовнішнього R_H опорів кола, тобто:

$$I = \frac{E}{R_i + R_H}. \quad (1.9)$$

Або $E = I \cdot R_i + I \cdot R_H$ – е.р.с. дорівнює сумі спаду напруг на внутрішньому ($I \cdot R_i$) і зовнішньому опорах. Іншими словами, е.р.с. дорівнює сумі спаду напруги на внутрішній та зовнішній ділянках кола, відповідно.

Тоді напруга на виході джерела енергії у точках підмикання опору навантаження буде напругою на зовнішній ділянці кола і дорівнюватиме:

$$U = I \cdot R_H = E - I \cdot R_i. \quad (1.10)$$

Тобто, напруга на виході джерела енергії буде меншою від е.р.с. E , бо частина останньої спала на внутрішньому опорі R_i .

Припустимо тепер, що ми працюємо з навантаженнями, опори R_H яких набагато (у десять і більше разів) більші за внутрішній опір R_i . Тоді у виразі (1.9) у знаменнику ($R_i + R_H$) можна знехтувати малим R_i у порівнянні з великим R_H і отримати:

$$I \approx E/R_H \quad (1.11)$$

звідки напруга на виході джерел енергії:

$$U = I \cdot R_H \approx E. \quad (1.12)$$

дорівнюватиме наближено е.р.с. Це сталося через те, що спад напруги на внутрішній ділянці кола $I \cdot R_i$ буде набагато (у десять і більше разів) меншим від спаду напруги на зовнішній ділянці R_H , знехтувавши у виразі (1.10) дуже малим $I \cdot R_i$ у порівнянні з дуже великим $I \cdot R_H$, отримаємо, що $U \approx E$.

Отже, за обставини, що $R_i \ll R_H$ джерело енергії генеруватиме напругу $U \approx E$, яка майже не залежатиме від опору навантаження, тобто від параметра зовнішньої ділянки кола. У такому разі кажуть, що мова іде про генератор напруги (майже генератор е.р.с.).

Ідеальним генератором е.р.с, тобто пристроєм напруга на виході якого дорівнює точно E , є джерело енергії, внутрішній опір у якому дорівнює нулю ($R_i = 0$). Коли за такої умови зменшувати опір R_H до нуля, то струм у колі (теоретично) збільшиться до нескінченності, але напруга на виході залишатиметься незмінною і рівною е.р.с. E .

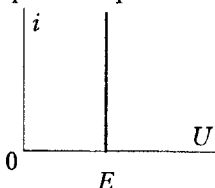


Рисунок 1.5 – Вольт-амперна характеристика ідеального генератора е.р.с.

На рис. 1.6. зображено вольт-амперну характеристику реального генератора напруги (е.р.с) при зменшенні R_{H_2} коли він залишається набагато більшим за R_i , струм буде зростати та напруга на виході залишатиметься практично рівною E . Коли ж R_{H_2} стане одного порядку з R_i , зростання струму у колі призведе до появи помітного спаду напруги на внутрішньому опорі джерела і призведе до зменшення напруги на виході.

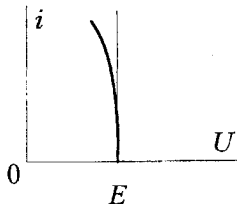


Рисунок 1.6 – Вольт-амперна характеристика реального джерела напруги (е.р.с)

Тепер розглянемо протилежний випадок, коли $R_i \gg R_H$ (набагато більше). У виразі (1.9) у знаменнику знехтуємо малим R_H у порівнянні з великим R_i і отримаємо:

$$I \approx E/R_i.$$

Тобто, струм у колі обмежується великим внутрішнім опором джерела R_i і не залежить від значення опору навантаження R_H . У цьому випадку говорять про джерело енергії, яке працює як генератор струму (реальний). Отже, при $R_i \rightarrow \infty$ (нескінченно великий внутрішній опір) струм у зовнішньому колі не залежав би від опору навантаження і ми мали б справу з ідеальним генератором струму.

Коли зростатиме R_{H_2} , залишаючись набагато меншим за R_i , струм у колі буде дорівнювати $I = E/R_i$ і не залежатиме від навантаження.

Коли ж R_{H_2} зростаючи, стане одного порядку з R_i , струм у колі буде зменшуватись у відповідності з виразом (1.9).

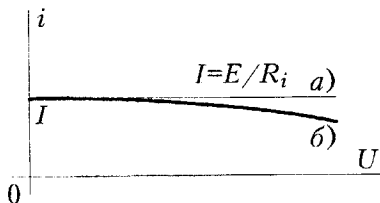


Рисунок 1.7 – Вольт-амперна характеристика ідеального (а) і реального (б) генераторів струму

Генератор напруги (е.р.с) є джерело енергії з дуже малим (нульовим) внутрішнім, у порівнянні з навантаженням R_H , опором, напруга на виході якого практично не залежить (дорівнює е.р.с. E) від опору навантаження.

Генератор струму є джерело енергії з дуже великим внутрішнім, у порівнянні з навантаженням, опором, струм, створений яким у колі (на виході джерела) не залежить від опору навантаження.

На практиці в радіотехніці генератором напруги е.р.с. має бути, наприклад, джерело сигналу, яке працює у послідовному контурі, а паралельний коливальний контур успішно працюватиме лише від генератора сигналу з великим внутрішнім опором (генератора струму).

Генератором напруги можна вважати підсилювальний транзисторний каскад, який живиться від акумулятора, а от підсилювальний каскад на пентоді буде мати величезний внутрішній опір і працюватиме як генератор струму.

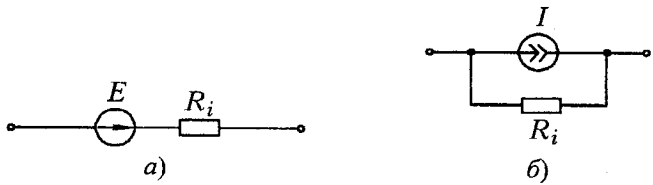


Рисунок 1.8 – Умовні зображення генераторів: а) напруги (е.р.с.); б) струму

1.6 Основні поняття електричної схеми

Електрична схема являє собою графічне зображення елементів кола та зв'язків між ними. Електрична схема складається з "фізичних" і "геометричних" частин або елементів. "Фізичні" елементи це: активні і пасивні елементи кола (джерела електричної енергії, резистори, котушки індуктивності, конденсатори тощо). "Геометричні" елементи: вітки, вузли та контури схеми.

Вітка – це частина схеми, яка утворюється одним або декількома "фізичними" елементами, з'єднаними між собою послідовно. При послідовному з'єднанні елементів через них протікає один і той же електричний струм.

Домовимося, що коли склад вітки невідомий, то така вітка зображається з елементом у вигляді прямокутника.

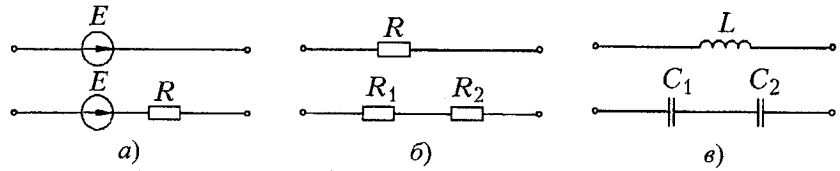


Рисунок 1.9 – Зображення віток електричної схеми

На рис. 1.9,а показані: вітка з ідеальним генератором е.р.с. та вітка з послідовним з'єднанням е.р.с. з резистором R . На рис. 1.9,б – вітка з

ІНСТІТУТ
м. Вінниця 6/0

резистором R та вітка з послідовним з'єднанням резисторів з опором R_1 та опором R_2 . На рис. 1.9,в – вітка з котушкою індуктивності L та вітка з послідовно з'єднаними конденсаторами з ємностями C_1 і C_2 .

Вузол називається місце на схемі, де з'єднується між собою три і більше віток. На рис. 1.10,б зображено вузол, де сходяться три вітки, на рис. 1.10,а – чотири вітки. А на рис. 10,в у точці A є вузол, де з'єднуються три вітки з резисторами R_3 , R_4 та R_5 , в точці B вузла немає, бо там перехрещуються провідники (дроти), ізолювані один від одного (нема жирної точки – символу електричного контакту).

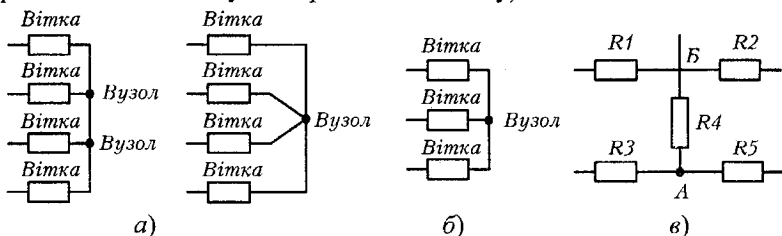


Рисунок 1.10 – Зображення вузлів на електричних схемах

На рис. 1.11 наведено приклад схеми складного електричного кола, яке має три вузли і п'ять віток (три з них складаються з одного елементу, перша – з двох елементів, а п'ята – з трьох елементів).

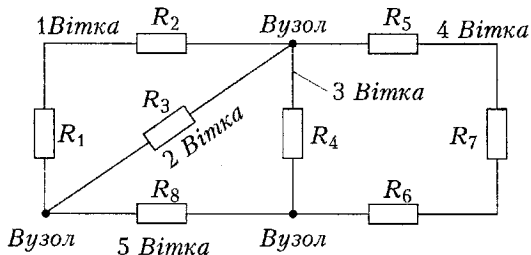


Рисунок 1.11 – Схема складного електричного кола

Контуром називається замкнутий шлях, який проходить по декількох вітках. В залежності від кількості контурів, що є у схемі, будемо розрізняти одноконтурні та багатоконтурні схеми.

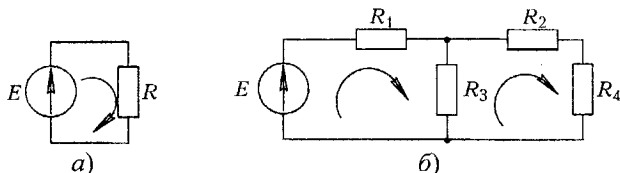


Рисунок 1.12 – Одноконтурна (а), та двоконтурна (б) схеми

На рис. 1.12 подані приклади одноконтурної (а) та двоконтурної (б), а на рис. 1.11 – багатоконтурної схем.

Електрична схема – графічне зображення елементів кола та зв'язків між ними.

Вітка – частина схеми, утворена одним або кількома послідовно з'єднаними між собою елементами.

Вузол – місце з'єднання на схемі трьох і більше віток.

Контур – замкнутий шлях, що проходить по декількох вітках схеми.

1.7 Лінійні, нелінійні та параметричні кола

Усі електричні кола за характером процесів розділяються на лінійні, нелінійні та параметричні. Лінійні кола складаються тільки з лінійних елементів. Якщо коло містить нелінійний елемент, то воно стає нелінійним, а наявність у колі параметричного елемента робить це коло параметричним.

Лінійні елементи – це елементи кола, які мають лінійну вольт-амперну характеристику. Прикладом таких елементів є резистори, котушки індуктивності без осердь та конденсатори. Вольт-амперна характеристика лінійного резистора виражається законом Ома для ділянки кола.

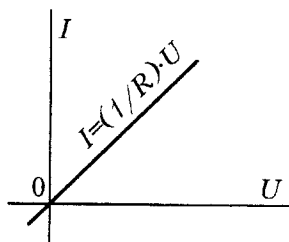


Рисунок 1.13 – Вольт-амперна характеристика лінійного резистора

Лінійна функція залежності струму I від напруги U буде тоді, коли опір R буде величиною сталою, незалежною від напруги, струму чи температури. Графік цієї функції є прямою лінією, а функція є рівнянням першої степені. Кажуть у такому випадку про лінійний характер процесів у цьому лінійному колі при зміні напруги від $-\infty$ до $+\infty$.

Типовими нелінійними елементами є діоди, тріоди, тетроди, пентоди та інші електровакуумні та напівпровідникові електронні прилади, які широко використовуються у радіоелектроніці. Це так звані елементи з односторонньою провідністю. На рис. 1.14 подано графік вольт-амперної характеристики нелінійного елемента, провідність якого при позитивних значеннях напруги на ньому ($U > 0$) дорівнює:

$$G_1 = \frac{I_1}{U_1}.$$

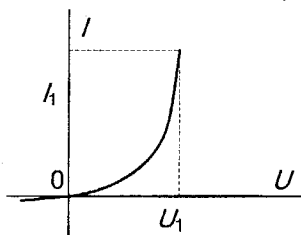


Рисунок 1.14 – Вольт-амперна характеристика нелінійного елемента

При зміні полярності напруги на протилежну ($U > 0$) його провідність дорівнює нулю. Як бачимо, вольт-амперна характеристика такого елемента не є прямою лінією, а ламаною при $U=0$, і, отже лінійність характеристики порушується, закон Ома не спрацьовує. Кажуть у такому випадку про нелінійний характер процесів у колі, яке містить цей елемент.

Прикладом нелінійного елемента є дросель низької частоти (котушки індуктивності з феромагнітним осердям). Графік намагнічування його показано на рис. 1.15. На ділянці значень напруженості магнітного поля $H < H_1$ залежність

$$B = \mu_a \cdot H$$

є лінійною функцією, де коефіцієнт пропорційності μ_a (абсолютна магнітна проникність матеріалу осердя) є величина стала і дорівнює B_1 / H_1 .

При подальшому намагнічуванні μ_a зменшується зі зростанням H (залежність параметра елемента від сили електричного струму намагнічування, що протікає через котушку). Це призводить до зменшення крутості графіка намагнічування, який є кривою (не прямою) лінією, яка свідчить про нелінійність функції $B = \mu_a H$, а отже і нелінійність елемента.

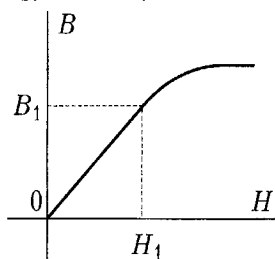


Рисунок 1.15 – Графік намагнічування осердя дроселя низької частоти

Параметричні елементи (терморезистори, варикапи тощо) широко використовуються, наприклад, при побудові радіовимірювальних пристроїв, чутливими елементами яких вони і є.

У параметричному елементі основний його параметр (у терморезисторі це – опір, у варикапі – ємність) є функцією напруги, струму, температури і таке інше.

Якщо ділянка кола містить такий елемент, то закон Ома для цієї ділянки виражатиме нелінійно-параметричну залежність струму від напруги, і, отже, ця функція не є лінійною, а саме електричне коло з таким елементом називатиметься параметричним.

Для будь-якої ділянки лінійного кола є справедливим закон Ома, який виражає пряму пропорційність струму у цій ділянці напрузі на її кінцях.

Електричне коло, яке містить хоч один нелінійний елемент, є колом нелінійним.

Для лінійних елементів кола є справедливим закон Ома, а до нелінійних і параметричних його застосувати не можна.

1.8 Розподіл потенціалів вздовж електричного кола

Розглянемо ділянку кола (рис. 1.16), яка складається з генератора е.р.с. E та резистора R . Напруга на ділянці $U = E - I \cdot R$.

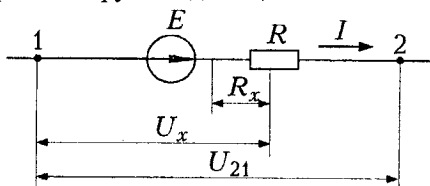


Рисунок 1.16 – Ділянка кола постійного струму з е.р.с. E та резистором R

Побудуємо розподіл потенціалів вздовж ділянки у напрямку 1-2 від опору. Цей розподіл подано на рис. 1.17. Нахил цієї лінії відносно осі абсцис визначається як

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E - U_{21}}{R}$$

тобто відношенням спаду напруги на резисторі R до опору цього резистора. Інакше кажучи, $\operatorname{tg} \alpha$ буде дорівнювати струму I , що протікає через досліджувану ділянку кола.

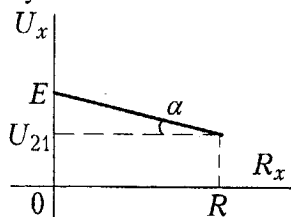


Рисунок 1.17 – Розподіл потенціалів вздовж ділянки 1-2 (рис. 1.16)

Розглянемо тепер ділянку кола, яка складається з трьох генераторів е.р.с. та трьох резисторів (див. рис. 1.18). На рис. 1.18,б показано розподіл потенціалів у напрямку протікання струму I .

Зауважимо, що нахил усіх ділянок графіка $U(R)$ однаковий, а тангенс кута цього нахилу дорівнює струмові I , який є однаковим в усіх точках ділянки 1-2.

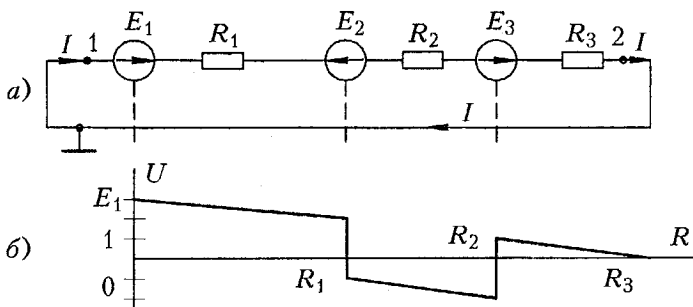


Рисунок 1.18 – Ділянка електричного кола (а) та розподіл потенціалів у напрямку 1-2

Потенціал же точки 1 прийнято нульовим і оскільки точка 2 під'єднується до точки 1 у вузлі А, то і її потенціал також буде дорівнювати нулю. В точках увімкнення генераторів е.р.с. потенціал змінюється стрибком, висота і полярність якого визначається модулем е.р.с. та напрямком дії кожного з генераторів.

1.9 Закони Кірхгофа

Поряд з законом Ома ці закони є основними в електро- та радіотехніці. Перший закон Кірхгофа являє собою закон балансу струмів, а другий – закон балансу напруг у замкнутих ділянках кола (у контурах).

Закони Кірхгофа, сформульовані у 1847 р. Густавом Кірхгофом, математично описують розподіл струмів та напруг в електричних колах, а тому знання цих законів та уміння їх застосовувати у конкретній задачі суттєво допоможуть зрозуміти усі наступні розділи цього курсу.

Перший закон Кірхгофа

Алгебрична сума струмів у вузлі електричної схеми дорівнює нулю:

$$\sum I = 0. \quad (1.13)$$

У цій сумі маємо на увазі струми лише тих віток схеми, які утворюють вузол. Знаки перед струмами, що втікають у вузол і струмами, що витікають з вузла беруться протилежними. Домовимося, наприклад, у сумі (1.13) струми, що втікають у вузол писати зі знаком плюс (+), а струми, що витікають з вузла – зі знаком мінус (-). Іншими словами, будь-який струм, що втікає у вузол, має розглядатися як струм, що витікає з цього вузла, але взятий з протилежним знаком.

Для прикладу розглянемо вузол А фрагмента електричної схеми, зображеного на рис. 1.19.

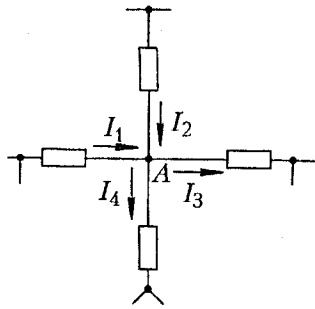


Рисунок 1.19 – Ілюстрація до першого закону Кірхгофа

У даному випадку рівняння (1.13) слід записати так:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

Або

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4.$$

Останнє рівняння дозволяє стверджувати, що сумарний струм, що втікає у вузол, дорівнює сумарному струмові, що витікає з нього. Власне кажучи, таке твердження говорить про те, що скільки зарядів приноситься до вузла за певний час, стільки ж зарядів за цей же час виноситься з цього вузла. Тобто, перший закон Кірхгофа дійсно є умовою балансу струмів або балансу зарядів у вузлі. Тобто, у вузлах електричної схеми заряди не накопичуються і не витрачаються, а потенціал цього вузла залишається незмінним.

Другий закон Кірхгофа

Алгебрична сума е.р.с. у будь-якому контурі електричної схеми дорівнює алгебричній сумі спаду напруг на елементах цього контуру

$$\sum E = \sum U, \quad (1.14)$$

і при цьому напрямок обходу контуру береться довільним. Для прикладу розглянемо фрагмент електричної схеми – контур, який містить два генератори е.р.с. та чотири резистори (рис. 1.20)

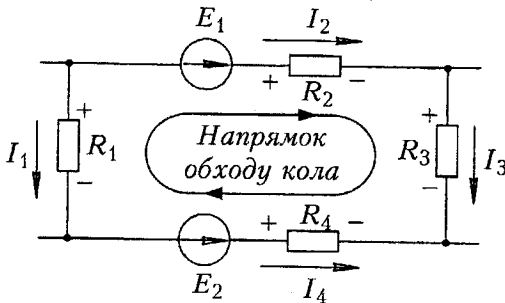


Рисунок 1.20 – Ілюстрація до другого закону Кірхгофа

У даному випадку рівняння (1.14.) слід записати так:

$$E_1 - E_2 = U_2 + U_3 - U_4 - U_1,$$

де $U_2 = I_2 R_2$, $U_3 = I_3 R_3$, $U_4 = I_4 R_4$, $U_1 = I_1 R_1$

Рівняння 1.14 можна переписати так:

$$\sum (E - U) = 0. \quad (1.15)$$

Тут під різницею $(E - U)$ слід розуміти напругу на вітті. Таким чином, алгебрична сума напруг на вітках у будь-якому замкненому колі (контурі) дорівнює нулю.

До речі, графік розподілу потенціалів, розглянутий у попередньому підрозділі (рис. 1.18), є прямою ілюстрацією другого закону Кірхгофа (формула 1.20). Дійсно, алгебрична сума напруг ділянок замкненого кола дорівнює нулю (потенціал у вузлі А дорівнює нулю).

Сума струмів, що втікають у будь-який вузол електричної схеми, дорівнює сумі струмів, що витікають з нього.

Алгебрична сума спаду напруги на усіх пасивних елементах схеми дорівнює алгебричній сумі е.р.с, увімкнених у цей контур.

1.10 Еквівалентні перетворення електричних схем методом згортки

Розрахунок складних електричних схем значно полегшується, коли виконати еквівалентне (рівнозначне) перетворення їх у більш прості і зручні для розрахунку. Перетворити, наприклад, у одноконтурну схему.

Серед усіх методів такого перетворення найбільш поширеним є метод згортки схеми зі змішаним з'єднанням елементів. Змішане ж з'єднання елементів являє собою комбінацію послідовного і паралельного з'єднань. Тому і розпочнемо згортку з цих двох простих випадків.

Послідовне з'єднання

Розглянемо рис. 1.21, на якому зображено послідовне з'єднання резисторів з опорами $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$.

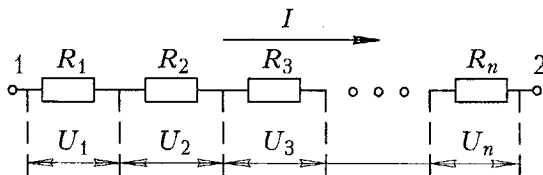


Рисунок 1.21 – Послідовне з'єднання резисторів

Через усі ділянки (резистори) цього кола протікає один і той же струм I . $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ – напруги (спад напруг), які будуть утворені цим струмом на відповідних ділянках кола.

Згідно з другим законом Кірхгофа:

$$U_{12} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n;$$

$$U_{12} = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \dots + IR_n;$$

$$U_{12} = I (R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n);$$

$$U_{12} = I \sum_{k=1}^n R_k,$$

де $R = \sum_{k=1}^n R_k$ називається еквівалентним опором ділянки кола, бо струм у колі залишається незмінним і дорівнюватиме: $I = U_{12}/R$, а схема на рис. 1.22 є еквівалентною схемі рис. 1.21.

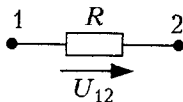


Рисунок 1.22 – Еквівалентна схема

Напруги на ділянках схеми 1.21, з'єднані послідовно, відносяться як опори цих ділянок: напруга на k -ій ділянці кола дорівнює добутку сумарної напруги U_{12} на відношення опору цієї ділянки R_k до еквівалентного опору R :

$$U_k = \frac{R_k}{R} \cdot U_{12}.$$

Паралельне з'єднання

На рис. 1.23 подана схема електричного кола з паралельним з'єднанням резисторів $R_1, R_2, R_3 \dots R_n$. Напруга на усіх резисторах однакова і дорівнює U . У вітках цієї схеми будуть протікати електричні струми $I_1, I_2, I_3 \dots I_n$. Ця схема має два вузли: в одному з них з'єднані верхні кінці резисторів, а іншому – нижні кінці резисторів, а різниця потенціалів між цими вузлами дорівнює U .

Згідно з першим законом Кірхгофа струм I (втікає у верхній вузол схеми) дорівнює сумі струмів через резистори (витікають з цього вузла):

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n,$$

або

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} \quad (\text{див. рис. 1.23, а}),$$

$$I = U \cdot G_1 + U \cdot G_2 + U \cdot G_3 + \dots + U \cdot G_n \quad (\text{див. рис. 1.23, б}),$$

де $G_1 = \frac{1}{R_1}, G_2 = \frac{1}{R_2}, G_3 = \frac{1}{R_3}, \dots, G_n = \frac{1}{R_n}$ – провідності відповідних віток схеми (рис. 1.23, а і б).

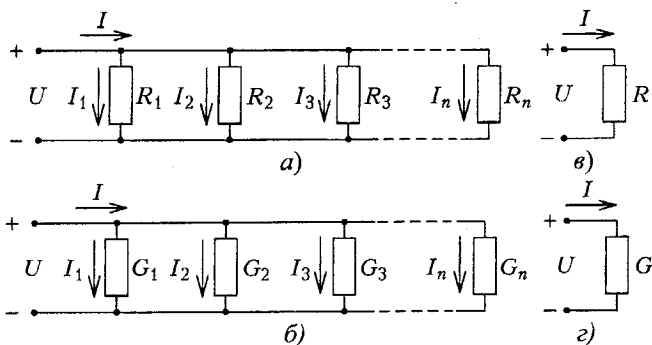


Рисунок 1.23 – Паралельне з'єднання резисторів

На рис. 1.23,г $G = \sum_{k=1}^n G_k$ – це еквівалентна провідність електричної

схеми. Зваживши, що величина R (рис. 1.23,в) є оберненою G ($R = \frac{1}{G}$), першу доцільно назвати еквівалентним опором.

Наприклад, у випадку двох паралельно з'єднаних опорів R_1 і R_2 , еквівалентний опір R дорівнюватиме:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2},$$

у випадку трьох опорів:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}.$$

Сила струму I_k у k -ій вітці схеми дорівнює добутку сумарного струму на відношення еквівалентного опору схеми до опору цієї вітки:

$$I_k = \frac{R}{R_k} \cdot I.$$

Змішане з'єднання

Розглянемо рис. 1.24, де зображено схему зі змішаним з'єднанням резисторів. Резистори R_2 та R_5 між собою з'єднані послідовно, бо струм I_2 послідовно протікає через ці резистори.

Еквівалентний їм резистор матиме опір:

$$R_6 = R_2 + R_5,$$

а вихідна схема (рис. 1.24,а) замінюється її еквівалентною (1.24,б). Резистори R_3 , R_4 та R_6 з'єднані між собою паралельно, бо мають два спільних вузли: верхній, де струм I розгалужується по трьох вітках та

нижній, де ці струми додаються. Очевидно, що цю трійку резисторів можна замінити еквівалентним їм резистором з опором:

$$R_7 = \frac{R_3 \cdot R_4 \cdot R_6}{R_3 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_6 + R_4 \cdot R_6}$$

і перейти до схеми рис. 1.24,в.

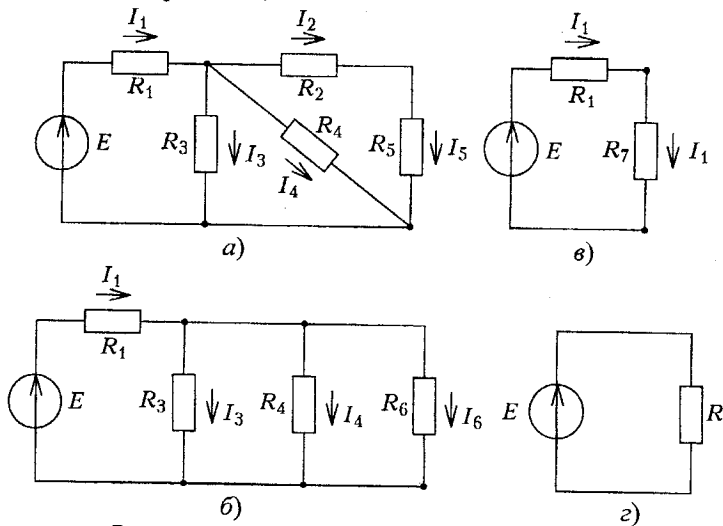


Рисунок 1.24 – Змішане з'єднання резисторів

І останній крок: послідовно з'єднані резистори R_1 та R_7 замінити резистором з опором $R=R_1+R_7$. Таким чином, резистор з опором R є еквівалентним усім резисторам схеми 1.24,а.

Струм генератора е.р.с.

$$I_1 = \frac{E}{R},$$

добуток $I_1 \cdot R_7 = U_1$ дорівнює напрузі між вузлами паралельно з'єднаних резисторів R_3 , R_4 та R_6 , а струми через ці резистори, відповідно, будуть дорівнювати:

$$I_3 = \frac{U_1}{R_3}, I_4 = \frac{U_1}{R_4}, I_2 = \frac{U_1}{R_6}.$$

У колі з послідовно з'єднаними резисторами через усі ділянки кола протікає один і той же струм, напруга на ділянках кола прямо пропорційна опорі цієї ділянки, сума цих напруг дорівнює напрузі на кінцях кола, а його еквівалентний опір дорівнює сумі опорів ділянок

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n.$$

В електричному колі з паралельним з'єднанням резисторів на усіх резисторах буде спільна напруга, струми через резистори – прямо пропорційні провідностям віток, струм у спільному провіднику буде дорівнювати сумі струмів віток, а еквівалентна провідність кола дорівнює сумі провідностей віток

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n.$$

1.11 Взаємне перетворення трикутника і зірки опорів

Під перетворенням трикутника (рис. 1.25,б) в еквівалентну йому зірку (рис. 1.25,а) розуміється така заміна з'єднань елементів схеми трикутник в з'єднання елементів за схемою зірки (рис. 1.25,в), при якій між однойменними вузлами залишаються незмінними напруга і струми, які входять в однойменні вузли. Це означає, що потужності у цих колах є однаковими.

Аналогічне визначення, очевидно, можна дати і перетворенню зірки в еквівалентний їй трикутник.

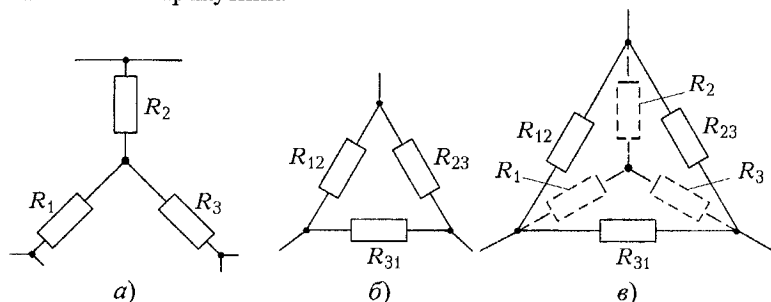


Рисунок 1.25 – Схема зірки опорів (а), трикутника опорів (б), та схеми, що пояснює перетворення трикутника на зірку

Слід зазначити, що саме перехід трикутник – зірка має у радіотехніці велике практичне значення, бо у випрямлячах змінної напруги у постійну, у вимірювальних та керуючих пристроях часто використовуються так звані мостові схеми.

Отже, у переході трикутник – зірка вихідними даними є опори: \$R_{12}\$, \$R_{23}\$, \$R_{31}\$, необхідно визначити опори \$R_1\$, \$R_2\$, \$R_3\$, променів еквівалентної зірки.

За другим законом Кірхгофа, записаного для трикутного контуру (рис. 1.25,б) можна записати:

$$R_{12} \cdot I_{12} + R_{23} \cdot I_{23} + R_{31} \cdot I_{31} = 0. \quad (1.16)$$

струм між вузлами 2 і 3, за першим законом Кірхгофа, дорівнюватиме (рис. 1.25, в):

$$I_{23} = I_{12} + I_2,$$

а між вузлами 3 і 1

$$I_{31} = I_{12} - I_1.$$

Підставивши ці значення струмів I_{23} та I_{31} у рівняння (1.16) і розв'язавши його відносно струму I_{12} , отримаємо:

$$I_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} - I_2 \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напруга між вузлами 1 і 2 (рис. 1.25,б) дорівнюватиме:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} \cdot R_{12} - I_2 \cdot R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

З іншого боку, на схемі рис. 1.25,а напруга між цими ж вузлами дорівнює:

$$U_{12} = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2.$$

прирівняємо їх: $U_{12} = U_{12}$.

$$I_1 \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} - I_2 \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2.$$

Звідки, прирівнявши коефіцієнти при струмі I_1 та I_2 отримаємо:

$$R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (1.17)$$

$$R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.18)$$

Визначивши аналогічно напругу між двома будь-якими вузлами, знайдемо вираз для R_3 :

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (1.19)$$

До речі, перехід від виразу (1.17) через (1.18) до (1.19) легко запам'ятати, бо знаменники скрізь є незмінними, а в чисельниках робиться циклічна заміна індексів за алгоритмом 1-2-3-1.

Іноколи виникає необхідність виконати перетворення типу зірка - трикутник.

При такому переході заданими є опори резисторів R_1, R_2, R_3 , а невідомими – опори резисторів R_{12}, R_{23}, R_{31} . Для знаходження їх значень розділимо (1.19) на (1.17) та (1.19) на (1.18) і отримаємо рівняння:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{31} \cdot R_{12}} = \frac{R_{23}}{R_{12}}; \quad R_{23} = \frac{R_3}{R_1} R_{12}, \quad (1.20)$$

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} \cdot R_{23}} = \frac{R_{31}}{R_{12}}; \quad R_{31} = \frac{R_3}{R_2} R_{12}. \quad (1.21)$$

Отримані значення R_{23} та R_{31} підставимо у рівняння (1.17) та розв'яжемо його відносно R_{12} :

$$R_1 = \frac{\frac{R_3 \cdot R_{12}^2}{R_2}}{R_{12} + \frac{R_3 \cdot R_{12}}{R_1} + \frac{R_3 \cdot R_H}{R_2}} = \frac{R_3 \cdot R_{12} \cdot R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1};$$

$$1 = \frac{R_3 \cdot R_{12}}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1};$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3};$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}. \quad (1.22)$$

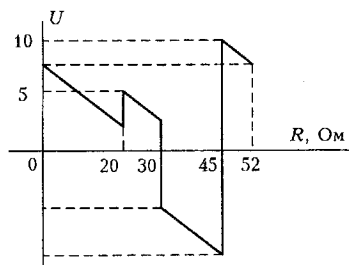
Вирази для R_{23} та R_{31} легко знайти підставивши (1.22) в (1.20) та (1.21), або виконавши циклічну заміну індексів:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}, \quad (1.23)$$

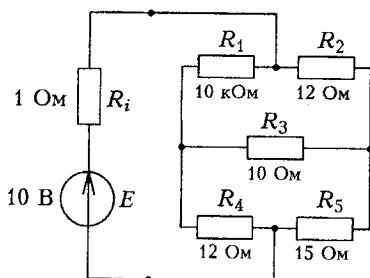
$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2}. \quad (1.24)$$

1.12 Запитання і задачі для закріплення

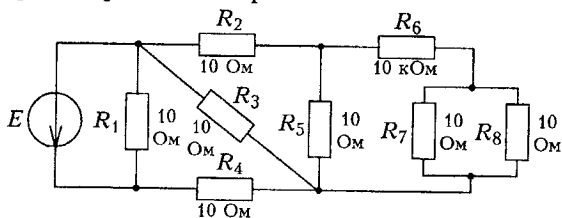
1. Що таке електричне коло, електрична схема, вітка, вузол та контур?
2. Дати означення поняттям: один ампер, вольт, ом, ват, джоуль.
3. Що таке генератор напруги (е.р.с.) та генератор струму?
4. Сформулювати закон Ома для ділянки і повного кола, перший та другий закони Кірхгофа.
5. Що таке лінійний і нелінійний елементи? Навести приклади.
6. На ділянці кола поглинається 100 Вт потужності, коли через ділянку протікає електричний струм 5 А. Визначити опір ділянки, напругу на ній та енергію за 1 годину.
7. Визначити опір та провідність мідного дроту довжиною 25 м та поперечним перерізом $0,5 \text{ мм}^2$. На скільки зміниться цей опір, якщо температура його зросте від 20 до 80 °С.
8. Зобразити електричний контур з таким розподілом потенціалів у ньому:



9. Визначити струм, який спожива міст Уінстона від джерела живлення з е.р.с. 10 В та внутрішнім опором 1 Ом, а резистори: $R_1=R_3=10$ Ом, $R_2=R_4=12$ Ом, $R_5=15$ Ом.



10. Спростити до одноконтурної схему та визначити еквівалентний опір, коли всі резистори мають опір по 10 Ом.



2 ГАРМОНІЧНИЙ СТРУМ

2.1 Генерування гармонічних е.р.с. і струму

З курсу фізики відомо, що на кінцях провідника, який рухається, перетинаючи силові лінії магнітного поля під кутом α , виникає електрорушійна сила індукції e :

$$e = B \cdot l \cdot V \cdot \sin \alpha. \quad (2.1)$$

де: B – величина індукції магнітного поля,
 l – довжина прямолінійного провідника,
 V – швидкість руху провідника.

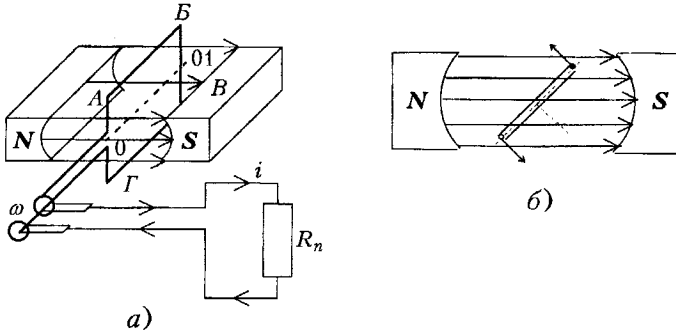


Рисунок 2.1 – Схема конструкції електрогенератора (а) та проекція вздовж осі обертання рамки (б)

На рис. 2.1,а подана схема конструкції електрогенератора гармонічних е.р.с. та струму, де в однорідному магнітному полі проти годинникової стрілки навколо осі OO_1 з кутовою швидкістю ω обертається рамка. Кінці рамки обертаються з прикріпленими до них кільцями, які ковзають на контактах, з яких знімається наведена е.р.с. індукції, яка викликає струм i , що протікає через навантаження генератора R_n .

Рис. 2.1,б пояснює справедливості виразу (2.1) для даного випадку. Дійсно, коли $\alpha=0$ (рамка вертикальна) провідники AB і BC рамки ковзають вздовж силових ліній поля, не перетинаючи його і тому е.р.с. ($\sin \alpha = 0$) дорівнює нулю. Коли ж рамка, обертаючись, займе горизонтальне положення ($\alpha=90^\circ$, $\sin \alpha = 1$), то вона буде перетинати за одиницю часу максимальну кількість силових ліній поля і тому е.р.с. дорівнюватиме максимальному значенню ($e=E_m$).

Лінійну швидкість обертання V точки A можна виразити через кутову швидкість ω та радіус обертання OA :

$$V = \omega \cdot OA.$$

Якщо за довільний відрізок часу t рамка повернеться на кут α , то справедливим буде вираз:

$$\alpha = \omega \cdot t.$$

Підставивши ці вирази для V та α у формулу (2.1), отримаємо:

$$e = B \cdot l \cdot \omega \cdot OA \cdot \sin \omega t.$$

Позначивши $B \cdot l \cdot \omega \cdot OA$ через E_m , матимемо:

$$e = E_m \cdot \sin \omega t. \quad (2.2)$$

Збуджена на вихідних контактах (щітках) електрогенератора е.р.с. викличе струм, що протікатиме через навантаження з опором R_H . Струм через резистор згідно із законом Ома для повного кола, дорівнює:

$$i = \frac{e}{R_i + R_H}.$$

Нехтуючи внутрішнім опором R_i (опором дроту рамки) у порівнянні з R_H , останній вираз можна переписати:

$$i = \frac{e}{R_H} = \frac{E_m}{R_H} \cdot \sin \omega t. \quad (2.3)$$

Отже, електрогенератор виступає як джерело гармонічної (синусної і косинусної) е.р.с. При умові $R_i \gg R_H$ електрогенератор є джерелом гармонічного струму.

Синусний струм (е.р.с.) є гармонічною (синусною) функцією кута $\alpha = \omega \cdot t$. Так при $t=0$, $i=0$, при $\alpha=90^\circ$, $i=I_m$, при $\alpha=180^\circ$, $i=0$, при $\alpha=270^\circ$, $i=-I_m$ (струм протікає у протилежному напрямку), при $\alpha=360^\circ$, $i=0$ (початкове положення рамки).

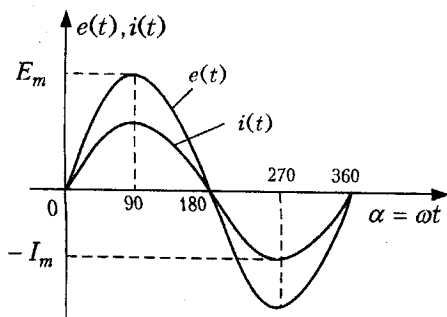


Рисунок 2.2 – Графік гармонічної е.р.с. та гармонічного струму

У такий спосіб будуються електрогенератори джерела електричної енергії, наприклад, 220 В з частотою 50 Гц. Високочастотні ж генератори гармонічних коливань, які широко використовуються в радіопередавальних та радіоприймальних пристроях, зокрема, є радіоелектронними пристроями.

При увімкненні джерела живлення у вихідному контурі (рис. 2.3) виникають гармонічні коливання на високій частоті цього контуру, частина енергії яких через конденсатор C зворотного зв'язку подаються у вхідний контур генератора, підсилюються транзистором, збільшуючи

розмах коливань у вихідному контурі і так цикл за циклом аж поки у схемі не встановиться стаціонарний режим автогенерації. Детально робота подібних пристроїв вивчається в спеціальних дисциплінах підготовки радіоспеціалістів.

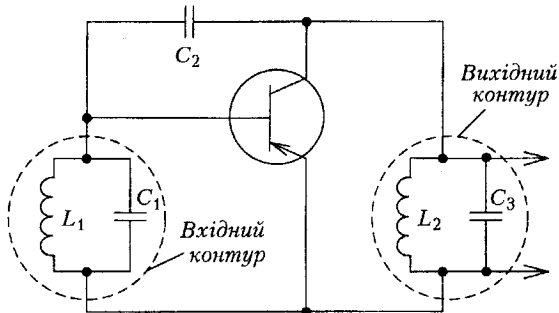


Рисунок 2.3 – Спрощена схема високочастотного генератора гармонічних коливань

2.2 Математична, графічні моделі та параметри гармонічного струму

Як бачимо, гармонічний струм є синусою функцією часу $i = i(t) = I_m \sin \omega t$. Цей математичний вираз описує характер фізичного процесу, який є процесом протікання у колі струму. Значення якого у будь-який момент часу можна визначити за наведеною формулою. Тому саме формула:

$$i = I_m \sin \omega t. \quad (2.4)$$

називається математичною моделлю цього гармонічного процесу (гармонічного струму). Максимальне значення струму називається його амплітудним значенням або амплітудою, а ω – круговою (коловою) частотою струму, яка вимірюється у радіанах за секунду. Амплітуда I_m та частота ω називаються параметрами гармонічного процесу. Кругова частота, як відомо, може бути вираженою через кількість обертів за секунду f , які вимірюються у герцах (Гц):

$$\omega = 2\pi f.$$

Період гармонічних коливань визначається відрізком часу, за який рамка зробить повний оберт, і позначається через T . Відомо, що період і частота є величинами взаємно оберненими:

$$T = \frac{1}{f}; f = \frac{1}{T}.$$

Якщо гармонічний процес почати описувати з положення рамки, коли вона уже повернулася на кут α_0 , тобто від горизонтального положення поворот тривав t_0 секунд, то

$$\alpha_0 = \omega \cdot t_0.$$

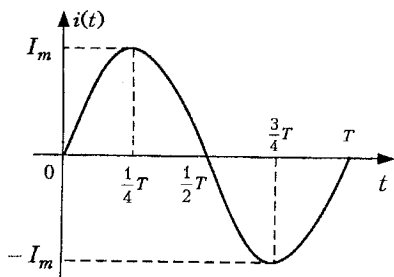


Рисунок 2.4 – Періодичність гармонічного процесу у часі

І тоді математична модель електричного струму буде такою:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha_0), \quad (2.5)$$

а кут α_0 називається початковою фазою цього гармонічного процесу. Вираз $(\omega t + \alpha_0)$ називається поточним значенням фази, а ωt – змінна частина фази, яка неперервно зростає прямо пропорційно часу t . Для такого випадку графік залежності $i(t)$ зображено на рис. 2.5 (суцільна лінія).

Початком синусоїди є момент часу, де її графік, проходячи через $i=0$, зростає. Такі моменти зустрічатимуться на графіку через кожен період коливання T .

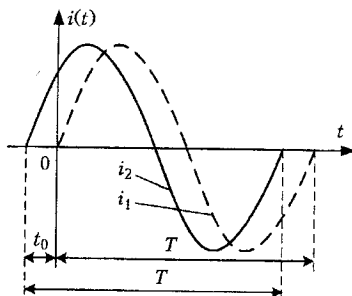


Рисунок 2.5 – Пояснення до поняття різниці фаз

З графіків рис. 2.5 (і з виразів 2.4 та 2.5) бачимо, що процес $i_2(t)$ почався на t секунд раніше чим $i_1(t)$. Тому і кажуть, що струм i_2 випереджає струм i_1 на α_0 радіанів, або i_1 на стільки ж відстає за фазою від i_2 . На рис. 2.6 маємо:

$$i_2 = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m (\sin \omega t \cdot \cos 90^\circ + \cos \omega t \cdot \sin 90^\circ) = I_m \cos \omega t.$$

Іншими словами, і синусний, і косинусний процеси є гармонічними, але зсунутими між собою у часі за фазою на ωt_3 радіан відносно i_1 та на відносно i_2 , а тому його математична модель може бути записана:

$$i_3 = I_{m3} \sin(\omega t - \omega t_3) = I_{m3} \sin \omega(t - t_3),$$

або

$$\begin{aligned} i_3 &= I_{m3} \cos[\omega t - (\omega t_3 + 90^\circ)] = I_{m3} \cos[\omega(t - t_3) - 90^\circ] = \\ &= I_{m3} \cos \omega(t - t_3) \cos 90^\circ + I_{m3} \sin \omega(t - t_3) \sin 90^\circ = I_{m3} \sin \omega(t - t_3). \end{aligned}$$

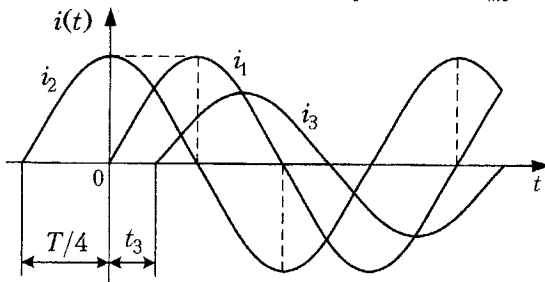


Рисунок 2.6 – Косинусний процес i_2 випереджає синусний – i_1 на чверть періоду (90°)

Зауважимо ще, що графіки (рис. 2.4, 2.5, та 2.6) називаються часовими діаграмами гармонічних процесів (струмів, е.р.с., напруг).

А тепер розглянемо рис. 2.7, де подані залежності довжин проекції радіуса I_m кола від кута, на який цей радіус повернеться за час t , обертаючись проти годинникової стрілки з положення $\alpha_0 = 0$ з круговою (коловою) швидкістю ω .

Подання гармонічного процесу синусною чи косинусною функцією часу є рівноправними, бо перехід від одного подання до іншого не змінює суті процесу, а лише пов'язане з урахуванням 90° зсуву фаз між ними.

Очевидно, якби радіус I_m почав обертатися не з положення $\alpha_0 = 0$, а з $\alpha_0 = \omega \cdot t_0$, то це означало б, що процес обертання почався з випередженням на цей кут

$$i_3 = I_m \sin(\omega t - \alpha_0) \text{ або } i_4 = I_m \cos(\omega t - \alpha_0),$$

тобто, ці гармоніки за фазою відставали б від попередніх на кут α .

Якби радіус I_m почав обертатися до моменту $t=0$ ($\alpha_0 = 0$), ми б говорили про гармоніки:

$$i_5 = I_m \sin(\omega t + \alpha_0) \text{ або } i_6 = I_m \cos(\omega t + \alpha_0),$$

які б за фазою випереджали перші на кут α_0 .

Розглянемо рис. 2.8, на якому зображено взаємне розташування двох векторів I_{m1} та I_{m2} , довжини яких дорівнюють амплітудам двох одночастотних гармонік, а кут між ними – куту зсуву фаз між ними. Обидва вектори обертаються проти напрямку годинникової стрілки з однаковою кутовою швидкістю ω і кут між ними ($\alpha_1 - \alpha_2$) буде зберігати своє значення у будь-який момент часу.

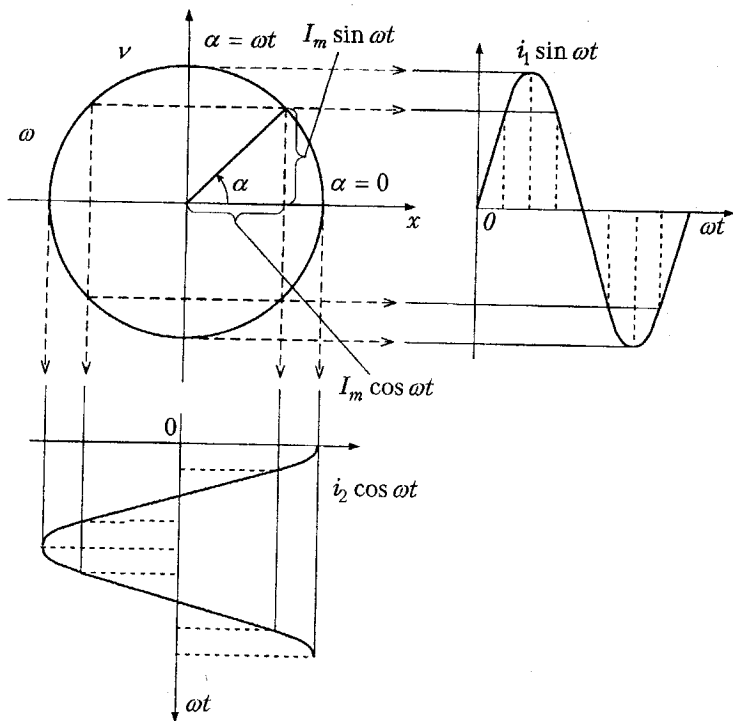


Рисунок 2.7 – Ілюстрація кругової (колової) діаграми – графічної моделі гармонічного процесу

Початком відліку фазових кутів, так само як і в колових діаграмах, є додатний напрямок осі Ox прямокутної системи координат HOY .

Математичні моделі цих гармонік запишуться:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1), i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \alpha_2).$$

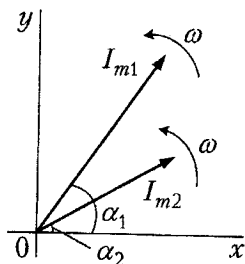


Рисунок 2.8 – Пояснення до поняття векторної діаграми

Тепер, припустимо, треба знайти гармоніку, яка була б сумою заданих гармонік. Амплітуда цієї гармоніки, очевидно, є векторною сумою векторів I_{m1} та I_{m2} :

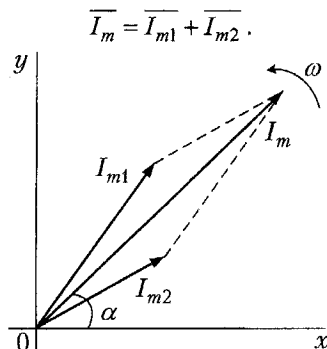


Рисунок 2.9 – Векторна сума двох векторів

Початкова фаза дорівнює куту α і обертається він з однією і тією ж частотою ω , тобто:

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Знайдемо амплітуду та початкову фазу струму аналітично:

$$i = I_{m1} \sin(\omega t + \alpha_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \alpha_2),$$

де $I_m \sin(\omega t + \alpha) = I_{m1} \cos \alpha_1 \sin \omega t + I_{m1} \sin \alpha_1 \cos \omega t + I_{m2} \cos \alpha_2 \sin \omega t + I_{m2} \sin \alpha_2 \cos \omega t$, (де: $I_m = \sqrt{(I_{m1} \cos \alpha_1 + I_{m2} \cos \alpha_2)^2 + (I_{m1} \sin \alpha_1 + I_{m2} \sin \alpha_2)^2}$,
 $\alpha = \arctg \frac{I_{m1} \sin \alpha_1 + I_{m2} \sin \alpha_2}{I_{m1} \cos \alpha_1 + I_{m2} \cos \alpha_2}$).

Пересвідчуємося, що цей шлях у порівнянні з графічним значно довший і складніший. Особливо ж це стане очевидним, коли потрібно додавати три і більше гармонік.

Параметри, які повністю характеризують гармонічний процес (струм, е.р.с., напругу) називаються амплітудою, частотою та початковою фазою цього процесу.

Електричний гармонічний процес можна подати за допомогою математичної моделі або однієї з графічних моделей: часової, кругової (колової) діаграми або векторної діаграми.

Початком гармоніки є момент, коли вона, зростаючи, проходить через нуль.

Різниця початкових фаз двох гармонік (одночастотних) називається фазовим зсувом між ними.

2.3 Середнє та діюче значення гармонічного струму

Середнє значення $F_{\text{сеп}}$ будь-якої періодичної функції $f(t)$, як відомо з курсу математики, дорівнює:

$$F_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (2.6)$$

де T – період функції.

У досліджуваному випадку $f(t) = i(t) = I_m \sin \omega t$, де кругова частота $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, матимемо:

$$\begin{aligned} I_{\text{сеп}} &= \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{\omega T} \int_0^T \sin \omega t d\omega t = \\ &= \frac{I_m \omega t}{2\pi T} \left(-\sin \frac{2\pi}{T} t \right) \Big|_0^T = \frac{-I_m}{2\pi T} \left(\sin \frac{2\pi}{T} T - 0 \right) = 0. \end{aligned}$$

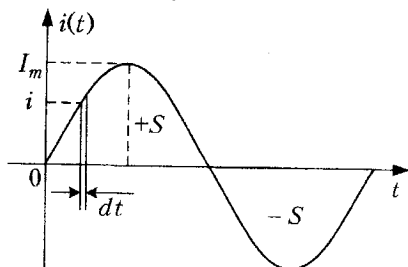


Рис. 2.10. Ілюстрація до інтегрування гармоніки

Цей результат демонструється на рис. 2.10, виходячи з геометричного смислу інтеграла, він дорівнює площі обмеженої графіком синусоїди та відрізком OT осі абсцис. За перший півперіод (від 0 до $T/2$) інтегрування дасть площу $+S$, а за другий (від $T/2$ до T) – площу S , що після складання дасть нуль.

Введемо поняття діючого (середньоквадратичного) значення гармонічного струму I таким чином:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (2.7)$$

І визначимо аналітичний зв'язок діючого і амплітудного значень гармонічного струму $i(t) = I_m \sin \omega t$.

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2\pi} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) d2\omega t} = \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^T d2\omega t - \frac{1}{2\pi} \int_0^T \cos 2\omega t d2\omega t}. \end{aligned}$$

А оскільки середнє за період значення гармоніки дорівнює нулю, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^T \cos 2\omega t d2\omega t = 0,$$

і тоді:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^T d2\omega t} = \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} (2\omega T - 0)} = \\ &= \frac{1}{2} I_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} 2 \frac{2\pi}{T}} = \frac{I_m \sqrt{2}}{2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Отже, діюче (середньоквадратичне) значення I гармонічного струму (за один період) дорівнює:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.8)$$

Який же фізичний зміст поняття діючого значення гармонічного струму? Для цього визначимо кількість тепла, яке виділиться на резисторі R при протіканні через нього струму протягом одного періоду T . Струм, який протікає через R (рис. 2.10) на нескінченно малому відрізку часу dt можна вважати постійним та рівним миттєвому значенню i . Тоді, згідно із законом Джоуля-Ленца, за цей час на опорі R виділиться $0,24 \cdot i^2 \cdot R \cdot dt$ калорій тепла, а за весь період T виділиться: $Q = 0,24 \cdot I_m^2 \cdot R \cdot T$ калорій.

З іншого боку, припустимо, що ми підібрали постійний струм, який на такому ж резисторі R за час $t=T$, виділить таку ж саму кількість тепла Q .

За законом Джоуля-Ленца ця кількість тепла дорівнює: $Q = 0,24 \cdot I_0^2 \cdot R \cdot T$ калорій.

Прирівнявши праві частини двох останніх виразів, отримаємо, що $I = I_0$, а, отже, під діючим значенням гармонічного струму слід розуміти такий постійний струм, який, протікаючи через один і той же резистор, виділить на ньому за один і той же відрізок часу таку ж кількість тепла, що і гармонічний струм.

За час t , кратний періоду T гармонічного процесу, його середнє значення дорівнює нулю: $T = nT$, де n – натуральне число.

Діюче (середньоквадратичне) значення гармонічного струму є таке значення постійного струму, який на однаковий відрізок часу віддасть одному і тому ж резистору таку ж кількість енергії, що і гармонічний струм.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

2.4 Резистор і активний опір

Розглянемо ділянку кола з резистором R_1 (рис. 2.11) на кінцях якої діє напруга з миттєвим значенням:

$$u(t) = U_m \cos \omega t. \quad (2.9)$$

Резистор, як відомо, є пасивним елементом схеми, у якому енергія електричного струму перетворюється в тепло. Тобто, він – типовий споживач (приймач) електричної енергії.

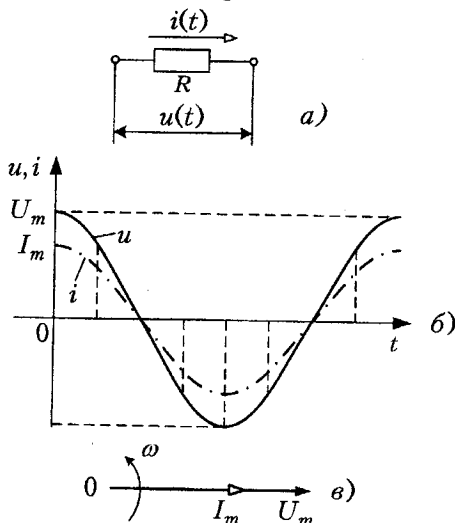


Рисунок 2.11 – Ілюстрації до кола із резистором

За законом Ома, який є справедливим для миттєвих значень напруги і струму, через резистор протікатиме струм:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t, \quad (2.10)$$

де $I_m = \frac{U_m}{R}$ – амплітуда цього струму.

Порівнюючи (2.9) і (2.10), робимо висновок, що початкова фаза струму, який протікає через резистор, дорівнює початковій фазі напруги на ньому. Тобто, на досліджуваній ділянці кола струм і напруга збігаються за фазою. Це ілюструється часовою (рис. 2.11,б) та векторною (рис. 2.11,в) діаграмами.

Відношення амплітуд напруги і струму на резисторі:

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{I_m / \sqrt{2}} = \frac{U}{I} = R,$$

дорівнюють відношенню її діючих значень, що доводить справедливність закону Ома для діючих значень гармонічного струму:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Введемо поняття миттєвої потужності $p(t)$ електричного струму на ділянці кола (рис. 2.11,а) як добуток миттєвих значень напруги і струму:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Підставивши сюди вирази для напруги і струму з (2.9) і (2.10), отримаємо:

$$p(t) = U_m \cdot I_m \cos^2 \omega t$$

і проаналізуємо цей результат. Скориставшись відомою з тригонометрії тотожністю, матимемо:

$$p(t) = U_m \cdot I_m \frac{1}{2}(1 + \cos 2\omega t);$$

$$p(t) = \frac{U_m \cdot I_m}{2} + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 2\omega t. \quad (2.11)$$

Побудуємо часову діаграму за формулою (2.11). Це буде косинусоїда з амплітудою $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$ і частотою 2ω – вдвічі більшою, ніж частота $u(t)$ і $i(t)$, піднята над віссю абсцис на величину $\frac{U_m \cdot I_m}{2}$ – сталу складову потужності, а $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 2\omega t$ – змінну складову потужності (рис. 2.12).

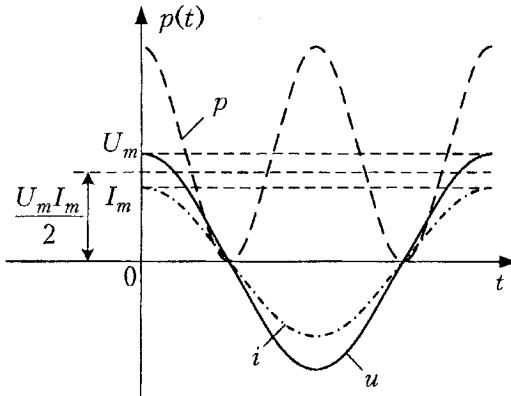


Рисунок 2.12 – Часова діаграма $p(t)$

Скрізь миттєве значення потужності є додатною величиною, бо струм і напруга завжди мають однаковий знак. Додатне значення потужності вказує на те, що енергія від джерела (генератора) повністю передається споживачу (приймачу), де і витрачається на нагрівання резистора.

Середнє за період значення $p(t)$:

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{U_m \cdot I_m}{2} + \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos 2\omega t \right) dt = \frac{U_m \cdot I_m}{2}.$$

Саме ця потужність і є та потужність, яка розвивається на резисторі, а кількість енергії, що перетворюється на тепло за період, буде:

$$W = P_{\text{сеп}} \cdot T = \frac{U_m \cdot I_m}{2} T.$$

Середнє значення потужності (миттєвого значення потужності) називається активною потужністю P :

$$W = \frac{U_m \cdot I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U \cdot I \text{ або } P = \frac{U^2}{R}.$$

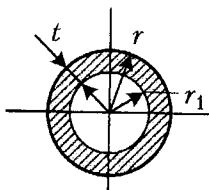


Рисунок 2.13 – Пояснення до поверхневого ефекту

Опір R , на якому виділяється (у вигляді тепла) активна потужність P , називається активним опором резистора.

Слід зауважити, що активний опір є опором змінного струму, більшим за опір постійного струму. Справа у тому, що при змінному струмі проявляє себе так званий поверхневий ефект (рис. 2.13).

Суть цього ефекту полягає в тому, що електромагнітне поле, яке оточує провідник зі струмом, проникає в тіло провідника на глибину t :

$$t = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}},$$

згасаючи у $e=2,73$ раза. Тобто на цій глибині поле буде ослабленим приблизно у 2,5 раза. Для мідного дроту, наприклад, на частоті 1 МГц $t=65$ мікрон. На глибині ж 200 мкм, очевидно, його практично немає. Отже, електрони, які знаходяться у провіднику глибше 0,20 мм, участі у електропровідності не беруть. Виходячи з формули для t , видно, що зі збільшенням частоти струму ω , магнітної проникності μ та питомої провідності провідника участь в електропровідності братимуть лише електрони, які знаходяться у тонкому поверхневому шарі провідника.

Повертаючись до поняття активного опору, наголосимо, що він має підраховуватись за однією з формул:

$$R = \frac{U}{I}; \quad R = \frac{P}{I^2}; \quad R = \frac{U^2}{P},$$

підкреслюючи цим, що йдеться про саме активний опір (який фактично діє при заданих умовах: частоті струму, матеріалі провідника та його діаметрі),

а не за (1.3), де визначається опір постійного струму. Можна скористатися і цією формулою, але замість S підставити значення активної частини площі поперечного перерізу провідника S_a , яка дорівнює (рис. 2.13):

$$S_a = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi(d - t)t,$$

де $d = 2r$ – діаметр циліндричного провідника.

Наприклад, якщо мідний провідник певної довжини і діаметром 1 мм на постійному струмі має опір R_0 , то на частоті 10 кГц, $t=2$ мм і опір його буде таким же, а на частоті 100 кГц, $t=0,63$ і опір зростає до значення $1,2R_0$, а на частоті 1 МГц – до $2,8R_0$.

Закон Ома залишається справедливим і для діючих значень напруги і струму.

$$I = U / R.$$

Миттєве значення потужності на резисторі є величиною додатною (енергія споживається приймачем у кількості, яка називається активною потужністю):

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = U^2 / R.$$

Напряга на резисторі та струм у ньому мають однакові початкові фази (збігаються за фазою).

2.5 Котушка індуктивності та індуктивність

Котушка індуктивності – це промисловий виріб, радіодеталь, фізично існуючий об'єкт. Основним параметром якого є індуктивність L . На рис. 2.14 показано умовні позначення котушки індуктивності на електричній схемі.

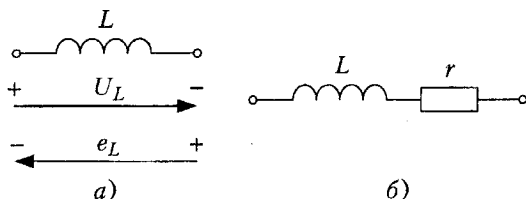


Рисунок 2.14 – Умовні позначення котушки індуктивності

Реальні котушки індуктивності мають, так званий опір втрат r (рис. 2.14,б), який є також параметром цього елемента кола. Цей параметр характеризує усі енергетичні втрати в котушці: втрати на нагрівання дроту через його активний опір, втрати на випромінювання та втрати в осерді, яке нагрівається вихровими струмами.

В радіотехніці використовуються котушки індуктивності з настільки малими втратами, що ними, у абсолютній більшості випадків, можна знехтувати і користуватися поняттям ідеальної котушки (рис. 2.14,а). У

тих випадках, коли втратами знехтувати неможливо, розрахунки ведуться з урахуванням параметра r , який враховує найбільш суттєві з можливих втрат енергії.

Усі втрати у котушці є невідновними, тому мова йде про активну потужність втрат, яка пов'язана з перетворенням енергії електричного струму в інший вид енергії (теплову та випроміненого електромагнітного поля) і тому параметр r є активним опором.

Основний параметр котушки – це її індуктивність L , яка кількісно оцінює ступінь її здатності накопичувати енергію магнітного поля. Індуктивність визначається за формулою:

$$L = \psi / i, \quad (2.12)$$

де ψ – потокозчеплення, викликане струмом i у котушці.

Нагадаємо, що потокозчеплення котушки індуктивності є сума добутків магнітних потоків, обумовлених струмом у витках котушки, на число витків, з якими ці потоки зчеплені. Наприклад, у тороїдальній котушці усі витки пронизуються одним і тим же магнітним потоком і потокозчеплення дорівнює добутку магнітного потоку на число витків. Потокозчеплення, як і магнітний потік, вимірюється у веберах (Вб), а індуктивність – у генрі (Гн). Оскільки завжди потокозчеплення (магнітний потік прямо пропорційний струмові) і струм мають однакові знаки, індуктивність L є величина додатна.

Строго кажучи, потокозчеплення є нелінійною функцією струму, але у більшості радіотехнічних задач маємо справу з невеликими струмами і намагніченість котушки зі зростанням струму (рис. 1.15) зростає лінійно:

$$\psi = L \cdot i, \quad (2.13)$$

а значить L є величиною сталою. Котушка ж індуктивності, у такому разі, є лінійним елементом.

Згідно із законом електромагнітної індукції Фарадея-Максвела, експериментально встановленого Майклом Фарадесом і описаного математично Дж. К. Максвелом, зміна потокозчеплення (магнітного потоку) викликає електрорушійну силу (е.р.с.) самоіндукції, яка визначається за формулою:

$$e_L = - \frac{d\psi}{dt}. \quad (2.14)$$

Знак мінус означає, що е.р.с. самоіндукції протилежна потокозчепленню (а значить – струму), коли магнітний потік (i струм) зменшується, оскільки $d\psi > 0$; і збігається за напрямком з потокозчепленням (i струмом), коли магнітний потік (i струм) зменшується, оскільки $d\psi < 0$.

Іншими словами, електрорушійна сила самоіндукції має таку полярність, щоб чинити опір зростанню струму, і підтримувати струм при його зменшенні, тобто чинити опір усякій зміні струму через котушку.

Напруга ж на котушці U_L за напрямком завжди збігається зі струмом і

тому буде протилежною е.р.с. самоіндукції при зростанні струму (рис. 2.13). При зменшенні ж струму е.р.с. e_L змінить свій знак на протилежний полярності і збігатиметься з напругою U_L за напрямком. При зміні напрямку струму на протилежний полярність U_L теж зміниться (другий півперіод синусоїди гармонічного струму), але е.р.с. e_L буде знову протиполярною напрузі U_L при зростанні (за абсолютною величиною) струму і однієї полярності при зменшенні (за абсолютною величиною) струму через котушку.

Припустимо, що гармонічний струм

$$i = I_m \sin \omega t.$$

Підставивши (2.13) в (2.14), отримаємо:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \omega I_m \cos \omega t;$$

$$e_L = -L \omega I_m \cos \omega t = -\omega L I_m \sin(90^\circ - \omega t) = E_m \sin(\omega t - 90^\circ),$$

де $E_m = \omega L I_m$ – амплітуда гармонічної е.р.с. самоіндукції e_L . За фазою остання відстає від струму на 90° (на чверть періоду T), що і показано на рис. 2.15.

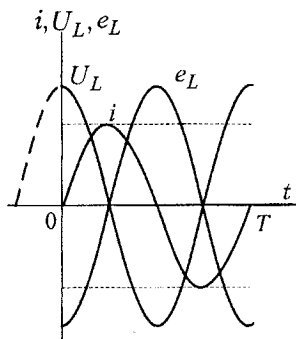


Рисунок 2.15 – Струм, напруга та е.р.с. самоіндукції у котушці

Величину U_L рівну е.р.с. індукції за модулем і протилежну їй за фазою, називають напругою на котушці:

$$U_L = -e_L = L \frac{di}{dt} = U_m \cos \omega t,$$

де U_m – амплітуда цієї напруги. Останній вираз, як відомо з тригонометрії, можна переписати так:

$$U_L = U_m \sin(\omega t + 90^\circ),$$

що свідчить про те, що струм через котушку відстає від напруги на ній на 90° (на чверть періоду T). Тобто е.р.с. самоіндукції та напруга на котушці за фазою зсунуті на 180° , і вони є протифазні.

З виразу $|e_L| = L \frac{di}{dt}$ бачимо, що модуль е.р.с. e_L досягає максимального

значення E_m у моменти часу, коли струм i через котушку, проходить через $i=0$, маючи у ці моменти максимальну швидкість зміни за величиною ($|di/dt|$ є максимальною), а у моменти, коли струм є максимальним і дорівнює $|I_m|$, е.р.с. дорівнює нулю, бо у ці моменти швидкість зміни струму дорівнює нулю $di/dt = 0$.

Виходячи з того, що $E_m = \omega LI_m$, пояснимо фізичну суть добутку ωL , який дорівнює:

$$\omega L = \frac{E_m}{I_m} = \frac{U_m}{I_m} \text{ або } \omega L = \frac{E}{I} = \frac{U}{I}.$$

Розмірність ωL є В/А, що дозволяє цей добуток, позначивши через X_L , назвати індуктивним опором:

$$X_L = \omega L. \quad (2.15)$$

Але своєю суттю цей опір, на відміну від активного, не пов'язаний з затратою енергії на нагрівання дроту, з якого намотана котушка, а кількісно оцінює ступінь опору, який створює е.р.с. самоіндукції будь-якій зміні струму через котушку. Тому цей опір називається реактивним опором котушки. Природно, що зі збільшенням частоти зміни струму, пропорційно їй збільшиться і реактивний індуктивний опір X_L (2.15).

Звернемося тепер до потужності електричного струму, який протікає через ідеальну котушку індуктивності.

Миттєве значення потужності знаходиться як добуток миттєвих значень напруги U_L та струму i :

$$\begin{aligned} p &= U_L i = U_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m 2 \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

На рис. 2.16. подано часову діаграму потужності p на фоні напруги U_L та струму i .

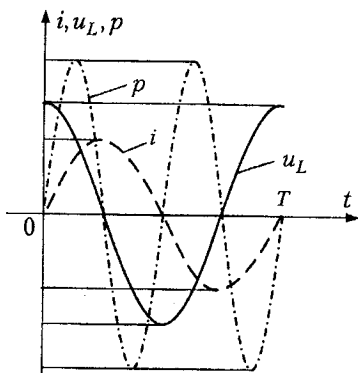


Рисунок 2.16 – Часова діаграма потужності на ідеальній котушці

З виразу для p та рис. 2.16. бачимо, що потужність змінюється гармонічно з подвійною частотою. У першу чверть періоду (від 0 до $T/4$) струм, зростаючи, зарядить котушку, яка накопичить максимум енергії магнітного поля. На цьому відрізку періоду T енергія передавалась від джерела (генератора) до споживача (котушки) і ця потужність є додатною величиною, а е.р.с. самоіндукції e_L була протилежна струму i (рис. 2.15). У другій чверті періоду (від $T/4$ до $T/2$) е.р.с. e_L за напрямком збігається зі струмом i .

Тепер заряджена котушка є джерелом енергії, яку вона повертає генератору і потужність є від'ємною. Далі, очевидно, усе буде повторюватись і за один період дії струму, котушка двічі споживатиме і двічі у такій же кількості повертатиме енергію генератору. Тобто, середнє за період T значення потужності на котушці дорівнюватиме нулю. Цей же результат можна отримати формально, якщо проінтегрувати:

$$P_{\text{сеп}} = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0,$$

а отже, перетворення енергії в теплову (або інший вид енергії) не відбуватиметься, тобто активна потужність відсутня ($P=0$).

Добуток діючих значень UI позначається через Q , є амплітудою гармоніки $p(t)$ і називається реактивною потужністю, яка вимірюється у вольт-амперах, а реактивних значень – у варах.

Індуктивність – це параметр котушки, який слугує кількісною оцінкою здатності котушки накопичувати енергію магнітного поля, позначається літерою L і вимірюється у Генрі (Гн).
--

Індуктивний опір котушки X_L обумовлюється електрорушійною е.р.с. самоіндукції, не пов'язаний з втратами енергії і визначається на заданій частоті ω струму за формулою:

$$X_L = \omega L.$$

Котушка індуктивності за один період двічі обмінюється з генератором енергією, середнє значення якої дорівнює нулю.

Реактивна максимальна потужність магнітного поля котушки Q , вимірюється у варах і визначається за формулою:
--

$$Q = UI.$$

2.6 Конденсатор і електрична ємність

Конденсатор – промисловий виріб, радіодеталь, фізично існуючий об'єкт, основним параметром якого є електрична ємність (далі "ємність"), яка позначається літерою C латинської абетки.

Конденсатор можна зобразити двома паралельними і однаковими металевими пластинами, розділеними діелектриком. Конденсатори, які випускаються промисловістю і використовуються в радіотехніці характеризуються втратами, якими на практиці можна знехтувати.

За своєю суттю – це втрачає в діелектрику, який при протіканні електричного струму через конденсатор, нагрівається за рахунок перетворення частини енергії струму у тепло.

Конденсатор, як відомо, заряджається. При цьому на одній пластині буде накопичуватись позитивний заряд, а на другій – негативний. Між пластинами виникне різниця потенціалів (напруга U_c), напрямлена так само, як струм I заряду конденсатора (рис. 2.17). Конденсатор накопичує енергію електричного поля і цю його здатність кількісно оцінюють ємністю C , яку визначають відношенням електричного заряду q , який накопичиться на пластинах конденсатора до напруги U_c між пластинами, яка виникне у зарядженому конденсаторі:

$$C = \frac{q}{U_c}. \quad (2.16)$$

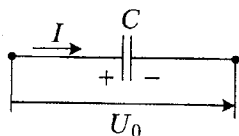


Рисунок 2.17 – Зображення конденсатора на електричній схемі

Ємність вимірюється у фарадах, а 1 фарад (Ф) = 1 Кл/1 В.

Надалі будемо вважати ємність C сталою величиною, а залежність $q = CU_c$ – лінійним рівнянням, розуміючи при цьому, що коли у конденсаторі накопичиться q_1, q_2, \dots, q_n заряду, то напруга при цьому між його пластинами буде дорівнювати, відповідно, $U_{c1}, U_{c2}, \dots, U_{cn}$. Але відношення:

$$\frac{q_1}{U_{c1}} = \frac{q_2}{U_{c2}} = \dots = \frac{q_n}{U_{cn}},$$

залишається незмінним.

Незалежність ємності конденсатора від напруги на ньому дає підставу вважати конденсатор лінійним елементом кола.

Коли конденсатор заряджається і у ньому накопичується електричний заряд зі швидкістю dq/dt , то для підтримки цієї швидкості знадобиться електричний струм I , обумовлений джерелом енергії, тобто:

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (2.17)$$

Аналогічно, конденсатор, що розряджається, втрачаючи накопичений заряд зі швидкістю dq/dt , обумовить протікання струму його розряду I .

Підставивши в (2.17) значення для q з (2.16), отримаємо:

$$i = C \frac{dU_c}{dt}. \quad (2.18)$$

З цього співвідношення витікає, що напруга на конденсаторі може бути виражена через струм I :

$$dU_C = \frac{1}{C} i \cdot dt; \quad (2.19)$$

При використанні цієї формули слід пам'ятати, що до моменту $t=0$ конденсатор був незарядженим. Якщо ж до того на конденсаторі була напруга $U(0)$, то після дозарядження:

$$U_C = U(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt.$$

Нехай через конденсатор протікає гармонічний струм:

$$i = I_m \cos \omega t.$$

Тоді напруга на конденсаторі ємністю C буде дорівнювати:

$$U_C = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega C} I_m \sin \omega t; \quad (2.20)$$

$$U_C = U_{cm} \sin \omega t = U_{cm} \cos(\omega t - 90^\circ),$$

де $U_{cm} = I_m \frac{1}{\omega C}$ -- амплітуда гармонічної напруги на конденсаторі.

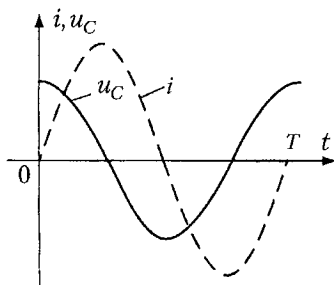


Рисунок 2.18 – Напруга та струм конденсатора

З останніх виразів для струму I та напруги U_C , бачимо що напруга на конденсаторі відстає від струму на 90° , що показано на рис. 2.18. Відношення:

$$\frac{U_{mC}}{I_m} = \frac{U_C}{I} = \frac{1}{\omega C}, \quad (2.21)$$

має розмірність Ом. Тому вираз $X_C = \frac{1}{\omega C}$ називається ємнісним опором.

Цей опір теж не пов'язаний з втратами, перетворенням електричної енергії в інші види. Цей опір обумовлюється інерцією конденсатора при його зарядженні. Чим більша ємність, тим більший час потрібен для зарядження, тим більша інерція до зміни напруги на конденсаторі. Заряджений конденсатор розряджатиметься тим довше, чим більша його ємність.

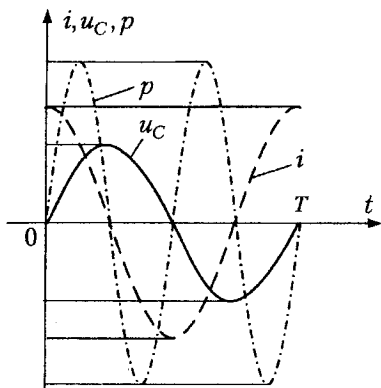


Рисунок 2.19 – Часова діаграма потужності конденсатора

Іншими словами, ємнісний опір конденсатора X_C також є реактивним опором.

Миттєва потужність електричного поля, зосередженого між пластинами конденсатора, дорівнює:

$$P = UC_i = U_m I_m \cos \omega t = \frac{U_{mC}}{2} \sin 2\omega t = UC_i \sin 2\omega t. \quad (2.22)$$

Як бачимо, потужність на конденсаторі змінюється за гармонічним законом з подвійною частотою.

За першу чверть періоду електричного струму енергія передається від джерела (генератора) конденсатору, у другу чверть періоду у такій же кількості вона повертається джерелу і так чотири рази за період T .

Середнє значення потужності за період дорівнює нулю. Тобто, потужність конденсатора має реактивний характер, максимальне (амплітудне) значення якої Q дорівнює:

$$Q = UI. \quad (2.23)$$

Ця потужність теж вимірюється у вольт-амперах, реактивних – у варах.

Ємність – це параметр, який є кількісною оцінкою здатності конденсатора накопичувати енергію електричного поля, позначається через C і вимірюється у фарадах.

Ємнісний опір конденсатора обумовлюється інерцією процесу зарядження та розрядження конденсатора, не пов'язаний з втратами енергії і на заданій частоті визначається за формулою: $X_C = 1/\omega C$.

Конденсатор двічі за період обмінюється енергією з генератором і тому її середнє значення за цей час дорівнює нулю.

Максимальне значення реактивної потужності електричного поля, зосередженого в конденсаторі Q , вимірюється у варах і визначається за формулою: $Q = UC_i$.

2.7 Запитання і задачі для закріплення

1. Що таке миттєве, амплітудне, середнє та діюче значення гармонічного струму? Який зв'язок між ω , f та T ?
2. Що таке активний опір резистора, активна потужність, за якою формулою вона визначається та яка одиниця її вимірювання?
3. Задано струми: $I_1=10 \sin(\omega t+30^\circ)$ А та $I_2=15 \sin(\omega t+60^\circ)$ А. За допомогою векторних діаграм визначити $I=I_1+I_2$
4. Визначити, яка енергія електричного струму $I=5 \sin \omega t$ А буде затрачена на нагрівання резистора $R = 1$ кОм протягом однієї хвилини. Написати математичну модель напруги на резисторі.
5. Що таке ідеальна і реальна котушки індуктивності, як вони зображаються на електричних схемах?
6. Який фізичний зміст індуктивного опору, за якою формулою він визначається?
7. У чому проявляється відмінність активної і реактивної потужностей? За якою формулою визначається реактивна потужність?
8. Який фізичний зміст ємнісного опору, за якою формулою він визначається?
9. Які фазові співвідношення між струмами та напругами конденсатора та котушки індуктивності? Показати це за допомогою векторних діаграм.
10. Струм через котушку індуктивності з $L=5\text{мГн}$, $I=10 \sin(\omega t+30^\circ)$ А, якою буде миттєве значення напруги на ній?
11. Якою буде напруга на конденсаторі з $C=50$ мкФ, якщо його увімкнути замість котушки в умовах попередньої задачі?
12. Що слід розуміти під поняттям котушка індуктивності і індуктивність, конденсатор і ємність?
13. У яких одиницях визначаються: електричний заряд, електрична ємність та індуктивність?
14. Показати, що $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Ом}\cdot\text{с}$ та зв'язок між кулоном, вольтом і фарадом.

3 КОЛА ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ І СИМВОЛІЧНИЙ МЕТОД ЇХ РОЗРАХУНКУ

Символічний або метод комплексних амплітуд, розроблений у 1893-1894 р.р. А. Кеннелі та П. Штейнметцем, дає можливість строго аналітично розраховувати кола гармонічного струму, використовуючи математичні співвідношення, справедливі при розрахунках кіл постійного струму. У цьому випадку фізичні величини: напруга, струм, і т. ін. замінюються, так званими, комплексними величинами, які є зображеннями (символами) фізичних величин на комплексній площині.

Метод комплексних амплітуд ґрунтується на теорії комплексних чисел та комплексних функцій, тому розпочнемо зі спогадів про комплексні числа.

Слід зауважити, що цей метод не є універсальним. Він працює лише тоді, коли одночасно виконуються дві обов'язкові умови:

- електричне коло є лінійним;
- генератор працює при $\omega = \text{const}$ (монохроматичні коливання).

3.1 Комплексні числа та прості математичні операції над ними

Комплексним числом c в математиці ми називали алгебраїчну суму дійсного числа a та уявного ib :

$$\dot{C} = a \pm ib.$$

В радіотехніці уявну одиницю $i = \sqrt{-1}$ позначають через j тому, що i -електричний струм і, отже, алгебраїчна форма запису комплексного числа є такою:

$$\dot{C} = a \pm jb. \quad (3.1)$$

На рис. 3.1 показано, що комплексне число, яке зображається на комплексній площині, є вектором. Дійсна його частина a є довжиною проекції c на вісь дійсних чисел (дійсну вісь) ОХ і дорівнює:

$$a = |\dot{C}| \cos \alpha,$$

уявна ж його частина jb – довжиною проекції на уявну вісь ОУ і дорівнює:

$$b = |\dot{C}| \sin \alpha.$$

Підставивши ці значення частин \dot{C} у (3.1), отримаємо тригонометричну форму його запису:

$$C = |\dot{C}| \cos \alpha \pm j |\dot{C}| \sin \alpha. \quad (3.2)$$

Використавши співвідношення, відомі у математиці як формули Ейлера, отримаємо показникову форму запису цього ж комплексного числа:

$$\dot{C} = |\dot{C}| e^{\pm jd}, \quad (3.3)$$

де у останніх виразах $|\dot{C}|$ - модуль, а α - аргумент комплексного числа \dot{C} , які визначаються за відомими формулами:

$$|\dot{C}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \alpha = \arctg \frac{b}{a}.$$

Два комплексних числа є рівними, коли рівні між собою їхні дійсні і уявні частини. Підсума двох комплексно-спряжених чисел дорівнює дійсній частині одного з них, а піврізниця – уявній частині:

$$\frac{(a + jb) + (a - jb)}{2} = a = \text{Re}(\dot{C});$$

$$\frac{(a + jb) - (a - jb)}{2} = jb = \text{Im}(\dot{C}).$$

Алгебраїчною сумою двох комплексних чисел є третє комплексне число, дійсна частина якого є алгебраїчною сумою дійсних частин, а уявна – уявних частин доданків:

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a + c) \pm j(b + d).$$

Добутком цих двох комплексних чисел є третє комплексне число, дійсна частина якого дорівнює $(ac - bd)$, а уявна дорівнює $j(ad + bc)$:

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

Якщо комплексні числа представити у показниковій формі, то модуль добутку дорівнює добутку їх модулів, а аргумент – сумі аргументів

$$(a + jb)(c + jd) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

де $\varphi_1 = \arctg \frac{b}{a}$ – аргумент першого, $\varphi_2 = \arctg \frac{d}{c}$ – аргумент другого співмножника.

Часткою від ділення комплексного числа $(a + jb)$ на $(c + jd)$ є комплексне число, яке дорівнює:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Якщо комплексні числа представлені у показниковій формі, то модуль частки є відношенням модуля чисельника до модуля знаменника, аргумент дорівнює різниці між аргументами чисельника і знаменника

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} e^{j\varphi_1}}{\sqrt{c^2 + d^2} e^{j\varphi_2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

де $\varphi_1 = \arctg \frac{b}{a}$, $\varphi_2 = \arctg \frac{d}{c}$.

При добуванні кореня n степеня від комплексного числа, отримаємо комплексне число, модуль якого дорівнює кореню n степеня з модуля цього числа, а аргумент – в n разів менший:

$$\sqrt[n]{\dot{C}} = \sqrt[n]{a + jb} = \sqrt[n]{\dot{C} e^{j\alpha}} = \sqrt[n]{\dot{C}} e^{j\frac{\alpha}{n}},$$

де $|\dot{C}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль, а $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$ – аргумент заданого комплексного числа \dot{C} .

Використовуючи те, що $e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$, отримаємо рівності, які будуть корисними при застосуванні символічного методу при розрахунках електричних кіл гармонічного струму:

$$e^{j0} = \cos 0 + j \sin 0 = 1; e^{j\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j;$$

$$e^{-j\pi/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -j; e^{j\pi} = \cos(\pi) + j \sin(\pi) = -1.$$

Наприклад, коли комплексне число \dot{C} (рис. 2.19) помножити на j , то це означає поворот вектора (\overline{OA}) навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки, бо $\dot{C} \cdot j = |C|e^{j\alpha} \cdot e^{j\pi/2} = |C|e^{j(\alpha+\pi/2)}$. А добуток $\dot{C}(-1)$, означає перехід до вектора $-\dot{C}$, що еквівалентно повороту на 180° проти годинникової стрілки: $|C|e^{j(\alpha+\pi)}$ або за нею:

$$|C|e^{j(\alpha-\pi)}.$$

Домноження вектора \dot{C} на множник $e^{j\beta}$ еквівалентне його повороту на кут β , тому цей множник називається множителем повороту.

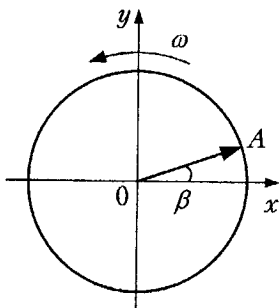


Рисунок 3.1 – Обертання вектора OA

Якщо кут $\beta + \omega t$, отримаємо $|C|e^{j\beta} \cdot e^{j\omega t} = |C|e^{j(\omega t + \beta)}$, що означає обертання вектора $\dot{C}(OA)$ проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω рад/с, починаючи з положення, зображеного на рис. 3.1. Множник же $e^{j\omega t}$ називається оператором обертання.

3.2 Подання обертового вектора комплексною функцією часу

Повернемося до рис. 2.7. Там показано, що миттєве значення гармонічного струму можна подати як залежність довжини проєкції

амплітуди I_m , яка обертається проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω , або на вісь ОХ:

$$i = I_m \cos(\omega t + \alpha),$$

або на вісь ОУ:

$$i = I_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Тепер цей рисунок розглянемо розташованим на комплексній площі (рис. 3.1), де вектор I_m обертається проти ходу годинникової стрілки зі сталою частотою ω , починаючи з положення, зображеного на цьому рисунку.

Тоді ми можемо говорити про вектор $I = I_m e^{j\omega t + j\varphi_0} = I_m e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}$ як такий, що обертається у визначених шойно умовах. Такий вектор називається комплексом електричного струму.

Добуток $I_m e^{j\varphi_0}$ називається комплексною амплітудою цього струму.

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_0}.$$

Таким чином, ми можемо говорити про обертання зі сталою частотою ω вектора I_m – комплексної амплітуди гармонічного струму \dot{I} .

Миттєве ж значення цього струму, як довжини проєкцій комплексу \dot{I} на дійсну вісь, дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} i &= \operatorname{Re}[I] = \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[I_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)}] = \\ &= \operatorname{Re}[I_m \cos(\omega t + \varphi_0) + j I_m \sin(\omega t + \varphi_0)] = I_m \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

або на уявну вісь:

$$E_{1m}^1 = I_{1m} \omega M.$$

Вираз $\dot{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_0)}$ можна вважати математичною моделлю гармонічного струму, яка враховує значення усіх трьох параметрів: амплітуди I_m , частоти ω та початкової фази φ_0 , які повністю характеризують гармонічний процес.

Комплексну амплітуду $\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi_0}$ теж можна назвати математичною моделлю, але неповною, бо враховує вона лише два параметри гармоніки: амплітуду I_m та початкову фазу φ_0 .

Очевидно, коли мова йде про гармонічну напругу, наприклад, на резисторі R , створену електричним струмом з частотою ω і задана комплексна амплітуда цього струму, то добуток:

$$U_m = I_m R = I_m \operatorname{Re}^{j\varphi_0} = U_m e^{j\varphi_0},$$

можна назвати комплексною амплітудою напруги. Комплекс напруги знайдемо, домноживши U_m на оператор обертання $e^{j\omega t}$, а миттєве значення напруги дорівнюватиме:

$$U = \operatorname{Re}[U_m e^{j(\omega t + \varphi_0)}] = U_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

або

$$U = \text{Jm}[U_m e^{j(\omega t + \varphi_0)}] = U_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

З виразу $\dot{I} = I_m e^{j\omega t}$ та змісту оператора обертання можна стверджувати, що вектор \dot{I}_m – комплексна амплітуда струму, обертається зі сталою швидкістю ω проти годинникової стрілки.

Зауважимо, що Re (від real – дійсне) означає символічну операцію виділення дійсної частини, а Jm (від imaginary – уявне) – виділення уявної частини комплексного числа.

Комплексна амплітуда гармонічної функції дорівнює добутку її амплітуди на оператор повороту $\exp(j\varphi_0)$, де φ_0 – початкова фаза гармоніки. $I_m = I_m e^{j\varphi_0}$; $U_m = U_m e^{j\varphi_0}$.

Миттєве значення гармонічної функції часу дорівнює дійсній (косинусоїді) або уявній (синусоїді) частині комплексу, який отримаємо домноженням комплексної амплітуди гармоніки на оператор обертання: $\exp(j\omega t)$ $i = \text{Re}[I_m e^{j\omega t}]$ або $i = \text{Jm}[I_m e^{j\omega t}]$.

3.3 Закон Ома та закон Кірхгофа у комплексній формі

Іншими словами, знайдемо математичні записи законів Ома та Кірхгофа для комплексних амплітуд.

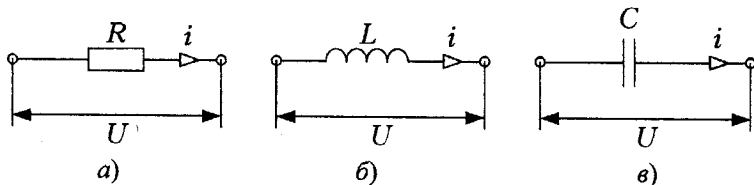


Рисунок 3.2 – Ділянки кола

Закон Ома

Для ділянки кола рис. 3.2,а є справедливим закон Ома $i = \frac{U}{r}$.

Перепишемо його у такому вигляді:

$\text{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{r} \text{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \text{Re}[\frac{\dot{U}_m}{r} e^{j\omega t}]$. Це рівняння є справедливим для будь-якого значення часу t , а тому можна прирівняти і вирази у дужках: $\dot{I} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{r} \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$.

Розділивши обидві частини цього рівняння на $e^{j\omega t}$, отримаємо: закон Ома для комплексних амплітуд струму та напруги, що діють на ділянці з опором r .

$$\dot{I}_m = \frac{1}{r} \dot{U}_m. \quad (3.4)$$

Перевіримо результат, перейшовши до миттєвих значень струму та напруги:

$$\operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}] = I_m \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad \operatorname{Re}[I_m e^{j(\omega t)}] = \frac{1}{r} U_m \cdot \cos(\omega t + \alpha),$$

або:

$$i = \frac{U}{r}.$$

Запишемо тепер закон Ома для ділянки рис. 3.2,б, на якій діє гармонічний струм $i = I_m \sin \omega t$. Як нам відомо з підрозділу 2.5, миттєве значення напруги на котушці індуктивності дорівнює

$$U_L = U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Напруга на котушці визначалась з рівняння:

$$U_L = L \frac{di}{dt}; \quad \operatorname{Re}[U_m e^{j\omega t}] = L \frac{d}{dt} \operatorname{Re}[I_m e^{j\omega t}].$$

Змінюючи порядок застосування операторів $\frac{d}{dt}$, і

$\operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = L \operatorname{Re}[\frac{d}{dt}(\dot{I}_m e^{j\omega t})]$ і, зваживши, що співмножник \dot{I}_m не залежить від часу t , отримаємо:

$$\operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = L \operatorname{Re}[j\omega \dot{I}_m e^{j\omega t}].$$

Прирівнюючи вирази у дужках, отримаємо:

$$U_m = j\omega L I_m = \omega L I_m e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Формула: $\operatorname{Im} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega l} = \frac{\dot{U}_m}{jx_L}$ і є записом закону Ома для комплексних

амплітуд гармонічного струму на ділянці кола, що містить котушку індуктивності.

$$\operatorname{Im}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \omega L \operatorname{Im}[\dot{I}_m e^{j\frac{\pi}{2}}],$$

$$U_m \sin \omega t = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}); u_L = \omega L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Цей результат збігається з результатом, отриманим у підрозділі 2.5. Нарешті, розглянемо ділянку кола рис. 3.2,в. Напруга на конденсаторі:

$$U_C = \frac{1}{c} \int_0^t i dt = \frac{I_m}{\omega c} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Або

$$\operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{c} \int_0^t \operatorname{Re}[\dot{I}_m e^{j\omega t} dt];$$

$$\operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{c} \operatorname{Re}\left[\int_0^t \dot{I}_m e^{j\omega t} dt\right]; \operatorname{Re}[\dot{U}_m e^{j\omega t}] = \frac{1}{c} \operatorname{Re}\left[\frac{1}{j\omega} \dot{I}_m e^{j\omega t}\right];$$

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = \frac{\dot{I}_m}{j\omega c} e^{j\omega t}; \dot{U}_m = \frac{\dot{I}_m}{j\omega c}; I_m = \frac{\dot{U}_m}{\frac{1}{j\omega c}} = j\omega c \dot{U}_m = jx_c \dot{U}_m. \quad (3.5)$$

Остання формула с записом закону Ома для комплексних амплітуд гармонічного струму на ділянці кола, яка містить конденсатор.

$$\operatorname{Im}[\dot{U}_{mc} e^{j\omega t}] = \operatorname{Im}\left[-j \frac{\dot{I}_m}{\omega C} e^{j\omega t}\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{\dot{I}_m}{\omega C} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}\right],$$

$$U_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}).$$

Цей результат збігається з отриманим для U_C виразом (2.20) у підрозділі 2.5.

Перший закон Кірхгофа для довільного вузла електричної схеми, де виконуються, наприклад, умова: $i_1 + i_2 = i_3 + i_4 + i_5$, перепишемо у вигляді:

$$\operatorname{Re}[I_{m1} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[I_{m2} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[I_{m3} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[I_{m4} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[I_{m5} e^{j\omega t}];$$

$$\operatorname{Re}[I_{m1} e^{j\omega t} + I_{m2} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[I_{m3} e^{j\omega t} + I_{m4} e^{j\omega t} + I_{m5} e^{j\omega t}]. \quad (3.6)$$

Привірнюючи вирази у дужках після скорочення на $e^{j\omega t}$, отримаємо вираз для 1-го закону Кірхгофа у формі комплексних амплітуд:

$$\dot{I}_{m1} + \dot{I}_{m2} = \dot{I}_{m3} + \dot{I}_{m4} + \dot{I}_{m5}. \quad (3.7)$$

Другий закон Кірхгофа для довільного кола, де: $e_1 + e_2 = U_3 + U_4 + U_5$ перепишемо у вигляді

$$\operatorname{Re}[\dot{E}_{m1} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\dot{E}_{m2} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{m1} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\dot{U}_{m2} e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\dot{U}_{m3} e^{j\omega t}];$$

$$\operatorname{Re}[\dot{E}_{m1} e^{j\omega t} + \dot{E}_{m2} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\dot{U}_{m1} e^{j\omega t} + \dot{U}_{m2} e^{j\omega t} + \dot{U}_{m3} e^{j\omega t}].$$

І, отже, вираз:

$$\dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} = \dot{U}_{m1} + \dot{U}_{m2} + \dot{U}_{m3},$$

є виразом для 2-го закону Кірхгофа для комплексних амплітуд кола, яке містить дві е.р.с. та три вітки.

3.4 Застосування законів Ома та Кірхгофа для комплексних амплітуд при розрахунку електричних кіл

Послідовне з'єднання rL та rC .

Нехай ділянка кола складається з котушки індуктивності послідовно увімкненої з резистором (рис. 3.3,а) під напругу U .

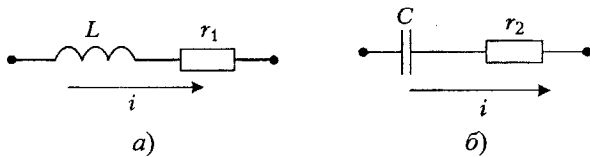


Рисунок 3.3 – Ділянки з активно-реактивними опорами

Другий закон Кірхгофа у формі комплексних амплітуд запишеться:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m1} &= j\omega L \dot{I}_m + r_1 \dot{I}_m; \\ \dot{U}_{mL} &= j\omega L \dot{I}_m = \omega L \dot{I}_m e^{j\pi/2}; \\ \dot{U}_{r1} &= \dot{I}_m r_1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Розділимо це рівняння на \dot{I}_m

$$\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = r + j\omega L.$$

Відношення $\frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}$ називається комплексним (повним) опором і позначається через Z :

$$\dot{Z} = r + j\omega L = r + jx_L. \quad (3.9)$$

Побудуємо векторну діаграму комплексних напруг (рис. 3.3,а).

Будувати векторну діаграму потрібно починаючи з вектора \dot{I}_m^0 розташованого довільно, бо струм на цій ділянці є спільним для обох елементів.

З ним за напрямком збігатиметься напруга на резисторі \dot{U}_{mr} , а вектор \dot{U}_{mL} випереджає його на $\pi/2$. Сумарний вектор \dot{U}_m випереджатиме струм на кут $\varphi < 90^\circ$. Тобто, на ділянці L, r електричний струм відставатиме від напруги за фазою на кут $\varphi < 90^\circ$.

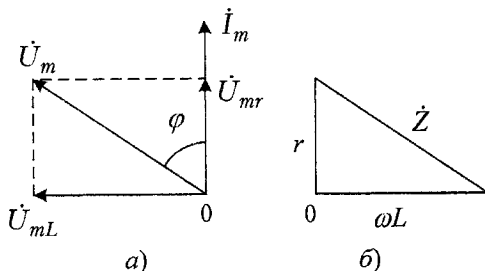


Рисунок 3.4 – Векторна діаграма (а) і трикутник опорів (б)

Якщо у векторній діаграмі напруг усі сторони розділити на спільний струм \dot{I}_m то отримаємо трикутник опорів (рис. 3.3,б). З цього трикутника (прямокутного):

$$\begin{aligned} |\dot{Z}| &= Z + \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}, \\ Z &= \sqrt{r^2 + X_L^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Дійсна частина комплексного опору \dot{Z} є активним опором, а уявна – реактивним (індуктивним) опором ділянки з послідовним з'єднанням r, L . Модуль комплексного опору визначається за формулою (3.10).

Послідовне з'єднання r, C

Нехай тепер ділянка складається з послідовно з'єднаних конденсатора та резистора r (рис. 3.4,б).

За другим законом Кірхгофа для комплексних амплітуд:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{mC} + \dot{U}_{mr} = \dot{I}_m / j\omega C + \dot{I}_m r; \\ \dot{U}_{mC} &= -j \dot{I}_m / \omega C = \dot{I}_m e^{-j\pi/2} / \omega C; \\ \dot{U}_{mr} &= \dot{I}_m r. \\ \dot{Z}_{mr} &= r - j / \omega C = r + jX_C. \end{aligned} \quad (3.11)$$

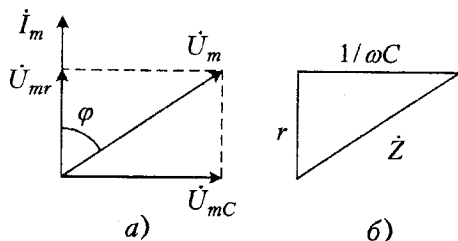


Рисунок 3.5 – Векторна діаграма (а), трикутник опорів (б)

Побудуємо векторну діаграму для цієї ділянки, починаючи з вектора \dot{I}_m . Вектор \dot{U}_{mr} збігається за напрямком з \dot{I}_m , а \dot{U}_{mC} відставатиме від нього на $\pi/2$. З трикутника опорів:

$$Z = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + X_C^2}. \quad (3.12)$$

Дійсна частина комплексного опору є активний опір, а уявна – реактивний (ємнісний) опір ділянки з послідовно з'єднаними r, C .

Якщо у задачі задано струм через ділянку з послідовним з'єднанням r, L , то напруга на ділянці:

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \dot{Z},$$

$$\dot{Z} = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg\left(\frac{\omega L}{r}\right)}.$$

Якщо у цьому колі необхідно визначити струм, при заданій напрузі в ньому, то:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{\omega L}{r}\right)}.$$

Аналогічно для кола з послідовним з'єднанням r, C :

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \dot{Z},$$

де

$$\dot{Z} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j \arctg\left(\frac{1}{\omega r C}\right)};$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{-j \arctg\left(\frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Послідовне з'єднання r, L, C

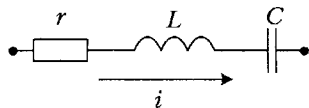


Рисунок 3.6 – Послідовне з'єднання r, L, C

Якщо на кінцях цієї ділянки кола діє напруга U , то

$$\dot{U}_m = \dot{I}_m \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \dot{I}_m \left(r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right) = \dot{I}_m \dot{Z}.$$

Комплексний опір

$$\dot{Z} = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + jX,$$

де r – активний, а $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивний опір ділянки.

Напруга на елементах кола:

$$\dot{U}_{mr} = \dot{I}_m r;$$

$$\dot{U}_{mL} = \omega L \dot{I}_m e^{j\pi/2};$$

$$\dot{U}_{mC} = \frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I}_m \cdot e^{-\frac{j\pi}{2}}.$$

Розглянемо випадок, коли на певній частоті $\omega = \omega_0$, цьому випадку відповідає рис. 3.7,а, реактивні опори дорівнюють:

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C; \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

де: $|\dot{U}_m| = |\dot{I}_m| \omega_0 L = |\dot{I}_m| / \omega_0 C = |\dot{U}_{mC}|$ напруги на конденсаторі і котушці рівні за амплітудами та протилежні за фазами, а напруга на кінцях ділянки дорівнюватиме напрузі на резисторі r .

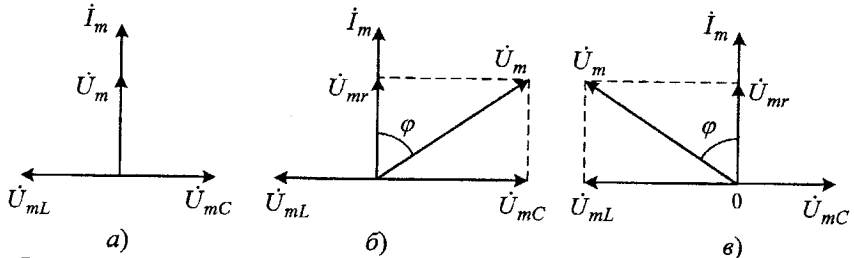


Рисунок 3.7 – Векторні діаграми для кола з послідовним з'єднанням r, L, C

Опір ділянки є $Z = r + j(\omega_0 L + 1/\omega_0 C) = r$ чисто активним і найменшим з можливих. Струм на ділянці при цьому буде максимальним: $\dot{I}_m = \dot{U}_m / r$.

Коли $\omega > \omega_0, \omega L > 1/\omega C$, то $|\dot{U}_{mL}| > |\dot{U}_{mC}|$, залишаючись протифазними (рис. 3.7,б). Векторна сума $\dot{U}_{mL}, \dot{U}_{mC}$ та \dot{U}_{mr} дасть вектор \dot{U}_m , який випереджатиме струм \dot{I}_m на кут φ , що свідчить про те, що опір цієї ділянки буде мати індуктивний характер.

При $\omega < \omega_0, \omega L < 1/\omega C$, а $|\dot{U}_{mL}| < |\dot{U}_{mC}|$ та $|\dot{U}_{mL}|$ і $|\dot{U}_{mC}|$ протилежні за фазами (рис. 3.7,в), сумарний вектор \dot{U}_m відставатиме від вектора струму \dot{I}_m , що свідчить про ємнісний характер опору ділянки.

Паралельне з'єднання r, C та r, L .

Нехай ділянка кола складається з паралельно з'єднаних резистора R і конденсатора C (рис. 3.8,а).

На елементах C і r буде діяти однакова напруга, а струми будуть:

$$\dot{I}_{mC} = \frac{\dot{U}_m}{1/j\omega C} = j\omega C \dot{U}_m = \omega C \dot{U}_m e^{j\pi/2};$$

$$\dot{I}_{mr} = \frac{\dot{U}_m}{r} = \frac{1}{r} \dot{U}_m.$$

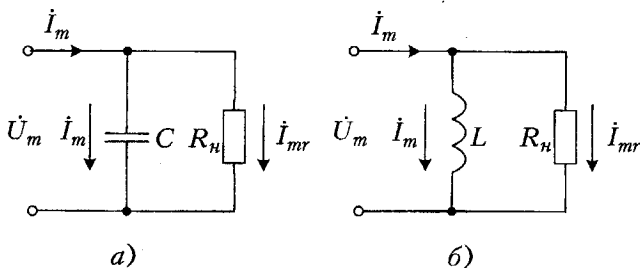


Рисунок 3.8 – Паралельне з'єднання r, C (а) та r, L (б)

За першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_m = \dot{U}_m / \dot{Z} = \dot{Y} \dot{U}_m = \left(\frac{1}{r} + j\omega C \right) \dot{U}_m, \quad (3.13)$$

де комплексна (повна) провідність ділянки $\dot{Y} = 1/\dot{Z} = (1/r + j\omega C) = g + jb$, тобто $g = 1/r$ – дійсна частина \dot{Y} і називається активною провідністю, $b = j\omega C$ – уявна частина \dot{Y} і називається реактивною (ємнісною) провідністю. Побудуємо векторну діаграму.

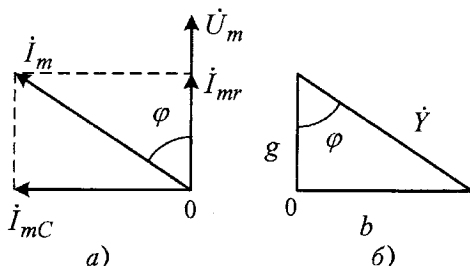


Рисунок 3.9 – Векторна діаграма (а) і трикутник провідностей (б) при паралельному з'єднанні r, C

Струми у вітках дорівнюватимуть:

$$\dot{I}_{mr} = g \dot{U}_m, \quad \dot{I}_{mC} = jb_c \dot{U}_m.$$

З трикутника провідностей:

$$|\dot{Y}| = y = \sqrt{g^2 + b_c^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + (\omega C)^2}. \quad (3.14)$$

Струм генератора напруги \dot{I}_m випереджає напруги \dot{U}_m на 90° , а вхідна провідність має ємнісний характер $g = |\dot{Y}| \cos \varphi$, $b_c = |\dot{Y}| \sin \varphi$.

При паралельному з'єднанні r, L (рис. 3.8, б):

$$\dot{i}_{mr} = g\dot{U}_m, \dot{i}_{mL} = \dot{U}_m / j\omega L = jb_L\dot{U}_m; b_L = -1/\omega L; \dot{Y} = g + jb_L, \quad (3.15)$$

$$Y = \sqrt{g^2 + b_L^2}. \quad (3.16)$$

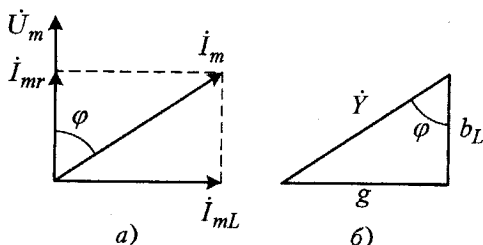


Рисунок 3.10 – Векторна діаграма та трикутник провідностей при паралельному з'єднанні r, L

З векторної діаграми маємо, що струм генератора \dot{I}_m відстає від напруги на кут: $\varphi = \text{arctg}\left(\frac{g}{b_L}\right)$, а тому опір має індуктивний характер.

Паралельне з'єднання r, L, C .

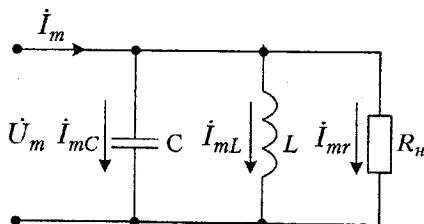


Рисунок 3.11 – Схема паралельного з'єднання r, L, C

Струм генератора \dot{I}_m дорівнює (за першим законом Кірхгофа):

$$\dot{I}_m = \dot{Y}\dot{U}_m = g\dot{U}_m - jb_L\dot{U}_m + jb_C\dot{U}_m.$$

Звідки:

$$\dot{Y} = g + jb_L + jb_C, \dot{Y} = g + j(b_L + b_C), \dot{Y} = g + jb,$$

де $b = \omega C - 1/\omega L$ – реактивна складова вхідної провідності кола.

На рис. 3.12,а. показано, що струми \dot{I}_{mL} і \dot{I}_{mC} при $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ однакові за модулем і протифазні. Сумарна провідність $b=0$ і струм $\dot{I}_{Lm} = 0$. Тобто струм генератора замикатиметься через вітку з r ($\dot{I}_m = \dot{I}_{mr}$). Вхідний опір має чисто активний характер.

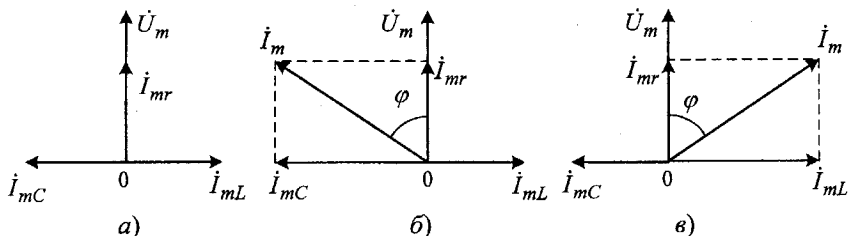


Рисунок 3.12 – Векторні діаграми кола з паралельним з'єднанням r, L, C

При $\omega > \omega_0$, $g_L > g_C$, $|I_{mL}| < |I_{mC}|$, струм генератора випереджає напругу, тому вхідний опір носить ємнісний характер (рис. 3.12,б).

При $\omega < \omega_0$, $g_L < g_C$, $|I_{mL}| > |I_{mC}|$, (рис. 3.12,в), струм генератора відстає від напруги і тому вхідний опір носить індуктивний характер.

Закони Ома і Кірхгофа для комплексних амплітуд записуються так само, як і для постійного струму. Струм I замінюється на комплексну амплітуду струму \dot{I}_m , напруга U – на комплексну амплітуду напруги \dot{U}_m .

Комплексний опір Z складається з активного r та реактивного опору X :

$$\dot{I}_m = \dot{U}_m / Z = \dot{Y} \dot{U}_m, \dot{Z} = r + jX, z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Комплексна провідність \dot{Y} складається з активної g та реактивної провідності b : $\dot{Y} = g + jb$, $y = \sqrt{g^2 + b^2}$.

3.5 Комплексна потужність та її складові

Припустимо в ділянці електричного кола з комплексним опором \dot{Z} протікає електричний струм з комплексною амплітудою $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$, створюючи на ділянці напругу з комплексною амплітудою $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi}$. Половина добутку комплексної амплітуди напруги \dot{U}_m на величину $\dot{I}_m = I_m e^{-j\varphi}$, комплексно спряжену з \dot{I}_m називається комплексною потужністю \dot{S} :

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{1}{2} U_m I_m e^{j\varphi}.$$

Звідки маємо:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi + j \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi = P + jQ,$$

де $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця фаз між напругою і струмом на цій ділянці.

Тут: $P = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$ є дійсною складовою комплексної потужності \dot{S} і називається активною потужністю; $Q = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi$ є уявною

складовою комплексної потужності \dot{S} і називається реактивною потужністю.

Очевидно, вирази для активної і реактивної складових комплексної потужності можна виразити через діючі значення напруги і струму: $P = UI \cos \varphi, Q = UI \sin \varphi$.

Згадавши, що $\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1$, запишемо $\sqrt{P^2 + Q^2} = U + I, S = UI$, де S є модулем комплексної потужності \dot{S} і називається повною потужністю.

Для ділянки з комплексним опором \dot{Z} вираз для \dot{S} буде:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} \dot{Z} U_m I_m = \frac{\dot{Z} I_m^2}{2} = \dot{Z} I^2,$$

де I_m – амплітуда,

I – діюче значення струму.

Або інакше,

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} \dot{U}_m \frac{\tilde{U}_m}{\dot{Z}} = \frac{1}{2} \frac{U_m^2}{\dot{Z}} = \frac{U^2}{\dot{Z}},$$

де U_m – амплітуда,

U – діюче значення напруги.

У випадку, коли ділянка кола подана комплексною провідністю \dot{Y} , то:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} \frac{\dot{I}_m}{\dot{Y}} \tilde{I}_m = \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\dot{Y}} = \frac{I^2}{\dot{Y}};$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} U_m \tilde{U}_m \dot{Y} = \frac{1}{2} U_m^2 \dot{Y} = \dot{Y} U^2.$$

Зауважимо, що ці формули справедливі для будь-якої схеми з'єднання резистора, котушки індуктивності та конденсатора.

Наприклад, для ділянки з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності (рис. 3.3,а) матимемо:

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} I_m^2 \dot{Z} = I^2 \dot{Z} = I^2 (r + j\omega L) = I^2 r + jI^2 \omega L;$$

$$P = I^2 r, Q = I^2 \omega L, S = U^2 \sqrt{(r)^2 + (\omega L)^2}.$$

Для ділянки з паралельним з'єднанням резистора і конденсатора, наприклад, (рис. 3.8,а):

$$\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \tilde{I}_m = \frac{1}{2} U_m^2 \dot{Y} = U^2 \dot{Y} = U^2 \left(\frac{1}{r} + j\omega C \right) = U^2 r + jU^2 \omega C;$$

$$P = \frac{U^2}{r}, Q = U^2 \omega C, S = U^2 \sqrt{\left(\frac{1}{r} \right)^2 + (\omega C)^2}.$$

Аналогічно, легко отримати вирази для комплексної потужності, її активної і реактивної складової та повної потужності у більш складних

випадках: (рис. 3.7 і 3.12).

Комплексна потужність $\dot{S} = \frac{1}{2} \dot{U}_m \dot{I}_m$ складається з активної потужності $P = I^2 r$, яка споживається колом, і реактивної потужності $Q = I^2 \omega L$, яка повертається генератору.

Повна потужність S на ділянці кола є модулем комплексної потужності \dot{S} і дорівнює: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

3.6 Баланс потужностей

Виходячи з добре відомого у фізиці закону збереження енергії, маємо право стверджувати, що у будь-якій електричній схемі повинна виконуватись умова балансу середнього значення (за період гармонічного струму) потужностей в усіх елементах схеми. Середнє за період значення потужностей усіх генераторів дорівнює активній потужності, яка споживається усіма приймачами електричної енергії з перетворенням її в теплову, механічну та інші види енергій.

Середні за період витрати реактивної енергії усіма генераторами дорівнюють нулю, бо уся вона повертається до генераторів без усяких втрат, тобто між генераторами і приймачами відбувається процес обміну реактивними енергіями двічі за період.

Схема кола (рис. 3.13) має $(n+1)$ вузлів, а тому можемо скласти n незалежних рівнянь, за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} I_{12} + I_{13} + \dots + I_{1k} + \dots + I_{1n} &= 0; \\ I_{21} + I_{23} + \dots + I_{2k} + \dots + I_{2n} &= 0; \\ I_{n1} + I_{n2} + \dots + I_{nk} + \dots + I_{n,n-1} &= 0. \end{aligned}$$

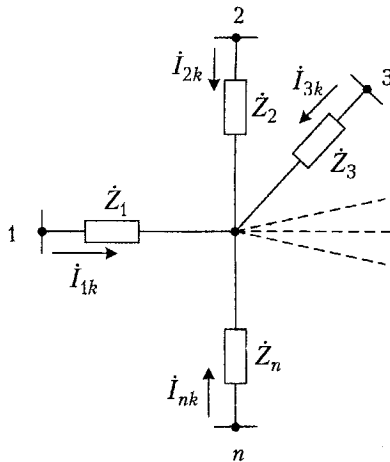


Рисунок 3.13 – Схема, що має $n + 1$ вузол

Помножимо перше на U_{1n}^* , друге на U_{2n}^* , ... останнє на $U_{n-1,n}^*$ і додамо добутки. Тоді:

$$U_{1n}^*(I_{12} + I_{13} + \dots + I_{1k} + \dots + I_{1n}) + U_{2n}^*(I_{21} + I_{23} + \dots + I_{2k} + \dots + I_{2n}) + \dots + U_{n-1,n}^*(I_{n1} + I_{n2} + \dots + I_{nk} + \dots + I_{n-1,n}) = 0.$$

Враховуючи, що: $\dot{U}_{1n} = \dot{U}_{1k} - \dot{U}_{nK}$, $\dot{U}_{2n} = \dot{U}_{2k} - \dot{U}_{nK}$, ..., та те, що $\dot{I}_{12} = -\dot{I}_{21}$, ..., останнє рівняння перепишеться:

$$\begin{aligned} & (U_{12}^* \cdot \dot{I}_{12} + U_{13}^* \cdot \dot{I}_{13} + \dots + U_{1k}^* \cdot \dot{I}_{1k} + \dots + U_{1n}^* \cdot \dot{I}_{1n}) + \\ & + (U_{21}^* \cdot \dot{I}_{21} + U_{23}^* \cdot \dot{I}_{23} + \dots + U_{2k}^* \cdot \dot{I}_{2k} + \dots + U_{2n}^* \cdot \dot{I}_{2n}) + \dots + \\ & + (U_{k1}^* \cdot \dot{I}_{k1} + U_{k2}^* \cdot \dot{I}_{k2} + \dots + U_{kn}^* \cdot \dot{I}_{kn}) + \dots + \\ & + (U_{n1}^* \dot{I}_{n1} + U_{n2}^* \dot{I}_{n2} + \dots + U_{nk}^* \dot{I}_{nk} + U_{n,n-1}^* \dot{I}_{n,n-1}) = 0. \end{aligned}$$

З цього виразу видно, що сума комплексних потужностей в усіх ділянках (елементах) схеми дорівнює нулю:

$$\sum S = \sum (P + Q) = 0.$$

Комплексне число дорівнює нулю тоді, коли нулю дорівнюють його дійсна і уявна частини, тобто:

$$\sum P = 0 \quad i \sum Q = 0.$$

Алгебрична сума $\sum P = 0$, а це означає, що середня за період потужність усіх джерел енергії дорівнює активній потужності, споживаній приймачами енергії.

Алгебрична сума $\sum Q = 0$, а це означає, що кількість енергії спрямованої від генераторів до приймачів за період, дорівнює кількості енергії, поверненій приймачами генераторам.

3.7 Комплексно-спряжене узгодження генератора і приймача енергії

Метою комплексно-спряженого узгодження генератора і приймача (навантаження) є створення умов, за яких максимальна потужність енергії буде віддаватись приймачеві.

Такі задачі в радіотехніці зустрічаються дуже часто при узгодженні, наприклад, передавальної антени з передавачем, коли генератором слугує передавач, антена – навантаженням приймальної антени (генератора) з радіоприймачем (навантаження). У побуті з цією проблемою зустрічався кожен, хто мав справу з підімкненням антени до телевізора при прийманні сигналів дециметрових каналів.

Нехай при відомому комплексному вихідному опорі генератора:

$$\dot{Z}_G = r_G + jX_G,$$

потрібно підібрати вхідний опір приймача (навантаження):

$$\dot{Z}_H = r_H + jX_H,$$

такий, щоб забезпечити максимум передачі потужності від генератора до приймача.

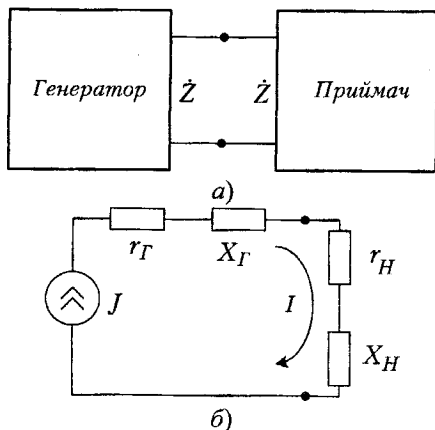


Рисунок 3.14 – Ілюстрація до принципу узгодження (а), еквівалентна схема (б)

Розглянемо схему, еквівалентну схемі рис. 3.14. Струм у колі:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_G + \dot{Z}_H} = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}},$$

$$\dot{Z} = r_G + jX_G + r_H + jX_H = (r_G + r_H) + j(X_G + X_H),$$

Діюче значення струму:

$$I = \frac{E}{\sqrt{(r_G + r_H)^2 + (x_G + x_H)^2}},$$

Від генератора до навантаження у середньому за період буде передана активна потужність P :

$$P = I^2 \cdot r_H.$$

Підставивши сюди значення для струму I , матимемо:

$$P = \frac{E^2 r_H}{(r_G + r_H)^2 + (x_G + x_H)^2}.$$

Підбравши X_H так, щоб P досягло проміжного максимального значення P'_m , тобто $x_G + x_H = 0$, а

$$P'_m = \frac{E^2 r_H}{(r_G + r_H)^2}.$$

Тепер визначимось, при якому r_H ця функція досягатиме максимуму. Для цього визначимо dP'_m/dr_H і прирівнюємо його до нуля:

$$\frac{dP'_m}{dr_H} = \frac{E^2(r_T + r_H)^2 - 2(r_T + r_H)E^2r_H}{(r_T + r_H)^4} = 0;$$

$$(r_T + r_H)^2 - 2(r_T + r_H) \cdot r_H = 0; (r_T + r_H)(r_T + r_H - 2r_H) = 0.$$

Це рівняння має два розв'язки:

$$1) \quad r_T + r_H = 0; \quad r_H = -r_T.$$

$$2) \quad r_T - r_H = 0; \quad r_H = r_T.$$

Перший розв'язок відкидаємо, бо $r_H = -r_T$, тобто активний опір від'ємний, що протирічить фізичному змісту активного опору.

Залишається $r_H = r_T$. Підставимо це значення у вираз з P'_m і отримаємо максимальну потужність:

$$P_m = \frac{E^2}{4r_T} = \frac{E^2}{4r_H},$$

яка буде передана приймачеві при виконанні двох умов:

$$\begin{cases} r_H = r_T; \\ x_H = -x_T, \end{cases}$$

а комплексна спряженість $\dot{Z}_T = Z_T + jX_T$ і $\dot{Z}_H = Z_H - jX_H$ вихідного опору генератора і вхідного опору приймача гарантує умови, найбільш сприятливі для передачі енергії від джерела до споживача.

3.8 Запитання і задачі для закріплення

1. Чому дорівнює кут між комплексами $Ae^{j(\omega t + 30^\circ)}$, $Be^{j(\omega t - 20^\circ)}$ та B . Показати це на векторній діаграмі. Чи завжди припустимо розраховувати кола змінного струму символьним методом? Чому?

2. Задана гармонічна напруга $u(t) = 10\cos(\omega t + 60^\circ)$. Визначити комплексну амплітуду.

3. Задана комплексна амплітуда гармонічного струму $8e^{j45^\circ}$. Якою буде функція $i(t)$?

4. Яка буде різниця фаз між струмом і напругою у колі з послідовним з'єднанням резистора і котушки, резистора і конденсатора?

5. Визначити комплексний опір (провідність) та його (її) складові для кола з послідовним з'єднанням r , L або r , C .

6. Визначити амплітуду гармонічного струму у колах задачі 5, коли $U_m = 10\text{В}$, $r = 5\text{ Ом}$, $L = 100\text{ мГн}$, $C = 0,1\text{ мкФ}$, частота струму $f = 50\text{ кГц}$.

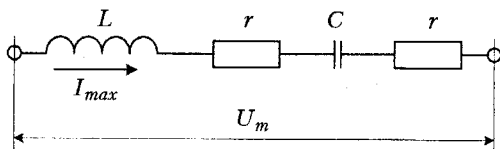
7. За умови попередньої задачі визначити комплексну, повну, активну та реактивні потужності.

8. Чому струм у колі рис. 3.6 буде максимальним, коли $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$.

9. Чому у колі рис. 3.11 струм генератора дорівнює струму через резистор при $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$?

10. Вихідний опір передавача $Z = (100 + j50)$ Ом, визначити ємність узгоджувального конденсатора, щоб забезпечити узгодження з передавальною антеною $R_{ax} = 100$ Ом, коли передавач працює на частоті 500 кГц.

11. Побудувати векторну діаграму електричного кола, коли $r_1 = r_2$, $x_L > x_C$.



4 ПЕРЕТВОРЕННЯ СХЕМ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ГАРМОНІЧНОГО СТРУМУ

4.1 Послідовне, паралельне та змішане з'єднання

При вивченні законів кіл постійного струму з такою задачею ми зустрічалися, розв'язуючи її шляхом "згортання" схем до найпростіших. Аналогічно вчинимо і зі схемою кіл гармонічного струму, пам'ятаючи, що закони постійного струму є справедливими для комплексних амплітуд гармонічного струму.

Послідовне з'єднання

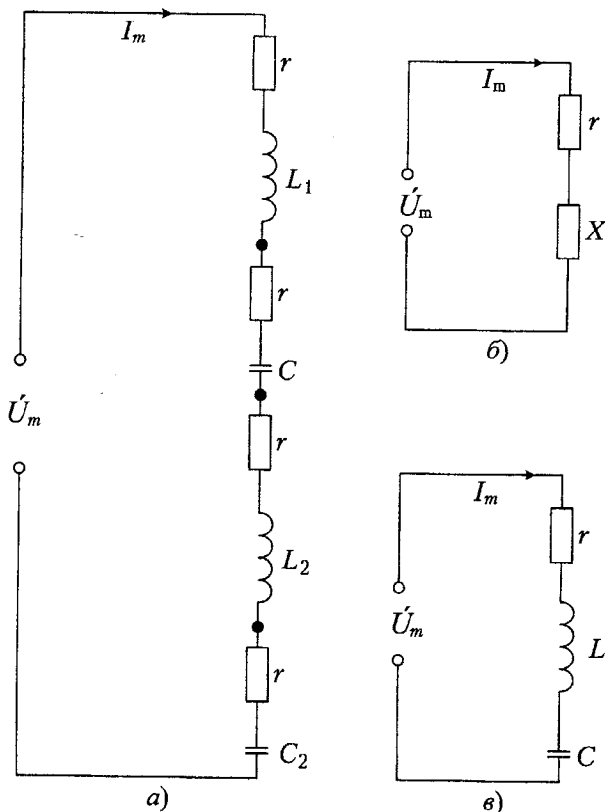


Рисунок 4.1 – Послідовне з'єднання

Розглянемо коло послідовно з'єднаних чотирьох двополосників з комплексними опорами $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3, \dot{Z}_4$ (рис. 4.1):

$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\dot{Z}L_1; \quad \dot{Z}_2 = r_2 - j\frac{1}{\omega C_1};$$

$$\dot{Z}_3 = r_3 + j\omega L_2; \quad \dot{Z}_4 = r_4 - j\frac{1}{\omega C_2}.$$

За другим законом Кірхгофа:

$$\dot{U}_m = \dot{I}(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4) = \dot{I} \cdot \dot{Z}, \quad (4.1)$$

де $\dot{Z} = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4)$, $\dot{I}_m = \dot{U}_m / \dot{Z}$.

Комплексна амплітуда напруги:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{m12} &= \dot{I}_m \dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}} \dot{U}_m; & \dot{U}_{m21} &= \dot{I}_m \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}} \dot{U}_m; \\ \dot{U}_{m34} &= \dot{I}_m \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}} \dot{U}_m; & \dot{U}_{m45} &= \dot{I}_m \dot{Z}_4 = \frac{\dot{Z}_4}{\dot{Z}} \dot{U}_m. \end{aligned}$$

На відповідних ділянках напруги прямо пропорційні відповідним комплексним опорам.

$$\dot{Z} = r_1 + j\omega L_1 + r_2 - j\frac{1}{\omega C_1} + r_3 + j\omega L_2 + r_4 - j\frac{1}{\omega C_2} = r + jx,$$

де $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ – активна складова; $X = \omega(L_1 + L_2) - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$ – реактивна складова комплексного еквівалентного опору Z (рис. 4.1,б):

$$Z = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

де $L = L_1 + L_2$, $C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$ – еквівалентні параметри кола (рис. 4.1,а).

Паралельне з'єднання

На рис. 4.2 зображено коло, що складається з чотирьох, паралельно з'єднаних комплексних опорів.

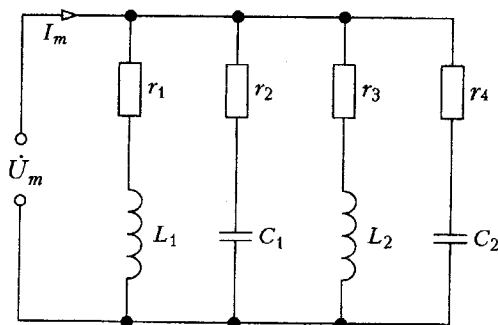
$$\dot{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1, \quad \dot{Z}_2 = r_2 - j\frac{1}{\omega C_1},$$

$$\dot{Z}_3 = r_3 - j\omega L_2, \quad \dot{Z}_4 = r_4 - j\frac{1}{\omega C_2}.$$

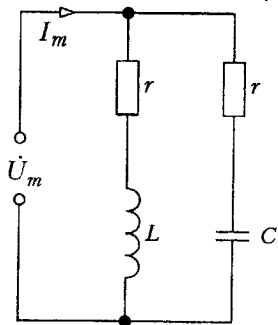
У відповідності до першого закону Кірхгофа для комплексних амплітуд струмів у вітках схеми 4.2,а:

$$\begin{aligned} \dot{I}_m &= \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} + \dot{I}_{3m} + \dot{I}_{4m}; \\ \dot{I}_m &= \dot{U}_m \left(\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} + \frac{1}{\dot{Z}_4} \right) = \dot{Y} \dot{U}_m, \end{aligned} \quad (4.2)$$

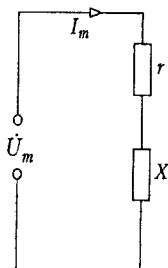
$$\text{де } \dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} + \frac{1}{\dot{Z}_4} = \left(\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_3} \right) + \left(\frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_4} \right) = \dot{Y}' + \dot{Y}''.$$



a)



б)



в)

Рисунок 4.2 – Паралельне з'єднання

В даному виразі $\dot{Y}' = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}$ та $\dot{Y}'' = \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_4} = \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_4}{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_4}$ – провідності, що еквівалентні сумарним провідностям першої і третьої віток та другої і четвертої віток, відповідно.

Цим провідностям будуть відповідати еквівалентні опори:

$$\dot{Z}' = \frac{1}{\dot{Y}'}; \quad \dot{Z}'' = \frac{1}{\dot{Y}''};$$

$$\dot{Z}' = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = \frac{(r_1 + j\omega L_1)(r_3 + j\omega L_2)}{r_1 + r_3 + j\omega(L_1 + L_2)} = r' + j\omega L;$$

де r' – дійсна частина \dot{Z}' (активний еквівалентний опір), ωL – уявна частина \dot{Z}' (реактивний еквівалентний опір) (рис. 4.2,б)

$$\dot{Z}'' = \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_4}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_4} = \frac{\left(r_2 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) \left(r_4 + \frac{1}{j\omega C_2}\right)}{r_2 + r_4 + j \frac{C_1 + C_2}{\omega C_1 \cdot C_2}} = r'' - j \frac{1}{\omega C};$$

де r'' – дійсна частина \dot{Z}'' (активний еквівалентний опір), $\frac{1}{\omega C}$ – уявна частина \dot{Z}'' (реактивний еквівалентний опір) (рис. 4.2,б)

Еквівалентна провідність усіх віток схеми рис. 4.2,а буде:

$$\dot{Y} = \dot{Y}' + \dot{Y}'' = \frac{1}{r' + j\omega L} + \frac{1}{r'' - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{r' + r'' + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{(r' + j\omega L)\left(r'' - j\frac{1}{\omega C}\right)}$$

Відповідно еквівалентний опір усіх віток схеми рис. 4.2,а буде:

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{(r' + j\omega L)\left(r'' - j\frac{1}{\omega C}\right)}{r' + r'' + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = r + jx,$$

де r – активна, x – реактивна складові еквівалентного комплексного опору (рис. 4.2,в).

Змішане з'єднання

Електричні схеми зі змішаним з'єднанням двополюсників, можна “спрощувати” використовуючи еквівалентні “згортання” схем із послідовним чи паралельним з'єднанням.

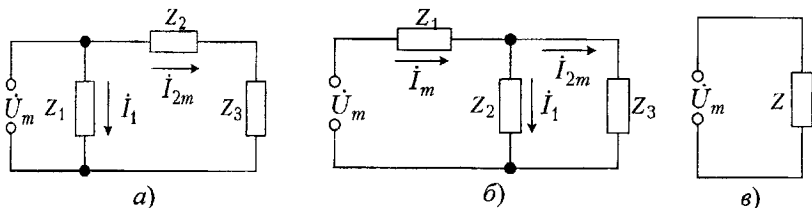


Рисунок 4.3 – Схеми зі змішаним з'єднанням елементів

Розглянемо, для прикладу, схему рис. 4.3,а, де Z_2 і Z_3 – послідовно з'єднані, отже їх спільний комплексний опір:

$$\dot{Z}' = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2,$$

провідність

$$\dot{Y}' = \frac{1}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3},$$

паралельно

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}.$$

Тоді еквівалентний опір Z буде дорівнювати (рис. 4.3,в):

$$Z = \frac{\dot{Z}_1(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3},$$

паралельно

$$\dot{Y}' = \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}; \quad \dot{Z}' = \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

Опори \dot{Z}' і \dot{Z}_1 з'єднані послідовно, а отже (рис. 4.3,б):

$$Z = \dot{Z}' + \dot{Z}_1 = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

При послідовному з'єднанні елементів кола схему його можна “згорнути” до одноконтурної з еквівалентними елементами, опори яких додаються.

При паралельному з'єднанні кола схему його можна “згорнути” до одноконтурної, шляхом додавання провідностей відповідних віток схеми.

При змішаному з'єднанні використовуються прийоми “згортання” схем з послідовним і паралельним з'єднаннями елементів.

4.2 Еквівалентні схеми реальних котушки індуктивності та конденсатора

При розв'язанні багатьох задач радіоелектроніки знехтувати втратами енергії в котушці індуктивності або конденсаторі не допустимо. Це у першу чергу має місце в радіовимірюваннях. При контролі ж вологості матеріалів активні втрати відіграють вирішальну роль, тому що несуть інформацію про параметр, що оцінюється. Осердя котушок індуктивності, трансформаторів, діелектричні матеріали, які широко застосовуються в радіотехніці, мають втрати і особливо значні на підвищених частотах.

Тому при розрахунку реальних радіотехнічних пристроїв зручно користуватись еквівалентними схемами реальних котушок індуктивності та конденсаторів, де втрати подані активними опорами підімкненими послідовно чи паралельно до ідеальних реактивних елементів.

Припустимо, ми маємо послідовно з'єднані резистор з активним опором r та ідеальний реактивний елемент з реактивним опором x . Тобто, така ділянка кола буде мати комплексний опір:

$$\dot{Z} = r + jx,$$

якому відповідатиме комплексна провідність:

$$\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{r + jx},$$

$$\dot{Y} = \frac{r_1 - jx_1}{r^2 + x^2} = \frac{r_1}{r^2 + x^2} - j \frac{x_1}{r^2 + x^2} = g - jb, \quad (4.3)$$

де

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2}, \quad b = -\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2}. \quad (4.4)$$

З іншого боку:

$$\dot{Z} = \frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{g - jb} = \frac{g + jb}{j^2 + b^2} = \frac{g}{j^2 + b^2} + j \frac{b}{j^2 + b^2},$$

або

$$x = \frac{b}{g^2 + b^2}, \quad r = \frac{g}{g^2 + b^2}. \quad (4.5)$$

Вирази 4.4 та 4.5 дуже зручні для здійснення переходу від опорів до провідностей і навпаки при послідовному з'єднанні активного і реактивного елементів.

Легко показати, що при паралельному з'єднанні g та b матимемо:

$$r = \frac{g}{g^2 + b^2}, \quad x = -\frac{b}{g^2 + b^2}, \quad (4.6)$$

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}, \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2}. \quad (4.7)$$

Вирази 4.6 та 4.7 є зручними при переході від провідностей до опорів і навпаки, коли r і x з'єднані паралельно.

На рис. 4.4 показано два варіанти схеми заміщення (еквівалентної схеми) реального реактивного елемента: з послідовним (а) та паралельним (б) опорами втрат.

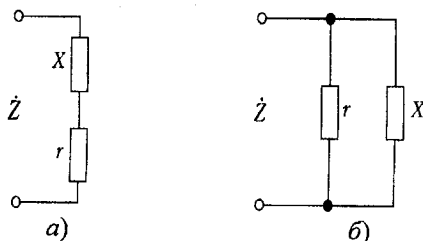


Рисунок 4.4 – Схеми заміщення котушки індуктивності

У обох випадках комплексний опір має бути однаковим. Для послідовного з'єднання $r_1 x_1$:

$$\dot{Z} = r_1 + jx_1.$$

Активна та реактивна провідності для цієї схеми будуть:

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2}, \quad b = -\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2}.$$

Тоді опори віток схеми рис.4.4,б мають бути такими:

$$r_2 = \frac{1}{g} = \frac{r_1^2 + x_1^2}{r_1}; \quad x_2 = \frac{1}{b} = \frac{r_1^2 + x_1^2}{x_1}.$$

Так, для котушки індуктивності при переході від еквівалентної схеми вигляду 4.4,а до схеми вигляду 4.4,б будемо мати:

$$\begin{aligned}
 Z &= r_1 + j\omega L, \\
 g &= \frac{r_1}{r_1^2 + (\omega L)^2}; \quad \dot{Z} = r_1 - j \frac{1}{\omega C_1}; \\
 r_2 &= \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{r_1} = r_1 + \frac{(\omega L_1)^2}{r_1}; \\
 \omega L_2 &= \frac{r_1^2 + (\omega L_1)^2}{\omega L_1} = \omega L_1 + \frac{r_1^2}{\omega L_1}; \\
 r_2 &= r_1 \left[1 + \left(\frac{\omega L_1}{r_1} \right)^2 \right]; \quad L_2 = L_1 \left[1 + \left(\frac{r_1}{\omega L_1} \right)^2 \right].
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Для реального конденсатора:

$$\begin{aligned}
 \dot{Z} &= r_1 - j \frac{1}{\omega C_1}; \\
 g &= \frac{r_1}{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1} \right)^2}; \quad b = \frac{-\frac{1}{\omega C_1}}{r_1^2 + \left(\frac{1}{\omega C_1} \right)^2}; \\
 r_2 &= r_1 + \frac{1}{r_1 (\omega C_1)^2}; \quad x_2 = -r_1^2 \omega C_1 - \frac{1}{\omega C_1}; \\
 \frac{1}{\omega C_2} &= r_1^2 \omega C_1 + \frac{1}{\omega C_1}; \quad \frac{1}{C_2} = r_1^2 \omega^2 C_1 + \frac{1}{C_1} = \frac{1 + r_1^2 \omega^2 C_1^2}{C_1}. \\
 r_2 &= r_1 \left[1 + \frac{1}{r_1 (\omega r_1 C_1)^2} \right]; \quad C_2 = \frac{C_1}{1 + (\omega r_1 C_1)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

При переході від схеми 4.4,б до схеми 4.4,а будемо мати, відповідно:

$$r_1 = \frac{r_2}{1 + \left(\frac{r_2}{\omega L_2} \right)^2}; \quad L_1 = \frac{L_2}{1 + \left(\frac{\omega L_2}{r_2} \right)^2}; \tag{4.10}$$

$$r_1 = \frac{r_2}{r_1 + (\omega r_2 C_2)^2}; \quad C_1 = C_2 \left[1 + \frac{1}{(\omega r_2 C_2)^2} \right]. \tag{4.11}$$

На радіочастотах у котушках з малими втратами:

$$\omega L_1 \gg r_1, \quad r^2 \approx \frac{(\omega L_1)^2}{r_1}; \quad L_2 \approx L_1.$$

На низьких частотах, таких що $\omega C_2 \gg \frac{1}{r_2}$, матимемо

$$r_1 \approx \frac{1}{r_2 (\omega C_2)^2}; \quad C_1 \approx C_2.$$

Значення перерахованих параметрів реальних котушок індуктивності та конденсаторів залежать від частоти гармонічного коливання у колі.

4.3 Взаємне перетворення трикутника і зірки комплексних опорів

Такі перетворення були зроблені для опорів у колах постійного струму у першому розділі. Але ми пересвідчилися, що усі основні закони постійного струму є справедливими для комплексних амплітуд гармонічного струму. Ми також з'ясували, що еквівалентні комплексні опори при послідовному, паралельному та змішаному з'єднанні знаходяться за тими ж правилами, що і для постійного струму.

Таким чином, повторивши дії переходу від трикутника (рис. 1.25,б) до еквівалентної йому зірки та замінивши опори R відповідними комплексними опорами \dot{Z} , в виразах 1.17, 1.18, 1.19, отримаємо:

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_{31} \cdot \dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad (4.12)$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12} \cdot \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}, \quad (4.13)$$

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{23} \cdot \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}. \quad (4.14)$$

При переході від зірки до еквівалентного їй трикутника, аналогічно, отримаємо з (1.22), (1.23), (1.24):

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}, \quad (4.15)$$

$$\dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}, \quad (4.16)$$

$$\dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_3 \cdot \dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}. \quad (4.17)$$

4.4 Еквівалентні генератор напруги і генератор струму

Генератор напруги та генератор струму будемо називати еквівалентними, якщо при заміні одного генератора на інший напруги і струму у зовнішньому електричному колі, з яким ці генератори з'єднані, залишаться незмінними (рис. 4.5).

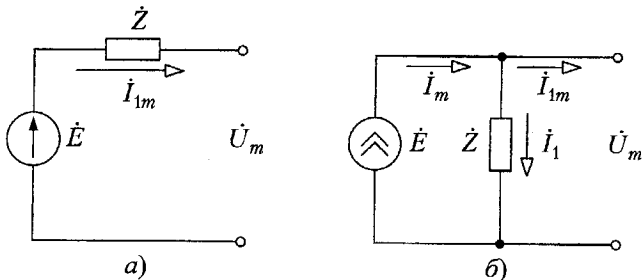


Рисунок 4.5 – Схеми еквівалентних генераторів напруги (а) та струму (б)

У відповідності до цього визначення, напруги між полюсами U_m та струми I_{1m} , що мають надходити у зовнішню ділянку кола, в обох випадках повинні бути однаковими.

Умову еквівалентності генератора напруги з електрорушійною силою E_m та генератора струму I_m запишемо так:

$$E_m = I_m \cdot \dot{Z}, \quad (4.18)$$

де \dot{Z} – внутрішній комплексний опір генератора напруги і генератора струму. Напруга U_m на вихідних полюсах генератора напруги дорівнює різниці між е.р.с. E_m та спадом напруги на внутрішньому комплексному опорі \dot{Z} , створеним струмом I_m . Напруга U_m на полюсах генератора струму при тому ж значенні струму I_{1m} , що надходить у зовнішнє коло, дорівнює спаду напруги на комплексному опорі \dot{Z} , створеному I_{1m} , який дорівнює різниці струмів $I_m - I_{1m}$.

Ця напруга U_m у обох випадках має бути однаковою:

$$\dot{U}_m = \dot{E}_m - \dot{I}_{1m} \cdot \dot{Z} = (\dot{I}_m - \dot{I}_{1m}) \cdot \dot{Z} = \dot{I}_m \cdot \dot{Z} - \dot{I}_{1m} \cdot \dot{Z},$$

звідки видно, що $E_m = I_m Z$, а це і є ознакою еквівалентності генераторів напруги та струму (4.18), зображених схемами рис. 4.5.

Якщо навантаження цих генераторів від'єднати, то струм $I_{1m} = 0$ і напруга на полюсах обох генераторів дорівнюватиме е.р.с. E_m . Важливо те, що в генераторі напруги потужність у внутрішньому опорі не витрачається ($I_{1m} = 0$), а в генераторі струму потужність у внутрішньому опорі витрачається, тому що струм $I_{1m} \neq 0$.

А тому, еквівалентність генераторів напруги і струму буде справедлива при незмінності струму, що надходить у зовнішнє коло, та напруги на полюсах, при взаємній заміні одного з них на інший.

Зауважимо, що коли $Z=0$ (генератор е.р.с.), то безпосереднє застосування формули (4.18) для знаходження еквівалентного генератора за заданим значенням е.р.с. E_m не є можливим. У такому випадку роль внутрішнього опорі генератора напруги має відіграти опір зовнішньої ділянки кола, увімкнений послідовно з е.р.с.

Іншими словами, вмикається послідовно з генератором е.р.с.

додатковий резистор. З таким випадком ми зустрінемося при вивченні паралельних коливальних контурів, де виникає необхідність "розв'язати" генератор з низькоомним виходом та паралельний контур з великим вхідним резонансним опором.

Еквівалентність генератора напруги і генератора струму обумовлюється тим, що при заміні одного з них іншим, напруга і струм в зовнішній ділянці кола (на навантаженні) залишаються незмінними.

4.5 Перетворення схем з паралельно увімкненими генераторами

Розглянемо рис. 4.6, де показані етапи перетворення схеми трьох паралельно з'єднаних генераторів напруги (а) у схему трьох еквівалентних паралельно з'єднаних генераторів струму (б), яка потім "згорнута" до схеми еквівалентного їм генератора струму (в), яка потім трансформується у згорнуту схему еквівалентного генератора напруги (Г). Отже, вихідною є схема рис. 4.6,а – три паралельно з'єднаних генератори напруги з е.р.с. E_{1m} , E_{2m} , E_{3m} та внутрішніми опорами r_1 , r_2 , r_3 відповідно. Вони працюють на навантаження R_H забезпечуючи у ньому струм I_m при напрузі U_m .

Перейдемо до схеми рис. 4.6,б, де замість генераторів напруги увімкнені еквівалентні їм генератори струму \dot{I}_{m1} , \dot{I}_{m2} , \dot{I}_{m3} з внутрішніми опорами r_1 , r_2 , r_3 відповідно, які на опорі R_H повинні забезпечити струм I_{Hm} при напрузі U_m .

Ці три генератори струму можна замінити одним (рис. 4.6,в) генератором струму I_m таким, що:

$$\dot{I}_m = \dot{I}_{1m} + \dot{I}_{2m} + \dot{I}_{3m},$$

де $\dot{I}_{1m} = \dot{E}_{1m} / r_1$, $\dot{I}_{2m} = \dot{E}_{2m} / r_2$, $\dot{I}_{3m} = \dot{E}_{3m} / r_3$, з урахуванням чого струм:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_{1m}}{r_1} + \frac{\dot{E}_{2m}}{r_2} + \frac{\dot{E}_{3m}}{r_3} = \frac{\dot{E}_m}{r} = g\dot{E}_m,$$

$$\text{де: } \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = g_1 + g_2 + g_3 = g \left(g_1 = \frac{1}{r_1}, g_2 = \frac{1}{r_2}, g_3 = \frac{1}{r_3} \right).$$

Скориставшись отриманим для схеми 4.6,в результатом можна перейти до схеми рис. 4.6,г, якщо виконати умову (4.18)

$$\dot{E}_m = r \cdot \dot{I}_m = \frac{g_1 \dot{E}_{1m} + g_2 \dot{E}_{2m} + g_3 \dot{E}_{3m}}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Таким чином, три паралельні вітки з джерелами напруги можуть бути замінені одним генератором напруги або генератором струму.

Струм у зовнішній ділянці R_H буде дорівнювати:

$$\dot{I}_{Hm} = \dot{I}_m \frac{r}{r + R_H} = \frac{\dot{E}_m}{r + R_H}.$$

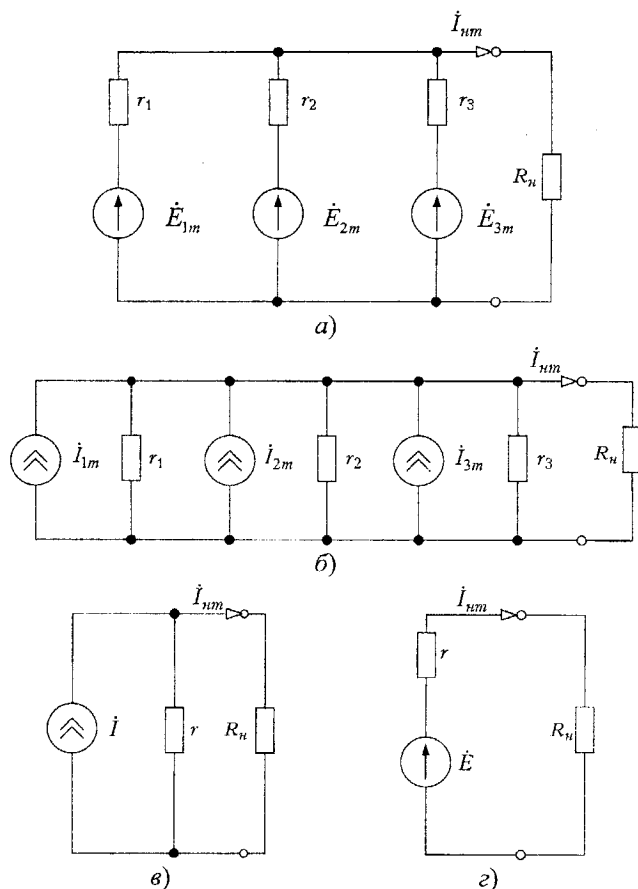


Рисунок 4.6 – Послідовність «згортання»

Напряга між полюсами генераторів:

$$\dot{U}_{Hm} = \dot{I}_m \frac{r \cdot R_H}{r + R_H} = \frac{g_1 \dot{E}_{1m} + g_2 \dot{E}_{2m} + g_3 \dot{E}_{3m}}{g_1 + g_2 + g_3}$$

4.6 Перетворення схем з електричною симетрією

Розглянемо, для прикладу, схему рис. 4.7,а, яка є і геометрично і електрично симетрична, що видно з рис. 4.7,б. У таких схемах, очевидно, є точки чи вузли з однаковими потенціалами. Між такими точками (вузлами) струми дорівнюють нулю. Тому такі вітки можна "розрізати", не порушуючи розподіл струмів і напруги в схемі, а точки, що мають однаковий потенціал, можуть з'єднуватись між собою. Таке "розрізування"

віток, по яких не протікає струм, та з'єднання точок з однаковими потенціалами суттєво спрощує схему та полегшує розрахунок.

У симетричній схемі рис. 4.7,б струми у вузлах, які перетинають вісь симетрії, відсутні. Коли розрізати цю схему на дві симетричні половинки, то отримуємо одноконтурні схеми вигляду рис. 4.7,в.

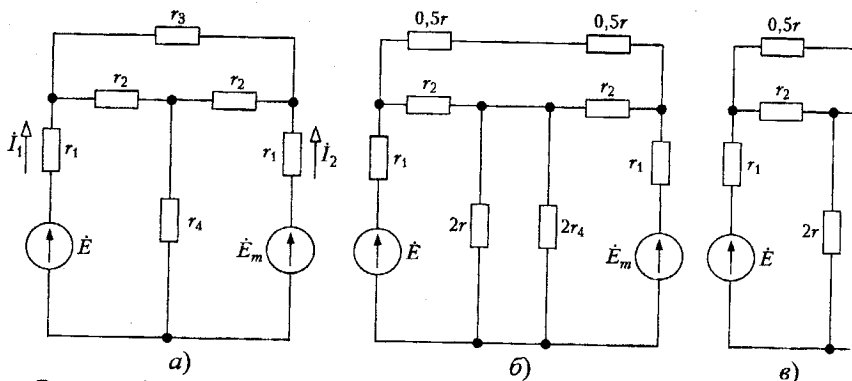


Рисунок 4.7 – Електрично-симетрична схема (а, б), та її половина (в)

Тепер розглянемо випадок, коли у схемі рис. 4.7,а полярність е.р.с. не однакова (рис. 4.8).

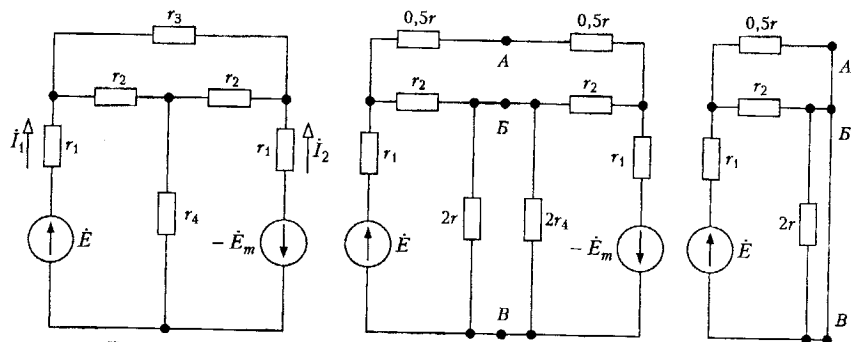


Рисунок 4.8 – Симетрична схема з різнополярними е.р.с.

У цьому випадку струми в симетричних вітках (наприклад I_{1m} і I_{2m}) і напруги між відповідними парами вузлів, симетрично розташованих, рівні за величиною A , значить усі ці точки можна з'єднати між собою одним провідником (точки A, B, B).

Нагадаємо, що такі перетворення допустимі лише у випадку, коли електрична схема має вісь симетрії. В інших випадках, наприклад, коли електрорушійні сили будуть неоднаковими, таке перетворення неможливе.

4.7 Запитання і задачі для закріплення

1. Визначити струм на ділянці кола з послідовно з'єднаними $r=10$ Ом та $x=1$ Ом, коли напруга на ділянці дорівнює $U=14,1$ В.
2. Задано послідовно з'єднані комплексні опори $\dot{Z}_1=(10+j5)$ Ом і $\dot{Z}_2=(5-j10)$ Ом, через які протікає струм $0,5$ А. Визначити напруги на цих опорах, спільну напругу на ділянці.
3. За даними попередньої задачі визначити активну, реактивну і повну потужність на ділянці.
4. Зобразити схему еквівалентну схемі задачі 2 та визначити її еквівалентні параметри.
5. Визначити струми у вітках з паралельно з'єднаних комплексних опорів $\dot{Z}_1=(10+j5)$ Ом і $\dot{Z}_2=(5-j10)$ Ом, коли напруга дорівнює $U=10$ В.
6. За даними задачі 5 визначити активні, реактивні та повні потужності у вітках схеми.
7. За яких умов можна вважати еквівалентними генератор напруги та генератор струму.
8. Написати формули для розрахунку опорів зірки, еквівалентної заданому трикутнику.
9. Написати формули для розрахунку опорів трикутника, еквівалентного зірці.
10. Зобразити еквівалентні схеми реальної котушки індуктивності та реального конденсатора.

5 ОДИНИЧНИЙ КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР

Коливальним контуром називається замкнене електричне коло, яке складається з котушки індуктивності та конденсатора. У такому колі заряджений конденсатор накопичену енергію електричного поля, розряджаючись, віддає котушці індуктивності, заряджаючи її, а та, у свою чергу, накопичену енергію магнітного поля, розряджаючись, повертає конденсатору. Тобто, котушка індуктивності і конденсатор періодично обмінюються енергіями. Цей процес обміну називається колюванням у контурі, а контур називається коливальним контуром.

Ідеальним коливальним контуром називається контур, який складається з ідеальної (без втрат) котушки індуктивності та ідеального (без втрат) конденсатора.

Реальний коливальний контур, очевидно, складається з реальних котушки індуктивності і конденсатора.

5.1 Вільні колювання в ідеальному коливальному контурі

5.1.1 Рівняння колювань і його розв'язування

На рис. 5.1 зображена схема ідеального коливального контуру, котушка індуктивності якого має індуктивність L і конденсатор – ємність C .

За другим законом Кірхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0.$$

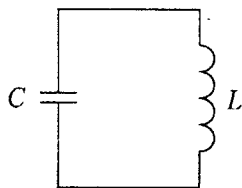


Рисунок 5.1 – Схема контуру

Після диференціювання та ділення цього рівняння на L , матимемо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0.$$

Отримане рівняння називається рівнянням вільних колювань в ідеальному контурі і є диференціальним рівнянням другого порядку, однорідним лінійним, зі сталими коефіцієнтами.

З курсу математики відомо, що загальним розв'язком такого рівняння є функція:

$$i = I_m \sin \left(\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t \right). \quad (5.1)$$

Вираз $\sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot t$ має розмірність – радіан, t – секунда, а значить $\sqrt{1/LC}$ повинен мати розмірність радіан на секунду (рад/с). Ця величина позначається через ω_0 і називається власною круговою частотою контуру:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (5.2)$$

Вираз для миттєвого значення струму у контурі буде:

$$i = I_m \sin \omega_0 t. \quad (5.3)$$

Рівняння (5.2) можна отримати, підставивши (5.3) в (5.1), яке має задовольнятися при будь-якому значенні t , бо (5.3) є його розв'язком. Дійсно:

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \omega_0 I_m \cos \omega_0 t, & \frac{d^2 i}{dt^2} &= -\omega_0^2 I_m \sin \omega_0 t; \\ -\omega_0^2 I_m \sin \omega_0 t + \frac{1}{LC} I_m \sin \omega_0 t &= 0; \\ \left(\omega_0^2 - \frac{1}{LC} \right) \cdot I_m \cdot \sin \omega_0 t &= 0. \end{aligned}$$

Функція $\sin \omega_0 t$ може дорівнювати нулю лише при певних значеннях часу t . Останній же вираз має бути справедливим при будь-якому значенні t , а отже, нулю дорівнює вираз у дужках, звідки:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

З виразу (5.3) бачимо, що у контурі протікає гармонічний струм зі сталою амплітудою I_m і циклічною частотою ω_0 . Цей струм обумовлюється розрядом конденсатора, який віддає накопичену енергію котушці індуктивності або "розрядом" котушки, яка повертає таку ж саму кількість енергії конденсатору. Тобто, це струм, який і переносить цю енергію від конденсатора до котушки і назад з частотою ω_0 . Рівноцінний обмін енергіями забезпечується відсутністю втрат.

5.1.2 Процес коливань та його механічна модель

Припустимо конденсатор C був заряджений від батареї E до напруги U_m (рис. 5.2) у момент часу $t = 0$ (рис. 5.3) перемикач S переводимо з положення 1 у положення 2.

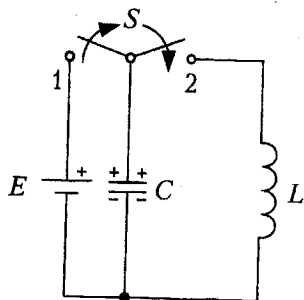


Рисунок 5.2 – Схема контуру

У контурі виникає електричний струм конденсатора, що розряджається через котушку індуктивності L . Цей струм напрямлений від позитивно зарядженої пластини (верхньої) через котушку до негативно зарядженої пластини (нижньої), тобто за ходом годинникової стрілки.

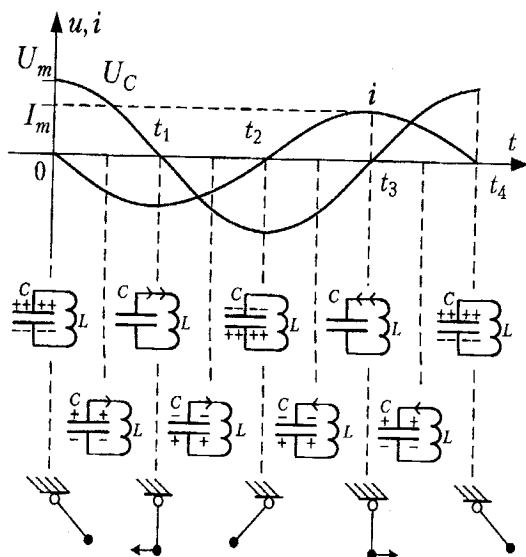


Рисунок 5.3 – Ілюстрації до пояснення процесу вільних коливань в ідеальному коливальному контурі

На момент часу t_1 конденсатор повністю розряджений і напруга у контурі спадає від U_m до нуля, а струм зростає від нуля до максимального значення I_m . У котушці при цьому виникає е.р.с. самоіндукції. Ця е.р.с. чинить опір необмеженому зростанню струму. На цьому інтервалі часу конденсатор C виконує роль джерела енергії, яку він повністю передає

котушці, яка є приймачем енергії і на момент t_1 заряджається до мінімуму. Е.р.с. самоіндукції у цей момент дорівнює нулю, бо електричний струм при $t = t_1$ не змінюється.

На інтервалі від t_1 до t_2 джерелом енергії виступає "заряджена" котушка, яка на момент t_1 накопичила максимум енергії магнітного поля, а розряджений конденсатор є споживачем енергії. Не зважаючи на те, що конденсатор повністю розряджений, струм у контурі миттєво зрости не може, бо з'являється е.р.с. самоіндукції, яка буде стримувати зростання цього струму. Конденсатор заряджається так, що на нижній обкладинці накопичуватиметься позитивний, а на верхній – негативний заряди за рахунок струму, який протікає за ходом годинникової стрілки. У момент $t_1 = t_2$ конденсатор відбере усю енергію від котушки, зарядившись до напруги $U = -U_m$. Струм при цьому, змінюючись з максимальною швидкістю, досягає значення $i = 0$. Е.р.с. самоіндукції досягає максимального значення.

З моменту $t = t_2$ конденсатор починає розряджатися, але, не зважаючи на повністю "розряджену" котушку, струм різко зрости не може, бо е.р.с. індукції, маючи максимальне значення, чинитиме опір його зростанню. На інтервалі від t_2 до t_3 конденсатор буде розряджатися, стаючи знову генератором, на котушку, яка буде "заряджатися" струмом, що протікатиме у напрямку проти ходу годинникової стрілки. На момент часу $t = t_3$ конденсатор повністю розрядиться, передавши усю енергію свого електричного поля котушці, через яку перетікатиме максимальний струм, обумовлюючи максимум енергії магнітного поля, накопиченої котушкою. Струм зміниться миттєво не може через зростаючу е.р.с. самоіндукції. Конденсатор заряджатиметься струмом, що протікатиме проти ходу годинникової стрілки, накопичуючи при цьому на верхній обкладинці позитивні, а на нижній – негативні заряди. На момент $t = t_4$ Конденсатор повністю зарядиться, а струм у контурі дорівнюватиме нулю.

Таким чином, схема повернеться до стану, у якому вона перебувала на момент $t = 0$, пройшовши повний цикл коливальних процесів у контурі. Далі усе буде повторюватись.

Зауважимо, що у контурі колювання обумовлюються накопиченням енергії електричного поля конденсатором та енергії магнітного поля котушкою індуктивності. Котушка індуктивності та конденсатор по черзі ставали джерелами енергії, яку вони передавали одне одному. А цей процес рівноцінного обміну енергіями якраз і є тим явищем, яке називається колюванням у контурі.

Механічним аналогом (моделлю) може слугувати маятник без втрат (рис. 5.3). Відхилена вправо від положення рівноваги кулька матиме запас потенціальної енергії, що відповідатиме зарядженому конденсаторові. Рухаючись за ходом годинникової стрілки, у момент проходження нею положення рівноваги, її потенціальна енергія перейде повністю у

кінетичну енергію, бо у цей момент лінійна швидкість кульки буде максимальною. Рухаючись далі за інерцією, кулька відхилиться вліво, накопичивши таку ж саму потенціальну енергію, яку вона мала у момент $t=0$. Це обумовлюється відсутністю втрат, а значить повним перетворенням кінетичної енергії в потенціальну. Досягнувши максимуму відхилення, кулька рухатиметься проти годинникової стрілки і у момент проходження положення рівноваги знову набере максимум кінетичної енергії, за рахунок якої, за інерцією, "проскочить" положення рівноваги і відхилиться вліво, досягнувши точно того ж самого положення, у якому вона перебувала при $t=0$. Ці коливання, при повній відсутності втрат, існуватимуть нескінченно довго.

5.1.3 Параметри ідеального контуру

Виходячи з формули (5.3), у контурі протікатиме гармонічний електричний струм, часова діаграма якого зображена на рис. 5.4.

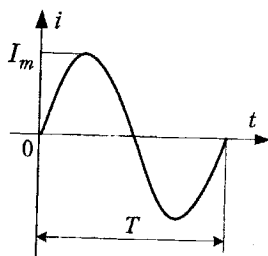


Рисунок 5.4 – Часова діаграма гармонічного струму

Частота вільних коливань у контурі позначається через f_0 і пов'язана з круговою частотою співвідношенням:

$$\omega_0 = 2\pi f_0, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Одиницею вимірювання частоти є один герц (Гц).

В радіотехніці часто користуються більшими одиницями:

1 КГц (кілогерц) = 10^3 Гц,

1 МГц (мегагерц) = 10^6 Гц,

1 ГГц (гігагерц) = 10^9 Гц.

Величина, обернена частоті, називається періодом коливання (рис. 5.4), який позначається через $T_0 = 1/f_0$. Очевидно період T_0 дорівнює тривалості одного повного циклу коливань у контурі (рис. 5.3) від $t=0$ до $t=t_4$.

Період вимірюється у одиницях часу – секундах (с). В радіотехніці користуються часто меншими одиницями:

1 мс (мілісекунда) = 10^{-3} с,

1 мкс (мікросекунда) = 10^{-6} с,

1нс (наносекунда) = 10^{-9} с.

Якби контур випромінював коливання, які поширювались би у вільному просторі у вигляді електромагнітних хвиль, то зручно було б користуватись поняттям довжини хвилі λ (лямбда), що дорівнює:

$$\lambda = \frac{C}{f_0},$$

де $C = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість поширення електромагнітних хвиль (у тому числі і світла) у вільному просторі.

Оскільки $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$, а швидкість – м/с, то довжина хвилі вимірюється у метрах (м). Шкала електромагнітних хвиль, які використовуються у сучасній радіотехніці складається з:

- міріаметрових хвиль $\lambda = (100000 \div 10000)$ м;
- кілометрових хвиль $\lambda = (10000 \div 1000)$ м;
- гектометрових хвиль $\lambda = (1000 \div 100)$ м;
- декаметрових хвиль $\lambda = (100 \div 10)$ м;
- метрових хвиль $\lambda = (10 \div 1)$ м;
- дециметрових хвиль $\lambda = (1 \div 0,1)$ м;
- сантиметрових хвиль $\lambda = (0,1 \div 0,01)$ м;
- міліметрових хвиль $\lambda = (0,01 \div 0,001)$ м;
- субміліметрових хвиль $\lambda = (0,001 \div 0,0001)$ м;
- інфрачервоних хвиль $\lambda = (1000 \div 0,76)$ мкм;
- видимий спектр $\lambda = (0,76 \div 0,38)$ мкм;
- ультрафіолетових хвиль $\lambda = (0,38 \div 0,01)$ мкм.

Енергія, накопичена в електричному колі конденсатора, дорівнює $CU_m^2/2$ і цю енергію він віддає котушці індуктивності, яка накопичує її у магнітному колі у кількості $LI_m^2/2$.

Порівнявши їх між собою матимемо:

$$CU_m^2 = LI_m^2.$$

Звідки відношення U_m/I_m , яке називається характеристичним або хвильовим опором коливального контуру, позначається через ρ (ро) (літера грецької абетки), дорівнює:

$$\rho = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.4)$$

Якщо з виразу (5.2) визначити:

$$\sqrt{C} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{L}},$$

і підставити в (5.4), то отримаємо:

$$\rho = \omega_0 L. \quad (5.5)$$

Якщо з виразу (5.2) визначити:

$$\sqrt{L} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{C}},$$

і підставити (5.4), то отримаємо:

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (5.6)$$

Отже, характеристичний опір контуру дорівнює ємнісному опору конденсатора або індуктивному опору котушки індуктивності на частоті вільних коливань у контурі. Важливим є той факт, що реактивні опори котушки індуктивності і конденсатора є однаковими:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (5.7)$$

В ідеальному коливальному контурі відбувається рівноцінний обмін енергіями між конденсатором C і котушкою індуктивності L з частотою вільних коливань:

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}.$$

Справді, через конденсатор і котушку індуктивності у контурі у будь-який момент часу протікає один і той же струм. При рівних же опорях максимальна потужність конденсатора, як джерела енергії, дорівнює максимальній потужності котушки індуктивності, коли та, у свою чергу, стає джерелом енергії. Тобто:

$$P_{\text{конд}} = \frac{I_n^2}{2} \cdot \omega_0, \quad L = P_{\text{конд}} = \frac{I_n^2}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0 C}, \quad (5.8)$$

що і має місце у контурі без втрат.

Характеристичний опір ρ є особливим параметром коливального контуру, який має розмірність опору, але не пов'язаний ні з якими втратами, хоча за характером є активним, бо за формулою (5.4), яка є його визначенням, ρ – дійсне число.

Строго кажучи, характеристичний опір не має фізичного змісту і введений формально, як відношення амплітуди напруги U_m до амплітуди струму I_m у контурі. Оскільки це відношення має розмірність омів, то цей формальний (визначений через формулу) параметр має назву опору.

Але, виходячи з формули (5.8), можна приписати цьому параметрові властивості елемента, на якому відбуваються взаємні перетворення електричної енергії зарядженого конденсатора і магнітної енергії "зарядженої" котушки індуктивності.

$$\sqrt{L} = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{C}},$$

і підставити в (5.4), то отримаємо:

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (5.6)$$

Отже, характеристичний опір контуру дорівнює ємнісному опору конденсатора або індуктивному опору котушки індуктивності на частоті вільних коливань у контурі. Важливим є той факт, що реактивні опори котушки індуктивності і конденсатора є однаковими:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (5.7)$$

В ідеальному коливальному контурі відбувається рівноцінний обмін енергіями між конденсатором C і котушкою індуктивності L з частотою вільних коливань:

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}.$$

Одним з важливих параметрів ідеального коливального контуру є його характеристичний (або хвильовий) опір:

$$\rho = \sqrt{L/C};$$

$$\rho = \omega_0 L; \quad \rho = 1/\omega_0 C.$$

5.2 Вільні коливання у реальному контурі

5.2.1 Рівняння коливань та його розв'язування

На рис. 5.5 подано еквівалентна схема реального коливального контуру, яка складається з ідеальної котушки індуктивності L , ідеального конденсатора C та опору r , який символізує собою усі можливі втрати у контурі.

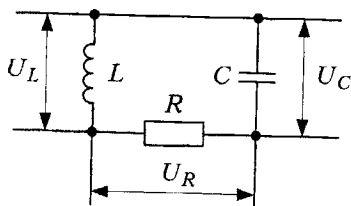


Рисунок 5.5 – Еквівалентна схема реального коливального контуру

За другим законом Кірхгофа для даного контуру запишемо:

$$L \frac{di}{dt} + i \cdot r + \frac{1}{C} \int i dt = 0.$$

Продиференціювавши та розділивши цей вираз на L , матимемо:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (5.8)$$

Отримане диференціальне рівняння є лінійним, однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Як відомо з курсу вищої математики, загальний розв'язок такого рівняння слід шукати у такому вигляді:

$$i = I_{m0} I^{-t/\tau_K} \sin \omega_0 t, \quad (5.9)$$

де τ_K – стала часу контуру, ω_0 – частота вільних коливань у реальному контурі.

Амплітуда цього струму (що протікає у контурі) залежить від часу t , зменшуючись за законом експоненти:

$$I_m(t) = I_{m0} \cdot e^{-t/\tau_K}$$

Амплітуда $I_m(t)$ з часом згасає і тим швидше, чим менше значення τ_K ($\tau_K < \tau_K'$), що показано на рис. 5.6,а.

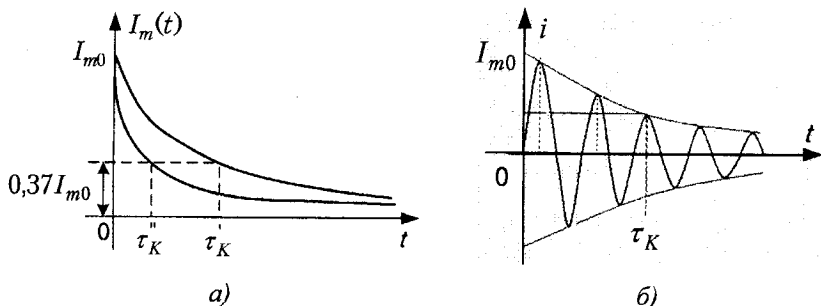


Рисунок 5.6: а) I_{m0} – значення амплітуди при $t = 0$ (початкове значення); б) характер вільних коливань у реальному контурі

Припустимо, що від початку коливань у контурі ($t=0$) пройшов час, який дорівнює сталій часу τ_K . Тобто при $t = \tau_K$:

$$I_m(\tau_K) = I_{m0} \cdot e^{-1} = \frac{I_{m0}}{e} \approx 0,37 I_{m0}.$$

Отже, стала контуру $t = \tau_K$ є відрізок часу, протягом якого амплітуда коливань у контурі зменшиться в e разів, досягнувши рівня 0,37 початкового її значення I_{m0} .

Строго кажучи, струм у реальному контурі не є гармонічною функцією часу, не має періодичності, бо амплітуда цього коливання змінюється.

Згасаючий характер коливань у такому контурі легко пояснити, якщо звернутися до фізичних процесів обміну енергіями між котушкою індуктивності і конденсатором.

Напруга на конденсаторі U_C дорівнюватиме:

$$U_C = -I_{m0} \cdot \frac{1}{\omega_0 C} \sin(\omega_0 t - \pi/2).$$

Напруга на котушці індуктивності U_L дорівнюватиме:

$$U_L = I_{m0} \cdot \omega_0 L \sin(\omega_0 t - \pi/2).$$

При $t = 0$ амплітуда напруги зарядженого конденсатора дорівнює:

$$U_{Cm} = I_{m0} \cdot \frac{1}{\omega_0 C}$$

Енергія електричного поля між його обкладинками:

$$W_{Cm} = \frac{CU_{Cm}^2}{2}.$$

При передачі цієї енергії котушці протягом чверті періоду коливань її частина буде втрачена на r – на перетворення електричної енергії в інші види. Тому котушка індуктивності візьме від конденсатора енергію $W_{Lm} < W_{Cm}$ не "дозарядившись".

Протягом наступної чверті періоду "недозаряджена" котушка частину своєї енергії витратить на r і зможе повернути конденсаторові енергію $W_{Lm}^1 < W_{Lm}$, не дозарядивши конденсатор. Таким чином, напруга на конденсаторі і напруга на котушці з часом будуть зменшуватись, що призведе до згасання розмаху коливань струму у контурі. Це і обумовлює згасання амплітуди коливань у реальному контурі.

5.2.2 Параметри реального контуру

Функція вигляду (5.9) має задовольняти рівняння (5.8), перетворюючи його на тотожність. Підставимо (5.9) у (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \omega_0 I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \cos \omega_0 t - \frac{1}{\tau_K} I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \sin \omega_0 t, \\ \frac{d^2 i}{dt^2} &= -\omega_0^2 I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\tau_K} \omega_0 I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\tau_K^2} I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\tau_K} \omega_0 I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \cos \omega_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} & \left[-\omega_0^2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\tau_K} \cos \omega_0 t + \frac{1}{\tau_K^2} \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\tau_K} \cos \omega_0 t + \right. \\
& \left. + \omega_0 \frac{r}{L} \cos \omega_0 t - \frac{r}{L\tau_K} \sin \omega_0 t + \frac{1}{LC} \sin \omega_0 t \right] = \\
= I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} & \left[-\omega_0^2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{2\omega_0}{\tau_K} \cos \omega_0 t + \frac{1}{\tau_K^2} \sin \omega_0 t + \right. \\
& \left. + \omega_0 \frac{r}{L} \cos \omega_0 t - \frac{r}{L\tau_K} \sin \omega_0 t + \frac{1}{LC} \sin \omega_0 t \right] = 0. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

При $t = 0$:

$$I_{m0} \left(-\frac{2\omega_0}{\tau_K} + \frac{\omega_0 r}{L} \right) = 0; \quad \omega_0 I_{m0} \left(\frac{r}{L} - \frac{2}{\tau_K} \right) = 0.$$

I_{m0} та ω_0 нулю не дорівнюють, а значить:

$$\frac{r}{L} - \frac{2}{\tau_K} = 0,$$

звідки:

$$\tau_K = \frac{2L}{r}. \quad (5.11)$$

Підставивши замість τ_K його значення з (5.11) в (5.10), матимемо при

$I_{m0} e^{-\frac{t}{\tau_K}} \neq 0$:

$$\begin{aligned}
& -\omega_0^2 \sin \omega_0 t - \omega_0 \frac{r}{L} \cos \omega_0 t + \frac{r^2}{4L^2} \sin \omega_0 t + \\
& + \omega_0 \frac{r}{L} \cos \omega_0 t - \frac{r^2}{2L^2} \sin \omega_0 t + \frac{1}{LC} \sin \omega_0 t = 0; \\
& \left(-\omega_0^2 - \frac{r^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \right) \sin \omega_0 t = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}; \\
\omega_0 & = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{r^2 C}{4L}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4\rho^2}}. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Введемо поняття добротності коливального контуру Q таким чином:

$$Q = 2\pi \frac{W_{зан}}{P_{вмп} \cdot T_0},$$

де: $W_{зан}$ – енергія, яка запасється у контурі (в конденсаторі чи у котушці):

$$\omega_{зан} = \frac{CU_{mc}^2}{r} = \frac{LI_m^2}{r};$$

$P_{\text{втр}} = \frac{I_m^2}{2} r$ – потужність втрат, T_0 – період коливання, добуток $P_{\text{втр}} \cdot T_0$ – енергія втрат за один період.

$$Q = 2\pi \frac{LI_m^2 \cdot 2}{2I_m^2 r \cdot T_0} = 2\pi f_0 \frac{L}{r} = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{\rho}{r};$$

або:

$$Q = 2\pi \frac{CU_m^2 \cdot 2}{2I_m^2 r \cdot T_0} = 2\pi f_0 \frac{CU_m^2}{I_m^2 \cdot r} = \omega_0 \frac{C \cdot \left(I_m \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \right)^2}{I_m^2 \cdot r} =$$

$$= \frac{\omega_0 \cdot I_m^2 \cdot C}{\omega_0 C^2 \cdot r} = \frac{1}{\omega_0 C \cdot r} = \frac{\rho}{r}.$$

Добротність контуру – це 2π помножене на відношення енергії, яка запасасться у контурі до енергії втрат за один період коливань.

З отриманих формул бачимо, що обчислити значення добротності контуру зручно за формулою:

$$Q = \frac{\rho}{r}. \quad (5.13)$$

Тобто, чисельно добротність коливального контуру показує у скільки разів його характеристичний опір є більшим за опір втрат.

Але фізичний зміст добротності, яка є енергетичною характеристикою будь-якої системи: механізму, машини, коливального контуру, антени, радіотехнічної системи, біологічної системи, живого організму, полягає у визначенні співвідношення між енергією, що запасасться системою і енергією втрат у ній.

Повернувшись до питання про частоту вільних коливань у реальному контурі, підставимо з (5.13) вираз $\rho/r = Q$ у (5.12) і отримаємо:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}. \quad (5.14)$$

Якби втрат у контурі не було, то $Q = \infty$, а частота вільних коливань дорівнювала б її значенню для ідеального контуру з тими ж значеннями L та C з виразу (5.2).

Зі збільшенням втрат (зменшенням добротності) підкореневий вираз формули (5.14) зменшуватиметься, що призведе до зменшення і частоти вільних коливань у контурі.

Так, при добротності $Q = \frac{1}{2}$, частота коливань $\omega_0 = 0$, тобто, період коливань $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} = \infty$ стає нескінченно великим, а процес розряду конденсатора з моменту $t = 0$ стає аперіодичним. Коливання у контурі не

відбуваються, бо при розряді конденсатора уся його енергія пішла на величезні втрати і до котушки нічого "не дійшло".

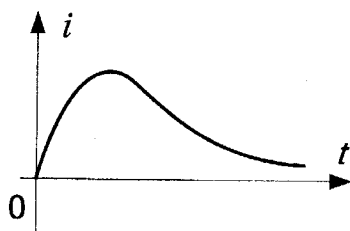


Рисунок 5.7 – Струм у контурі при аперіодичному розряді конденсатора

В радіотехніці використовуються контури з достатньо високою добротністю $Q=50\dots300$, а тому при розрахунку користуються формулою (5.2):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

яка називається **формулою Томсона** і, строго кажучи, є справедливою для ідеального контуру.

Розрахуємо похибку при заміні формули (5.14) на (5.2) при добротності $Q=50$.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot 2500}} = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - 0,0001} \approx \sqrt{\frac{1}{LC}} (1 - 5 \cdot 10^{-5}).$$

Отже, відносна похибка складає $5 \cdot 10^{-5}$ або 0,005%.

При більш високих добротностях ця похибка, очевидно, буде ще меншою, а тому на практиці частіше за все для розрахунку частоти коливань у контурі використовують формулу Томсона.

Іноки в розрахунках зручно користуватися величиною оберненою добротності:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho}, \quad (5.15)$$

яка називається згасанням контуру.

В кінці зауважимо, що у радіотехніці використовуються пристрої, які мають добротності в тисячі і десятки тисяч одиниць (наприклад, кварцові резонатори), або й сотні тисяч – надвисокочастотні резонатори.

Добротність реального коливального контуру є енергетичною характеристикою, яка для контуру кількісно визначається за формулою:

$$Q = \rho/r.$$

У реальному контурі вільні коливання носять згасаючий характер, обумовлений активними втратами у ньому.

Швидкість згасання коливань у контурі можна оцінити його сталою часу τ_K , яка дорівнює інтервалу часу, протягом якого амплітуда коливань зменшиться у e разів:

$$I_m(t + \tau_K) = 0,37 \cdot I_m(t).$$

Частота вільних коливань зменшується при зростанні втрат:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}},$$

але для добротних контурів доцільно користуватися формулою Томсона:

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

5.3 Вимушені коливання у послідовному коливальному контурі

Вільні коливання у реальному контурі з часом згасають через активні втрати енергії. Значить, щоб ці коливання не згасали потрібно активні втрати компенсувати. Якщо у контур від генератора вчасно інjektувати стільки енергії, скільки втрачається, то коливання у контурі відбуватимуться зі сталою амплітудою. Іншими словами, генератор повинен дозаряджати конденсатор і котушку, а це еквівалентно тому, що відбувається компенсація втрат у реальному контурі, яка обумовлює незгасаючий характер коливань у ньому.

Але при цьому коливання у контурі відбуватимуться під дією примусової сили генератора із частотою генератора. Тому ми повинні говорити, що ці коливання в контурі є вимушеними на відміну від вільних коливань, розглянутих вище.

Одним із варіантів реалізації такої задачі є послідовний коливальний контур, яким називається замкнене електричне коло послідовно з'єднаних між собою трьох елементів: генератора е.р.с., котушки індуктивності та конденсатора (рис. 5.8).

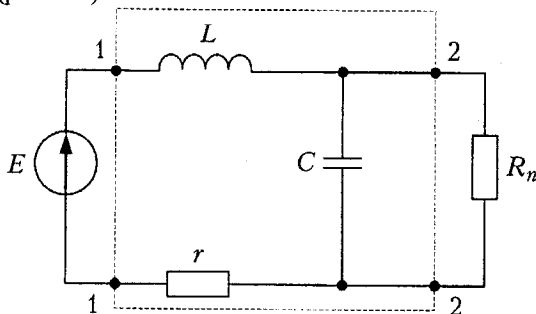


Рисунок 5.8 – Еквівалентна схема послідовного контуру

5.3.1 Вхідний опір і частотні характеристики послідовного контуру

Будемо вважати, що усі втрати у контурі, включаючи і внутрішній опір генератора, зосереджені в опорі r .

Генератор віддає у зовнішню частину кола (власне у контур) струм i , комплексна амплітуда якого \dot{I}_m , створюючи на вхідних полюсах 1-1 чотириполюсника напругу з комплексною амплітудою $\dot{U}_{1m} = \dot{E}_{1m}$. Відношення \dot{U}_{1m}/\dot{I}_m називається комплексним вхідним опором цього контуру \dot{Z}_{ex} , який дорівнює:

$$\dot{Z}_{ex} = \frac{\dot{U}_{m1}}{\dot{I}_m} = R_{ex} + jX_{ex}, \quad (5.16)$$

де R_{ex} – активна складова,

X_{ex} – реактивна складова вхідного опору послідовного коливального контуру.

Зі схеми контуру:

$$\dot{Z}_{ex} = r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx, \quad (5.17)$$

де $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ – реактивний опір контуру,

ω – частота генератора (частота вимушених коливань у контурі).

Прирівнюючи (5.16) і (5.17), запишемо:

$$R_{ex} = r, \quad X_{ex} = x = \omega L - 1/\omega C.$$

Запишемо комплексне число \dot{Z}_{ex} у показниковій формі:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{ex} &= Z_{ex} e^{j\varphi_{ex}}, \\ Z_{ex} &= \sqrt{R_{ex}^2 + X_{ex}^2} = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}, \\ \varphi_{ex} &= \arctg \frac{X_{ex}}{R_{ex}} = \arctg \frac{x}{r} = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{r}, \end{aligned}$$

де Z_{ex} – модуль комплексного вхідного опору,

φ_{ex} – аргумент комплексного вхідного опору контуру.

Побудуємо і проаналізуємо частотні характеристики вхідного опору:

$$Z_{ex}(\omega), \varphi_{ex}(\omega), R_{ex}(\omega), X_{ex}(\omega).$$

Ці характеристики подані на рис. 5.9.

При зміні частоти генератора змінюватимуться: індуктивний опір котушки $X_L = \omega L$, ємнісний опір конденсатора $X_C = -\frac{1}{\omega L}$ (див. рис. 5.9,б)

та реактивний опір контуру $x = \omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Очевидно, на якійсь частоті ω_0 опори $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, а $X_{ax} = X = 0$.

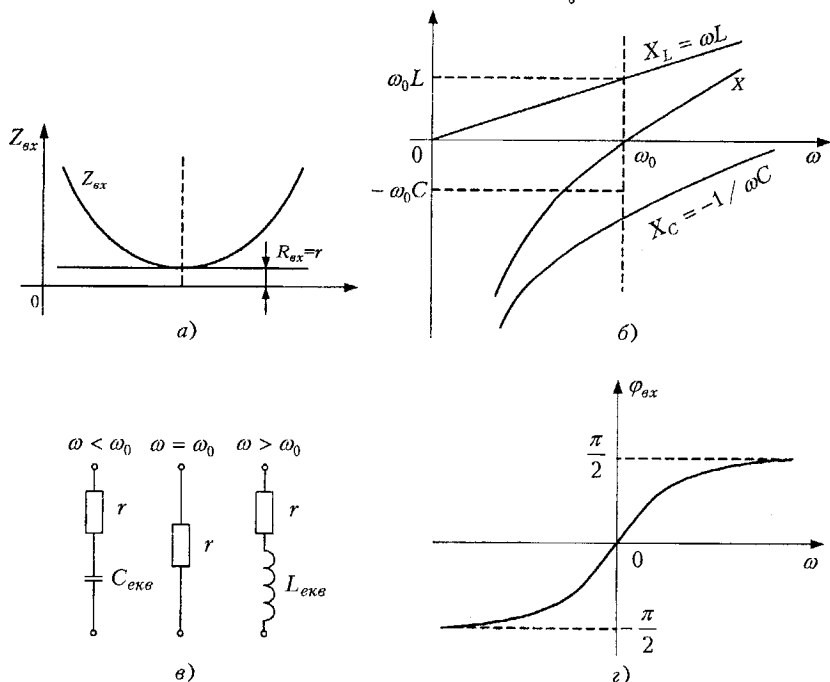


Рисунок 5.9 – Частотні характеристики вхідного опору послідовного контуру

При цьому \dot{Z}_{ax} зменшиться до значення r (рис. 5.9,а), а значить $\dot{Z}_{ax} = R_{ax} = r$ – вхідний опір контуру стане чисто активним за характером (рис. 5.9,в) і мінімальним за величиною

$$\dot{i}_m = \frac{U_{1m}}{\dot{Z}_{ax}} = \frac{\dot{U}_{1m}}{\dot{Z}_{ax}} e^{-j\varphi_{ax}},$$

де $\varphi_{ax} = \arctg \frac{x}{r}$ – різниця фаз між напругою на вході контуру та струмом у ньому.

При $\omega = \omega_0$, $\varphi_{ax} = 0$ (рис. 5.9,д), що є цілком зрозумілим, бо вхідний опір $Z_{ax} = r$ – чисто активний (рис. 5.10,а).

При $\omega < \omega_0$, $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, $x = \omega L - 1/\omega C < 0$ реактивна частина вхідного опору є від'ємною, що свідчить про активно-ємнісний характер вхідного

опору контуру. При цьому $\varphi_{ex} < 0$ і струм у контурі випереджає напругу за фазою (рис. 5.10,б).

При $\omega > \omega_0$, $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, $x = \omega L - 1/\omega C > 0$, реактивна складова вхідного опору є додатною, що свідчить про активно-індуктивний характер вхідного опору контуру. При цьому $\varphi_{ex} > 0$ і струм у контурі відстає від напруги за фазою (рис. 5.10,в).

5.3.2 Резонанс напруг

Раніше ми зауважили, що на деякій частоті генератора $\omega = \omega_0$:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

вхідний опір послідовного контуру стає мінімальним, що призводить до зростання струму у контурі до максимальної величини.

$$\dot{I}_{m\max} = \frac{\dot{U}_m}{r}.$$

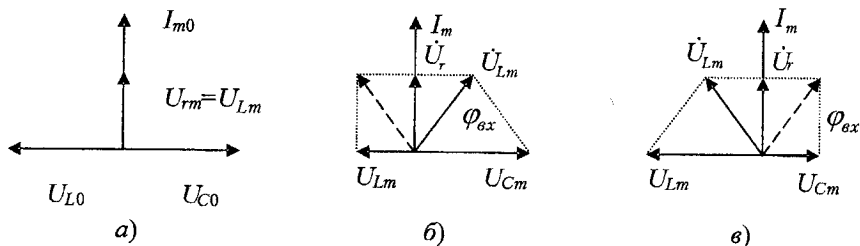


Рисунок 5.10 – Векторні діаграми послідовного контуру

Тоді на ділянках кола будуть такі напруги (рис. 5.10,а): на опорі втрат $-U_r = \dot{I}_m \cdot r$, яка збігається за фазою зі струмом у контурі; на котушці індуктивності $\dot{U}_{mL} = \dot{I}_m \cdot j\omega_0 L = \omega_0 L \dot{I}_m e^{j\pi/2}$, яка випереджатиме струм у контурі на 90° ; на конденсаторі $-\dot{U}_{mc} = \dot{I}_m \cdot \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{\dot{I}_m}{\omega_0 C} e^{-\pi/2}$, яка за амплітудою дорівнюватиме U_{mL} , але відставатиме від струму на 90° .

Напруги на котушці індуктивності і конденсаторі будуть однаковими за величиною, протилежними за фазами і тому, взаємнокомпенсуючи одна одну, приводить до того, що реактивний опір струмові у контурі дорівнює нулю. Максимальний струм у контурі, протікаючи через котушку і конденсатор, створить на кожній з них ($\omega_0 L = 1/\omega_0 C$) максимальні і рівні за величиною напруги:

$$U_{mL} = U_{mc} = I_m \cdot \rho,$$

де, нагадаємо, $\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$ – характеристичний опір контуру.

Відношення:

$$\frac{U_{mL}}{U_{m1}} = \frac{U_{mc}}{U_{m1}} = \frac{I_m \cdot \rho}{I_m \cdot r} = \frac{\rho}{r} = Q,$$

показує, що напруги на кожному з реактивних елементів досягають максимального значення, яке у Q разів більше від напруги (е.р.с.) генератора. Це явище називається **резонансом напруг**, а частота $\omega = \omega_0$ – **резонансною частотою**.

Явище резонансу напруг використовується в радіотехніці, зокрема, при побудові вимірювальних приладів для вимірювання параметрів котушок індуктивності, конденсаторів резонансним методом.

5.3.3 Вплив опору навантаження на параметри контуру

Піднімемо до вихідних полюсів послідовного контуру резистор R_H (рис. 5.8). Якими ж стануть параметри навантаженого контуру?

Так, якщо на резонансній частоті, що на практиці і має найбільше значення, $\frac{1}{\omega_0 C} \ll R_H$, то паралельне з'єднання C і R_H можна замінити еквівалентним йому (рис. 5.11) послідовним з'єднанням C і $r_{ен}$, де внесений опір $r_{ен}$ дорівнює:

$$r_{ен} = \frac{1}{(\omega_0 C)^2 R_H} = \frac{\rho^2}{R_H}.$$

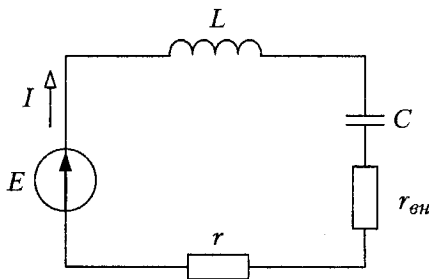


Рисунок 5.11 – Схема, еквівалентна схемі рис. 5.8

Таким чином, у схемі рис. 5.11 містяться ті ж самі реактивності, що і у схемі рис. 5.8. Тільки активний опір збільшився на $r_{ен}$.

Навантажена добротність такого контуру Q_H дорівнюватиме

$$Q_H = \frac{\rho}{r + r_{ен}} = \frac{\rho}{r + \rho^2/R_H} < Q.$$

Добротність навантаженого контуру менша, а згасання в контурі:

$$d_H = \frac{1}{Q_H} = \frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{R_H} = d + d_{\text{ен}},$$

більше, що свідчить про зростання втрат у контурі.

Якщо внесений опір $r_{\text{ен}} \gg r$, то:

$$Q_H \approx \frac{\rho}{r_{\text{ен}}}; \quad \frac{\rho}{R_H} = d_{\text{ен}}.$$

Вхідний опір навантаженого контуру дорівнюватиме:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = r + \frac{\rho^2}{R_H} + jx;$$

$$Z_{\text{вх}} = \sqrt{\left(r + \frac{\rho^2}{R_H}\right)^2 + x^2}; \quad R_{\text{вх}} = r + \frac{\rho^2}{R_H};$$

$$\varphi_{\text{вх}} = \arctg \frac{x}{r + \rho^2/R_H}.$$

Власна частота коливань в контурі:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \sqrt{L - \frac{1}{4Q_H^2}}.$$

Наведені формули свідчать про те, що навантаження суттєво погіршує параметри контуру, що дуже важливо знати, бо в радіотехнічних пристроях контур працює ланкою передачі сигналу, тобто працює на навантаження, вхідний опір якого і є R_H .

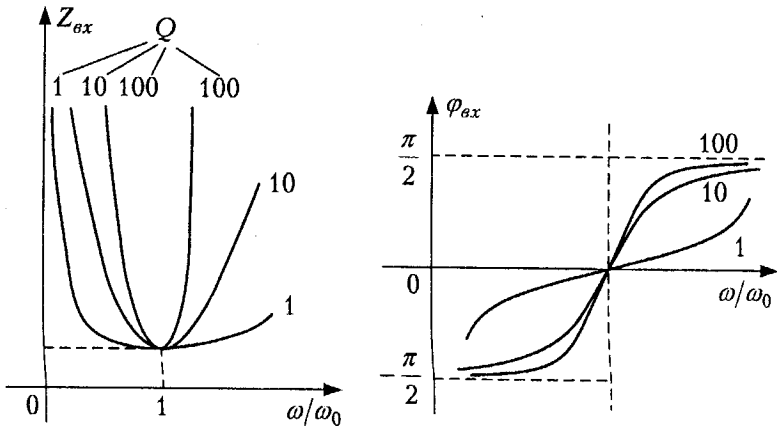


Рисунок 5.12 – Залежність частотних характеристик опору від добротності

Це зниження добротності приводить до суттєвих змін у формі частотних характеристиках вхідного опору.

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вхн}} &= r + j\omega_0 L \left(\frac{\omega L}{\omega_0 L} - \frac{1}{\omega C \cdot \omega_0 L} \right) = r + j\omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \\ &= r \left[1 + j \frac{\omega_0 L}{r} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right], \\ Z_{\text{вхн}} &= r \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}; \quad \varphi_{\text{вх}} = \text{arctg} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

На рис. 5.12 показані сімейства кривих залежностей $Z_{\text{вх}}$ та $\varphi_{\text{вх}}$ від значення відносної частоти ω/ω_0 при трьох значеннях добротності контуру $Q=100, 10$ та 1 .

5.3.4 Вхідний опір контуру при невеликих розстроюваннях

Будемо розглядати вхідний опір послідовного коливального контуру в діапазоні частот близьких до резонансної, а саме: коли $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ – різниця частот генератора і резонансної, яку назвемо абсолютним розстроюванням контуру є такою, що $\Delta\omega/\omega_0$ – відносне розстроювання контуру не перевищує величини $0,05$. Іншими словами, коли частота генератора змінюється не більше ніж на 5% від частоти резонансної, то будемо говорити про мале розстроювання.

Повернемося до виразу (5.18):

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх}} &= r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] = r \left[1 + jQ \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \cdot \omega_0} \right] = \\ &= r \left(1 + jQ \frac{(\omega + \omega_0) \cdot (\omega - \omega_0)}{\omega \cdot \omega_0} \right) = r(1 + j\xi), \end{aligned} \quad (5.19)$$

де $\xi = Q \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega \cdot \omega_0}$ і називається узагальненим розстроюванням контуру.

У діапазоні малих розстроювань контуру (до 5%), можна вважати, що:

$$\omega \approx \omega_0; \quad \omega + \omega_0 \approx 2\omega_0; \quad \omega - \omega_0 = \Delta\omega.$$

З урахуванням цих зауважень

$$\xi \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0}.$$

На рис. 5.13,а зображено залежність модуля вхідного опору, а на рис. 5.13,б – залежність аргументу комплексного вхідного опору послідовного контуру від узагальненого розстроювання для достатньо добротних послідовних контурів, де

$$\xi \approx 2Q \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2Q \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (5.20)$$

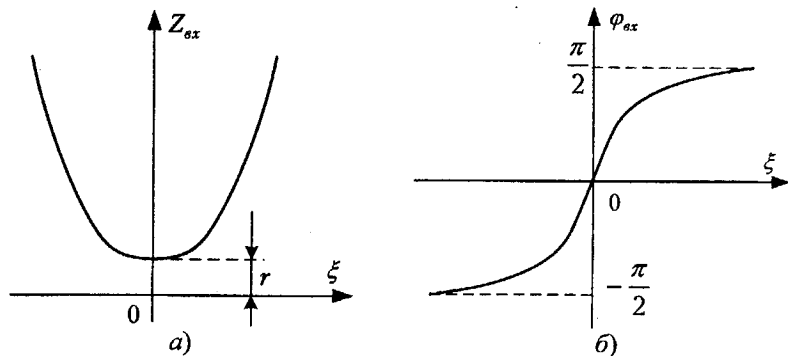


Рисунок 5.13 – Частотні характеристики вхідного опору контуру при $Q \geq 50$

У зв'язку з цим вираз для комплексного вхідного опору \dot{Z}_{ox} переписеться:

$$\dot{Z}_{ox} = r(1 + j\xi) = r \left[1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right], \quad (5.21)$$

або при малих розстроюваннях:

$$\dot{Z}_{ox} = r(1 + j\xi) \approx r \left(1 + 2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right), \quad (5.22)$$

відповідно:

$$\varphi_{ox} = \arctg \xi = \arctg Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \quad (5.23)$$

$$\varphi_{ox} = \arctg \xi \approx \arctg \left(2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right). \quad (5.24)$$

Зауважимо, що вираз (5.20) є справедливим лише для добротних контурів, які мають вузьку смугу пропускання.

При $f = f_0$ ($\Delta f = 0$ і $\xi = 0$) модуль вхідного опору є мінімальним і дорівнює опору втрат r . Аргумент $\varphi_{ox} = 0$, що свідчить про те, що зсув фаз між напругою U_1 і струмом у контурі дорівнює нулю, а вхідний опір контуру носить активний характер. Напруги $\dot{U}_{Cm} = -\dot{U}_{Lm}$ компенсують дії одна одної.

Оскільки вираз для модуля вхідного опору, як функції узагальненого розстроювання ξ :

$$Z_{ox} = r \sqrt{1 + \xi^2} \approx r \sqrt{1 + \left(2Q \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2}, \quad (5.25)$$

містить ξ^2 , то при $f < f_0$ ($\Delta f < 0$ і $\xi < 0$) значення Z_{ox} буде більшим за r

і зростатиме при подальшому розстроюванні. Аргумент φ_{ax} стає від'ємним і зменшуватиметься зі зростанням розстроювання, прямуючи до -90° . Ємнісний опір X_C стає більшим за індуктивний опір X_L , що призводить до ємнісного характеру вхідного опору, а напруга U_1 відставатиме від струму у контурі на кут $\varphi_a = -\text{arctg}\left(2Q\frac{\Delta f}{f_0}\right)$.

При $f > f_0$ ($\Delta f > 0$ і $\xi > 0$) з'являється права гілка графіка функції $\dot{Z}_a(\xi)$, яка при високодобротних контурах буде симетричною лівій відносно осі ординат. Аргумент φ_{ax} стає додатним і зростатиме при подальшому розстроюванні, прямуючи до $+90^\circ$. Індуктивний опір стає більшим за ємнісний і струм у контурі відстає від напруги U_1 на кут $\varphi_a = \text{arctg}\left(2Q\frac{\Delta f}{f_0}\right)$, що говорить про індуктивний характер вхідного опору.

5.3.5 Амплітудно-частотні характеристики за напругою

Відношення комплексу напруги на виході контуру \dot{U}_2 , яку можна знімати з конденсатора (рис. 5.8) або з котушки індуктивності, до комплексу вхідної напруги \dot{U}_1 називається комплексним коефіцієнтом передачі контуру за напругою.

$$\dot{K} = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = \dot{U}_2 / \dot{E}_1. \quad (5.26)$$

Залежність модуля K комплексного коефіцієнта передачі за напругою від частоти генератора називається амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ) контуру:

$$|\dot{K}(f)| = K(f).$$

Оскільки струм через усі елементи послідовного контуру буде однаковим, можемо записати, що:

$$\dot{K}_C = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_1} = \frac{1/j\omega C}{r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}; \quad (5.27)$$

$$\dot{K}_L = \frac{j\omega L}{r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]}, \quad (5.28)$$

де: \dot{K}_C і \dot{K}_L – комплексні коефіцієнти передачі послідовного контуру, коли вихідна напруга знімається з конденсатора і котушки індуктивності, відповідно.

Помноживши і розділивши вирази (5.27) на ω/ω_0 і (5.28) на ω_0/ω , отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{K}_C &= \frac{-jQ}{\frac{\omega}{\omega_0} \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \\ &= -\frac{jQ}{\frac{f}{f_0} \left[1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]} = K_C(f) \cdot e^{-j\varphi_C(f)}; \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{K}_L &= \frac{jQ}{\frac{\omega_0}{\omega} \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \\ &= \frac{jQ}{\frac{f_0}{f} \left[1 + jQ \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]} = K_L(f) \cdot e^{-j\varphi_L(f)}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Амплітудно-частотні характеристики за напругою, очевидно, визначатимуться за формулами:

$$K_C = \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + Q^2 \left[\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 - 1\right]^2}}; \quad (5.31)$$

$$K_L = \frac{Q}{\sqrt{\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 + Q^2 \left[1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2\right]^2}}. \quad (5.32)$$

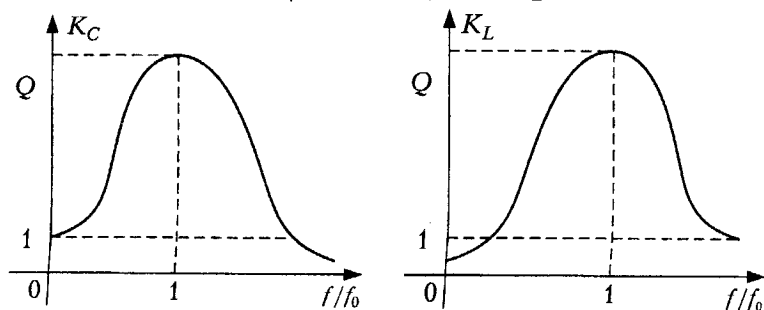


Рисунок 5.14 – АЧХ послідовного контуру

Крива $K_C(f)$ починається з одиниці, бо на частоті $f = 0$ вся напруга спаде на конденсаторі ($X_C = \infty$). Далі графік зростатиме, досягнувши

значення Q при $f = f_0$ (резонанс напруг), потім спадатиме прямуючи до нуля.

Крива ж $K_L(f)$ починається з нуля, бо напруга $U_2 = IX_L = 0$ при $f = 0$ ($X_L = 2\pi fL = 0$), а уся напруга U_1 спадатиме на конденсаторі. При $f = f_0$ крива досягає максимального значення Q і далі спадатиме прямуючи при необмеженому зростанні f до одиниці ($f \rightarrow \infty, X_L = 2\pi fL \rightarrow \infty; U_2 = IX_L \rightarrow U_1$)

5.3.6 Фазочастотні характеристики за напругою

Звернемося до виразів (5.27) і (5.28) і визначимо аргументи цих комплексів:

$$\varphi_C(f) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \quad (5.33)$$

$$\varphi_L(f) = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right), \quad (5.34)$$

де: $\varphi_C(f)$ і $\varphi_L(f)$ – фазочастотні характеристики контуру за напругою, коли напруга знімається з конденсатора і котушки індуктивності, відповідно. На рис. 5.15 подані графіки функцій (5.33), (5.34) і $\varphi = \varphi_C + \varphi_L$. На резонансній частоті $f/f_0 = 1$, $\varphi_C = \pi/2$ – струм у контурі випереджає напругу на конденсаторі на 90° , $\varphi_L = -\pi/2$ – струм у контурі відстає від напруги на котушці індуктивності на 90° , $\varphi = 0$ – струм у контурі збігається за фазою з напругою на вході контуру U_1 . Напруги на конденсаторі і котушці індуктивності однакові за величиною (оскільки їх опори однакові) і протилежні за фазами ($\varphi_C - \varphi_L = \pi$), вхідний опір носить активний характер.

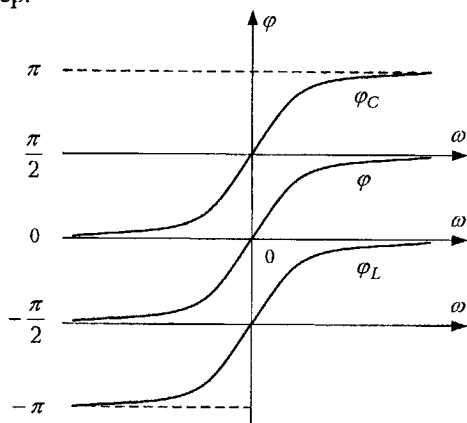


Рисунок 5.15 – ФЧХ послідовного контуру

На частотах $f < f_0, \varphi < 0$ – напруга U_1 відстає від струму у контурі, вхідний опір носить ємнісний характер.

На частотах $f > f_0, \varphi > 0$ – напруга U_1 випереджає струм у контурі, вхідний опір носить індуктивний характер.

Зауважимо, що нахил (крутість) усіх трьох кривих на рис. 5.15 є однаковим, бо перші похідні від кожної з цих функцій – однакові.

5.3.7 Настроювальні криві

Комплексна амплітуда струму у послідовному контурі \dot{I}_m дорівнює:

$$\dot{I}_m = \frac{E_m}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Модуль цього виразу:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

На резонансній частоті $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 (x=0)$ і амплітуда струму

досягає максимального значення.

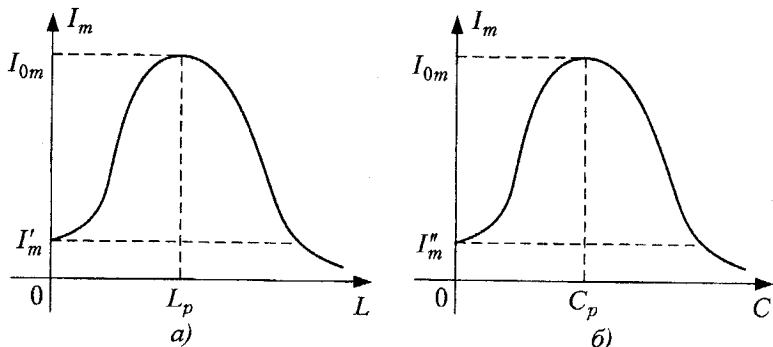


Рисунок 5.16 – Настроювальні криві: а – зміною індуктивності L , б – зміною ємності C

Але настроїти контур у резонанс (досягти $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ можна зміною індуктивності L , котушки або зміною ємності C конденсатора, тобто настроювати контур, регулюючи ємність конденсатора (рис. 5.16,б) або – індуктивність котушки (рис. 5.16,а).

При $L = 0$ струм у контурі:

$$I_m' = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При $L = L_p$ у контурі настапає резонанс $\left(\omega L_p - \frac{1}{\omega C} = 0\right)$ і струм зростає до максимального значення I_{0m} . При необмеженому зростанні L ($L \rightarrow \infty$) струм прямуватиме до нуля.

При $C = 0$ ($x_C = 1/\omega C = \infty$) і струм у контурі дорівнюватиме нулю. При $C = C_p$ у контурі настапає резонанс $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_p} = 0\right)$ і струм зростає до максимального значення I_{0m} . При необмеженому збільшенні C ($\frac{1}{\omega C} \rightarrow 0$) струм у контурі прямуватиме до значення

$$I_m'' = \frac{E_m}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}.$$

На практиці у більшості випадків настроювання контуру на потрібну частоту (радіостанцію) доцільніше за допомогою конденсатора змінної ємності, який є радіокомпонентом конструктивно більш простим, дешевшим і надійнішим ніж варіометр — система двох котушок індуктивності, який є пристроєм змінної індуктивності.

5.3.8 Рівняння вибірності та смуга пропускання при невеликих розстроюваннях

Звернемося знову до схеми послідовного коливального контуру (рис. 5.8), де вхідна напруга знімається з конденсатора $U_2 = U_C$.

Коефіцієнт передачі за напругою $K = K_C$ і дорівнюватиме згідно з виразами (5.19) та (5.27):

$$\dot{K} = \frac{1/\omega C}{r(1 + j\xi)}.$$

Зваживши, що при невеликих розстроюваннях $\omega \approx \omega_0$

$$\dot{K} = \frac{1/\omega_0 C}{r(1 + j\xi)} = \frac{\rho}{r(1 + j\xi)} = \frac{Q}{1 + j\xi},$$

де: $\xi = 2Q\Delta f/f_0$.

На резонансній частоті $\xi = 0$ і коефіцієнт передачі досягає максимального значення: $K_0 = Q$.

Відносний коефіцієнт передачі за модулем

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}. \quad (5.35)$$

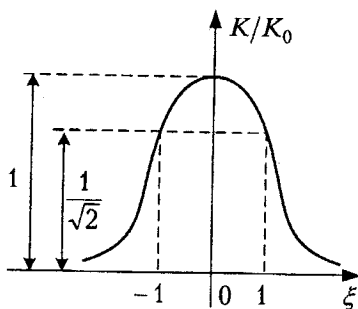


Рисунок 5.17 – Крива вибірності за напругою

На рис. 5.17 зображено графік рівняння вибірності (5.35) або АЧХ у відносних координатах, де по осі абсцис відкладаються значення узагальненого розстроювання ξ , а по осі ординат – відносний (нормований) коефіцієнт передачі за напругою.

Максимум цієї функції дорівнює одиниці при резонансі, коли $\xi = 0$. Важливим є те, що такою вона буде для будь-якого контуру, бо рівняння вибірності визначається лише значеннями узагальненого розстроювання ξ .

Зрозуміло, що рівняння (5.35) є справедливим при будь-яких розстроюваннях, коли

$$\xi = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

В радіотехніці використовуються контури з добротностями порядку сотні одиниць, а тому такі контури будуть працювати при невеликих (малих) розстроюваннях, коли можна вважати, що

$$\xi = 2Q\Delta f / f_0 = Q \frac{2\Delta f}{f_0}. \quad (5.36)$$

Розглянемо випадок, коли $\xi = \pm 1$ ($|\xi| = 1$). Підставивши ці значення в (5.35), отримуємо, що

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

З виразу (5.36) матимемо:

$$2\Delta f = \xi \frac{f_0}{Q}; \left(\Delta f = \pm \frac{f_0}{2Q} \right).$$

Введемо поняття смуги пропускання контуру, як діапазону частот Δf_{np} (рис. 5.18), у межах якого коефіцієнт передачі за напругою зменшується до значень 0,707 від його максимального значення K_0 .

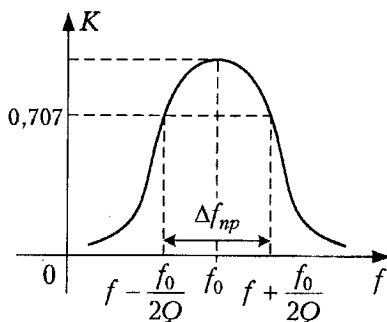


Рисунок 5.18 – Ілюстрація до поняття смуги пропускання контуру

У відносних координатах (рис. 5.17) на краях смуги пропускання будь-якого контуру узагальнене розстроювання $\xi = \pm 1$, а відносний коефіцієнт передачі за напругою $-0,707$. Отже для добротних контурів смуга пропускання визначається за формулою:

$$\Delta f_{np} = f_0 / Q.$$

Як бачимо, смуга пропускання контуру буде збільшуватись при зменшенні його добротності, а більший добротності відповідає менша смуга пропускання.

На рис. 5.19 подано АЧХ за напругою двох контурів, які мають однакові резонансні частоти та однакові значення резонансних коефіцієнтів передачі K_0 , але різні добротності ($Q' > Q''$). У них будуть різними смуги пропускання ($\Delta f'_{np} < \Delta f''_{np}$).

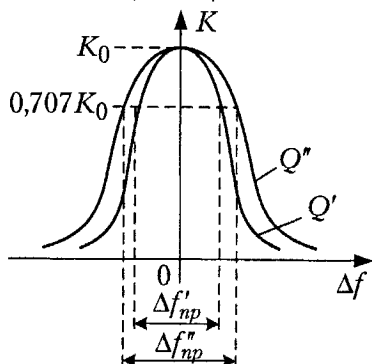


Рисунок 5.19 – До вибірності двох контурів

Кажуть, що контур з більшою добротністю Q має кращі селективні (вибірні) властивості ніж другий контур.

Його АЧХ (резонансна крива) буде більш вузькою і смуга пропускання буде вузькою. Другий же контур матиме слабкішу вибірність (здатність виділяти коливання за частотою близькою до f_0), але при цьому матиме ширшу смугу пропускання.

Такі властивості коливальних контурів, як вибірних систем, реалізуються, наприклад, в радіоприймальних пристроях при виділенні з усіх сигналів, що наводять е.р.с. у приймальній антені, лише сигнал тієї радіостанції, на яку приймач настроєний.

На рис. 5.20 наводиться спрощена схема застосування послідовного контуру як вхідного кола радіоприймача. Контур LC працює від антени A , яка на його вході збуджує напругу U_1 від різних радіостанцій, що працюють в ефірі. Але, будучи настроєним на частоту певної станції ($f_c = f_0$), напруга на його виході $U_2 = K_0 U_1 = Q U_1$ тільки для сигналу цієї станції.

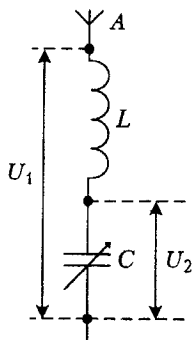


Рисунок 5.20 – Приклад застосування послідовного контуру

При добротності $Q = 100$ сигнал U_2 від станції, на яку настроїли радіоприймач буде у 100 разів більшим чим сигнали від решти станцій. Його контур і вибрав (виділив) серед усіх сигналів, що діяли в антені. Чим вище добротність контуру, тим, очевидно, і кращим буде цей вибір, а значить кращою буде і вибірність контуру.

Коли частота генератора стає рівною власній частоті послідовного контуру, настає резонанс напруг при якому:

- вхідний опір контуру стає мінімальним і дорівнює опорі втрат;
- контурний струм стає максимальним;
- напруги на реактивних елементах досягають максимуму, стають однаковими за величиною у Q разів більшими за напругу генератора.

На резонансній частоті вхідний опір послідовного контуру носить активний характер, бо $x = \omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$ і напруга генератора за фазою збігається з контурним струмом.

На частоті $\omega < \omega_0$ вхідний опір має ємнісний характер, бо $x = \omega L - 1/\omega C < C$ і напруга генератора відстає від контурного струму за фазою на кут: $\varphi = \arctg x/r$.

На частоті $\omega > \omega_0$ вхідний опір має індуктивний характер, бо $x = \omega L - 1/\omega C > 0$ і напруга генератора більша від контурного струму за фазою на кут: $\varphi = \arctg x/r$.

При малих розстроюваннях ($\Delta f/f \leq 0,05$) узагальнене розстроювання контуру ξ дорівнює:

$$\xi = 2Q \cdot \Delta f / f_0.$$

Смуга пропускання контуру Δf_{np} – діапазон частот, у межах якого коефіцієнт передачі за напругою (струму) має значення не менше ніж 0,707 від максимального, і дорівнює:

$$\Delta f_{np} = f_0 / Q.$$

5.4 Вимушені коливання у паралельному контурі

5.4.1 Паралельний контур загального виду

Паралельний контур загального виду (рис. 5.21) складається з трьох паралельних віток: генератора струму (е.р.с. з внутрішнім опором R_i); котушки L_1 , конденсатора C_1 та опору втрат у вітці r_1 , котушки L_2 , конденсатора C_2 та опору втрат r_2 .

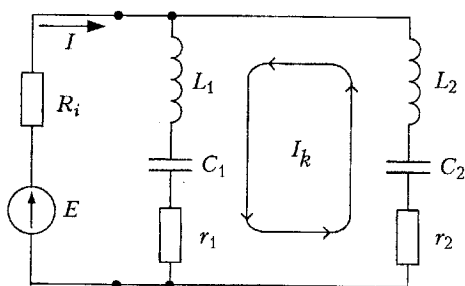


Рисунок 5.21 – Еквівалентна схема паралельного контуру загального виду

Комплексні опори у вітках є такими:

$$\dot{Z}_1 = r_1 + jx_1 = r_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right);$$

$$\dot{Z}_2 = r_2 + jx_2 = r_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Вхідна провідність контуру дорівнює:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\text{вх}} &= \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}, \\ \dot{Y}_{\text{вх}} &= \frac{1}{r_1 + jx_1} + \frac{1}{r_2 + jx_2} = \frac{r_1 - jx_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2 - jx_2}{r_2^2 + x_2^2} = \\ &= \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2} - j\left(\frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2}\right) = g - jb, \end{aligned} \quad (5.37)$$

де активна складова комплексної вхідної провідності дорівнює:

$$g = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

реактивна складова дорівнює:

$$b = \frac{x_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2}.$$

При резонансі реактивна провідність має дорівнювати нулю ($b_0 = 0$), а значить:

$$x_1(r_2^2 + x_2^2) + x_2(r_1^2 + x_1^2) = 0, \quad (5.38)$$

і вхідна провідність носить чисто активний характер:

$$Y_{\text{вх}} = Y_0 = g_0 = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

яку у подальшому будемо називати резонансною вхідною провідністю, а обернену їй величину $R_0 = 1/g_0$ – резонансним вхідним опором контуру.

Згідно з (5.38):

$$x_1(r_2^2 + x_2^2) = -x_2(r_1^2 + x_1^2);$$

$$\frac{1}{r_2^2 + x_2^2} = -\frac{x_1}{x_2(r_1^2 + x_1^2)},$$

а отже

$$g_0 = \frac{r_1}{r_1^2 + x_1^2} - \frac{r_2 \cdot x_1}{x_2(r_1^2 + x_1^2)} = \frac{r_1 - r_2 \frac{x_1}{x_2}}{r_1^2 + x_1^2}; \quad (5.39)$$

$$R_0 = \frac{r_1^2 + x_1^2}{r - r_2 \frac{x_1}{x_2}}. \quad (5.40)$$

На практиці на частотах, близьких до резонансної, виконуються строгі нерівності:

$$r_1 \ll |x_1|, \quad r_2 \ll |x_2|,$$

а тому умова резонансу (5.38) може бути переписана так:

$$x_1 x_2^2 - x_2 x_1^2 = 0; \quad x_2 = -x_1. \quad (5.41)$$

Зауважимо, що у паралельному коливальному контурі загального виду (рис. 5.21) з дуже малими втратами резонанс настає тоді, коли реактивні опори віток контуру рівні між собою за величиною та протилежні за знаком. Іншими словами, якщо, наприклад, ліва вітка має індуктивний характер опору, то права – обов'язково матиме ємнісний характер. Тоді вхідний резонансний опір R_0 дорівнюватиме:

$$R_0 = \frac{x_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{x_2^2}{r_1 + r_2}. \quad (5.42)$$

Цей резонанс будемо називати паралельним резонансом на відміну від двох резонансів, які можливі у лівій та правій вітках контуру загального виду, як у послідовних контурах. У лівій вітці це станеться на частоті ω_{01} , яка дорівнюватиме:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}},$$

а у правій вітці на частоті:

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}.$$

Звернемося до виразу $x_2 = -x_1$. Він означає, що відносно спільної напруги для обох паралельних віток, в одній з них струм буде відставати від напруги на контурі на 90° , а в іншій – на 90° випереджати цю напругу. Тобто, струми у вітках будуть зсунуті за фазою на 180° і якщо, наприклад, в лівій вітці струм напрямлений знизу до гори, то у правій – згори донизу, а оскільки ці струми за величиною однакові (бо $r_1 = r_1 = 0$, $|x_1| = |x_1|$), можна вважати, що у контурі існує контурний струм I_k (рис. 5.21), завдяки якому $x_1 + x_2 = 0$ у контурі і виникає паралельний резонанс, який називається резонансом струмів.

А тепер перейдемо до аналізу паралельних контурів I, II і III видів, як частинних випадків контуру загального виду. А це означає, що все досліджене щодо контуру загального виду повною мірою справедливе і для конкретних контурів.

5.4.2 Паралельний контур I виду

Контур I виду у одній вітці, наприклад, в лівій має $L_1 = L$, $r_1 = r$, $C_1 = \infty$, а в правій $C_2 = C$, $L_2 = 0$, $r_2 = 0$ (рис. 5.22). Таким чином ми зважили на те, що сучасні конденсатори мають втрати значно менші ніж котушки індуктивності і ними можна знехтувати.

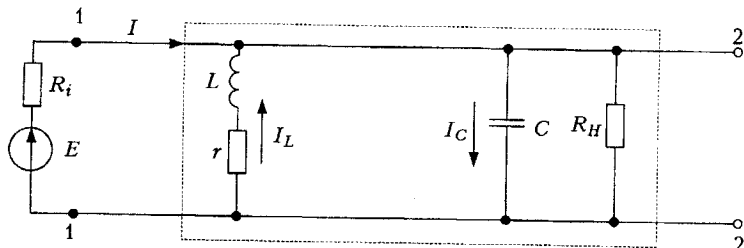


Рисунок 5.22 – Еквівалентна схема паралельного контуру I виду

Паралельним коливальним контуром I виду називається електричне коло, яке складається з паралельного з'єднання генератора струму (E , R_i), котушки індуктивності L та конденсатора C .

В реальних схемах контур працює на навантаження, яким є та частина пристрою, для якої контур виконує роль джерела сигналу. Вплив навантаження на параметри контуру символізує шунт – резистор R_H .

5.4.2.1 Вхідний опір

Припустимо спочатку, що цього резистора нема і $R_H = \infty$. Вихідна напруга U_2 знімається з контуру (вона однакова на конденсаторі C і на котушці індуктивності L). Ця напруга значно менша від е.р.с. генератора через спад напруги на великому внутрішньому опорі $R_i(I \cdot R_i)$:

$$\dot{U}_2 = \dot{E}_1 - I R_i.$$

Вхідний опір контуру – це відношення напруги на контурі U_2 до струму генератора I . Цей же опір, будучи комплексним, може бути визначеним через власні параметри контуру:

$$\dot{Z}_1 = r = j\omega L; \quad \dot{Z}_2 = 1/j\omega C.$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{(r + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}.$$

При наближенні до резонансу виправдовується строга нерівність $r \ll \omega L$ і в чисельнику в дужках r нехтуємо. У знаменнику цього зробити ми не можемо, бо на частотах смуги пропускання різниця $\omega L - 1/\omega C$ є

величиною малою, а на резонансній частоті дорівнює нулю. З урахуванням цих зауважень, вираз для вхідного опору буде:

$$\dot{Z}_{ax} = \frac{(r + j\omega L) \cdot \frac{1}{j\omega C}}{r \left[1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} = \frac{L/C}{r(1 + j\xi)} = \frac{\rho Q}{1 + j\xi}. \quad (5.43)$$

Комплексний вхідний опір складається з активної R_{ax} і реактивної X_{ax} частин:

$$\dot{Z}_{ax} = r_{ax} + jX_{ax}.$$

Для знаходження цих складових домножимо і розділимо (5.43) на число, комплексно спряжене зі знаменником і тоді:

$$\dot{Z}_{ax} = \frac{\rho Q}{1 + j\xi} \cdot \frac{1 - j\xi}{1 - j\xi} = \frac{\rho Q(1 - j\xi)}{1 + \xi^2} = \frac{\rho Q}{1 + \xi^2} - j\xi \frac{\rho Q}{1 + \xi^2}.$$

Отже, активна та реактивна складові комплексного вхідного опору будуть дорівнювати:

$$R_{ax} = \frac{\rho Q}{1 + \xi^2}, \quad (5.44)$$

$$X_{ax} = -\xi \frac{\rho Q}{1 + \xi^2} \quad (5.45)$$

Модуль комплексного вхідного опору та його аргумент φ_{ax} :

$$Z_{ax} = \frac{\rho Q}{\sqrt{1 + \xi^2}};$$

$$\varphi_{ax} = \arctg(-\xi).$$

5.4.2.2 Частотні характеристики вхідного опору

При резонансі $\Delta f = 0$, $\xi = 0$ і тоді будемо мати:

$$Z_{ax} = R_{ax} = R_0 = \rho Q; \quad X_{ax} = 0; \quad \varphi_{ax} = 0.$$

У виразах (5.44) та (5.46) узагальнене розстроювання ξ знаходиться в знаменнику у другому степені. Значить графіки цих функцій будуть симетричними відносно осі ординат, а функції Z_{ax} та $R_{ax} > 0$.

При $\xi = 0$ вони досягатимуть однакового максимального значення резонансного вхідного опору паралельного контуру $R_0 = \rho Q$.

При $\xi = \pm 1$ графік R_{ax} пройде через точки $\left(1, \frac{1}{2}\rho Q\right)$ та $\left(-1, \frac{1}{2}\rho Q\right)$, а графік Z_{ax} – через точки $\left(1, \frac{\rho Q}{\sqrt{2}}\right)$ та $\left(-1, \frac{\rho Q}{\sqrt{2}}\right)$.

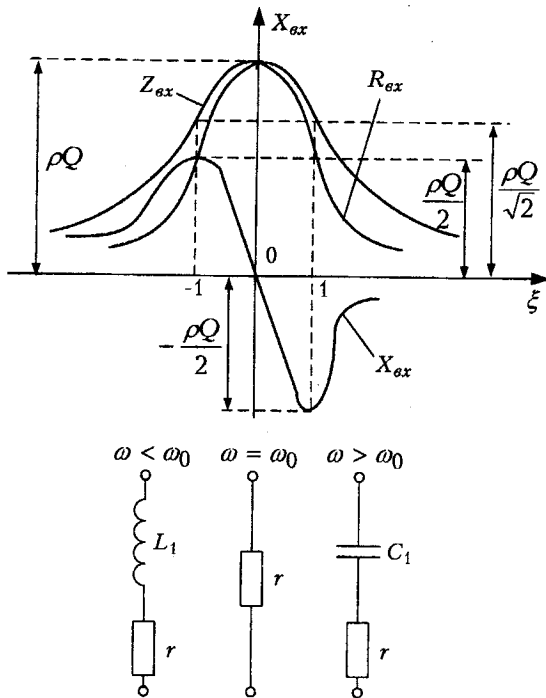


Рисунок 5.23 – Частотні характеристики вхідного опору

При зростанні ξ за модулем графіки їх будуть прямувати монотонно до нуля, але графік Z_{ex} буде проходити в усіх точках вище ніж графік R_{ex} через те, що $Z_{ex} \approx 1/\sqrt{1+\xi^2}$, а $R_{ex} \approx 1/(1+\xi^2)$, тобто зі зростанням ξ у другому випадку знаменник зростатиме швидше ніж у першому.

При $\xi = 0$, $X_{ex} = 0$; а графік функції (5.45) буде симетричним відносно точки початку координат. При додатних значеннях узагальненого розстроювання $X_{ex} < 0$, а при від'ємних — $X_{ex} > 0$, функція має два екстремуми. Знайдемо їх, для чого продиференціюємо її за ξ і прирівняємо похідну до нуля:

$$\frac{dX_{ex}}{d\xi} = -\rho Q \cdot \frac{1+\xi^2 - 2\xi \cdot \xi}{(1+\xi^2)^2} = 0. \quad (5.46)$$

Функція дорівнює нулю, коли дорівнює нулю її чисельник.

$$(1-\xi^2)\rho Q = 0,$$

звідки при $1-\xi^2 = 0$, маємо: $\xi^2 = 1$, $\xi = \pm 1$. Знайдемо відповідні значення функції X_{ex} :

при $\xi = 1$, $X_{ex} = -\rho Q/2$;

при $\xi = -1$, $X_{ex} = \rho Q/2$.

При $\xi = 0$ вхідний опір є чисто активним, максимальним і дорівнює резонансному значенню $R_0 = \rho Q$ (рис. 5.23).

При $\xi > 0$, $X_{ex} < 0$, а значить вхідний опір носить активно-ємнісний характер

$$\dot{Z}_{ex} = R_{ex} - j1/\omega C_1,$$

де C_1 – еквівалентна ємність контуру.

При $\xi < 0$, $X_{ex} > 0$, а отже вхідний опір носить індуктивно-ємнісний характер

$$\dot{Z}_{ex} = R_{ex} + j\omega L_1,$$

де L_1 – еквівалентна індуктивність контуру.

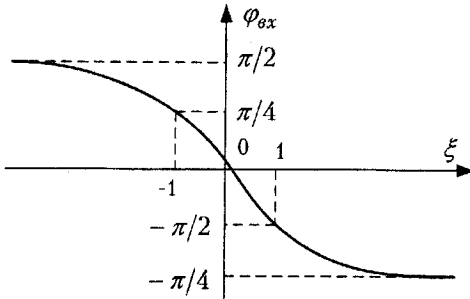


Рисунок 5.24 – Частотна характеристика аргументу вхідного опору

На рис. 5.24 зображена частотна характеристика аргументу комплексного вхідного опору. Графік її проходить через початок координат і при $\xi > 0$ має гілку де $\varphi_{ex} < 0$, а при $\xi < 0$ – гілку $\varphi_{ex} > 0$.

Це означає, що при резонансі $\varphi_{ex} = 0$ і струм генератора I та напруга на контурі збігаються за фазою (вхідний опір – активний).

При $\xi < 0$, $\varphi_{ex} > 0$ і струм генератора відстає від напруги на контурі (вхідний опір має індуктивний характер).

При $\xi > 0$, $\varphi_{ex} < 0$ і струм генератора випереджає напругу на контурі (вхідний опір має ємнісний характер).

5.4.2.3 Векторні діаграми і еквівалентні схеми контуру при розстроюванні

Звернемося до рис. 5.22. У контурі існують три струми: I – струм генератора, I_L – струм у лівій вітці та I_C – струм у правій вітці контуру. Напруга ж на котушці та конденсаторі однакова U_2 .

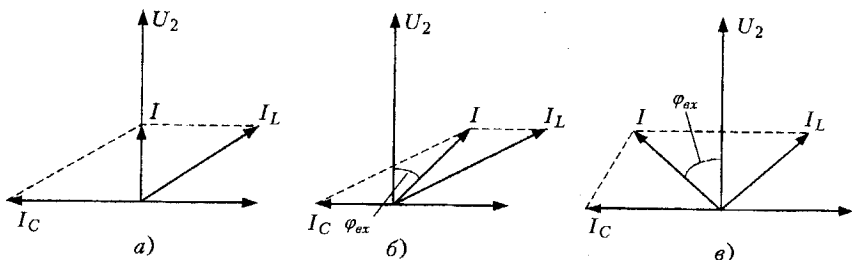


Рисунок 5.25 – Векторні діаграми паралельного контуру

На резонансній частоті струм I_C випереджатиме напругу U_2 на 90° , а струм I_L – відставатиме на кут трошки менший за 90° за амплітудою будучи практично рівним струму через конденсатор. Струм $I = I_C + I_L$ збігатиметься з напругою U_2 і кут $\varphi_{ex} = 0$ (рис. 5.25,а). Вхідний опір носитиме чисто активний характер, а схемі конденсатора (рис. 5.22) відповідатиме схема еквівалентна їй (рис. 5.26,а).

На частотах менших за резонансну ($\omega < \omega_0$) опір конденсатора X_C за модулем стає більшим за опір котушки X_L , струм через конденсатор I_C стає меншим за I_L , а їх сумарний вектор $I = I_C + I_L$ відставатиме від напруги U_2 на кут φ_{ex} (рис. 5.24,б). Вхідний опір носить індуктивно-активний характер $Z_{ex} = R_{ex} + j\omega L_1$ (рис. 5.26,б).

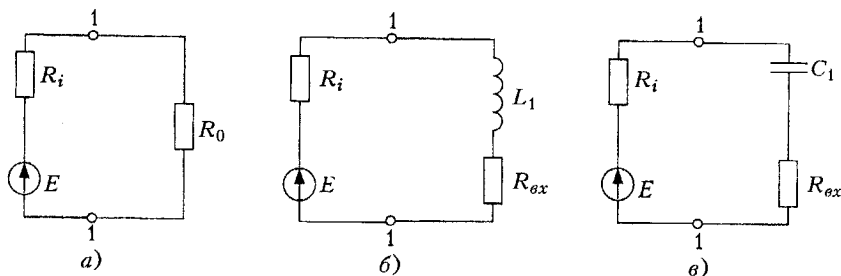


Рисунок 5.26 – Еквівалентні схеми паралельного контуру

На частотах більших за резонансну ($\omega > \omega_0$) опір конденсатора X_C буде меншим за опір котушки X_L , струм через конденсатор – більшим за струм через котушку, сумарний струм I випереджатиме напругу на кут φ_{ex} (рис. 5.24,в). Вхідний опір носитиме ємнісно-активний характер $Z_{ex} = R_{ex} - j1/\omega C_1$, (рис. 5.25,в).

5.4.2.4 Резонанс струмів

Вираз (5.38) є умовою паралельного резонансу. Для схеми контуру загального виду (рис. 5.21) її маємо записати у вигляді:

$$\omega_0 L \left(r_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} \right) - \frac{1}{\omega_0 C} (r_1^2 \omega^2 L^2) = 0, \quad (5.47)$$

звідки значення резонансної частоти ω_0 буде таким:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L}{C} - r_1^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2 - r_2^2}}. \quad (5.48)$$

Для контуру I виду (рис. 5.22) вираз для резонансної частоти запишеться так:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_1^2}{\rho^2}}, \quad (5.49)$$

або для контурів з достатньою добротністю ($\rho \gg r$) резонансна частота дорівнюватиме:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Якби $r_1=0$ (на практиці біля резонансу $r_1 \ll \omega L$), то струми у вітках паралельного контуру були однаковими, дорівнювали б:

$$I_L = I_C = U_2 / \rho,$$

але зсунутими на 180° за фазою, утворюючи єдиний контурний струм:

$$I_k = I_L = I_C.$$

У такому випадку можна було б стверджувати, що наш контур є контуром без втрат (ідеальний контур), де відбуваються процеси рівноцінного обміну енергіями між котушкою індуктивності L та конденсатором C .

При цьому резонансний вхідний опір контуру дорівнюватиме нескінченності ($r_1=0$) $R_0 = \rho Q = \rho^2 / r = \infty$, і струм генератора $I=0$.

Реально втрати в контурі є і тому струми у вітках будуть, хоч незначно, відрізнятися за амплітудою, а різниця фаз буде трошки меншою від 180° . На резонансній частоті струм генератора I дорівнюватиме:

$$I = U_2 / R_0 = U_2 / \rho Q,$$

а струм у контурі I_k буде:

$$I_k = U_2 / \rho.$$

Розділивши I_k на I отримаємо:

$$\frac{I_k}{I} = \frac{U_2 / \rho}{U_2 / \rho Q} = Q; \quad I_k = I \cdot Q,$$

що струм у контурі в Q разів більший ніж струм від генератора.

Нічого дивного у цьому немає. Адже при відсутності втрат струм генератора взагалі дорівнював би нулю, а коливання у контурі відбувались би з частотою ω_0 . Справа полягає в тому, що за певний відрізок часу

катушка індуктивності та конденсатор накопичують електричну енергію, якою вони і обмінюватимуться, але без підтримки генератора через втрати у контурі ці коливання були б згасаючими. Інакше кажучи, генератор інjektує в контур таку кількість енергії, яка втрачається у контурі, дозаряджаючи конденсатор і катушку, в результаті чого коливання у контурі мають незгасаючий характер. Для цього підживлення і потрібна невеличка кількість енергії, яка поставляється у контур невеличким струмом I . Очевидно, чим менші втрати (більша добротність) у контурі, тим меншим потрібен буде і струм дозарядження реактивних елементів. Конденсатор і катушка можуть накопичувати достатньо велику енергію і обмін нею викличе у контурі достатньо великий контурний струм, який, як бачимо, у Q разів більший за струм генератора, через що це явище і отримало назву резонансу струмів.

5.4.2.5 Енергетичне пояснення характеру вхідного опору паралельного контуру

На резонансній частоті при $r \ll \omega_0 L$ опори обох віток контуру (рис. 5.22) однакові $\omega_0 L = 1/\omega_0 C$, в них протікають однакові за величиною струми i , отже, здатні запасати однакові за кількістю енергії протягом часу t :

$$W_{\text{кот}} = I_L^2 \omega_0 L \cdot t = W_{\text{конд}} = I_C^2 \cdot \frac{1}{\omega_0 C} \cdot t.$$

Реактивні елементи здатні накопичити однакову кількість енергії, але за рахунок втрат конденсатор, наприклад, виявився б недозарядженим, якби це не зробив генератор, скомпенсувавши втрати у контурі (рис. 5.22).

При $\omega < \omega_0$ потенціальні можливості катушки до накопичення енергії більші ніж конденсатора. Для однозначності вважатимемо, що реактивний опір катушки удвічі менший від ємнісного опору конденсатора ($X_L = 0,5 X_C$), тоді струм через катушку буде удвічі більшим ніж через конденсатор ($I_L = 2 I_C$). Така катушка здатна накопичити кількість енергії:

$$W_L = I_L^2 X_L \cdot t = (2I_C)^2 0,5 X_C \cdot t = 2I_C^2 X_C \cdot t = 2W_C,$$

удвічі більшу ніж конденсатор. Тоді "розряджаючись", катушка половину накопиченої енергії віддасть конденсаторові (і більше він не візьме), а решту – генератору. У свою чергу, недозаряджений конденсатор віддасть усю енергію катушці, потенціальні можливості якої будуть задовільнені лише наполовину, але її "дозарядить" генератор. Потім усе повториться і спостерігається обмін енергіями між катушкою і генератором. Образно кажучи, генератор "бачить" тільки катушку, яка з ним обмінюється енергією. А тому і характер вхідного опору контуру є індуктивним (рис. 5.26,б).

При $\omega < \omega_0$, нехай для прикладу $X_L = 2X_C$, $I_L = 0,5I_C$ а значить:

$$W_L = I_L^2 \cdot X_L \cdot t = (0,5I_C)^2 \cdot 2X_C \cdot t = 0,5W_C,$$

потенціальні можливості накопичувати енергію у конденсатора вдвічі більші ніж у котушки індуктивності. Отже, заряджений конденсатор половину енергії віддасть котушці (бо більше та не візьме), а решту – генератору. У свою чергу котушка не задовольнить половину енергетичних можливостей конденсатора, але його дозарядить генератор, тобто відбувається обмін енергіями між конденсатором і генератором. Генератор, працюючи з конденсатором, буде "сприймати" вхідний опір контуру як ємнісний, (рис. 5.26,в).

5.4.2.6 Вплив внутрішнього опору генератора та навантаження на параметри контуру

Повернемося ще раз до схеми паралельного контуру (рис. 5.22). Джерелом тут є генератор струму, який складається з генератора е.р.с. E , внутрішній опір якого умовно винесено у вигляді опору R_i , а значить внутрішній опір власне E дорівнюватиме нулю. Це означає, що опір R_i верхнім кінцем безпосередньо під'єднано до контуру у точці входження струму генератора I в контур, а другим кінцем через нульовий опір E – до контуру знизу. Тобто, опір R_i під'єднується до контуру паралельно, що призводить до зменшення вхідного опору контуру та зміни значень решти параметрів контуру. З іншого боку, опір навантаження контуру R_H , під'єднаний до конденсатора, є шунтуючим опором, який будучи паралельним контуру, вплине на параметри контуру аналогічно до опору R_i . Позначивши вхідний еквівалентний опір контуру через $Z_{екв}$ отримаємо:

$$\frac{1}{Z_{екв}} = \frac{1}{Z_{ax}} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_H};$$

$$Z_{екв} = \frac{R_i \cdot R_H \cdot Z_{ax}}{R_i \cdot R_H + R_i \cdot Z_{ax} + R_H \cdot Z_{ax}}$$

або, розділивши чисельник і знаменник на $R_i \cdot R_H$ матимемо:

$$Z_{екв} = \frac{Z_{ax}}{1 + \frac{Z_{ax}}{R_i} + \frac{Z_{ax}}{R_H}}. \quad (5.50)$$

На резонансній частоті $Z_{ax} = R_0 = \rho Q$, якому буде відповідати і еквівалентний резонансний опір $R_{екв}$:

$$R_{екв} = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H}}. \quad (5.51)$$

Відповідно, еквівалентна добротність контуру $Q_{екв}$:

$$Q_{екв} = \frac{R_{екв}}{\rho} = \frac{R_0/\rho}{1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H}} = \frac{Q}{1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H}}, \quad (5.52)$$

еквівалентна смуга пропускання контуру $\Delta f_{екв}$:

$$\begin{aligned} \Delta f_{екв} &= \frac{f_0}{Q_{екв}} = \\ &= \frac{f_0}{Q} \left(1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right) = \Delta f_{np} \left(1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right), \end{aligned} \quad (5.53)$$

еквівалентний опір втрат у контурі $r_{екв}$:

$$r_{екв} = \frac{\rho}{Q_{екв}} = r \left(1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right), \quad (5.54)$$

еквівалентне узагальнене розстроювання $\xi_{екв}$:

$$\xi_{екв} = 2Q_{екв} \frac{\Delta f}{f_0} = \xi \left/ \left(1 + \frac{R_0}{R_i} + \frac{R_0}{R_H} \right) \right. . \quad (5.55)$$

У відповідності до (5.49) резонансна частота дорівнюватиме:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 - r_{екв}^2}}{\rho}. \quad (5.56)$$

Оскільки характер впливу R_i та R_H на параметри конденсатора однаковий, проаналізуємо на прикладах при $R_H = \infty$ вирази (5.51), (5.56).

Припустимо, що вимога до внутрішнього опору генератора струму ($R_i \gg R_0$) не виконується і $R_i = 5R_0$. Тоді:

$$R_{екв} = \frac{R_0}{1 + 0,2} = \frac{R_0}{1,2} \approx 0,8R_0,$$

тобто зменшиться приблизно на 20%. Очевидно, так само зміниться і добротність $Q_{екв} \approx 0,8Q$. Смуга пропускання зросте: $\Delta f_{екв} = 1,2\Delta f_{np}$ настільки ж зросте опір втрат $r_{екв} = 1,2r$.

Остання обставина свідчить, що R_i може вплинути і на значення резонансної частоти, яка, згідно з виразом (5.55), дорівнюватиме:

$$f_0' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \left(\frac{r_{екв}}{\rho} \right)^2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - 1,44 \left(\frac{r}{\rho} \right)^2}.$$

При невеликих висхідних значеннях добротності контуру, коли, наприклад, $Q = 10$; $r/\rho = 0,1$; $(r/\rho)^2 \cdot 1,44 = 0,0144$ частота зменшиться приблизно на 0,7% від значення f_0 .

Неправильний вибір генератора струму за внутрішнім опором ($R_i \leq R_0$) призведе до різкого зниження еквівалентного вхідного опору, добротності, резонансної частоти і, можливо, до аперіодичного процесу коливань у контурі.

Тому на практиці при роботі з паралельним коливальним контуром необхідно правильно підібрати внутрішній опір генератора. Якщо такого нема, то в схему вмикають резистор з достатньо високим опором між генератором і контуром, який слугує опором "розв'язки" між низькоомним джерелом (генератором) та високоомним навантаженням (контуром).

Аналогічно треба чинити і при виборі навантаження паралельного контуру. Бажано, щоб його опір R_H був набагато (на порядок і більше) більшим за R_0 , бо саме у такому випадку:

$$R_{\text{екв}} = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_H}} \approx R_0,$$

і його впливом можна знехтувати.

5.4.2.7 Амплітудно-частотна характеристика за напругою

Синусна е.р.с. з комплексною амплітудою \dot{E}_m збудить у колі електричний струм з комплексною амплітудою \dot{I}_m , яка дорівнюватиме (при $R_H = \infty$):

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{\dot{Z}_{\text{ex}} + R_i}.$$

Тоді вихідна напруга \dot{U}_2 контуру:

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_m \dot{Z}_{\text{ex}} = \frac{\dot{Z}_{\text{ex}}}{\dot{Z}_{\text{ex}} + R_i} \cdot \dot{E}_m,$$

а комплексний коефіцієнт передачі за напругою:

$$\dot{K} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}_m} = \frac{\dot{Z}_{\text{ex}}}{\dot{Z}_{\text{ex}} + R_i}. \quad (5.57)$$

Коли $R_i \ll Z_{\text{ex}}$ коефіцієнт $K = 1$, вихідна напруга $\dot{U}_2 = \dot{E}$, яка від частоти не залежить і власне резонансні властивості проявитись не можуть, бо схема знаходиться в аперіодичному режимі роботи контуру.

Коли $R_i \gg Z_{\text{ex}}$, залежність $K(f)$ буде у масштабі $(1/R_i)$ такою ж самою як і залежність $Z_{\text{ex}}(f)$.

Враховуючи вираз (5.43), перепишемо (5.57):

$$\dot{K} = \frac{\frac{\rho Q}{1 + j\xi}}{\frac{\rho Q}{1 + j\xi} + R_i} = \frac{\rho Q}{\rho Q + R_i(1 + j\xi)}, \quad (5.58)$$

$$\dot{K} = \frac{\rho}{R_i} \frac{Q}{\left(1 + \frac{\rho Q}{R_i}\right) + j\xi}$$

Коли винести у знаменнику цього дробу за дужки $(1 + \rho Q/R_i)$ і врахувати (5.55), будемо мати:

$$\dot{K} = \frac{\rho}{R_i} \cdot \frac{1}{(1 + \rho Q/R_i)} \cdot \frac{Q}{1 + j\xi_{екв}} \quad (5.59)$$

На резонансній частоті $\xi = 0$; $\dot{K} = K_0$ ($\rho Q = R_0$), де:

$$\dot{K} = \frac{\rho Q}{R_i \left(1 + \frac{R_0}{R_i}\right)} = \frac{\rho Q_{екв}}{R_i} \quad (5.60)$$

Залежність модуля \dot{K} від частоти називається амплітудно-частотною характеристикою контуру:

$$K = \frac{\rho}{R_i} \cdot \frac{Q}{1 + \frac{R_0}{R_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{екв}^2}} = \frac{\rho Q_{екв}}{R_i \sqrt{1 + \xi_{екв}^2}}, \quad (5.61)$$

де у загальному випадку $\xi = Q \left(\frac{f}{f_0} + \frac{f_0}{f} \right)$ або при невеликих розстроюваннях контуру: $\xi = 2Q\Delta f/f_0$.

5.4.2.8 Вибірність і смуга пропускання

Розділивши (5.61) на (5.60), отримаємо вираз:

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{екв}^2}}, \quad (5.62)$$

який називається рівнянням вибірності, або АЧХ паралельного контуру у відносних координатах.

Еквівалентна смуга пропускання, очевидно, визначатиметься як діапазон частот (розстроювань), у межах яких відносний коефіцієнт передачі за напругою зменшується до значень $1/\sqrt{2} = 0,707$. На краях цього діапазону еквівалентне розстроювання досягатиме значень ± 1 . Рис. 5.26,б ілюструє шпунтувальний вплив R_i (аналогічно і R_H) на вибірність та смугу пропускання паралельного контуру.

При $R_i \gg R_0$ існує достатня "розв'язка" між генератором і контуром. Параметри контуру практично зберігаються такими, якими вони були при $R_i = \infty$, тобто впливом генератора на параметри контуру можна знехтувати.

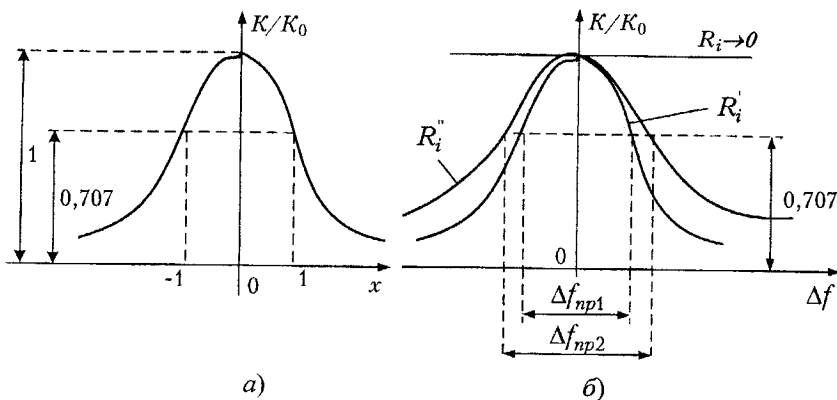


Рисунок 5.27 – АЧХ паралельного контуру за напругою (б), крива вибірності (а)

При $R_i'' \geq R_0$ добротність зменшується, смуга пропускання зростає. При дуже малих R_i ($R_i \rightarrow 0$) смуга пропускання стає нескінченно великою, $K = 1$ і не залежить від f і коливань у такому контурі нема, а енергія генератора витрачається на нагрівання елементів схеми.

5.4.2.9 Порівняння послідовного і паралельного контурів

1. При резонансі у послідовному контурі спостерігається зростання напруг на реактивних елементах, які у Q разів перевищують напругу генератора – резонанс напруг.

У паралельному контурі при резонансі зменшується струм генератора і контурний струм його перевищує у Q разів – резонанс струмів.

2. При резонансі вхідний опір послідовного контуру носить активний характер і стає мінімальним, який дорівнює опорі втрат. Вхідний же опір паралельного контуру також носить активний характер, але досягає максимального значення, яке у Q разів є більшим за його характеристичний опір. Тобто:

$$\frac{R_{\text{вх.пар}}}{R_{\text{вх.посл}}} = \frac{R_0}{r} = \frac{\rho Q}{\rho/Q} = Q^2,$$

якщо маємо паралельний і послідовний контури з однаковими параметрами r, L, C , то вхідний опір першого у Q^2 разів більший за вхідний опір другого.

3. При розстроюваннях модуль вхідного опорі паралельного контуру зменшується, а послідовного збільшується, незалежно від знаку абсолютного розстроювання.

4. На частотах нижчих за резонансну вхідні опори обох контурів носять активно-реактивний характер. Але ці опори є комплексно-

спряженими: в послідовному контурі активно-ємнісний, а в паралельному активно-індуктивний.

5. На частотах вищих за резонансу: вхідний опір послідовного контуру є активно-індуктивним, а паралельного – активно-ємнісним.

Останні дві обставини легко пояснюються і з тієї точки зору, що характер опору визначає той елемент контуру (послідовного чи паралельного), який суттєвіше впливає на значення струму генератора. Так, у послідовному контурі, де з'єднуються елементи контуру послідовно і струм, що їх обтікає, один і той же, значення цього струму визначатиме елемент з більшим значенням опору, а у паралельному контурі струм генератора I визначатиметься віткою з меншим опором, а тому саме цей елемент і визначає характер його вхідного опору.

5.4.3 Паралельний контур II виду

Еквівалентна схема паралельного контуру II виду подана на рис. 5.28. Очевидно, цей контур є також частинним випадком контуру загального виду (рис. 5.21), де: $1/\omega C_1 = 0$, $C = \infty$. Індуктивний опір розподілено між вітками контуру: ωL_1 – у лівій, ωL_2 – у правій вітках.

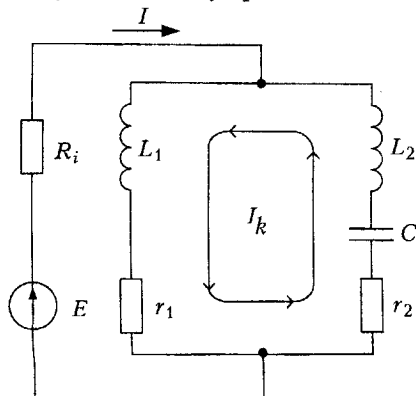


Рисунок 5.28 – Еквівалентна схема паралельного контуру II виду

Цей розподіл кількісно характеризується коефіцієнтом увімкнення:

$$p_L = L_1/L,$$

де: $L=L_1+L_2$, маючи на увазі, що котушки L_1 та L_2 за контурним струмом з'єднані послідовно.

У такому контурі можливі два резонанси: паралельний та послідовний. Послідовний резонанс можливий у правій вітці, яка фактично, є послідовним контуром, утвореним котушкою L_2 і конденсатором C . Паралельний резонанс – за рахунок обтікання контурним струмом I_k послідовно усіх елементів паралельного контуру. Нехтуючи малими втратами у контурах, у послідовному контурі

спостерігатиметься резонанс напруг на частоті

$$f_{\text{noc}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2C}}. \quad (5.63)$$

При цьому опір правої вітки буде дуже малим і весь струм генератора I замкнеться через праву вітку, а ліва вітка, практично, участі у роботі не братиме. Вхідний опір схеми буде чисто активним і дорівнюватиме r_2 . При зменшенні частоти генератора ($\omega < \omega_{\text{noc}}$) буде зростати реактивний опір правої вітки ($\omega L_2 - 1/\omega C$), який матиме ємнісний характер. Опір лівої вітки (ωL_1) з індуктивним характером опору буде зменшуватись, аж поки на якійсь частоті ці реактивні опори не зрівняються за модулем і їх сума стане рівною нулю:

$$\omega_{\text{нар}} L_1 + (\omega_{\text{нар}} L_2 - 1/\omega_{\text{нар}} C) = 0,$$

звідки частота:

$$\omega_{\text{нар}} = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad f_{\text{нар}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Те, що $f_{\text{нар}} < f_{\text{noc}}$ підтверджується формулами (5.63) і (5.64), бо $L_2 < L = L_1 + L_2$, а при однакових чисельниках дріб з меншим знаменником є більшим. Такий резонанс називається паралельним (резонансом струмів), а його частота $f_{\text{нар}}$ визначається за формулою (5.64), бо струми у вітках паралельного контуру будуть однаковими за амплітудами, але протилежними за фазами, утворюючи єдиний контурний струм I_k .

Звичайно, що так буде при $r_1 = r_2 = 0$, коли ж втратами у вітках знехтувати не можна, то резонанси спостерігатимуться на частотах менших ніж на отриманих за формулами (5.63) і (5.64). Резонансний вхідний опір паралельного контуру II виду R_0^{II} на частоті резонансу струмів дорівнюватиме згідно з формулою (5.42):

$$R_0^{II} = \frac{x_1^2}{r_1 + r_2} = \frac{(\omega_{\text{нар}} L_1)^2}{r},$$

де втрати у контурі $r = r_1 + r_2$. Підставивши у цю формулу значення $L_1 = p_L L$, отримане з визначення коефіцієнта вмикання, матимемо:

$$R_0^{II} = \frac{(\omega_{\text{нар}} p_L L)^2}{r} = p_L^2 \frac{(\omega_{\text{нар}} L)^2}{r} = p_L^2 \cdot \frac{\rho^2}{r} = p_L^2 \cdot R_0^I, \quad (5.65)$$

де R_0^I – резонансний опір відповідного паралельного контуру I виду, бо контур II виду отримано розділенням L на частини L_1 і L_2 ($L_1 + L_2 = L$). Іншими словами, контур I виду перетворено на контур II виду без зміни частоти резонансу струмів. Неповне увімкнення котушки (контур II виду) з коефіцієнтом $p_L = (0 \dots 1)$ дає можливість стверджувати, що відбулася трансформація опору з коефіцієнтом $K = p_L^2$. На прикладі розглянемо, що дає

нам така схема. Нехай $p_L = 0,315 (p_L^2 \approx 0,1)$ тоді при під'єднанні шпунтувального опору $R_{ш} = 2R_0$ для контуру I виду матимемо:

$$R_{екв}^I = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0}{R_{ш}}} = \frac{R_0}{1 + 0,5} = \frac{R_0}{1,5} \approx 0,67R_0,$$

а для контуру II виду;

$$R_{екв}^{II} = \frac{R_0^{II}}{1 + \frac{R_0^{II}}{R_{ш}}} = \frac{R_0^{II}}{1 + p_L^2 \frac{R_0^I}{R_{ш}}} = \frac{R_0}{1 + 0,05} \approx 0,95R_0^{II}.$$

З наведеного прикладу видно, що резонансний опір контуру I виду зменшився у 1,5 раза, а контуру II виду – лише на 5% (на 1/20). Ця обставина і обумовлює широке використання на практиці контурів з неповним (частинним) увімкненням індуктивності. На рис. 5.29,а зображена схема паралельного контуру II виду. Регулювання коефіцієнта увімкнення індуктивності дискретно (б) здійснюється перемиканням контактів відгалужень від котушки індуктивності. За допомогою повзункового механізму (в) можна здійснювати плавне регулювання.

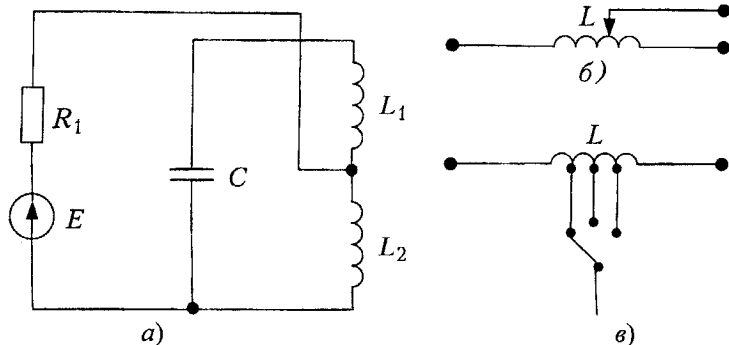


Рисунок 5.29 – Схема контуру II виду (а), плавного (б) та дискретного (в) регулювання коефіцієнта увімкнення

5.4.4 Паралельний контур III виду

Еквівалентна схема паралельного контуру III виду зображена на рис. 5.30. І цей контур є частинним випадком контуру загального виду (рис. 5.21), де:

$$I_1 = 0; r_1 = 0; L_2 = L; r_2 = r.$$

Ліва гілка складається лише з конденсатора C_1 , права – з послідовно з'єднаними котушки L з втратами r та конденсатора C_2 .

У цій схемі обидві вітки містять ємнісні опори $(1/\omega C_1)$ та $(1/\omega C_2)$. Якщо вважати, що цей контур утворено з контуру I виду (рис. 5.22) без зміни частоти паралельного резонансу, то спільна ємність схеми (рис. 5.30)

має дорівнювати ємності C схеми (рис. 5.22). А оскільки за контурними струмом конденсатори C_1 та C_2 з'єднані послідовно, то:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} < C_1.$$

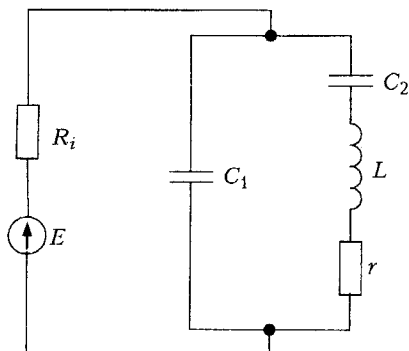


Рисунок 5.30 – Еквівалентна схема паралельного контуру III виду

Відношення C до C_1 називається коефіцієнтом ввімкнення ємності, позначається через ρ_C :

$$\rho_C = \frac{C}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

У правій вітці на частоті $f_{noc} = 1/2\pi\sqrt{LC_2}$ буде спостерігатися послідовний резонанс (резонанс напруг), опір її буде дуже малим (r – малий), увесь струм генератора протікатиме через цю вітку, а ліва вітка участі у роботі схеми не прийматиме. Вхідний опір схеми буде дуже малим і фактично дорівнюватиме r .

При зростанні частоти генератора ($\omega < \omega_{noc}$) опір правої вітки зростатиме, а лівої – зменшуватиметься. При цьому опір правої вітки носитиме індуктивний характер, у лівій вітці він є завжди ємнісним. На певній частоті f_{noc} опори цих віток стануть однаковими і протилежними за знаками і отже їх сума дорівнюватиме нулю:

$$\begin{aligned} 1/\omega_{nap} C_1 + \omega_{nap} L - 1/\omega_{nap} C_2 &= 0; \\ \omega_{nap} L - 1/\omega_{nap} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) &= 0; \\ \omega_{nap} L - \frac{C_1 + C_2}{\omega_{nap} C_1 \cdot C_2} &= 0; \quad \omega_{nap} = \frac{1}{\sqrt{CL}}. \\ f_{nap} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{CL}}. \end{aligned}$$

Очевидно, $f_{нар} > f_{нос}$ бо спільна ємність $C < C_2$. Резонансний вхідний опір контуру III виду, виходячи з (5.42):

$$R_0'' = \frac{x_1^2}{r} = \frac{(1/\omega_{нар} C_1)^2}{r} = \frac{\left(\frac{1 \cdot p_C}{\omega_{нар} C}\right)^2}{r} = p_C^2 \frac{\left(\frac{1}{\omega_{нар} C}\right)^2}{r} = p_C^2 \frac{\rho^2}{r} = p_C^2 \cdot R_0'$$

Подібно до попереднього випадку при $\rho_C = 0,315$ і $R_0 = 2 R_{ш}$ вхідний резонансний опір контуру III виду також зменшиться лише на 5%.

Таким чином, неповне увімкнення паралельного контуру (контур II або III видів) працює як узгодження (трансформація) опору шунта (R_i чи R_H) і вхідного резонансного опору паралельного контуру I виду.

Ця обставина обумовлює широке використання контурів III виду в радіотехнічних і, зокрема, радіоприймальних пристроях.

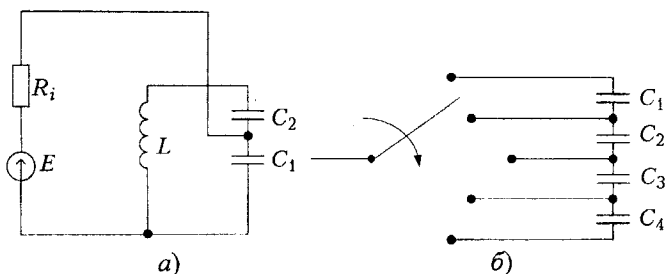


Рисунок 5.31 – Схема паралельного контуру III виду (а) та дискретного (б) регулювання коефіцієнта увімкнення

На відміну від попереднього випадку плавне регулювання ρ_C зробити неможливо, а тому на практиці використовується лише ступеневе (дискретне) регулювання за допомогою перемикача (рис. 5.30, б).

При резонансі вхідний опір паралельного контуру досягає максимуму, а струм генератора – мінімуму і контурний струм перевищує струм генератора у Q разів – резонанс струмів.

Вхідний опір при резонансі – чисто активний; при $\omega < \omega_0$ він індуктивний, бо $X_L < X_C$ і струм генератора визначається опором індуктивної вітки; при $\omega > \omega_0$ він ємнісний, бо $X_C < X_L$ і струм генератора визначається опором ємнісної вітки.

Паралельні контури бувають трьох видів:

I – котушка індуктивності і конденсатор увімкнені в різних вітках контуру;

II – котушка індуктивності розподілена по двох вітках контуру, а конденсатор є тільки в одній з них;

III – у обох вітках є конденсатори, а котушка тільки в одній з них.

Паралельний контур має працювати лише від генератора струму, внутрішній опір якого набагато більший за резонансний опір контуру.

5.5 Запитання та задачі для закріплення

1. Що таке паралельний контур та його види? Зобразити принципову та еквівалентну схему кожного з них.

2. Написати вирази для комплексного вхідного опору паралельного контуру та його складових.

3. Побудувати частотні характеристики вхідного опору.

4. Пояснити характер вхідного опору контуру при розстроюваннях за допомогою векторних діаграм.

5. Навести енергетичне пояснення резонансу струмів.

6. Написати вирази для розрахунку власних параметрів контуру: R_0 , Q , Δf_{np} , K .

7. Написати вирази для розрахунку еквівалентних параметрів контуру (з урахуванням шунтувальної дії R_i та R_H).

8. Назвати переваги та недоліки контурів II та III видів у порівнянні з I видом.

9. Розрахувати значення R_0 , Q , Δf_{np} , K паралельного контуру I виду з параметрами $L = 100$ мГн, $C = 10^5$ пФ, $r = 10$ Ом.

10. За даними попередньої задачі розрахувати $Q_{екв}$, $R_{екв}$, $\Delta f_{екв}$, $\Gamma_{екв}$ коли $R_i = R_H = 500$ кОм.

11. За даними задачі 10 розрахувати параметри генератора (E_m , R_i), аби $R_{екв} = 0,9 R_0$ і амплітуда напруги на контурі (задача 10) дорівнювала 100 мВ.

12. Контур II виду має $p = 0,707$. Визначити у скільки разів зміниться у ньому: Δf_{np}^{II} , R_0^{II} , Q^{II} ?

13. Контур I виду (задача 10) без зміни резонансної частоти перетворено на контур II виду. Визначити параметри останнього, коли у ньому $f_{посл} = 2f_{нар}$.

14. Контур I виду (задача 10) без зміни резонансної частоти перетворено на контур III виду. Визначити параметри останнього, коли у ньому $f_{нар} = 2f_{посл}$.

6 СИМЕТРИЧНІ КОЛА ТРИФАЗНОГО СТРУМУ

6.1 Трифазні електричні кола

Трифазне електричне коло може бути подано як сукупність трьох однофазних кіл (кіл однофазного струму) в яких діють е.р.с. однієї і тієї ж частоти, зсунуті одна відносно одної на одну третину періоду (на кут $2\pi/3$).

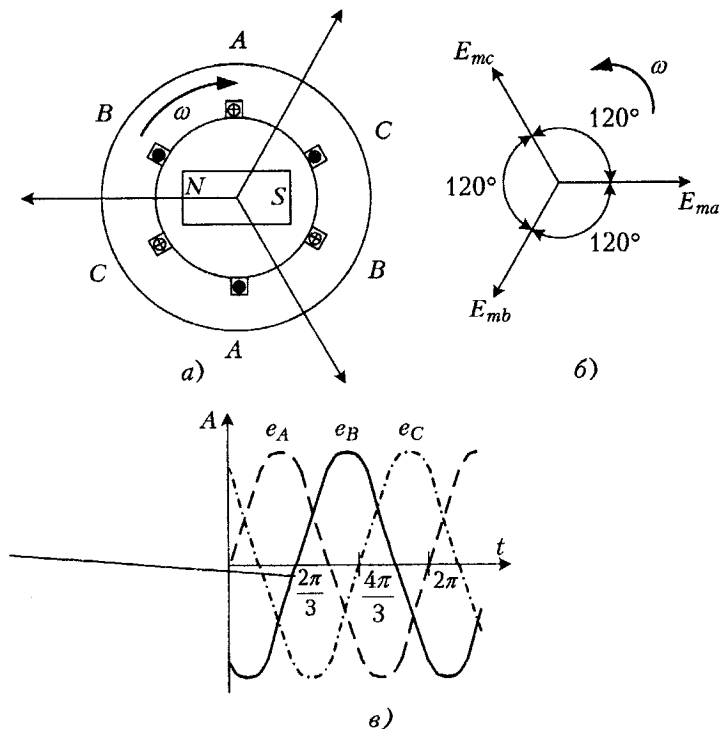


Рис 6.1 – Схема трифазного генератора (а), векторна діаграма е.р.с. (б), часові діаграми е.р.с. (в)

Ці три складові частини трифазного кола називаються фазами, які надалі будемо позначати літерами А, В, С. Схематично це показано на рис. 6.1.

Для отримання трифазного струму використовують трифазний генератор, схема конструкції якого подана на рис. 6.1,а. Обмотки, в яких наводяться е.р.с., розміщуються у пазах статора. Обмотки фаз зсунуті відносно одна одної на кут 120° . При обертанні ротора (магніту) через ідентичність трьох обмоток генератора в них наводяться е.р.с., які мають однакову амплітуду і частоту, причому ці е.р.с. зсунуті за фазою відносно

одна до одної на одну третину періоду. Вектори, що зображають ці е.р.с., рівні за довжиною і складають між собою кут 120° (рис. 6.1,б).

Миттєве значення е.р.с. трифазного генератора (рис. 6.1,в) виражаються аналітично таким чином:

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin (\omega t - 2\pi/3); \\ e_C &= E_m \sin (\omega t - 4\pi/3) = E_m \sin (\omega t + 2\pi/3). \end{aligned}$$

Миттєве значення е.р.с. дорівнює відповідним проекціям трьох векторів E_{mA} , E_{mB} , E_{mC} (рис. 6.1,б), які обертаються у додатному напрямку з кутовою швидкістю ω , на вісь ou . На рис. 6.1, а положення ротора (магніту) відповідає моменту $t=0$.

На схемах заміщення обмотки трифазного генератора позначають як показано на рис. 6.2 і умовно приймають напрямок е.р.с. від кінця до початку обмотки додатним.

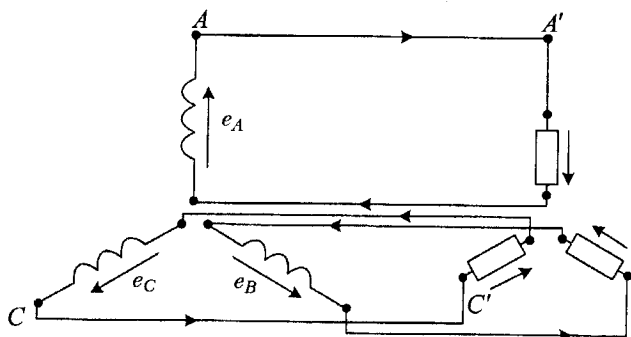


Рисунок 6.2 – Незв'язане трифазне коло

Якщо кожен обмотку трифазного генератора з'єднати зі своїм приймачем, утворяться три незалежних кола, кожне зі своїм струмом.

В незв'язаній трифазній системі генератор з приймачем енергії з'єднуються шістьма проводами. Велика кількість з'єднувальних проводів – основний недолік незв'язаних систем, які тому сьогодні і не застосовуються. Скорочення числа з'єднувальних проводів досягається в з'єднаній системі, вперше запропонованій М.Н. Даліво-Добровольським у 1889 році. Він запропонував дві схеми з'єднання: зіркою і трикутником, які застосовуються і сьогодні.

6.2 З'єднання зіркою

На рис. 6.3 показана зв'язана система при з'єднанні фаз джерела енергії і споживача зіркою. Таку систему легко отримати з незв'язаної системи.

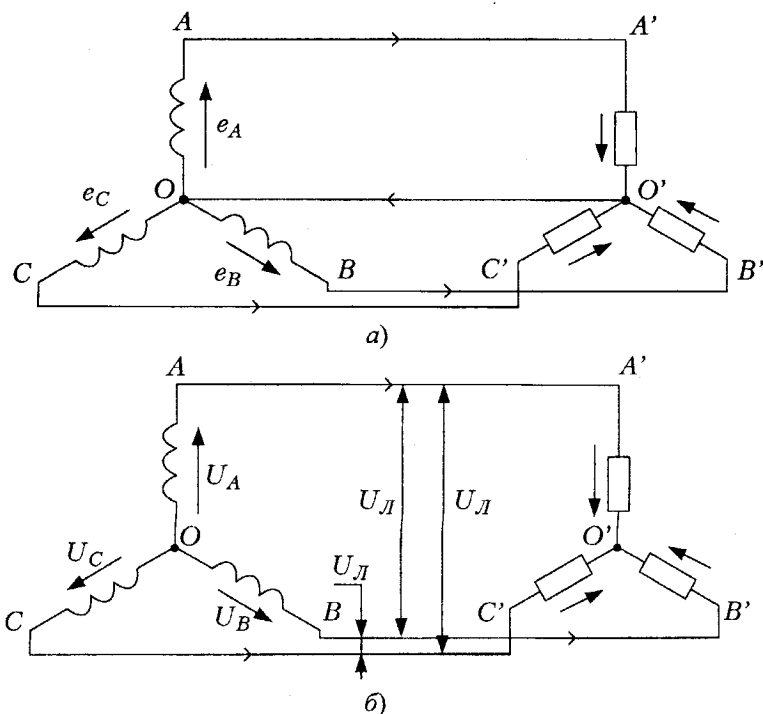


Рисунок 6.3 – Зв'язані трифазні кола при з'єднанні зіркою

Початком обмотки генератора вважається полюс, до якого спрямована додатна е.р.с. (полюси A, B, C). З'єднання зіркою передбачає, що усі кінці фазних обмоток з'єднуються в одну спільну точку O , яку називають нульовою точкою, або нейтраллю. Проводи AA', BB', CC' зберігаються, а три проводи, що з'єднують точки OO' замінюються одним проводом, який називається нульовим, або нейтральним. В симетричних трифазних колах загальний струм $\dot{I}_H = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, що дозволяє відмовитись від загального проводу OO' . У такому разі зв'язок між джерелом і споживачем, з'єднаними зіркою, можна здійснювати за трипровідною схемою (рис. 6.3,б).

Фазні та лінійні напруги. Різниці потенціалів між точками $AO(U_A)$, $BO(U_B)$, $CO(U_C)$ називаються фазними напругами. Фазні напруги джерела – напруги між початками і кінцями фаз, які відрізняються від е.р.с. на величину спаду напруги в обмотках. В симетричній системі вони зображаються також трьома рівними за величиною векторами, зсунутими за фазою на 120° (рис. 6.4).

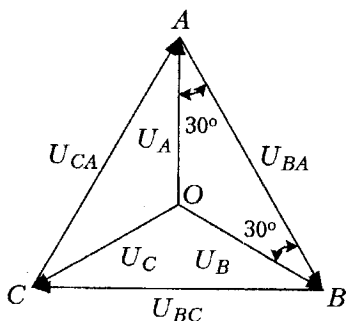


Рисунок 6.4 – Векторна діаграма напруг при з'єднанні обмоток джерела зіркою

Різниця потенціалів між кожною парою лінійних проводів називається лінійною напругою (U_{AB} , U_{BC} , U_{AC}).

Якщо прийняти потенціал нульової точки O за нуль, то потенціали лінійних полюсів $V_A=U_A$, $V_B=U_B$, $V_C=U_C$.

Лінійні напруги:

$$\begin{cases} \dot{U}_{AB} = V_A - V_B = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\ \dot{U}_{AC} = V_B - V_C = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\ \dot{U}_{CA} = V_C - V_A = \dot{U}_C - \dot{U}_A; \end{cases} \quad (6.1)$$

Потенціали лінійних полюсів кожної миті відрізняються один від одного через наявність зсуву фаз між фазними напругами, а значить лінійні напруги не дорівнюють нулю. Їх можна визначити аналітично з рівнянь (6.1) або графічно з векторної діаграми рис. 6.4. Наприклад, значення лінійної напруги U_{AB} знайдемо з трикутника AOB :

$$U_{AB} = 2 \cdot U_A \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot U_A,$$

тобто:

$$U_A = \sqrt{3} \cdot U_\phi. \quad (6.2)$$

Фазні і лінійні струми. Кожна фаза трифазної системи являє собою замкнуте коло. У відповідності з додатним напрямком е.р.с. в обмотках джерела додатні напрямки струмів в лінійних проводах є від джерела до споживача, а в нульовому провіднику – від споживача до джерела.

Струми у фазах джерела і споживача називають фазними (I_A , I_B , I_C або взагалі I_ϕ). Струми в лінійних провідниках називають лінійними I_A , I_B , I_C або взагалі I_L).

При з'єднанні зіркою в точках переходу від джерела в лінію і з лінії в приймач немає розгалужень, а тому фазні та лінійні струми однакові між собою у кожній фазі:

$$I_L = I_\phi. \quad (6.3)$$

6.3 З'єднання трикутником

При з'єднанні обмоток трифазного генератора трикутником (рис. 6.5) початок однієї фазної обмотки з'єднується з кінцем наступної за порядком фазної обмотки так, що усі три обмотки утворюють замкнутий трикутник, причому напрямки е.р.с. у контурі трикутника збігаються і сума е.р.с. дорівнює нулю (рис. 6.5,б). Загальні точки з'єднаних обмоток генератора виводяться на затискачі, до яких приєднується через лінійні проводи трикутник навантаження.

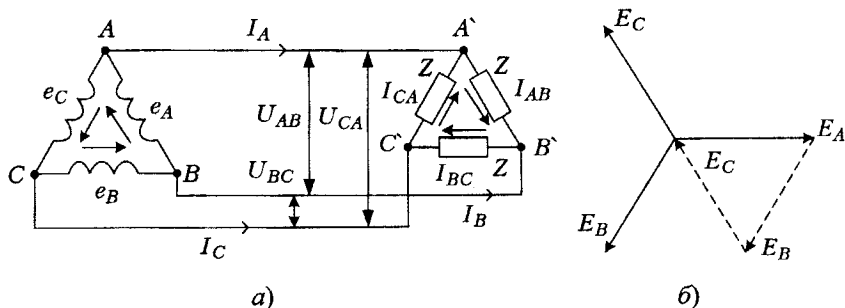


Рисунок 6.5 – Схема трифазної системи при з'єднанні трикутником (а), векторна діаграма е.р.с. (б)

Фазні та лінійні напруги. Зі схеми рис. 6.5,а видно, що фазні та лінійні напруги збігаються, бо кінець однієї фази з'єднаний з початком другої, кінець другої – з початком третьої:

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}. \quad (6.4)$$

Векторну діаграму напруг можна побудувати у вигляді зірки або трикутника векторів (рис. 6.6).

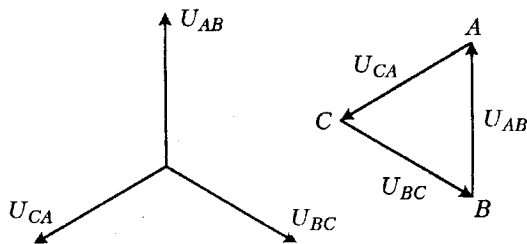


Рисунок 6.6 – Векторні діаграми напруг при з'єднанні обмоток джерела трикутником

В симетричній трифазній системі е.р.с., що діють в контурі, мають суму, рівну нулю (рис. 6.5,б): $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$.

При відсутності навантаження ($Z = \infty$) струм в обмотках джерела відсутній. Але так буває лише при наявності симетрії в системі, а в

протилежному випадку сума е.р.с. не дорівнює нулю і в обмотках джерела утворюється струм, який може бути значним навіть при малій асиметрії, бо опір самих обмоток незначний.

Фазні та лінійні струми. При з'єднанні трикутником кожна фаза навантаження знаходиться під лінійною напругою. Цим обумовлено наявність в навантаженні фазних струмів I_{AB} , I_{BC} , I_{CA} , додатний напрямок яких на схемі рис. 6.5 вибрано відповідно додатному напрямку е.р.с. у фазах джерела.

Точки A, B, C, A', B', C' є електричними вузлами, а тому фазні струми відрізняються від лінійних I_A, I_B, I_C . За першим законом Кірхгофа для вузлових точок A, B, C можна написати:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \quad (6.5)$$

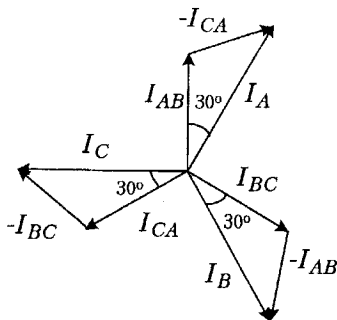


Рисунок 6.7 – Векторні діаграми струмів при з'єднанні трикутником

При симетричному навантаженні струми в усіх фазах однакові. На рис. 6.7 подана векторна діаграма струмів. З верхнього, наприклад, трикутника маємо:

$$I_A = 2I_{AB} \cos 30^\circ = \sqrt{3} \cdot I_{AB}.$$

Позначивши усі лінійні струми $I_A = I_B = I_C$ через I_L , усі фазні $I_{AB} = I_{BC} = I_{CA}$ – через I_ϕ , отримаємо загальне співвідношення між лінійними і фазними струмами у симетричній системі:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_\phi. \quad (6.6)$$

Визначення потужності. Потужність у кожній фазі трифазного кола визначається за формулами, які застосовувались для однофазних кіл.

При симетричному навантаженні фазні напруги однакові, а тому при визначенні потужності будуть справедливими такі загальні рівняння:

$$P = 3 \cdot U_\phi I_\phi \cos \varphi; \quad Q = 3 \cdot U_\phi I_\phi \sin \varphi; \quad S = 3 \cdot U_\phi I_\phi \quad (6.7)$$

Оскільки при з'єднанні зіркою

$$U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}}; \quad I_\phi = I_L.$$

а при з'єднанні трикутником

$$I_{\phi} = \frac{I_{Л}}{\sqrt{3}}; \quad U_{\phi} = U_{Л}.$$

потужності можна визначати через лінійні величини напруг та струмів:

$$P = \sqrt{3} \cdot U_{Л} I_{Л} \cos \varphi; \quad Q = \sqrt{3} \cdot U_{Л} I_{Л} \sin \varphi; \quad S = \sqrt{3} \cdot U_{Л} I_{Л}. \quad (6.8)$$

При розв'язуванні задач символічним методом потужність визначається, так само як і в однофазних колах, добутком відповідного комплексу напруги і спряженого комплексу струму.

Е.р.с, що наводиться в обмотках трифазного генератора, однакові за амплітудою і зсунуті одна відносно одної на фазовий кут 120° .

При з'єднанні зіркою лінійні напруги у $\sqrt{3}$ рази більші за фазні, а струми однакові:

$$U_{\phi} = \frac{U_{Л}}{\sqrt{3}}; \quad I_{\phi} = I_{Л}.$$

При з'єднанні трикутником струми у $\sqrt{3}$ рази більші за фазні, а напруги однакові:

$$I_{\phi} = \frac{I_{Л}}{\sqrt{3}}; \quad U_{\phi} = U_{Л}.$$

6.4 Запитання та задачі для закріплення

1. Побудувати векторну діаграму е.р.с. трифазної системи при з'єднанні обмоток зіркою і трикутником.
2. Побудувати векторну діаграму напруг на навантаженні при з'єднанні зіркою.
3. Побудувати векторну діаграму струмів у системі при з'єднанні трикутником.
4. В симетричному трифазному колі навантаження $Z=10+j5$ Ом (на фазу) з'єднане зіркою, лінійні напруги на навантаженні дорівнюють 230 В. Обчислити струм.
5. В симетричному трифазному колі навантаження $R_{AB}=R_{BC}=R_{CA}=10$ Ом з'єднане трикутником, лінійні напруги на навантаженні дорівнюють по 100 В. Визначити потужність навантаження.

7 ДЕЯКІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Аналізом електричного кола називають визначення струмів та напруг на усіх його ділянках. Раніше ми розглядали розрахунок простих електричних кіл або кіл які "згортались" до простих. Але часто такий підхід є неможливим або недоцільним. Наприклад, коли маємо коло складної конфігурації з декількома джерелами енергії.

7.1 Застосування законів Кірхгофа

Розглядаючи схему будь-якого розгалуженого електричного кола, можна виділити в ній електричні вузли та контури. Наприклад, схема, яка зображена на рис. 7.1, має чотири вузли (1, 3, 4, 6) та декілька контурів (I, II, III, IV).

Для кожної вузлової точки можна скласти рівняння струмів за першим законом Кірхгофа (вузлові рівняння). Наприклад, для вузла 6: $I_5 + I_7 = I_3 + I_6$. Для кожного контуру, обхід яких проводитимемо за напрямком руху годинникової стрілки, – рівняння напруг за другим законом Кірхгофа (контурні рівняння), наприклад, для контуру III:

$$I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_7 R_7 = -E_2.$$

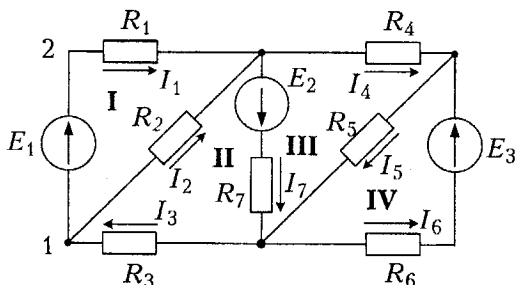


Рисунок 7.1 – Схема складного електричного кола

У ці рівняння входять струми у вітках, визначення яких і є метою розрахунку. Сумарна кількість вузлових та контурних рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих струмів, тоді сумісне розв'язування системи цих рівнянь дозволить визначити значення струмів.

Перед тим, як приступити до складання рівнянь за законами Кірхгофа, необхідно вибрати умовно-позитивні напрямки струмів у кожній вітці (очевидно, кількість струмів дорівнює кількості віток).

Указані напрямки струмів вибирають довільно. Дійсні напрямки струмів можуть з ними і не збігатися. Помилка у виборі напрямку струму в результаті розв'язування виявиться: струм з неправильно вибраним напрямком буде від'ємним.

Вузлові рівняння. Запишемо вузлові рівняння для усіх чотирьох вузлів заданої схеми:

$$\left. \begin{aligned} \text{для вузла 1: } I_3 &= I_1 + I_2; \\ \text{для вузла 2: } I_1 + I_2 &= I_4 + I_7; \\ \text{для вузла 3: } I_1 + I_6 &= I_5; \\ \text{для вузла 6: } I_5 + I_7 &= I_3 + I_6. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

У цій системі рівнянь будь-які три рівняння є незалежними, бо до кожного з них входить хоча б один новий струм у порівнянні з іншими. Якщо незалежними вважати перші три рівняння, то четверте рівняння не містить нового струму, тому його можна отримати з перших трьох шляхом нескладних підстановок. Узагальнюючи можемо сказати, що при наявності у схемі n вузлів, можна отримати $(n - 1)$ незалежних вузлових рівнянь.

Але цих рівнянь, у даному прикладі, недостатньо для визначення семи невідомих струмів. Решту чотири рівняння отримуємо, скориставшись другим законом Кірхгофа.

Контурні рівняння

З усіх контурів схеми вибирають ті, для яких можна скласти найбільш прості незалежні рівняння, пам'ятаючи, що кожне наступне рівняння буде незалежним від попередніх, якщо у даний контур входить хоча б одна вітка, яка не входила в уже використані контури.

Відомо, що кількість незалежних контурних рівнянь у схемі, що має m віток і n вузлів, дорівнює $(m - n + 1)$.

Для десяти можливих контурів при $m = 7$ у даному випадку незалежних контурних рівнянь буде лише $(7 - 4 + 1 = 4)$ чотири, тобто стільки, скільки необхідно для визначення усіх струмів:

$$\left. \begin{aligned} \text{для контуру I: } I_1 R_1 - I_2 R_2 &= E_1; \\ \text{для контуру II: } I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_7 R_7 &= E_2; \\ \text{для контуру III: } I_4 R_4 + I_3 R_3 - I_7 R_7 &= -E_2; \\ \text{для контуру IV: } -I_5 R_5 - I_6 R_6 &= -E_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Отже, розв'язавши систему незалежних рівнянь, узятих з (7.1) і (7.2), визначимо усі невідомі струми в усіх вітках заданої схеми.

7.2 Метод накладання

В лінійному електричному колі, яке містить джерела напруги, контурні струми, у вітках являють собою лінійні функції е.р.с. Це означає, що струм у будь-якому контурі лінійного електричного кола може бути отриманий як алгебраїчна сума струмів, що спричиняються у цьому контурі кожною е.р.с. окремо.

Для прикладу розглянемо схему рис. 7.2 і складемо для неї систему рівнянь за другим законом Кірхгофа:

$$\left. \begin{aligned} I_1 R_1 + I_3 R_3 &= E_1; \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 &= E_2; \\ I_1 + I_2 &= I_3 \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

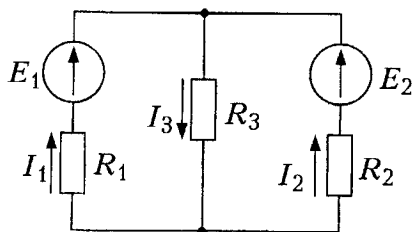


Рисунок 7.2 – До методу накладання

Розв'язування системи (7.3) дає вирази для струмів у вітках:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1 - \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2; \\ I_2 &= \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2 - \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1; \\ I_3 &= \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2 - \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

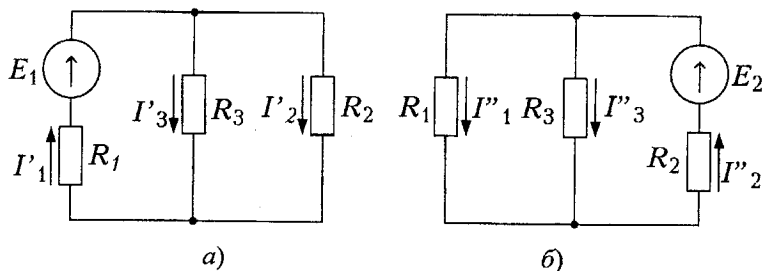


Рисунок 7.3 – До методу накладання

Тепер звернемося до рівняння 7.3, звідки отримаємо систему

$$\left. \begin{aligned} I'_1 R_1 + I'_3 R_3 &= E_1; \\ I'_2 R_2 + I'_3 R_3 &= 0; \\ I'_2 + I'_3 &= I'_1. \end{aligned} \right\}$$

розв'язування якої дасть такі значення часткових струмів, збуджених в усіх вітках е.р.с. E_1 :

$$\left. \begin{aligned} I'_1 &= \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1; \\ I'_2 &= \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1; \\ I'_3 &= \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_1. \end{aligned} \right\}$$

Вважаючи $E_1=0$ і зберігши у лівій вітці її внутрішній опір R_1 отримаємо випадок (рис. 7.3,(б)) і систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} -I''_1 R_1 + I''_3 R_3 &= 0; \\ -I''_2 R_2 + I''_3 R_3 &= -E_2; \\ I''_1 + I''_2 &= I''_3 \end{aligned} \right\}$$

розв'язування якої дасть такі значення часткових струмів, збуджених у всіх вітках е.р.с. E_2 :

$$\left. \begin{aligned} I''_1 &= \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2; \\ I''_2 &= \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2; \\ I''_3 &= \frac{R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

З розгляду системи рівнянь (7.4), (7.5) та (7.6) маємо, що:

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 - I''_2; \quad I_3 = I'_3 - I''_3. \quad (7.7)$$

Подібні міркування можна провести для будь-якої схеми з лінійними елементами, з яких випливає метод розрахунку електричних кіл: визначаються часткові струми у вітках від дії кожної е.р.с., а істинний струм кожної вітки дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів цієї вітки.

Звідси, рекомендований порядок розрахунку:

1. На основі вихідної схеми (у нашому випадку рис. 7.2) складають часткові розрахункові схеми (у нашому випадку рис. 7.3,а,б), у кожній з яких діє тільки одна е.р.с. Усі інші е.р.с. виключаються і від кожної з них залишаються тільки їх внутрішні опори.

2. Будь-яким підходящим методом визначаються струми в часткових схемах.

3. Алгебраїчним складанням (накладанням) часткових струмів визначаються струми у вихідній схемі.

При визначенні дійсних струмів необхідно правильно врахувати напрямки часткових струмів: у вихідній схемі намічають умовно додатні напрямки струмів у вітках. Частковий струм вважають позитивним, якщо він напрямлений однаково з додатним струмом у тій самій вітці вихідної

схеми, частковий струм протилежного напрямку вважають від'ємним.

При такому підході загальні струми у вітках можуть бути додатними або від'ємними. У останньому випадку потрібно змінити напрямок струму і вважати його додатним у подальших розрахунках.

7.3 Вхідні та передатні (взаємні) провідності і опори

В рівностях (7.4) множники при е.р.с. мають розмірності провідності. Показавши їх як провідності, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= G_{11}E_1 - G_{12}E_2; \\ I_2 &= G_{22}E_2 - G_{21}E_1; \\ I_3 &= G_{31}E_1 - G_{32}E_2; \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

де

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}; \\ G_{12} = G_{21} &= \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}; \\ G_{22} &= \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}; \\ G_{31} &= \frac{R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}; \\ G_{32} &= \frac{R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти з однаковими індексами (G_{11} , G_{22}) називаються **вхідними провідностями**, а коефіцієнти з різними індексами (G_{12} , G_{21} , G_{31} , G_{32}) називаються **передатними провідностями**.

Якщо е.р.с. $E_2 = 0$, з рівностей системи (7.4), отримаємо:

$$I'_1 = G_{11}E_1; \quad I'_2 = G_{21}E_1; \quad I'_3 = G_{31}E_1;$$

З цих виразів випливає:

– вхідна провідність будь-якої вітки дорівнює відношенню струму до е.р.с. цієї вітки, коли е.р.с. в усіх інших вітках прийняти рівними нулю; вхідний опір – величина, обернена вхідній провідності:

$$G_{nn} = I_n/E_n; \quad R_{nn} = 1/G_n; \quad (7.9)$$

– передатна (взаємна) провідність двох будь-яких віток дорівнює відношенню струму в одній вітці до е.р.с. в другій вітці, якщо е.р.с. в решті віток прийняти рівними нулю;

– передатний (взаємний) опір – величина, обернена передатній (взаємній) провідності:

$$G_{kn} = I_k/E_n; \quad R_{kn} = 1/G_{kn}; \quad (7.10)$$

причому $G_{kn} = G_{nk}$.

– вхідні і передатні (взаємні) провідності і опори можна визначити розрахунком, використовуючи часткові схеми. Далі знаходяться струми у вітках, використавши рівності (7.8).

7.4 Коефіцієнти передачі напруги і струму

У деяких випадках режим роботи електричного кола зручно охарактеризувати коефіцієнтами передачі напруги і струму. Найчастіше вони застосовуються до кіл, які мають одне джерело е.р.с. (рис. 7.4,а) або одне джерело струму (рис. 7.4,б).

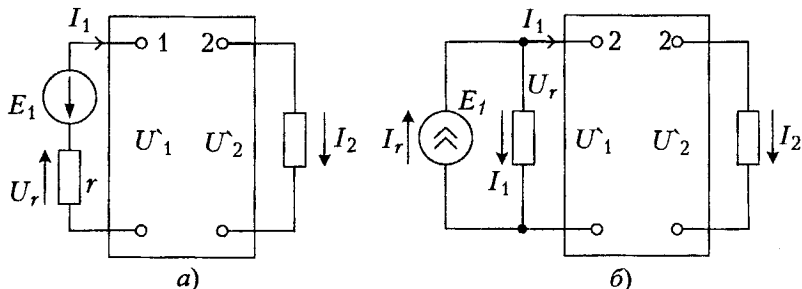


Рисунок 7.4 – До питання про коефіцієнти передачі напруги і струму: варіант з джерелом е.р.с. (а) та струму (б)

Коефіцієнт передачі напруги дорівнює відношенню напруги на затискачах навантаження (приймача) до напруги джерела е.р.с., що діє у колі:

$$K_u = \dot{U}_2 / \dot{U}_1. \quad (7.11)$$

Коефіцієнт передачі струму дорівнює відношенню струму в навантаженні (приймачі) до струму джерела струму, що діє у колі:

$$K_i = \dot{I}_2 / \dot{I}_1. \quad (7.12)$$

7.5 Метод еквівалентного генератора

В практиці розрахунків часто стоїть завдання – дослідити режим роботи однієї конкретної вітки при зміні, наприклад, її опору, коли знати режими роботи решти елементів складного електричного кола немає потреби.

При розрахунках складного електричного кола приходиться виконувати значну обчислювальну роботу навіть у тому випадку, коли потрібно визначити струм в одній вітці. Об'єм цієї роботи зростає у декілька разів, якщо необхідно установити змінення струму, наприклад, при змінненні опору даної вітки, бо обчислення потрібно проводити декілька разів при різних значеннях опору.

Розв'язування такої задачі значно спрощується при використанні методу еквівалентного генератора.

Обґрунтування методу

Досліджувана вітка з опором R_{ab} (рис. 7.5,а) приєднується до схеми всередині прямокутника A в точках a і b . Цю частину схеми можна розглядати відносно досліджуваної вітки як джерело з деякою еквівалентною е.р.с. $E_{екв}$ і деяким еквівалентним внутрішнім опором $r_{екв}$ (рис. 7.5,б). Таке умовне джерело енергії називається **еквівалентним генератором** або активним двополосником (А). Якщо у частини схеми, що відноситься до двополосника, нема джерел енергії, то двополосник називається пасивним (П).

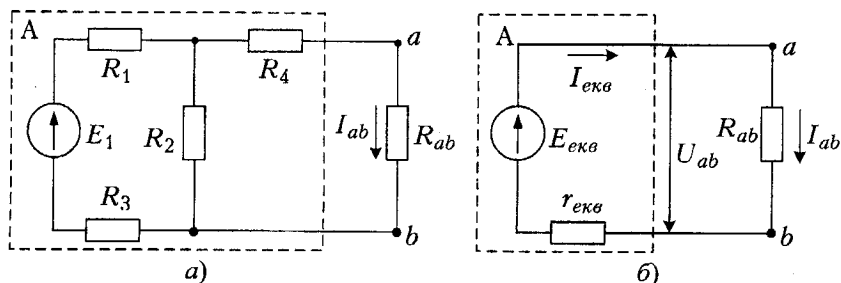


Рисунок 7.5 – До методу еквівалентного генератора

Струм у досліджуваній вітці можна знайти з еквівалентної схеми (рис. 7.5,б) за законом Ома для повного кола:

$$I_{ab} = E_{екв} / (R_{ab} + r_{екв}). \quad (7.13)$$

Таким чином, розв'язування задачі для визначення струму I_{ab} зводиться до визначення е.р.с. $E_{екв}$ еквівалентного генератора і його внутрішнього опору $r_{екв}$ який називається вихідним опором активного двополосника.

Після визначення $E_{екв}$ і $r_{екв}$ подальше дослідження режиму роботи вітки ab при зміні опору R_{ab} не потребує громіздких обчислень, бо е.р.с. $E_{екв}$ і внутрішній опір $r_{екв}$ еквівалентного генератора не змінюються.

Визначення параметрів еквівалентного генератора

Для визначення цих величин розглянемо два крайніх режими еквівалентного генератора: режим холостого ходу та режим короткого замикання.

Від'єднаємо досліджувану гілку в точках a і b ($R_{ab} = \infty$), тоді еквівалентний генератор буде знаходитись у режимі холостого ходу. Напругу між точками a і b , при цьому, позначимо через U_x , вона буде дорівнювати еквівалентній е.р.с.:

$$U_x = E_{екв},$$

оскільки через відсутність струму ($I_{екв} = 0$), спад напруги на внутрішньому опорі генератора $r_{екв}$ дорівнює нулю.

Напрягу холостого ходу можна визначити за допомогою формули (рис. 7.5,а);

$$U_x = I R_2 = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} R_2.$$

Опір R_4 не враховано, бо при відімкненому R_{ab} струм в резисторі R_4 і спад напруги на ньому теж дорівнюють нулю.

Отже, е.р.с. еквівалентного генератора дорівнює:

$$E_{екв} = \frac{E R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (7.14)$$

Внутрішній опір еквівалентного генератора $r_{екв}$ визначимо, використавши режим короткого замикання. У режимі короткого замикання $R_{ab} = 0$ (рис. 7.5,б) і струм короткого замикання I_k дорівнюватиме:

$$I_k = \frac{E_{екв}}{r_{екв}},$$

звідси

$$r_{екв} = \frac{E_{екв}}{I_k},$$

Струм короткого замикання I_k знайдемо, розглянувши схему (рис. 7.5,а) при $R_{ab} = 0$:

$$r_k = \frac{E}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}. \quad (7.15)$$

Розділивши вираз (7.14) на (7.15), отримаємо значення внутрішнього опору $r_{екв}$ еквівалентного генератора. Однак таке визначення виявляється громіздким, а тому у складних схемах його визначають як вихідний опір пасивного двополюсника між точками a і b . Для цього в схемі (7.5,б) беруть $E_{екв} = 0$ і тоді $r_{екв}$ є вихідним тепер уже пасивного двополюсника (вхідним опором R_{ax} з боку затискачів a і b).

Рівність $E_{екв} = 0$ відповідає тому, що усї е.р.с. активного двополюсника рівні нулю і тому розрахункова схема для визначення $r_{екв}$ (R_{ax} з боку затискачів a і b) має вигляд схеми (рис. 7.5,а). Для такої схеми:

$$r_{екв} = R_4 + \frac{(R_1 + R_3) R_2}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (7.16)$$

Кількість незалежних вузлових рівнянь складної схеми, що має n вузлів, дорівнює $n - 1$.

Кількість незалежних контурних рівнянь складної схеми, що має m контурів і n вузлів, дорівнює $m - n + 1$.

Струм у будь якій контурі складного лінійного кола дорівнює алгебраїчній сумі струмів, що викликаються у цьому контурі кожною е.р.с. окремо. Метод еквівалентного генератора для визначення струму у досліджуваній вітці ab дає таке його значення:

$$I_{ab} = E_{екв} / (R_{ab} + r_{екв}).$$

Еквівалентна е.р.с., $E_{екв}$ і її внутрішній опір $r_{екв}$ визначаються з режиму холостого ходу і короткого замикання в точках a, b .

7.6 Запитання і задачі для закріплення

1. Методом застосування рівнянь Кірхгофа визначити струми в колі, схема якого зображена на рис. 7.2, коли відомо: $E_1 = 100$ В, $E_2 = 75$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $R_3 = 25$ Ом.

2. Методом накладання визначити струми у вітках схеми (рис. 7.1), коли відомо: $E_1 = 100$ В, $E_2 = 75$ В, $E_3 = 125$ В, $R_1 = R_3 = 20$ Ом, $R_2 = R_7 = 40$ Ом, $R_4 = R_6 = 30$ Ом.

3. Розрахувати струм між точками a і b схеми (рис. 7.5,а), коли $E = 100$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 25$ Ом, $R_4 = 30$ Ом.

4. Що означає проведення аналізу електричного кола?

5. Які вузлові чи контурні рівняння називаються незалежними?

6. Який порядок розрахунку електричного кола за методом накладання?

7. У чому полягає метод еквівалентного генератора?

ЛІТЕРАТУРА

1. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. – М.: Энергия, 1969.
2. Евдокимов Ф.Е. Теоретические основы электротехники. – М.: Высшая школа, 1981.
3. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989.
4. Добротворский И.Н. Теория электрических цепей. – М.: Радио и связь, 1989.
5. Зернов Н.В. Карпов В.Г. Теория радиотехнических цепей. – Л.: Энергия, 1972.
6. Лосев А.К. Теория линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1987.
7. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – М.: Высшая школа, 1981.
8. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985.
9. Попов П.А. Теория связи по проводам. – М.: Связь, 1978.
10. Шебес М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. – М.: Высшая школа, 1982.

Навчальне видання

**Юрій Володимирович Крушевський
Дмитро Володимирович Гаврілов**

**Основи радіоелектроніки
Частина 1**

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Гавріловим Д.В.

Редактор В.О. Дружиніна

Коректор З.В. Поліщук

Науково-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 7.02.08 р. Гарнітура Times New Roman

Формат 29,7x42 $\frac{1}{4}$ Папір офсетний

Друк різнографічний Ум. друк. арк. 9.2

Тираж 75 прим.

Зам. № 2008 - 008

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ