Л.Д. КУДРЯВЦЕВ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Л.Д. КУДРЯВЦЕВ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебника
для студентов физико-математических
и инженерно-физических специальностей вузов

МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.161
К 88
УДК 517(075.8)

Кудрявцев Л.Д. **Краткий курс математического анализа:** Учеб. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 736 с. – ISBN 5-02-013950-5.

Излагаются традиционные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисление функции одного и многих переменных, теория рядов, а также элементы функционального анализа, теории обобщенных функций и гармонического анализа.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов.

Ил. 199.

Рецензенты:
член-корреспондент АН СССР *В.А. Ильин*
кафедра высшей математики Московского энергетического института (заведующий кафедрой член-корреспондент АН СССР *С.И. Похожаев*)

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Заведующий редакцией *А.П. Баева*. Редакторы *В.Н. Седов, М.М. Горячая*
Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*
Технический редактор *С.В. Геворкян*
Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 32829

Сдано в набор 17.03.89. Подписано к печати 07.06.89
Формат 60 X 88/16. Бумага книжно-журнальная
Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная
Усл.печ.л. 45,08. Усл.кр.-отт.45,08. Уч-изд.л. 43,86
Тираж 106000 экз. Тип. зак.907. Цена 1 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство "Наука"
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Типография им. Котлякова
издательства "Финансы и статистика" Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
195273 Ленинград, ул. Руставели, 13

$К \dfrac{1602070000 - 098}{053(02)\text{-}89}$ 48-89

ISBN 5-02-013950-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основе настоящего учебника лежит классический метод изложения материала, характерный для математических дисциплин, т.е. метод, при котором ни одно принципиально важное для построения курса утверждение, требующее доказательства, не остается без такового. Автору представляется, что изложение математической дисциплины, при котором ряд фактов (часто основополагающих) принимается без доказательства, затрудняет изучение предмета и активное использование его в дальнейшем. В качестве оправдания такого "нестрогого" изложения обычно приводится довод о невозможности в отведенные учебным планом часы дать обоснованное изложение всего материала. Однако в высших учебных заведениях, в которых на курс математики отводится 350–510 часов, вопросы математического анализа можно изложить неформально, с общепринятой в математике строгостью. Один из возможных путей такого изложения без отказа от его наглядности и обстоятельности предлагается в данном курсе. В полном объеме весь материал, содержащейся в учебнике, можно подробно в умеренном темпе рассказать за 75 лекций (каждая из двух частей по 40 минут). Это подтверждается многолетним опытом чтения автором курса математического анализа на различных факультетах Московского физико-технического института.

Часть разделов учебника отмечена звездочкой. В этих разделах, во-первых, излагаются вопросы, которые целесообразнее разобрать не на лекциях, а на семинарских занятиях или предоставить студентам самостоятельно ознакомиться с ними; это прежде всего вопросы, касающиеся напоминания некоторых понятий элементарной математики. Во-вторых, в этих разделах излагаются вопросы, которые можно исключить из лекций без нарушения логической завершенности курса, что имеет смысл сделать в том случае, когда эти вопросы не входят в обязательную программу (например, в случае, когда на курс высшей математики отводится 350 часов). К ним относятся счетность рациональных и несчетность иррациональных чисел, теорема о записи действительных чисел бесконечными десятичными дробями, элементы теории функций комплексного переменного, теория обобщенных функций и т.п.

В первую лекцию целесообразно включить пп. 2.1, 2.2, 4.1 и 4.2. Тем самым первая лекция будет завершаться доказательством теоремы о существовании точной верхней грани у ограниченного сверху числового множества, которая является одной из фундаментальных теорем, лежащих в основе математического анализа.

Существенное отличие предлагаемого учебника от большинства других состоит в новом изложении теории пределов функций. В основе этого изложения лежит определение, согласно которому числовая функция f, заданная на множестве X, имеет в точке x_0 предел, равный a, если для любой последовательности $x_n \to x_0$ имеет место $f(x_n) \to a$, $n = 1, 2, \ldots$ При этом допускаются оба случая: $x_0 \in X$ и $x_0 \notin X$, а тем самым при таком определении предела функции не предполагается, что $x_n \neq x_0$. Это упрощает формулировки и доказательства теорем (по сравнению с обычным определением одним условием меньше), что особенно хорошо видно на примере теоремы о пределе сложной функции.

Автор старался отобрать минимальное количество вопросов, которые все вместе составляют логически завершенное изложение курса анализа, изучив который студент сможет активно использовать методы математического анализа как для решения задач, требующих привлечения таких методов, так и для изучения других математических курсов.

Чтобы не отвлекать читателя от основного содержания учебника, иногда опускаются доказательства, представляющие собой техническое усложнение тех, которые имеются в курсе. Например, формула интегрирования по частям доказывается для непрерывно дифференцируемых функций, а для непрерывных кусочно непрерывно дифференцируемых формулируется без доказательства. Лишь для функций многих переменных в отдельных исключительных случаях приводятся без доказательства теоремы в общей формулировке. Это объясняется тем, что доказательства этих теорем существенно сложнее, чем их доказательства не в полной общности, приводимые в тексте книги. Речь идет о замене переменных интегрирования в интегралах любой кратности, теоремах Грина и Остроградского–Гаусса для произвольных областей с кусочно гладкой границей.

Автор выражает свою глубокую благодарность рецензентам книги членам-корреспондентам Академии наук СССР В.А. Ильину (Московский государственный университет) и С.И. Похожаеву, профессору А.М. Седлецкому, доцентам Л.А. Кузнецову, В.П. Пикулину (Московский энергетический институт) и научному редактору доценту В.Н. Седову (Московский физико-технический институт), внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим много полезных замечаний, которые все были учтены при окончательном редактировании текста, что, безусловно, содействовало улучшению предлагаемого учебника.

ГЛАВА 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Функции и множества

1.1. Множества. Напомним некоторые обозначения, часто употребляемые в математике, и дополним их некоторыми новыми, быть может, не встречавшимися раньше читателю. Большими буквами, как правило, будем обозначать множества (A, B, C, X, $Y, \ldots$), а малыми – их элементы (a, b, c, x, y, $z, \ldots$ и т.д.). Запись $A = \{a;\ b;\ c;\ \ldots\}$ означает, что множество A состоит из элементов a, b, $c, \ldots$, а запись $A = \{x\colon \ldots\}$ – что множество A состоит из всех таких элементов x, которые удовлетворяют условию, написанному после двоеточия (двоеточние в этом случае читается "таких, что"). Отметим, что запись $A = \{a\}$ может означать либо, что множество A состоит из одного элемента a, либо, что оно состоит из множества каких-то элементов, каждый из которых обозначен буквой a. Какой именно из указанных двух случаев имеет место, будет всегда ясно из контекста.

Через $a \in A$ и $A \ni a$ обозначается принадлежность элемента a множеству A, а $a \notin A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A.

Для удобства вводится пустое множество, которое обозначается символом ϕ. Пустое множество не содержит элементов.

Символы $A \subset B$ и $B \supset A$ выражают собой включение множества A в множество B (в этом случае множество A называется *подмножеством множества* B), в частности, здесь возможен случай $A = B$. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется *собственным подмножеством множества* B. Символом $A \cup B$ обозначается *объединение множеств* A *и* B, т.е. множество всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B, символом $A \cap B$ – *пересечение множеств* A *и* B, т.е. множество всех элементов, принадлежащих одновременно A и B, символом $A \backslash B$ – *разность множеств* A *и* B, т.е. множество всех элементов, принадлежащих множеству A, но не принадлежащих множеству B (рис. 1).

В случае семейства множеств $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – некоторое множество индексов α, символом $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ обозначается объединение всех множеств A_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, а символом $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha$ – их пересечение.

Вместо слов "существует", "найдется", "имеется" в логических формулах употребляется символ $\exists$ (перевернутая первая буква английского слова "Exist" – "существовать"), называемый символом существования, а вместо "любой", "каждый", "произвольный", "какой бы ни" – символ $\forall$ (перевернутая первая буква английского слова "Any" – "любой" или слова "All" – "все"), называемый символом всеобщности. Так, запись $\exists x$ читается "существует x", а запись $\forall x$ – "любое x", или

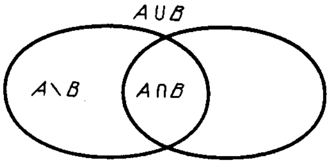


Рис. 1

"для любого x", или "для всех x". Соответственно, запись $\exists x \exists y$ означает "существуют x и y", а запись $\forall x \forall y$ – "любые x и y", или "для любых x и y".

Знак $\Rightarrow$ означает "следует", "вытекает", а знак $\Leftrightarrow$ – "равносильно". В круглые скобки будем заключать утверждение, вытекающее из предшествующих условий (таким образом, в этом случае скобки означают "имеет место").

$$A \subset B \Leftrightarrow \{x \in A \ \ (x \in B)\}$$

означает, что утверждение "множество A содержится в множестве B" равносильно утверждению, что если элемент x принадлежит множеству A, то этот элемент x принадлежит и множеству B.

Символ $\overset{\text{def}}{=}$ означает определение выражения, стоящего слева от знака равенства (def – первые три буквы английского слова "definition", что означает "определение"). Например, определения объединения $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ и пересечения $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ системы множеств A_α можно записать в виде формулы следующим образом:

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{x : \exists \alpha \ (x \in A_\alpha)\}, \quad \bigcap_{\alpha} A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \{x : \forall \alpha \ (x \in A_\alpha)\}.$$

Здесь, как и выше, следствия из условий (в данном случае $\exists \alpha$ и $\forall \alpha$) заключены в круглые скобки.

Определение часто используемого в математике символа $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ для обозначения суммы можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{def}}{=} a_1 + \ldots + a_n.$$

Знак тождества между двумя уже ранее введенными символами означает, что они обозначают один и тот же объект. Например,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \equiv a_1 + \ldots + a_n .$$

Наконец, символами $\triangleright$ и $\triangleleft$ будут отмечаться начала и концы доказательств высказываемых утверждений.

1.2. Функции. Наряду с понятием множества и элемента в математике первичным понятием является понятие соответствия. Это понятие неявным образом присутствует и в понятии множества, поскольку понятие множества предполагает, что каждый элемент данного множества обладает определенным свойством, отличающим его от элементов, не входящих в это множество. Иначе говоря, каждому из рассматриваемых элементов поставлено в соответствие некоторое свойство, позволяющее судить о том, является ли оно элементом данного множества или нет.

Определенный вид соответствий, к которому мы сейчас перейдем, называется функциями.

Пусть заданы непустые множества X и Y. Соответствие, при котором, каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$, называется *функцией,* заданной (определенной) на множестве X со значениями в множестве Y, или *отображением множества X в множество Y*. Такая функция (такое отображение) обозначается с помощью некоторой буквы, например буквы f, одним из следующих способов:

$$y = f(x), x \in X, \text{ или } f\colon X \to Y, \text{ или } f\colon x \mapsto y, x \in X, y \in Y.$$

Наряду с терминами "функция", "отображение" употребляются равнозначные термины "преобразование", "морфизм".

Элемент $x \in X$ называется *независимым переменным,* или *аргументом,* а соответствующий элемент $y \in Y$ – *зависимым переменным.* Множество X называется множеством задания (определения) функции f, а множество тех $y \in Y$, каждый из которых поставлен в соответствие хотя бы одному $x \in X$, – множеством значений функции f и обозначается Y_f. Очевидно, $Y_f \subset Y$. Если $Y_f = Y$, то отображение f называется *отображением X на множество Y*, или *сюръекцией.* Если при $x \neq x'$ выполняется неравенство $f(x) \neq f(x')$, то отображение f называется *взаимно однозначным отображением X в Y*, или *инъекцией.* Если f является взаимно однозначным отображением X на Y, т.е. является одновременно сюръекцией и инъекцией, то оно называется *биекцией.*

Если задано отображение $f\colon X \to Y$, то элементы множеств X и Y часто называют *точками.*

Символом $f(x)$ обозначается как сама функция, так и элемент, соответствующий элементу x при этой функции. Обозначение одним и тем же символом $f(x)$ как самой функции, так и ее значения в точке x не приводит к недоразумениям, так как всегда из контекста ясно, о чем идет речь.

Значение функции f в точке x_0 обозначается также $f(x)\,|_{x_0}$.

Если $f\colon X \to Y$ и E – подмножество множества X, то функция $f_E\colon E \to Y$ – такая, что для каждого $x \in E$ выполняется равенство

$$f_E(x) = f(x), \tag{1.1}$$

называется *сужением функции f на множество E*. Таким образом, сужение f_E функции f принимает в точках x множества E те же значения, что и функция f. Иногда сужение f_E функции f обозначают тем же символом f, что и саму исходную функцию, и называют *функцией f на множестве E*.

Пусть заданы функция $f\colon X \to Y$ и $A \subset X$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in A$, называется *образом множества A при отображении f* и обозначается $f(A)$, т.е.

$$f(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \{y\colon \exists\, x \in A\,(f(x) = y)\}\,. \tag{1.2}$$

В частности, образ множества X есть множество значений функции: $f(X) = Y_f$.

Если $B \subset Y$, то множество всех тех точек $x \in X$, значения функции f в которых принадлежат множеству B, называется *прообразом множества B*. То есть прообразом множества B является множество

$$\{x\colon f(x) \in B\}\,. \tag{1.3}$$

Если $f\colon X \to Y_f$ и каждый элемент $y \in Y_f$ представляет собой множество каких-то элементов z некоторого множества Z, т.е. $y = \{z\}$, причем среди этих множеств $\{z\}$ имеется по крайней мере одно непустое множество, состоящее не из одного элемента, то такая функция называется *многозначной функцией*. При этом элементы z множества $f(x) = \{z\}$ часто также называются *значениями функции f в точке x*.

Если каждое из множеств $f(x)$ состоит только из одного элемента, то функцию f называют *однозначной функцией*.

Обозначим через $P(X)$ множество всех подмножеств множества X. Функция, определенная на множестве $Y_f = f(X)$ значений функции $f\colon X \to Y$, с областью значений, принадлежащей множеству $\mathcal{P}(X)$, и ставящая в соответствие каждому элементу $y \in Y_f$ его прообраз $\{x\colon f(x) = y\}$, называется *обратной к f функцией* и обозначается через $f^{-1}\colon Y_f \to P(X)$. Обратная функция является, вообще говоря, многозначной функцией.

Если отображение f взаимно однозначно (т.е. является инъекцией), то обратная функция является однозначной.

Если отображение f является взаимно однозначным отображением X на Y, то обратное отображение f^{-1} является взаимно однозначным отображением Y на X (т.е. если $f\colon X \to Y$ – биекция, то и $f^{-1}\colon Y \to X$ –

биекция), и поэтому f является в свою очередь функцией, обратной к функции f^{-1}.

Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$, то функция $F\colon X \to Z$, ставящая в соответствие каждому элементу $x \in X$ элемент $F(x) = g(f(x))$, называется *композицией функций* f *и* g (иногда *суперпозицией* этих функций, или *сложной функцией*) и обозначается $g \circ f$. Таким образом, согласно определению для каждого $x \in X$ имеет место равенство

$$(g \circ f)(x) \overset{\mathrm{def}}{=} g(f(x)). \tag{1.4}$$

§ 2. Числа

2.1. Действительные числа. Из элементарной математики известно, что действительные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить и сравнивать по величине. Перечислим основные свойства, которыми обладают эти операции. Множество всех действительных чисел будем обозначать через **R**, а его подмножества называть числовыми множествами.

I. Операция сложения. Для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число, называемое их *суммой* и обозначаемое $a + b$, так что при этом выполняются следующие условия:

I_1. $a + b = b + a$, $a, b \in \mathbf{R}$.

I_2. $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

I_3. Существует такое число, называемое *нулем* и обозначаемое 0, что $a + 0 = a$, $a \in \mathbf{R}$.

I_4. Для любого числа $a \in \mathbf{R}$ существует число, называемое ему *противоположным* и обозначаемое $-a$, для которого $a + (-a) = 0$.

Число $a + (-b)$, $a, b \in \mathbf{R}$, называется *разностью* чисел a и b и обозначается $a - b$.

II. Операция умножения. Для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число, называемое их *произведением* и обозначаемое ab, такое, что выполняются следующие условия:

II_2. $ab = ba$, $a, b \in \mathbf{R}$.

II_2. $a(bc) = (ab)c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$.

II_3. Существует такое число, называемое *единицей* и обозначаемое 1, что $a \cdot 1 = a$, $a \in \mathbf{R}$.

II_4. Для любого числа $a \neq 0$ существует число, называемое ему *обратным* и обозначаемое $\frac{1}{a}$, или $1/a$, для которого $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Число $a \cdot \frac{1}{b}$, $b \neq 0$, называется *частным* от деления a на b и обозначается $a : b$, или $\frac{a}{b}$, или a/b.

III. Связь операций сложения и умножения:

$(a+b)c = ac + bc, \quad a, b, c \in \mathbf{R}.$

IV. Упорядоченность. Для действительных чисел определено отношение порядка. Оно состоит в следующем.

Для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений: либо $a < b$ (читается "a меньше b"), или, что то же самое, $b > a$ (читается "b больше a"), либо $a > b$, или, что то же самое, $b < a$. При этом предполагается, что выполняются следующие условия:

IV_1. Транзитивность. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

IV_2. Если $a < b$, то для любого числа c имеет место $a + c < b + c$.

IV_3. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Соотношения порядка называют также *сравнением* действительных чисел по величине, или *неравенствами*. Запись $a \leqslant b$, равносильная записи $b \geqslant a$, означает, что либо $a < b$, либо $a = b$.

Из выполнения условий IV_2 и IV_3 вытекает одно важное свойство, называемое *плотностью действительных чисел:* для любых двух различных действительных чисел a и b, например таких, что $a < b$, существует такое число c, что $a < c < b$. В самом деле, сложив каждое из равенств $a = a$, $b = b$ с неравенством $a < b$, получим $2a < a + b < 2b$, откуда $a < \dfrac{a+b}{2} < b$, т.е. в качестве числа c можно взять $\dfrac{a+b}{2}$.

Множество действительных чисел обладает еще свойством непрерывности.

V. Непрерывность. Для любых непустых числовых множеств X и Y таких, что для каждой пары чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x \leqslant y$, существует число a, удовлетворяющее условию

$$x \leqslant a \leqslant y, \quad x \in X, \quad y \in Y$$

(рис. 2).

Перечисленные свойства полностью определяют множество действительных чисел в том смысле, что из этих свойств следуют и все остальные его свойства. Поэтому можно дать аксиоматическое определение множества действительных чисел следующим образом.

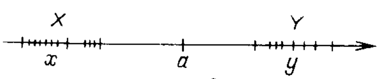


Рис. 2

Определение 1. *Множество элементов, обладающих свойствами* I – V, *содержащее более одного элемента, называется* ***множеством действительных чисел****, а каждый его элемент* – ***действительным числом****.*

Это определение однозначно задает множество действительных чисел с точностью до конкретной природы его элементов. Оговорка о том, что в множестве содержится более одного элемента, необходима потому, что множество, состоящее из одного только нуля, очевидным образом удовлетворяет условиям I – V.

Числа $1,\ 2 \overset{\mathrm{def}}{=} 1+1,\ 3 \overset{\mathrm{def}}{=} 2+1, \ldots$ и т.д. называются *натуральными числами*, и их множество обозначается $\mathbf{N}$. Из определения множества натуральных чисел вытекает, что оно обладает следующим характеристическим свойством: *если*

1) $A \subset \mathbf{N}$,

2) $1 \in A$,

3) *из того, что* $x \in A$, *следует, что* $x + 1 \in A$,

то $A = \mathbf{N}$.

$\triangleright$ Действительно, согласно условию 2) имеем $1 \in A$, поэтому по свойству 3) и $2 \in A$, а тогда, согласно тому же свойству, получим $3 \in A$. Поскольку любое натуральное число n получается из 1 последовательным переходом от предыдущего натурального числа к последующему, то $n \in A$. Тем самым равенство $A = \mathbf{N}$ доказано. $\triangleleft$

На этом свойстве натуральных чисел основан принцип доказательства методом математической индукции. Если имеется множество утверждений, каждому из которых приписано натуральное число (его номер) $n = 1, 2, \ldots$, и если доказано:

1) что справедливо утверждение с номером 1,

2) что из справедливости утверждения с любым номером $n \in \mathbf{N}$ следует справедливость утверждения с номером $n + 1$, то тем самым доказана справедливость всех утверждений, т.е. любого утверждения с произвольным номером $n \in \mathbf{N}$.

Примером доказательства методом математической индукции является доказательство теоремы 1 в п. 2.4.

Числа $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ называют *целыми числами*, их множество обозначают $\mathbf{Z}$.

Числа вида $\dfrac{m}{n}$, где m и n – целые, а $n \neq 0$, называются *рациональными числами*. Множество всех рациональных чисел обозначают $\mathbf{Q}$, т.е.

$$\mathbf{Q} = \left\{ x \in \mathbf{R}:\ x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbf{Z},\quad n \in \mathbf{Z},\quad n \neq 0 \right\}.$$

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными, их множество обозначается $\mathbf{I}$.

Кроме четырех арифметических действий над числами можно производить действия возведения в степень и извлечения корня.

Для любого числа $a \in \mathbf{R}$ и натурального n степень a^n определяется как произведение n сомножителей, равных a:

$$a^n \overset{\mathrm{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

По определению

$$a^0 \overset{\text{def}}{=} 1, \quad a > 0,$$

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0,$$

n – натуральное число.

Пусть $a > 0$, а n – натуральное число. Число b называется *корнем n-й степени* из числа a, если $b^n = a$. В этом случае пишется $b = \sqrt[n]{a}$. Существование и единственность положительного корня любой степени n из любого положительного числа будут доказаны ниже в п. 7.3.

Корень четной степени имеет два значения: если $b = \sqrt[2k]{a}$, $k \in N$, то и $-b = \sqrt[2k]{a}$. Действительно, из $b^{2k} = a$ следует, что $(-b)^{2k} = ((-b)^2)^k = (b^2)^k = b^{2k}$.

Неотрицательное значение корня $\sqrt[n]{a}$ называется его *арифметическим значением.*

Если $r = \dfrac{p}{q}$, где p и q – целые, $q \neq 0$, т.е. r – рациональное число, то для $a > 0$

$$a^{p/q} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[q]{a^p}. \tag{2.1}$$

Таким образом, степень a^r определена для любого рационального числа r.

Степень a^x (число x называется *показателем степени*) для любого действительного числа x получается с помощью непрерывного распространения степени с рациональными показателями (см. об этом в п. 8.2).

Для любого числа $a \in \mathbf{R}$ неотрицательное число

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

называется его *абсолютной величиной,* или *модулем.* Для абсолютных величин чисел справедливы неравенства

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

Они доказываются с помощью свойств I – IV действительных чисел.

2.2. Расширенная числовая прямая. Окрестности. Геометрически множество действительных чисел изображается направленной (ориентированной) прямой, а отдельные числа – точками этой прямой (рис. 3). Поэтому совокупность действительных чисел часто называют числовой прямой, или числовой осью, а отдельные числа – ее точками. В связи с этим иногда вместо $a < b$ (соответственно вместо $b > a$) говорят, что точка a лежит левее точки b (точка b лежит правее точки a).

Часто бывает удобно дополнить множество действительных чисел элементами, обозначаемыми через $+\infty$ и $-\infty$ и называемыми соответственно *плюс бесконечностью* и *минус бесконечностью,* считая при этом по определению, что для любого числа $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$-\infty < x < +\infty. \tag{2.2}$$

Множество действительных чисел $\mathbf{R}$, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, называется *расширенным* множеством действительных чисел (расширенной числовой прямой) и обозначается $\overline{\mathbf{R}}$.

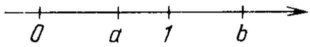


Рис. 3

Иногда бывает удобно дополнить множество действительных чисел $\mathbf{R}$ одним элементом ∞ (бесконечностью без знака), в этом случае бесконечность ∞ уже не связана соотношением порядка с действительными числами. Бесконечности $+\infty$, $-\infty$ и ∞ называются также бесконечно удаленными точками числовой прямой, в отличие от ее остальных точек, которые называются конечными точками числовой прямой.

Напомним определения некоторых важных типов подмножеств расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$. Пусть $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \leqslant b$. Множество

$$[a, b] \overset{\mathrm{def}}{=} \{x:\ x \in \overline{\mathbf{R}},\quad a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *отрезком*, множество

$$(a, b) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x:\ x \in \mathbf{R},\quad a < x < b\}$$

– *интервалом*, множества

$$[a, b) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x:\ x \in \overline{\mathbf{R}},\quad a \leqslant x < b\},$$

$$(a, b] \overset{\mathrm{def}}{=} \{x:\ x \in \overline{\mathbf{R}},\quad a < x \leqslant b\}$$

– *полуинтервалами,* а все они – *промежутками* расширенной числовой оси. Точки a и b называются *концами* этих промежутков, а точки x такие, что $a < x < b$, – их *внутренними точками.* Если a и b – числа, $a \leqslant b$, то число $b - a$ называется *длиной* соответствующего промежутка, а сам промежуток называется *конечным.*

Важным для дальнейшего является понятие окрестности конечной или бесконечно удаленной точки числовой прямой.

Если $a \in \mathbf{R}$, т.е. когда a является действительным числом, то для любого $\epsilon > 0$ ϵ*-окрестностью* $U(a, \epsilon)$ числа a называется интервал $(a - \epsilon,\ a + \epsilon)$, т.е.

$$U(a; \epsilon) \overset{\mathrm{def}}{=} (a - \epsilon,\ a + \epsilon).$$

В случае $a = +\infty$

$$U(+\infty, \epsilon) \overset{\text{def}}{=} (1/\epsilon,\ +\infty],$$

а в случае $a = -\infty$

$$U(-\infty, \epsilon) \overset{\text{def}}{=} [-\infty, -1/\epsilon)$$

(рис. 4).

Таким образом, во всех случаях с убыванием ϵ соответствующая окрестность точки a уменьшается. Всякая ϵ-окрестность конечной или

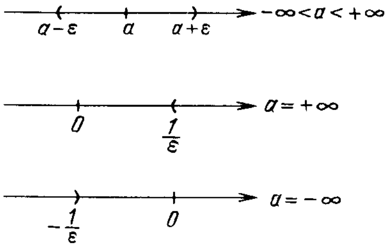


Рис. 4

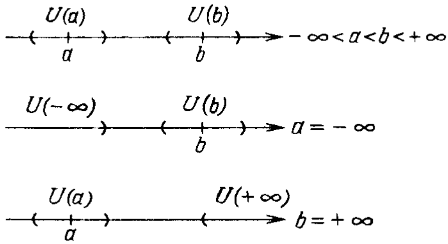


Рис. 5

бесконечно удаленной точки $a \in \overline{\mathbf{R}}$ называется ее окрестностью. Иногда окрестность обозначается просто $U(a)$.

Важным свойством точек расширенной прямой, следующим непосредственно из определения их окрестностей, является то, что *у двух любых различных точек расширенной числовой прямой имеются непересекающиеся окрестности* (рис. 5).

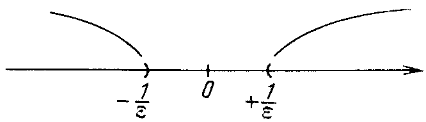


Рис. 6

Нужным бывает и понятие окрестности для бесконечности без знака ∞. Ее ϵ-окрестность, $\epsilon > 0$, определяется равенством (рис. 6)

$$U(\infty, \epsilon) \overset{\text{def}}{=} \{x\colon x \in \mathbf{R},\ |x| > 1/\epsilon\} \cup \{\infty\}.$$

2.3. Комплексные числа. Рассмотрим элементы вида $x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – некоторый элемент, называемый *мнимой единицей* (см. п. 2.3.8).

Элемент $z = x + iy$ называют *комплексным числом*, x – его *действительной*, а y – *мнимой частью* и пишут

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z\ ^{*)}.$$

Два комплексных числа считаются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Вместо $x + i0$ и $0 + iy$ пишут соответственно x и iy, в частности, $0 + i0 = 0$. Число $x + iy$, у которого $y \neq 0$, называют *существенно комплексным числом*, а число вида iy, $y \neq 0$, – *чисто мнимым*.

Множество всех комплексных чисел обозначают через **C**.

2.3.1. Арифметические операции. С помощью операций сложения и умножения действительных чисел в множестве комплексных чисел также можно ввести операции сложения и умножения.

Для комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ их сумма $z_1 + z_2$ определяется как комплексное число, действительная и мнимая части которого получаются в результате сложения соответственно действительных и мнимых частей чисел z_1 и z_2:

$$z_1 + z_2 \overset{\text{def}}{=} (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Для определения произведения комплексных чисел сначала определим квадрат i^2 мнимой единицы:

$$i^2 \equiv ii \overset{\text{def}}{=} -1,$$

а затем – произведение двух произвольных комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ как результат почленного умножения $x_1 + iy_1$ на $x_2 + iy_2$ с использованием соотношения $i^2 = -1$ и последующего сложения полученных результатов:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \overset{\text{def}}{=} x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \qquad (2.3)$$

З а м е ч а н и е. При определении умножения комплексных чисел можно было бы предварительно не определять, что $i^2 = -1$, и не использовать правила почленного умножения, а сразу определить произведение по формуле (2.3). Тогда из нее бы уже следовало, что $i^2 = -1$. В самом деле,

$$ii = (0 + i1)(0 + i1) \underset{(2.3)}{=} -1.$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: $z = z_1 - z_2$, если $z_2 + z = z_1$, а деление – как действие, обратное умножению: $z = z_1/z_2$, $z_2 \neq 0$, если $z_1 = z_2 z$.

Определенные указанным образом арифметические операции над комплексными числами удовлетворяют группам аксиом I, II, III, п. 2.1.

Теперь можно сформулировать более полное и более точное определение множества комплексных чисел **C**.

---

*) От латинских слов realus – действительный, imaginarius – мнимый.

Определение 2. *Множество всех элементов $x + iy$, в котором заданы операции сложения, вычитания, умножения и деления согласно вышесформулированным правилам, называется множеством комплексных чисел, а каждый его элемент — комплексным числом.*

2.3.2. Векторная интерпретация. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел (x, y), и, наоборот, каждой упорядоченной паре действительных чисел (x, y) соответствует комплексное число $z = x + iy$, и эти соответствия взаимно однозначны. С упорядоченными же парами действительных чисел (x, y) на плоскости (при фиксированной системе декартовых координат) находятся во взаимно однозначном соответствии векторы этой плоскости, имеющие числа x и y своими координатами. В результате комплексное число $z = x + iy$ можно рассматривать как вектор на плоскости с координатами x, y. Этот вектор мы будем обозначать той же буквой $z = (x, y)$ (рис. 7).

Целесообразность такой интерпретации комплексных чисел следует из того, что при сложении комплексных чисел складываются и соответствующие им векторы: при сложении векторов их координаты складываются, поэтому суммой векторов $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ является вектор $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, т.е. вектор, соответствующий сумме $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ (рис. 8).

Поскольку вычитание как для комплексных чисел, так и для векторов является действием, обратным сложению, то при вычитании комплексных чисел соответствующие им векторы также вычитаются (рис. 9).

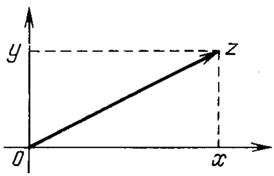


Рис. 7

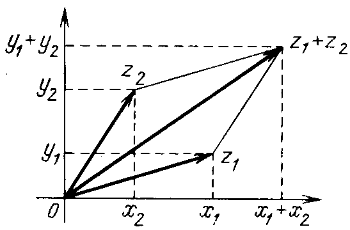


Рис. 8

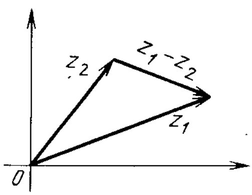


Рис. 9

Координатная плоскость, векторы $z = (x, y)$ которой интерпретируются как комплексные числа, называется комплексной плоскостью, ее ось x – действительной осью, а ось y – мнимой.

Длина $|z|$ вектора $z = (x, y)$ называется *модулем*, или *абсолютной величиной, комплексного числа* $z = x + iy$. Очевидно,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.4}$$

Поскольку длина каждой стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон, а абсолютная величина разности длин двух сторон треугольника не меньше длины третьей стороны, то для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место неравенства (см. рис. 8 и 9)

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|. \tag{2.5}$$

2.3.3. Аргумент комплексного числа. Если φ – угол, образованный ненулевым вектором z с действительной осью, то всякий угол вида $\varphi + 2\pi n$, где n – целое число, и угол только такого вида, также будет углом, образованным вектором z с действительной осью.

Множество всех углов, которые образует ненулевой вектор $z = (x, y)$ с действительной осью, называется аргументом комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $\arg z$. Каждый элемент этого множества называется значением аргумента числа z (рис. 10).

Часто для краткости вместо "значение аргумента" говорят "аргумент" и обозначают его тем же символом $\arg z$, что и все множество (подобно тому, как в теории неопределенных интегралов множество всех первообразных данной функции f обозначается тем же символом $\int f(x)\,dx$, что и произвольный элемент этого множества; см. п. 28.1).

Поскольку ненулевой вектор плоскости однозначно определяется своей длиной и углом, который он образует с осью x, то два комплексных числа, отличные от нуля, равны тогда и только тогда, когда равны их абсолютные величины и аргументы.

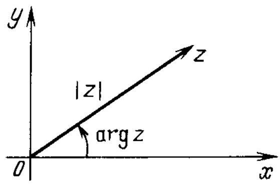


Рис. 10

Если на значения аргумента φ числа z наложить, например, условие $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или условие $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, то значение аргумента будет определено однозначно. Это ограничение, однако, как мы в этом убедимся в дальнейшем, не всегда удобно.

Из определения аргумента следует, что $\operatorname{tg} \varphi = y/x$. Здесь при $x = 0, y \neq 0$ считается $y/0 = \infty$.

2.3.4. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Действительная и мнимая части комплексного числа $z = x + iy \neq 0$ выражаются через его модуль $r = |z|$ и аргумент φ следующим образом:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2.6}$$

Отсюда

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{2.7}$$

Правая часть этого равенства называется *тригонометрической формой записи комплексного числа* z. Мы будем ее употреблять и для $z = 0$: в этом случае $r = 0$, а φ может принимать любое значение – аргумент числа 0 не определен. Итак, всякое комплексное число можно записать в тригонометрической форме.

Ясно также, что если комплексное число z записано в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \geqslant 0$, то число r является его модулем (ибо $r = \sqrt{(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2}$), а φ – одним из значений его аргумента.

2.3.5. Запись операций умножения, деления и возведения в степень в тригонометрической форме. Тригонометрическую форму записи комплексных чисел бывает удобно использовать при перемножении комплексных чисел, в частности, она позволяет выяснить геометрический смысл произведения комплексных чисел. Найдем формулы для умножения и деления комплексных чисел при тригонометрической форме их записи.

Если

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

то по правилу умножения комплексных чисел получим

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] =$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их абсолютные величины перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{2.8}$$

(второе равенство является равенством двух множеств). Отметим, что эту простую формулу для аргумента произведения комплексных чисел нельзя было бы написать, если бы мы с самого начала ограничились однозначным выбором аргументов комплексных чисел, например, с помощью неравенств

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi, \tag{2.9}$$

так как сумма $\arg z_1 + \arg z_2$ могла бы уже не удовлетворять этому неравенству, хотя $\arg z_1$ и $\arg z_2$ ему удовлетворяли.

Применив последовательно формулы (2.8) к произведению n комплексных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, получим

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1|\,|z_2| \ldots |z_n|,$$

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n.$$

В случае $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$ отсюда следует, что

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg z^n = n \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.10)$$

Следует обратить внимание на то, что вторая формула (2.10) представляет собой равенство множеств: если φ – какое-либо значение аргумента числа z и, следовательно, $n\varphi$ – значение аргумента z^n, то левая часть равенства состоит из всех чисел вида

$$n\varphi + 2\pi m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

а правая – из всех чисел вида

$$n(\varphi + 2\pi m) + 2\pi k = n\varphi + 2\pi(nm + k),$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Нетрудно убедиться, что эти два множества состоят из одних и тех же чисел. Отсюда видно, что $\arg z^n \neq n \arg z$, так как здесь правая часть состоит лишь из чисел вида $n(\varphi + 2\pi m) = n\varphi + 2\pi nm$, т.е. таких чисел, которые получаются прибавлением к числу $n\varphi$ не всевозможных чисел вида $2\pi m$, т.е. чисел, кратных 2π, а лишь чисел, кратных числу $2\pi n$.

Отметим еще, что формула (2.10) равносильна утверждению: если $\varphi \in \arg z$, то

$$n\varphi \in \arg z^n. \qquad (2.11)$$

Поэтому, если $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, то

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \qquad (2.12)$$

Отсюда для комплексного числа, абсолютная величина которого равна 1 (следовательно, оно имеет вид $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$), получаем

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Муавра* *).

Если $z = z_1/z_2$, $z_2 \neq 0$, т.е. $z_1 = z_2 z$, то $|z_1| = |z_2|\,|z|$ и $\arg z_1 = \arg z_2 + \arg z$. Таким образом,

$$|z| = |z_1|/|z_2|, \quad \arg z = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Иначе говоря, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

---

*) А. Муавр (1667 – 1754) – английский математик.

2.3.6. Извлечение корня. Если n – натуральное число, $z \in \mathbf{C}$, то *корнем n-й степени* $\sqrt[n]{z}$ из комплексного числа z называется такое число w, что

$$w^n = z. \tag{2.13}$$

Например, числа i и $-i$ являются корнями степени 2 (квадратными корнями) из числа $z = -1$, так как $i^2 = -1$ и $(-i)^2 = -1$. На этом примере уже видно, что число $\sqrt[n]{z}$ определено неоднозначно: для $z = -1$ может быть $\sqrt{-1} = i$, а может быть и $\sqrt{-1} = -i$. При этом, в отличие от области действительных чисел, когда можно было рассматривать положительные и отрицательные значения корня, говорить о знаке корня в комплексной области нельзя, так как существенно комплексные числа не разбиваются на положительные и отрицательные: у существенно комплексного числа нет знака. Поэтому при употреблении записи $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbf{C}$, всегда надо отдавать себе отчет в том, что именно в рассматриваемом случае обозначает собой символ $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$, то

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) \underset{(2.12)}{\overset{}{\underset{(2.13)}{=}}} r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда $\rho = \sqrt[n]{r}$, где корень n-й степени понимается в арифметическом смысле, т.е. $\rho \geqslant 0$, и

$$n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Для того чтобы получить все возможные различные значения корней n-й степени, здесь достаточно ограничиться лишь значениями $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$:

$$\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.14}$$

При остальных значениях k будут получаться значения угла ψ, отличающиеся от одного из значений ψ_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, на кратное числа 2π, а поэтому соответствующее значение корня будет совпадать с одним из чисел

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\psi_k + i\sin\psi_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.15}$$

Таким образом, корень n-й степени из числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n значений w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, для которых справедливы формулы (2.14) и (2.15). Все значения корня $\sqrt[n]{z}$ имеют одинаковые модули $\sqrt[n]{r}$, а аргумент ψ_k корня w_k получается из аргумента ψ_{k-1} корня w_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, так же как и аргумент $\psi_0 = \varphi/n$ корня w_0 – из аргумента ψ_{n-1} корня w_{n-1}, прибавлением числа $2\pi/n$. Отсюда следует, что если начало всех векторов w_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, поместить в начало координат, то их концы будут находиться в вершинах правильного n-угольника. На рис. 11 изображены корни $\sqrt[6]{-1}$.

2.3.7. Сопряженные комплексные числа. Для каждого комплексного числа $z = x + iy$ число $x - iy$ называется ему *сопряженным* и обозначается $\overline{z}$. Геометрический вектор $\overline{z}$ симметричен с вектором z относительно действительной оси (рис. 12).

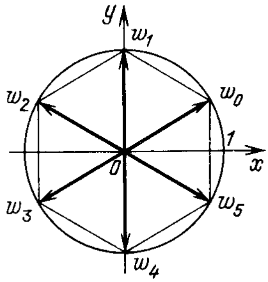


Рис. 11

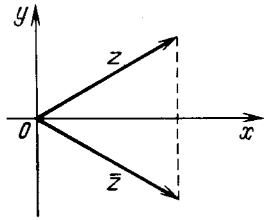


Рис. 12

Перечислим основные свойства сопряженных чисел.

1°. $|\overline{z}| = |z|$, $\arg\overline{z} = -\arg z$.

2°. $z\overline{z} = |z|^2$.

3°. $\overline{\overline{z}} = z$.

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.

5°. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$.

6°. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$.

7°. $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z}_1 / \overline{z}_2$.

Докажем 1°: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{z}|$; если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$,

и потому $\arg\overline{z} = -\arg z$.

Докажем 2°: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Так же просто доказывается $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

Свойства 4° и 5° вытекают из симметричности сопряженных чисел относительно действительной оси (рис. 13 и 14), из которой следует, что число $\overline{z_1 + z_2}$ симметрично с $z_1 + z_2$, а число $\overline{z_1 - z_2}$ симметрично с $z_1 - z_2$.

Проверим теперь, что в формуле 6° абсолютные величины и аргументы чисел, стоящих в левой и правой частях равенства, равны

$$|\overline{z_1 z_2}| \underset{1^\circ}{=} |z_1 z_2| \underset{(2.8)}{=} |z_1||z_2| \underset{1^\circ}{=} |\overline{z}_1||\overline{z}_2| \underset{(2.8)}{=} |\overline{z}_1\overline{z}_2|,$$

$$\arg(\overline{z_1 z_2}) \underset{1^\circ}{=} -\arg(z_1 z_2) \underset{(2.8)}{=} -(\arg z_1 + \arg z_2) =$$

$$= -\arg z_1 - \arg z_2 \underset{1^\circ}{=} \arg\overline{z}_1 + \arg\overline{z}_2 \underset{(2.8)}{=} \arg(\overline{z}_1\overline{z}_2).$$

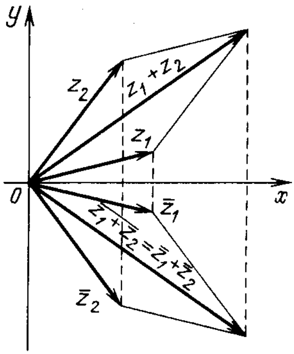


Рис. 13

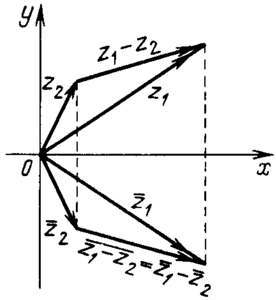


Рис. 14

Аналогично доказывается свойство 7°.

2.3.8. При построении теории комплексных чисел мы исходили из того, что комплексным числом называют объекты вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа, а i – некоторый новый элемент, называемый мнимой единицей. Этому определению можно легко придать строго логическую форму следующим образом.

Назовем комплексным числом упорядоченную пару (x, y) действительных чисел x и y. Операции сложения и умножения для двух комплексных чисел (x, y) и (x', y') определим по формулам

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'), \tag{2.16}$$

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y). \tag{2.17}$$

Комплексные числа вида $(x, 0)$ будем обозначать просто символом x, а комплексное число $(0, 1)$ – символом i. Из формулы (2.17) следует, что

$$i^2 \equiv i \cdot i = (0, 1)(0, 1) \underset{(2.17)}{=} (-1, 0) = -1.$$

Для любого комплексного числа (x, y) имеет место легко проверяемое тождество $(x, y) = x + iy$. В самом деле,

$$(x, y) \underset{(2.16)}{=} (x, 0) + (0, y) \underset{(2.17)}{=} (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Таким образом, мы пришли к первоначальной записи комплексных чисел.

2.4. Перестановки и сочетания. Пусть задано конечное множество элементов. Выясним, сколькими различными способами можно упорядочить элементы этого множества.

Определение 3. *Группы элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются* ***перестановками*** *этих элементов.*

Число всевозможных перестановок n элементов обозначается P_n. Как это будет ниже показано, оно равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Для краткости это произведение обозначают символом $n!$ (читается "эн факториал"), т.е.

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \tag{2.18}$$

Для удобства полагают

$$0! = 1. \tag{2.19}$$

П р и м е р 1. Группы $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ и $\{3, 2, 1\}$ являются всевозможными перестановками элементов 1, 2 и 3.

Л е м м а. *Если P_k – число всех перестановок из k элементов и $k > 1$, то*

$$P_k = kP_{k-1}. \tag{2.20}$$

$\rhd$ Множество всех перестановок из заданных k элементов разбивается на группы, в каждой из которых на первом месте стоит один и тот же элемент. Число таких групп равно k – числу всех элементов.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на последующих $k - 1$ местах могут располагаться оставшиеся $k - 1$ элементов в любом порядке. Поэтому число перестановок в каждой группе равно P_{k-1}.

Каждая перестановка из k элементов попадает в одну из описанных групп и в точности один раз. Поэтому для числа P_k всех перестановок из k элементов имеет место соотношение (2.20). $\lhd$

Т е о р е м а 1. *Число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$:*

$$P_n = n!. \tag{2.21}$$

$\rhd$ Докажем теорему методом математической индукции. Если $n = 1$, то очевидно, $P_1 = 1 = 1!$. Если для некоторого $k \in \mathbf{N}$ имеет место формула $P_k = k!$, то согласно лемме $P_{k+1} \underset{(2.20)}{=} (k + 1)P_k = (k + 1)k! = (k + 1)!$. $\lhd$

Выясним теперь, сколько подмножеств, содержащих m элементов, имеет множество, состоящее из n элементов, $1 \leqslant m \leqslant n$.

О п р е д е л е н и е 4. *Каждое множество, содержащее m элементов из числа n заданных, называется* с о ч е т а н и е м и з n э л е м е н т о в п о m.

Подчеркнем, что сочетание определено как множество некоторых элементов без рассмотрения порядка, в котором они расположены.

Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается C_n^m.

П р и м е р 2. Множества $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 3\}$ образуют всевозможные сочетания из трех элементов 1, 2, 3 по два.

Из определения сочетаний вытекают следующие два свойства.

1°. *Имеет место формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2.22}$$

где

$$C_n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1. \tag{2.23}$$

$\triangleright$ Действительно, если из n элементов выбрать какое-либо сочетание, содержащее k элементов, то элементы, не вошедшие в него, составят сочетание из $n - k$ элементов. Причем таким путем получатся все сочетания из n элементов по $n - k$ и каждое по одному разу. Поэтому число сочетаний из n элементов по k, т.е. C_n^k, равняется числу сочетаний из n элементов по $n - k$, т.е. числу C_n^{n-k}. $\triangleleft$

2°. *Имеет место формула*

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.24}$$

$\triangleright$ Пусть дано $n + 1$ элементов. Зафиксируем один из элементов и разобьем все сочетания по $k + 1$ элементов на две группы: содержащие этот элемент и не содержащие его. Число первых равно C_n^k (ибо, если удалить фиксированный элемент из каждого содержащего его сочетания по $n + 1$ элементов, то получатся всевозможные сочетания из n элементов по k и каждое по одному разу), число вторых равно C_n^{k+1} (ибо они образуют всевозможные сочетания по $k + 1$ элементов из n элементов, получающихся удалением фиксированного элемента из $n + 1$ заданных). Это и означает справедливость формулы (2.24). $\triangleleft$

Докажем теперь формулу для числа всевозможных сочетаний из n элементов по m.

Теорема 2. *Для числа сочетаний имеет место формула*

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}}. \tag{2.25}$$

$\triangleright$ Множество всех перестановок из заданных n элементов разбивается на группы, в каждой из которых на m первых местах стоят одни и те же элементы (в том или ином порядке), а следовательно, и на последних $n - m$ местах также находятся одни и те же элементы. Число таких групп равно числу способов, которыми из данных n элементов можно выбрать m элементов, т.е. равно числу C_n^m.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на m первых местах выбранные элементы могут быть расположены любым способом, а число таких способов равно числу P_m всевозможных перестановок из m элементов. Элементы же, стоящие на $n - m$ последних местах, также могут находиться в любом порядке, т.е. из них может быть образована любая перестановка из $n - m$ элементов, а число таких перестановок равно P_{n-m}.

Таким образом, число перестановок в каждой группе равно $P_m P_{n-m}$, и поскольку число всех групп равно C_n^m, причем каждая перестановка из n заданных элементов входит и только один раз в одну из указанных групп, то для числа всех перестановок P_n получаем формулу

$$P_n = C_n^m P_m P_{n-m},$$

из которой и следует формула (2.25). $\triangleleft$

С л е д с т в и е.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (2.26)$$

▷ Формула (2.26) вытекает из формулы (2.25) в силу равенства (2.21). ◁

Отметим, что формулы (2.22) и (2.24) можно доказать, подставив в них значения сочетаний согласно формуле (2.26) и проведя в случае формулы (2.24) нужные вычисления. Однако приведенные выше доказательства раскрывают смысл формул и дают возможность получить их, не зная заранее, как они выглядят.

Числа C_n^k можно последовательно находить с помощью следующей треугольной таблицы, называемой *треугольником Паскаля**), в которой первые и последние числа во всех строчках равны единице, и, начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

В силу формулы (2.24) в n-й строчке будут стоять числа $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n$.

2.5. Формула бинома Ньютона **). Многочлены, являющиеся суммой двух слагаемых, называются *биномами*. Формула для n-й степени бинома $x + a$:

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + a^n \qquad (2.27)$$

называется формулой *бинома Ньютона.*

Применив символ Σ для обозначения суммы и вспомнив, что $C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу (2.27) можно записать в виде

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k}. \qquad (2.28)$$

---

*) Б. Паскаль (1623–1662) – французский философ, писатель, физик и математик.

**) И. Ньютон (1643–1727) – английский физик, механик, астроном, математик и теолог.

$\triangleright$ Для доказательства (2.28) рассмотрим произведение n биномов

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n). \tag{2.29}$$

Открыв скобки, получим

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n) =$$
$$= x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_1a_2\ldots a_n. \tag{2.30}$$

Коэффициент при x^{n-1} является суммой всевозможных сочетаний из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по одному элементу, поэтому число слагаемых равно C_n^1. Коэффициент у x^{n-2} является суммой всевозможных сочетаний из тех же элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по два элемента, а следовательно, число слагаемых равно C_n^2. Вообще, коэффициент у x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, является суммой всевозможных сочетаний из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по k элементов, и поэтому число таких слагаемых равно C_n^k.

Если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, то из формулы (2.30) следует, что

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1\, ax^{n-1} + C_n^2\, a^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k\, a^k x^{n-k} + \ldots + a^n,$$

т.е. формула (2.27) доказана. $\triangleleft$

Замечание. Положив в формуле (2.28) $x = a = 1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n,$$

а положив $x = 1$, $a = -1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

§ 3. Элементарные функции

3.1. Числовые функции. Если функции принимают числовые значения, то над ними можно производить арифметические операции. Пусть даны две функции $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$, где X – произвольное множество, а Y – подмножество множества комплексных чисел C (в частности, действительных чисел R); тогда значения суммы $f+g$, разности $f-g$, произведения fg и частного $\dfrac{f}{g}$ функций f и g по определению в каждой точке $x \in X$ задаются следующими формулами:

$$(f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x), \qquad (fg)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(x),$$

$$(f-g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)-g(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Конечно, в последней формуле предполагается, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $g(x) \neq 0$.

Значение функции f в точке x_0, как это отмечалось в п. 1.2, обозначается символами $f(x_0)$, $f(x)|_{x_0}$. Символ $f(x)|_a^b$ означает разность значений функции f в точках b и a:

$$f(x)|_a^b \overset{\mathrm{def}}{=} f(b) - f(a). \tag{3.1}$$

Функция f, заданная на подмножестве X числовой прямой, называется *периодической с периодом* $T > 0$, если для любого $x \in X$ выполняются условия

$$x \pm T \in X \text{ и } f(x \pm T) = f(x). \tag{3.2}$$

Значение функции f в точке x_0 называется *наибольшим*, если для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, и *наименьшим*, если имеет место неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Если функция f задана на подмножестве X числовой оси и принимает действительные значения, то ее *графиком* называется множество на координатной плоскости, состоящее из всех точек вида $(x, f(x))$, $x \in X$ (*координатной плоскостью* называется плоскость, на которой задана некоторая прямоугольная декартова система координат).

Если функция $y = f(x)$ и $y = g(x)$ взаимно обратны: $g = f^{-1}$, то их графики симметричны относительно биссектрис первого и третьего координатных углов (эти биссектрисы, очевидно, составляют прямую линию).

В ближайших параграфах будут рассматриваться только функции, у которых как их значения, так и значения их аргументов являются действительными числами (если, конечно, не будет специально оговорено что-либо другое).

3.2. Понятие элементарной функции. Функции: линейная $y = c$ (c – постоянная), степенная $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, показательная $y = a^x$, $a > 0$, логарифмическая $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ называются *основными элементарными функциями*.

Всякая функция f, которая может быть задана с помощью формулы $y = f(x)$, содержащей лишь конечное число арифметических операций над основными элементарными функциями и композиций, называется *элементарной функцией*.

В множестве элементарных функций выделяются следующие классы:

1. *Многочлены* (*полиномы*) – функции вида

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0. \tag{3.3}$$

Если $a_n \neq 0$, то целое неотрицательное число n называется *степенью многочлена* $P(x)$. Функция, тождественно равная нулю, является в силу данного определения многочленом; ей не приписывается никакой степени. Это делается, например, по той причине, что, какую бы степень ни приписать нулевому многочлену, все равно не будет справедливо правило "степень произведения многочленов равна сумме их степеней" (справедливое для ненулевых многочленов; см. п. 3.3*).

Многочлены определены на всей числовой оси.

2. *Рациональные функции* – функции $f(x)$, представимые в виде

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{3.4}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены ($Q(x)$ – ненулевой многочлен). Функция $f(x)$ определена во всех точках числовой оси, кроме тех ее точек, в которых знаменатель $Q(x)$ обращается в ноль.

3. *Иррациональные функции*, т.е. такие функции, не являющиеся рациональными, которые могут быть заданы композицией конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий.

4. *Трансцендентные функции* – элементарные функции, не являющиеся рациональными или иррациональными.

Все перечисленные функции можно рассматривать и в комплексной области (т.е. когда их аргументы и их значения могут быть комплексными числами), но, конечно, в этом случае функции w^z, e^z, $\ln z$, $\sin z$, $\cos z$, $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C}$, требуют специальных определений (см. п. 41.4).

3.3*. Многочлены. Для изучения ряда свойств многочленов в действительной области, т.е. функций вида

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и x – действительные числа, оказывается целесообразным рассмотреть более общие функции: многочлены в комплексной области, т.е. функции вида

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{3.5}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и z – комплексные числа. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называются *коэффициентами многочлена* $P(z)$. Если $a_n \neq 0$, то, как и выше, неотрицательное целое число n называется *степенью многочлена* $P(z)$, который в этом случае обозначают иногда $P_n(z)$.

Два многочлена $P(z)$ и

$$Q(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0 \tag{3.6}$$

равны тогда и только тогда, когда

$$m = n, \ a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ldots, \ a_n = b_n. \tag{3.7}$$

$\triangleright$ В самом деле, если выполняются эти равенства, то ясно, что многочлены (3.5) и (3.6) принимают одинаковые значения при всех $z \in \mathbf{C}$.

Наоборот, пусть при всех z справедливо равенство

$$a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0. \tag{3.8}$$

Без ограничения общности можно предполагать, что $m = n$, так как при $m \neq n$ можно добавить недостающие члены с нулевыми коэффициентами. Перенесем в равенстве (3.8) все члены в одну сторону и положим

$$\lambda_0 = a_0 - b_0, \qquad \lambda_1 = a_1 - b_1, \ldots, \quad \lambda_n = a_n - b_n. \tag{3.9}$$

В результате получим, что для всех $z \in \mathbf{C}$ выполняется равенство

$$\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots + \lambda_n z^n = 0. \tag{3.10}$$

В частности, это равенство имеет место для произвольно фиксированных $n + 1$ значений $z_1, \ldots, z_{n+1}$, отличных друг от друга: $z_i \neq z_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n + 1$. Подставим $z_1, \ldots, z_{n+1}$ в равенство (3.10). Получим систему $n + 1$ линейных уравнений относительно $n + 1$ неизвестных λ_0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\lambda_0 + \lambda_1 z_k + \ldots + \lambda_n z_k^n = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n + 1, \tag{3.11}$$

с определителем

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \ldots & z_1^n \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \ldots & z_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & z_{n+1} & z_{n+1}^2 & \ldots & z_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

Из курса алгебры известно, что этот определитель, называемый *определителем Вандермонда**), равен произведению всевозможных разностей $z_j - z_i$, $j > i$, и, следовательно, не равен нулю. Поэтому система (3.11) имеет единственное решение

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0.$$

Отсюда, в силу формулы (3.9), следует, что для коэффициентов многочленов (3.5) и (3.6) действительно имеют место равенства (3.7). $\triangleleft$

Сумма и произведение двух многочленов являются, очевидно, также многочленами. Чтобы перемножить два многочлена, достаточно перемножить их почленно и полученные результаты сложить:

$$P(z)\,Q(z) \underset{\substack{(3.5)\\(3.6)}}{=} a_n b_m z^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) z^{n+m-1} + \ldots + a_0 b_0.$$

Из этой формулы видно, что если ни один из перемножаемых многочленов ненулевой, то степень их произведения равна сумме их степеней.

---

*) А. Вандермонд (1735–1796) – французский математик.

Если $Q(z)$ — ненулевой многочлен и степень многочлена $P(z)$ не меньше степени многочлена $Q(z)$, то существуют единственные многочлены $S(z)$ и $R(z)$ такие, что

$$P(z) = S(z)Q(z)+R(z), \tag{3.12}$$

где многочлен $R(z)$ — либо нулевой, либо его степень меньше степени многочлена $Q(z)$. При этом степень многочлена $S(z)$ равна разности степеней многочленов $P(z)$ и $Q(z)$.

Многочлен $S(z)$ называется *частным* от деления многочлена $P(z)$ на $Q(z)$, а многочлен $R(z)$ – *остатком.* Если $R(z) = 0$, то говорят, что $P(z)$ *делится на* $Q(z)$.

Существование и единственность многочленов $S(z)$ и $R(z)$, удовлетворяющих соотношению (3.12) при заданных многочленах (3.5) и (3.6), $b_m \neq 0$, можно доказать методом неопределенных коэффициентов.

$\triangleright$ Запишем многочлены $S(z)$ и $R(z)$ в виде

$$R(z)=c_{m-1}z^{m-1}+\ldots+c_1 z+c_0,$$

$$S(z) = c_n z^{n-m}+\ldots+c_{m+1}z+c_m.$$

Подставим эти формулы в равенство (3.12):

$$a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0 =$$
$$=(c_n z^{n-m}+\ldots+c_{m+1}z+c_m)(b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0)+$$
$$+c_{m-1}z^{m-1}+\ldots+c_1 z+c_0, \tag{3.13}$$

произведем почленное умножение, сложим получившиеся результаты, сделаем приведение подобных членов и приравняем коэффициенты в левой и правой частях равенства при одинаковых степенях z. В результате получится система из $n+1$ линейных уравнений относительно $n+1$ неизвестных:

$$c_0,\ c_1, \ldots,\ c_{m-1},\ c_m, \ldots,\ c_n. \tag{3.14}$$

Можно показать, что эта система имеет единственное решение, и даже найти его в явном виде методом математической индукции. В самом деле, для определения коэффициента c_n из равенства (3.13) получаем одно уравнение

$$a_n = c_n b_m, \qquad b_m \neq 0.$$

Далее возможны два случая: $m < n$ и $m = n$. Если $m < n$, то для коэффициента c_{n-1} из равенства (3.13) получается уравнение

$$a_{n-1} = c_{n-1}b_m + c_n b_{m-1},$$

в котором все коэффициенты, кроме c_{n-1}, известны. Если же $m = n$, то $S(z) = c_n$, а $R(z) = c_0+c_1 z+\ldots+c_{n-1}z^{n-1}$, и для коэффициента c_{n-1}

из (3.13) получаем уравнение

$$a_{n-1} = c_n b_{n-1} + c_{n-1}.$$

Таким образом, последовательно и однозначно находятся все коэффициенты (3.14). ◁

3.4. Разложение многочленов на множители

Число $z_0 \in \mathbf{C}$ называется *корнем многочлена* $P(z)$, если

$$P(z_0) = 0.$$

Поделив многочлен $P(z)$ степени n на $z - z_0$ (здесь z_0 — не обязательно корень $P(z)$), получим

$$P(z) = Q(z)(z - z_0) + r, \tag{3.15}$$

где $Q(z)$ — многочлен степени $n - 1$, а остаток от деления r — постоянная: $r \in \mathbf{C}$.

Если в равенстве (3.15) положить $z = z_0$, то получим

$$r = P(z_0), \tag{3.16}$$

т.е. *остаток от деления многочлена* $P(z)$ *на* $z - z_0$ *равняется значению этого многочлена в точке* $z = z_0$. Это утверждение называется *теоремой Безу**).

Если z_0 — корень многочлена $P(z)$, то из равенства (3.16) следует, что $r = 0$. Наоборот, если $r = 0$, то из (3.16) имеем $P(z_0) = 0$. Таким образом, *число* z_0 *является корнем многочлена* $P(z)$ *тогда и только тогда, когда этот многочлен делится на* $z - z_0$.

В курсе алгебры доказывается, что *всякий многочлен степени, равной единице или более высокой, имеет корень* (основная теорема алгебры).

Пусть $P_n(z)$ — многочлен степени $n \geqslant 1$ и z_1 — его корень. Тогда, согласно теореме Безу, многочлен $P_n(z)$ можно представить в виде

$$P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-1}(z),$$

где Q_{n-1} — многочлен степени $n - 1$. При этом либо $Q_{n-1}(z_1) \neq 0$, либо $Q_{n-1}(z_1) = 0$. Во втором случае, снова согласно теореме Безу, многочлен $Q_{n-1}(z)$ можно представить в виде

$$Q_{n-1}(z) = (z - z_1)Q_{n-2}(z),$$

где $Q_{n-2}(z)$ — многочлен уже степени $n - 2$. В результате в этом случае

$$P_n(z) = (z - z_1)^2 Q_{n-2}(z),$$

т.е. многочлен $P_n(z)$ делится на $(z - z_1)^2$.

Целое неотрицательное число k_1 называется *кратностью корня* z_1 *многочлена* $P_n(z)$, если этот многочлен делится на $(z - z_1)^{k_1}$ и не делится на $(z - z_1)^{k_1+1}$.

Однократный корень называется *простым*, а корень кратности, большей единицы, — *кратным*.

*) Э. Безу (1730–1783) — французский математик.

Если z_1 является корнем кратности k_1 многочлена $P_n(z) = a_n z^n + \ldots$ $\ldots + a_1 z + a_0$, то в силу теоремы Безу это означает, что

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), \quad Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0$$

($Q_{n-k_1}(z)$ – многочлен степени $n - k_1$). Согласно основной теореме алгебры многочлен $Q_{n-k_1}(z)$ при $n - k_1 \geqslant 1$ имеет корень. Обозначим его через z_2, и пусть его кратность равна k_2; тогда

$$Q_{n-k_1}(z) = (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z),$$

$$Q_{n-k_1-k_2}(z_2) \neq 0,$$

и, следовательно,

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z).$$

Продолжив последовательно этот процесс, через конечное число шагов (каждый раз степень многочлена понижается) получим

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_N)^{k_N}, \tag{3.17}$$

где $z_j \neq z_l$ при $j \neq l$, $j, l = 1, 2, \ldots, N$. Ясно, что $k_1 + \ldots + k_N = n$. Числа $z_1, z_2, \ldots, z_N$, и только они, являются корнями многочлена $P_n(z)$.

Для многочлена $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ положим

$$\overline{P}_n(z) \overset{\text{def}}{=} \overline{a}_n z^n + \ldots + \overline{a}_1 z + \overline{a}_0.$$

Тогда в силу свойств сопряженных комплексных чисел будем иметь $\overline{P_n(z)} = \overline{P}_n(\overline{z})$.

Если z_0 – корень кратности k для многочлена $P_n(z)$, то $\overline{z}_0$ является корнем той же кратности многочлена $\overline{P}_n(z)$. Действительно, если

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z), \quad Q_{n-k}(z_0) \neq 0,$$

то

$$\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)}, \quad \overline{Q_{n-k}(z_0)} \neq 0,$$

откуда

$$\overline{P}_n(\overline{z}) = (\overline{z} - \overline{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(\overline{z}), \quad \overline{Q}_{n-k}(\overline{z}_0) \neq 0.$$

Это и означает, что $\overline{z}_0$ – корень кратности k многочлена $\overline{P}_n(z)$.

Пусть теперь коэффициенты многочлена $P_n(z)$ – действительные числа. Тогда ясно, что $\overline{P}_n(z) = P_n(z)$, и если $z_0 = a + ib$ – корень кратности k такого многочлена $P_n(z)$, то и $\overline{z}_0 = a - ib$ – корень кратности k этого же многочлена.

В дальнейшем в случае многочлена с действительными коэффициентами будем вместо переменной z писать, как это обычно принято, переменную x.

Заметим, что

$$(x - z_0)(x - \overline{z}_0) = (x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 + b^2 =$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \tag{3.18}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ и, следовательно,

$$\frac{p^2}{4} - q = -b^2 < 0 \tag{3.19}$$

при $b \neq 0$, т.е. когда $z_0 = a + ib$ является существенно комплексным числом.

Теперь мы видим, что если в разложении (3.17) многочлена с действительными коэффициентами объединить скобки с сопряженными корнями согласно формуле (3.18) и обозначить действительные корни $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_r$, то получим разложение вида

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s},$$

или, короче,

$$P_n(x) = a_n \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{k_j} \prod_{l=1}^{s} (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}, \tag{3.20}$$

где

$$\sum_{j=1}^{r} k_j + 2 \sum_{l=1}^{s} m_l = n \tag{3.21}$$

(при перемножении многочленов их степени складываются),

$$\frac{p_l^2}{4} - q_l < 0, \quad l = 1, 2, \ldots, s$$

(это следует из (3.19)), p_l, q_l – действительные числа, а k_j и m_l – натуральные, $j = 1, 2, \ldots, r$, $l = 1, 2, \ldots, s$.

3.5. Рациональные дроби. Как и в случае многочленов, мы рассмотрим рациональные дроби в комплексной области.

Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены с, вообще говоря, комплексными коэффициентами и $Q(z)$ не является нулевым многочленом. Рациональная дробь $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ называется *правильной*, если или $P(z)$ – нулевой многочлен (в этом случае дробь $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ называется нулевой), или его степень меньше степени многочлена $Q(z)$, и *неправильной*, если степень многочлена $P(z)$ не меньше степени многочлена $Q(z)$.

Всякая рациональная дробь является либо правильной, либо неправильной.

Если рациональная дробь $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ – неправильная, то, произведя деление числителя на знаменатель по правилу деления многочленов, т.е. представив числитель в виде

$$P(z) = S(z)Q(z) + R(z),$$

где $S(z)$ и $R(z)$ – некоторые многочлены, причем степень многочлена $R(z)$ (если он не нуль) меньше степени многочлена $Q(z)$, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}.$$

Здесь, в силу уже сказанного, дробь $\dfrac{R(z)}{Q(z)}$ является правильной.

Займемся более подробно изучением правильных рациональных дробей.

Лемма 1. *Если* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *– правильная рациональная дробь и число* $z_0 \in \mathbf{C}$ *является корнем кратности* $k \geqslant 1$ *ее знаменателя, т.е.*

$$Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z), \qquad Q_1(z_0) \neq 0, \tag{3.22}$$

то существуют $A \in \mathbf{C}$ *и многочлен* $P_1(z)$ *такие, что*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}, \tag{3.23}$$

где дробь $\dfrac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q(z)}$ *также является правильной.*

Если коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ – действительные числа и корень a многочлена $Q(z)$ – также действительное число, то в условиях леммы число A и коэффициенты многочленов $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ являются действительными числами.

Отметим, что здесь у многочленов $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ единица является просто индексом, а не их степенью.

$\triangleright$ Каково бы ни было число $A \in \mathbf{C}$, прибавляя к дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P(z)}{(z - z_0)^k Q(z)}$ дробь $\dfrac{A}{(z - z_0)^k}$, а затем вычитая ее, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q(z)} =$$

$$= \frac{A}{(z - z_0)^k} + \left[\frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} - \frac{A}{(z - z_0)^k} \right] =$$

$$= \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P(z) - AQ_1(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)}. \tag{3.24}$$

Если $P(z)$ – ненулевой многочлен, то его степень по условию меньше степени многочлена $Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z)$, а степень многочлена $Q_1(z)$ меньше степени многочлена $Q(z)$, поскольку $Q(z)$ получается из $Q_1(z)$

умножением на многочлен $(z - z_0)^k$, $k \geqslant 1$. Поэтому при любом выборе числа $A \in \mathbf{C}$ (независимо от того, является $P(z)$ нулевым или ненулевым многочленом) дробь

$$\frac{P(z) - AQ_1(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} \tag{3.25}$$

является правильной: либо ее числитель равен нулю, либо его степень меньше степени знаменателя.

Выберем теперь число A так, чтобы число z_0 было корнем многочлена $P(z) - AQ_1(z)$, т.е. так, чтобы

$$P(z_0) - AQ_1(z_0) = 0.$$

Поскольку по условию $Q_1(z_0) \neq 0$, то это равносильно тому, что

$$A = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}. \tag{3.26}$$

При таком выборе числа A, согласно теореме Безу, дробь (3.25) можно сократить на $z - z_0$, в результате чего получится дробь вида

$$\frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}. \tag{3.27}$$

Эта дробь получена сокращением правильной рациональной дроби, поэтому она также является правильной. Заменив в разложении (3.24) дробь (3.25) дробью (3.27), получим формулу (3.23).

Если корень z_0, а также коэффициенты многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ являются действительными числами, то из равенства (3.22) следует, что и многочлен $Q_1(z)$ имеет действительные коэффициенты. Поэтому, в силу формулы (3.26), число A оказывается действительным, откуда следует, что и все коэффициенты многочленов, стоящих в числителе дроби (3.25), – также действительные числа. Следовательно, сокращая эту дробь на множитель $z - a$, имеющий действительные коэффициенты, можно записать результат в виде рациональной дроби, у которой в числителе и знаменателе стоят многочлены с действительными коэффициентами. ◁

Теорема 1. *Если* $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *– правильная рациональная дробь и*

$$Q(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_N)^{k_N}, \tag{3.28}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_N$ *– попарно различные корни многочлена* $Q(z)$, *то существуют такие комплексные числа* $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \ldots, A_j^{(k_j)}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, *что*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{A_j^{(1)}}{z - z_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(z - z_j)^2} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(z - z_j)^{k_j}} \right]. \tag{3.29}$$

$\triangleright$ Применив последовательно k_1 раз лемму 1 к дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ при $z_0 = z_1$, получим

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z-z_1)^{k_1}} + \frac{P_1(z)}{(z-z_1)^{k_1-1}Q_1(z)} = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z-z_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(k_1-1)}}{(z-z_1)^{k_1-1}} +$$

$$+ \frac{P_2(z)}{(z-z_1)^{k_1-2}Q_2(z)} = \ldots = \frac{A_1^{(k_1)}}{(z-z_1)^{k_1}} +$$

$$+ \frac{A_1^{(k_1-1)}}{(z-z_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{z-z_1} + \frac{P^*(z)}{Q^*(z)},$$

где $P^*(z)$ и $Q^*(z)$ – многочлены, причем $\dfrac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ – правильная рациональная дробь и

$$Q^*(z) = (z-z_2)^{k_2} \ldots (z-z_N)^{k_N}.$$

Применив теперь аналогичным образом последовательно k_2 раз лемму 1 к дроби $\dfrac{P^*(z)}{Q^*(z)}$ при $z_0 = z_2$, затем k_3 раз при $z_0 = z_3$ и т.д., k_N раз при $z_0 = z_N$, получим формулу (3.29). $\triangleleft$

Докажем еще одну лемму для правильных рациональных дробей, в числителе и знаменателе которых стоят многочлены с действительными коэффициентами.

Лемма 2. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, причем $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь.*

Если число $z_0 = x_0 + iy_0$, $x_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 \neq 0$, является корнем кратности $m \geqslant 1$ многочлена $Q(x)$, т.е.

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x), \tag{3.30}$$

где

$$Q_1(z_0) \neq 0, \quad x^2 + px + q = (x - z_0)(x - \bar{z}_0), \tag{3.31}$$

то существуют такие действительные числа B, C и многочлен $P_1(x)$ с действительными коэффициентами, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Bx + C}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}, \tag{3.32}$$

где дробь

$$\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)} \tag{3.33}$$

также является правильной.

▷ Для любых действительных B и C имеем

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{(3.30)}{=} \frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)} =$$

$$= \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} + \left[\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)} - \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\right] =$$

$$= \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P(x)-(Bx+C)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}. \tag{3.34}$$

Рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве леммы 1, легко убедиться, что дробь

$$\frac{P(x)-(Bx+C)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)} \tag{3.35}$$

является правильной и что коэффициенты многочленов, стоящих у нее в числителе и знаменателе, являются действительными.

Возьмем теперь B и C такими, чтобы число $z_0 = x_0 + iy_0$ было корнем многочлена

$$P(x) - (Bx+C)Q_1(x), \tag{3.36}$$

т.е. такими, чтобы

$$P(z_0) - (Bz_0 + C)Q_1(z_0) = 0.$$

Поскольку $Q_1(z_0) \neq 0$, то

$$Bz_0 + C = \frac{P(z_0)}{Q_1(z_0)}. \tag{3.37}$$

Пусть $\dfrac{P(z_0)}{Q_1(z_0)} = a + ib$. Тогда равенство (3.37) можно записать следующим образом:

$$B(x_0 + iy_0) + C = a + ib.$$

Приравняв действительные и мнимые части комплексных чисел, стоящих в разных частях этого равенства, получим $B = \dfrac{b}{y_0}$, $C = a - \dfrac{x_0}{y_0}b$. При таком выборе B и C они, во-первых, являются действительными числами, а во-вторых, z_0, а следовательно, и сопряженное ему число $\overline{z}_0$ являются корнями многочлена (3.36). Согласно теореме Безу этот многочлен делится на $x - z_0$ и $x - \bar{z}_0$, а потому и на их произведение $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = x^2 + px + q$. Сократив числитель и знаменатель дроби (3.35) на $x^2 + px + q$, получим правильную рациональную дробь вида (3.33), где $P_1(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами. Подставив эту дробь в равенство (3.34) вместо дроби (3.35), получим разложение (3.32). ◁

Теорема 2. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь,* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{k_j} \prod_{l=1}^{s} (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l},$$

где x_j *– попарно различные действительные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* k_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, *а* $x^2 + p_l x + q_l = (x - z_l)(x - \bar{z}_l)$, *где* z_l *– попарно различные существенно комплексные корни многочлена* $Q(x)$ *кратности* m_l, $l = 1, 2, \ldots, s$, *то существуют такие действительные числа*

$$A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \ldots, A_j^{(k_j)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$B_l^{(1)}, B_l^{(2)}, \ldots, B_l^{(m_l)}, \qquad C_l^{(1)}, C_l^{(2)}, \ldots, C_l^{(m_l)}, \qquad l = 1, 2, \ldots, s,$$

что

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{A_j^{(1)}}{x - x_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(x - x_j)^2} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) + \tag{3.38}$$

$$+ \sum_{l=1}^{s} \left(\frac{B_l^{(1)} + C_l^{(1)} x}{x^2 + p_l x + q_l} + \frac{B_l^{(2)} + C_l^{(2)} x}{(x^2 + p_l x + q_l)^2} + \ldots + \frac{B_l^{(m_l)} + C_l^{(m_l)} x}{(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}} \right).$$

▷ Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1, сначала последовательно применим k_1 раз лемму 1 при $z_0 = x_1$, затем k_2 раз при $z_0 = x_2$ и т.д., k_r раз при $z_0 = x_r$.

В результате получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{A_j^{(1)}}{x - x_j} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(x - x_j)^{k_j}} \right) + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}, \tag{3.39}$$

где числа $A_j^{(1)}, \ldots, A_j^{(k_j)}$ и коэффициенты многочленов $P^*(x)$, $Q^*(x)$ – действительные числа, $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ – правильная рациональная дробь, а

$$Q^*(x) = \prod_{l=1}^{s} (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}.$$

Применив к дроби $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ последовательно m_1 раз лемму 2 при $z_0 = z_1$, затем m_2 раз при $z_0 = z_2$ и т.д., m_s раз при $z_0 = z_s$, получим

$$\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} = \sum_{l=1}^{s} \left(\frac{B_l^{(1)} + C_l^{(1)}x}{x^2 + p_l x + q_l} + \ldots + \frac{B_l^{(m_l)} + C_l^{(m_l)}x}{(x^2 + p_l x + q_l)^{m_l}} \right).$$

Подставив это выражение для $\dfrac{P^*(x)}{Q^*(x)}$ в (3.39), получим доказываемую формулу (3.38). ◁

Рациональные дроби вида $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ и $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$, $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$, называются элементарными, поэтому теоремы 1 и 2 называются теоремами о разложении правильных рациональных дробей на сумму элементарных (соответственно в комплексной и действительной областях).

3.6. Графики рациональных функций. График всякого многочлена степени n с действительными коэффициентами пересекает ось x в тех точках, абсциссы которых являются его действительными корнями и тем самым не более чем в n точках, так как он имеет не более чем n корней.

Поведение многочлена при неограниченном возрастании или неограниченном убывании его аргумента зависит от четности степени многочлена и знака коэффициента при старшем члене. Если n – четное число и коэффициент при старшем члене многочлена больше нуля, то как при неограниченном возрастании аргумента, так и при неограниченном его убывании

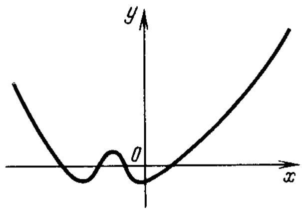


Рис. 15

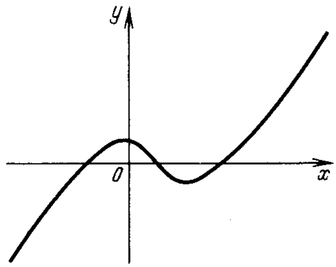


Рис. 16

значения многочлена неограниченно возрастают (рис. 15). Если n – нечетное число, то при положительном коэффициенте при старшем числе многочлена значения многочлена неограниченно растут при неограниченном возрастании аргумента и неограниченно убывают при неограниченном его убывании (рис. 16). Если же коэффициент при старшем члене многочлена отрицателен, то при n четном многочлен неограниченно убывает как при неограниченном возрастании, так и при неограниченном убывании аргумента (рис. 17), а в случае n нечетного многочлен неограниченно убывает при неограниченном возрастании аргумента и неограниченно возрастает при неограниченном его убывании (рис. 18).

Если $P(x)$ – многочлен первого порядка:

$P(x) = ax + b$,

то его графиком является прямая линия. Коэффициент a равен тангенсу

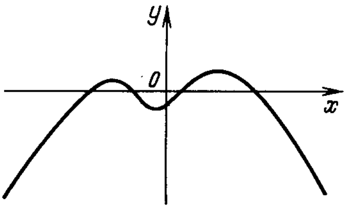


Рис. 17

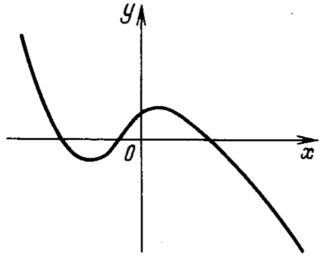


Рис. 18

угла (см. п. 3.9), который эта прямая образует с осью x, а b равно ординате точки пересечения прямой с осью y (рис. 19).

В случае, когда рассматриваемый многочлен является квадратным трехчленом $ax^2 + bx + c$, его график называется параболой. Поскольку

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \tag{3.40}$$

то график функции $y = ax^2 + bx + c$ получается из параболы $y = x^2$ ее переносом на $-\dfrac{b}{2a}$ параллельно оси x, растяжением в $|a|$ раз вдоль оси x, симметрией относительно оси x при $a < 0$ и переносом на $c - \dfrac{b^2}{4a}$ параллельно оси y (рис. 20). Из этого следует, что прямая $x = -\dfrac{b}{2a}$ является

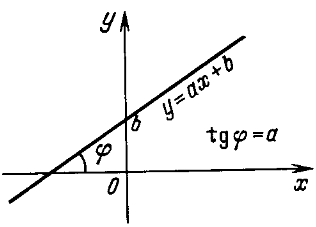


Рис. 19

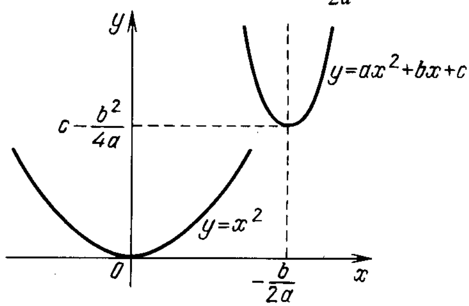


Рис. 20

осью симметрии параболы (3.40), ибо ось y является осью симметрии параболы $y = x^2$. Точка $\left(-\dfrac{b}{2a},\ c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ называется *вершиной параболы* (3.40).

Рациональная функция

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{3.41}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие общих действительных корней (если бы нашелся такой корень x_0, то дробь (3.41) можно было бы сократить на $x - x_0$), обращается в нуль в тех точках, в которых обращается в нуль ее числитель $P(x)$. При этом, если кратность нуля числителя четная, то функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ не меняет знака в его окрестности, а если нечетная, то меняет. В окрестности нулей знаменателя значения рациональной функции неограниченно возрастают по абсолютной величине при приближении к указанным нулям.

Если степень числителя рациональной функции (3.41) больше степени ее знаменателя, то при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента она также неограниченно возрастает по абсолютной величине; если степень знаменателя больше степени числителя, то она неограниченно убывает по абсолютной величине; если же степень числителя равна степени знаменателя, то она неограниченно приближается к отношению коэффициентов при старших членах многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Изучению поведения рациональных функций помогает определение интервалов, на которых рассматриваемая функция (3.41) сохраняет постоянный знак. Все эти соображения полезно использовать при построении графиков рациональных функций.

В качестве примера построим график функции

$$y = \frac{x(x-1)^2}{(x+1)^2(x^2-2)}. \tag{3.42}$$

Эта функция обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$, причем в окрестности нуля она меняет знак, а в окрестности единицы не меняет. В окрестности точек $x = -1$ и $x = \pm\sqrt{2}$ она неограниченно возрастает по абсолютной величине, причем в точках $x = \pm\sqrt{2}$ меняет знак, а в точке $x = -1$ не меняет.

При неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента функция (3.42) неограниченно приближается к нулю. Интервалы, на которых она положительна или отрицательна, изображены на следующей схеме:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y	-0	$-$	∞	$+$	∞	$+$	0	$-$	0	$-$	∞	$+$	$+0$

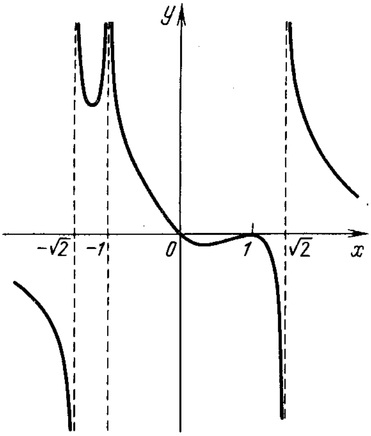


Рис. 21

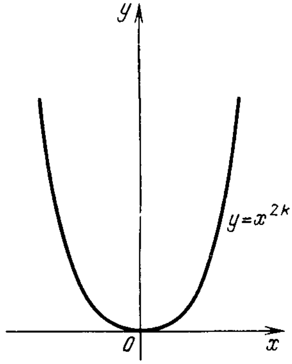


Рис. 22

Проведенные рассуждения позволяют установить общий вид графика функции (3.42) (рис. 21). С помощью дальнейшего исследования этой функции ее график можно нарисовать более точно.

3.7. Степенная функция. Опишем поведение степенной функции $y = x^\alpha$ в случае, когда α – рациональное число (к более подробному изучению степенной функции мы вернемся в дальнейшем; см. п. 8.3).

Рассмотрим сначала функцию $y = x^n$, где n – натуральное число. Эта функция является частным случаем многочлена степени n с n-кратным корнем $x = 0$. Согласно сказанному в п. 3.6 при четном n ее график имеет вид, изображенный на рис. 22, а при нечетном $n > 1$ – на рис. 23.

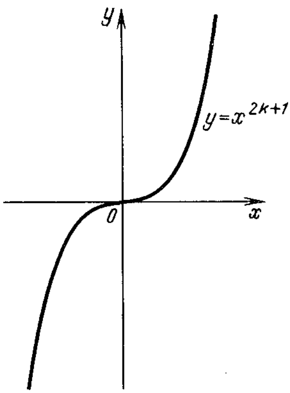


Рис. 23

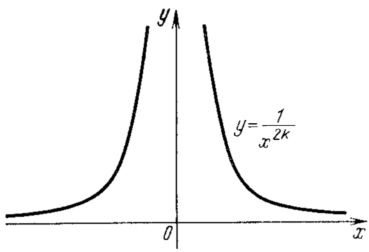


Рис. 24

Функция $y = \dfrac{1}{x^n}$, где снова n – натуральное число, является рациональной функцией, неограниченно возрастающей при приближении ее аргумента к точке $x=0$. Если n – четное число, то ее график имеет вид, изображенный на рис. 24, а если n – нечетное, то на рис. 25.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n – натуральное число, при n нечетном определена на всей действительной оси, а при n четном – только на полуоси $x \geqslant 0$ и принимает при $x > 0$ два значения. Если ограничиться только не-

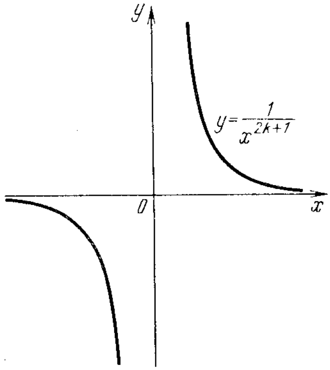


Рис. 25

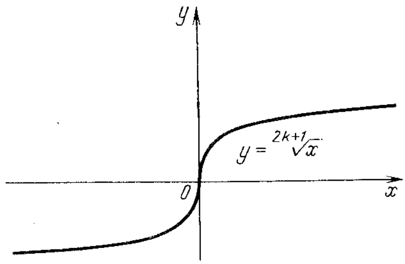


Рис. 26

отрицательными значениями корня, то и при четном n получится однозначная функция.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ является обратной к степенной функции $y = x^n$. Поэтому ее график симметричен относительно биссектрис первого и третьего координатных углов: при нечетном $n > 1$ он имеет вид, изображенный

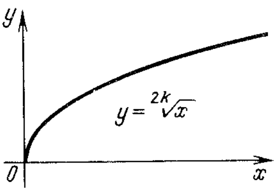


Рис. 27

на рис. 26, а при четном, если ограничиться арифметическими значениями корня, – на рис. 27.

График функции

$$y = x^{p/q}, \qquad x > 0, \tag{3.43}$$

где p и q – целые числа, $p/q > 1$, касается оси x (это естественнее всего доказывается с помощью производной – см. п. 10.3). Если $0 < \frac{p}{q} < 1$, то $q/p > 1$ и, следовательно, в силу сказанного график функции (3.43) или, что то же самое, график функции $x = y^{q/p}$ касается оси y.

Если $p/q > 0$, то при неограниченном возрастании x значение y также неограниченно возрастает. Если $p/q < 0$, то при неограниченном возрастании x значение y неограниченно убывает, а при неограниченном приближении x к нулю y неограниченно возрастает.

При $x < 0$ функция $y = x^{p/q}$ определена не для всех p и q. Если она определена при $x < 0$, то является четной или нечетной функцией, и потому ее график при $x < 0$ получается из ее графика при $x > 0$ с помощью той или иной симметрии.

В качестве примера рассмотрим функцию $y = x^{2/3}$. Здесь $p = 2$, $q = 3$, следовательно, $0 < \frac{p}{q} < 1$ и функция определена при всех x. В силу сказанного выше ее график (он называется *полукубической параболой*) имеет вид, изображенный на рис. 28.

В качестве второго примера рассмотрим функцию $y = x^{-2/3}$. Ее график изображен на рис. 29.

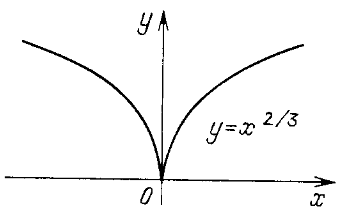


Рис. 28

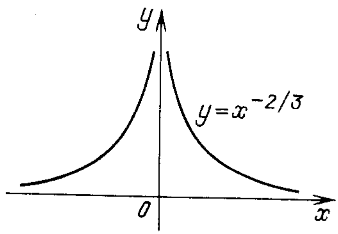


Рис. 29

3.8. Показательная и логарифмическая функции. У степенной функции $y = x^\alpha$ показатель степени постоянен, а основание степени меняется. Функция, у которой постоянно основание степени, а меняется ее показатель, называется *показательной*.

Если $a < 0$, то степень a^x имеет смысл не для всех x. В случае $a = 0$ при $x > 0$ имеет место равенство $0^x \equiv 0$. Поэтому под показательной функцией понимается функция $y = a^x$, где $a > 0$. Она принимает положительные значения при всех значениях x. Если $a = 1$, то $y \equiv 1$. При $x = 0$ показательная функция a^x обращается в 1, так как $a^0 = 1$. Если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает при возрастании аргумента и, следовательно, при $x > 0$ выполняется неравенство $a^x > a^0 = 1$, а при $x < 0$ – неравенство $a^x < a^0 = 1$. При неограниченном убывании аргумента показательная функция в этом случае неограниченно приближается к нулю, а при его неограниченном возрастании также неограниченно возрастает. Если же $a < 1$, то показательная функция убывает при возрастании ее аргумента; она больше единицы при $x < 0$, меньше единицы при $x > 0$ и при неограниченном возрастании аргумента неограниченно приближается к нулю, а при его неограниченном убывании неограниченно возрастает (рис. 30).

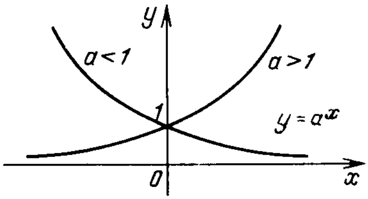


Рис. 30

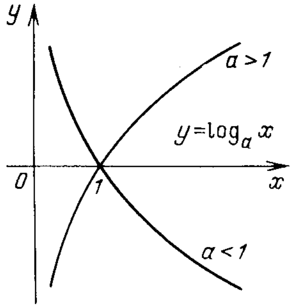


Рис. 31

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то показатель степени α, в который надо возвести число a, чтобы получить число b, называется *логарифмом числа* b *по основанию* a и обозначается $\log_a b$. Таким образом,

$$a^{\log_a b} \overset{\text{def}}{=} b.$$

Функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической функцией*. Она определена при $x > 0$. Функции $y = a^x$ и $x = \log_a y$ взаимно обратны друг другу, ибо $y \equiv a^{\log_a y}$ и $\log_a a^x \equiv x$. Поэтому график функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно биссектрис первого и третьего координатных углов (рис. 31).

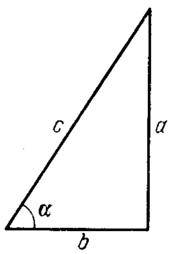
Если $a > 1$, то логарифм $\log_a x$ положителен при $x > 1$ и отрицателен при $0 < x < 1$, а если $0 < a < 1$, то, наоборот, положителен при $0 < x < 1$ и отрицателен при $x > 1$. Если $a > 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ возрастает, причем при неограниченном возрастании аргумента она неограниченно возрастает, а при неограниченном его приближении к нулю она неограниченно убывает. Если же $0 < a < 1$, то логарифмическая функция при возрастании аргумента убывает, причем при его неограниченном возрастании неограниченно убывает, а при его неограниченном приближении к нулю неограниченно возрастает. При любом $a > 0$, $a \neq 1$, имеет место равенство $\log_a 1 = 0$.

3.9. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции. В прямоугольном треугольнике отношение катета, противолежащего данному углу α треугольника, к гипотенузе называется *синусом* $\sin\alpha$ этого угла, а отношение прилежащего катета к гипотенузе – *косинусом* $\cos\alpha$ угла α; отношение противолежащего катета к прилежащему – *тан-*

генсом $\operatorname{tg}\alpha$, а прилежащего к противолежащему – *котангенсом* $\operatorname{ctg}\alpha$ угла α (рис. 32). Из свойств подобных треугольников следует, что синус, косинус, тангенс и котангенс не зависят от размеров треугольника, а однозначно определяются углом α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Легко видеть, что они связаны соотношениями

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{3.44}$$

Для определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса в случае произвольного угла α, $-\infty < \alpha < +\infty$, рассмотрим на координатной плоскости переменных x, y окружность радиуса 1 с центром O в начале координат (рис. 33). Обозначим α угол, который образует вектор $\overline{OA}$, идущий из начала координат в точку $A = (x, y)$, с положительным направлением оси x, иначе говоря, угол, на который надо повернуть единичный вектор оси x, чтобы он совпал с вектором $\overline{OA}$. При этом угол, который получается указанным вращением, считается положительным, если вращение производится против часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой стрелке. Таким образом, угол α, который образует вектор $\overline{OA}$ с осью x, определен с точностью до целого, кратного полному обороту в ту или другую сторону. Следовательно, если α – величина угла в радианной мере,



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Рис. 32

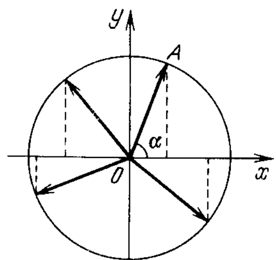


Рис. 33

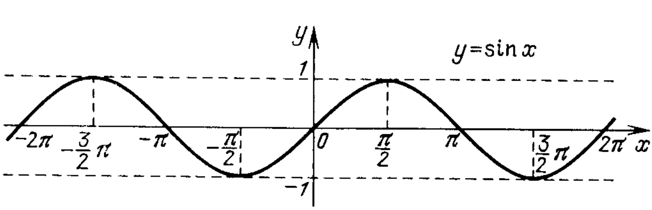


Рис. 34

образованного вектором $\overline{OA}$ с осью x, то при любом целом n угол $\alpha + 2\pi n$ также будет углом, образованным вектором с осью x.

Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то согласно данному выше определению

$$\sin\alpha = x, \qquad \cos\alpha = y. \tag{3.45}$$

Если α – произвольный угол, $-\infty < \alpha < +\infty$, и $\overline{OA}$ – единичный вектор с координатами x, y, образующий угол α с осью x, то формулы (3.45)

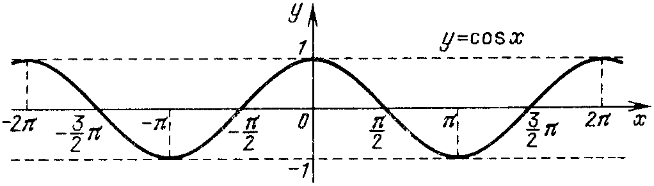


Рис. 35

принимаются за определение значений синуса и косинуса этого угла. Из них следует, что

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha. \tag{3.46}$$

Тангенс и котангенс произвольного угла α определяются по формулам

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi n; \tag{3.47}$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Таким образом, они определены для всех тех α, для которых знаменатели в правых частях равенств (3.47) не обращаются в нуль.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются *основными тригонометрическими функциями*. Из их определения следует, что они являются периодическими функциями: при полном обороте (на $360°$ в градусной мере или на 2π в радианной) в том или ином направлении радиус $\overline{OA}$ займет прежнее положение, т.е. будет иметь те же самые координаты, а следовательно, синус, косинус, тангенс и котангенс примут прежние значения.

Из формул (3.46) и (3.47) следует, что значения тангенса и котангенса будут повторяться и через пол-оборота. Таким образом, синус и косинус являются периодическими функциями с периодом 2π (мы будем пользоваться для измерения углов безразмерной радианной мерой, в которой угол задается действительным числом), а тангенс и котангенс – с периодом π. Их графики изображены на рис. 34–37.

Обратные функции для основных тригонометрических функций являются многозначными. Однако, если функцию синус рассмотреть на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, косинус на отрезке $[0, \pi]$, тангенс на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$,

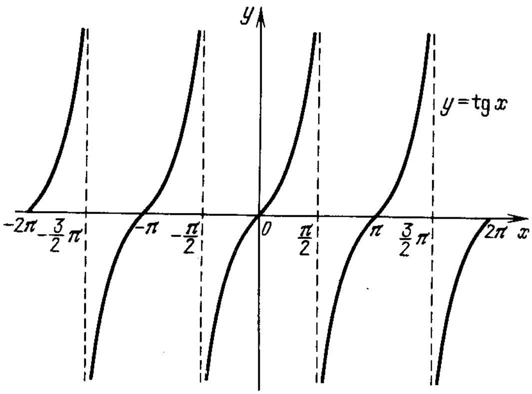


Рис. 36

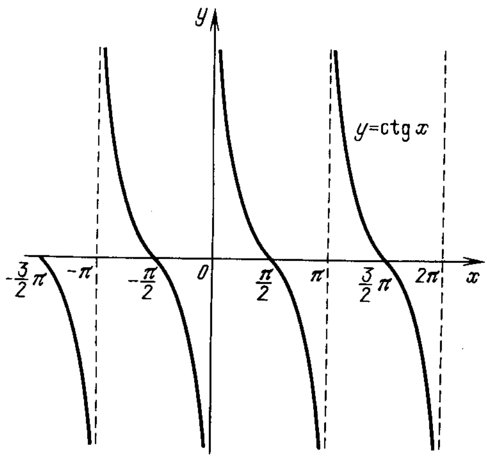


Рис. 37

а котангенс – на интервале $(0, \pi)$, то обратные к ним функции будут уже однозначными и они обозначаются соответственно $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$. Функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены на отрезке $[-1, 1]$, а $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ – на всей числовой прямой. Их графики изображены на рис. 38–41.

3.10. Параллельный перенос и растяжение графиков. Если известен график функции $y = f(x)$, то с его помощью легко получить график функции вида $y = kf(ax + b) + l$. Опишем это построение по этапам.

Из графика функции $f(x)$

1) график функции $f(ax)$, $a > 0$, получается сжатием графика $f(x)$ вдоль оси x в a раз ("сжатие" с коэффициентом a, $0 < a < 1$, является растяжением в $1/a$ раз);

2) график функции $f(-x)$ – преобразованием симметрии относительно оси y;

3) график функции $f(x + b)$ – переносом параллельно оси x на отрезок длины $|b|$ влево, если $b > 0$, и вправо, если $b < 0$;

4) график функции $kf(x)$, $k > 0$, – растяжением вдоль оси y и k раз ("растяжение" с коэффициентом k, $0 < k < 1$, является сжатием в $1/k$ раз);

5) график функции $-f(x)$ – преобразованием симметрии относительно оси x;

6) график функции $f(x) + l$ – переносом параллельно оси y на отрезок длины $|l|$ вверх, если $l > 0$, и вниз, если $l < 0$.

Применив эти операции, из графика функции $f(x)$ можно получить график функции

$$kf(ax + b) + l \equiv kf\left(a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right) + l, \qquad a \neq 0.$$

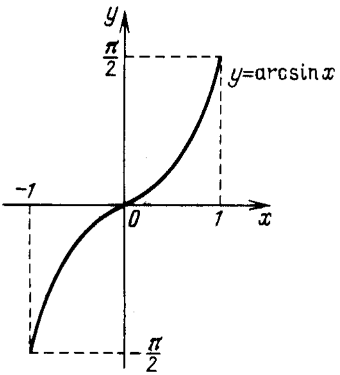


Рис. 38

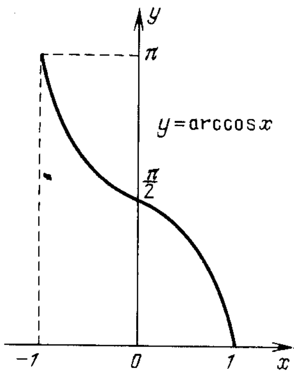


Рис. 39

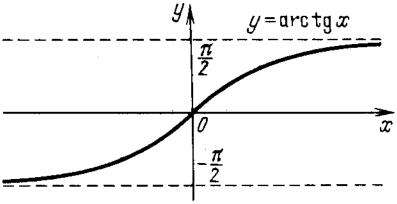


Рис. 40

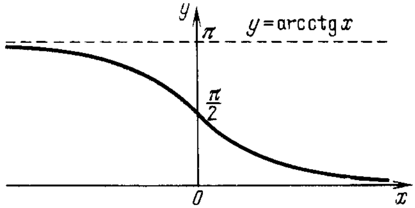


Рис. 41

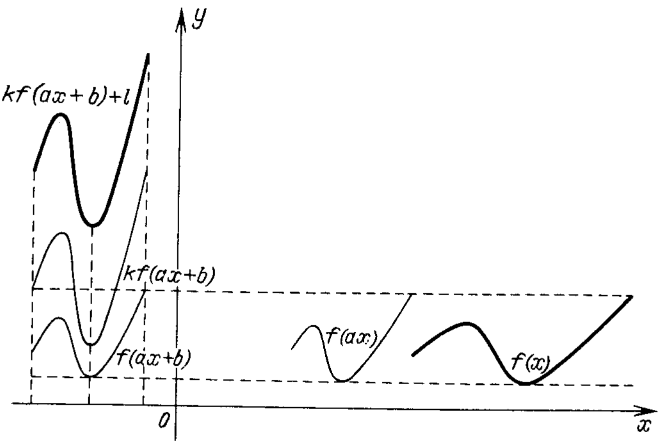


Рис. 42

Для этого согласно указанному выше надо последовательно построить графики функций

$$f(ax),\quad f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)=f(ax+b),\quad kf(ax+b),\quad kf(ax+b)+l$$

(на рис. 42 схематически изображено построение графика функции $kf(ax+b)+l$ в случае, когда $a>0$, $b>0$, $k>0$, $l>0$).

Вместо последовательного построения этих графиков можно сделать преобразование координат: соответствующий параллельный перенос, изменение масштабов, а если надо, и ориентаций координатных осей. Именно,

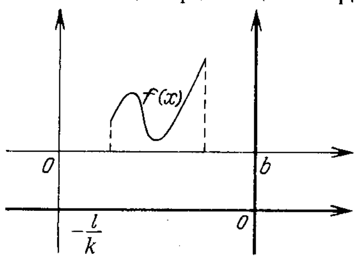


Рис. 43

график самой функции $f(x)$ станет графиком функции $kf(ax+b)+l$, $a\neq 0$, $k\neq 0$, если перенести начало координат в точку $\left(b,\ -\frac{l}{k}\right)$, увеличить масштаб по оси x в $|a|$ раз, уменьшить его по оси y в $|k|$ раз и при $a<0$, соответственно при $k<0$ изменить ориентацию оси x, соответственно оси y (рис. 43).

§ 4. Числовые множества

4.1. Ограниченные и неограниченные множества.

Определение 1. *Множество $X \subset \mathbf{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число $b \in \mathbf{R}$, что для всех $x \in X$ имеет место неравенство $x \leqslant b$. Число b называется в этом случае числом, ограничивающим сверху множество X.*

Множество X называемтся ограниченным снизу, если существует такое число $a \in \mathbf{R}$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant a$.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется просто *ограниченным.*

С помощью логических символов существования и всеобщности определение, например, ограниченного сверху множества можно записать следующим образом:

$$\exists b \in \mathbf{R} \quad \forall x \in X \quad (x \leqslant b) \tag{4.1}$$

(здесь скобки, как и обычно в логических формулах, означают "имеет место" или "выполняется условие").

Множество, не являющееся ограниченным сверху, называется *неограниченным* сверху.

Определение неограниченного сверху множества можно сформулировать и в позитивной форме, т.е. без отрицаний (без частицы "не"), следующим образом: множество X называется неограниченным сверху, если для любого числа $b \in \mathbf{R}$ найдется такой $x \in X$, что $x > b$.

Запишем это определение с помощью логических символов

$$\forall b \in \mathbf{R} \quad \exists x \in X \quad (x > b). \tag{4.2}$$

Сравнивая определения (4.1) и (4.2), видим, что при построении отрицания символ существования заменился на символ всеобщности, а символ всеобщности – на символ существования. Этим формальным правилом можно пользоваться при построении отрицаний в позитивной форме.

Аналогично, множество, не являющееся ограниченным снизу, называется *неограниченным снизу.*

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*, а множество, не являющееся ограниченным, называется *неограниченным.*

Множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ является примером ограниченного снизу множества. Если $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathbf{R}$, то отрезок $[a, b]$ представляет собой ограниченное множество. Множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$, иррациональных $\mathbf{I}$, вообще всех чисел $\mathbf{R}$ дают примеры неограниченных множеств.

4.2. Верхняя и нижняя грани.

Определение 2. *Пусть числовое множество X ограничено сверху. Наименьшее среди всех чисел, ограничивающих сверху множество $X \subset \mathbf{R}$, называется его верхней гранью и обозначается* $\sup X$, *или* $\sup\limits_{x \in X} x$ (*от латинского слова suprетит – наибольший*).

Если числовое множество X ограничено снизу, то наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество X, называется его нижней гранью и обозначается $\inf X$, или $\inf\limits_{x\in X} x$ (от латинского слова infimum – наименьший).

Итак, $\beta = \sup X$, если, во-первых, число β ограничивает сверху множество X, т.е. для всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant \beta$, а во-вторых, число β является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество X (т.е. если $\beta' < \beta$, то число β' уже не ограничивает сверху множество X, а это означает, что существует такое $x \in X$, что $x > \beta'$).

Таким образом, определение верхней грани можно перефразировать в следующем виде.

Определение 2'. *Число β называется верхней гранью числового множества X, если*

1) *для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant \beta$;*

2) *для любого $\beta' < \beta$ существует такой $x \in X$, что $x > \beta'$* (рис. 44).

Аналогично, число α называется нижней гранью числового множества X, если

1) *для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant \alpha$;*

2) *для любого $\alpha' > \alpha$ существует такой $x \in X$, что $x < \alpha'$* (рис. 45).

Если во втором условии положить $\epsilon = \beta - \beta'$ (соответственно $\epsilon = \alpha' - \alpha$), то это условие можно перефразировать следующим образом:

2') *для любого $\epsilon > 0$ существует такой $x \in X$, что $x > \beta - \epsilon$ (соответственно $x < \alpha + \epsilon$).*

Пример. Пусть $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathbf{R}$, $a \leqslant b$; тогда

$$\sup[a, b] = \sup(a, b) = b, \quad \inf[a, b] = \inf(a, b) = a.$$

Эти примеры показывают, в частности, что нижняя и верхняя грани могут как принадлежать, так и не принадлежать самому множеству.

Теорема 1. *Всякое ограниченное сверху непустое числовое множество имеет верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу непустое числовое множество имеет нижнюю грань.*

$\triangleright$ Пусть числовое множество A ограничено сверху, $A \neq \phi$, а B – множество всех чисел, ограничивающих сверху множество A. Если $a \in A$ и $b \in B$,

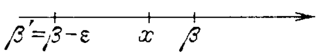


Рис. 44

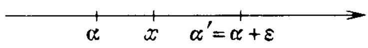


Рис. 45

то из определения числа, ограничивающего сверху множество, следует, что $a \leqslant b$. Следовательно, по свойству непрерывности действительных чисел (п. 2.1, свойство V) существует такое число β, что для всех $a \in A$ и всех $b \in B$ будет выполняться неравенство $a \leqslant \beta \leqslant b$. Неравенство

$$a \leqslant \beta, \quad a \in A,$$

означает, что число β ограничивает сверху множество A, а неравенство

$$\beta \leqslant b, \quad b \in B,$$

– что число β является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество A. Следовательно, $\beta = \sup A$.

Аналогично доказывается, что ограниченное снизу числовое множество имеет нижнюю грань. $\lhd$

Замечание 1. Если числовое множество X неограничено сверху, то у него не существует верхней грани в смысле определения 2. В этом случае по определению полагаем, что верхней гранью множества X является $+\infty$:

$$\sup X \overset{\mathrm{def}}{=} +\infty.$$

Отметим, что при таком определении условия 1) и 2) определения 2′ оказываются выполненными, если использовать соглашение (2.2) (п. 2.2).

Если числовое множество X неограничено снизу, то его нижней гранью называется $-\infty$:

$$\inf X \overset{\mathrm{def}}{=} -\infty.$$

Благодаря этому соглашению и теореме 1 всякое числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань, конечную, если оно ограничено сверху (снизу), и бесконечную, если оно неограничено сверху (снизу).

Замечание 2. Если X – числовое множество и для некоторого числа a и всех $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant a$ (соответственно $x \geqslant a$), то $\sup\limits_{x \in X} x \leqslant a$ $\left(\inf\limits_{x \in X} x \geqslant a\right)$, так как $\sup X$ (соответственно $\inf X$) является наименьшим (наибольшим) среди всех чисел, ограничивающих сверху (снизу) множество X. Иначе говоря, в неравенствах можно переходить к верхним и нижним граням.

4.3*. Арифметические свойства верхних и нижних граней. Отметим три свойства верхних и нижних граней, связанные с арифметическими операциями над числовыми множествами. Прежде всего определим такие операции.

Арифметической суммой $X_1 + \ldots + X_n$ числовых множеств $X_1, \ldots, X_n$ называется множество всех чисел x, представимых в виде

$$x = x_1 + \ldots + x_n, \quad x_1 \in X_1, \ldots, \quad x_n \in X_n.$$

Арифметической разностью $X - Y$ числовых множеств X и H называется множество всех чисел z, представимых в виде

$$z = x - y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Следует, конечно, отличать понятие арифметической суммы $X_1 + \ldots + X_n$ и разности $X - Y$ от понятия теоретико-множественной суммы $X_1 \cup \ldots \cup X_n$ и разности $X \backslash Y$ тех же множеств.

Произведением λX числа λ на числовое множество X называется множество всех чисел вида λx, $x \in X$.

$$1^\circ. \quad \sup(X_1 + \ldots + X_n) = \sup X_1 + \ldots + \sup X_n, \tag{4.3}$$

$$\inf(X_1 + \ldots + X_n) = \inf X_1 + \ldots + \inf X_n. \tag{4.4}$$

$\triangleright$ Если $x \in X_1 + \ldots + X_n$, т.е. $x = x_1 + \ldots + x_n$, $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, то $x_k \leqslant \sup X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно,

$$x = x_1 + \ldots + x_n \leqslant \sup X_1 + \ldots + \sup X_n. \tag{4.5}$$

Пусть теперь

$$y < \sup X_1 + \ldots + \sup X_n. \tag{4.6}$$

Рассмотрим сначала случай, когда все верхние грани $\sup X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – конечные. В этом случае представим число y в виде $y = y_1 + \ldots + y_n$, где

$$y_k < \sup X_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.7}$$

В качестве y_k можно взять

$$y_k \stackrel{\text{def}}{=} \sup X_k - \frac{\epsilon}{n}, \tag{4.8}$$

где

$$\epsilon = \sup X_1 + \ldots + \sup X_n - y > 0. \tag{4.9}$$

Действительно, в этом случае $y_k < \sup X_k$ и

$$y_1 + \ldots + y_n \underset{(4.8)}{=} \left(\sup X_1 - \frac{\epsilon}{n}\right) + \ldots + \left(\sup X_n - \frac{\epsilon}{n}\right) =$$

$$= (\sup X_1 + \ldots + \sup X_n) - \epsilon \underset{(4.9)}{=} y.$$

Из неравенств (4.7) следует, что существуют такие $x_k \in X_k$, что

$$y_k < x_k \leqslant \sup X_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Полагая $x = x_1 + \ldots + x_n$, получим

$$x \in X_1 + \ldots + X_n, \quad x = x_1 + \ldots + x_n > y_1 + \ldots + y_n = y. \tag{4.10}$$

Таким образом, выполняются оба условия определения верхней грани (см. (4.5) и (4.10)), т.е. $\sup X_1 + \ldots + \sup X_n$ действительно является верхней гранью множества $X_1 + \ldots + X_n$.

Пусть теперь хотя бы одна из верхних граней $\sup X_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, – бесконечная, т.е. равна $+\infty$, например, $\sup X_1 = +\infty$. Докажем, что тогда

$$\sup(X_1 + \ldots + X_n) = +\infty = \sup X_1 + \ldots + \sup X_n \text{ *)}.$$

Пусть задано какое-либо $y \in \mathbf{R}$. Зафиксируем произвольно $x_k \in X_k$, $k = 2, \ldots, n$. Тогда из условия $\sup X_1 = +\infty$ следует, что существует такое $x_1 \in X_1$, что $x_1 > y - x_2 - \ldots - x_n$, т.е.

$$x \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_2 + \ldots + x_n > y.$$

*) Мы полагаем, что $a + (+\infty) = +\infty$ для любого числа a.

Так как y – произвольное число, а $x \in X_1 + \ldots + X_n$, то это и означает, что $\sup(X_1 + \ldots + X_n) = +\infty$.

Аналогично доказывается формула (4.4). ◁

2°. *Если* $\lambda > 0$, *то*

$$\sup \lambda X = \lambda \sup X, \tag{4.11}$$

$$\inf \lambda X = \lambda \inf X, \tag{4.12}$$

а если $\lambda < 0$, *то*

$$\sup \lambda X = \lambda \inf X, \tag{4.13}$$

$$\inf \lambda X = \lambda \sup X. \tag{4.14}$$

▷ Пусть $\lambda > 0$. Если $y \in \lambda X$, т.е. $y = \lambda x$, где $x \in X$ и, следовательно, $x \leqslant \sup X$, то $y = \lambda x \leqslant \lambda \sup X$. Если $y < \lambda \sup X$, т.е. $\dfrac{y}{\lambda} < \sup X$, то найдется такое $x \in X$, что $x > \dfrac{y}{\lambda}$ и, следовательно, $\lambda x > y$, где $\lambda x \in \lambda X$. Таким образом, $\lambda \sup X$ является верхней гранью множества λX, т.е. формула (4.11) доказана. Аналогично доказывается и формула (4.12).

Пусть теперь $\lambda < 0$. Если $y \in \lambda X$, т.е. $y = \lambda x$, где $x \in X$ и, следовательно, $x \geqslant \inf X$, то $\lambda x \leqslant \lambda \inf X$. Если $y < \lambda \inf X$, т.е. $\dfrac{y}{\lambda} > \inf X$, то найдется такое $x \in X$, что $x < \dfrac{y}{\lambda}$, а потому $\lambda x > y$, где $\lambda x \in \lambda X$. Это и означает, что $\lambda \inf X$ является верхней гранью множества λX. Равенство (4.13) доказано. Аналогично доказывается равенство (4.14). ◁

Положим теперь для каждого множества X

$$-X \overset{\text{def}}{=} (-1) X. \tag{4.15}$$

Очевидно, что из определения суммы $X + Y$ и разности $X - Y$ множеств следует

$$X - Y = X + (-Y). \tag{4.16}$$

В силу определения (4.15) из второго свойства при $\lambda = -1$ получаем

$$\sup(-X) = -\inf X, \quad \inf(-X) = -\sup X. \tag{4.17}$$

3°. $\sup(X - Y) = \sup X - \inf Y$. $\qquad$ (4.18)

Следует сразу из первого свойства и формул (4.16) и (4.17).

4.4. Принцип Архимеда.

Теорема 2. *Каково бы ни было действительное число a, существует такое натуральное число n, что*

$$n > a.$$

▷ Если бы утверждение теоремы не имело места, то нашлось бы такое число a, что для всех натуральных чисел n, выполнялось бы неравенство $n \leqslant a$, т.е. множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ было бы ограничено сверху. Тогда, согласно теореме 1, у множества $\mathbf{N}$ существовала бы конечная верхняя грань:

$$\beta = \sup \mathbf{N} < +\infty. \tag{4.19}$$

Поскольку $\beta - 1 < \beta$, то в силу определения верхней грани (см. свойство 2°

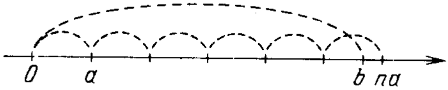


Рис. 46

в определении 2 в п. 4.2) найдется такое натуральное число n, то $n > \beta - 1$, т.е.

$$n + 1 > \beta, \tag{4.20}$$

но $n + 1$ – также натуральное число: $n + 1 \in \mathbf{N}$, поэтому неравенство (4.20) противоречит условию (4.19). ◁

Следствие (принцип Архимеда*)). *Для любых чисел a и b таких, что $0 < a < b$, существует натуральное число n, для которого выполняется неравенство* (рис. 46)

$$na > b. \tag{4.21}$$

▷ Действительно, согласно теореме 2 для числа b/a существует такое натуральное число n, что $n > b/a$, откуда сразу и следует (4.21). ◁

4.5. Принцип вложенных отрезков.

Определение 3. *Система числовых отрезков*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots, \quad a_n \in \mathbf{R}, \quad b_n \in \mathbf{R}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.22}$$

называется системой вложенных отрезков, если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1, \tag{4.23}$$

т.е. если $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ (рис. 47).

Теорема 3. *Всякая система вложенных числовых отрезков имеет непустое пересечение.*

▷ Пусть задана система вложенных отрезков (4.22). Обозначим через A множество всех левых концов a_n отрезков этой системы, а через B – множество их правых концов b_n. Из неравенств (4.23) следует, что для любых номеров m и n выполняется неравенство $a_m \leqslant b_n$. Поэтому по свойству непрерывности действительных чисел (п. 2.1, свойство V) существует такое число ξ, что для всех номеров m и n выполняется неравенство

$$a_m \leqslant \xi \leqslant b_n,$$

---

*) Архимед (287–212 до н.э.) – древнегреческий математик и механик.

в частности неравенство $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Это и означает, что точка ξ принадлежит всем отрезкам $[a_n, b_n]$. ◁

Укажем условие, при котором пересечение системы вложенных отрезков состоит из единственной точки.

Определение 4. *Длины* $b_n - a_n$ *отрезков* $[a_n, b_n]$, $a_n \in \mathbf{R}, b_n \in \mathbf{R}$, $a_n \leqslant b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *называются стремящимися к нулю, если для любого числа* $\epsilon > 0$ *существует такой номер* n_ϵ, *что для всех номеров* $n > n_\epsilon$ *выполняется неравенство*

$$b_n - a_n < \epsilon. \tag{4.24}$$

Теорема 4. *Для всякой системы вложенных отрезков* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, *длины которых стремятся к нулю, существует единственная точка* ξ, *принадлежащая всем отрезкам данной системы; при этом*

$$\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}. \tag{4.25}$$

▷ Если точки ξ и η принадлежат всем отрезкам рассматриваемой системы, т.е.

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad \eta \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots,$$

то ясно, что для всех номеров n выполняются неравенства

$$|\eta - \xi| \leqslant b_n - a_n,$$

а следовательно, в силу условия (4.19) для любого $\epsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|\eta - \xi| < \epsilon. \tag{4.26}$$

Поскольку $\epsilon > 0$ – произвольное число, то это возможно только тогда, когда $\xi = \eta$ (если бы $\xi \neq \eta$, то, например, при $\epsilon = \dfrac{1}{2}|\eta - \xi|$ неравенство

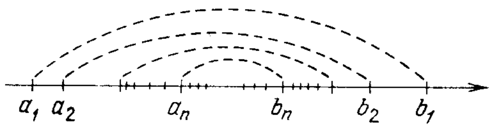


Рис. 47

(4.21) было бы противоречиво). Это означает, что существует единственное число ξ, принадлежащее всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из этих неравенств видно, что число ξ ограничивает сверху числа a_n и снизу числа b_n, поэтому в силу определения верхней и нижней граней справедливы неравенства

$$a_n \leqslant \sup\{a_n\} \leqslant \xi \leqslant \inf\{b_n\} \leqslant b_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.27}$$

Таким образом, числа $\sup\{a_n\}$, ξ и $\inf\{b_n\}$ принадлежат всем отрезкам $[a_n, b_n]$, а следовательно, по доказанному выше они равны, т.е. выполняется условие (4.25). $\lhd$

З а м е ч а н и е 1. Для интервалов и полуинтервалов множества действительных чисел аналог принципа вложенных отрезков не имеет места. Например,

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \phi.$$

З а м е ч а н и е 2. Для множества одних только рациональных чисел принцип вложенных отрезков несправедлив. При этом под отрезком в множестве рациональных чисел понимается пересечение обычного отрезка, концы которого являются рациональными числами, с множеством рациональных чисел:

$$[a, b] \cap \mathbf{Q} = \{x \in \mathbf{Q}:\ a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad a \in \mathbf{Q}, \qquad b \in \mathbf{Q}.$$

Например, пусть числа a_n и b_n представляют собой десятичные приближения числа $\sqrt{2}$ с недостатком и с избытком и имеют по n десятичных знаков после запятой, $n = 1, 2, \ldots$; тогда

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \cap \mathbf{Q} = \phi,$$

так как $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] = \{\sqrt{2}\}$ и $\sqrt{2}$ – иррациональное число: $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

4.6*. Счетность рациональных чисел. Несчетность действительных чисел. Сравнение множеств осуществляется с помощью понятия взаимно однозначного соответствия.

О п р е д е л е н и е 5. *Два множества, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию), называются р а в н о м о щ н ы м и.*

З а м е ч а н и е. Нетрудно убедиться, что если множество X равномощно множеству Y, а множество Y равномощно Z, то и множество X равномощно множеству Z.

Множество X называется *конечным*, если существует такое натуральное число n (называемое *числом элементов множества* X), что между элементами множества X и элементами множества $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, *два конечных множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов.* Пустое множество по определению считается конечным. Множества, не являющиеся конечными, называются *бесконечными.*

Приведем примеры равномощных бесконечных множеств.

П р и м е р ы. 1. Множество четных натуральных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел. Действительно, соответствие $n \mapsto 2n$, $n = 1, 2, \ldots$, является биекцией множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ и множества всех четных натуральных чисел.

2. Множество всех целых чисел равномощно множеству натуральных чисел. В самом деле, соответствие

$$2n \mapsto n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$2n + 1 \mapsto -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

является биекцией множества целых чисел **Z** и множества натуральных чисел **N**.

3. Любые два конечных интервала (соответственно отрезка) числовой прямой равномощны. Если заданы два интервала (a, b) и (c, d), то отображение

$$x = \frac{(d - c)t + bc - ad}{b - a}, \quad a < t < b,$$

является биекцией интервалов (a, b) и (c, d) (соответственно отрезков $[a, b]$ и $[c, d]$).

4. Множество всех действительных чисел **R** равномощно любому конечному интервалу числовой оси. В силу замечания после определения 5 и примера 3 достаточно показать, что множество действительных чисел равномощно хотя бы одному интервалу, поэтому достаточно заметить, что функция $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(-1, 1)$ и точками всей числовой оси.

Примеры 1, 2 и 4 показывают, что в случае бесконечных множеств собственное подмножество бесконечного множества может оказаться равномощным всему множеству.

5. Пусть задано некоторое множество X. Всякое отображение множества натуральных чисел **N** в множество X, т.е. отображение вида $f\colon \mathbf{N} \to X$, называется последовательностью элементов множества X. Элемент $f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, обозначается через x_n и называется n-м членом последовательности $f\colon \mathbf{N} \to X$, число n – его номером, а сам элемент $f(n) \in X$ – значением этого члена.

Последовательность $f\colon \mathbf{N} \to X$ обозначается также $\{x_n\}$, или x_n, $n = 1, 2, \dots$

Отметим, что член последовательности задается его значением и номером. Если $n > m$, то член последовательности x_n называется членом, следующим за членом x_m.

Множество членов последовательности равномощно с множеством натуральных чисел, так как каждому натуральному числу соответствует член последовательности и разным натуральным числам соответствуют разные члены последовательности, отличающиеся друг от друга по крайней мере номерами. Таким образом, множество членов последовательности всегда бесконечно, в то время как множество значений членов последовательности, т.е. множество значений функции $f\colon \mathbf{N} \to X$ (иначе говоря, подмножество множества X, на которое посредством отображения f отображается множество N натуральных чисел), может оказаться конечным множеством, в частности состоять из одного элемента. В последнем случае, т.е. тогда, когда у последовательности все значения ее элементов совпадают, она называется *стационарной.*

Определение 6. *Множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется счетным.*

Из рассмотренных выше примеров 1, 2 и 5 следует, что множества всех четных чисел, всех целых чисел и всех членов любой последовательности являются счетными.

Пусть X – счетное множество, т.е. существует взаимно однозначное отображение множества натуральных чисел N на множество X. Элемент множества X, соответствующий при этом отображении числу n, обозначим, как и в случае последовательности, x_n и будем называть число n его номером. Поэтому можно сказать, что множество является счетным, если его элементы можно перенумеровать натуральными числами. Отличие определения счетного множества от последовательности состоит в том, что в случае последовательности рассматриваемое отображение множества натуральных чисел не обязано быть биекцией: не исключается случай, когда разным натуральным числам окажется поставленным в соответствие один и тот же элемент. Отсюда следует, что множество значений членов последовательности либо конечно, либо счетно, т.е., как говорят, не более чем счетно.

Лемма 1. *Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

$\triangleright$ Пусть X – бесконечное множество; тогда оно во всяком случае непусто, т.е. в нем существует по крайней мере один элемент; обозначим его через x_1. Поскольку множество X бесконечно, то множество $X\backslash\{x_1\}$ также непусто, т.е. содержит по крайней мере один элемент; обозначим его x_2. Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим элемент x_n. Поскольку X – бесконечное множество, то множество $X\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ непусто, т.е. содержит по крайней мере один элемент; обозначим его x_{n+1} и т.д. Множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ – искомое счетное подмножество множества X. $\triangleleft$

Лемма 2. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

$\triangleright$ Пусть X – счетное множество: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $Y \subset X$. Обозначим через y_1 элемент из Y, имеющий наименьший номер в X, через y_2 – элемент множества Y, имеющий следующий ближайший номер, и т.д. Поскольку каждый элемент множества Y является некоторым элементом x_n множества X и, следовательно, имеет номер n, то через конечное число шагов (не большее, чем n) он получает некоторый номер m и в множестве Y, т.е. будет обозначен y_m, причем, поскольку множество Y бесконечно, то этот процесс может быть продолжен неограниченно. Таким образом, все элементы множества Y окажутся занумерованными, что и означает счетность этого множества. $\triangleleft$

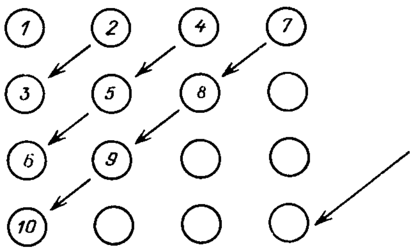
Теорема 5. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

▷ Расположим все рациональные числа в таблицу, содержащую бесконечное число строк и столбцов, следующим образом:

0	1	-1	2	-2	...
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
....	....	....	....	....	....
$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	....	....	....	....
....	....	....	....	....	....

Здесь в n-ю строчку помещены рациональные числа, записываемые несократимыми рациональными дробями со знаменателем n и упорядоченные по возрастанию их абсолютных величин, причем непосредственно за каждым положительным числом следует ему противоположное. Очевидно, что каждое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице.

Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме, в которой в кружочках стоят номера соответствующих элементов, а стрелки указывают направление нумерации:



В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т.е. множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел счетно. ◁

Возникает естественный вопрос, существуют ли несчетные множества, т.е. бесконечные множества, не являющиеся счетными, а если существуют, то интересно построить пример несчетного множества.

Лемма 3. *Любой отрезок множества действительных чисел состоит из несчетного множества точек.*

▷ Допустим противное: пусть точки некоторого отрезка $[a, b]$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, можно занумеровать: $[a, b] = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Выберем какой-либо отрезок $[a_1, b_1]$, лежащий на $[a, b]$ и не содержащий точки x_1 (рис. 48):

$$x_1 \notin [a_1, b_1] \subset [a, b].$$

Далее выберем отрезок $[a_2, b_2]$, лежащий на $[a_1, b_1]$ и не содержащий точки x_2 и т.д. Таким образом, если выбран отрезок $[a_n, b_n]$, то выберем отрезок $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, лежащий на $[a_n, b_n]$ и не содержащий точки x_{n+1}. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, такую, что

$$x_n \notin [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.28}$$

Следовательно, ни одна точка x_n не принадлежит пересечению $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, но согласно принципу вложенных отрезков (см. п. 4.5,

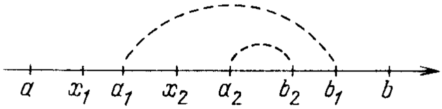


Рис. 48

теорема 3) существует точка; обозначим ее ξ, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$:

$$\xi \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.29}$$

а поэтому и отрезку $[a, b]$, ибо $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ А так как все точки отрезка $[a, b]$ по предположению перенумерованы, то точка ξ также должна иметь какой-то номер, т.е. существует такое натуральное число n_0, что $\xi = x_{n_0}$, и тогда согласно (4.29) получим

$$x_{n_0} \in [a_n, b_n], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.30}$$

В частности, $x_{n_0} \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$, а это противоречит условию (4.28). $\lhd$

Теорема 6 (Кантор*)). *Множество всех действительных чисел несчетно.*

$\rhd$ Если бы множество всех действительных чисел было счетным, то было бы счетным, согласно лемме 2, и любое его подмножество, в частности любой отрезок, что противоречит лемме 3. $\lhd$

§ 5. Предел числовой последовательности

5.1. Определение предела числовой последовательности. Одним из важнейших понятий математического анализа является понятие предела. Начнем его изучение с предела последовательности действительных чисел. Напомним (см. п. 4.6*, пример 5), что последовательностью $\{x_n\}$ элементов некоторого множества X называется отображение множества натуральных чисел в это множество X. Образ при этом отображении натурального числа n (член последовательности с номером n) в множестве X обозначается

*) Г. Кантор (1845–1918) – немецкий математик.

через x_n. В частности, последовательностью действительных чисел является "занумерованное" натуральными числами некоторое множество x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ действительных чисел, причем члены последовательности с разными номерами могут иметь одно и то же значение. Примерами последовательностей являются $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ и $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ В дальнейшем в этом параграфе буквой n всегда обозначаются натуральные числа.

Под бесконечно удаленной точкой числовой прямой будем понимать одну из бесконечностей $+\infty$, $-\infty$ или ∞ (см. п. 2.2).

Определение 1. *Конечная или бесконечно удаленная точка числовой прямой называется* ***пределом*** *некоторой числовой последовательности действительных чисел, если, какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого номера.*

Этот номер зависит, вообще говоря, от выбора окрестности точки a. Сформулированное условие равносильно тому, что вне любой окрестности точки a находится лишь конечное число членов рассматриваемой последовательности. Вспомнив, что окрестности конечных и бесконечно удаленных точек числовой прямой определяются заданием некоторого числа $\epsilon > 0$ (п. 2.2), определение предела последовательности действительных чисел можно перефразировать следующим образом.

Точка a (конечная или бесконечно удаленная) числовой прямой называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ члены x_n содержатся в окрестности $U(a; \epsilon)$:

$$x_n \in U(a; \epsilon), \qquad n > n_\epsilon. \tag{5.1}$$

Если выполняется это условие, то пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (а иногда пишут $x_n \to a$, $n = 1, 2, \ldots$), и говорят, что члены последовательности $\{x_n\}$ стремятся к a.

С помощью логических символов существования и всеобщности определение предела записывается следующим образом:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, n_\epsilon \;\; \forall\, n > n_\epsilon \;\; (x_n \in U(a; \epsilon)). \tag{5.2}$$

Если предел последовательности действительных чисел является конечной точкой числовой прямой, т.е. числом, то говорят, что последовательность *имеет конечный предел*.

Определение 2. *Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она называется* ***сходящейся***.

Для случая конечного предела определение 1 предела можно перефразировать следующим образом.

Число a является пределом последовательности $\{x_n\}$ действительных чисел, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \epsilon. \tag{5.3}$$

В логических символах эта формулировка выглядит следующим образом:

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ \forall n > n_\epsilon \ (|x_n - a| < \epsilon). \tag{5.4}$$

Очевидно, что неравенство (5.3) равносильно неравенству

$$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon. \tag{5.5}$$

Аналогичным образом формулируются и определения предела числовой последовательности в случае, когда этот предел является той или иной бесконечно удаленной точкой (или, как говорят, равен бесконечности).

Например, согласно определению (5.2) ∞ является пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ выполняется включение

$$x_n \in U(\infty; \epsilon), \tag{5.6}$$

или, что то же самое, неравенство

$$|x_n| > 1/\epsilon. \tag{5.7}$$

В логических символах это утверждение записывается следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ \forall n > n_\epsilon \ (|x_n| > 1/\epsilon). \tag{5.8}$$

Аналогичным образом определение предела последовательности перефразируется для случая, когда этот предел равен бесконечности со знаком. Для краткости ограничимся записью этих определений только с помощью логических символов:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ \forall n > n_\epsilon \ (x_n > 1/\epsilon),$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ \forall n > n_\epsilon \ (x_n < -1/\epsilon).$$

Заметим, что если ϵ – произвольное положительное число, то и $1/\epsilon$ – также произвольное положительное число.

Очевидно, что если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$, или $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$, то и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Определение 3. *Последовательность, пределом которой является бесконечность (со знаком или без знака), называется бесконечно большой.*

П р и м е р ы. 1. Последовательность $x_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится и имеет своим пределом нуль. Действительно, каково бы ни было $\epsilon > 0$, согласно принципу Архимеда существует натуральное n_ϵ, большее, чем $1/\epsilon$, т.е. $n_\epsilon > 1/\epsilon$ и, следовательно, $1/n_\epsilon < \epsilon$, а тогда для всех натуральных $n > n_\epsilon$ имеет место неравенство

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

Таким образом, при $n > n_\epsilon$ выполняется условие

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon,$$

а это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

2. Последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, не имеет предела, так как, какое бы число a ни взять, вне любой его ϵ-окрестности при $\epsilon < 1$ будет находиться бесконечно много членов указанной последовательности.

3. Последовательность $x_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, – бесконечно большая, и $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 = +\infty$. В самом деле, согласно принципу Архимеда для любого $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число n_ϵ, что $n_\epsilon > 1/\epsilon$. Для любого же номера $n > 1$, очевидно, имеет место неравенство $n^2 > n$, поэтому при $n > n_\epsilon$ выполняется условие

$$n^2 > n > n_\epsilon > 1/\epsilon,$$

т.е. если $n > n_\epsilon$, то $n^2 > 1/\epsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 = +\infty$.

4. Докажем, что если $a > 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a^n} = 0. \tag{5.9}$$

$\triangleright$ В самом деле, положим $\alpha = a - 1$, тогда $\alpha > 0$ и по формуле бинома Ньютона

$$a^n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^n > n\alpha. \tag{5.10}$$

Для любого $\epsilon > 0$ существует такое n_0, что $n_0 > \dfrac{1}{\alpha\epsilon}$. Поэтому для всех $n > n_0$ имеем

$$a^n \underset{(5.10)}{>} n\alpha > n_0\alpha > \frac{1}{\alpha\epsilon} \cdot \alpha = \frac{1}{\epsilon} \tag{5.11}$$

и

$$\frac{1}{a^n} < \epsilon. \tag{5.12}$$

А это по определению предела и означает справедливость равенств (5.9).

Определение предела числовой последовательности обобщается на последовательности точек расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, т.е. числовой

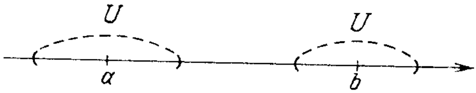


Рис. 49

прямой, дополненной отрицательной $-\infty$ и положительной $+\infty$ бесконечностями (п. 2.2). По форме оно полностью совпадает с определением 1.

Определение 4. *Точка a расширенной числовой прямой называется* **пределом** *последовательности точек этой прямой, если, какова бы ни была окрестность точки a, она содержит все члены рассматриваемой последовательности, начиная с некоторого номера.*

Отличие от вышерассмотренного случая состоит в том, что здесь членами последовательности могут быть не только действительные числа, но и бесконечности со знаком.

Конечно, понятие предела можно обобщить и на случай последовательности точек прямой, расширенной с помощью только одной бесконечно удаленной точки – бесконечности без знака, однако в дальнейшем у нас такие последовательности не будут встречаться.

5.2. Единственность предела последовательности. Докажем теорему о единственности предела последовательности.

Теорема 1. *Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$ может иметь на этой прямой только один предел.*

▷ Допустим противное. Пусть существует такая последовательность $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$. Возьмем какие-либо непересекающиеся окрестности $U = U(a)$ и $V = V(b)$ точек a и b (рис. 49): $U \cap V = \phi$. Согласно определению предела вне окрестности U точки a, в частности в окрестности V точки b, содержится лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Однако точка b также является ее пределом, и потому в ее окрестности V должны находиться все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, а следовательно, бесконечно много ее членов. Получилось противоречие. ◁

5.3. Переход к пределу в неравенствах. Сформулируем и докажем три часто используемых свойства пределов последовательностей точек расширенной числовой прямой, связанные с равенствами и неравенствами для членов последовательностей.

1°. *Если для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *имеет место равенство* $x_n = a \in \overline{\mathbf{R}}$, *то* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

$\triangleright$ Действительно, в этом случае для любой окрестности $U(a)$ точки a в качестве номера n_ϵ, указанного в определении предела последовательности, можно взять $n_\epsilon = 1$, так как для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место включение

$$x_n = a \in U(a). \ \triangleleft$$

2°. *Если* $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $y_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $z_n \in \overline{\mathbf{R}}$,

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.13}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} z_n = a \in \overline{\mathbf{R}}, \tag{5.14}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a. \tag{5.15}$$

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно окрестность $U(a)$ точки a. В силу условий (5.14) существует такой номер n_1, что для всех номеров $n > n_1$ выполняется включение

$$x_n \in U(a), \tag{5.16}$$

и такой номер n_2, что для всех номеров $n > n_2$ выполняется включение

$$z_n \in U(a). \tag{5.17}$$

Положим $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда при $n > n_0$ будут одновременно выполняться включения (5.16) и (5.17), а следовательно, $[x_n, z_n] \subset U(a)$

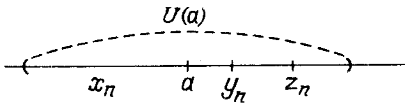


Рис. 50

(рис. 50). Но в силу условия (5.13) $y_n \in [x_n, z_n]$, поэтому для всех $n > n_0$ будет выполняться включение

$$y_n \in U(a),$$

а это и означает справедливость утверждения (5.15). $\triangleleft$

Следствие. *Если* $x_n \leqslant y_n$, $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $y_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty, \tag{5.18}$$

то

$$\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty, \tag{5.19}$$

а если $\lim_{n \to \infty} y_n = -\infty$, *то* $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$.

$\triangleright$ Пусть выполнено условие (5.18). Рассмотрим вспомогательную последовательность $z_n = +\infty$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда, очевидно, для последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ выполняются условия (5.13) и (5.14) при $a = +\infty$, а поэтому в силу (5.15) имеет место и равенство (5.19). Аналогично рассматривается и случай $\lim_{n \to \infty} y_n = -\infty$. $\triangleleft$

3°. *Если* $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $y_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b, \tag{5.20}$$

и

$$a < b, \quad a \in \overline{\mathbf{R}}, \quad b \in \overline{\mathbf{R}}, \tag{5.21}$$

то существует такой номер n_0, *что для всех номеров* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$x_n < y_n. \tag{5.22}$$

$\triangleright$ Пусть $U = U(a)$ и $V = V(b)$ – какие-либо непересекающиеся окрестности точек a и b (см. рис. 49); тогда из условия $a < b$ следует, что для любых $x \in U$ и $y \in V$ выполняется неравенство

$$x < y. \tag{5.23}$$

В силу условия (5.20) существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняются включения

$$x_n \in U, \quad y_n \in V, \tag{5.24}$$

а поэтому согласно (5.23) имеют место неравенства (5.22). $\triangleleft$

Следствие 1. *Пусть* a, b *и* x_n, $n = 1, 2, \ldots$, *принадлежат* $\overline{\mathbf{R}}$. *Если* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ *и* $a < b$ $(a > b)$, *то существует такой номер* n_0, *что для всех номеров* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$x_n < b \quad (\text{соответственно } x_n > b). \tag{5.25}$$

$\triangleright$ Пусть $a < b$. Расмотрим вспомогательную последовательность $y_n = b$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ выполняются условия (5.20) и (5.21), а следовательно, и условие (5.22), которое в данном случае превращается в (5.25). Аналогично рассматривается случай $a > b$. $\triangleleft$

Следствие 2. *Если* $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim_{n \to \infty} y_n = b$, $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $y_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, *и для всех* $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется*

неравенство

$$x_n \geqslant y_n, \tag{5.26}$$

то

$$a \geqslant b. \tag{5.27}$$

$\triangleright$ Пусть выполнено условие (5.26). Если бы оказалось, что $a < b$, согласно свойству 3° нашелся бы такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполнялось бы неравенство

$$x_n < y_n,$$

что противоречит условию (5.26). Следовательно, выполняется неравенство (5.27). $\triangleleft$

Из следствия 2, в частности, вытекает, что если $x_n \geqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то имеет место неравенство $a \geqslant b$.

$\triangleright$ В самом деле, если взять вспомогательную стационарную последовательность $y_n = b$, $n = 1, 2, \ldots$, то для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ будут выполняться условия следствия 2, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \overline{\mathbf{R}}$, $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $n = 1, 2, \ldots$, и для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливы неравенства

$$x_n \geqslant b = y_n.$$

Поэтому согласно следствию 2 имеет место и неравенство

$$a \geqslant b. \triangleleft \tag{5.28}$$

Следствие 2 означает, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют пределы $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$, $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $b \in \overline{\mathbf{R}}$, то в неравенствах $x_n > y_n$ и $x_n \geqslant y_n$ можно переходить к пределу, причем даже в первом случае в результате получается, вообще говоря, нестрогое неравенство

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \geqslant \lim_{n \to \infty} y_n = b.$$

П р и м е р. Если для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется включение $x_n \in U(a, 1/n)$, $x_n \in \mathbf{R}$, где либо $a \in \mathbf{R}$, либо $a = \infty, +\infty$ или $-\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

$\triangleright$ В самом деле, если $a \in \mathbf{R}$, то условие $x_n \in U(a, 1/n)$ равносильно условию $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, а так как $|x_n - a| \geqslant 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то согласно свойству 2° имеет место равенство $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - a| = 0$. Отсюда сразу и следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Если $a = \infty$, то условие $x_n \in U(a, 1/n)$ равносильно условию $|x_n| > n$. Отсюда в силу следствия из свойства 2° имеем $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = +\infty$. Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

Аналогично рассматриваются случаи $a = +\infty$ и $a = -\infty$. $\lhd$

В дальнейшем в этом параграфе будут рассматриваться только последовательности, все члены которых являются числами, т.е. только числовые последовательности, а не последовательности элементов расширенной числовой прямой, как это делалось выше.

5.4. Ограниченность сходящихся последовательностей.

Определение 5. *Числовая последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если множество ее значений ограничено сверху (снизу).*

Иначе говоря, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху (снизу), если существует такое число $c \in \mathbf{R}$, что для всех номеров n выполняется неравенство $x_n \leqslant c$ (соответственно неравенство $x_n \geqslant c$).

Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется *ограниченной*.

Таким образом, числовая последовательность $\{x_n\}$ ограничена, если существуют такие числа $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathbf{R}$, что для всех номеров n выполняется условие $a \leqslant x_n \leqslant b$. Это условие, очевидно, равносильно тому, что существует такое число $c > 0$, что для всех номеров n имеет место неравенство

$$|x_n| \leqslant c.$$

Последовательность, не являющаяся ограниченной сверху (снизу), называется *неограниченной сверху (снизу)*, а последовательность, не являющаяся ограниченной, называется *неограниченной*. Примером неограниченных последовательностей являются бесконечно большие последовательности (см. п. 5.1, определение 3). Следует заметить, однако, что не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой. Так, последовательность

$$x_n = (-1)^n n - n$$

— неограниченная, но не бесконечно большая.

Теорема 2. *Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

$\rhd$ Пусть последовательность $x_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbf{R}$. Тогда согласно определению предела последовательности (см. п. 5.1, определение 1) существует такой номер n_1, что для всех номеров $n > n_1$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - a| < 1 \tag{5.29}$$

(в определении предела последовательности можно взять любое $\epsilon > 0$; мы взяли $\epsilon = 1$, рис. 51). Обозначим через d наибольшее из чисел 1,

$|x_1 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|$. Тогда, очевидно, в силу условия (5.29) для всех $n \in \mathbf{N}$ будет иметь место неравенство

$$a - d \leqslant x_n \leqslant a + d.$$

Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. $\lhd$

5.5. Бесконечно малые последовательности. Над числовыми последовательностями можно производить арифметические операции. Определим их.

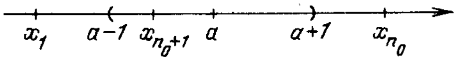


Рис. 51

Определение 6. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — числовые последовательности. Тогда числовая последовательность $\{x_n + y_n\}$ называется их суммой $\{x_n\} + \{y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$ — их разностью $\{x_n\} - \{y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ — их произведением $\{x_n\}\{y_n\}$, а если для всех номеров n выполняется неравенство $y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ называется частным $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}}$ данных последовательностей.*

Если λ — действительное число, то *произведением $\lambda\{x_n\}$ числовой последовательности $\{x_n\}$ на число λ называется последовательность $\{\lambda x_n\}$.* Таким образом, получается тот же результат, что и от умножения стационарной последовательности $\{\lambda\}$ на последовательность $\{x_n\}$:

$$\lambda\{x_n\} = \{\lambda x_n\} = \{\lambda\}\{x_n\}.$$

Определение 7. *Числовая последовательность, предел которой равен нулю, называется бесконечно малой.*

Рассмотрим свойства бесконечно малых.

1°. *Любая конечная линейная комбинация бесконечно малых является бесконечно малой.*

$\rhd$ Пусть числовые последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0, \tag{5.30}$$

а λ и μ — какие-либо действительные числа. Покажем, что последовательность $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ — также бесконечно малая. Зададим произвольно $\epsilon > 0$ и возьмем какое-либо число c такое, что

$$c > |\lambda| + |\mu|. \tag{5.31}$$

Тогда, согласно определению предела, из (5.30) следует, что существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняются неравенства

$$|\alpha_n| < \epsilon/c, \quad |\beta_n| < \epsilon/c \tag{5.32}$$

и, следовательно, неравенство

$$|\lambda\alpha_n + \mu\beta_n| \leqslant |\lambda||\alpha_n| + |\mu||\beta_n| \underset{(5.32)}{<} \frac{|\lambda| + |\mu|}{c}\epsilon \underset{(5.31)}{<} \epsilon.$$

Это и означает, что

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0,$$

т.е. что последовательность $\{\lambda\alpha_n + \mu\beta_n\}$ — бесконечно малая. Соответствующее утверждение для любой конечной линейной комбинации бесконечно малых следует из доказанного методом математической индукции. ◁

2°. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность является бесконечно малой.*

▷ Пусть

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0 \tag{5.33}$$

и $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, т.е. существует такое $c > 0$, что для всех номеров n выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant c. \tag{5.34}$$

Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$, тогда, согласно определению предела, из условия (5.33) следует, что существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|\alpha_n| < \epsilon/c, \tag{5.35}$$

а следовательно, и неравенство

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n||x_n| \underset{(5.34),\,(5.35)}{<} \frac{\epsilon}{c} \cdot c = \epsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n x_n = 0$, т.е. что последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ — бесконечно малая. ◁

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой.*

▷ Если $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = 0$, то последовательность $\{\beta_n\}$, имея конечный предел, является ограниченной последовательностью. Поэтому произведение $\{\alpha_n \beta_n\}$ бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ можно рассматривать как произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность и, следовательно, согласно свойству 2° это произведение является бесконечно малой последовательностью.

Соответствующее утверждение для любого конечного числа бесконечно малых последовательностей получается из данного методом математической индукции. ◁

5.6. Свойства пределов, связанные с арифметическими действиями над числовыми последовательностями. Бесконечно малые последовательности играют в теории пределов особую роль, так как понятие конечного предела последовательности можно в определенном смысле свести к понятию бесконечно малой. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 1. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, равный числу a, тогда и только тогда, когда последовательность*

$$\alpha_n = x_n - a, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

является бесконечно малой:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0. \tag{5.36}$$

▷ Пусть заданы числовая последовательность $\{x_n\}$ и число a. Если $\alpha_n = x_n - a$, то условие $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ согласно определению предела последовательности равносильно тому, что для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \epsilon$, т.е. неравенство $|\alpha_n| < \epsilon$, а это равносильно тому, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, т.е. тому, что последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая. ◁

Рассмотрим свойства пределов числовых последовательностей.

1°. *Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то сходится и последовательность $\{|x_n|\}$, причем, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то*

$$\lim_{n \to \infty} |x_n| = |a|. \tag{5.37}$$

▷ Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \epsilon$, а поскольку $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a|$, то выполняется и неравенство

$$||x_n| - |a|| < \epsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (5.37). ◁

2°. *Конечная линейная комбинация сходящихся последовательностей также является сходящейся последовательностью, и ее предел равен такой же линейной комбинации пределов данных последовательностей.*

▷ Пусть

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b \in \mathbf{R}. \tag{5.38}$$

Тогда в силу необходимости условий (5.36) для существования соответствующих конечных пределов члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.39}$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые:

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0. \tag{5.40}$$

Пусть теперь λ и μ – какие-либо числа. Тогда члены последовательности $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ представимы в виде

$$\lambda x_n + \mu y_n \underset{(5.39)}{=} \lambda a + \mu b + \lambda \alpha_n + \mu \beta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.41}$$

где последовательность $\{\lambda \alpha_n + \mu \beta_n\}$ в силу бесконечной малости последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – также бесконечно малая (см. свойство 1° бесконечно малых последовательностей в п. 5.5):

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n) \underset{(5.40)}{=} 0. \tag{5.42}$$

Поэтому в силу достаточности условий (5.36) для существования соответствующего конечного предела из равенств (5.41) следует, что последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ имеет предел, равный $\lambda a + \mu \beta$:

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b,$$

или (см. (5.38))

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n \to \infty} x_n + \mu \lim_{n \to \infty} y_n. \tag{5.43}$$

Соответствующее утверждение для любой конечной линейной комбинации сходящихся последовательностей получается из доказанного методом математической индукции. $\lhd$

3°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их произведение $\{x_n y_n\}$ также сходится:*

$$\lim_{n \to \infty} x_n y_n = \lim_{n \to \infty} x_n \lim_{n \to \infty} y_n, \tag{5.44}$$

т.е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей.

$\rhd$ Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b \in \mathbf{R}$; тогда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0.$$

Поэтому

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n \beta_n), \tag{5.45}$$

причем последовательность $\{b\alpha_n + a\beta_n\}$ – бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, а последовательность $\{\alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малая как произведение тех же последовательностей, поэтому бесконечно малой является и их сумма $\{b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n) = 0. \tag{5.46}$$

Из равенств (5.45) и (5.46) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n. \lhd$$

С л е д с т в и е. *Если последовательность $\{x_n\}$ – сходящаяся и m – натуральное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^m = (\lim_{n\to\infty} x_n)^m.$$

Это непосредственно следует из свойства 3°, так как возведение числа в целую положительную степень m сводится к повторному умножению на это число m раз.

4°. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, для всех номеров n имеет место неравенство $y_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},$$

т.е. при сделанных предположениях предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

$\rhd$ Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$, $y_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Из условия $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ согласно свойству 1° следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |b|$. Поскольку $|b| > 0$ (ибо $b \neq 0$) и $0 < \dfrac{|b|}{2} < |b|$, то согласно следствию 1 из свойства 3° пределов последовательностей (п. 5.3) существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|y_n| > |b|/2$ и, следовательно, неравенство

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \tag{5.47}$$

(поскольку все $y_n \neq 0$, то на y_n можно делить).

Теперь имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n). \tag{5.48}$$

Здесь последовательность $\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right\}$ ограничена, ибо для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{b(b+\beta_n)}\right| = \frac{1}{|b||y_n|} \underset{(5.47)}{<} \frac{2}{|b|^2},$$

а последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ — бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Поэтому бесконечно малой является и последовательность $\left\{\frac{1}{b(b+\beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)\right\}$ как произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую.

Следовательно, из равенства (5.48) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \ \triangleleft$$

5.7. Монотонные последовательности.

О п р е д е л е н и е 8. *Верхняя (нижняя) грань множества значений числовой последовательности $\{x_n\}$ называется* в е р х н е й (н и ж н е й) *гранью этой последовательности и обозначается* $\sup\{x_n\}$ (*соответственно* $\inf\{x_n\}$).

Иначе говоря, если $x_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, *и если*

$\beta = \sup\{x_n\}$,

то

1) *для всех* $n \in \mathbf{N}$ *имеет место неравенство* $x_n \leqslant \beta$;

2) *для любого* $\beta' < \beta$ *существует такое* $n_0 \in \mathbf{N}$, *что* $x_{n_0} > \beta'$.

Аналогично, если $\alpha = \inf\{x_n\}$, *то*

1) *для всех* $n \in \mathbf{N}$ *имеет место неравенство* $x_n \geqslant \alpha$;

2) *для любого* $\alpha' > \alpha$ *существует такое* $n_0 \in \mathbf{N}$, *что* $x_{n_0} < \alpha'$.

П р и м е р ы. 1. $\sup\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1$, $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.

2. $\sup\{n\} = +\infty$, $\inf\{n\} = 1$.

О п р е д е л е н и е 9. *Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется* в о з р а с т а ю щ е й (у б ы в а ю щ е й), *если для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ (соответственно неравенство $x_n \geqslant x_{n+1}$).*

Возрастающая (убывающая) последовательность обозначается $x_n \uparrow$ (соответственно $x_n \downarrow$). Если возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, равный a, то пишут $x_n \uparrow a$ (соответственно $x_n \downarrow a$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ (соответственно неравенство $x_n > x_{n+1}$).

Строго возрастающая (строго убывающая) последовательность обозначается $x_n \uparrow\uparrow$ (соответственно $x_n \downarrow\downarrow$).

Убывающие и возрастающие последовательности называются *монотонными*, а строго убывающие и строго возрастающие – *строго монотонными*.

Примеры. 3. Последовательность $\{1/n\}$ строго убывает.

4. Последовательность $\{n\}$ строго возрастает.

5. Последовательность $\{(-1)^n\}$ – немонотонная.

Теорема 3 (Вейерштрасс*)). *Всякая возрастающая числовая последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: конечный, если она ограничена сверху, и бесконечный, если она неограничена сверху, причем*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup\{x_n\}. \tag{5.49}$$

Аналогично, если $\{x_n\}$ – убывающая последовательность, то существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \inf\{x_n\} \tag{5.50}$$

и, следовательно, этот предел конечен, если последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу, и бесконечен, если она неограничена снизу.

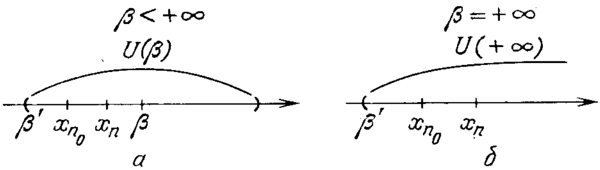


Рис. 52

$\triangleright$ Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Докажем равенство (5.49). Остальные утверждения теоремы для возрастающих последовательностей следуют из него очевидным образом.

Пусть $\beta = \sup\{x_n\}$, значение β может быть как конечным, так и бесконечным. Возьмем произвольную окрестность $U(\beta)$ точки β и обозначим через β' ее левый конец (рис. 52). Очевидно, $\beta' < \beta$. Согласно определению верхней грани

*) К. Вейерштрасс (1815–1897) – немецкий математик.

1) для любого номера $n \in \mathbf{N}$ имеет место неравенство

$$x_n \leqslant \beta; \tag{5.51}$$

2) существует такой номер n_0, что

$$x_{n_0} > \beta'. \tag{5.52}$$

В силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ из (5.51) и (5.52) следует, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\beta' < x_{n_0} \leqslant x_n \leqslant \beta, \tag{5.53}$$

и поскольку $(\beta', \beta] \subset U(\beta)$, то при $n > n_0$ имеет место включение

$$x_n \in U(\beta), \tag{5.54}$$

а это и означает, что β является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Аналогично рассматривается случай $x_n \downarrow$. $\lhd$

З а м е ч а н и е. Если $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots,$ – система вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, а ξ – точка, принадлежащая всем отрезкам этой системы, то

$$\xi = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n. \tag{5.55}$$

В самом деле, последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а $\{b_n\}$ убывает, кроме того (см. (4.20) в п. 4.5), было показано, что $\xi = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. Поэтому равенство (5.55) сразу следует из теоремы 3.

П р и м е р 6. Ч и с л о *e*. Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.56}$$

и покажем, что она строго возрастает и ограничена сверху, а следовательно, согласно теореме 3 имеет конечный предел.

Применив формулу бинома Ньютона, получим

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \ldots \times$$

$$\times \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \tag{5.57}$$

Из выражения, стоящего в правой части равенства, видно, что при переходе от n к $n + 1$ число слагаемых (которые все положительны) в написанной сумме возрастает на единицу и каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличивается, так как становится больше выражение, стоящее в каждой круглой скобке, ибо

$$1-\frac{s}{n}<1-\frac{s}{n+1},\quad s=1,2,\ldots,n-1,\quad n=2,3,\ldots$$

Это означает строгое возрастание последовательности (5.56):

$$x_n<x_{n+1},\quad n=1,2,\ldots \tag{5.58}$$

Далее, поскольку

$$1-\frac{s}{n}<1,\qquad s=1,2,\ldots,n-1,\quad n=2,3,\ldots, \tag{5.59}$$

и

$$\frac{1}{n!}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}},\quad n=1,2,\ldots, \tag{5.60}$$

то при $n>1$ из равенства (5.57) получим

$$x_n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<$$

$$<1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

(мы заменили сумму конечной геометрической прогрессии суммой бесконечной геометрической прогрессии, так как у последней проще формула). Итак,

$$x_n<3, \tag{5.61}$$

т.е. последовательность (5.56) ограничена сверху. Из (5.58) и (5.61) следует, что она имеет конечный предел. Он обозначается через e:

$$e\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{5.62}$$

Поскольку $2<x_n<3$ и $x_n\uparrow$, то $2<e\leqslant 3$. Можно показать, что e – иррациональное число и что с точностью до 10^{-15}

$$e\approx 2{,}718281828459045.$$

5.8. Принцип компактности. Если дана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторых ее членов x_{n_k}, взятых в порядке возрастания номеров n_k ($k>k'$ равносильно $n_k>n_{k'}$), составлена новая последовательность

$\{x_{n_k}\}$, то она называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

В подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ k является номером члена этой последовательности, а n_k – его номером в исходной последовательности.

Подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным наборам номеров $\{n_k\}$. Различные подпоследовательности одной и той же последовательности, рассматриваемые как последовательности, могут оказаться одинаковыми. Так, последовательность $x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, как и любая последовательность, имеет бесконечно много различных подпоследовательностей (можно, например, выбирать четные номера, нечетные, кратные трем, четырем и т.д.), но все эти подпоследовательности как последовательности совпадают, очевидно, с данной последовательностью $x_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Выше было показано (см. п. 5.4), что если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена. Обратное, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена, но не имеет предела. Вместе с тем, если вся ограниченная последовательность может не иметь предела, то у нее всегда существует подпоследовательность, которая имеет предел. Точнее, имеет место следующий факт.

Т е о р е м а 4. *Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной сверху (неограниченной снизу) числовой последовательности – последовательность, имеющую своим пределом* $+\infty$ *(соответственно* $-\infty$*).*

$\triangleright$ Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. существуют такие $a_0 \in \mathbf{R}$ и $b_0 \in \mathbf{R}$, что для всех номеров n выполняется неравенство $a_0 \leqslant x_n \leqslant b_0$. Выберем произвольно какой-либо член последовательности x_n, пусть его номер равен n_1:

$$x_{n_1} \in [a_0, b_0]. \tag{5.63}$$

Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ на два равных отрезка, тогда по крайней мере на одном из них – обозначим его $[a_1, b_1]$ – окажется бесконечно много членов рассматриваемой последовательности, и потому среди них найдется член этой последовательности с номером, большим n_1. Обозначим номер этого члена через n_2.

Таким образом, будем иметь

$$x_{n_2} \in [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0], \quad n_2 > n_1, \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}. \tag{5.64}$$

Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ снова на два равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ тот из них, на котором заведомо имеется бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Среди этих членов выберем член с номером, большим n_2. Обозначив этот номер n_3, получим

$$x_{n_3} \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \quad n_3 > n_2, \qquad (5.65)$$
$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^2}.$$

Продолжая этот процесс, получим такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ (т.е. $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$) последовательности $\{x_n\}$, что

$$a_k \leqslant x_{n_{k+1}} \leqslant b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (5.66)$$

$$[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}], \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (5.67)$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (5.68)$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} (b_k - a_k) = \lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{b_0 - a_0}{2^k} = 0.$

В результате получилась система вложенных отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \ldots$, длины которых стремятся к нулю. Поэтому (см. п. 4.5) существует единственная точка ξ, принадлежащая всем этим отрезкам, причем (см. (5.55)) $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k = \xi$, а тогда в силу свойства 2° пределов (см. п. 5.3) из неравенства (5.66) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \xi.$$

Это означает, что подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ имеет конечный предел, т.е. сходится.

Пусть теперь последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, неограничена сверху. Тогда существует такой номер n_1, что $x_{n_1} > 1$. Поскольку последовательность $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \ldots$, получающаяся из данной последовательности $\{x_n\}$ отбрасыванием конечного числа ее членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$, также неограничена сверху, то найдется такой номер $n_2 > n_1$, что $x_{n_2} > 2$. Продолжая этот процесс, получим такие члены x_{n_k} последовательности $\{x_n\}$, что

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots, \qquad (5.69)$$

$$x_{n_k} > k, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (5.70)$$

Условие (5.69) означает, что последовательность $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, а из условия (5.70) в силу следствия свойства 2° пределов (п. 5.3) вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = +\infty. \qquad (5.71)$$

Аналогично рассматривается случай последовательности, неограниченной снизу. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Первое утверждение теоремы 4, т.е. то, что из всякой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся, называется *теоремой Больцано*) – Вейерштрасса,* или *принципом компактности числовой прямой.*

З а м е ч а н и е 2. Поскольку всякая неограниченная последовательность неограничена по крайней мере либо сверху, либо снизу, то из второго утверждения теоремы 4 следует, что всякая неограниченная последовательность содержит бесконечно большую подпоследовательность, причем ее всегда можно выбрать таким образом, что ее пределом будет являться бесконечность со знаком.

О п р е д е л е н и е 10. *Предел, конечный или определенного знака бесконечный, подпоследовательности числовой последовательности называется* ***ч а с т и ч н ы м п р е д е л о м*** *этой последовательности.*

Из теоремы 4 следует, что у любой числовой последовательности всегда существует по крайней мере один частичный предел (заведомо конечный, если последовательность ограничена, и бесконечный, если она неограничена).

5.9. Критерий Коши. В этом пункте дается критерий**) сходимости последовательности, т.е. критерий существования у нее конечного предела, в терминах только самих членов данной последовательности, иначе говоря, без привлечения значения самого предела.

О п р е д е л е н и е 11. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ $n = 1, 2, \ldots$, *называется* ***ф у н д а м е н т а л ь н о й п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю,*** *если она удовлетворяет следующему условию: для любого* $\epsilon > 0$ *существует такой номер* n_0, *что для всех* $n > n_0$ *и* $m > n_0$ *выполняется неравенство*

$$|x_n - x_m| < \epsilon. \tag{5.72}$$

Это условие называется *условием Коши***).* Его можно записать в несколько другом виде: для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех целых $p \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \epsilon. \tag{5.73}$$

Чтобы убедиться в равносильности этих утверждений, достаточно заметить, что из двух номеров m и n всегда один не превышает другого, например, $m \geqslant n$, и тогда, положив $p = m - n$, мы перейдем от записи (5.73) к записи (5.72).

Докажем несколько лемм о фундаментальных последовательностях.

Л е м м а 2. *Если последовательность имеет конечный предел, то она фундаментальная.*

---

*) Б. Больцано (1781–1848) – чешский математик.

**) Термин "критерий" употреблен здесь в смысле "необходимое и достаточное условие".

***) О. Коши (1798–1857) – французский математик.

$\triangleright$ Действительно, если последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся и a – ее предел, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то согласно определению предела для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \epsilon/2. \tag{5.74}$$

Поэтому, если $m > n_0$ и $n > n_0$, то

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leqslant$$

$$\leqslant |x_n - a| + |x_m - a| \underset{(5.74)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \ \triangleleft$$

Л е м м а 3. *Если последовательность фундаментальная, то она ограниченная.*

$\triangleright$ Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная. Тогда согласно условию Коши существует такой номер n_0, что для всех $m > n_0$ и $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|x_n - x_m| < 1. \tag{5.75}$$

(в условии Коши (см. определение 11) можно взять любое $\epsilon > 0$; мы взяли здесь $\epsilon = 1$). В частности, при $m = n_0 + 1$ из (5.75) следует, что $|x_n - x_{n_0+1}| < 1$, или

$$x_{n_0+1} - 1 < x_n < x_{n_0+1} + 1, \quad n = n_0 + 1,\ n_0 + 2, \ldots,$$

т.е. последовательность $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$, получающаяся из данной последовательности $\{x_n\}$ отбрасыванием первых ее n_0 членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$, является ограниченной последовательностью. Поэтому ограничена, очевидно, и вся последовательность $\{x_n\}$. $\triangleleft$

Л е м м а 4. *Если некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности сходится, то ее предел является и пределом всей последовательности.*

$\triangleright$ Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность, $\{x_{n_k}\}$ – ее сходящаяся подпоследовательность и

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a. \tag{5.76}$$

Зададим произвольно $\epsilon > 0$. Согласно критерию Коши существует такой номер n_0, что для всех $n, m > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - x_m| < \epsilon/2. \tag{5.77}$$

Выберем теперь номер k_0 так, чтобы при всех $k > k_0$ имело место неравенство

$$n_k > n_0 \tag{5.78}$$

(это возможно сделать в силу того, что $\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty$). Тогда при всех $n > n_0$ и $k > k_0$ справедливо неравенство

$$|x_n - x_{n_k}| \underset{(5.77)\atop(5.78)}{<} \frac{\epsilon}{2}.$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to \infty$, в силу условия (5.76) получим, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Это и означает, что $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. $\lhd$

Т е о р е м а 5 (к р и т е р и й К о ш и). *Для того чтобы последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

$\rhd$ Действительно, необходимость выполнения условия Коши для сходящейся последовательности составляет содержание леммы 2.

Если же последовательность удовлетворяет условию Коши, т.е. является фундаментальной, то согласно лемме 3 она ограничена, и, следовательно, в силу принципа компактности (см. теорему 4) из нее можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел. Тогда из леммы 4 следует, что и вся заданная последовательность сходится к тому же пределу. $\lhd$

У п р а ж н е н и е. Доказать, что не всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел имеет рациональный предел.

5.10*. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Пусть задано действительное число $a \geqslant 0$. В силу принципа Архимеда существует натуральное число $n > a$. В множестве чисел $1, 2, \ldots, n$ возьмем наименьшее среди тех, которые больше числа a, т.е. такое натуральное число n_0, что

$$n_0 - 1 \leqslant a < n_0.$$

Обозначим $n_0 - 1$ через α_0, а отрезок $[\alpha_0, \alpha_0 + 1]$ – через I_0. Тогда

$$a \in I_0 = [\alpha_0; \alpha_0 + 1], \quad a \neq \alpha_0 + 1$$

(поскольку в этом пункте концы отрезков будут обозначаться десятичными дробями, то в качестве разделительного знака между концами отрезков удобнее употреблять не запятую, а точку с запятой, т.е. вместо $[a, b]$ писать $[a; b]$).

Разобьем отрезок I_0 на 10 равных отрезков и каждому отрезку, слева направо припишем последовательно индексы $0, 1, 2, \ldots, 9$. Точка a либо принадлежит только одному из этих отрезков; обозначим его I_1 (рис. 53

и 54), либо двум соседним, если она является их общим концом (рис. 55). В последнем случае для однозначности выбора отрезков обозначим через I_1 тот из двух соседних отрезков, для которого точка a является левым концом (целесообразность такого выбора будет пояснена ниже). Итак, в обоих случаях точка a лежит на отрезке I_1 и не является его правым концом.

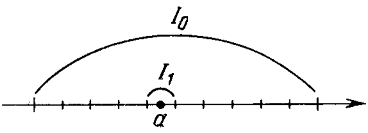


Рис. 53

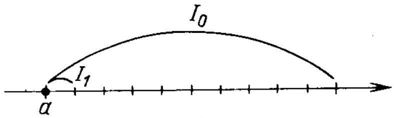


Рис. 54

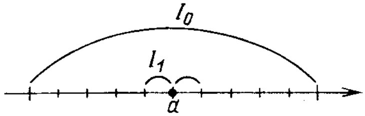


Рис. 55

Обозначим левый конец отрезка I_1 десятичной дробью α_0, α_1, где α_1 – индекс отрезка I_1 (одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9), тогда правый конец будет записываться числом $\alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}$. Таким образом,

$$a \in I_1 = [\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}], \qquad a \neq \alpha_0, \alpha_1 + 10^{-1}.$$

Разобьем отрезок I_1 в свою очередь на десять равных отрезков и обозначим через $I_2 = [\alpha_0, \alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + 10^{-2}]$ тот из них, который содержит точку a, причем она не является его правым концом. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots, \tag{5.79}$$

содержащих точку a, причем она не является правым концом ни одного из них:

$$\begin{gathered} a \in I_n = [\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n;\ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n}], \\ a \neq \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \tag{5.80}$$

Поскольку длина отрезка I_n равна 10^{-n} и $\lim\limits_{n \to \infty} 10^{-n} = 0$, то точка a является единственной точкой, принадлежащей всем отрезкам I_n, $n = 1, 2, \ldots$ Отрезок I_n будем называть отрезком ранга n.

Таким образом, каждому действительному числу $a \geqslant 0$ однозначным образом поставлена в соответствие последовательность вложенных отрезков $\{I_n\}$, длины которых стремятся к нулю. А именно, последовательность $\{I_n\}$, пересечение отрезков которой состоит из числа a:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}. \tag{5.81}$$

При этом разным числам оказываются поставленными в соответствие разные последовательности вложенных отрезков $\{I_n\}$, так как, в силу стремления к нулю длин отрезков I_n, пересечение рассматриваемой последовательности $\{I_n\}$ состоит из единственной точки a и, следовательно, разные точки числовой прямой принадлежат разным последовательностям $\{I_n\}$, т.е. на некотором n-м шаге они окажутся в разных отрезках ранга n.

Каждая последовательность $\{I_n\}$, очевидно, полностью описывается последовательностью своих левых концов $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ (правый конец получается добавлением числа 10^{-n} к левому концу), $n = 1, 2, \ldots$, а следовательно, и бесконечной десятичной дробью $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, так как левый конец каждого отрезка I_n получается из этой бесконечной десятичной дроби отбрасыванием всех ее цифр после запятой, начиная с $(n+1)$-й.

В результате каждому действительному числу $a \geqslant 0$ оказывается поставленной в соответствие указанным образом бесконечная десятичная дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ Если числу a соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, то пишут

$$a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots \tag{5.82}$$

Подчеркнем, что в этой записи через α_0 обозначается соответствующее неотрицательное целое число, а через α_n, $n = 1, 2, \ldots$, – одна из цифр 0, 1, 2, ..., 9.

Получающиеся в результате описанной конструкции бесконечные десятичные дроби (5.82) не могут иметь периода, состоящего только из цифры 9. В самом деле, пусть некоторому действительному числу соответствует дробь

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n_0} 99 \ldots 9 \ldots, \qquad n_0 \geqslant 0, \tag{5.83}$$

имеющая период, состоящий из цифры 9 и начинающийся с (n_0+1)-го места после запятой. Обозначим через $\{I_n\}$ последовательность отрезков, соответствующих дроби (5.83) в том смысле, что левым концом отрезка I_n, $n = 1, 2, \ldots$, этой последовательности является число $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, получающееся из дроби (5.83) отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го, а правым – число $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n + 10^{-n}$. Такая последовательность отрезков является вложенной системой отрезков, длины которых стремятся к нулю, и, следовательно, существует единственное число a, принадлежащее всем отрезкам I_n этой системы. Поскольку в дроби (5.83), начиная с (n_0+1)-го места после запятой, стоит цифра 9, то точка a, начиная с отрезков ранга n_0+1, будет находиться на отрезке с индексом 9, т.е. на самом правом отрезке. Этим свойством обладает только правый конец отрезка I_{n_0}, таким образом, число a совпадает с правым концом отрезка I_{n_0}.

При описанной же конструкции соответствия чисел $a \geqslant 0$ и бесконечных десятичных дробей (см. (5.72) – (5.82)) всегда предполагалось, что число a не является правым концом ни одного из отрезков соответствующей ему системы вложенных отрезков $\{I_n\}$ (см. (5.79)) – в этом состояло одно из условий (5.80). Полученное противоречие показывает, что при указанной конструкции соответствия чисел $a \geqslant 0$ и бесконечных десятичных дробей не участвуют дроби вида (5.83), т.е. с периодом, состоящим из одной лишь цифры 9.

Вместе с тем каждая бесконечная десятичная дробь

$$\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots, \tag{5.84}$$

не имеющая периода, состоящего только из одной цифры 9, оказывается поставленной в соответствие единственному числу $a \geqslant 0$, являющемуся точкой пересечения отрезков

$$I_n = [\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n; \ \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n}], \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.85}$$

В самом деле, последовательность отрезков (5.85) является вложенной системой отрезков, длины которых 10^{-n} стремятся к нулю, а потому существует единственное число a, принадлежащее всем отрезкам $a \in I_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Покажем, что дробь (5.84) поставлена в соответствие этому числу a, т.е. что выполнены условия (5.79) – (5.81). Очевидно, следует лишь показать, что число a не является правым концом ни одного из отрезков I_n. Если бы оказалось, что число a является правым концом некоторого отрезка I_{n_0} ранга n_0 системы $\{I_n\}$, то число a было бы и правым концом всех отрезков I_n ранга $n > n_0$, т.е. принадлежало бы отрезкам ранга $n > n_0$ с индексом 9. Это означает, что в дроби (5.84), начиная с $(n_0 + 1)$-го места после запятой, все время стоит цифра 9 – противоречие. Итак, действительно, каждая бесконечная десятичная дробь, не имеющая периода, состоящего из одной цифры 9, поставлена в соответствие некоторому числу $a \geqslant 0$.

В результате установлено взаимно однозначное соответствие между всеми неотрицательными действительными числами и всеми бесконечными десятичными дробями, не имеющими периода, состоящего только из цифры 9.

Бесконечные десятичные дроби с периодом, состоящим только из нуля, обычно записываются в виде конечной десятичной дроби, т.е. вместо $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n 00 \ldots 0 \ldots$ пишут $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$.

Подчеркнем, что при конструкции соответствия (5.79) – (5.82) между неотрицательными действительными числами и десятичными дробями это соответствие оказалось взаимно однозначным в силу того, что рассматривались лишь десятичные дроби, не имеющие периода, состоящего только из цифры 9, и требовалось, чтобы никакое a не являлось правым концом ни одного отрезка I_n соответствующей этому числу a системы $\{I_n\}$. При отказе от выполнения этих условий для каждого числа, являющегося концом некоторого отрезка ранга n, существовали бы две его записи в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_n 99\ldots 9\ldots = \alpha_0, \alpha_1 \ldots (\alpha_n + 1)00\ldots 0\ldots, \quad \alpha_n \neq 9,$$

например,

$$1 = 1,00\ldots 0 = 0,99\ldots 9\ldots$$

Если $a > 0$ и a соответствует дробь $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, то отрицательному числу $-a$ поставим в соответствие ту же дробь, только со знаком минус, и будем писать

$$-a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots \tag{5.86}$$

Запись действительных чисел в виде (5.82) и (5.86) называется их *десятичной записью.*

Бесконечные десятичные дроби $\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, не имеющие периода, состоящего только из одних девяток, называются *допустимыми.*

Из всего сказанного видно, что десятичная запись действительных чисел устанавливает между всеми действительными числами и всеми допустимыми десятичными дробями взаимно однозначное соответствие.

Конечно, нужно не только уметь записывать каждое действительное число в виде десятичной дроби, но и уметь производить с помощью этой записи различные операции над числами: сравнивать их по величине, складывать, вычитать, умножать, делить и т.д. Перейдем к рассмотрению этих вопросов.

Пусть снова $a \geqslant 0$ и $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ Введем обозначения

$$\begin{aligned} \underline{a}_n &= \alpha_0, \alpha_1\ldots\alpha_n, \\ \overline{a}_n &= \underline{a}_n + 10^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.87}$$

Если же $a < 0$ и $a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, то положим

$$\begin{aligned} \underline{a}_n &= -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n - 10^{-n}, \\ \overline{a}_n &= \underline{a}_n + 10^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{5.88}$$

Из этих формул сразу следует, что если $b < 0$ и $b = -a$, $a > 0$, то (рис. 56).

$$\underline{b}_n = -\overline{a}_n, \quad \overline{b}_n = -\underline{a}_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.89}$$

Конечная десятичная дробь $\underline{a}_n$ (как в случае (5.87), так и в случае (5.88)) называется *нижним десятичным приближением порядка n числа a*, а дробь $\overline{a}_n$ — его *верхним десятичным приближением* того же порядка. Очевидно, что в случае $a \geqslant 0$ конечные десятичные дроби $\underline{a}_n$ и $\overline{a}_n$ являются концами отрезка I_n (см. (5.80)) последовательности вложенных отрезков $\{I_n\}$, поставленной в соответствии числу $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$, т.е.

$$I_n = [\underline{a}_n, \overline{a}_n], \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.90}$$

иначе говоря,

$$\underline{a}_n \leqslant a \leqslant \overline{a}_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.91}$$

В силу соотношений (5.89) система отрезков (5.90) является системой вложенных отрезков и при $a < 0$; выполняется в этом случае и неравенство

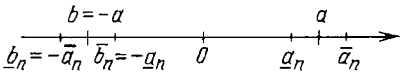


Рис. 56

(5.91). Из того, что система отрезков (5.90) является системой вложенных отрезков, следует, что

$$\underline{a}_n \leqslant \underline{a}_{n+1}, \quad \overline{a}_{n+1} \leqslant \overline{a}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.92}$$

т.е. что последовательность нижних десятичных приближений представляет собой возрастающую последовательность, а верхних – убывающую.

Наконец, из (5.87) и (5.88) непосредственно следует, что

$$\overline{a}_n - \underline{a}_n = 10^{-n}, \tag{5.93}$$

а так как $\lim\limits_{n \to \infty} 10^{-n} = 0$, то для любого действительного числа a последовательность отрезков (5.90) образует систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и единственной точкой пересечения которых является точка a. Отсюда имеем (см. замечание в п. 5.7)

$$\lim_{n \to \infty} \underline{a}_n = \lim_{n \to \infty} \overline{a}_n = a. \tag{5.94}$$

Таким образом, доказано следующее свойство десятичных приближений.

1°. *Каково бы ни было действительное число a, последовательность его нижних десятичных приближений* $\{\underline{a}_n\}$ *возрастает, верхних* $\{\overline{a}_n\}$ *убывает, и имеет место равенство* (5.94).

С л е д с т в и е. *Всякое действительное число является пределом последовательности рациональных чисел.*

▷ В самом деле, нижние и верхние десятичные приближения любого числа, представляя собой конечные десятичные дроби, являются рациональными числами, поэтому утверждение следствия непосредственно вытекает из равенства (5.94). ◁

Перейдем теперь к сравнению по величине действительных чисел посредством их десятичной записи.

2°. *Если $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$ то $a < b$ в том и только том случае, когда существует такое неотрицательное целое n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется*

неравенство

$$\underline{a}_n < \underline{b}_n. \qquad (5.95)$$

$\triangleright$ Если $a < b$, то из условия (5.94) согласно свойству 3° пределов (п. 5.3) сразу следует существование такого n_0, что для $n > n_0$ выполняется условие (5.95). Обратно, если существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство (5.95), то, перейдя в нем к пределу при $n \to \infty$, получим $a \leqslant b$, но случай $a = b$ невозможен, так как тогда в силу однозначности десятичной записи чисел для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имело бы место равенство $\underline{a}_n = \underline{b}_n$, что противоречило бы условию (5.95).

Следовательно, $a < b$. $\triangleleft$

С помощью арифметических операций над нижними и верхними десятичными приближениями чисел можно получить нужный результат соответствующих операций над самими числами с любой наперед заданной точностью. Это видно из следующего утверждения.

3°. *Если* $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} (\underline{a}_n + \underline{b}_n) = a + b,$$

$$\lim_{n \to \infty} (\underline{a}_n - \underline{b}_n) = a - b,$$

$$\lim_{n \to \infty} \underline{a}_n \underline{b}_n = ab,$$

а при $b \neq 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n} = \frac{a}{b}.$$

$\triangleright$ Эти формулы сразу следуют из равенств (5.94) и свойств пределов числовых последовательностей (п. 5.6). Отметим лишь, что из условия $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{b}_n = b \neq 0$ следует существование такого номера n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\underline{b}_n \neq 0$ (см. следствие 1 свойства 3° пределов, п. 5.3) и при рассмотрении предела $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$ берутся только дроби $\dfrac{\underline{a}_n}{\underline{b}_n}$, для которых $\underline{b}_n \neq 0$, что заведомо имеет место при $n > n_0$. $\triangleleft$

5.11. Предел последовательности комплексных чисел. Многие из понятий, введенных для последовательностей действительных чисел, обобщаются на последовательности комплексных чисел, причем с сохранением ряда свойств.

Комплексное число z_0 называется *пределом последовательности комплексных чисел* $\{z_n\}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер

n_ϵ, что для всех $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство

$$| z_n - z_0 | < \epsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ и говорят, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к числу z_0.

Таким образом, по форме это определение совершенно такое же, как для предела последовательности действительных чисел, однако геометрический смысл его иной: на комплексной плоскости неравенство $|z - z_0| < \epsilon$ задает открытый круг (т.е. круг без ограничивающей его окружности) радиуса ϵ с центром в точке z_0. Этот круг называется *ϵ-окрестностью* (или, короче, *окрестностью*) *точки* z_0; будем его обозначать $U = U(z_0, \epsilon)$.

Условие $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ означает, что, какова бы ни была окрестность U точки z_0, найдется такой номер n_0, что все члены последовательности $\{z_n\}$ с номерами, большими n_0, будут содержаться в этой окрестности (рис. 57). Тем самым вне этой окрестности будет находиться только конечное множество членов рассматриваемой последовательности.

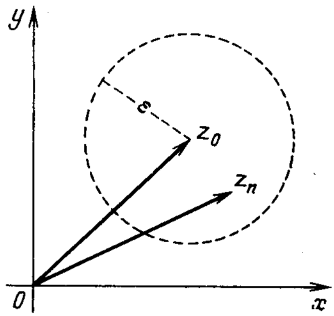


Рис. 57

Существование предела $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ в силу самого определения предела равносильно существованию предела

$$\lim_{n \to \infty} | z_n - z_0 | = 0, \tag{5.96}$$

т.е. сходимости к нулю последовательности действительных чисел $| z_n - z_0 |$, $n = 1, 2, \ldots$

Если $z_n = x_n + iy_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$, x_n, y_n, $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$, то

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \tag{5.97}$$

и, следовательно,

$$| x_n - x_0 | \leqslant | z - z_0 |, \quad | y_n - y_0 | \leqslant | z - z_0 |. \tag{5.98}$$

Из соотношений (5.97), (5.98) следует, что условие $\lim\limits_{n \to \infty} | z_n - z_0 | = 0$ равносильно условиям $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$. Это означает, что последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$, имеет своим пределом число $z_0 = x_0 + iy_0$ в том и только том случае, когда последовательности действительных $\{x_n\}$ и мнимых $\{y_n\}$ частей членов последовательности $\{z_n\}$ имеют своими пределами соответственно x_0 и y_0.

Последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел называется *ограниченной*, если ограничена последовательность действительных чисел $\{|z_n|\}$ (т.е. если ограничена последовательность абсолютных величин членов данной последовательности).

На последовательности комплексных чисел обобщаются многие предложения, доказанные для последовательностей действительных чисел. Так, если последовательность комплексных чисел имеет предел, то он единствен; всякая последовательность комплексных чисел, имеющая предел, ограничена; из всякой ограниченной последовательности комплексных чисел можно выделить сходящуюся; для последовательностей комплексных чисел имеет место аналог критерия Коши сходимости последовательностей действительных чисел; переносятся на последовательности комплексных чисел и свойства пределов, связанные с арифметическими операциями над последовательностями. Все это следует, например, из того, что сходимость последовательности комплексных чисел равносильна сходимости последовательностей их действительных и мнимых частей.

Аналогично случаю последовательностей действительных чисел для последовательностей комплексных чисел определяется и бесконечный предел (без знака, так как комплексные числа не имеют знака): $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ означает по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$.

Замечание. Обычно, когда говорят, что некоторая последовательность комплексных (в частности, действительных) чисел имеет предел, то под этим подразумевают, что этот предел конечный, а случай бесконечного предела оговаривается особо.

§ 6. Предел и непрерывность функций

6.1. Первое определение предела функции. В дальнейшем под термином "элемент", "точка" будет пониматься либо действительное число, либо одна из бесконечностей ∞, $+\infty$ и $-\infty$ (бесконечно удаленные точки).

Сформулируем сначала определение предела функции $f\colon X \to \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$, в терминах пределов последовательностей. Это определение часто называют определением предела функции по Гейне*).

Определение 1. *Точка a называется* ***пределом значений функции*** *$f(x)$, $x \in X$ (или, короче,* ***пределом функции*** *f), в точке x_0 (или, что то же самое, при $x \to x_0$**)), если для любой последовательности точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющей своим пределом точку x_0, т.е. такой, что*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \tag{6.1}$$

последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции f в точках x_n, $n = 1, 2, \ldots$,

---

*) Г. Гейне (1821–1881) – немецкий математик.

**) Читается "при x, стемящемся к x_0".

имеет своим пределом точку a, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{6.2}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) \to a \quad \text{при} \quad x \to x_0, \tag{6.3}$$

а если x_0 – конечная точка: $x_0 \in \mathbf{R}$, то также

$$\lim_{x - x_0 \to 0} f(x) = a.$$

В символической записи с помощью логических символов это определение выглядит следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{ \forall x_n \in X, \quad n = 1, 2, \ldots : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \ (\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a)\}. \tag{6.4}$$

Двоеточием здесь, как и раньше в символических формулах (см. п. 1.1), отделяются описания рассматриваемых в условии элементов. В данном случае рассматриваются элементы $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Если в формуле (6.4) a является числом, то говорят, что функция f имеет в точке x_0 *конечный предел* (равный a).

Сформулированное определение предела при заданной функции $f(x)$, $x \in X$, содержательно только тогда, когда для точки x_0 существуют последовательности точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющие своим пределом (конечным или бесконечным) точку x_0: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Определение 2. *Пусть $X \subset \mathbf{R}$. Точка x_0, для которой существует последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющая своим пределом точку x_0,*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \tag{6.5}$$

*называется **точкой прикосновения множества** X.*

Если точка прикосновения x_0 является одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то она называется также *бесконечно удаленной точкой прикосновения* (множества X). Очевидно, что точка $x_0 = \infty$ является бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X тогда и только тогда, когда множество X неограничено, точка $x_0 = +\infty$ – тогда и только тогда, когда множество X неограничено сверху, а $x_0 = -\infty$ – тогда и только тогда, когда X неограничено снизу.

Очевидно, что любая точка x_0, принадлежащая самому множеству X, является его точкой прикосновения, так как стационарная последовательность $x_n = x_0 \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию (6.5). Точками самого множества не исчерпывают, вообще говоря, все его точки прикосновения: могут существовать точки прикосновения и не принадлежащие ему. Например, точки $x = a$ и $x = b$ являются точками прикосновения интервала (a, b) и не содержатся в нем.

Замечание 1. Точка является точкой прикосновения данного множества тогда и только тогда, когда любая ее окрестность пересекается с этим множеством.

В самом деле, если x_0 — точка прикосновения множества X, то существует последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, в любой окрестности точки x_0 будут содержаться все члены этой последовательности, начиная с некоторого, и они являются точками множества X.

Наоборот, если в любой окрестности точки x_0 имеются точки множества X, то выберем по точке множества X в каждой окрестности $U(x_0, 1/n)$ и обозначим эти точки через x_n, т.е.

$$x_n \in X \cap U(x_0, 1/n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, а это и означает, что x_0 является точкой прикосновения множества X.

Поскольку понятие предела функции $f\colon X \to \mathbf{R}$ в точке x_0 содержательно только тогда, когда эта точка является точкой прикосновения множества X, то в дальнейшем при рассмотрении предела функции f в точке x_0 будем всегда предполагать (как правило, специально это не оговаривая), что точка x_0 является точкой прикосновения множества X.

Примеры. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1},$$

определенную на множестве $X = \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Выясним, существует ли $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Пусть $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$; тогда (п. 5.6)

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} =$$

$$= \frac{2\,(\lim\limits_{n \to \infty} x_n)^2 + \lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1}{\lim\limits_{n \to \infty} x_n - 1} = 1.$$

Таким образом, существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 1$, а так как он не зависит от выбора последовательности $x_n \to 0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то существует и

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Она определена на множестве $X = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ (рис. 58). Выясним, существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Возьмем две последовательности: $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$ и $x'_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0,\quad x_n \in X,\quad x'_n \in X,$$

$$f(x_n) = \sin \pi n = 0,\quad f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1,\qquad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = 1$, а это означает, что у рассматриваемой функции не существует предела в точке $x_0 = 0$.

О п р е д е л е н и е 3. *Если задана функция $f(x)$, $x \in X$, и $E \subset X$, то* ***п р е д е л о м*** $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)$ *функции f по множеству E в точке x_0 называется предел ее сужения f_E в этой точке*:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0} f_E(x). \tag{6.6}$$

Очевидно, что если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то и для любого множества $E \subset X$, для которого точка x_0 является точкой прикосновения, существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)$, причем эти пределы равны.

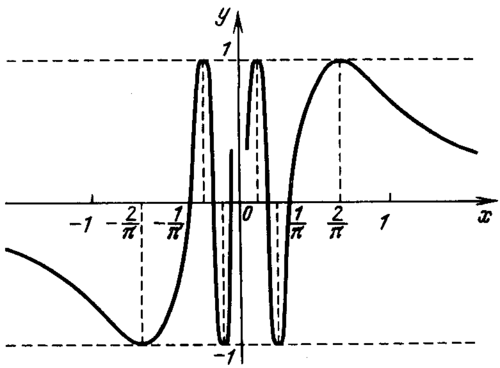


Рис. 58

3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbf{I}. \end{cases}$$

Эта функция называется функцией Дирихле*). Имеем

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbf{Q}}} f(x) = 1, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbf{I}}} f(x) = 0,$$

а предел $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ по всему множеству определения функции f, т.е. по всему множеству действительных чисел, не существует.

Часто пределы функций рассматриваются по пересечениям областей определения этих функций с так называемыми проколотыми окрестностями.

Определение 4. *Проколотой ϵ-окрестностью $\overset{\circ}{U}(x_0, \epsilon)$ точки x_0 называется множество, получающееся удалением точки x_0 из ее ϵ-окрестности:*

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \epsilon) \overset{\text{def}}{=} U(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}. \tag{6.7}$$

Проколотую окрестность будем также обозначать и через $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Пример 4. Пусть

$$\operatorname{sign} x \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда (рис. 59 и 60) предел $\lim\limits_{x \to 0} |\operatorname{sign} x|$ функции $|\operatorname{sign} x|$ по всей ее

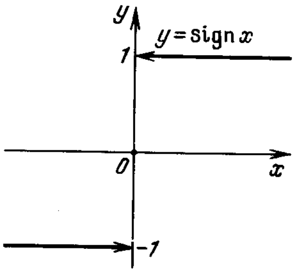


Рис. 59

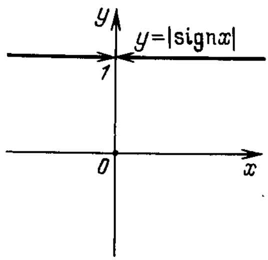


Рис. 60

области задания, т.е. по всей числовой прямой (или, что равносильно, по любой окрестности $U(0)$ точки $x_0 = 0$), не существует, а предел этой функции по проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(0)$ точки $x_0 = 0$ существует и равен 1:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x)}} |\operatorname{sign} x| = 1.$$

---

*) Л. Дирихле (1805–1859) – немецкий математик.

З а м е ч а н и е 2. Понятие предела последовательности является частным случаем понятия предела функции, так как последовательность $\{x_n\}$ есть такая функция $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, что $f(n) = x_n$. Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

Действительно, если существует $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = a$, то согласно определению предела для любой последовательности $n_k \in \mathbf{N}$, $n_k \to +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} f(n_k) = a,$$

в частности, оно имеет место для последовательности $\{n\}$ всех натуральных чисел, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} f(n) = a.$$

Обратно, пусть существует предел последовательности $\{x_n\}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a,$$

т.е. для любой окрестности $U(a)$ найдется такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение

$$x_n \in U(a).$$

Пусть теперь $\{n_k\}$ – какая-либо последовательность натуральных чисел такая, что $n_k \to +\infty$ (эта последовательность не обязательно является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел: в ней отдельные натуральные числа могут встречаться по несколько раз и порядок следования в ней членов может не соответствовать их расположению в натуральном ряду); тогда существует такой номер k_0, что для всех $k > k_0$ выполняется неравенство $n_k > n_0$ и, следовательно, $x_{n_k} \in U(a)$. Это и означает, что

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a,$$

а так как $\{n_k\}$ была произвольной последовательностью натуральных чисел, стремящейся к $+\infty$, то согласно определению предела функции

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = a.$$

6.2. Непрерывные функции. При рассмотрении предела функции $f(x)$, $x \in X$, в точке x_0 случай, когда $x_0 \in X$, представляет особый интерес – он приводит к понятию непрерывной функции.

Если $x_0 \in X$ и существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то он равен $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.8}$$

В самом деле, поскольку $x_0 \in X$, то в качестве последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, в этом случае можно взять стационарную последовательность $x_n = x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Для нее имеем

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_0) = f(x_0). \tag{6.9}$$

Если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то согласно его определению для любой последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, существует предел последовательности $f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и все пределы таких последовательностей равны между собой. Поэтому из равенства (6.9) следует выполнение условия (6.8).

Определение 5. *Если*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0.

Согласно сказанному выше функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует предел (по множеству X) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $x_0 \in X$.

Например, функция $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ является непрерывной в точке $x = 0$ (как и во всякой другой точке $x \neq 1$), ибо, как это было показано в п. 6.1,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 1 = f(0).$$

Функция же

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x = 0$, так как предел $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует.

6.3. Условие существования предела функции. Согласно определению предела функции (п. 6.1) для того, чтобы существовал предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ функции $f(x)$, $x \in X$, нужно, чтобы для любых последовательностей $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, существовали пределы $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ и они были равны между собой. Покажем, что второе условие вытекает из первого. То есть, не предполагая равенство этих пределов, а предполагая только их существование, можно доказать их равенство, а следовательно, и существование предела функции. Точнее, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in X$, имела конечный или определенного знака бесконечный предел в точке x_0, являющейся конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ имела предел (конечный или определенного знака бесконечный).*

$\triangleright$ Необходимость сформулированного условия для существования $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ содержится в самом определении предела функции (см. (6.4)), в котором утверждается существование пределов $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ для всех указанных в условиях леммы последовательностей $\{x_n\}$.

Докажем достаточность этого условия для существования предела функции. Пусть $x'_n \to x_0$, $x''_n \to x_0$, $x'_n \in X$, $x''_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и существуют пределы $\lim\limits_{n \to \infty} f(x'_n)$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x''_n)$. Покажем, что они равны. Положим

$$x_n = \begin{cases} x'_k, & \text{если} \quad n = 2k-1, \\ x''_k, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ и $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ Согласно условиям леммы существуют пределы

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n), \qquad \lim_{n \to \infty} f(x''_n), \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n),$$

причем $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$.

Поскольку из существования у последовательности предела (конечного или бесконечного) следует существование того же предела у любой ее подпоследовательности, то будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x''_n).$$

Таким образом, пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, где $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, не зависят от выбора указанных последовательностей $\{x_n\}$. Обозначив общее значение пределов последовательностей $\{f(x_n)\}$ через a, получим $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. $\lhd$

6.4. Второе определение предела функции. Существует другое определение предела функций, в котором используется понятие окрестности, оно называется определением по Коши.

Определение 6. *Точку a называют **пределом функции** $f(x)$, $x \in X$, при $x \to x_0$ (или, что то же самое, **в точке** x_0) и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что*

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(a).$$

Используя логические символы, это определение можно записать в следующем виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\iff} \forall U(a)\, \exists U(x_0)\, (f(X \cap U(x_0)) \subset U(a)),$$

или, что равносильно,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\iff} \forall U(a)\, \exists U(x_0)\, \forall x \in X \cap U(x_0)\, (f(x) \in U(a)). \tag{6.10}$$

Вспоминая определения окрестностей, эти определения для соответствующих конкретных случаев можно перефразировать в терминах неравенств. Рассмотрим важный случай, когда x_0 и a – действительные числа.

Число a называется пределом функции $f(x)$, $x \in X$, в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \in X$, выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \epsilon.$$

Это определение действительно равносильно определению (6.10) в случае, если $x_0 \in \mathbf{R}$ и $a \in \mathbf{R}$, так как условие $|x - x_0| < \delta$ равносильно условию $x \in U(x_0) = U(x_0, \delta)$, а условие $|f(x) - a| < \epsilon$ – условию $f(x) \in U(a) = U(a, \epsilon)$ (рис. 61).

В символической форме для рассматриваемого случая определение предела функции имеет вид

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \colon |x - x_0| < \delta \ (|f(x) - a| < \epsilon).$$

В качестве примера бесконечных пределов рассмотрим определение предела $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \colon x > \frac{1}{\delta} \ (f(x) < -1/\epsilon).$$

Т е о р е м а 1. *Определения* 1 *и* 6 *предела функции в точке прикосновения множества задания функции равносильны.*

▷ Пусть функция f задана на множестве X и x_0 – точка прикосновения этого множества. Предположим сначала, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ в смысле определения 1, и покажем, что тогда число a является и пределом функции в смысле определения 6. Допустим, что это не так, т.е. (см. (6.10)) что существует такая окрестность $U(a)$, что для любой окрестности $U(x_0)$ найдется такая точка $x \in X \cap U(x_0)$, что $f(x) \notin U(a)$, или, в символической записи,

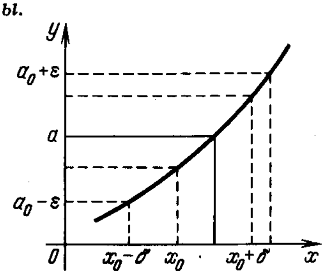


Рис. 61

$$\exists U(a) \ \forall U(x_0) \ \exists x \in X \cap U(x_0) \ (f(x) \notin U(a)). \tag{6.11}$$

В частности, указанные точки x найдутся в каждой окрестности $U(x_0, 1/n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ точки x_0. Обозначим эти точки x_n, т. е.

$$x_n \in X \cap U(x_0, 1/n), \tag{6.12}$$

$$f(x_n) \notin U(a). \tag{6.13}$$

Из условия (6.12) следует (см. пример в п. 5.3), что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0. \tag{6.14}$$

Поскольку $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения 1, то из выполнения условия (6.14) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Следовательно, для любой окрестности $U(a)$, в частности, и для окрестности $U(a)$, указанной в условии (6.13), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение

$$f(x_n) \in U(a), \tag{6.15}$$

что противоречит условию (6.13). В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения 6 предела функции f: $X \to \mathbf{R}$, x_0 – точка прикосновения множества X и $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Зададим произвольно окрестность $U(a)$ точки a и выберем для нее окрестность $U(x_0)$ точки x_0, удовлетворяющую условию (6.10). Для окрестности $U(x_0)$ в силу условия $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x_0)$, а так как $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то при $n > n_0$ будем иметь $x_n \in X \cap U(x_0)$. Следовательно, в силу (6.10) при $n > n_0$ имеет место включение $f(x_n) \in U(a)$.

Это и означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ в смысле определения 1. ◁

6.5. Предел функции по объединению множеств.

Л е м м а 2. *Пусть функция f задана на множестве X, $X_1 \subset X$, $X_2 \subset X$, и x_0 является точкой прикосновения множеств X_1 и X_2. Тогда, если при $x \to x_0$ функция f имеет равные пределы по множествам X_1 и X_2, то она имеет тот же предел и по их объединению.*

▷ Если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_2}} f(x) = a,$$

то для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что образы ее пересечений $X_1 \cap U(x_0)$ и $X_2 \cap U(x_0)$ с множествами X_1 и X_2 содержатся в окрестности $U(a)$, а тогда и образ их объединения $(X_1 \cup X_2) \cap U(x_0)$ также содержится в $U(a)$. Это и означает, что

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_1 \cup X_2}} f(x) = a. \quad ◁$$

6.6. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность. Введем обозначения: для любого числового множества X и любой точки x_0 расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$ положим

$$X_+(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X: x \geqslant x_0\}, \quad X_-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X; x \leqslant x_0\}.$$

Если $x_1 \in X$, то $x_0 \in X_+$, $x_0 \in X_-$, а если $x_0 \notin X$, то $x_0 \notin X_+$, $x_0 \notin X_-$. Очевидно, если $x_0 = +\infty$, то $X_+(x_0) = \phi$, а если $x_0 = -\infty$, то $X_-(x_0) = \phi$.

В случае, когда множество $X_+(x_0)$ (соответственно множество $X_-(x_0)$) непусто, условие, что x_0 является его точкой прикосновения, равносильно тому, что $x_0 = \inf X_+(x_0)$ (соответственно $x_0 = \sup X_-(x_0)$).

Определение 7. *Пусть задана функция $f(x)$, $x \in X$, и $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$. Точка a называется* **пределом функции** *f слева при $x \to x_0$ (соответственно справа), если она является пределом при $x \to x_0$ функции f по множеству $X_-(x_0)$ (соответственно по множеству $X_+(x_0)$), т.е. если*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = a \quad \text{(соответственно} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = a).$$

В силу этого определения предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ причисляется к пределам слева, а $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ – к пределам справа.

Для пределов справа и слева сужения функции f на множество $X \setminus \{x_0\}$, т.е. для случая, когда предел берется по множеству, не содержащему точки x_0, имеются специальные обозначения: для предела слева $f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, а для предела справа $f(x_0 + 0)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. При этом в случае $x_0 = 0$ вместо $0 + 0$ и $0 - 0$ пишут $+0$ и -0, а в случае $x_0 = +\infty$ (соответственно $x_0 = -\infty$) вместо $+\infty - 0$ $(-\infty + 0)$ пишут просто $+\infty$ (соответственно $-\infty$).

Пример 1. Для функции $y = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 59) имеем

$$\lim_{x \to +0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x \to -0} \operatorname{sign} x = -1.$$

Теорема 2. *Функция $f(x)$, $x \in X$, имеет предел в точке $x_0 = \sup X_-(x_0) = \inf X_+(x_0)$, $X_-(x_0) \neq \phi$, $X_+(x_0) \neq \phi$, в том и только том случае, когда в этой точке у функции f существуют равные пределы слева и справа, причем общее значение этих пределов является пределом функции f в точке x_0.*

$\triangleright$ Если у функции f существует предел в точке x_0, то тот же предел существует у этой функции при $x \to x_0$ и по любому подмножеству $E \subset X$, в частности по множествам $X_-(x_0)$ и $X_+(x_0)$. Обратно, если у функции f существуют равные пределы по множествам $X_-(x_0)$ и $X_+(x_0)$, то по лемме 2 у нее существует тот же предел и по их объединению, т. е. по множеству $X = X_-(x_0) \cup X_+(x_0)$. $\triangleleft$

О п р е д е л е н и е 8. *Функция* $f(x), x \in X$, *называется* ***н е п р е р ы в н о й с л е в а*** (***с п р а в а***) *в точке* $x_0 \in X$, *если*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_-(x_0)}} f(x) = f(x_0) \quad (\textit{соответственно} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X_+(x_0)}} f(x) = f(x_0)).$$

П р и м е р 2. Символом $[x]$ обозначается целая часть числа $x \in \mathbf{R}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x (рис. 62). Функция $y = [x]$ непрерывна справа во всех точках числовой оси и не является непрерывной слева во всех целочисленных точках $x = \pm n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

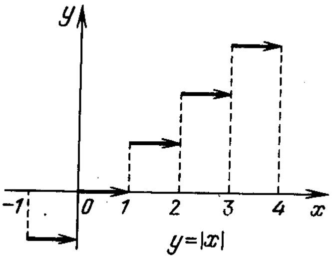


Рис. 62

Из теоремы 2 следует, что если функция f непрерывна слева и справа в точке x_0, то она непрерывна в этой точке (напомним, что непрерывность функции f в точке x_0 означает, что в x_0 существует предел функции f по множеству, содержащему эту точку: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. в данном случае $x_0 \in X_+(x_0)$ и $x_0 \in X_-(x_0)$ и, следовательно, $x_0 \in X$).

6.7. Свойства пределов функций. В пп. 6.7—6.12 все рассматриваемые функции определены на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbf{R}$ и x_0 — его точка прикосновения, конечная или бесконечно удаленная.

1°. *Если функция* f *имеет в точке* x_0 *конечный предел, то существует такая окрестность* $U(x_0)$ *точки* x_0, *что функция* f *ограничена на пересечении* $X \cap U(x_0)$.

$\triangleright$ Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbf{R}$, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in \in U(a, 1)$ (здесь в качестве окрестности $U(a)$ в определении 6 взята окрестность $U(a, 1)$), т. е. неравенство

$a - 1 < f(x) < a + 1$. $\triangleleft$

С л е д с т в и е. *Если функция* f *непрерывна в точке* x_0, *то существует такая окрестность* $U(x_0)$ *точки* x_0, *что функция* f *ограничена на* $X \cap U(x_0)$.

Это следует из того, что если функция f непрерывна в точке x_0, то она имеет в этой точке конечный предел.

2° (л е м м а о с о х р а н е н и и з н а к а). *Если функция* f *имеет в точке* x_0 *не равный нулю конечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$, *то суще-*

ствуют такие окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и число $c>0$, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &f(x) > c, \qquad \text{если} \quad a > 0, \\ &f(x) < -c, \qquad \text{если} \quad a < 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

$\triangleright$ Поскольку $a \neq 0$, то $\dfrac{|a|}{2} > 0$. Возьмем в качестве окрестности $U(a)$ в определении 6 окрестность $U\left(a, \dfrac{|a|}{2}\right)$. Тогда согласно этому определению существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in U\left(a, \dfrac{|a|}{2}\right)$, т. е. справедливо неравенство

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}.$$

Отсюда имеем при $a > 0$

$$f(x) > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} > 0,$$

а при $a < 0$

$$f(x) < a + \frac{|a|}{2} = -|a| + \frac{|a|}{2} = -\frac{|a|}{2} < 0.$$

Таким образом, неравенства (6.16) выполняются при $c = \dfrac{|a|}{2}$. $\triangleleft$

С л е д с т в и е. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существуют такие окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} &f(x) > c, \qquad \text{если} \quad f(x_0) > 0, \\ &f(x) < -c, \qquad \text{если} \quad f(x_0) < 0. \end{aligned}$$

Это сразу вытекает из свойства 2°, поскольку непрерывность в точке x_0 означает существование у функции f в точке x_0 конечного предела, равного $f(x_0)$.

З а м е ч а н и е. Если у функции f в точке x_0 существует один из бесконечных пределов ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то для л ю б о г о числа $c > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x)| > c, \qquad \text{если} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

$$f(x) > c, \qquad \text{если} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

$$f(x) < -c, \qquad \text{если} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Это следует из определения 5 предела функции, в котором в качестве окрестности $U(a)$ бесконечно удаленной точки в этом случае следует взять окрестность $U\left(a, \frac{1}{c}\right)$.

3°. *Если* $f(x) = c$ *– постоянная,* $x \in X$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$.

Это означает, в частности, что постоянная функция является непрерывной.

4°. *Если* $f(x) \geqslant a$, $x \in X$ *и существует конечный или определенного знака бесконечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geqslant a$.

5°. *Если* $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, $x \in X$, *и существуют конечные или определенного знака бесконечные пределы* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ *и они равны между собой, то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x).$$

6°. *Если существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *то существуют и конечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] =$$

$$= \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) + \mu \lim_{x \to x_0} g(x), \quad \lambda \in \mathbf{R}, \quad \mu \in \mathbf{R}, \tag{6.17}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{6.18}$$

а если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, *то и*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}. \tag{6.19}$$

В последнем случае функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только для тех x, для которых $g(x) \neq 0$ (см. свойство 2°).

$\triangleright$ Утверждения 3°–6° следуют из соответствующих утверждений для пределов последовательностей (см. пп. 5.3 и 5.6). Докажем, например, формулу (6.18). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbf{R}$. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющую своим пределом x_0. Тогда, согласно определению 1, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = b$, поэтому, в силу свойства пределов последовательностей (свойство 3° в п. 5.6),

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) g(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \lim_{n \to \infty} g(x_n) = ab,$$

и поскольку последовательность $\{x_n\}$ является произвольной последовательностью такой, что $x_n \to x_0$ и $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то согласно тому же определению 1 предела функции получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = ab = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x). \ \triangleleft$$

С л е д с т в и е. *Если функции f и g непрерывны в точке $x_0 \in X$, то функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$, $f(x) g(x)$, а если $g(x_0) \neq 0$, то и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, непрерывны в точке x_0.*

$\triangleright$ Докажем, например, непрерывность произведения $f(x) g(x)$. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в этой точке они имеют конечные пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Поэтому согласно формуле (6.21) получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) g(x_0).$$

Это и означает непрерывность произведения fg. $\triangleleft$

6.8. Бесконечно малые.

О п р е д е л е н и е 9. *Функция $\alpha(x)$, $x \in X$, называется* б е с к о н е ч н о м а л о й *при $x \to x_0$, если* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые функции играют в теории пределов функций роль, аналогичную той, которую играют бесконечно малые последовательности в теории пределов последовательностей (п. 5.5).

Л е м м а 3. *Для того чтобы у функции $f(x)$, $x \in X$, существовал в точке x_0* к о н е ч н ы й *предел, равный a, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - a$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.*

$\triangleright$ Действительно, существование конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ равносильно тому, что (см. п. 6.4) для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \epsilon$, т. е. $|\alpha(x)| < \epsilon$, что и означает бесконечную малость функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$. $\triangleleft$

Т е о р е м а 3. *Линейная комбинация конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.*

Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную функцию является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.

С л е д с т в и е. *Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.*

$\triangleright$ Первое утверждение теоремы сразу следует из свойства предела линейной комбинации функций (см. (6.17)). Докажем второе: пусть

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \tag{6.20}$$

а функция f ограничена на множестве X, т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c. \tag{6.21}$$

Тогда для произвольной последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность $\{\alpha(x_n)\}$ будет в силу условия (6.20) бесконечно малой, а последовательность $\{f(x_n)\}$ в силу условия (6.21) – ограниченной. Поэтому (см. п. 5.5) их произведение является бесконечно малой последовательностью, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)\alpha(x_n) = 0$. Поскольку $\{x_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0.$$

Для доказательства следствия из теоремы достаточно заметить, что всякая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, имея в точке x_0 конечный предел, ограничена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций можно рассматривать как произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную. $\triangleleft$

6.9. Различные формы записи непрерывности функции в точке. Согласно определению (определение 5, п. 6.2) функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{6.22}$$

Это означает (определение 1, п. 6.1), что если $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, то $f(x_n) \to f(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, а также (см. определение 6 и теорему 1 в п. 6.4) что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Из (6.22) следует, что

$$\lim_{x - x_0 \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0. \tag{6.23}$$

Введем обозначения

$$\Delta x \overset{\text{def}}{=} x - x_0, \qquad \Delta y \overset{\text{def}}{=} f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тогда равенство (6.23) можно записать в виде

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{6.24}$$

С точки зрения приближенного вычисления значений функций выполнение равенства (6.24), т.е. непрерывность функции, означает, что по достаточно точным приближенным значениям аргумента можно вычислять сколь угодно точно значения функции.

В качестве примера использования записи условия непрерывности в виде (6.24) покажем, что функция $f(x) = 1/x$ (рис. 63) непрерывна во всех точках $x_0 \neq 0$. Имеем

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$
$$= \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} =$$
$$= -\frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} \to 0$$

при $\Delta x \to 0$.

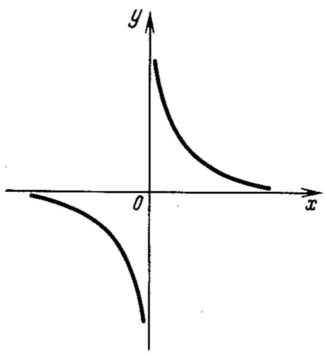


Рис. 63

Бывает полезным условие непрерывности функции в точке, основанное на рассмотрении предела функции по проколотой окрестности этой точки.

Л е м м а 4*. *Если существует предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X \cap \overset{\circ}{U}(x_0)}} f(x) = a \tag{6.25}$$

и функция f *определена в точке* x_0, *то* f *непрерывна в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда* $f(x_0) = a$.

▷ Если функция f непрерывна в точке x_0, т.е. выполняется условие (6.8), то в силу очевидного включения

$$X \cap \overset{\circ}{U}(x_0) \subset X$$

имеем

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X \cap \overset{\circ}{U}(x_0)}} f(x) \underset{(6.9)}{=} f(x_0) \tag{6.26}$$

(предел по множеству совпадает с пределом по подмножеству).

Из (6.25) и (6.26) следует, что $f(x_0) = a$.

Пусть теперь, наоборот, выполняется условие $f(x_0) = a$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X \cap \overset{\circ}{U}(x_0)}} f(x) = f(x_0).$$

Отсюда имеем, что для любой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что

$$f(X \cap \overset{\circ}{U}(x_0)) \subset U(f(x_0)). \tag{6.27}$$

Но, очевидно, $f(x_0) \in U(f(x_0))$, поэтому в левой части включения (6.27) можно проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}(x_0)$ заменить обычной окрестностью $U(x_0)$:

$$f(X \cap U(x_0)) \subset U(f(x_0)).$$

Это и означает, что функция f непрерывна в точке x_0. ◁

Условие непрерывности (6.25) бывает полезно, в частности, в случае односторонних пределов, когда пределы слева и справа берутся по множествам, не содержащим точки x_0, т.е. когда рассматриваются пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Именно, имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 5. *Если* $x_0 \in X$ *и*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

то функция f *непрерывна в точке* x_0.

▷ Действительно, согласно лемме 4* из условия $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ следует, что функция f непрерывна слева в точке x_0, а из условия

$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ – что она непрерывна справа в этой точке. Поэтому функция f непрерывна в x_0. ◁

Для дальнейшего анализа свойства непрерывности функции введем понятия изолированных и предельных точек множества.

Определение 10. *Точка x_0 называется* ***изолированной точкой множества*** *$X \subset \mathbf{R}$, если существует ее окрестность $U(x_0)$, пересечение которой с множеством X состоит только из самой точки x_0:*

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}.$$

Определение 11. *Точка x_0 называется* ***предельной точкой множества*** *$X \subset \mathbf{R}$, если в любой ее окрестности содержится точка множества X, отличная от самой точки x_0.*

Примеры. Все точки множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ изолированы, а множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел вовсе не имеет изолированных точек. Каждая точка числовой прямой $\mathbf{R}$ является предельной точкой для множеств $\mathbf{Q}, \mathbf{I}$ и $\mathbf{R}$.

Предельная точка множества может как принадлежать самому множеству, так и не принадлежать ему. Так, например, концы a и b отрезка $[a, b]$ и интервала (a, b) являются предельными точками и того и другого промежутка, но в первом случае они принадлежат ему, а во втором – нет.

Каждая точка прикосновения множества X является либо его изолированной точкой, либо его предельной точкой. В самом деле, либо у нее существует окрестность, не содержащая других точек множества, кроме нее самой, тогда она изолированная, либо в любой ее окрестности имеются точки множества X, отличные от нее, тогда она предельная.

Лемма 6. *Всякая функция непрерывна в каждой изолированной точке множества своего определения.*

▷ Пусть на множестве X задана функция f и x_0 – изолированная точка множества X. Тогда существует такая окрестность $U(x_0)$ точки, что

$$U(x_0) \cap X = \{x_0\}.$$

Какова бы ни была последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется условие $x_n \in U(x_0)$, и так как $x_n \in X$, то при $n > n_0$ имеет место равенство $x_n = x_0$, а следовательно, и $f(x_n) = f(x_0)$ (т.е., начиная с номера $n_0 + 1$, последовательность $\{f(x_n)\}$ делается стационарной), а потому $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$. В силу произвольного выбора последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. ◁

Таким образом, при изучении вопроса о непрерывности функции в некоторой точке следует рассматривать лишь предельные точки ее множества определения, так как, согласно доказанному, во всех изолированных точках этого множества она заведомо непрерывна.

6.10. Классификация точек разрыва.

Определение 12. *Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0. Тогда x_0 называется* ***точкой разрыва функции*** *f, либо если функция f не определена в самой точке x_0, либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной.*

Например, точка $x = 0$ является точкой разрыва функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, так как эта функция не определена при $x = 0$. Та же точка $x = 0$ является и точкой разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

так как в этом случае, хотя функция f и определена при $x = 0$, но она не непрерывна при $x = 0$.

Если в точке разрыва существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, то она называется *точкой разрыва первого рода,* а величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ – *скачком функции* f в точке x_0 (рис. 64).

Если скачок функции в точке x_0 равен нулю, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* (рис. 65).

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода.*

Примеры 1. У функции $f(x) = \operatorname{sign} x$ (см. рис. 59 на с. 102) точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода, и скачок в ней равен 2:

$\operatorname{sign}(+0) - \operatorname{sign}(-0) = 2.$

Та же точка $x_0 = 0$ является для функции $f(x) = |\operatorname{sign} x|$ (см. рис. 60 на

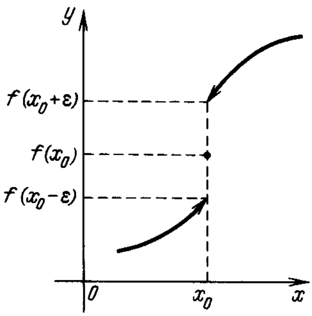


Рис. 64

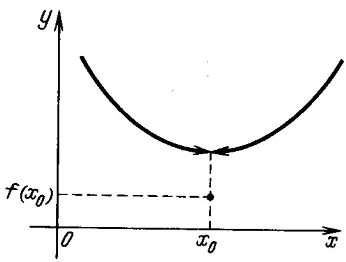


Рис. 65

с. 102) точкой устранимого разрыва:

$|\operatorname{sign}(+0)| - |\operatorname{sign}(-0)| = 0.$

2. Точка $x_0 = 0$ для функций $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ является точкой разрыва второго рода.

6.11. Пределы монотонных функций.

Определение 13. *Функцию $f(x)$, $x \in X$, называют возрастающей (соответственно убывающей) на множестве X и пишут $f\uparrow$ (соответственно $f\downarrow$), если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).*

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными.*

Если из неравенства $x_1 < x_2$, $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, что $f(x_1) > f(x_2)$), то функцию f называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*) и пишут $f\uparrow\uparrow$ (соответственно $f\downarrow\downarrow$). Строго возрастающие и строго убывающие функции называются *строго монотонными.* Если функция f (строго) возрастает на множестве X, то функция $-f$ (строго) убывает на этом множестве.

Верхней гранью $\sup f$ *функции* $f(x)$, $x \in X$ (или, в другой записи, $\sup\limits_{x \in X} f(x)$), называется верхняя грань значений этой функции на множестве ее задания X:

$$\sup f \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \{f(x)\},$$

а *нижней гранью* $\inf f$ (или $\inf\limits_{x \in X} f(x)$) – нижняя грань ее значений:

$$\inf f = \inf_{x \in X} \{f(x)\}.$$

Если функция f принимает в точке x_0 наибольшее значение на множестве X, то, очевидно, $f(x_0) = \sup f$, а если она принимает в точке x_0 наименьшее значение, то $f(x_0) = \inf f$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$, $x \in X$, возрастает на множестве X, $\alpha = \inf X$, $\beta = \sup X$, $\alpha \notin X$, $\beta \notin X$. Тогда у функции f существуют конечные или определенного знака бесконечные пределы справа в точке $x = \alpha$:*

$$\lim_{x \to \alpha + 0} f(x) = \inf_{x \in X} f(x) \tag{6.28}$$

и слева в точке $x = \beta$:

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = \sup_{x \in X} f(x). \tag{6.29}$$

Таким образом, если функция f ограничена снизу (т.е. ограничено снизу множество ее значений), то предел (6.28) будет конечным, а если f неограничена снизу, то этот предел будет бесконечным, равным $-\infty$.

Аналогично, предел (6.29) будет конечным или бесконечным, равным $+\infty$, в случае, когда функция f ограничена сверху или соответственно неограничена сверху.

Напомним, что запись $x \to \alpha + 0$ (соответственно запись $x \to \beta - 0$) означает, что рассматривается предел справа (слева) по множеству, не содержащему точки α (соответственно точки β).

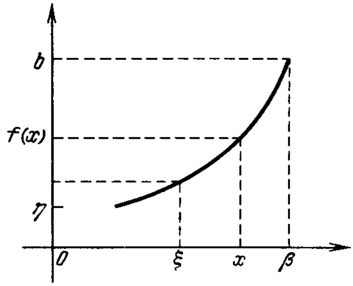


Рис. 66

$\triangleright$ Пусть функция f возрастает на множестве X и

$$b = \sup_{x \in X} f(x) \leqslant +\infty. \tag{6.30}$$

Зададим произвольно окрестность $U(b)$ точки b, и пусть η – левый конец этой окрестности (рис. 66); тогда $\eta < b$ и существует такое $\xi \in X$, что

$$f(\xi) > \eta. \tag{6.31}$$

Из того, что $\beta = \sup\limits_{\beta \notin X} X$, следует, что $\xi \leqslant \beta$, но $\xi \in X$, а по условиям теоремы $\beta \notin X$, поэтому $\xi < \beta$.

Обозначим через $U(\beta)$ окрестность точки β, левым концом которой является точка ξ (см. рис. 66). Тогда, если

$$x \in X \cap U(\beta), \tag{6.32}$$

то $\xi < x$ и, следовательно, в силу возрастания функции f будет выполняться неравенство

$$f(\xi) \leqslant f(x). \tag{6.33}$$

Поэтому

$$\eta \underset{\substack{(6.31)\\(6.33)}}{<} f(x) \leqslant \sup_{x \in X} f(x) \underset{(6.30)}{=} b. \tag{6.34}$$

Вспоминая, что точка η является левым концом окрестности $U(b)$, получим из (6.34)

$$f(x) \in U(b). \tag{6.35}$$

Выполнение условий (6.32) и (6.35) означает, что

$$\lim_{x \to \beta - 0} f(x) = b.$$

Аналогично рассматривается случай предела функции f при $x \to \alpha + 0$. $\triangleleft$

С л е д с т в и е. *Пусть функция f возрастает на интервале (a, b) и $x_0 \in (a, b)$; тогда в точке x_0 у функции f существуют* к о н е ч н ы е *односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.*

$\triangleright$ В самом деле, если функция f возрастает на интервале (a, b), то для любого $x \in (a, x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, а для любого

$x \in (x_0,\ b)$ – неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Иначе говоря, возрастающая функция f ограничена сверху на интервале (a, x_0) и ограничена снизу на интервале (x_0, b), следовательно, в силу теоремы 4, у нее существуют конечные пределы слева $f(x_0 - 0)$ и справа $f(x_0 + 0)$. $\lhd$

Замечание 1. Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива и для убывающих функций.

Замечание 2. Если функция f возрастает на множестве X, $\beta = \sup X$ и $\beta \in X$, то предел $\lim\limits_{x \to \beta} f(x)$ может существовать (рис. 67), тогда функция f будет непрерывна в точке $x = \beta$ (см. п. 6.2), а может и не существовать (рис. 68), тогда точка β будет точкой разрыва функции f. Подчеркнем, однако, что, согласно теореме 4, предел $\lim\limits_{x \to \beta - 0} f(x)$ всегда существует.

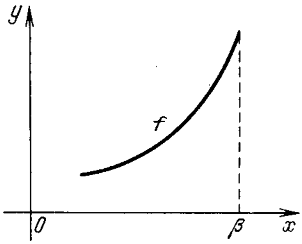


Рис. 67

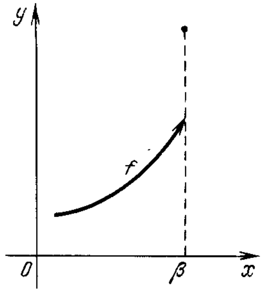


Рис. 68

6.12. Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 5 (критерий Коши). *Для того чтобы функция $f(x)$, $x \in X$, имела в (конечной или бесконечно удаленной) точке x_0 конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любых $x' \in X \cap U(x_0)$ и $x'' \in X \cap U(x_0)$ выполнялось бы неравенство*

$$|f(x'') - f(x')| < \epsilon. \tag{6.36}$$

$\rhd$ Докажем необходимость условия (6.36). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbf{R}$; тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для каждого $x \in X \cap U(x_0)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - a| < \epsilon/2.$$

Поэтому, если $x' \in X \cap U(x_0)$ и $x'' \in X \cap U(x_0)$, то

$$|f(x'') - f(x')| = |[f(x'') - a] + [a - f(x')]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x'') - a| + |a - f(x')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Докажем достаточность условий (6.36) для существования конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Пусть произвольно фиксировано $\epsilon > 0$; тогда существует такая окрестность $U(x_0)$, что для всех $x' \in X \cap U(x_0)$ и всех $x'' \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \epsilon$. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ В силу определения предела последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место включение $x_n \in U(x_0)$, а поскольку $x_n \in X$, то и включение $x_n \in X \cap U(x_0)$. Тогда для всех номеров $n > n_0$ и $m > n_0$ будем иметь $x_n \in X \cap U(x_0)$, $x_m \in X \cap U(x_0)$, и, следовательно, будет выполняться неравенство $|f(x_n) - f(x_m)| < \epsilon$. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ удовлетворяет критерию сходимости Коши для последовательностей и, следовательно, имеет конечный предел.

Таким образом, для любой последовательности $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет конечный предел. Отсюда, в силу леммы п. 6.3, сразу следует, что функция f имеет в точке x_0 конечный предел. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. Сформулируем критерий Коши существования конечного предела функции в терминах неравенств для случая, когда x_0 – действительное число:

Функция $f(x)$, $x \in X$, имеет в точке $x_0 \in \mathbf{R}$ конечный предел тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x' \in X$, $x'' \in X$, $|x' - x_0| < \delta$, $|x'' - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x'') - f(x')| < \epsilon$.

6.13. Предел и непрерывность композиции функций.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция f задана на множестве X, функция g – на множестве Y и $f(X) \subset Y$. Если существуют конечные или бесконечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \tag{6.37}$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0, \tag{6.38}$$

то при $x \to x_0$ существует предел (конечный или бесконечный) сложной функции $g[f(x)]$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = \lim_{y \to y_0} g(y). \tag{6.39}$$

$\triangleright$ Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$; тогда в силу (6.37) имеем

$$y_n \overset{\text{def}}{=} f(x_n) \to y_0, \quad y_n \in Y, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому в силу (6.38) $g(y_n) \to z_0$, но $y_n = f(x_n)$, следовательно, $g[f(x_n)] \to z_0$, $n = 1, 2, \ldots$, т.е. имеет место равенство (6.39). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Если функция g непрерывна в точке y_0, т.е.

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0), \tag{6.40}$$

то формулу (6.39) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g(\lim_{x \to x_0} f(x)). \tag{6.41}$$

Иначе говоря, предельный переход перестановочен с операцией взятия непрерывной функции. В самом деле, согласно теореме 6

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] \underset{(6.39)}{=} \lim_{y \to y_0} g(y) \underset{(6.40)}{=} g(y_0) \underset{(6.37)}{=} g(\lim_{x \to x_0} f(x)).$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывная функция от непрерывной функции непрерывна, точнее:

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то и их композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

▷ Действительно, непрерывность функции f в точке x_0 означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0, \tag{6.42}$$

поэтому в силу непрерывности функции g в точке y_0 из формулы (6.41) получим

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] \underset{(6.41)}{=} g[\lim_{x \to x_0} f(x)] \underset{(6.42)}{=} g(f(x_0)),$$

т.е. функция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0. ◁

Замечание 2. Обычно, когда говорят, что некоторая функция в данной точке имеет предел, что имеют в виду, что этот предел конечный, а случай бесконечного предела оговаривают особо.

6.14. Предел и непрерывность функций комплексного аргумента. Понятия предела и непрерывности функции обобщаются на случай функций, значениями которых являются комплексные числа и которые заданы на подмножествах множества комплексных чисел.

К таким функциям относятся, например, функции $f(z) = |z|$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = z^2$, $f(z) = 1/z$. Первые три определены на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, а последняя – на комплексной плоскости, из которой удалена точка 0; первая принимает только неотрицательные действительные значения, три последние – существенно комплексные.

Итак, будем здесь предполагать, что функция f задана на некотором подмножестве Z множества комплексных чисел $\mathbf{C}$ и принимает комплексные значения, т.е. что

$$f(z) \in \mathbf{C}, \quad z \in Z \subset \mathbf{C}.$$

Комплексное число w_0 называется пределом функции f в точке z_0 (или, что то же самое, при $z \to z_0$), если для любой последовательности комплексных чисел $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ (см. п. 5.11), имеет место равенство $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$. В этом случае пишут $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$.

В терминах окрестностей точек на комплексной плоскости (п. 5.11) это определение равносильно следующему.

Комплексное число w_0 называется *пределом функции* f *в точке* z_0, если для любой окрестности V точки w_0 существует такая окрестность U точки z_0, что

$$f(U \cap Z) \subset V.$$

На "ϵ, δ-языке" это означает следующее: для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z \in Z$, для которых $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) - w_0| < \epsilon.$$

Доказательство эквивалентности двух сформулированных определений предела функции комплексного переменного – в терминах последовательностей и в терминах окрестностей – проводится аналогично случаю функций действительного аргумента, принимающих действительные значения.

При рассмотрении предела функции f в точке z_0 возможны два случая: z_0 принадлежит множеству Z, на котором задана функция f, или не принадлежит ему. Если $z_0 \in Z$, то существование предела функции f в точке z_0 означает, что

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

В этом случае функция f называется *непрерывной в точке* z_0.

Если $f(z) = u(z) + iv(z)$, $w_0 = u_0 + iv_0$, $u(z)$, $v(z)$, u_0, $v_0 \in \mathbf{R}$, то существование предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ равносильно, как это легко видеть, существованию пределов $\lim\limits_{z \to z_0} u(z) = u_0$ и $\lim\limits_{z \to z_0} v(z) = v_0$, причем в случае существования указанных пределов имеет место равенство

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} u(z) + i \lim_{z \to z_0} v(z). \tag{6.43}$$

В частности, функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны функции $u(z)$ и $v(z)$.

Заметим, что функции $u(z)$ и $v(z)$ принимают действительные значения, но их аргументы – комплексные числа, поэтому пределы этих функций и их непрерывность понимаются в смысле сделанных выше определений для функций комплексного переменного.

На комплекснозначные функции комплексного аргумента переносятся многие свойства предела функций, доказанные выше в этом параграфе для действительных функций действительного аргумента. Например, предел линейной комбинации функций, имеющих пределы в некоторой точке, равен такой же линейной комбинации этих пределов.

Функция $f(z)$ называется *ограниченной* на множестве $Z \subset C$, если на этом множестве ограничена ее абсолютная величина $|f(z)|$.

Как и раньше, справедливо утверждение: *если функция* f *имеет предел при* $z \to z_0$, *то она ограничена в некоторой окрестности точки* z_0.

Переносятся на случай функций комплексного аргумента понятие предела при стремлении аргумента к бесконечности и понятие бесконечного предела. Ограничимся формулировкой общего понятия предела (конечного и бесконечного) лишь в терминах последовательностей.

Бесконечность ∞ называется *бесконечно удаленной точкой комплексной плоскости* **C**, в связи с чем точки самой комплексной плоскости **C** называются также и *конечными точками.*

Конечная или бесконечно удаленная точка w_0 комплексной плоскости **C** называется *пределом функции* f *при* $z \to z_0$, где z_0 – также конечная или бесконечно удаленная точка, если для любой последовательности $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, имеет место $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = w_0$.

Это определение предела (как и все сформулированные выше) содержательно, конечно, лишь в том случае, когда существует такая последовательность $z_n \in Z$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$. В этом случае точка z_0 называется соответственно *конечной* или *бесконечно удаленной точкой прикосновения множества* Z.

§ 7. Свойства непрерывных функций

7.1. Ограниченность непрерывных функций. Достижимость экстремальных значений.

О п р е д е л е н и е 1. *Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой его точке.*

Т е о р е м а 1 (В е й е р ш т р а с с). *Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней и своей нижней грани.*

⊳ Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\beta = \sup\limits_{[a, b]} f(x)$. Покажем, что $\beta < +\infty$ и что существует такое $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = \beta$. Пусть $\{y_n\}$ – такая последовательность, что

$$y_n \to \beta, \quad y_n < \beta, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.1}$$

Согласно определению верхней грани для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдется такое $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > y_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.2}$$

С другой стороны, поскольку β – верхняя грань функции f, то для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant \beta$, в частности, $f(x_n) \leqslant \beta$, $n = 1, 2, \ldots$ Итак,

$$y_n < f(x_n) \leqslant \beta, \quad n = 1, 2. \tag{7.3}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена: $a \leqslant x_n \leqslant b$, $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно, по теореме Больцано – Вейерштрасса она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим ее предел через x_0

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0. \tag{7.4}$$

Поскольку $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, то $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Из (7.3) имеем

$$y_{n_k} \underset{(7.2)}{<} f(x_{n_k}) \underset{(7.3)}{\leqslant} \beta, \tag{7.5}$$

причем $\{y_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{y_n\}$, и потому в силу (7.1) $\lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = \beta$, а тогда из (7.5) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \beta. \tag{7.6}$$

Но функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, в частности, в точке x_0, поэтому из (7.4) вытекает, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \tag{7.7}$$

Следовательно,

$$\beta \underset{\substack{(7.6)\\(7.7)}}{=} f(x_0) < +\infty.$$

Аналогично доказывается ограниченность снизу функции f и достижимость ее нижней грани. $\lhd$

7.2. Промежуточные значения непрерывных функций.

Теорема 2. (Больцано – Коши). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, существует такая точка $\xi \in [a, b]$, что*

$$f(\xi) = C. \tag{7.8}$$

$\rhd$ Пусть для определенности $f(a) = A < B = f(b)$ и, следовательно, $A < C < B$. Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = C$, то точка ξ найдена (см. (7.8)): $\xi = \frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq C$, то либо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < C$, либо $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > C$. В первом случае выберем отрезок $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, а во втором – отрезок $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$; выбранный отрезок обозначим $[a_1, b_1]$. Очевидно, $f(a_1) < C < f(b_1)$ и $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ его средней точкой $\frac{a_1 + b_1}{2}$

на два равных отрезка и выберем из них тот, на левом конце которого значение функции меньше C, а на правом – больше C и т.д. Тогда либо через конечное число шагов мы получим такую среднюю точку ξ некоторого отрезка, что $f(\xi) = C$, тогда теорема доказана, либо – такую систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, что

$$f(a_n) < C < f(b_n), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{7.9}$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7.10}$$

Пусть ξ – общая точка, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$; тогда (см. замечание в п. 5.7)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

и, следовательно, в силу непрерывности функции f

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi). \tag{7.11}$$

Но в силу (7.9)

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n). \tag{7.12}$$

Из соотношений (7.11) и (7.12) следует, что $f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi)$, т.е. что $f(\xi) = C$. $\lhd$

Следствие. *Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.*

7.3. Обратные функции.

Лемма. *Если функция f строго возрастает* (см. п. 6.11) *на множестве X и $f(X) = Y$, то обратная функция f^{-1}* (см. п. 1.2) *является однозначной строго возрастающей на множестве Y функцией.*

$\rhd$ Докажем сначала однозначность обратной функции f^{-1}. Допустим противное: пусть существует такая точка $y \in Y$, что ее прообраз содержит по крайней мере две различные точки x_1 и x_2, т.е. $x_1 \neq x_2$ и $f(x_1) = f(x_2)$. Возможны два случая: либо $x_1 < x_2$, либо $x_1 > x_2$. В первом случае в силу строгого возрастания функции f должно быть $f(x_1) < f(x_2)$, а во втором $f(x_1) > f(x_2)$. И то и другое невозможно, так как $f(x_1) = f(x_2)$.

Докажем теперь, что обратная функция f^{-1} строго возрастает на множестве $Y = f(X)$. Пусть $y_1 < y_2$, $y_1 \in Y$, $y_2 \in Y$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ и, следовательно, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Если бы $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2)$, т.е. имело бы место равенство $y_1 = y_2$, а если бы $x_1 > x_2$, то в силу строгого возрастания функции f имело бы место неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. $y_1 > y_2$. И то и другое противоречит условию $y_1 < y_2$. Таким образом, остается возможным только случай $x_1 < x_2$. $\lhd$

Теорема 3. *Если функция f строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, то*

$$f([a, b]) = [A, B] \tag{7.13}$$

и обратная функция является однозначной строго возрастающей непрерывной на отрезке $[A, B]$ функцией.

$\triangleright$ Докажем сначала равенство (7.13). Если $a \leqslant x \leqslant b$, то в силу возрастания функции f на отрезке $[a, b]$ выполняется неравенство

$$A = f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = B.$$

С другой стороны, для любой точки $y \in [A, B]$ согласно теореме 2 о промежуточных значениях непрерывной функции найдется такая точка $x \in [a, b]$, что $f(x) = y$. Это и означает, что образом отрезка $[a, b]$ при отображении f является отрезок $[A, B]$ и тем самым отрезок $[A, B]$ является множеством, на котором определено обратное отображение (обратная функция) f^{-1}.

Однозначность функции f^{-1} и ее строгое возрастание на отрезке $[A, B]$ следуют из леммы. Докажем непрерывность на этом отрезке.

Выберем произвольно $y_0 \in [A, B]$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $y_n \in [A, B]$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда из равенства (7.13) следует, что существуют такие точки $x_0 \in [a, b]$ и $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_0) = y_0, \qquad f(x_n) = y_n, \tag{7.14}$$

т.е. $f^{-1}(y_0) = x_0$, $f^{-1}(y_n) = x_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, т.е. что

$$\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0).$$

Допустим, что это не так. Тогда найдется такое $\epsilon > 0$, что вне окрестности $U(x_0, \epsilon)$ лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, а поэтому у нее существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, все члены которой также лежат вне окрестности $U(x_0, \epsilon)$:

$$x_{n_k} \notin U(x_0, \epsilon)$$

и, следовательно,

$$x_{n_k} \in [a, b] \setminus U(x_0, \epsilon), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{7.15}$$

Множество $[a, b] \setminus U(x_0, \epsilon)$ является либо отрезком, либо объединением двух отрезков (рис. 69). По теореме Больцано – Вейерштрасса у подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ существует ее подпоследовательность $\{x_{n_{k_s}}\}$, сходящаяся к некоторой точке x^*:

$$\lim_{s\to\infty} x_{n_{k_s}} = x^*,$$

причем в силу (7.15) $x^* \in [a, b] \setminus U(x_0, \epsilon)$. Из этого включения, очевидно, вытекает, что

$$x_0 \neq x^*. \tag{7.16}$$

Из непрерывности функции f в точке x^* следует, что

$$\lim_{s \to \infty} f(x_{n_{k_s}}) = f(x^*).$$

Но предел подпоследовательности $\{f(x_{n_{k_s}})\}$ последовательности $y_n = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, равен пределу всей последовательности, поэтому

$$f(x^*) = \lim_{s \to \infty} f(x_{n_{k_s}}) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \underset{(7.14)}{=} \lim_{n \to \infty} y_n = y_0.$$

А так как $y_0 \underset{(7.14)}{=} f(x_0)$, то получилось, что $f(x^*) = f(x_0)$. Это же в силу взаимной однозначности отображения f противоречит неравенству (7.16). Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0),$$

т.е. обратная функция f^{-1} непрерывна в произвольно выбранной точке $y_0 \in [A, B]$. ◁

Теорема 4. *Если функция f непрерывна и строго возрастает на интервале (a, b),*

$$A = \lim_{x \to a} f(x), \quad B = \lim_{x \to b} f(x), \tag{7.17}$$

то $f((a, b)) = (A, B)$ и обратная функция f^{-1} является однозначной строго возрастающей непрерывной на интервале (A, B) функцией.

▷ Поскольку из (7.17) следует, что

$$A = \inf_{(a,b)} f(x), \quad B = \sup_{(a,b)} f(x) \tag{7.18}$$

(см. теорему 4 из п. 6.11), то

$$f((a, b)) \subset [A, B].$$

Более того, для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $A < f(x) < B$. В самом деле, если бы нашлась, например, такая точка $x \in (a, b)$, что $f(x) = A$, то для любой точки x', $a < x' < x$, в силу строгого возрастания функции f имело бы место неравенство $f(x') < f(x) = A = \inf_{(a, b)} f(x)$,

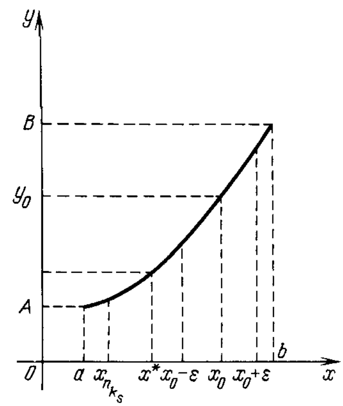


Рис. 69

что противоречит определению нижней грани. Итак,

$$f((a, b)) \subset (A, B). \tag{7.19}$$

Пусть теперь $y \in (A,B)$. Согласно определению нижней и верхней граней существуют такие точки $x_1 \in (a, b)$ и $x_2 \in (a, b)$, что $A < f(x_1) < y < f(x_2) < B$. В силу строгого возрастания функции f^{-1} отсюда следует, что $x_1 < x_2$.

Из теоремы 3, примененной к отрезку $[x_1, x_2]$, следует, что $f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)]$, а потому $y \in [f(x_1), f(x_2)] = f([x_1, x_2]) \subset f((a, b))$. Так как мы доказали, что для любого $y \in (A, B)$ $y \in f((a, b))$, то

$$(A, B) \subset f((a, b)). \tag{7.20}$$

Из (7.19) и (7.20) следует, что $f((a, b)) = (A, B)$.

Однозначность и строгое возрастание обратной функции f^{-1} на интервале (A, B) и в этом случае сразу следуют из леммы. Непрерывность же функции f^{-1} в каждой точке $y \in (A, B)$ доказывается тем же рассуждением, что и в теореме 3. $\lhd$

Отметим, что в теореме 4 интервалы (a, b) и (A, B) могут быть как конечными, так и бесконечными.

Утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, имеют место и для строго убывающих функций.

Пример. Функция $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, строго возрастает на полуоси $x > 0$ и непрерывна на всей числовой оси. Действительно, если $0 < x_1 < x_2$, то, умножая n раз это неравенство само на себя, получим $0 < x_1^n < x_2^n$; это и означает строгое возрастание рассматриваемой функции. Для доказательства ее непрерывности заметим, что функция $y = x$ непрерывна на всей числовой оси. В самом деле, каковы бы ни были $x_0 \in \mathbf{R}$ и $\epsilon > 0$, возьмем $\delta = \epsilon$. Если $y_0 = x_0$, то $\Delta y = y - y_0 = x - x_0 = \Delta x$. Поэтому при $|\Delta x| < \delta$ получим $|\Delta y| = |\Delta x| < \delta = \epsilon$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а это и является условием непрерывности функции $y = x$. Функция же $y = x^n$ непрерывна на всей числовой оси (в частности, при $x > 0$) как произведение n непрерывных функций $y = x$.

Из того, что $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, следует согласно теореме 4, что множество значений функции $y = x^n$ на интервале $(0, +\infty)$ также является интервалом $(0, +\infty)$. Отсюда согласно той же теореме вытекает, что обратная функция $x = \sqrt[n]{y}$ определена, строго возрастает и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому, в частности, из любого положительного числа можно извлечь положительный корень n-й степени, и притом единственный, а следовательно, для любого рационального числа r однозначно определена степень a^r, $a > 0$, такая, что $a^r > 0$ (см. п. 2.1).

§ 8. Непрерывность элементарных функций

8.1. Многочлены и рациональные функции.

Теорема 1. *Многочлен непрерывен на всей числовой оси.*

$\triangleright$ Действительно, во-первых, постоянная на всей числовой оси функция непрерывна во всех точках (см. свойство 3° пределов функций в п. 6.7); во-вторых, функции x^k, $k = 1, 2, \ldots$, также непрерывны на всей числовой оси (см. пример в п.7.3), а любой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots$ $\ldots + a_nx^n$ является линейной комбинацией функций $1, x, x^2, \ldots, x^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$, поэтому, согласно следствию из свойства 6° пределов функции в п. 6.7, он непрерывен на всей числовой оси. $\triangleleft$

Теорема 2. *Рациональная функция* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, *где* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены, непрерывна во всех точках числовой оси, в которых* $Q(x) \neq 0$.

Δ Это сразу следует из непрерывности многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ на всей числовой оси и непрерывности частного непрерывных функций во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7). $\triangleleft$

8.2. Показательная и логарифмическая функции. Перечислим основные свойства степеней a^r, $a > 0$, с рациональными показателями $r \in \mathbf{Q}$ (см. п. 2.1).

1°. *Пусть* $r_1 < r_2$. *Если* $a > 1$, *то* $a^{r_1} < a^{r_2}$, *а если* $a < 1$, *то* $a^{r_1} > a^{r_2}$.

2°. $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$.

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$.

Эти свойства доказываются в курсе элементарной математики в предположении существования и однозначной определенности a^r для любого рационального r, $a > 0$, а это было доказано в п. 7.3.

Вспомним еще, что $a^0 \overset{\text{def}}{=} 1$. Из 2° следует, что $a^r \cdot a^{-r} = a^0 = 1$ и, следовательно,

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Из свойства 1° вытекает, что для любого $r \in \mathbf{Q}$ выполняется неравенство $a^r > 0$. В самом деле, если $a \geqslant 1$ и $r \geqslant 0$, то по свойству 1° $a^r \geqslant a^0 =$ $= 1 > 0$. Отсюда следует, что $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r} > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Нашей ближайшей задачей является определение значения выражения a^x для любого действительного числа x и $a > 0$. Затем будут изучены свойства функции a^x.

Лемма 1. *Для любого $a>0$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1. \tag{8.1}$$

▷ Пусть сначала $a>1$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ положим

$$x_n = a^{1/n} - 1. \tag{8.2}$$

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$, то $a^{1/n} > a^0 = 1$ и, следовательно,

$$x_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.3}$$

Из (8.2) и (3.3) вытекает, что

$$a = (1+x_n)^n = 1 + nx_n + \ldots > nx_n.$$

Отсюда и из неравенства (8.3) получаем $0 < x_n < \frac{a}{n}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, что в силу (8.2) и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1. \tag{8.4}$$

Если $a<1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и потому

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{1/n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n}} \underset{(8.4)}{=} 1.$$

Наконец, если $a=1$, то утверждение (8.1) очевидно, так как

$$1^{1/n} = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Из доказанного следует, что при любом $a>0$ имеет место и равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1. \lhd$$

Лемма 2. *Пусть $a>0$; тогда*

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r\in\mathbf{Q}}} a^r = 1. \tag{8.5}$$

▷ Функция $f(r) = a^r$ монотонна на множестве рациональных чисел $\mathbf{Q}$. Следовательно (см. п. 6.11), она имеет предел в точке $r=0$ по множеству $\mathbf{Q}\setminus\{0\}$ слева $f(-0)$ и справа $f(+0)$. Согласно определению предела функции в терминах последовательностей для любой последовательности $r_n \in \mathbf{Q}$,

$r_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(+0),$$

а для $r_n \in \mathbf{Q}$, $r_n < 0$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, соответственно

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = f(-0).$$

Выбрав сначала $r_n = 1/n$, а затем $r_n = -1/n$, согласно лемме 1 будем иметь

$$f(+0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = 1,$$

$$f(-0) = \lim_{n\to\infty} f(-1/n) = 1.$$

Отсюда, вспомнив, что $a^0 = 1$, получим

$$f(-0) = f(+0) = 1 = f(0). \tag{8.6}$$

Следовательно, функция $f(r) = a^r$ непрерывна по множеству рациональных чисел в точке $r = 0$ (см. п. 6.9). Это и означает, что

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r\in\mathbf{Q}}} a^r = 1. \lhd$$

Определение. *Пусть $a > 0$ и $x \in \mathbf{R}$. Определим a^x как предел a^r по множеству рациональных чисел $\mathbf{Q}$, когда $r \to x$, т.е.*

$$a^x \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{r\to x\\ r\in\mathbf{Q}}} a^r. \tag{8.7}$$

Покажем, используя определение предела функции по Гейне, что предел (8.7) существует. Пусть

$$r_n \to x, \quad r_n \in \mathbf{Q}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8.8}$$

Оценим разность $a^{r_n} - a^{r_m}$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1|, \quad n \in \mathbf{N}, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{8.9}$$

Последовательность $\{r_n\}$ имеет конечный предел, следовательно, она ограничена, т.е. существует такое число $A > 0$, его без ограничения общности будем считать рациональным ($A \in \mathbf{Q}$), что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $-A < r_n < A$, а следовательно, в случае $a \geqslant 1$ неравенство

$$a^{-A} \leqslant a^{r_n} \leqslant a^A,$$

а в случае $0 < a < 1$ неравенство

$$a^{-A} > a^{r_n} > a^{A}.$$

Поэтому при любом $a > 0$ существует такое число $B > 0$, что

$$a^{r_n} \leqslant B, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8.10}$$

т.е. последовательность $\{a^{r_n}\}$ ограничена сверху числом B.

Далее, в силу леммы 2 для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $r \in \mathbf{Q}$, $|r| < \delta$, выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \epsilon/B. \tag{8.11}$$

В силу же существования у последовательности $\{r_n\}$ конечного предела (см. (8.8)) для указанного $\delta > 0$, согласно критерию Коши сходимости последовательности, найдется такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство $|r_n - r_m| < \delta$, а следовательно, в силу (8.11) и неравенство

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \epsilon/B. \tag{8.12}$$

Отсюда и из неравенства (8.10) получаем: для всех $n > n_0$ и $m > n_0$ выполняется неравенство

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \underset{(8.9),(8.10),(8.12)}{<} B \cdot \frac{\epsilon}{B} = \epsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{a^{r_n}\}$ удовлетворяет критерию Коши сходимости последовательностей и потому имеет конечный предел. Поскольку $r_n \in \mathbf{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, – произвольная последовательность рациональных чисел, стремящаяся к числу x, то в силу леммы 1 и 6.3 отсюда следует, что предел последовательности $\{a^{r_n}\}$ является и пределом любой другой последовательности $\{a^{r'_n}\}$, $r'_n \in \mathbf{Q}$, $r'_n \to x$, $n = 1, 2, \ldots$ Это и означает, что существует предел (8.7).

Отметим, что если $x \in \mathbf{Q}$, то определение (8.7) совпадает с уже известным определением рациональной степени a^r числа a, $r \in \mathbf{Q}$. Действительно, в силу доказанного предел $\lim\limits_{\substack{r \to x \\ r \in \mathbf{Q}}} a^r = a^x$ существует и для любой последовательности $r_n \to x$, $r_n \in \mathbf{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, равен пределу $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n}$. В случае $x = r \in \mathbf{Q}$ за указанную последовательность можно взять стационарную последовательность $r_n = r$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда будем иметь

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim_{n \to \infty} a^r = a^r.$$

Функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$, называется *показательной функцией*.

Т е о р е м а 3. *Показательная функция a^x, $a > 0$, обладает следующими свойствами:*

1°. *При $a>1$ она строго возрастает, а при $a<1$ строго убывает на всей числовой оси.*

2°. *Для любых $x \in \mathbf{R}$ и $y \in \mathbf{R}$ имеет место равенство*

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

3°. *Для любых $x \in \mathbf{R}$ и $y \in \mathbf{R}$ имеет место равенство*

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

4°. *Функция a^x непрерывна на всей числовой оси.*

5°. *Областью значений функции a^x является множество всех положительных чисел, т.е. бесконечный интервал $(0, +\infty)$.*

$\triangleright$ Доказательство 1°. Пусть для определенности $a>1$ и $x<y$. Существуют такие рациональные числа r' и r'', что $x<r'<r''<y$. Возьмем последовательности рациональных чисел $r'_n \to x$ и $r''_n \to y$ такие, что $r'_n < r' < r'' < r''_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда в силу свойства 1° степеней с рациональными показателями будем иметь

$$a^{r'_n} < a^{r'} < a^{r''} < a^{r''_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \leqslant a^{r'} < a^{r''} \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^y,$$

т.е. при $x<y$ имеет место неравенство $a^x < a^y$.

Отметим, что из 1° и того, что для любого рационального r имеет место неравенство $a^r > 0$, следует, что для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$a^x > 0. \tag{8.13}$$

В самом деле, если, например, $a \geqslant 1$ и $x \in \mathrm{R}$, то, выбрав рациональное число r так, чтобы выполнялось неравенство $r<x$, получим $a^x > a^r > 0$. Аналогично рассматривается случай $0<a<1$.

Доказательство 2°. Пусть $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $r'_n \in \mathbf{Q}$, $r''_n \in \mathbf{Q}$, $r'_n \to x$, $r''_n \to y$, и, следовательно, $r'_n + r''_n \to x + y$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$a^x a^y \underset{(7)}{=} \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} \underset{\text{п.6.7}}{=} \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} a^{r''_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} \underset{(8.7)}{=} a^{x+y}.$$

Отметим, что, как и в случае рациональных показателей, из свойства 2° следует, что для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{8.14}$$

Доказательство 4° (свойство 3° будет доказано дальше). В силу доказанной монотонности функции a^x (см. 1°) рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 2, останутся верными, если в них всюду заменить рациональное число r на действительное, и тем самым получится доказательство равенства

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1. \tag{8.15}$$

Поскольку $a^0 = 1$, то это равенство означает непрерывность функции a^x при $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} a^x = a^0.$$

Отсюда следует ее непрерывность в любой точке: если $y = a^x$, то

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x \underset{2^\circ}{=} a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} a^x(a^{\Delta x} - 1) = a^x \lim_{\Delta x\to 0} (a^{\Delta x} - 1) \underset{(8.15)}{=} 0,$$

что и означает непрерывность функции a^x в точке $x \in \mathbf{R}$.

Доказательство 3°. Пусть сначала $y = p$ – натуральное число; тогда, применив p раз свойство 2°, получим

$$(a^x)^p = \underbrace{a^x \cdot a^x \cdot \ldots \cdot a^x}_{p \text{ раз}} = a^{\overbrace{x+x+\ldots+x}^{p \text{ раз}}} = a^{xp}. \tag{8.16}$$

Если $y = 1/q$, где q – натуральное число, то

$$(a^x)^{1/q} = a^{x/q}. \tag{8.17}$$

В самом деле, согласно определению корня, для доказательства справедливости равенства (8.17) надо показать, что

$$(a^{x/q})^q = a^x,$$

а это равенство сразу следует из свойства (8.16):

$$(a^{x/q})^q \underset{(8.16)}{=} a^{(x/q)q} = a^x.$$

Если $y = p/q$, где p и q – натуральные числа, то

$$(a^x)^{p/q} = [(a^x)^p]^{1/q} \underset{(8.16)}{=} (a^{xp})^{1/q} \underset{(8.17)}{=} a^{xp/q}. \tag{8.18}$$

Если же $y = -p/q$, то

$$(a^x)^{-p/q} \underset{(8.14)}{=} \frac{1}{(a^x)^{p/q}} \underset{(8.18)}{=} \frac{1}{a^{xp/q}} \underset{(8.14)}{=} a^{-xp/q}. \tag{8.19}$$

Наконец, при $y = 0$, очевидно,

$$(a^x)^0 = 1 = a^0 = a^{x \cdot 0}. \tag{8.20}$$

Таким образом, для любого рационального числа r справедливо равенство

$$(a^x)^r = a^{xr}. \tag{8.21}$$

Пусть теперь y – произвольное действительное число. Возьмем какую-либо последовательность рациональных чисел $\{r_n\}$, имеющую своим пределом число y, т.е. $r_n \to y$, $r_n \in \mathbf{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$(a^x)^{r_n} \underset{(8.21)}{=} a^{xr_n}. \tag{8.22}$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} xr_n = xy$, то в силу непрерывности функции a^x на всей числовой оси имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} a^{xr_n} = a^{xy} \tag{8.23}$$

а в силу определения (8.7) степени числа – равенство

$$\lim_{n \to \infty} (a^x)^{r_n} = (a^x)^y. \tag{8.24}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (8.22), в силу (8.23) и (8.24) получим $(a^x)^y = a^{xy}$.

Доказательство 5°. Поскольку функция a^x – строго монотонная, то для того чтобы доказать, что ее областью значений является бесконечный интервал $(0, +\infty)$, надо согласно теореме 4 п. 7.3 доказать, например, при $a > 1$, что

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty. \tag{8.25}$$

Эти пределы (конечные или бесконечные) в силу монотонности функции всегда существуют (см. п. 6.11), поэтому достаточно лишь доказать, что для каких-либо фиксированных последовательностей $x_n \to -\infty$ и $x'_n \to +\infty$ имеют место равенства $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x'_n} = +\infty$, например, что эти равенства справедливы для последовательностей $x_n = -n$ и $x'_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$ А это было доказано выше (см. пример 4 в п. 5.1).

Функция, обратная к показательной функции $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *логарифмической* и обозначается $\log_a y$. В силу свойства 5° показательной функции логарифм $\log_a y$ определен для любого положительного числа.

Число a называется *основанием логарифмической функции* $y = \log_a x$. Особую роль в математическом анализе играет логарифмическая функция с основанием $a = e$, она обозначется $\ln x$.

Согласно определению обратной функции справедливо тождество

$$a^{\log_a y} = y. \tag{8.26}$$

Из свойств 2° и 3° показательной функции следуют соответствующие свойства логарифма произведения и степени:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \quad x > 0, \quad y > 0, \tag{8.27}$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \quad x > 0. \tag{8.28}$$

Докажем, например, формулу (8.28). Согласно свойству 3° показательной функции из теоремы 3 имеем

$$(a^\beta)^\alpha = a^{\beta\alpha}, \quad \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \tag{8.29}$$

Поэтому

$$\log_a x^\alpha \underset{(8.26)}{=} \log_a (a^{\log_a x})^\alpha \underset{(8.29)}{=} \log_a a^{\alpha \log_a x} = \alpha \log_a x.$$

Из формул (8.27) и (8.28) теперь a^β через x, получим формулу (8.28). Отсюда следует свойство логарифма частного:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a xy^{-1} \underset{(8.27)}{=} \log_a x + \log_a y^{-1} \underset{(8.28)}{=} \log_a x - \log_a y.$$

С помощью перечисленных свойств показательной и логарифмической функций можно получить и другие их свойства.

Докажем, например, равенство

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad a > 0, \ b > 0. \tag{8.30}$$

В случае $a = 1$ или $b = 1$ написанное равенство очевидно. Если же $a \neq 1$ и $b \neq 1$, то

$$(ab)^x \underset{(8.26)}{=} (aa^{\log_a b})^x \underset{2°}{=} (a^{1+\log_a b})^x \underset{3°}{=} a^{x(1+\log_a b)} =$$

$$= a^x a^{x \log_a b} \underset{(8.28)}{=} a^x a^{\log_a b^x} \underset{(8.26)}{=} a^x b^x.$$

8.3. Степенная функция. Функция $y = x^\alpha$, $x > 0$, называется *степенной функцией* ($\alpha \in \mathbf{R}$).

Теорема 4. *При любом $\alpha \in \mathbf{R}$ степенная функция x^α непрерывна при всех $x > 0$.*

$\rhd$ Это сразу следует из того, что степенную функцию x^α можно представить как композицию непрерывных функций – логарифмической и показательной. В самом деле, поскольку $x = e^{\ln x}$, то

$$y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = e^u, \quad u = \alpha \ln x. \lhd$$

Функция x^α при некотором значении α может оказаться определенной при $x = 0$ или при $x < 0$, или и там и там, например, x^n, $1/x^n$, $n \in \mathbf{N}$. В этих случаях степенная функция непрерывна во всех точках, в которых она определена. В точке $x = 0$ это легко проверить непосредственно, а при $x < 0$ это следует из того, что степенная функция, если она определена при $x < 0$, является четной или нечетной функцией.

8.4. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Лемма 3. *Для любого действительного числа x имеет место неравенство*

$$|\sin x| \leqslant |x|. \tag{8.31}$$

▷ Рассмотрим на координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат O. Если $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $OA = R$, $\angle AOC = x$ (рис. 70), то

$$0 \leqslant \sin x = \frac{|AC|}{R} = \frac{|AB|}{2R} \leqslant \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2R} = x,$$

где $|AB|$ — длина хорды, соединяющей точки A и B, $|\overset{\frown}{AB}|$ — длина дуги окружности, соединяющей эти точки, а отношение $\frac{|\overset{\frown}{AB}|}{R}$ равно радианной

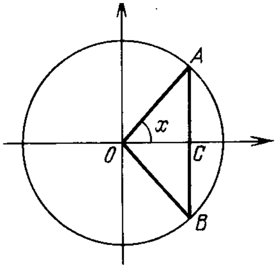


Рис. 70

мере угла $\angle AOB$, т.е. равно $2x$. Таким образом, неравенство (8.31) для случая $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ доказано.

Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и потому по уже доказанному $|\sin x| = \sin(-x) \leqslant -x = |x|$, т.е. в этом случае неравенство (8.31) также справедливо.

Наконец, если $|x| > \frac{\pi}{2} > 1$, то неравенство (8.31) очевидно, ибо $|\sin x| \leqslant 1$. ◁

Теорема 5. *Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ непрерывны на всей числовой оси.*

$\triangleright$ Докажем, например, непрерывность функции $y = \sin x$:

$$|\Delta y| = |\sin(x+\Delta x) - \sin x| =$$

$$= 2\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|, \tag{8.32}$$

ибо

$$\left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1, \qquad \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Из неравенства (8.32) сразу следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает непрерывность функции $y = \sin x$ в произвольной точке $x \in \mathbf{R}$. $\triangleleft$

Следствие. *Функции* $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *и* $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *непрерывны во всех точках числовой оси, кроме тех, в которых их знаменатели обращаются в нуль.*

$\triangleright$ Это сразу следует из непрерывности частного непрерывных функций в точках, в которых делитель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7). $\triangleleft$

Теорема 6. *Каждая из обратных тригонометрических функций* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ *и* $y = \operatorname{arcctg} x$ *непрерывна в области своего определения.*

$\triangleright$ Это в силу теоремы о непрерывности обратных функций (см. п. 7.3) сразу следует из теорем 3 и 4. $\triangleleft$

8.5. Элементарные функции.

Теорема 7. *Каждая элементарная функция непрерывна в области своего определения.*

$\triangleright$ В самом деле, согласно теоремам 1–6, все основные элементарные функции непрерывны на множествах, на которых они определены. Поэтому непрерывна в области своего определения и каждая функция, которая может быть получена из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции композиции функций, т.е. каждая элементарная функция (определение элементарной функции см. в п. 3.2). $\triangleleft$

§ 9. Сравнение функций

9.1. Замечательные пределы. В этом пункте будут вычислены пределы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, которые обычно называются замечательными пределами.

I. *Докажем, что*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (9.1)$$

$\triangleright$ Рассмотрим в координатной плоскости круг радиуса R с центром в начале координат. Если (рис. 71) $OA = R$, $\angle AOB = x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $AC \perp OA$, то

пл. $\Delta\, OAB <$ пл. сектора $OAB <$ пл. $\Delta\, OAC$,

т.е. $\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$; отсюда $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, или

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

В силу четности функций $\frac{x}{\sin x}$ и $\frac{1}{\cos x}$ это неравенство справедливо и для $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $x \to 0$ и

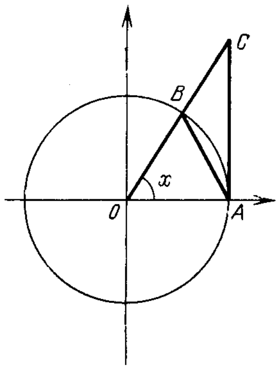


Рис. 71

заметив, что в силу непрерывности функции $\cos x$ при $x = 0$ имеет место равенство $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

что равносильно равенству (9.1). $\triangleleft$

С помощью предела (9.1) вычисляется ряд других пределов, например,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} \underset{x = \sin y}{=} \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1.$$

II. *Докажем, что*

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{9.2}$$

$\triangleright$ Мы уже знаем (см. п. 5.7), что

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Более того, из замечания 2 в п. 6.1 следует, что для любой последовательности $n_k \in \mathbf{N}$, $n_k \to +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$, также имеет место равенство

$$\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e. \tag{9.3}$$

Пусть $x_k > 0$ и $x_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $n_k = \left[\frac{1}{x_k}\right]$, где $\left[\frac{1}{x_k}\right]$ – целая часть числа $\frac{1}{x_k}$, тогда

$$n_k \leqslant \frac{1}{x_k} < n_k + 1 \tag{9.4}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leqslant \frac{1}{n_k}. \tag{9.5}$$

Кроме того, в силу условия $x_k \to 0$ имеем $\frac{1}{x_k} \to \infty$, откуда в силу неравенства (9.4) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} n_k = +\infty. \tag{9.6}$$

В результате имеем

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1 + x_k)^{1/x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}, \tag{9.7}$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)}\underset{(9.3)}{=}e, \tag{9.8}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)\underset{(9.3)}{=}e. \tag{9.9}$$

Из (9.7), (9.8) и (9.9) следует, что (см. обозначения в п. 6.6)

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x}=e. \tag{9.10}$$

Пусть теперь $x_k < 0$ и $x_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Положим $y_k = -x_k$, тогда $y_k > 0$ и $y_k \to 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Без ограничения общности будем считать, что $y_k < 1$ (с некоторого номера это неравенство заведомо выполняется). Имеем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}=\lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{-1/y_k}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{1/y_k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-y_k+y_k}{1-y_k}\right)^{(1-y_k+y_k)/y_k}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}+1}. \tag{9.11}$$

Положим теперь $z_k=\dfrac{y_k}{1-y_k}$. Очевидно,

$$z_k>0,\quad z_k\to 0. \tag{9.12}$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k}\underset{(9.11)}{=}\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}+1}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{1/z_k}\lim_{k\to\infty}(1+z_k)\underset{(9.10),(9.12)}{=}e. \tag{9.13}$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x}\underset{(9.10),(9.13)}{=}e.$$

Отсюда в силу теоремы 2 из п. 6.6 и следует равенство (9.2). ◁

Вычислим с помощью (9.2) некоторые другие пределы. Покажем прежде всего, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \ a \neq 1, \tag{9.14}$$

в частности,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (1+x)}{x} = 1. \tag{9.15}$$

В самом деле,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \log_a (1+x)^{1/x} =$$

$$= \log_a \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Докажем еще, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, \ a \neq 1, \tag{9.16}$$

в частности, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{9.17}$$

Действительно, положив $y = a^x - 1$ и, следовательно, $x = \dfrac{\ln (1+y)}{\ln a}$, получим $\lim\limits_{x \to 0} y = 0$, а поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y \ln a}{\ln (1+y)} \underset{(9.15)}{=} \ln a.$$

9.2. Сравнение функций в окрестности заданной точки. Как известно, сумма, разность и произведение бесконечно малых являются бесконечно малыми. Частное же бесконечно малых может быть и не бесконечно малой, однако отношение бесконечно малых позволяет сравнивать их "по порядку убывания". Аналогично можно сравнивать "по порядку роста" бесконечно большие. Перейдем к точным определениям.

Пусть функции f и g заданы на множестве X и x_0 – конечная или бесконечная удаленная точка прикосновения этого множества. При этом возможны случаи, когда $x_0 \in X$ и когда $x_0 \notin X$.

Будем предполагать, что существуют такие окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 и функция φ, заданная на $X \cap U$, что для всех $x \in X \cap U$

выполняется равенство

$$f(x)=\varphi(x)g(x). \tag{9.18}$$

В частности, если функции f и g заданы в точке x_0, то и функция φ задана в этой точке, а если f и g не заданы в ней, то не задана в ней и функция φ.

Определение 1. *Функция f называется функцией, ограниченной относительно функции g в окрестности точки x_0, если функция φ ограничена.*

В этом случае существует такая постоянная $c>0$, что для всех $x \in X \cap U$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant c, \tag{9.19}$$

а следовательно, и неравенство

$$|f(x)| \underset{\substack{(9.18)\\(9.19)}}{\leqslant} c\,|g(x)|. \tag{9.20}$$

Если функция f ограничена относительно функции g в окрестности точки x_0, то пишут

$$f=O(g), \quad x \to x_0 \tag{9.21}$$

(читается: f есть "O большое" от g).

Определение 2. *Функция f называется функцией того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, если существуют такие постоянные $c_1>0$ и $c_2>0$, что для всех $x \in X \cap U$ выполняется неравенство*

$$c_1 \leqslant |\varphi(x)| \leqslant c_2. \tag{9.22}$$

В этом случае для всех $x \in X \cap U$ выполняется неравенство

$$c_1\,|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant c_2\,|g(x)|. \tag{9.23}$$

Если функция f того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, то пишут

$$f \asymp g, \quad x \to x_0.$$

Очевидно, что функция f того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, тогда и только тогда, когда $f=O(g)$ и $g=O(f)$, $x \to x_0$.

Определение 3. *Функция f называется бесконечно малой относительно функции g при $x \to x_0$, если функция φ – бесконечно малая при $x \to x_0$, т.е. если*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x)=0. \tag{9.24}$$

В этом случае пишут

$$f=o(g), \quad x \to x_0 \tag{9.25}$$

(читается: f есть "o малое" от g при $x \to x_0$).

Определение 4. *Функция f называется эквивалентной функции g (или асимптотически равной ей) при $x \to x_0$, если*

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{9.26}$$

В этом случае пишут

$$f \sim g, \quad x \to x_0.$$

Если $f = o(g)$, $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, то функция f называется *бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая g*. В случае $f = o(g^n)$, $x \to x_0$, бесконечно малую f называют *бесконечно малой порядка n* относительно бесконечно малой g.

Замечание 1. Если в условиях определений 3 или 4 функция g не обращается в нуль на множестве $X \cap U$ и $x_0 \notin X$, то условие (9.24) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \tag{9.27}$$

а условие (9.26) – в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{9.28}$$

Замечание 2. Если $x_0 \notin X$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \tag{9.29}$$

то функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничена на пересечении некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 с множеством X (см. свойство 1° пределов функций в п. 6.7), т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant c$, т.е.

$$|f(x)| \leqslant c\,|g(x)|,$$

откуда следует, что при выполнении условия (9.29) имеет место соотношение

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Замечание 3. В определениях 1–4 функции f и g могут быть последовательностями $f = \{x_n\}$, $g = \{y_n\}$, и, таким образом, указанные определения содержат в себе определения следующих понятий:

а) последовательности, ограниченной относительно другой последовательности: $x_n = O(y_n)$, $n \to \infty$;

б) последовательностей одного порядка: $x_n \asymp y_n$, $n \to \infty$;

в) асимптотически равных последовательностей: $x_n \sim y_n$, $n \to \infty$;

г) последовательности, бесконечно малой по сравнению с другой последовательностью: $x_n = o(y_n)$, $n \to \infty$.

Примеры. 1. $\sin 2x = O(x)$, $x \to 0$, ибо

$$|\sin 2x| \leqslant 2|x|. \tag{9.30}$$

Верно и соотношение $x = O(\sin 2x)$, $x \to 0$, ибо существует конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin 2x} = \dfrac{1}{2}$, и, следовательно, функция $\dfrac{x}{\sin 2x}$ ограничена в некоторой окрестности $U(0)$ точки $x = 0$ (см. свойство 1° пределов функций в п. 6.7). Иначе говоря, существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in U(0)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{x}{\sin 2x}\right| \leqslant c$, $x \neq 0$, поэтому

$$|x| \leqslant c|\sin 2x|, \quad x \in U(0). \tag{9.31}$$

Из (9.30) и (9.31) следует, что при $x \to 0$ функции $y = x$ и $y = \sin 2x$ одного порядка:

$$\sin 2x \asymp x, \quad x \to 0.$$

2. $x^3 = o(x^2)$, $x \to 0$, ибо $x^3 = x \cdot x^2$ и $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

3. $x^2 = o(x^3)$, $x \to \infty$, ибо $x^2 = \dfrac{1}{x} \cdot x^3$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то функции $y = x$ и $y = \sin x$ эквивалентны при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad x \to 0.$$

Замечание 4. Символы $O(g)$ и $o(g)$ по существу обозначают целые классы функций, обладающих по сравнению с данной функцией определенным свойством, поэтому равенства типа $f(x) = O(g(x))$ и $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$, следует читать только слева направо, например, $x^2 = o(x)$, $x \to 0$. Здесь верно то, что функция $y = x^2$ является при $x \to 0$ бесконечно малой по сравнению с функцией $y = x$, но не всякая функция, бесконечно малая по сравнению с функцией $y = x$, является функцией $y = x^2$. Равенства с символами O и o не обладают, вообще говоря, свойством транзитивности:

$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x), \quad x \to 0,$$

но $x^2 \neq x^3$.

9.3. Эквивалентные функции. Примеры эквивалентных функций (см. определение 3 в п. 9.2) легко получить из результатов п. 9.1:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,$$
$$x \to 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентными при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0. \tag{9.32}$$

$\triangleright$ Если $f \sim g$, $x \to x_0$, то существует окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 и функция φ, определенная на $X \cap U$, такие, что

$$f(x) = \varphi(x) g(x), \quad x \in X \cap U, \tag{9.33}$$

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{9.34}$$

Поэтому $\varphi(x) = 1 + \epsilon(x)$, где $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$, и, следовательно, для всех $x \in X \cap U$ имеем

$$f(x) \underset{(9.33)}{=} \varphi(x) g(x) = (1 + \epsilon(x)) g(x) =$$

$$= g(x) + \epsilon(x) g(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0,$$

т.е. выполнено условие (9.32).

Обратно, если выполнено условие (9.32), то согласно определению 4 п. 9.2 существуют такие окрестность $U = U(x_0)$ точки x_0 и функция $\epsilon(x)$, определенная на пересечении $X \cap U$, что

$$f(x) = g(x) + \epsilon(x) g(x), \quad x \in X \cap U, \tag{9.35}$$

$$\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0. \tag{9.36}$$

Поэтому

$$f(x) \underset{(9.35)}{=} [1 + \epsilon(x)] g(x) = \varphi(x) g(x),$$

где $\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} 1 + \epsilon(x)$, $x \in X \cap U$, и, следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \underset{(9.36)}{=} 1$.

Это и означает, что $f \sim g$, $x \to x_0$. $\triangleleft$

Замечание 5. Если $g(x) \neq 0$, $x \in X$, $x \neq x_0$, то условие (9.32) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0.$$

Оно означает, что относительная погрешность $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)}$ между эквивалентными функциями f и g является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Пример 5. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to 0$. Чтобы в этом убедиться, в силу теоремы 1 достаточно показать, что $\operatorname{ctg} x \sim \dfrac{1}{x}$, $x \to 0$. Это же сразу следует из того, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (см. п. 9.1), ибо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

Теорема 2. *Если $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$, $x \to x_0$, и существует*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{9.37}$$

то существует $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \tag{9.38}$$

$\triangleright$ Условия $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$, $x \to x_0$, означают, что существуют такие окрестность $U = U(x_0)$ и функции φ и ψ, определенные на пересечении $X \cap U$, что

$$f(x) = \varphi(x) f_1(x), \quad g(x) = \psi(x) g_1(x), \quad x \in X \cap U, \tag{9.39}$$

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = 1. \tag{9.40}$$

Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{(9.39)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) f_1(x)}{\psi(x) g_1(x)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x)} \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{(9.40)}{=} \lim \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \triangleleft$$

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin 2x}$. Поскольку

$\ln(1+x) \sim x, \quad \sin 2x \sim 2x, \quad x\to 0,$

то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Понятия функции, ограниченной по сравнению с другой функцией, функций одного порядка, функций, эквивалентных между собой, функции, бесконечно малой по сравнению с другой функцией, переносится и на случай комплекснозначных функций комплексного аргумента. Все вышесформулированные определения остаются по форме прежними, только аргумент и значения рассматриваемых функций могут принимать комплексные значения и предел понимания в смысле предела функций комплексного переменного (см. п. 6.14).

Остаются верными и аналоги теорем 1 и 2. Правда, многие из данных выше примеров нуждаются в определениях рассматриваемых в них функций (синуса, косинуса и т.д.) для комплексных значений аргумента; к этому мы вернемся в п. 41.4.

§ 10. Производная и дифференциал

10.1. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ задана в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbf{R}$, $x \in U(x_0)$, и, следовательно, функция $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ определена на проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Определение 1. *Если существует предел*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то он называется ***производной функции*** f ***в точке*** x_0 *и обозначается* $f'(x_0)$.

Таким образом,

$$f'(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{10.1}$$

Образно говоря, это равенство означает, что производная $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна скорости изменения переменной y относительно переменной x в указанной точке.

Если положить $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ и, опустив обозначение аргумента, обозначать производную через y', то получим определение (10.1) в виде

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{10.2}$$

Иногда производная обозначается не только штрихом, но еще указывается в виде нижнего индекса переменная, по которой берется производная, т.е. пишут y'_x, а также просто y_x.

Если предел (10.1) равен ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то производная $f'(x_0)$ называется бесконечной. В дальнейшем под производной будет всегда пониматься конечная производная, если специально не оговорено противное.

В случае, когда функция f определена на некотором отрезке $[a, b]$, то под ее производной в точках $x_0 = a$ и $x_0 = b$ обычно понимается соответственно предел справа или слева отношения $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ при $x \to x_0$.

Операция вычисления производной функции называется операцией *дифференцирования*.

Примеры. 1. $y = c$ – постоянная функция. Имеем $\Delta y = c - c = 0$, следовательно, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, т.е. $c' = 0$.

2. $y = \sin x$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2},$$

поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \underset{(9.1)}{=}$$

$$\underset{(9.1)}{=} \cos x,$$

т.е. $(\sin x)' = \cos x$.

Аналогично,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

3. $y = a^x$, $a > 0$. Имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x},$$

поэтому

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \underset{(9.16)}{=} a^x \ln a.$$

Таким образом, $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности, $(e^x)' = e^x$.

10.2. Дифференциал функции.

Определение 2. *Функция $y = f(x)$, заданная в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbf{R}$, называется* ***дифференцируемой в этой точке****, если ее приращение*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0,$$

представимо в этой окрестности в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{10.3}$$

где A – постоянная.

Линейная функция $A\Delta x$ (аргумента Δx) называется ***дифференциалом функции f в точке x_0*** *и обозначается $df(x_0)$, или, короче, dy. Таким образом,*

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{10.4}$$

$$dy = A\Delta x. \tag{10.5}$$

Так как при $A \neq 0$ имеет место равенство (двустороннее)

$$o(\Delta x) = o(A\Delta x),$$

то из соотношения (10.3) при $A \neq 0$ следует, что $\Delta y = dy + o(dy)$, $\Delta x \to 0$, т.е. что функции Δy и dy переменной Δx эквивалентны при $\Delta x \to 0$ (см. теорему 1 в п. 9.3), причем dy – линейная функция аргумента Δx, а Δy, вообще говоря, – функция более сложной структуры.

Для симметрии записи приращение независимого переменного Δx обозначается dx, т.е. $dx \overset{\text{def}}{=} \Delta x$. Поэтому формулу (10.5) можно записать в виде

$$dy = Adx. \tag{10.6}$$

Вспомнив определение $o(\Delta x)$ (см. определение 4 в п. 9.2), условие (10.3) можно переписать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x, \tag{10.7}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0. \tag{10.8}$$

Здесь функция $\epsilon(\Delta x)$ определена для тех Δx, для которых определена функция $o(\Delta x)$ в формуле (10.3) (см. определение 4 в п. 9.2), т.е. для всех таких Δx, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ (см. определение 2), в частности, для $\Delta x = 0$. Именно по множеству таких Δx и берется предел (10.8), а так как точка $\Delta x = 0$ принадлежит этому множеству, то функция $\epsilon(\Delta x)$ непрерывна в этой точке (см. п. 6.2), и, следовательно, в силу (10.8) имеем

$$\epsilon(0) = 0. \tag{10.9}$$

Т е о р е м а 1. *Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только том случае, когда она в этой точке имеет конечную производную.*

▷ 1) Пусть у функции f существует конечная производная $f'(x_0)$, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Это равносильно тому, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon(\Delta x), \tag{10.10}$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x \neq 0}} \epsilon(\Delta x) = 0$ (левая часть формулы (10.10) не определена при $\Delta x = 0$, следовательно, и функция $\epsilon(\Delta x)$ не определена при $\Delta x = 0$). Поэтому

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Доопределив функцию $\epsilon(\Delta x)$ нулем в точке $\Delta x = 0$, т.е. положив $\epsilon(0) = 0$, получим

$$\epsilon(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

и, следовательно,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{10.11}$$

Это и есть условие (10.3) дифференцируемости функции f в точке x_0, причем

$$f'(x_0) = A. \tag{10.12}$$

2) Пусть теперь, наоборот, функция f дифференцируема в точке x_0, т.е. выполняется условие (10.3) или, что то же самое условие (10.7)–(10.8). Тогда при $\Delta x \neq 0$ будем иметь $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \epsilon(\Delta x)$, откуда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(10.8)}{=} A,$$

т.е. в точке x_0 у функции f существует производная, причем имеет место равенство (10.12) ◁

З а м е ч а н и е 1. Из формул (10.6) и (10.12) следует, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ записывается в виде

$$dy = f'(x_0)dx,$$

а производная – в виде

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}. \tag{10.14}$$

Теорема 2. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

▷ Если функция f дифференцируема в точке x_0, т.е. в этой точке выполняется условие (10.7)–(10.8), то из него сразу следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

а это и означает непрерывность функции f в точке x_0. ◁

Замечание 2. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не дифференцируемые. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, ибо в этой точке $\Delta y = |\Delta x|$ (рис. 72), и потому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0.$$

Однако

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1,$$

и, следовательно, предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ не существует.

10.3. Геометрический смысл производной и дифференциала. Пусть функция f определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, непрерывна в этой точке, $y_0 = f(x_0)$ и $M_0 = (x_0, y_0)$ (рис. 73). Зафиксируем произвольно приращение аргумента Δx, лишь бы $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, и пусть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

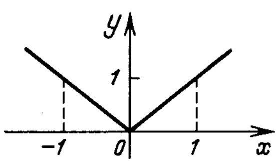


Рис. 72

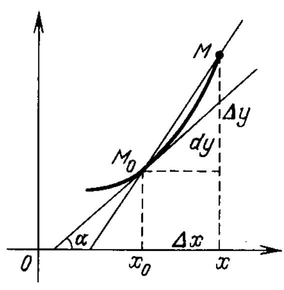


Рис. 73

Уравнение прямой, проходящей через точки M_0 и M, – она называется *секущей* (графика функции f) – имеет вид

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + y_0. \qquad (10.15)$$

Если задано семейство прямых уравнениями

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0, \qquad (10.16)$$

где t – параметр (в случае уравнения (10.15) параметром служит Δx), и существуют конечные пределы

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = a_0, \quad \lim_{t \to t_0} b(t) = b_0, \quad \lim_{t \to t_0} c(t) = c_0,$$

то говорят, что прямые (10.16) стремятся при $t \to t_0$ к предельному положению – к прямой, уравнением которой является уравнение

$$a_0 x + b_0 y + c_0 = 0.$$

Для того чтобы секущая (10.15) при $\Delta x \to 0$ стремилась к предельному положению, отличному от вертикальной прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. чтобы существовала конечная производная. При этом уравнение предельного положения секущей, которое называется *касательной* к графику функции f в точке M_0, имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0. \qquad (10.17)$$

Отметим, что из непрерывности функции f в точке x_0 следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, а поскольку $|M_0M| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, то и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} |M_0M| = 0$, т.е. точка M "стремится к точке M_0" по графику функции f. Вспомнив геометрический смысл коэффициента при $x - x_0$ в уравнении (10.17), получим

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол наклона касательной к оси Ox (см. рис. 73).

Обозначим ординату касательной через $y_{\text{кас}}$, тогда, заметив, что $x - x_0 = \Delta x$, запишем уравнение касательной (10.17) в виде

$$y_{\text{кас}} - y_0 = f'(x_0)\Delta x.$$

В правой части этого равенства стоит дифференциал dy функции f в точке x_0. Таким образом,

$$dy = y_{\text{кас}} - y_0 \qquad (10.18)$$

– дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.

Рассмотрим случай бесконечной производной

$$f'(x_0) = \infty. \tag{10.19}$$

Из уравнения секущей (10.15) имеем

$$\frac{y}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = x - x_0 + \frac{y_0}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, в случае выполнения условия (10.19) получим уравнение предельного положения секущей, т.е. касательной к графику функции f в точке x_0, в виде

$$x = x_0, \tag{10.20}$$

т.е. касательная в этом случае является вертикальной прямой, проходящей через точку x_0 оси абсцисс (рис. 74).

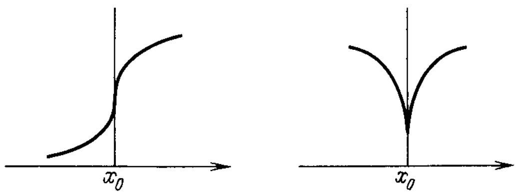


Рис. 74

10.4. Физический смысл производной и дифференциала. Пусть значения y функции f и ее аргумент x являются некоторыми физическими величинами, причем аргумент x меняется на некотором промежутке, например на отрезке $[a, b]$. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, где $\Delta x = x - x_0$, $x_0 \in [a, b]$, $x \in [a, b]$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, называется *средней скоростью изменения переменной y относительно переменной x на отрезке с концами x_0 и $x_0 + \Delta x$*, а предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

— *скоростью изменения переменной y относительно переменной x в точке x_0*. В случае существования этой скорости (т.е. в случае существования производной функции f в точке x_0) приращение Δy переменной y имеет вид

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Это означает, что приращение Δy линейно зависит от приращения Δx переменной x с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Иначе говоря, существование скорости означает, что в малом физический процесс, описываемый функцией f, протекает почти линейно. Этим обстоятельством и объясняется широкое применение дифференциального исчисления при изучении самых разнообразных явлений.

П р и м е р ы. 1. Если $s = s(t)$ – длина пути, проходимого материальной точкой за время t, отсчитываемое от некоторого момента времени t_0,

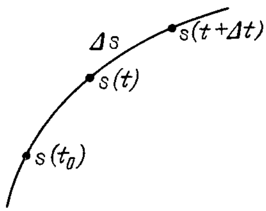


Рис. 75

$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$ (рис. 75), то $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ называется в физике величиной *средней скорости движения* за промежуток времени Δt, начиная с момента времени t, и обозначается $v_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Предел же $\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = v$ называется величиной *мгновенной скорости движения* в момент времени t. Таким образом, $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если бы движение на этом участке пути было равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

2. Если $q = q(t)$ – количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника в момент времени t, то $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ равно количеству электричества, протекающего через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Отношение $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ называется *средней силой тока* за указанный промежуток времени длительностью Δt и обозначается $I_{\text{ср}}$. Предел же $\lim\limits_{\Delta t \to 0} I_{\text{ср}} = I$ называется *силой тока* в данный момент времени t. Таким образом, $I = \dfrac{dq}{dt}$.

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекло через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент t. Как всегда, $\Delta q - dq = o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

10.5. Свойства производных, связанные с арифметическими действиями над функциями.

Т е о р е м а 3. *Если функции* $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$ *заданы в окрестности точки* $x_0 \in \mathbf{R}$, *а в самой точке* x_0 *имеют конечные производные, то функции* $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$, $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$, $f_1(x) f_2(x)$, *а в случае* $f_2(x_0) \neq 0$ *и функции* $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *также имеют в точке* x_0 *конечные производные; при этом имеют место формулы*

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2', \tag{10.21}$$

$$(y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2', \tag{10.22}$$

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} \tag{10.23}$$

(*в формулах* (10.21)–(10.23) *значения всех функций взяты при* $x = x_0$).

$\triangleright$ Прежде всего заметим, что в силу условий теоремы в точке x_0 существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = y_1', \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y_2}{\Delta x} = y_2'.$$

Докажем теперь последовательно формулы (10.21)–(10.23).

1) Пусть $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$; тогда $\Delta y = \lambda_1 \Delta y_1 + \lambda_2 \Delta y_2$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lambda_1 \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \lambda_2 \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (10.21).

2) Пусть $y = y_1 y_2$; тогда

$$\Delta y = (y_1 + \Delta y_1)(y_2 + \Delta y_2) - y_1 y_2 = y_2 \Delta y_1 + y_1 \Delta y_2 + \Delta y_1 \Delta y_2,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 + y_1 \frac{\Delta y_2}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \Delta y_2. \tag{10.24}$$

Заметив, что в силу непрерывности функции f_2 в точке x_0 выполняется условие $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y_2 = 0$, и перейдя в равенстве (10.24) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (10.22).

3. Пусть $f_2(x_0) \neq 0$ и $y = y_1/y_2$; тогда

$$\Delta y = \frac{y_1 + \Delta y_1}{y_2 + \Delta y_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 \Delta y_1 - y_1 \Delta y_2}{y_2(y_2 + \Delta y_2)},$$

следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x} y_2 - y_1 \dfrac{\Delta y_2}{\Delta x}}{y_2(y_2 + \Delta y_2)}.$$

Перейдя здесь в пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (10.23). ◁

Пример. Вычислим производную функции $\operatorname{tg} x$. Применяя формулу (10.23), получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad (10.25)$$

Аналогично вычисляется

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Замечание. Поскольку $dy = y' dx$, то, умножая формулы (10.21)–(10.23) на dx, получим

$$d(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2,$$

$$d(y_1 y_2) = y_2 dy_1 + y_1 dy_2,$$

$$d\,\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_2^2}.$$

10.6. Производная обратной функции.

Теорема 4. *Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$ и*

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\dfrac{df(x_0)}{dx}}. \qquad (10.26)$$

▷ Пусть функция f строго монотонна и непрерывна на окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0; тогда обратная функция f^{-1} строго монотонна и непрерывна на интервале $V = f(U)$ (см. теорему 4 п. 7.3). Поэтому, если $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, то для функции $y = f(x)$ имеет место $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и $\Delta y \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$, а для функции $x = f^{-1}(y)$ – соответственно $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ и $\Delta x \neq 0$ при $\Delta y \neq 0$. Заметив это, вычислим производную обратной функции следующим образом:

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=y_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \left.\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\right|_{x=x_0}. \triangleleft \qquad (10.27)$$

З а м е ч а н и е. Если функция f непрерывна и строго монотонна в окрестности точки x_0 и существует $f'(x_0) = 0$, то обратная функция f^{-1} имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ бесконечную производную $\dfrac{df^{-1}(y_0)}{dx} = \infty$. Это сразу следует из соотношения (10.27).

П р и м е р ы. 1. Если $y = \arcsin x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $x = \sin y$, то

$$(\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2. Если $y = \arccos x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $x = \cos y$, то

$$(\arccos x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. Если $y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$, $x = \operatorname{tg} y$, то

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. Аналогично,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Если $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $-\infty < y < +\infty$, $x = a^y$, то

$$(\log_a x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a},$$

в частности,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

10.7. Производная и дифференциал сложной функции. Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности $U = U(x_0)$ точки x_0, а функция $z = g(y)$ – в некоторой окрестности $V = V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причем $f(U) \subset V$ и, следовательно, определена сложная функция

$$F(x) = g(f(x)).$$

Теорема 5. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $z = F(x) = g(f(x))$ также имеет в точке x_0 производную, причем*

$$F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0), \tag{10.28}$$

или, опуская значение аргумента,

$$z'_x = z'_y y'_x. \tag{10.29}$$

▷ Пусть, как всегда, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и $\Delta z = g(y) - g(y_0)$; тогда в силу дифференцируемости функции g в точке y_0 будем иметь (см. (10.11))

$$\Delta z = g'(y_0)\Delta y + \epsilon(\Delta y)\Delta y, \qquad \lim_{\Delta y \to 0} \epsilon(\Delta y) = 0. \tag{10.30}$$

Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и, следовательно, в силу теоремы о пределе сложной функции (см. (6.41) в п. 6.13) имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta y) = 0. \tag{10.31}$$

Поделив обе части первого равенства (10.30) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \epsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{10.32}$$

В силу равенств (10.31) и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ предел правой части равенства (10.32) при $\Delta x \to 0$ существует и равен $g'(y_0) f'(x_0)$, следовательно, существует и предел левой части, т.е. существует

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

причем

$$F'(z_0) = g'(y_0) f'(x_0). \lhd$$

Следствие (инвариантность формы дифференциала).

$$dz = F'(x_0)dx = g'(y_0)dy. \tag{10.33}$$

Эта формула показывает, что формально записи дифференциала сложной функции посредством независимой переменной x и посредством зависимой переменной y имеют один и тот же вид, но следует иметь в виду, что здесь $dx = \Delta x$ – приращение независимой переменной x, а dy – дифференциал функции $y = f(x)$, т.е. главная линейная часть приращения Δy зависимой переменной ("главная" в том смысле, что разность $\Delta y - dy$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем само Δx).

Докажем формулу (10.33):

$$dz = dF(x_0) \underset{(10.13)}{=} F'(x_0)dx \underset{(10.28)}{=} g'(y_0) f'(x_0) dx \underset{(10.13)}{=} g'(y_0)dy.$$

Пример. Вычислим производную функции $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, с помощью формулы (10.28). Для этого представим функцию $y = x^\alpha$ как композицию функций $y = e^u$ и $u = \alpha \ln x$. Заметив, что $\dfrac{dy}{du} = e^u$, $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\alpha}{x}$, получим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^u)'_u u'_x = e^u \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} =$$

$$= x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

т.е.

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{10.34}$$

10.8. Гиперболические функции и их производные. Нередко в математическом анализе встречаются функции $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Они имеют специальные названия: первая из них называется *гиперболический синус* и обозначается $\operatorname{sh} x$, а вторая – *гиперболический косинус* $\operatorname{ch} x$. Таким образом,

$$\operatorname{sh} x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{10.35}$$

$$\operatorname{ch} x \overset{\text{def}}{=} \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{10.36}$$

Эти функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных (круговых) синусов и косинусов, например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 - e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1, \tag{10.37}$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x. \tag{10.38}$$

Эпитет "гиперболический" в названии функций (10.35) и (10.36) объясняется тем, что уравнения

$$x = a \operatorname{ch} t, \quad y = a \operatorname{sh} t, \quad a > 0, \quad -\infty < t < +\infty,$$

являются, в силу формулы (10.37), параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$, подобно тому, как уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

являются параметрическими уравнениями окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Вычислим производные гиперболических синуса, косинуса:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \tag{10.39}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x. \tag{10.40}$$

10.9. Производные комплекснозначных функций действительного аргумента. Если функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности U точки x_0 числовой оси и принимает, вообще говоря, комплексные значения, т.е. имеет вид

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad u(x) \in \mathbf{R}, \quad v(x) \in \mathbf{R}, \quad x \in U,$$

то ее производная в точке x_0 определяется равенством

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0) \tag{10.41}$$

(само собой разумеется, что это определение имеет смысл только тогда, когда у функций $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные в точке x_0).

При таком определении операция дифференцирования остается линейной:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2', \quad \lambda_1 \in \mathbf{C}, \quad \lambda_2 \in \mathbf{C}.$$

Пример. Если $f(x) = \cos\alpha x + i\sin\alpha x$, то

$$f'(x) \underset{(10.41)}{=} -\alpha\sin\alpha x + i\alpha\cos\alpha x = i\alpha(\cos\alpha x + i\sin\alpha x) = i\alpha f(x).$$

Можно обобщить понятие производной на случай комплекснозначных функций комплексного переменного. Это понятие приводит к большому качественному многообразию новых явлений и потому изучается в отдельном курсе теории функций комплексного переменного.

§ 11. Производные и дифференциалы высших порядков

11.1. Производные высших порядков. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f'(x)$ в свою очередь имеет в точке x_0 производную $[f'(x)]'|_{x=x_0}$, то она называется *второй производной функции f в точке x_0* и обозначается $f''(x_0)$, или $f^{(2)}x_0$. Таким образом, опуская обозначения аргумента, имеем

$$y^{(2)} \equiv y'' \overset{\mathrm{def}}{=} (y')'.$$

Аналогично определяются и производные $y^{(n)}$ более высоких порядков n:

$$y^{(n+1)} = [y^{(n)}]', \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{11.1}$$

где для удобства считается, что $y^{(0)} = y$.

Примеры. 1. Если $y = a^x$, $a > 0$, то $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$, вообще, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ В частности, если $y = e^x$, то

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \tag{11.2}$$

2. Если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$, $y^{(2)} = -\sin x$, $y^{(3)} = -\cos x$, $y^{(4)} = \sin x$. Заметив, что $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$, получим

$$y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad y^{(2)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Вообще,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.3}$$

Аналогично,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{11.4}$$

Т е о р е м а 1. *Если функции* $y_1 = f_1(x)$ *и* $y_2 = f_2(x)$ *имеют в точке* x_0 *производные порядка* $n \in \mathbf{N}$, *то любая их линейная комбинация* $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, $\lambda_1 \in \mathbf{R}$, $\lambda_2 \in \mathbf{R}$, *и их произведение* $y_1 y_2$ *имеют в точке* x_0 *производные порядка* n, *причем*

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)} = \lambda_1 y_1^{(n)} + \lambda_2 y_2^{(n)}, \tag{11.5}$$

$$(y_1 y_2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)} \equiv (y_1 + y_2)^{\{n\}}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{11.6}$$

Все производные в формулах (11.5) и (11.6) берутся в точке x_0, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Символическая запись $(y_1 + y_2)^{\{n\}}$ означает, что это выражение (см. среднюю часть формулы (11.6)) по своей структуре напоминает формулу бинома Ньютона

$$(y_1 + y_2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{n-k} y_2^k,$$

только вместо степеней y_1 и y_2 берутся производные соответствующих порядков функций y_1 и y_2.

$\triangleright$ Докажем формулы (11.5) и (11.6) методом математической индукции. В пункте 10.5 формула (11.5) была доказана для $n = 1$:

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'. \tag{11.7}$$

Пусть справедлива формула (11.5); покажем, что тогда будет справедлива и аналогичная формула для производной порядка $n + 1$:

$$(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n+1)} \underset{(11.1)}{=} [(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^{(n)}]' \underset{(11.5)}{=}$$
$$\underset{(11.5)}{=} (\lambda_1 y_1^{(n)} + \lambda_2 y_2^{(n)})' \underset{(11.7)}{=} \lambda_1 y_1^{(n+1)} + \lambda_2 y_2^{(n+1)}.$$

Формула (11.5) доказана; докажем формулу (11.6).

Пусть справедлива формула (11.6) для производной порядка n от произведения функций. Докажем, что тогда будет справедлива и аналогичная формула для производной порядка $n + 1$:

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} \underset{(11.1)}{=} ((y_1 y_2)^{(n)})' \underset{(11.6)}{=} \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} y_2^{(k)}\Big)' =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + y_1^{(n-k)} y_2^{(k+1)}) = C_n^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} +$$
$$+ C_n^1 y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \ldots + C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots + C_n^n y_1^{(1)} y_2^{(n)} +$$
$$+ C_n^0 y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \ldots + C_n^{k-1} y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots + C_n^n y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} =$$
$$= C_n^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + (C_n^1 + C_n^0) y_1^{(n)} y_2^{(1)} + \ldots$$
$$\ldots + (C_n^k + C_n^{k-1}) y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots + C_n^n y_1^{(0)} y_2^{(n+1)}.$$

Вспоминая, что

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k, \quad C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1,$$

получим

$$(y_1 y_2)^{(n+1)} = C_{n+1}^0 y_1^{(n+1)} y_2^{(0)} + \ldots + C_{n+1}^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)} + \ldots$$

$$\ldots + C_{n+1}^{n+1} y_1^{(0)} y_2^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k y_1^{(n+1-k)} y_2^{(k)}. \lhd$$

11.2. Производные высших порядков сложных функций, обратных функций и функций, заданных параметрически. С помощью формулы производной сложной функции (см. п. 10.7) можно вычислять и производные высших порядков сложной функции. Пусть функция $y = y(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, а функция $z = z(y)$ дважды дифференцируема в точке $y_0 = y(x_0)$ и имеет смысл сложная функция $z = z(y(x))$. Вычислим вторую производную z''_{xx} сложной функции $z = z(y(x))$ (для простоты записи аргумент писать не будем):

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_y y'_x)'_x = (z'_y)'_x y'_x + z'_y (y'_x)'_x = (z'_y)'_y y'_x y'_x + z'_y y''_{xx} =$$

$$= z''_{yy} y'^2 + z'_y y''_{xx}. \tag{11.8}$$

Аналогично вычисляются и производные более высоких порядков.

С помощью формул производных обратной функции (см. п. 10.6) и сложной функции (см. п. 10.7) можно вычислять производные высших порядков обратных функций. Вычислим, например, вторую производную. Пусть функция $y = y(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, а в ее окрестности непрерывна и строго монотонна, причем $y'(x_0) \neq 0$. Тогда для второй производной x''_{yy} имеем в точке $y_0 = y(x_0)$:

$$x''_{yy} = (x'_y)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_y = \left(\frac{1}{y'_x}\right)'_x x'_y = -\frac{y''_{xx}}{y'^2_x} \cdot \frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{y'^3_x}.$$

Рассмотрим теперь параметрическое задание функций. Пусть на некотором множестве E задана пара функций

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{11.9}$$

причем одна из них, например $x = x(t)$, строго монотонна на этом множестве и, следовательно, существует обратная функция $t = t(x)$, для которой E является множеством значений. Тогда функция $y = y(t(x))$ называется *параметрически заданной функцией.* Она определена на множестве значений функции $x(t)$.

Если функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке t_0, функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна в окрестности этой точки и $x'(t_0) \neq 0$, то функция $y(t(x))$ дифференцируема в точке $x_0 = x(t_0)$, причем

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \tag{11.10}$$

ибо $t'_x = 1/x'_t$.

Аналогично вычисляются и производные высших порядков. Например, если функции (11.9) дважды дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x \underset{(11.10)}{=} \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t t'_x = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$

Выведенные здесь формулы не предназначены для запоминания. Достаточно усвоить метод их получения.

11.3. Дифференциалы высших порядков. Дифференциал от дифференциала первого порядка

$$dy = f'(x)dx \tag{11.11}$$

функции $y = f(x)$, рассматриваемого только как функция переменной x (т.е. приращение dx аргумента x предполагается постоянным), при условии, что повторное приращение независимой переменной x совпадает с первоначальным, называется вторым дифференциалом $d^2f(x)$ функции f в данной точке x. Таким образом,

$$d^2f(x) \overset{\text{def}}{=} d(df(x)) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))\,dx = f''(x)\,dx\,dx.$$

Вместо $dxdx$ пишут dx^2:

$$d^2f(x) = f''(x)\,dx^2,$$

или

$$d^2y = y''dx^2, \tag{11.12}$$

откуда $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Аналогично, *дифференциалом n-го порядка*, $n = 2, 3, \ldots$, называется дифференциал от дифференциала порядка $n-1$ при условии, что в дифференциалах все время берутся одни и те же приращения dx независимой переменной x:

$$d^ny \overset{\text{def}}{=} d(d^{n-1}y). \tag{11.13}$$

При этом оказывается справедливой формула

$$d^ny = y^{(n)}dx^n, \tag{11.14}$$

где $dx^n = (dx)^n$.

Формула (11.4) легко доказывается по индукции: при $n = 1$ она доказана; если она доказана при некотором n, то

$$d^{n+1}y \underset{(11.13)}{\overset{\text{def}}{=}} d(d^ny) = d(y^{(n)}dx^n) =$$

$$= d(y^{(n)})\,dx^n \underset{(11.11)}{=} y^{(n+1)}dx^{n+1}.$$

Из формулы (11.14) следует, что

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{11.15}$$

В силу формулы (11.14) высказывания "функция имеет в точке n производных" и "функция n раз дифференцируема в этой точке" (т.е. у нее существует дифференциал порядка n) равносильны.

Дифференциалы высших порядков $d^n y$, $n \geqslant 2$, не обладают свойством инвариантности формы относительно выбора переменных: если, например, $z = z(y)$, $y = y(x)$ – дважды дифференцируемые функции и имеет смысл композиция $z(y(x))$, то

$$dz = z'_y dy,$$

$$d^2 z = d(dz) = d(z'_y dy) = dz'_y dy + z'_y d(dy) = z''_{yy} dy^2 + z'_y d^2 y, \tag{11.16}$$

где, вообще говоря, $d^2 y \neq 0$. Заметим, что если обе части формулы (11.16) поделить на dx^2, то в силу (11.15) получится формула (11.8).

§ 12. Дифференциальные теоремы о среднем

12.1. Теорема Ферма*). Пусть функция f задана на множестве X и $x_0 \in X$. Если для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$), то говорят, что функция f принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение на множестве X (см. п. 3.1).

Если в неравенстве $f(x) \leqslant f(x_0)$ (соответственно в неравенстве $f(x) \geqslant f(x_0)$) заменить при $x \neq x_0$ знак нестрогого неравенства на знак строгого неравенства, то получится определение точки x_0, в которой функция f принимает строго наибольшее (наименьшее) значение на множестве X.

Если функция имеет в некоторой точке конечную или определенного знака бесконечную производную, то говорят, что функция имеет в этой точке производную в широком смысле.

Т е о р е м а 1 (Ф е р м а). *Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке x_0 производную в широком смысле, то эта производная равна нулю.*

$\triangleright$ Пусть f: $U(x_0) \to \mathbf{R}$ и, например, $f(x_0)$ – наибольшее значение: для любой точки $x \in U(x_0)$ имеет место $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$, то

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \tag{12.1}$$

---

*) П. Ферма (1601–1665) – французский математик.

а если $x > x_0$, то

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0. \qquad (12.2)$$

Если существует в широком смысле производная $f'(x_0)$, то, переходя к пределу при $x \to x_0$, из неравенства (12.1) получим $f'(x_0) \geqslant 0$ и из неравенства (12.2) получим $f'(x_0) \leqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. ◁

З а м е ч а н и е. В теореме Ферма существенно, что точка, в которой достигается экстремальное значение, является внутренней для рассматриваемого промежутка. Так, например, функция $f(x) = x$, рассматриваемая только на отрезке $[0, 1]$, принимает наибольшее и наименьшее значения на его концах, а производная в них не обращается в нуль.

12.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях.

Т е о р е м а 2 (Р о л л ь*)). *Если функция f*

1) *непрерывна на отрезке $[a, b]$,*

2) *имеет в каждой точке интервала (a, b) конечную или определенного знака бесконечную производную,*

3) *принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$, т.е.*

$$f(a) = f(b), \qquad (12.3)$$

то существует по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f'(\xi) = 0. \qquad (12.4)$$

▷ Пусть $M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$; тогда для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Если $m = M$, то $f(x) = m = M$ – постоянная функция, и поэтому для любой точки $\xi \in (a, b)$ выполняется условие (12.4). Если же $m \neq M$, то в силу

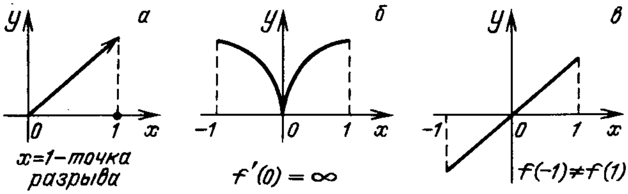


Рис. 76

условия (12.3) хотя бы одно из значений m или M принимается во внутренней точке ξ отрезка $[a, b]$ (см. теорему 1 в п. 7.1), т.е. $\xi \in (a, b)$. В этой точке в силу теоремы 1 выполняется условие (12.4). ◁

З а м е ч а н и е 1. Все условия теоремы Ролля существенны. На рис. 76 изображены графики трех функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, у каждой из которых не выполняется лишь одно из трех условий теоремы

---

*) М. Роль (1652–1719) – французский математик.

Ролля и не существует такой точки ξ, что $f'(\xi)=0$. Пример функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (см. рис. 76, *б*) показывает также, что условие существования определенного знака бесконечной производной нельзя заменить условием существования просто бесконечной производной. У функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=0$ производная равна бесконечности, но без определенного знака, т.е. $f'(0)=\infty$, и не существует такой точки ξ, что $f'(\xi)=0$.

Замечание 2. В дальнейшем нам понадобится следующее свойство бесконечных производных. Если функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ определены в окрестности точки x_0, функция f_1 имеет в точке x_0 бесконечную производную (определенного знака или нет), а функция f_2 имеет в точке x_0 конечную производную, то функция $y = f_1(x) + f_2(x)$ имеет в точке x_0 такую же бесконечную производную, как и функция f_1. Для того чтобы в этом убедиться, надо перейти к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \frac{\Delta y_2}{\Delta x}.$$

Теорема 3 (Лагранж*)). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \tag{12.5}$$

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа.

▷ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda x, \tag{12.6}$$

где λ – некоторое число. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и в каждой точке интервала (a, b) имеет конечную или определенного знака бесконечную производную (см. замечание 2). Подберем число λ так, чтобы выполнялось соотношение

$$F(a) = F(b), \tag{12.7}$$

тогда функция F будет удовлетворять всем условиям теоремы Ролля.

Из условий (12.6) и (12.7) имеем равенство $f(a) - \lambda(a) = f(b) - \lambda b$, откуда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \tag{12.8}$$

При этом λ согласно теореме Ролля существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$F'(\xi) = 0, \tag{12.9}$$

и так как из (12.6) следует, что $F'(x) = f'(x) - \lambda$, то из (12.8) и (12.9)

---

*) Ж.-Л. Лагранж (1736–1813) – французский математик и механик.

получаем

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

что равносильно равенству (12.5). ◁

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что (рис. 77) на дуге $\overset{\frown}{AB}$ графика функции f с концами в точках $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$ найдется точка $M = (\xi, f(\xi))$, касательная в которой параллельна хорде AB. Действительно, согласно теореме Лагранжа

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi), \tag{12.10}$$

где $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ — тангенс угла наклона хорды AB, а $f'(\xi)$ — тангенс угла наклона касательной к дуге $\overset{\frown}{AB}$ в точке $M = (\xi, f(\xi))$, $\xi \in (a, b)$.

Если положить $\theta \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\xi - a}{b-a}$, $a < \xi < b$, то, очевидно, $0 < \theta < 1$ и $\xi = a + \theta(b-a)$. Поэтому формулу Лагранжа можно также записать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a), \quad 0 < \theta < 1,$$

или, полагая $b - a = \Delta x$, $a = x$ и, следовательно, $b = x + \Delta x$, в виде

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x. \tag{12.11}$$

Следствие 1. *Если функция f непрерывна на отрезке и во всех его внутренних точках имеет производную, равную нулю, то функция постоянна на указанном отрезке.*

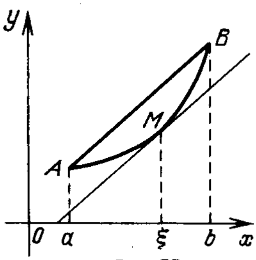


Рис. 77

▷ Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в его внутренних точках. Выберем произвольно $x_1 \in [a, b]$ и $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, тогда, очевидно, функция f будет непрерывна на отрезке $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ и дифференцируема на интервале $(x_1, x_2) \subset (a, b)$. Поэтому по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2. \tag{12.12}$$

По условию теоремы $f'(x) = 0$ на (a, b), в частности, $f'(\xi) = 0$, ибо $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$. Поэтому из формулы (12.12) следует, что $f(x_1) = f(x_2)$, а поскольку x_1 и x_2 – произвольные точки отрезка $[a, b]$, то это и означает, что функция f постоянна на отрезке $[a, b]$. $\triangleleft$

Следствие 2. *Если функция f непрерывна на некотором промежутке (конечном или бесконечном) и имеет производную, равную нулю во всех точках этого промежутка, кроме, быть может, конечного множества его точек, то функция f постоянна на указанном промежутке.*

$\triangleright$ Пусть функция f удовлетворяет перечисленным условиям на промежутке Δ и $x_1 \in \Delta$, $x_2 \in \Delta$, $x_1 < x_2$. Перенумеруем в порядке возрастания те из точек промежутка Δ, в которых производная f' либо не существует, либо существует, но не равна нулю, и которые лежат на интервале (x_1, x_2). Обозначим их $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда, согласно следствию 1, функция f будет постоянна на каждом из отрезков

$$[x_1, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n], [a_n, x_2],$$

и так как конец каждого предыдущего отрезка равен началу следующего, то она будет постоянна и на всем отрезке $[x_1, x_2]$. Поскольку x_1 и x_2 – произвольные точки промежутка Δ, то это и означает, что функция f постоянна на Δ. $\triangleleft$

Следствие 3. *Если функция f непрерывна в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)}} f'(x),$$

то существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)}} f'(x)$.

$\triangleright$ В самом деле, согласно теореме Лагранжа, для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ справедливо равенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi), \tag{12.13}$$

где $\xi = \xi(x)$ лежит между точками x_0 и x, и, следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} \xi(x) = x_0$, а потому

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)}} f'(\xi) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x)}} f'(x). \tag{12.14}$$

Из этого равенства следует, что левая часть равенства (12.13) имеет конечный или бесконечный предел, т.е. что существует конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$, причем

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overset{\circ}{U}(x_0)}} f'(x). \lhd$$

Утверждение, аналогичное следствию 3, имеет место и для односторонних производных.

Теорема 4 (Коши). *Если функции f и g*

1) *непрерывны на отрезке $[a, b]$,*

2) *дифференцируемы в каждой точке интервала (a, b),*

3) *$g'(x) \neq 0$ во всех точках $x \in (a, b)$,*

то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{12.15}$$

$\rhd$Прежде всего заметим, что для функции g справедливо неравенство

$$g(a) \neq g(b), \tag{12.16}$$

так как если бы имело место равенство $g(a) = g(b)$, то в силу теоремы Ролля нашлась бы такая точка $x_0 \in (a, b)$, что $g'(x_0) = 0$, а это противоречило бы условиям теоремы. В силу неравенства (12.16) левая часть формулы (12.15) имеет смысл.

Рассмотрим теперь функцию

$$F(x) = f(x) - \lambda g(x), \tag{12.17}$$

где число λ подберем таким образом, чтобы имело место равенство

$$F(a) = F(b). \tag{12.18}$$

Тогда функция F будет удовлетворять на отрезке $[a, b]$ условиям теоремы Ролля. Из соотношений (12.17) и (12.18) имеем

$$f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b),$$

откуда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{12.19}$$

При таком выборе числа λ существует $\xi \in (a, b)$, для которого $F'(\xi) = 0$, но $F'(x) = f'(x) - \lambda g'(x)$, следовательно,

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0,$$

и поэтому

$$\lambda = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{12.20}$$

Из (12.19) и (12.20) следует (12.15).$\lhd$

§ 13. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

13.1. Неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Т е о р е м а 1. *Если функции f и g определены в окрестности точки x_0,*

$$f(x_0) = g(x_0) = 0, \tag{13.1}$$

существуют конечные производные $g'(x_0) \neq 0$ и $f'(x_0)$, то существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{13.2}$$

▷ Действительно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{(13.1)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \lhd$$

Геометрический смысл равенства (13.2) состоит в том, что предел отношения ординат графиков функций f и g равен пределу отношения ординат

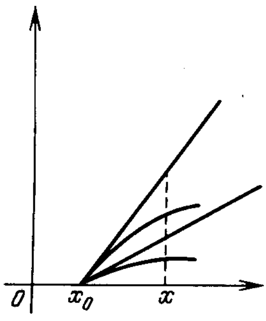


Рис. 78

их касательных $y = f'(x_0)(x - x_0)$ и $y = g'(x_0)(x - x_0)$, которое постоянно и равно $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ (рис. 78).

Т е о р е м а 2. *Если*

1) *функции f и g дифференцируемы на интервале (a, b),*
2) *$g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$,*
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0,$

4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.3}$$

$\triangleright$ Доопределим функции f и g в точке $x = a$ по непрерывности, т.е. положим

$$f(a)=g(a)=0. \tag{13.4}$$

Тогда для любого $x \in (a,\ b)$ продолженные функции на отрезке $[a,\ x]$ будут удовлетворять условиям теоремы Коши о среднем значении, и потому будет существовать такая точка $\xi=\xi(x)$, $a<\xi<x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(13.4)}{=}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{13.5}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a}\xi(x)=a$ и предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.6}$$

и, следовательно, существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(13.5)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\underset{(13.6)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \triangleleft$$

13.2. Неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3. *Если*

1) *функции* f *и* g *дифференцируемы на интервале* $(a,\ b)$,
2) $g'(x)\neq 0$ *для всех* $x\in(a,\ b)$,
3) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, $\quad$ (13.7)
4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

то существует предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.8}$$

▷ Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k. \tag{13.9}$$

Покажем, что при выполнении остальных условий теоремы

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \tag{13.10}$$

Если $a < x < x_0 < b$, то на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. теорему 4 в п. 12.2), а поэтому существует такая точка $\xi = \xi(x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < x_0. \tag{13.11}$$

Далее, в силу (13.7) существует такая точка $x_1 = x_1(x_0)$, $a < x_1 < x_0$, что при всех $x \in (a, x_1)$ выполняются неравенства

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad f(x) \neq f(x_0),$$

и, следовательно, можно производить деление на $f(x)$, $g(x)$ и $1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}$ (а также и на $1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}$, поскольку в силу условий теоремы $g(x) \neq g(x_0)$; см (12.6) в доказательстве теоремы 4 из п. 12.2). Для этих значений x из (13.11) вытекает равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{13.12}$$

В правой части равенства первый сомножитель $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к k при $x_0 \to a$ (ибо $a < \xi < x_0$, и поэтому $\lim\limits_{x_0 \to a} \xi = a$), а второй в силу условия (13.7) стремится к 1 при $x \to a$ и фиксированном x_0 :

$$\lim_{x \to a+0} \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1. \tag{13.13}$$

Непосредственно перейти к пределу в равенстве (13.12) нельзя, так как указанные выше предельные переходы в сомножителях в правой части равенства происходят при разных условиях: при $x_0 \to a + 0$ и при фиксированном x_0, но $x \to a$. Однако, если задать произвольно окрестность $U(k)$ предела k отношения производных (13.9), то можно сначала зафиксировать точку x_0 столь близко к точке a, что отношение $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ попадает в эту окрестность, ибо $a < \xi < x_0$. Согласно же условию (13.13) для всех точек x, достаточно близких к a, отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (см. (13.12)) также будет принадлежать указанной окрестности $U(k)$, а это означает справедливость утверждения (13.10). ◁

Проведенное рассуждение нетрудно записать с помощью неравенств.

▷ Пусть сначала предел (13.9) конечный. Положим

$$\alpha(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} - k. \tag{13.14}$$

Тогда из (13.9) будем иметь $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, и, следовательно, для любого произвольно фиксированного $\epsilon > 0$ существует такое x_0 что для всех $x \in (a, x_0)$ выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \epsilon/2. \tag{13.15}$$

Если положить еще

$$\beta(x) = 1 - \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}, \tag{13.16}$$

то в силу условия (13.7)

$$\lim_{x \to a} \beta(x) = 0. \tag{13.17}$$

Теперь имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{(13.12)\\(13.14)\\(13.16)}}{=} (k + \alpha(\xi))(1 + \beta(x)) = k + \alpha(\xi) + k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x), \tag{13.18}$$

$x < \xi < x_0$; при этом в силу (13.17) существует такое $\delta > 0$, что при $x \in (a, a + \delta)$

выполняется неравенство

$$|k\beta(x)+\alpha(\xi)\beta(x)|<\epsilon/2. \qquad (13.19)$$

В результате получаем, что для всех $x\in(a,a+\delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-k\right| \underset{(13.18)}{\leqslant} |\alpha(\xi)|+|k\beta(x)+\alpha(\xi)\beta(x)| \underset{\substack{(13.15)\\(13.19)}}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (13.10).

Если теперь

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty, \qquad (13.20)$$

то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)}=0$, откуда по уже доказанному $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$, и потому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty. \qquad (13.21)$$

Из (13.20) и (13.21) следует, что (13.8) справедливо и в этом случае.

Аналогично рассматривается и случай бесконечного предела со знаком. Более того, можно показать, что в условиях теоремы бесконечный предел (13.9) всегда является бесконечностью со знаком. ◁

В теоремах 2 и 3 был рассмотрен случай, когда аргумент стремился к числу a справа. К этому случаю сводятся случаи, когда аргумент x стремится к числу a слева или произвольным образом, а также случаи, когда a является одной из бесконечностей ∞, $+\infty$ или $-\infty$. Во всех этих случаях при соответствующих предположениях имеет место формула

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (13.22)$$

Рассмотрим, например, случай стремления аргумента к $+\infty$ для функций f и g, заданных на полуинтервале вида $[c,+\infty)$, где c – некоторое число. Этот случай сводится к случаю, рассмотренному в теореме 3 с помощью замены переменного $x=1/t$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x=\frac{1}{t}}{=} \lim_{t\to+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} \underset{(13.7)}{=} \lim_{t\to+0}\frac{\dfrac{d}{dt}f(1/t)}{\dfrac{d}{dt}g(1/t)}=$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(здесь штрихом обозначены производные функций f и g по первоначальному аргументу x).

Правило вычисления предела отношения функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ по формуле (13.22) называется *правилом Лопиталя**).

---

*) Г. Лопиталь (1661–1704) – французский математик.

П р и м е р ы. 1. Если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \tag{13.23}$$

т.е. любая положительная степень x возрастает быстрее $\ln x$ при $x \to +\infty$. Действительно, применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

2. Если $\alpha > 0$ и $a > 1$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \tag{13.24}$$

т.е. при $x \to +\infty$ любая степень x^α, $\alpha > 0$, растет медленнее показательной функции с основанием, большим единицы. В самом деле, сделав указанные ниже преобразования и применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{a^{x/\alpha}}\right)^\alpha =$$

$$= \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{a^{x/\alpha}}\right)^\alpha = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} a^{x/\alpha} \ln a}\right)^\alpha = 0.$$

3. Найдем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$.

Здесь отношение производных числителя и знаменателя

$$\frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$ и, следовательно, правило Лопиталя неприменимо. В этом случае предел находится непосредственно:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 1 \cdot 0 = 0.$$

Из этого примера следует, что предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{13.25}$$

может существовать в случае, когда предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.26}$$

не существует и тем самым здесь для нахождения предела (13.25) правило Лопиталя (13.22) неприменимо.

4. Предел неопределенностей типа 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно найти, предварительно прологарифмировав функции, предел которых ищется. Например, чтобы найти предел $\lim\limits_{x \to +0} x^x$, найдем сначала предел

$$\lim_{x \to +0} \ln x^x = \lim_{x \to +0} x \ln x = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{1/x} \underset{(13.8)}{=}$$

$$\underset{(13.8)}{=} -\lim_{x \to 0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x \to +0} x = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности показательной функции будем иметь

$$\lim_{x \to +0} x^x = \lim_{x \to +0} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{x \to +0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

5. Пределы неопределенностей типов $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ целесообразно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Например,

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \, \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}\right).$$

Предел первого сомножителя в правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0}\left(1 + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) = 2,$$

а предел второго — с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{2x\sin x + x^2 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2 + \dfrac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \dfrac{2}{3}$.

§ 14. Формула Тейлора

14.1. Вывод формулы Тейлора. Рассмотрим следующую задачу. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n включительно. Требуется найти такой многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, что

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{14.1}$$

$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{14.2}$$

В случае $n = 1$ нам уже известно, что эта задача имеет решение и что ее решением является многочлен

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{14.3}$$

так как

$$P_1(x_0) = f(x_0),\ P_1'(x_0) = f'(x_0),$$

$$r_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= \Delta y - f'(x_0)\,\Delta x = \Delta y - dy = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

где, как обычно, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

По аналогии с формулой (14.3) будем искать многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (14.1) и (14.2), в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n. \tag{14.4}$$

Положив $x = x_0$, в силу условия (14.1) при $k = 0$ получим

$$a_0 = f(x_0). \tag{14.5}$$

Дифференцируя равенство (14.4), будем иметь

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Положив здесь $x = x_0$, в силу условия (14.1) при $k = 1$ получим

$$a_1 = f'(x_0). \tag{14.6}$$

Вообще, продифференцировав равенство (14.4) k раз:

$$P_n^{(k)}(x) = k!a_k + (k + 1)\ldots 2a_{k+1}(x - x_0) + \ldots$$

$$\ldots + n(n - 1)\ldots(n - k + 1)(x - x_0)^{n-k}$$

и положив $x = x_0$, в силу условия (14.1) получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{14.7}$$

Таким образом, если коэффициенты многочлена (14.4) выбраны согласно формулам (14.7), то этот многочлен удовлетворяет условию (14.1). Покажем, что он удовлетворяет и условию (14.2). Для этого прежде всего отметим, что в силу условий (14.1) для функции

$$r_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - P_n(x) \tag{14.8}$$

имеет место

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0. \tag{14.9}$$

Для вычисления предела $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}$, применим сначала $n-1$ раз правило Лопиталя – теорему 2 из п. 13.1, а затем оттуда же теорему 1:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} \underset{(13.3)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \underset{(13.3)}{=} \ldots \underset{(13.3)}{=}$$

$$\underset{(13.3)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \underset{(13.2)}{=} \frac{r^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Это и означает выполнение условия (14.2). Итак, доказана следующая

Теорема 1. *Если функция f n раз дифференцируема в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{14.10}$$

Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{14.11}$$

называется *многочленом Тейлора**) (*порядка n*), формула (14.10) – *формулой Тейлора* (*порядка n*) для функции f в точке $x = x_0$, а функция

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{14.12}$$

– *остаточным членом* (*порядка n*) формулы Тейлора, а его представление в виде (14.2), т.е.

$$r_n(x) = o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

– записью остаточного члена *в виде Пеано***).

---

*) Б. Тейлор (1685–1731) – английский математик.

**) Д. Пеано (1858–1932) – итальянский математик.

Частный случай формулы Тейлора (14.10) при $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена*):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x),$$

где, согласно (14.2), остаточный член $r_n(x)$ можно записать в виде

$$r_n(x) = o(x^n), \qquad x \to 0.$$

Из нижеследующей теоремы будет следовать, что многочлен Тейлора единствен в своем роде. Именно, никакой другой многочлен не приближает функцию, заданную в окрестности точки x_0 с точностью до бесконечно малых того же порядка относительно $x - x_0$, $x \to x_0$, что и многочлен Тейлора.

Теорема 2. *Если функция f задана в окрестности точки x_0 и имеет представление*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \qquad x \to x_0, \tag{14.13}$$

то такое представление единственно.

▷ Пусть наряду с представлением (14.13) имеет место представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \qquad x \to x_0. \tag{14.14}$$

Тогда, положив

$$c_k = b_k - a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{14.15}$$

и вычтя из равенства (14.14) равенство (14.13), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) = 0, \qquad x \to x_0. \tag{14.16}$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получим $c_0 = 0$.

Заметим, что $o((x - x_0)^n) = \epsilon(x)(x - x_0)^n$, $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$ и, следовательно, при $x \neq x_0$

$$\frac{o((x - x_0)^n)}{x - x_0} = \epsilon(x)(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}), \qquad x \to x_0.$$

Сократив на $x - x_0$, $x \neq x_0$, левую часть равенства (14.16) (в нем, как уже доказано, $c_0 = 0$), получим

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k(x - x_0)^{k-1} + o((x - x_0)^{n-1}) = 0, \quad x \to x_0.$$

---

*) К. Маклорен (1698–1746) – шотландский математик.

Перейдя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, $x \neq x_0$, получим $c_1 = 0$. Продолжая этот процесс, последовательно будем иметь $c_2 = 0$, $c_3 = 0, \ldots, c_n = 0$.

Таким образом, в силу равенств (14.15)

$a_k = b_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$ ◁

Теорема 2 называется обычно *теоремой единственности.* Из нее следует, что если для n раз дифференцируемой в точке функции f получено представление ее в виде (14.13), то это представление является ее разложением по формуле Тейлора. В самом деле, при сделанных предположениях, согласно теореме 1, такое представление существует, а другого в силу теоремы 2 нет.

14.2. Примеры разложения по формуле Тейлора.

Примеры. 1. Напишем формулу Маклорена для функции $f(x) = \sin x$.

Так как $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ (см. п. 11.1), то

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k, \\ (-1)^k, \text{ если } n = 2k+1, \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + $$
$$+ o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \tag{14.17}$$

2. Для функции $f(x) = \cos x$ имеем аналогично:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ если } n = 2k+1, \\ (-1)^k, \text{ если } n = 2k, \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots,$

поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0. \tag{14.18}$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.

Так как $(e^x)^{(n)} = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$ и, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{14.19}$$

Отсюда следует, что

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \ldots (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{14.20}$$

Складывая и вычитая соотношения (14.19) и (14.20), после умножения результата на $1/2$ получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0, \tag{14.21}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \tag{14.22}$$

В силу теоремы единственности (см. теорему 2 в п. 14.1) полученные разложения являются разложениями функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ по формуле Тейлора.

4. Если $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \notin N$, то

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}.$$

Поэтому

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1), \; n = 1, 2, \ldots, \qquad f(0) = 1;$$

отсюда

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{14.23}$$

Очевидно, что всякая функция, в частности функция $(1+x)^\alpha$, приближает сама себя с точностью до любого $o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$, $n = 1, 2, \ldots$, которое в этом случае является тождественным нулем. Поэтому, если α – натуральное число, то в равенстве (14.22), в силу теоремы единственности, многочлен $(1+x)^\alpha$ степени α совпадает со своим многочленом Тейлора степени α:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n,$$

т.е. в этом случае формула (14.23) превращается в формулу бинома Ньютона.

5. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$; тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \qquad f''(x) = (-1)(1+x)^{-2},$$

вообще, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,(1+x)^{-n}$, поэтому

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и так как $f(0) = 0$, то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + o(x^n), \qquad x \to 0. \qquad (14.24)$$

14.3*. Применение метода выделения главной части функций для вычисления пределов. Пусть функция f представлена в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора в виде

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Многочлен Тейлора $P(x)$ называют *главной частью функции f в рассматриваемой окрестности.* Ее выделение полезно применять для нахождения пределов функций. Покажем на примерах, как это делается.

Примеры. 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Представим $\sin x$, согласно формуле Тейлора, в виде

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

В соответствии с теоремой 1 п. 9.3

$$x - \sin x = x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = \frac{x^3}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^3}{6}, \quad x \to 0.$$

Поэтому, применив теорему 2 п. 9.3, получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^3}{6}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}$.

Имеем

$$x\cos x = x(1 + o(x)) = x + o(x^2),$$

$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Поэтому согласно теоремам 1 и 2 из п. 9.3 с помощью этих соотношений будем иметь

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x + o(x^2) - \left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -1.$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2$ и $-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{2}x^2$, $x \to 0$.

3. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Заметив, что $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\operatorname{ctg}^2 x \ln\cos x}$, найдем предел логарифма функции, стоящей под знаком предела, т.е. предел

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{ctg}^2 x \ln\cos x).$$

Имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Поэтому

$$\ln\cos x = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0.$$

Далее,

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{(1 + o(x))^2}{(x + o(x))^2} = \frac{1 + o(x)}{x^2 + o(x^2)}, \quad x \to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} (\operatorname{ctg}^2 x \ln \cos x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + o(x))\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Тем самым найден и искомый предел:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

§ 15. Исследование функций

15.1. Признак монотонности функций.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале функция возрастала (убывала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была во всех точках интервала неотрицательна (неположительна).*

Если производная функция во всех точках интервала положительна (отрицательна), то функция строго возрастает (строго убывает).

▷ Докажем, например, что если на интервале (a, b) производная функции f неотрицательна ($f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$), то функция f возрастает на (a, b). Действительно, если $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$, то по теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2, \tag{15.1}$$

а так как по условию $f'(\xi) \geqslant 0$, то из равенства (15.1) следует, что $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, т.е.

$$f(x_1) \leqslant f(x_2). \tag{15.2}$$

При этом, если для всех $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ и, следовательно, в равенстве (15.1) $f'(\xi) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т.е.

$$f(x_1) < f(x_2) \tag{15.3}$$

— функция f строго возрастает.

Пусть теперь функция f возрастает на интервале (a, b) и имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ производную. Возьмем $\Delta x > 0$, тогда $f(x_0 + \Delta x) \geqslant f(x_0)$ и, следовательно,

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0. \tag{15.4}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f'(x_0) \geqslant 0. \tag{15.5}$$

Аналогично теорема 1 доказывается для убывающих функций. $\lhd$

З а м е ч а н и е 1. Как было показано, условие положительности производной на интервале является достаточным условием строгого возрастания. Отметим, что это условие не является, однако, необходимым условием строгого возрастания. Действительно, например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси, однако ее производная $f'(x) = 3x^2$ не всюду положительна — она обращается в нуль при $x = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Если функция непрерывна на некотором интервале и имеет во всех его точках, кроме, быть может, конечного их множества, неотрицательную (положительную) производную, то функция возрастает (строго возрастает) на рассматриваемом интервале.

В самом деле, если например, функция f непрерывна на (a, b), $c \in (a, b)$ и $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a, b)$, кроме $x = c$, то для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих одному из интервалов (a, c) или (c, b) и таких, что $x_1 < x_2$, согласно теореме 1 имеет место неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Если же $x_1 \in (a, c)$, $x_2 \in (c, b)$, то выберем точку x так, чтобы выполнялись неравенства $x_1 < x < c$, тогда $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Перейдя здесь к пределу при $x \to c - 0$, в силу непрерывности функции f в точке $x = c$ получим

$$f(x_1) \leqslant f(c). \tag{15.6}$$

Аналогично,

$$f(c) \leqslant f(x_2). \tag{15.7}$$

Поэтому и в рассматриваемом случае

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \tag{15.8}$$

т.е. функция f возрастает на интервале (a, b).

Если $f'(x) > 0$ при $x \in (a, b)$, $x \neq c$, то аналогично доказывается, что при $a < x_1 < c < x_2 < b$ выполняются неравенства

$$f(x_1) < f(c) < f(x_2),$$

а так как, согласно теореме 1, функция f строго возрастает на интервалах (a, c) и (c, b), то она строго возрастает и на всем интервале (a, b).

Подобным же образом рассматривается случай, когда условия $f'(x) \geqslant 0$, или $f'(x) > 0$, не выполняются на любом конечном множестве точек интервала (a, b).

Соответствующие утверждения справедливы и для убывающих и строго убывающих функций.

15.2. Локальные экстремумы функций.

О п р е д е л е н и е 1. *Точка* $x_0 \in X$ *называется* ***т о ч к о й л о к а л ь н о г о м а к с и м у м а*** (***м и н и м у м а***) ***ф у н к ц и и*** $f: X \to \mathbf{R}$, *если сущест-*

вует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{соответственно} \quad f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Если для всех $x \in X \cap U(x_0)$ и $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$), то точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (минимума).

В дальнейшем для простоты точки (строгого) локального максимума и минимума функции будем кратко называть ее точками (строгого) максимума и минимума.

Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума.*

Если функция f определена в окрестности точки x_0 и x_0 является точкой экстремума функции, то для всех достаточно малых $\Delta x = x - x_0$ приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ неотрицательно, если x_0 – точка минимума, и неположительно, если x_0 – точка максимума. Соответственно, $\Delta y > 0$, $x \neq x_0$, если x_0 – точка строгого минимума, и $\Delta y < 0$, $x \neq x_0$, если x_0 – точка строгого максимума. Таким образом, в точках строгого экстремума, и только в них, приращение Δy не меняет знака при переходе аргумента через рассматриваемую точку. Все это непосредственно следует из определения точек экстремума.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки x_0. Если точка x_0 является точкой экстремума функции f, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует.*

$\triangleright$ Действительно, производная в точке x_0 либо существует, либо нет. Если она существует, то по теореме Ферма (см. п. 12.1) она равна нулю.$\triangleleft$

Оба случая, указанные в теореме, могут быть реализованы. Например, в точке $x = 0$ функции $y = x^2$ и $y = |x|$ имеют строгий минимум, причем у первой из них производная в этой точке существует и равна нулю, а у второй – не существует.

Отметим, что условия равенства нулю производной или ее несуществования в данной точке, будучи необходимыми условиями экстремума, не являются достаточными условиями для наличия экстремума в этой точке. Например, у функции $f(x) = x^3$ производная $f'(x) = 3x^2$ в точке $x = 0$ равна нулю, а экстремума в этой точке нет.

Определение 2. *Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке производная функции либо существует и равна нулю, либо не существует, то точка x_0 называется критической точкой этой функции.*

Теорема 1 означает, что все точки экстремума функции находятся в множестве ее критических точек.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ и с* *каждой стороны от точки x_0 в этой окрестности ее производная сохраняет постоянный знак. Тогда, если при $x \in \mathring{U}(x_0)$*

1) $f'(x) > 0$, *то функция f строго возрастает на $U(x_0)$;*

2) $f'(x) < 0$, *то функция f строго убывает на $U(x_0)$;*

3) $f'(x) > 0$ *при* $x < x_0$ *и* $f'(x) < 0$ *при* $x > x_0$ *(производная меняет знак с плюса на минус), то точка x_0 является точкой строгого максимума;*

4) $f'(x) < 0$ *при* $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ *при* $x > x_0$ *(производная меняет знак с минуса на плюс), то точка x_0 является точкой строгого минимума.*

С л е д с т в и е. *Для функций, непрерывных в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и дифференцируемых в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, у которых производные с каждой стороны от точки x_0 сохраняют постоянный знак в рассматриваемой окрестности, точка x_0 является точкой строгого экстремума тогда и только тогда, когда в этой точке производная меняет знак.*

Иначе говоря, для функций рассматриваемого класса условие перемены знака у производной в некоторой точке является необходимым и достаточным условием наличия экстремума функции в этой точке.

$\triangleright$ Утверждения 1) и 2) доказаны в замечании 2 в п. 15.1 (рис. 79). Для доказательства утверждений 3) и 4) напишем формулу Лагранжа для функции $y = f(x)$ на отрезке с концами в точках x_0 и $x \in U(x_0)$:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \tag{15.9}$$

где точка ξ лежит между x_0 и x. Из этого равенства следует, что если производная $f'(x)$ при переходе ее аргумента через точку x_0 меняет знак с плюса на минус то (поскольку при этом разность $x - x_0$ меняет знак с минуса на плюс) приращение функции Δy все время остается отрицательным ($\Delta y < 0$, $x \neq x_0$), а это означает, что x_0 – точка строгого максимума. Если же производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то из равенства (15.9) следует, что приращение функции Δy все время положительно ($\Delta y > 0$, $x \neq x_0$) и, следовательно, x_0 является точкой строгого минимума. $\triangleleft$

Следует обратить внимание на то, что рассмотренным здесь случаем, т.е. случаем, когда точка x_0 является изолированной точкой множества всех критических точек функции f (и потому можно говорить о перемене знака производной f' при переходе через точку x_0), не исчерпываются возможные ситуации даже для всюду дифференцируемых функций:

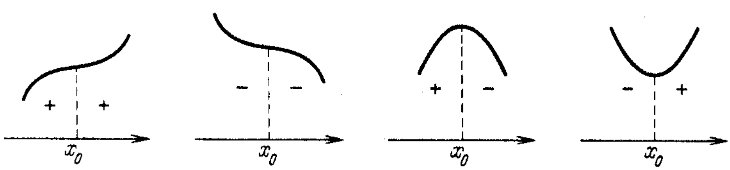


Рис. 79

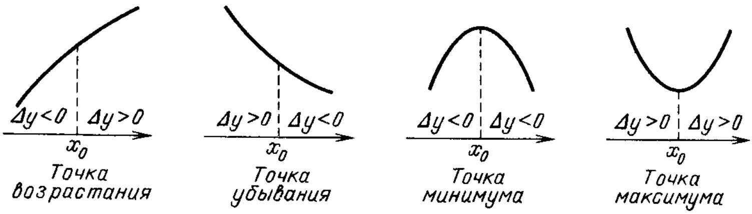


Рис. 80

может случиться, что для сколь угодно малых окрестностей по одну из сторон от точки x_0 или по обе стороны производная меняет знак. В этих точках приходится применять другие методы для исследования функции на экстремум. Таким образом, в более широком классе функций, дифференцируемых в окрестности рассматриваемой точки, кроме, быть может, самой этой точки, условие изменения знака производной в данной точке является лишь достаточным условием экстремума.

Введем еще одно понятие, которое будем использовать в дальнейшем.

О п р е д е л е н и е 3. *Точка x_0 называется точкой* в о з р а с т а н и я *функции f, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, принадлежащая области определения функции f, что для всех $x \in U(x_0)$ при $x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, а при $x > x_0$ – неравенство $f(x_0) < f(x)$.*

Если же при $x < x_0$ и $x > x_0$ выполняются соответственно неравенства $f(x) > f(x_0)$ и $f(x_0) > f(x)$, то точка x_0 называется т о ч к о й у б ы в а н и я *функции f.*

Таким образом, в точке возрастания x_0 функции $y = f(x)$ приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ меняет знак с минуса на плюс, а в точке убывания, наоборот, – с плюса на минус (рис. 80).

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, $n \geqslant 1$ и*

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{15.10}$$

Тогда, если $n = 2m$, $m \in \mathbf{N}$, т.е. n – четное число, то функция f имеет в точке x_0 строгий экстремум, а именно строгий максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и строгий минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$.

Если же $n = 2m - 1$, $m \in \mathbf{N}$, т.е. n – нечетное число, то функция f не имеет в точке x_0 экстремума; в этом случае при $f^{(2m-1)}(x_0) > 0$ точка x_0 является точкой возрастания функции f, а при $f^{(2m-1)}(x_0) < 0$ – ее точкой убывания.

Предпошлем доказательству одно простое замечание: если $\beta(x) = o(\alpha(x))$, $x \to x_0$, где функции α и β заданы в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}$, то существует такая окрестность $U(x_0)$ этой точки, что при $x \in U(x_0)$ справедливо неравенство

$$|\beta(x)| < \frac{1}{2}|\alpha(x)|. \tag{15.11}$$

В самом деле,

$$\beta(x) = \epsilon(x)\alpha(x), \tag{15.12}$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$, и, следовательно, существует такая окрестность $U(x_0)$, что при $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$|\epsilon(x)| < 1/2. \tag{15.13}$$

Из (15.12) и (15.13) следует неравенство (15.11).

$\triangleright$ Напишем формулу Тейлора порядка n для функции f в окрестности точки x_0 (см. п. 14.1).

В силу условий (15.10) будем иметь

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n + o(\Delta x^n), \quad \Delta x \to 0. \tag{15.14}$$

Так как $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то

$$o(\Delta x^n) = o\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n\right), \quad \Delta x \to 0,$$

т.е. второй член правой части равенства (15.14) является бесконечно малым по сравнению с первым. Поэтому, согласно (15.11), существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что при $x \in U(x_0)$ для функции $o(\Delta x^n)$ в формуле (15.14) выполняется неравенство

$$|o(\Delta x^n)| < \frac{1}{2}\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}|\Delta x|^n$$

и, следовательно, при достаточно малых $\Delta x \neq 0$ знак правой части равенства (15.14), а потому и знак приращения функции Δy, совпадает со знаком первого слагаемого правой части.

Если $n = 2k$, то в формуле (15.14) приращение аргумента Δx возводится в четную степень, поэтому знак приращения функции Δy не зависит от знака $\Delta x \neq 0$ и, следовательно, x_0 является точкой строгого экстремума, причем строгого максимума при $f^{(2k)}(x_0) < 0$ (в этом случае $\Delta y < 0$, $\Delta x \neq 0$) и строгого минимума при $f^{(2k)}(x_0) > 0$ (в этом случае $\Delta y > 0$, $\Delta x \neq 0$).

Если же $n = 2k - 1$, то Δx возводится в нечетную степень, и поэтому знак Δy меняется вместе с изменением знака Δx, следовательно, точка x_0 не является точкой экстремума. Если Δx меняет знак с минуса на плюс, то при $f^{(2k-1)}(x_0) > 0$ приращение Δy также меняет знак с минуса на плюс и, следовательно, x_0 является точкой возрастания функции f, а при

$f^{(2k-1)}(x_0) < 0$ приращение Δy меняет знак с плюса на минус и, следовательно, точка x_0 является точкой убывания функции f. ◁

Отметим специально частные случаи теоремы 4 при $n = 1$ и $n = 2$.

1. Если $f'(x_0) > 0$, то x_0 является точкой возрастания функции f, а если $f'(x_0) < 0$, то – точкой убывания.

2. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 является точкой строгого минимума, а если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то – точкой строгого максимума (рис. 81).

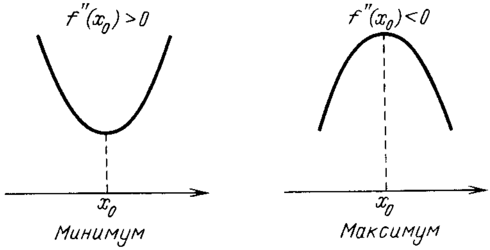


Рис. 81

Подчеркнем, что все условия экстремума, полученные в этом параграфе, относились к внутренним точкам промежутка, на котором была определена функция. На концах промежутка требуется проводить отдельные исследования и при применении методов дифференциального исчисления использовать в концевых точках понятие односторонних производных (см. п. 10.1).

15.3. Выпуклость и точки перегиба. Пусть функция f задана на интервале $(a\ b)$ и $a < x_1 < x_2 < b$. Проведем прямую через точки $A = (x_1, f(x_1))$ и $B = (x_2, f(x_2))$, лежащие на графике функции f. Уравнение этой прямой можно записать в виде

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}. \tag{15.15}$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $l(x)$, тогда оно запишется в виде

$$y = l(x).$$

О п р е д е л е н и е 4. *Функция f называется* в ы п у к л о й в в е р х н а и н т е р в а л е (a, b), *если, каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, для любой точки x интервала (x_1, x_2) выполняется неравенство*

$$l(x) \leqslant f(x). \tag{15.16}$$

Если же для всех точек $x \in (x_1, x_2)$ выполняется противоположное

неравенство

$$l(x) \geqslant f(x), \tag{15.17}$$

то функция f называется выпуклой вниз на интервале (a, b).

Это означает, что любая точка хорды AB (т.е. отрезка прямой (15.15) с концами в точках A и B), например, в случае выпуклости вниз расположена не ниже точки графика функции f, соответствующей тому же значению аргумента (рис. 82).

Заметим, что функция f выпукла вверх тогда и только тогда, когда функция $-f$ выпукла вниз.

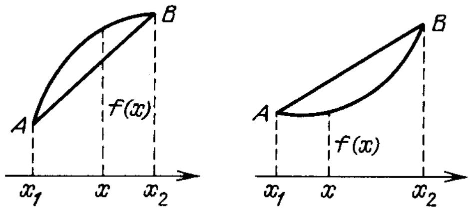


Рис. 82

Если вместо неравенств (15.16) и (15.17) выполняются строгие неравенства $l(x) < f(x)$ и $l(x) > f(x)$, $a < x_1 < x < x_2 < b$, то функция f называется *строго выпуклой вверх,* соответственно *строго выпуклой вниз на интервале* (a, b). В этом случае любая точка хорды AB, кроме ее концов, лежит ниже (выше) соответствующей точки графика функции.

Всякий интервал, на котором функция (строго) выпукла вверх, соответственно (строго) выпукла вниз, называется *интервалом* (*строгой*) *выпуклости вверх,* соответственно *вниз* этой функции.

Теорема 5 (достаточные условия строгой выпуклости). *Если вторая производная функции отрицательна* (*положительна*) *во всех точках интервала, то функция строго выпукла вверх* (*соответственно строго выпукла вниз*) *на этом интервале.*

$\triangleright$ Если $a < x_1 < x < x_2 < b$, то

$$l(x) - f(x) \underset{(15.15)}{=} \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} -$$

$$-f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Применив к разностям значений функций, стоящим в квадратных скобках, теорему о среднем Лагранжа (п. 12.2), получим

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$. Применим теперь теорему о среднем Лагранжа к разности значений производной $f'(\eta) - f'(\xi)$, тогда будем иметь

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \xi < \zeta < \eta.$$

Здесь знак правой части равенства совпадает со знаком $f''(\zeta)$ (все остальные сомножители положительны). Поэтому, если $f'' < 0$ на (a, b), то $l(x) < f(x)$, т.е. функция f строго выпукла вверх; если же $f'' > 0$ на (a, b), то $l(x) > f(x)$, т.е. функция f строго выпукла вниз. ◁

Отметим, что условие постоянства знака второй производной, являясь достаточным условием строгой выпуклости вверх или вниз, не является необходимым: на интервалах строгой выпуклости вверх или вниз вторая производная может обращаться в нуль. Например, функция $y = x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y'' = 12x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Покажем, что расположение графика дважды дифференцируемой функции относительно касательной к этому графику также зависит от знака второй производной.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция f имеет обязательно во всех точках x интервала (a, b) положительную (отрицательную) вторую производную $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$). Тогда, какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, все точки $(x, f(x))$, $x \in (a, b)$, графика функции f лежат выше (соответственно ниже) касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$, кроме самой этой точки, которая лежит на касательной.*

▷ Если у функции f существует вторая производная в точке x_0, то в этой точке существует конечная первая производная, а следовательно, график функции имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ наклонную касательную.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{15.18}$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $L(x)$, тогда

$$f(x) - L(x) \underset{(15.18)}{=} [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применив к разности $f(x) - f(x_0)$ теорему о среднем Лагранжа, получим

$$f(x) - L(x) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$

$$= [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где $a < x_0 < b$, $a < x < b$, а ξ лежит между x_0 и x.

Применив еще раз теорему Лагранжа, но уже к разности производных $f'(\xi) - f'(x_0)$, будем иметь

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0), \tag{15.19}$$

где точка η лежит между ξ и x_0. Поскольку точка ξ лежит между точками x и x_0, то точки ξ и x расположены по одну сторону от точки x_0, и поэтому $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. В силу этого знак разности $f(x) - L(x)$ при $x \neq x_0$ совпадает со знаком второй производной $f''(\eta)$. Следовательно, если на интервале (a, b) вторая производная положительна, то $f(x) > L(x)$, т.е. график функции f лежит над касательной, а если вторая производная отрицательна, то $f(x) < L(x)$, т.е. график функции лежит под касательной $y = L(x)$, $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. $\lhd$

О п р е д е л е н и е 5. *Пусть функция f дифференцируема при $x = x_0$ и пусть $y = L(x)$ – уравнение наклонной касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$* (см. (15.18)). *Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется т о ч к о й п е р е г и б а ф у н к ц и и f.*

Если x_0 – точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется т о ч к о й п е р е г и б а г р а ф и к а ф у н к ц и и f. В точке $(x_0, f(x_0))$ график функции f переходит с одной стороны наклонной касательной (15.18) *на другую сторону* (рис. 83).

П р и м е р. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Поскольку $f''(x) = 6x$, то $f''(x) < 0$ для всех $x < 0$ и $f''(x) > 0$ для всех $x > 0$. Следовательно (теорема 5), функция $f(x) = x^3$ выпукла вверх на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ и выпукла вниз на $(0, +\infty)$ (рис. 84). Уравнение касательной к ее графику в точке $(0, 0)$ имеет вид $y = 0$. Поэтому, поскольку при

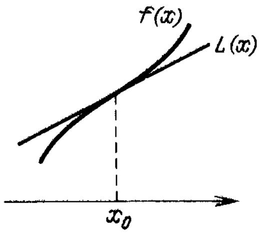


Рис. 83

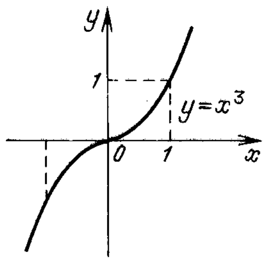


Рис. 84

$x < 0$ выполняется неравенство $f(x) < 0$, а при $x > 0$ – неравенство $f(x) > 0$, то точка $x = 0$ является точкой перегиба функции $f(x) = x^3$.

Т е о р е м а 7 (н е о б х о д и м о е у с л о в и е т о ч к и п е р е г и б а). *Если в точке перегиба функции существует вторая производная, то она равна нулю.*

$\rhd$Действительно, пусть функция f имеет в точке x_0 вторую производную и, как и выше, $y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, т.е.

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда, в силу формулы Тейлора

$$f(x) - L(x) =$$
$$= (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) - L(x) =$$
$$= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), \quad x \to x_0.$$

Если бы $f''(x_0) \neq 0$, то знак разности $f(x) - L(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадал бы со знаком числа $f''(x_0)$. В этом случае разность $f(x) - L(x)$ не меняла бы знака в точке x_0 и, следовательно, эта точка не была бы точкой перегиба. Итак, если x_0 – точка перегиба функции f, то $f''(x_0) = 0$. $\lhd$

Теорема 8 (первое достаточное условие точек перегиба). *Если функция f дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности этой точки и ее вторая производная меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то x_0 является точкой перегиба функции f.*

$\rhd$ Действительно, запишем, как и выше, уравнение касательной (15.18) к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ в виде $y = L(x)$. При доказательстве теоремы 6 было показано (см. (15.19)), что

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

где точки ξ, η и x лежат по одну сторону от точки x_0, и, следовательно, всегда

$$(\xi - x_0)(x - x_0) > 0, \quad x \neq x_0,$$

кроме того, когда точка x переходит с одной стороны от точки x_0 на другую, то то же происходит и с точкой η.

В силу этого разность $f(x) - L(x)$, $x \neq x_0$, имеет тот же знак, что и вторая производная $f''(\eta)$, и так как по условию эта производная в точке x_0 меняет знак, то меняет знак в этой точке и разность $f(x) - L(x)$. Это и означает, что x_0 является точкой перегиба. $\lhd$

Теорема 9 (второе достаточное условие точек перегиба). *Если в некоторой точке вторая производная функция равна нулю, а третья не равна нулю, то эта точка является точкой перегиба.*

$\rhd$ Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Согласно формуле Тейлора и в силу условия $f''(x_0) = 0$ имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$
$$+ o((x - x_0)^3), \quad x \to x_0.$$

Отсюда, применив обозначение

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

($y = L(x)$ – уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$), получим

$$f(x) - L(x) = \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + o((x - x_0)^3), \quad x \to x_0.$$

Отсюда следует, что в некоторой окрестности точки x_0 разность $f(x) - L(x)$, т.е. разность ординат графика функции и касательной к нему, при $x \neq x_0$ имеет тот же знак, что $\frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$, а следовательно, меняет его при переходе через точку x_0 (разность $x - x_0$ возводится в нечетную степень). Это и означает, что x_0 является точкой перегиба функции f. $\lhd$

15.4. Асимптоты.

О п р е д е л е н и е 6. *Если функция f задана для всех $x > a$ (соответственно для всех $x < a$) и существует такая прямая*

$$y = kx + l, \tag{15.20}$$

что

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (kx + l)] = 0 \tag{15.21}$$

(соответственно при $x \to -\infty$), то эта прямая называется а с и м п т о т о й ф у н к ц и и f п р и $x \to +\infty$ *(соответственно при $x \to -\infty$).*

Конечно, далеко не всякая функция имеет асимптоты. Существование асимптоты функции означает, что при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) функция ведет себя "почти как линейная функция", т.е. отличается от линейной функции на бесконечно малую.

Укажем методы отыскания асимптот (15.20). Будем рассматривать лишь случай $x \to +\infty$; для $x \to -\infty$ вывод уравнения асимптоты производится аналогичным способом. Пусть график функции f при $x \to +\infty$ имеет асимптоту (15.20). Тогда, поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, то из условия (15.21) следует, что тем более

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}(f(x) - kx - l) = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right) = 0$, откуда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \tag{15.22}$$

Если значение k найдено, то значение l находится из условия (15.21):

$$l = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx]. \tag{15.23}$$

Очевидно, справедливо и обратное утверждение: если существуют такие числа k и l, что выполняется условие (15.23), то прямая $y = kx + l$ является асимптотой функции f при $x \to +\infty$, так как из (15.23) сразу следует условие (15.21).

Пример. Найдем асимптоту функции

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}. \tag{15.24}$$

Согласно формулам (15.22) и (15.23) имеем

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(x - 1)} = 1,$$

$$l = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2.$$

Отсюда следует, что асимптотой функции (15.24) является прямая $y = x + 2$.

Уравнениями вида (15.20) описываются все прямые, которые не параллельны оси Oy, т.е. не вертикальны. Поэтому асимптоты вида (15.20) называют также и *наклонными асимптотами*. Сформулируем теперь определение вертикальных асимптот.

Определение 7. *Если для функции f выполнено хотя бы одно из условий*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty, \quad \textit{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty, \tag{15.25}$$

то прямая $x = x_0$ называется ***вертикальной асимптотой функции*** f.

Для того чтобы имело смысл рассматривать первый (второй) предел (15.25), здесь предполагается, что функция f задана на пересечении некоторой окрестности точки x_0 с лучом $x < x_0$ (с лучом $x > x_0$).

Чтобы найти вертикальные асимптоты функции f, надо найти такие значения x_0, для которых выполняются одно или оба условия (15.25). Например, для функции (15.24) вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, ибо

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \infty.$$

15.5*. Построение графиков функций. С помощью развитого в этом параграфе математического аппарата можно изучать поведение функций и строить их графики. Общее изучение заданной функции целесообразно проводить в следующем порядке:

1. Определить область существования функции, область непрерывности и точки разрыва.

2. Найти асимптоты.

3. Приблизительно, вчерне, нарисовать график функции.

4. Вычислить первую, а если нужно, и вторую производные (без производных более высокого порядка обычно удается обойтись). Найти точки, в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо равны нулю.

5. Составить таблицу изменения знака первой и второй производных. Определить интервалы возрастания, убывания, выпуклости вверх и вниз функции, найти точки экстремума (в том числе и концевые) и точки перегиба.

6. Окончательно вычертить график.

В результате, действуя подобным образом, мы, как правило, сумеем провести лишь качественное исследование заданной функции, так как, например, для нахождения точек экстремума согласно теореме 2 надо решить уравнение $f'(x) = 0$, а может оказаться, что точные значения корней этого уравнения мы не сумеем найти, а сумеем лишь с большей или меньшей точностью найти интервалы, где они находятся. В этом случае методы математического анализа позволяют, вообще говоря, осуществлять лишь качественное изучение поведения функции, а их количественное изучение осуществляется с помощью численных методов, возможности которых существенно расширяет использование современных вычислительных машин.

Пример. Построить график функции

$$f(x) = x\sqrt[3]{(x-1)^2}. \tag{15.26}$$

Функция f определена и непрерывна на всей числовой оси, поэтому у нее нет вертикальных асимптот. Поскольку

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x-1)^2} = +\infty,$$

то у нее нет и наклонных асимптот.

Функция f неотрицательна при положительных значениях аргумента x и отрицательна при его отрицательных значениях; $f(0) = f(1) = 0$;

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Легко видеть, что

$$f(x) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$f(x) \sim x^{5/3} \quad \text{как при} \quad x \to +\infty, \quad \text{так и при} \quad x \to -\infty.$$

На основе полученных данных можно построить эскиз графика функции (15.26) – он изображен на рис. 85. Для уточнения вида графика вычислим первую и вторую производные функции (15.26):

$$f'(x) = \frac{5x-3}{3\sqrt[3]{x-1}}, \quad f''(x) = \frac{2(5x-6)}{9(x-1)\sqrt[3]{x-1}}.$$

Поскольку $f'(3/5) = 0$ и производная в точке $x = 3/5$ меняет знак с плюса на минус (отметим, что в достаточно малой окрестности точки

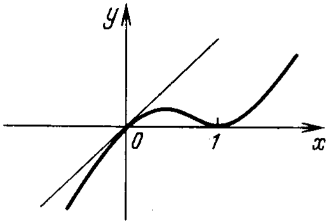


Рис. 85

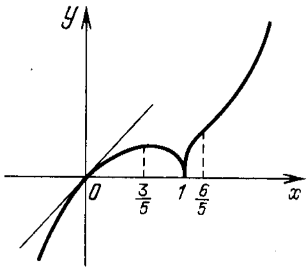


Рис. 86

$x = 3/5$ знаменатель у выражения для $f'(x)$ отрицателен), то эта точка является точкой максимума, что соответствует виду графика на рис. 85.

В точке $x = 1$ существует бесконечная производная, поэтому график функции (15.26) имеет в точке $(1, 0)$ вертикальную касательную.

Наконец $f''(6/5) = 0$, и в точке $x = 6/5$ вторая производная меняет знак. Это означает, что точка $x = 6/5$ является точкой перегиба. Принимая во внимание все дополнительные исследования, можно существенно уточнить вид графика функции (15.26). Уточненный вид графика этой функции изображен на рис. 86.

§ 16. Векторные функции

16.1. Предел и непрерывность векторной функции. В этом параграфе будут изучаться функции, значениями которых являются векторы, а аргументами – числа. Такие функции называются *вектор-функциями,* или *векторными функциями* (числового аргумента). Они обозначаются жирным шрифтом $\mathbf{r}(t)$ или с помощью черты над значениями функции: $\overline{OM}(t)$, $t \in X$, где X – некоторое числовое множество.

В этом определении в зависимости от рассматриваемых задач под векторами $\mathbf{r}(t)$ могут пониматься как свободные векторы, так и векторы с закрепленными началами. Если начала всех векторов закреплены в одной и той же точке (обычно – начало координат), то такие векторы называются *радиус-векторами.*

Если в трехмерном евклидовом пространстве задана прямоугольная система координат, то, как хорошо известно, каждому вектору соответствует упорядоченная тройка действительных чисел – его координат и, наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует вектор, для которого числа, входящие в эту тройку, являются его координатами. Поэтому задание вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in X$, эквивалентно заданию трех скалярных, т.е. числовых, функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $t \in X$, являющихся его координатами:

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in X.$$

Длина (абсолютная величина) всякого вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается $|\boldsymbol{a}|$, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – через $\boldsymbol{ab}$, или $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, а векторное – через $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, или $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Определим понятия предела, непрерывности, производной и дифференциала для векторных функций.

Определение 1. *Вектор $\boldsymbol{a}$ называют пределом вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in X$, при $t \to t_0$ (или в точке $t = t_0$) и пишут*

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}, \tag{16.1}$$

если

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = 0. \tag{16.2}$$

В этом определении $|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|$ – числовая функция. Таким образом, понятие предела векторной функции сводится к понятию предела скалярной функции. Вспомнив определение этого понятия, получим, что (16.1) означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех

$$t \in X \cap U(t_0, \delta) \tag{16.3}$$

выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \epsilon. \tag{16.4}$$

Как и в случае скалярных функций, будем предполагать, что t_0 является точкой прикосновения (конечной или бесконечно удаленной) множества X. Если t_0 – конечная точка, то условие (16.3) можно записать в виде

$$|t - t_0| < \delta, \quad t \in X, \tag{16.5}$$

а если t_0 – одна из бесконечно удаленных точек ∞, $+\infty$ или $-\infty$, то – соответственно в одном из следующих трех видов:

$$|t| > 1/\delta, \quad t > 1/\delta, \quad t < -1/\delta \tag{16.6}$$

и, конечно, всегда $t \in X$.

Если начало всех векторов $\boldsymbol{r}(t)$ поместить в одну точку (например, начало координат), то условие (16.4) будет означать, что концы всех векторов $\boldsymbol{r}(t)$ при $t \in X \cap U(t_0, \delta)$ лежат в шаре радиуса ϵ с центром в конце вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 87).

Обозначение $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ считается по определению равносильным с обозначением $\lim\limits_{t - t_0 \to 0} \boldsymbol{r}(t)$.

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, то

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| = \sqrt{[x(t) - a_1]^2 + [y(t) - a_2]^2 + [z(t) - a_3]^2} \tag{16.7}$$

и, следовательно,

$$|x(t) - a_1| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|,$$

$$|y(t) - a_2| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|, \quad |z(t) - a_3| \leqslant |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}|. \tag{16.8}$$

Поэтому

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a} \tag{16.9}$$

в том и только том случае, когда

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3. \tag{16.10}$$

Действительно, в силу соотношений (16.7) и (16.8) для того, чтобы выполнялось условие (16.2), необходимо и достаточно, чтобы

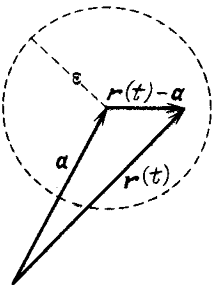


Рис. 87

$$\lim_{t \to t_0} |x(t) - a_1| = 0, \quad \lim_{t \to t_0} |y(t) - a_2| = 0,$$

$$\lim_{t \to t_0} |z(t) - a_3| = 0.$$

Аналогично случаю числовых функций, если $t_0 \in X$ и на множестве X существует предел $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$, то

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0).$$

О п р е д е л е н и е 2. *Если для функции* $\boldsymbol{r}(t)$, $t \in X$, *имеет место*

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0) \tag{16.11}$$

и t_0 *– конечная точка, то эта функция называется* *н е п р е р ы в н о й в т о ч к е* t_0.

Как и в случае скалярных функций, условие (16.11) выполняется тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$ и $t_0 \in X$.

Из эквивалентности условий (16.9) и (16.10) следует, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны все ее координатные функции.

Отметим основные свойства пределов векторных функций.

1°. *Если* $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}$, *то* $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{r}(t)| = |\boldsymbol{a}|$. *Это непосредственно следует из неравенства*

$$||\boldsymbol{r}| - |\boldsymbol{a}|| \leqslant |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}|.$$

2°. $\lim\limits_{t \to t_0} [\boldsymbol{r}_1(t) + \boldsymbol{r}_2(t)] = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) + \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

3°. $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)\boldsymbol{r}(t) = \lim\limits_{t \to t_0} f(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t)$

($f(t)$ – *скалярная функция*).

4°. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t)\boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

5°. $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) = \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) \times \lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t)$.

В свойствах 2° – 5° все рассматриваемые функции определены на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$, и предполагается, что все пределы, входящие в правые части равенств, существуют, и утверждается, что существуют пределы, стоящие в левых частях, причем имеют место написанные формулы.

Все эти свойства доказываются методом, аналогичным методу, которым доказывались свойства пределов скалярных функций в п. 6.7.

▷ Докажем в качестве примера свойство 5°. Заметим предварительно, что для любых двух векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ справедливо неравенство

$$|\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}| = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}| \sin \widehat{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}} \leqslant |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|. \tag{16.12}$$

Поэтому, если $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$, причем $\lim\limits_{t \to t_0} |\boldsymbol{p}(t)| = 0$, а $|\boldsymbol{q}(t)|$ – ограниченная функция, то в силу неравенства (16.12)

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}| = 0. \tag{16.13}$$

Пусть теперь $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{b}$. Положим

$$\boldsymbol{\alpha}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{\beta}(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{b}, \tag{16.14}$$

тогда, согласно (16.2),

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{\alpha}(t)| = \lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{\beta}(t)| = 0. \tag{16.15}$$

Преобразуем произведение $\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t)$ с помощью формул (16.14):

$$\boldsymbol{r}_1(t) \times \boldsymbol{r}_2(t) = [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\alpha}(t)] \times [\boldsymbol{b} + \boldsymbol{\beta}(t)] =$$
$$= \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\beta}(t) + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\beta}(t). \tag{16.16}$$

Здесь в силу (16.13)

$$\lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\beta}(t)| = \lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{b}| = \lim_{t \to t_0} |\boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\beta}(t)| = 0,$$

а так как

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|\leqslant$$
$$\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|,$$

то

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\beta}(t)+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\alpha}(t)\times\boldsymbol{\beta}(t)|=0.$$

Отсюда, в силу (16.16), имеем (см. определение 1)

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0,$$

что и доказывает свойство. 5°. $\lhd$

Из свойств пределов векторных функций и определения их непрерывности следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, а также произведение скалярных функций на векторные непрерывны в некоторой точке, если в этой точке непрерывны все слагаемые или соответственно сомножители.

16.2. Производная и дифференциал векторной функции. Пусть векторная функция $\boldsymbol{r}(t)$ задана в некоторой окрестности точки t_0; тогда соотношение $\dfrac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}$ определено в соответствующей проколотой окрестности точки t_0.

Определение 3. *Предел*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}$$

(если он, конечно, существует) называется ***производной векторной функции*** $\boldsymbol{r}(t)$ *в точке* t_0 *и обозначается* $\boldsymbol{r}'(t_0)$ *или* $\dot{\boldsymbol{r}}(t_0)$.

Если положить $\Delta t=t-t_0$, $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)$, то

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\stackrel{\text{def}}{=}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{16.17}$$

Пусть $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$. Так как

$$\frac{\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{t-t_0}=\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\quad\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\quad\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}\right),$$

то в силу (16.9), (16.10) для того, чтобы векторная функция $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ имела производную в точке t_0, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имели производные в точке t_0, причем в этом случае

$$\boldsymbol{r}'(t_0)=(x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)). \tag{16.18}$$

Производную $r'(t)$ вектор-функции $r(t)$ называют также *скоростью изменения вектора* $r(t)$ относительно параметра t. В случае, когда длина вектора $r(t)$ не меняется, производная $r'(t)$ называется также и скоростью вращения вектора $r(t)$, а ее абсолютная величина – численным значением скорости его вращения.

З а м е ч а н и е 1. По аналогии со случаем скалярных функций векторную функцию $\alpha(t)$, $t \in X$, называют *бесконечно малой* по сравнению со скалярной функцией $\beta(t)$, $t \in X$, при $t \to t_0$ и пишут $\alpha(t) = o(\beta(t))$, $t \to t_0$, если существуют векторная функция $\epsilon(t)$, определенная на том же множестве X, что и функции $\alpha(t)$, и $\beta(t)$, такие, что в некоторой окрестности точки $t = t_0$ имеет место равенство

$$\alpha(t) = \epsilon(t)\beta(t), \quad t \in X,$$

и

$$\lim_{t \to t_0} \epsilon(t) = \mathbf{0}.$$

Как и для скалярных функций, если $t_0 \in X$, то функция $\epsilon(t)$ непрерывна в точке t_0, и потому $\epsilon(t_0) = \mathbf{0}$.

З а м е ч а н и е 2. Вектор-функция аргумента t называется *линейной*, если она имеет вид $at + b$, где a и b – какие-либо два фиксированных вектора.

После этих вводных замечаний можно определить понятие дифференцируемости и дифференциала вектор-функции.

О п р е д е л е н и е 4. *Вектор-функция $r(t)$, заданная в некоторой окрестности точки t_0, называется д и ф ф е р е н ц и р у е м о й п р и $t = t_0$, если ее приращение*

$$\Delta r = r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)$$

в точке t_0 представимо в виде

$$\Delta r = a\Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0. \tag{16.19}$$

При этом линейная вектор-функция $a\Delta t$ приращения аргумента Δt называется д и ф ф е р е н ц и а л о м ф у н к ц и и $r(t)$ в точке t_0 и обозначается через dr, т.е. $dr = a\Delta t$.

Таким образом,

$$\Delta r = dr + o(\Delta t), \quad \Delta t \to 0. \tag{16.20}$$

Здесь функция $o(\Delta t)$ определена при $\Delta t = 0$, в этой точке она равна нулю:

$$o(\Delta t)|_{\Delta t = 0} = (\Delta r - a\Delta t)|_{\Delta t = 0} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, если представить эту функцию $o(\Delta t)$ в виде (см. замечание 1)

$$o(\Delta t) = \epsilon(\Delta t)\Delta t,$$

то функция $\epsilon(\Delta t)$ также будет определена при $\Delta t = 0$, а поэтому, как выше было отмечено, в этом случае $\boldsymbol{\epsilon}(0) = \mathbf{0}$. Благодаря этому здесь предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t) = \mathbf{0} \tag{16.21}$$

рассматривается не по проколотой, а по целой окрестности точки $\Delta t = 0$.

Формулу (16.19) теперь можно записать в виде

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\Delta t + \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t)\Delta t, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t) = \mathbf{0}. \tag{16.22}$$

Докажем несколько простых утверждений о дифференцируемых векторных функциях, аналогичных соответствующим утверждения для скалярных функций.

I. *Если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

$$\triangleright \lim_{\Delta t \to 0} \Delta \boldsymbol{r} \underset{(16.22)}{=} \lim_{\Delta t \to 0} (\boldsymbol{a}\Delta t + \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t)\Delta t) = \mathbf{0}. \triangleleft$$

II. *Если векторная функция $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и*

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \boldsymbol{a},$$

где вектор $\boldsymbol{a}$ определяется формулой (16.19).

$$\triangleright \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \underset{(16.19)}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{o}(\Delta t)}{\Delta t}\right) = \boldsymbol{a}. \triangleleft$$

Верным является и обратное утверждение.

III. *Векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке.*

$\triangleright$ Если существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} + \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t), \qquad \Delta t \neq 0,$$

где

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t \neq 0}} \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t) = 0,$$

то

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t + \boldsymbol{\epsilon}(\Delta t)\Delta t.$$

Полагая $\epsilon(0) = \mathbf{0}$, получим (16.22) при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}'(t_0)$, т.е. функция $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d\boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t. \lhd$$

По определению считается, что $dt \overset{\text{def}}{=} \Delta t$. Поэтому (опуская для простоты обозначения аргумента) имеем $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'dt$, или $\boldsymbol{r}' = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$.

IV. *Если $t = t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функция, а $\boldsymbol{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0 = t(\tau_0)$ векторная функция, то*

$$\boldsymbol{r}'_\tau(t(\tau_0)) = \boldsymbol{r}'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0),$$

или, короче

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}. \tag{16.23}$$

$\rhd$ Из соотношения (16.22) имеем при $\Delta\tau \neq 0$:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta\tau} = \boldsymbol{r}'_t\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \epsilon(\Delta t)\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau}. \tag{16.24}$$

По условию функция $t = t(\tau)$ дифференцируема в точке τ_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = t'(\tau_0). \tag{16.25}$$

Отсюда следует, что эта функция в рассматриваемой точке непрерывна:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\Delta t = 0.$$

Отсюда и из условия (16.21) вытекает, что

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\epsilon(\Delta t) = \mathbf{0}.$$

Из всего сказанного следует, что при $\Delta\tau \to 0$ правая часть равенства (16.24), а следовательно, и его левая часть имеют конечные пределы. Это означает, что в точке τ_0 существует производная $\boldsymbol{r}'_\tau$ и что

$$\boldsymbol{r}'(t(\tau_0)) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\left[\boldsymbol{r}'_t(t_0)\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \epsilon(\Delta t)\,\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right] =$$

$$= \boldsymbol{r}'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0). \lhd$$

Из формулы (16.23) аналогично случаю скалярных функций вытекает инвариантность записи дифференциала векторной функции: как для зависимой переменной t, так и для независимой τ имеем

$$dr = r'_t dt, \quad dr = r'_\tau d\tau \tag{16.26}$$

– чтобы из второй формулы получить первую, надо подставить во вторую формулу $r'_\tau = r'_t \cdot t'_\tau$ и заметить, что $t'_\tau d\tau = dt$.

V. *Для производных вектор-функций имеют место формулы, аналогичные соответствующим формулам для скалярных функций*:

$$(r_1 + r_2)' = r'_1 + r'_2,$$

$$(fr)' = f'r + fr',$$

$$(r_1 r_2)' = r'_1 r_2 + r_1 r'_2,$$

$$(r_1 \times r_2)' = r'_1 \times r_2 + r_1 \times r'_2.$$

Здесь все производные берутся в одной и той же точке. Предполагается, что производные, стоящие в правой части каждого равенства, существуют, и утверждается, что в этом случае существуют и производные, находящиеся в левых частях равенств.

▷ Доказываются эти формулы аналогично скалярному случаю. Докажем, например, последнюю из них:

$$(r_1 \times r_2)'|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_1(t_0 + \Delta t) \times r_2(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0) \times r_2(t_0)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{r_1(t_0 + \Delta t) - r_1(t_0)}{\Delta t} \times r_2(t_0 + \Delta t) + \right.$$

$$\left. + r_1(t_0) \frac{r_2(t_0 + \Delta t) - r_2(t_0)}{\Delta t} \right] = r'_1(t_0) \times r_2(t_0) + r_2(t_0) \times r'_2(t_0). \triangleleft$$

Для дальнейшего нам будет полезна следующая

Л е м м а. *Если вектор-функция $r(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $r(t)$ имеют одну и ту же длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $r'(t_0)$ ортогональна вектору $r(t_0)$*:

$$r'(t_0) r(t_0) = 0. \tag{16.27}$$

▷ Действительно, если в указанной окрестности $|r(t)| = c$, где c – константа, то $|r|^2 = c^2$, т.е. $r^2 = c$. Дифференцируя это равенство, получим $2rr' = 0$, что равносильно равенству (16.27). ◁

Физический смысл формулы (16.27) состоит в том, что у материальной точки, движущейся по поверхности шара ($r(t)$ – радиус-вектор этой точки, t – время движения, c – радиус указанного шара) ее скорость $v = \dfrac{dr}{dt}$

всегда направлена по касательной к поверхности шара, т. е. перпендикулярно радиусу шара.

Производные высших порядков для вектор-функции определяются по индукции: если у вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 задана производная $\boldsymbol{r}^{(n)}(t)$ порядка n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ $(\boldsymbol{r}^{(0)}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{r}(t))$, то производная порядка $n + 1$ в этой точке (если эта производная, конечно, существует) определяется по формуле

$$\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0) = (\boldsymbol{r}^{(n)}(t))' \,|_{t = t_0}.$$

Если векторная функция имеет в некоторой точке n производных, то говорят также, что она в этой точке *n раз дифференцируема.* Можно и для векторных функций по аналогии со скалярными ввести понятие дифференциалов высших порядков, но не будем на этом останавливаться.

Если векторная функция $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ n раз дифференцируема в точке $t = t_0$, то в некоторой окрестности этой точки для функции $\boldsymbol{r}(t)$ имеет место формула

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\boldsymbol{r}^{(k)}(t_0)}{k!} \Delta t^k + \boldsymbol{o}(\Delta t^n), \qquad \Delta t \to 0,$$

называемая по аналогии со скалярным случаем формулой Тейлора (порядка n) функции $\boldsymbol{r}(t)$ с остаточным членом в виде Пеано. Эта формула непосредственно следует из разложений по формуле Тейлора координат $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$.

Из всего сказанного видно, что рассмотренные определения и утверждения для векторных функций получаются перенесением соответствующих определений и утверждений из теории скалярных функций.

Замечание 3. Следует, однако, иметь в виду, что не все, что справедливо для скалярных функций, имеет прямой аналог с векторном случае. Это относится, например, к теореме Ролля, а следовательно, и к теореме Лагранжа, частным случаем которой является теорема Ролля.

В самом деле, рассмотрим дифференцируемую векторную функцию $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \; \sin t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (третья координата функции $\boldsymbol{r}(t)$ – тождественный нуль). Поскольку $\boldsymbol{r}'(t) = (-\sin t, \; \cos t)$, то $|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$ при любом $t \in [0, 2\pi]$ и, следовательно, не существует такой точки $\xi \in [0, 2\pi]$, для которой было бы $\boldsymbol{r}'(\xi) = \boldsymbol{0}$, несмотря на то, что $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(2\pi)$.

Для векторных функций вместо прямого аналога теоремы Лагранжа можно доказать нижеследующую теорему 1.

Ее формулировке и доказательству предпошлем два замечания.

Замечание 4. Если вектор $\boldsymbol{x}$ – ненулевой и $\boldsymbol{x}_0$ – единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{x}$, т. е. $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$, то

$$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0. \qquad (16.28)$$

В самом деле, согласно определению скалярного произведения

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0 = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{x}_0|\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0}. \tag{16.29}$$

Здесь по условию $|\boldsymbol{x}_0| = 1$, а $\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_0} = 0$ и, следовательно, $\cos\widehat{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0} = 1$, т. е. равенство (16.29) превращается в равенство (16.28).

Замечание 5. Для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ имеет место неравенство

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \leqslant |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|. \tag{16.30}$$

$\triangleright$ Действительно,

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} \leqslant |\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}| = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\,|\cos\widehat{\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}}| \leqslant |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|. \triangleleft$$

Теорема 1. *Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что*

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|(b - a). \tag{16.31}$$

$\triangleright$ Если $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, то неравенство (16.31) справедливо при любом выборе точки $\xi \in (a, b)$, так как его левая часть обращается в нуль.

Пусть $\boldsymbol{r}(a) \neq \boldsymbol{r}(b)$ и, следовательно, $\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) \neq \boldsymbol{0}$. Если $\boldsymbol{e}$ – единичный вектор в направлении вектора $\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) \neq \boldsymbol{0}$, то согласно замечанию 4

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| = (\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a))\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}(b)\boldsymbol{e} - \boldsymbol{r}(a)\boldsymbol{e},$$

т. е. получилась разность значений скалярной функции

$$f(t) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}(t)\boldsymbol{e} \tag{16.32}$$

на концах отрезка $[a, b]$:

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| = f(b) - f(a). \tag{16.33}$$

Из формулы (16.32) следует, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его внутренних точках, ибо, согласно условиям теоремы, этими свойствами обладает функция $\boldsymbol{r}(t)$. Поэтому в силу формулы конечных приращений Лагранжа существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Но согласно правилу дифференцирования скалярного произведения имеем

$$f'(t) = \boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{e},$$

вследствие чего

$$f(b) - f(a) = \boldsymbol{r}'(\xi)\boldsymbol{e}(b - a), \qquad a < \xi < b. \tag{16.34}$$

Поскольку в силу неравенства (16.30) имеет место неравенство

$$r'(\xi)e \leqslant |r'(\xi)||e| = |r'(\xi)|, \tag{16.35}$$

то

$$|r(b) - r(a)| \underset{(16.33)}{=} f(b) - f(a) \underset{\substack{(16.34)\\(16.35)}}{\leqslant} |r'(\xi)|(b-a), \qquad a < \xi < b.$$

Неравенство (16.31) доказано. $\triangleleft$

§ 17. Длина кривой

17.1. Понятие кривой. Рассмотрим отображение некоторого отрезка $[a, b]$ числовой прямой $\mathbf{R}$ в пространство $\mathbf{R}^3$, т. е. такое отображение, которое каждой точке $t \in [a, b]$ ставит в соответствие точку $M(t)$ пространства $\mathbf{R}^3$. Если в пространстве $\mathbf{R}^3$ задана прямоугольная декартова система координат x, y, z, то между точками пространства $\mathbf{R}^3$ и тройками чисел x, y, z имеется взаимно однозначное соответствие, а поэтому задание отображения $M(t) \in \mathbf{R}^3$, $t \in [a, b]$, равносильно заданию трех числовых функций (называемых *координатными*) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ являются координатами точки $M(t)$.

Отображение $M(t) \in \mathbf{R}^3$, $t \in [a, b]$, называется *непрерывным на отрезке* $[a, b]$, если на этом отрезке непрерывны все его координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Определение 1. *Непрерывное отображение отрезка в пространство называется кривой.*

Кривые будем обозначать большими греческими буквами Г, Λ. Если $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, – непрерывное отображение какого-либо отрезка $[a, b]$ в пространство, т. е. кривая Г, то будем писать

$$\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{17.1}$$

или

$$\Gamma = \{x(t), y(t), z(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{17.2}$$

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координатные функции отображения $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ отображения $M(t)$, $t \in [a, b]$, однозначно задают вектор-функцию $r(t)$, координатами которой они являются:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{17.3}$$

Эта вектор-функция называется *векторным представлением кривой* (17.1). Если начало вектора $r(t)$ поместить в начало координат, то его концом будет точка $M(t)$.

При задании кривой Г ее векторным представлением (17.3) пишут

$$\Gamma = \{ \boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b \}. \tag{17.4}$$

Множество точек пространства $\mathbf{R}^3$, на которое отображение (17.1) отображает отрезок $[a, b]$, называется *носителем кривой* Г. Если O – начало координат в пространстве $\mathbf{R}^3$, то конец радиус-вектор $\overline{OM}(t)$ при изменении параметра t на отрезке $[a, b]$ пробегает носитель кривой Г. В дальнейшем, когда будут рассматриваться векторные представления (17.4) кривой Г, всегда будет предполагаться, что вектор $\boldsymbol{r}(t)$ является радиус-вектором с началом в начале координат, т.е. что $\boldsymbol{r}(t) = \overline{OM}(t)$.

Переменная t называется *параметром* на кривой Г. Всякая строго монотонная непрерывная на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ функция

$$t = t(\tau), \qquad \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta, \tag{17.5}$$

отображающая отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$, для которой, следовательно, в случае ее строгого возрастания выполняется условие

$$t(\alpha) = a, \qquad t(\beta) = b,$$

а в случае строгого убывания – условие

$$t(\alpha) = b, \qquad t(\beta) = a$$

(рис. 88), называется *преобразованием* параметра t кривой (17.1) (или, полнее, *преобразованием параметра t к параметру τ*). Обратная к функции

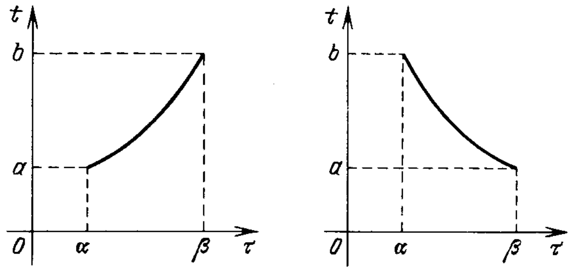


Рис. 88

$t = t(\tau)$ функция $\tau = \tau(t)$ является, очевидно, преобразованием параметра для кривой $\{M(t(\tau));\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}$.

При преобразовании параметра $t = t(\tau)$ из равенства $M(t) = M(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$, следует, что исходная кривая и кривая, получающаяся из нее с помощью преобразования параметра, имеют один и тот же носитель.

Если координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ отображения (17.1) n раз дифференцируемы или n раз непрерывно дифференцируемы, то кривая Г называется n *раз дифференцируемой* или соответственно *n раз непрерывно дифференцируемой кривой.*

Преобразованиями параметра n раз (непрерывно) дифференцируемой кривой называются такие n раз (непрерывно) дифференцируемые строго монотонные функции (17.5), у которых во всех точках отрезка $[\alpha, \beta]$ их производная не равна нулю:

$$t'(\tau) \neq 0, \qquad \tau \in [\alpha, \beta].$$

Это условие нужно для того, чтобы обратная функция $\tau = \tau(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, была также преобразованием параметра τ кривой $M(t(\tau))$, $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$ (см. формулы для производной обратной функции в п. 10.6).

Для того чтобы кривая Г была n раз дифференцируема, соответственно n раз непрерывно дифференцируема ($n = 1, 2, \ldots$), необходимо и достаточно, чтобы ее векторное представление (17.2) было n раз дифференцируемо, соответственно n раз непрерывно дифференцируемо. Это следует из того, что непрерывность (дифференцируемость) векторной функции равносильна непрерывности (дифференцируемости) ее координат (п. 16.2).

Точка носителя кривой Г, в которую при отображении (17.1) отображаются по крайней мере две разные точки отрезка $[a, b]$, называется *кратной точкой носителя* этой кривой, или *точкой самопересечений кривой*. Если кратная точка носителя кривой Г имеет в точности n прообразов при отображении $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, то эта точка называется *n-кратной.*

Если носитель кривой Г не имеет кратных точек, т. е. отображение (17.1) взаимно однозначно отображает отрезок $[a, b]$ в пространство $\mathbf{R}^3$, то кривая Г называется *простой дугой.*

Точкой кривой (17.1) называется пара (M, t), где $M = M(t) \in \mathbf{R}^3$, а $t \in [a, b]$. Точка $M \in \mathbf{R}^3$ называется *носителем точки* (M, t).

Если $M_0 = M(a)$, а $M_1 = M(b)$, то точка (M_0, a) называется *началом* кривой Г, а точка (M_1, b) – ее *концом* (впрочем, иногда обе точки (M_0, a) и (M_1, b) называют концами кривой Г). Если носители начала и конца кривой Г совпадают ($M(a) = M(b)$), то кривая Г называется *замкнутой.*

Если у носителя замкнутой кривой нет других кратных точек, кроме носителя ее начала и конца, который является двукратной точкой, то кривая Г называется *простым замкнутым контуром.*

Там, где это не может привести к недоразумениям (например, для простых дуг), точка (M, t) кривой Г часто обозначается $M(t)$, т. е. тем же символом, что и носитель указанной точки.

Если $t_1 \in [a, b]$, $t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$, то кривая $\{M(t);\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ называется частью кривой (17.1), или ее дугой $\overset{\frown}{M(t_1)M(t_2)}$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в $M(t_2)$.

Если носитель кривой Г лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской.*

Примеры. 1. Рассмотрим две замкнутые плоские кривые:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{17.6}$$

и

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi. \tag{17.7}$$

Их носителями является одна и та же окружность $x^2 + y^2 = 1$, но это две разные кривые: у кривой (17.6) параметр t изменяется от 0 до 2π, и эта окружность проходится один раз, а у кривой (17.7) параметр t изменяется от 0 до 4π, и та же окружность проходится два раза.

Носитель кривой (17.6) имеет только одну кратную точку – носитель начала и конца этой кривой. У носителя кривой (17.7) все точки кратные.

2. Непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, задает плоскую кривую

$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

являющуюся, очевидно, простой дугой. Ее носителем является график функции f, а параметром – переменная x. В этом случае пишут

$$\Gamma = \{y = f(x);\ a \leqslant x \leqslant b\}$$

и говорят, что кривая Г *имеет явное представление–функцию* f.

Упорядоченность точек отрезка $[a, b]$ порождает с помощью отображения $M(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, упорядоченность точек на кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Если $t_1 < t_2$, то точка $M(t_1)$ кривой Г называется точкой, *предшествующей точке* $M(t_2)$ этой кривой. Кривая Г, на которой установлен такой порядок точек, называется *ориентированной кривой.*

Порядок точек на кривой

$$\{M(a + b - t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{17.8}$$

называется *противоположным* порядку точек кривой $\Gamma\{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, а сама кривая (17.8) – кривой, *ориентированной противоположно* к данной кривой Г.

Для ориентированной кривой преобразованием параметра называются только строго возрастающие функции – они не меняют порядок точек, в то время как строго убывающие меняют их порядок на противоположный.

Замечание 1. Задание кривой Г в виде $M(t)$, $(x(t), y(t), z(t))$ и $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, называют ее параметрическими заданиями, а саму кривую Г называют также *параметрически заданной* непрерывной кривой.

Замечание 2. Если для плоской кривой Γ существует такая функция $F(x, y)$, что координаты всех точек (x, y) носителя кривой Γ удовлетворяют условию

$$F(x, y) = 0, \tag{17.9}$$

то говорят, что уравнение (17.9) является *неявным заданием кривой* Γ.

Следует иметь в виду, что, вообще говоря, множество всех точек, удовлетворяющих уравнению вида (17.9), не является носителем некоторой кривой в вышеопределенном смысле даже для достаточно "хороших" функций $F(x, y)$. Например, множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$, представляет собой окружность $x^2 + y^2 = 1$ и точку $(0, 0)$.

Замечание 3. В случае кривых, лежащих на плоскости, иногда бывает удобно их задавать в полярных координатах ρ, φ (ρ – полярный радиус точки плоскости, а φ – угол, образованный им с полярной осью), которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi. \tag{17.10}$$

В полярных координатах кривая задается уравнениями вида

$$\rho = \rho(\varphi), \qquad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta. \tag{17.11}$$

С помощью формул (17.10) задание кривой уравнением (17.11) сразу сводится к ее параметрическому заданию:

$$x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \qquad y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \qquad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,$$

где за параметр взят полярный угол φ.

Замечание 4. Отметим еще, что сформулированное определение кривой не охватывает все то, что интуитивно естественно отнести к понятию кривой, например, прямую линию, гиперболу, параболу и т.п. Чтобы охватить определением и подобные "кривые", следует рассмотреть отображения в пространство не только отрезкой, но и других промежутков числовой оси: интервалов и полуинтервалов.

17.2. Касательная к кривой. Пусть задана кривая $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $\boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, – ее векторное представление, вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке $t_0 \in [a, b]$ и $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$. В силу определения дифференцируемости

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0) = \boldsymbol{r}'(t_0)\Delta t + o(\Delta t), \qquad \Delta t \to 0.$$

Из этой формулы и из условия $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$ следует, что для всех достаточно малых $\Delta t \neq 0$ имеет место неравенство $\Delta\boldsymbol{r} \neq 0$, т.е. $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) \neq \boldsymbol{r}(t_0)$, а поэтому точки $M_0 = M(t_0)$ и $M = M(t_0 + \Delta t)$ различны. Проведем через них прямую (она обычно называется *секущей*) M_0M. Очевидно, вектор $\Delta\boldsymbol{r}$, а следовательно, и вектор $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$, $\Delta t \neq 0$, отличающийся от вектора $\Delta\boldsymbol{r}$ только скалярным множителем $1/\Delta t$, параллельны секущей M_0M.

По условию в точке t_0 существует производная $\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$.

Геометрически это означает, что векторы $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$, параллельные секущей M_0M, при $\Delta t \to 0$ стремятся к некоторому предельному вектору $\boldsymbol{r}'(t_0)$, по условию не равному нулю, а так как все секущие M_0M проходят через одну и ту же точку M_0, то прямую, проходящую через эту точку в направлении вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$, называют предельным положением секущих M_0M при $\Delta t \to 0$ (рис. 89), или *касательной* к кривой Г в точке $M(t_0)$.

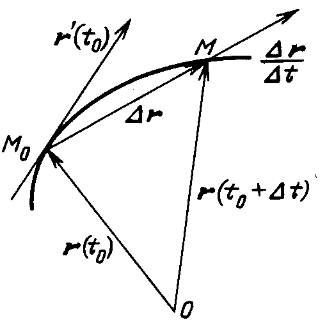


Рис. 89

Если начало вектора $\boldsymbol{r}'(t_0)$ поместить в точку $M(t_0)$, то он будет направлен по касательной, поэтому ее уравнение в векторной форме имеет вид

$$\rho = \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{r}'(t_0)\tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty \tag{17.12}$$

(ρ – текущий радиус-вектор касательной), а в координатной

$$x = x_0 + x'(t_0)\tau, \qquad y = y_0 + y'(t_0)\tau,$$
$$z = z_0 + z'(t_0)\tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty, \tag{17.13}$$

или

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'} = \frac{z - z_0}{z_0'} \tag{17.14}$$

(здесь $\rho = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}'(t_0) = (x_0', y_0', z_0')$).

Точка кривой Г, в которой $\boldsymbol{r}'(t_0) = \mathbf{0}$, называется *особой*, а точка, в которой $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, – *неособой.*

Из сказанного выше следует, что геометрический смысл производной $\boldsymbol{r}'(t)$ вектор-функции $\boldsymbol{r}(t)$ состоит в том, что в неособой точке вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ направлен по касательной к кривой в конце радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t_0)$. В этом случае вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$ называется вектором, касательным к кривой в соответствующей точке.

Если $\boldsymbol{r}'(t_0) = \ldots = \boldsymbol{r}^{(n-1)}(t_0) = 0$, а $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0) \neq 0$, то по формуле Тейлора

$$\Delta \boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)}{n!}\Delta t^n + o(\Delta t^n).$$

Вектор $\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t^n$ направлен по секущей M_0M, где, как и раньше, $M_0 = M(t_0)$, $M = M(t_0 + \Delta t)$, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t^n} = \boldsymbol{r}^{(n)}(t_0).$$

Определяя и в этом случае касательную к кривой Γ в точке M_0 как предельное положение секущих M_0M при $\Delta t \to 0$, т.е. как прямую, проходящую через точку M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)$, получим ее уравнение в виде

$$\boldsymbol{\rho}(\tau) = \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)\tau, \qquad -\infty < \tau < +\infty. \tag{17.15}$$

З а м е ч а н и е 1. Если рассматривается плоская кривая

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), \qquad a \leqslant t \leqslant b,$$

и $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$, то уравнение (17.14) касательной прямой превращается в уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{x_0'} = \frac{y - y_0}{y_0'}, \tag{17.16}$$

лежащей в плоскости кривой.

Если эта кривая задается непрерывной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, дифференцируемой в точке x_0 (за параметр на кривой взята переменная x), то уравнение касательной в точке (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$, в силу формулы (17.16) имеет вид $\dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{f'(x_0)}$, т.е.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0. \tag{17.17}$$

Таким образом, получилось, конечно, то же самое уравнение касательной к графику функции, что и раньше (п. 10.3).

Сформулируем еще несколько определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой.*

Кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *объединением кривых* Γ_i, если $\Gamma_i = \{\boldsymbol{r}(t);\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_{n-1} < t_n = b$.

Очевидно, что в этом случае начало кривой Γ_1 является и началом кривой Γ, конец кривой Γ_n – концом Γ, а конец каждой кривой Γ_i – началом Γ_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Кривая, являющаяся объединением конечного числа гладких кривых, называется *кусочно гладкой.*

Замечание 2. Понятие кривой имеет в своей основе понятие траектории движущейся материальной точки. Если конец радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$ описывает траекторию движения этой точки, а параметр t является временем движения, то производная $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ равна мгновенной скорости в данный момент времени.

17.3. Определение длины кривой. Спрямляемые кривые. Под длиной кривой понимается точная верхняя грань длин вписанных в эту кривую ломаных. Сформулируем это определение более подробно. Введем сначала понятие разбиения отрезка – понятие, которое будет неоднократно встречаться в дальнейшем.

Определение 2. *Для отрезка* $[a, b]$ *всякая система* $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ *точек* t_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, i_\tau$, *таких, что*

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{i_\tau} = b,$$

называется его разбиением.

Пусть задана кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и пусть $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ – некоторое разбиение отрезка $[a, b]$. Положим

$$\sigma_\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})|, \tag{17.18}$$

т.е. σ_τ – это длина ломаной с вершинами в точках M_i, являющихся

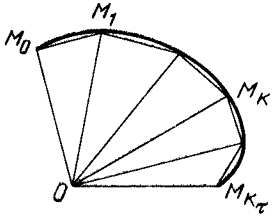


Рис. 90

концами радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, i_\tau$, иначе говоря, ломаной, вписанной в кривую Γ (рис. 90).

Определение 3. *Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется ее длиной.*

Таким образом, длина S_Γ кривой Γ определяется формулой

$$S_\Gamma \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_\tau \sigma_\tau, \tag{17.19}$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$. Очевидно,

$$0 \leqslant S_\Gamma \leqslant +\infty.$$

Если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой.*

Теорема 1. *Если кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема, то она спрямляема и ее длина S_Γ удовлетворяет неравенству*

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant c(b-a), \tag{17.20}$$

где

$$c = \max_{[a,\,b]} |\boldsymbol{r}'(t)|. \tag{17.21}$$

▷ Возьмем какое-либо разбиение $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$ отрезка $[a, b]$. Тогда, используя тождество

$$\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a) = \sum_{i=1}^{i_\tau} \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) \tag{17.22}$$

и применяя теорему 1 из п. 16.2, получим

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \underset{(17.22)}{=} \left|\sum_{i=1}^{i_\tau} \boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} |\boldsymbol{r}'(\xi_i)|\,(t_i - t_{i-1}) \underset{(17.21)}{\leqslant}$$

$$\underset{(17.21)}{\leqslant} c \sum_{k=1}^{i_\tau} t_i - t_{i-1} = c(b-a), \tag{17.23}$$

где $t_{i-1} < \xi_i < t_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$. Так как

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} |\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})| \underset{(17.18)}{=} \sigma_\tau$$

– длина вписанной в кривую Γ ломаной, соответствующей разбиению τ, то из неравенства (17.23) следует, что

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant \sigma_\tau \leqslant c(b-a).$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$, получим в силу определения (17.19) неравенство (17.20):

$$|\boldsymbol{r}(b) - \boldsymbol{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \underset{(17.19)}{=} \sup_\Gamma \sigma_\tau \leqslant c(b-a).$$

В заключение заметим, что в силу непрерывной дифференцируемости функции $\boldsymbol{r}(t)$ на отрезке $[a, b]$ числовая функция $|\boldsymbol{r}'(t)|$ непрерывна на этом отрезке и, следовательно, согласно теореме Вейерштрасса принимает на нем наибольшее значение в некоторой точке $\xi \in [a, b]$:

$$c = \max_{[a,b]} |\boldsymbol{r}'(x)| = |\boldsymbol{r}'(\xi)| < +\infty.$$

Поэтому $S_\Gamma < +\infty$, т.е. кривая Γ спрямляема. $\lhd$

Теорема 2. *Если кривая* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $s = s(t)$, *отсчитываемая от начала кривой* Γ, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{17.24}$$

$\rhd$ Как и выше, будем через $M(t)$ обозначать конец радиус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$. Пусть $s(t)$ – длина дуги кривой Γ от точки $M(a)$ до точки $M(t)$, $t_0 \in [a, b]$, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$, и $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Очевидно, что $|\Delta s|$ является длиной дуги с концами в точках $M(t_0)$ и $M(t_0 + \Delta t)$. Поэтому, согласно теореме 1, имеет место неравенство

$$|\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)| \leqslant |\Delta s| \leqslant c|\Delta t|, \tag{17.25}$$

где c – наибольшее значение $|\boldsymbol{r}'(t)|$ на отрезке с концами в точках t_0 и $t_0 + \Delta t$. Обозначим через $\xi = \xi(\Delta t)$ точку этого отрезка, в которой

$$|\boldsymbol{r}'(\xi)| = c. \tag{17.26}$$

Поделим обе части равенства (17.25) на $|\Delta t|$, $\Delta t \neq 0$:

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \leqslant c \underset{(17.26)}{=} |\boldsymbol{r}'(\xi)|. \tag{17.27}$$

Функция $s = s(t)$ возрастает (с увеличением дуги ее длина возрастает). Поэтому, если $\Delta t > 0$, то $\Delta s \geqslant 0$, а если $\Delta t < 0$, то $\Delta s \leqslant 0$ и, следовательно, всегда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} \geqslant 0$, иначе говоря, $\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

Таким образом, неравенство (17.27) можно записать в виде

$$\left|\frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\right| \leqslant \frac{\Delta s}{\Delta t} \leqslant |\boldsymbol{r}'(\xi)|. \tag{17.28}$$

Левая и правая части этого неравенства имеют при $\Delta t \to 0$ один и тот же предел, равный $|\boldsymbol{r}'(t_0)|$.

В самом деле, в силу определения производной

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}\right| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t_0+\Delta t)-r(t_0)}{\Delta t}\right| = |r'(t_0)|.$$

Из выполнения же условия $\xi \in [t_0, t_0+\Delta t]$ при $\Delta t > 0$ или условия $\xi \in \in [t_0+\Delta t, t_0]$ при $\Delta t < 0$ следует, что $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \xi = t_0$, а так как функция $|r'(t)|$ непрерывна в точке t_0, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} |r'(\xi)| = |r'(t_0)|.$$

А тогда из неравенства (17.28) получаем, что предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ существует и также равен $|r'(t_0)|$. Это означает, что существует производная $s'(t_0)$ и что

$$s'(t_0) = |r'(t_0)|.$$

Если $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, а потому

$$s'(t) = |r'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}. \lhd \tag{17.29}$$

Замечание 1. Если длина σ дуг кривой Γ отсчитывается от ее конца, то $\sigma = S_\Gamma - s$ и, следовательно, $\dfrac{d\sigma}{ds} = -1$, поэтому

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\,\frac{ds}{dt} = -\frac{ds}{dt} = -|r'(t)|.$$

Замечание 2. Если непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{r(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ не имеет особых точек ($r'(t) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$), т.е. Γ – гладкая кривая, то в силу теоремы 2 переменная длина дуги $s = s(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a, b]$: $s'(t) = |r'(t)| > 0$. А так как $s(a) = 0$, $s(b) = S_\Gamma$, то обратная функция $t = t(s)$ однозначна, строго возрастает, непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, S_\Gamma]$ и

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dfrac{ds}{dt}}. \tag{17.30}$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой ее параметр является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины дуги и производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(s)$ есть преобразование параметра в смысле п. 17.1. Из сказанного вытекает также, что имеет смысл производная

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}\,.$$

Вектор $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ только числовым множителем $\dfrac{dt}{ds}$ отличается от касательного вектора $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} \neq \boldsymbol{0}$ и поэтому также направлен по касательной. Докажем, что вектор $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ является единичным вектором.

Теорема 3. *Если кривая* $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ – *гладкая, а* $s = s(t)$ – *переменная длина ее дуги, то* $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ *является единичным касательным к кривой* Γ *вектором*:

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = 1. \tag{17.31}$$

$$\triangleright \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}\right| \underset{(17.30)}{=} \left|\frac{\boldsymbol{r}'_t}{s'_t}\right| \underset{(17.24)}{=} 1. \triangleleft$$

Разъясним геометрический смысл равенства (17.31). Отрезок с концами в точках $M(t_0)$ и $M(t_0 + \Delta t)$ кривой $\Gamma = \{M(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется ее *хордой*, стягивающей дугу с началом и концом в тех же точках

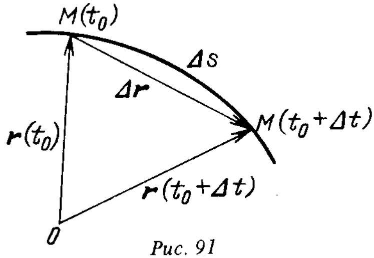


Рис. 91

(рис. 91). Если $\{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ – векторное представление кривой Γ, то точки $M(t_0)$ и $M(t_0 + \Delta t)$ являются соответственно концами радиус-векторов $\boldsymbol{r}(t_0)$ и $\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t)$. Поэтому длина хорды $M(t_0)M(t_0 + \Delta t)$ равна длине $|\Delta \boldsymbol{r}|$ вектора $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)$:

$$|M(t_0)M(t_0 + \Delta t)| = |\Delta \boldsymbol{r}|. \tag{17.32}$$

Если $s = s(t)$ – переменная длина дуги на кривой Γ, отсчитываемая от ее начала $M(a)$, то $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ при $\Delta t > 0$ является длиной дуги от точки $M(t_0)$ до точки $M(t_0+\Delta t)$ и, в силу непрерывности функции $s(t)$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s=0$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{|\Delta s|}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right|=1, \tag{17.33}$$

т.е. отношение длины хорды к длине стягиваемой ею дуги стремится к единице, когда $\Delta t\to 0$ (или, что равносильно, когда $\Delta s\to 0$).

З а м е ч а н и е 3. Координатами всякого единичного вектора являются его направляющие косинусы, т.е. косинусы углов, которые он образует с осями координат. Поэтому, если обозначить через α, β и γ углы, которые образует с координатными осями переменных x, y и z вектор $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$, то

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{17.34}$$

С другой стороны,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right). \tag{17.35}$$

Сравнив формулы (17.34) и (17.35), получим

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds}=\cos\beta, \quad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma. \tag{17.36}$$

§ 18. Кривизна кривой

18.1. Определение кривизны и радиуса кривизны кривой. Важной характеристикой кривой является ее кривизна. Определим это понятие.

О п р е д е л е н и е 1. *Абсолютная величина (длина) скорости вращения единичного касательного вектора к кривой в данной ее точке относительно переменной длины дуги называется* *к р и в и з н о й   к р и в о й   в   э т о й   т о ч к е.*

Если $\Gamma=\{\boldsymbol{r}(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ — гладкая кривая, а $s=s(t)$ — переменная длина ее дуги, отсчитываемая от начала кривой Γ, то вектор

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \tag{18.1}$$

является единичным касательным вектором (теорема 3 в п. 17.3) к кривой Γ. Поэтому кривизна кривой в данной ее точке, обозначаемая обычно через k, согласно данному определению задается формулой

$$k=\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right|. \tag{18.2}$$

Отсюда в силу соотношения (18.1) следует, что

$$k = \left| \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{ds^2} \right| . \tag{18.3}$$

Из этой формулы видно, что определение (18.2) имеет смысл тогда, когда функция $\boldsymbol{r}(s)$ является по крайней мере дважды дифференцируемой.

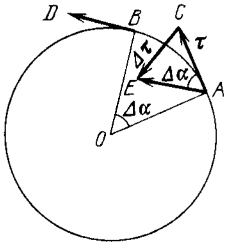


Рис. 92

Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны кривой в данной точке* и обозначается через R. Таким образом,

$$R = \frac{1}{k} . \tag{18.4}$$

Пример. Покажем, что для окружности ее радиус совпадает с радиусом кривизны, и поэтому ее кривизна одна и та же во всех точках и равна обратной величине радиуса.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 92). Пусть A и B — точки на окружности, $\overset{\frown}{AB}$ — дуга окружности с концами в точках A и B, длина которой не превышает длины полуокружности, $\Delta s = |\overset{\frown}{AB}|$ — длина этой дуги, $\boldsymbol{\tau} = \overline{AC}$ и $\boldsymbol{\tau} + \Delta\boldsymbol{\tau} = \overline{BD} = \overline{AE}$ — единичные касательные векторы к окружности соответственно в точках A и B, $|\overline{AE}| = |\overline{AC}| = 1$, $\Delta\alpha$ — угол между векторами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, $\overline{CE} = \Delta\boldsymbol{\tau}$, $\overset{\frown}{CE}$ — дуга окружности единичного радиуса с центром в точке A и $|\overset{\frown}{CE}|$ — ее длина, очевидно, равная $\Delta\alpha$:

$$|\overset{\frown}{CE}| = \Delta\alpha. \tag{18.5}$$

Тогда

$$\Delta s = R\Delta\alpha, \tag{18.6}$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{|\overset{\frown}{CE}|} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\overline{CE}|}{|\overset{\frown}{CE}|} \underset{(17.33)}{=} 1, \tag{18.7}$$

а поэтому

$$k \underset{(18.2)}{=} \left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\tau}{\Delta s}\right| \underset{(18.6)}{=} \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\tau|}{|\overset{\frown}{CE}|}\,\frac{|\overset{\frown}{CE}|}{R\Delta\alpha} \underset{(18.5)}{=}$$

$$\underset{(18.5)}{=} \frac{1}{R}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\tau|}{|\overset{\frown}{CE}|} \underset{(18.7)}{=} \frac{1}{R}.$$

18.2. Формула для кривизны. Пусть

$$\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{18.8}$$

– дважды дифференцируемая кривая без особых точек. Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемое преобразование параметра t к переменной длине s дуги кривой Γ: $t = t(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma$ (см. замечание 2 в п. 17.3). Вектор $\tau = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ является единичным касательным к кривой Γ вектором и имеет производную

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \tag{18.9}$$

а следовательно, для рассматриваемой кривой в каждой ее точке определена кривизна k (см. (18.2)) и для нее справедлива формула (18.3).

Теорема 1. *Если $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ – дважды дифференцируемая кривая без особых точек, то в каждой точке кривой существует кривизна k и для нее справедлива формула*

$$k = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3}. \tag{18.10}$$

Штрихом здесь и в дальнейшем обозначаются производные по параметру t, производные же по длине дуги будут обозначаться через $\dfrac{d}{ds}$.

▷ Касательный вектор $\tau = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ – единичный, т.е. имеет постоянную длину, равную единице. Поэтому его производная $\dfrac{d\tau}{ds}$ ему перпендикулярна (см. лемму из п. 16.2). Длина векторного произведения $\tau \times \dfrac{d\tau}{ds}$ равна произведению длин сомножителей $\left(|\tau| = 1, \left|\dfrac{d\tau}{ds}\right| \underset{(18.2)}{=} k\right)$ на значение синуса угла между ними, т.е. на единицу, так как указанный угол прямой. Поэтому

$$\left| \tau \times \frac{d\tau}{ds} \right| = k, \tag{18.11}$$

или, что то же самое (см. (18.1) и (18.10)),

$$k = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right|. \tag{18.12}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \boldsymbol{r}' \frac{dt}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}'}{s'}, \tag{18.13}$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{r}'}{s'}\right)' \frac{dt}{ds} = \frac{s'\boldsymbol{r}'' - s''\boldsymbol{r}'}{s'^3}. \tag{18.14}$$

Следовательно,

$$k \underset{(18.12)}{=} \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \right| \underset{\substack{(18.13)\\(18.14)}}{=} \left| \frac{\boldsymbol{r}'}{s'} \times \frac{s'\boldsymbol{r}'' - s''\boldsymbol{r}'}{s'^3} \right| =$$

$$= \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{s'^3} = \frac{|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|}{|\boldsymbol{r}'|^3},$$

ибо $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{0}$. $\triangleleft$

Из формулы (18.10) можно получить формулу, выражающую кривизну через производные координатных функций: если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ – единичные векторы координатных осей переменных x, y, z и

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \tag{18.15}$$

то

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r}'' = x''\boldsymbol{i} + y''\boldsymbol{j} + z''\boldsymbol{k}, \tag{18.16}$$

$$|\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \tag{18.17}$$

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \tag{18.18}$$

откуда

$$|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}. \tag{18.19}$$

Подставив (18.17) и (18.19) в формулу (18.10), получим искомое выражение для кривизны.

18.3. Главная нормаль. Соприкасающаяся плоскость. Для того чтобы изучить расположение кривой относительно ее касательной в окрестности точки касания, полезно ввести понятие главной нормали.

Определение 2. *Если в некоторой точке кривой ее кривизна не равна нулю* ($k \neq 0$), *т.е. существует производная* $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \neq 0$, *то единичный вектор в направлении вектора* $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ *называется вектором главной нормали (короче, главной нормалью) и обозначается через* $\boldsymbol{\nu}$.

Так как $\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\right| = k$ (см. (18.2)), то

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k\boldsymbol{\nu}, \quad |\boldsymbol{\nu}| = 1. \tag{18.20}$$

Эта формула называется *формулой Френе*)*.

То, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ называется нормалью, оправдывается тем обстоятельством, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ как вектор, параллельный производной $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ единичного вектора $\boldsymbol{\tau}$, перпендикулярен касательному вектору $\boldsymbol{\tau}$ (см. лемму в п. 16.2).

Выясним геометрический смысл направления вектора главной нормали. Для кривой (18.8) вектор $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, а поэтому и вектор главной нормали

$$\boldsymbol{\nu} \underset{(18.20)}{=} \frac{1}{k}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \underset{(18.9)}{=} \frac{1}{k}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \tag{18.21}$$

не зависят от выбора ориентации кривой Γ, или, что то же самое, от выбора направления отсчета дуг на Γ. В самом деле, если σ – переменная длина дуги кривой Γ, отсчитываемая в противоположном, чем длина дуги s, направлении, и, следовательно, если $\sigma = S_\Gamma - s$, то, заметив, что $\frac{d\sigma}{ds} = -1$, получим

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = -\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma},$$

а поэтому

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right) = \frac{d}{d\sigma}\left(-\frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\right)\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{d\sigma^2}.$$

*) Ж. Френе (1816–1900) – французский математик.

Геометрический смысл вектора главной нормали состоит в том, что он, в отличие от всех других единичных векторов, перпендикулярных касательному вектору, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δs^2, $\Delta s \to 0$, указывает направление, в котором кривая в окрестности рассматриваемой точки отклоняется от своей касательной (рис. 93). Более точно это означает следующее. Разложим векторную функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ в окрестности точки s_0 по формуле Тейлора:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s_0 + \Delta s) - \boldsymbol{r}(s_0) =$$

$$= \frac{d\boldsymbol{r}(s_0)}{ds} \Delta s + \frac{1}{2} \frac{d^2\boldsymbol{r}(s_0)}{ds^2} \Delta s^2 + o(\Delta s^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Отсюда, вспомнив, что

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \underset{(18.1)}{=} \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} \underset{(18.21)}{=} k\boldsymbol{\nu}, \tag{18.22}$$

получим

$$\Delta \boldsymbol{r} = \Delta s \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2} k \Delta s^2 \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{o}(\Delta s^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Поскольку $\frac{1}{2} k \Delta s^2 > 0$, то разность $\Delta \boldsymbol{r} - \Delta s \boldsymbol{\tau}$, т.е. отклонение кривой от касательной, с точностью до $\boldsymbol{o}(\Delta s^2)$, $\Delta s \to 0$, направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$:

$$\Delta \boldsymbol{r} - \Delta s \boldsymbol{\tau} = \frac{1}{2} k \Delta s^2 \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{o}(\Delta s^2), \quad \Delta s \to 0. \tag{18.23}$$

Определение 3. *Всякая прямая, проходящая через точку кривой и перпендикулярная касательной в этой точке, называется* **нормалью к кривой в данной точке**. *Нормаль к кривой, параллельная вектору* $\boldsymbol{\nu}$, *называется* **главной нормалью**.

Таким образом, главной нормалью называют как вектор $\boldsymbol{\nu}$, так и параллельную ему прямую, проходящую через соответствующую точку кривой.

Определение 4. *Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется* **соприкасающейся плоскостью в этой точке**.

В силу этого определения соприкасающаяся плоскость однозначно определена для точек, в которых кривизна $k \neq 0$. Напишем уравнение этой плоскости для кривой, заданной произвольным дважды дифференцируемым векторным представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Как всегда, производные по переменной t будем обозначать штрихом, а производные по длине дуги s – символом $\frac{d}{ds}$. Дифференцируя векторную функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ как композицию функций $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ и $s = s(t)$, получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\, s = s'\boldsymbol{\tau}, \\ \boldsymbol{r}'' &= s'^2 \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} + s''\boldsymbol{\tau} = s'^2 k\boldsymbol{\nu} + s''\boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \tag{18.24}$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ являются линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ и, следовательно, также параллельны соприкасающейся

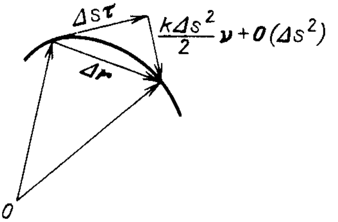


Рис. 93

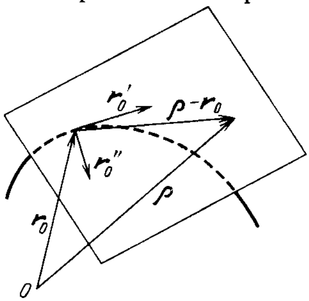


Рис. 94

плоскости. В силу же условия $k \neq 0$ выполняется неравенство $|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| \neq 0$ (см. (18.10)), поэтому векторы $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$ не коллинеарны, а тем самым однозначно определяют параллельную им плоскость, проходящую через заданную точку.

Обозначим теперь через $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$ и $\boldsymbol{r}_0''$ векторы $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}'$ и $\boldsymbol{r}''$, соответствующие некоторой фиксированной точке данной кривой, а через $\boldsymbol{\rho}$ обозначим текущий вектор соприкасающейся плоскости в этой точке. Тогда смешанное произведение векторов $\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{r}_0'$ и $\boldsymbol{r}_0''$ должно быть равно нулю, так как все они параллельны соприкасающейся плоскости (рис. 94):

$$(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0', \boldsymbol{r}_0'') = 0. \tag{18.25}$$

Это и есть уравнение соприкасающейся плоскости в векторном виде. Если $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_0' = (x_0', y_0', z_0')$, $\boldsymbol{r}_0'' = (x_0'', y_0'', z_0'')$, то уравнение (18.25) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0.$$

18.4. Центр кривизны. Эволюта.

Определение 5. *Точка пространства, находящаяся на расстоянии, равном радиусу кривизны от точки кривой в направлении вектора глав-*

ной нормали, называется ***центром кривизны кривой*** *в рассматриваемой точке этой кривой.*

Пусть R — радиус кривизны кривой Γ в точке M_0. Если $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор центра кривизны M, а $\boldsymbol{r}$, как обычно, — радиус-вектор данной точки M_0 кривой, то (рис. 95)

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\nu},$$

или, что то же самое (см. (18.4) и (18.21)),

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k^2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}. \tag{18.26}$$

Найдем выражение вектора $\boldsymbol{\rho}$ через производные векторной функции $\boldsymbol{r}$ по произвольному параметру t.

Подставив в формулу (18.26) выражение для $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ через производные по t (см. (18.14)), получим

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r} + \frac{1}{k^2}\frac{s'\boldsymbol{r}'' - s''\boldsymbol{r}'}{s'^3}, \tag{18.27}$$

где (считаем, что при возрастании параметра t длина дуги $s = s(t)$ также возрастает) $s' = |\boldsymbol{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, а поэтому

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}. \tag{18.28}$$

Формулу (18.27) можно рассматривать как векторное представление некоторой кривой, точками носителя которой являются центры кривизны данной кривой. Эта кривая называется *эволютой* данной кривой.

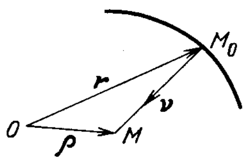


Рис. 95

18.5. Кривизна и эволюта плоской кривой. Пусть кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ лежит в некоторой плоскости; тогда и все производные векторной функции $\boldsymbol{r}(t)$, если их начало поместить на эту плоскость, будут также в ней лежать. В самом деле, приращение $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ лежит в этой плоскости, поэтому лежит в ней и отношение $\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$, а следовательно, и его предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{r}'$. Применив те же рассуждения к $\boldsymbol{r}'$, получим, что и r'' лежит в указанной плоскости и т.д. Отсюда следует, что если кривая лежит в некоторой плоскости, то касательная к кривой (а если ее кривизна $k \neq 0$, то и главная нормаль) лежит в той же плоскости. Поэтому эта плоскость является соприкасающейся плоскостью для рассматриваемой кривой.

Запишем некоторые из формул, полученных в п. 18.4, более подробно для случая, когда кривая $\Gamma = \{ \boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b \}$ лежит в плоскости переменных x и y: $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$. В этом случае $\boldsymbol{r}' = (x', y')$, $|\boldsymbol{r}'| = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$, $\boldsymbol{r}'' = (x'', y'')$, $|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''| = \left| \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \right| = |x'y'' - x''y'|$.

Поэтому из формул (18.2) и (18.13) получаем следующую формулу для кривизны:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \tag{18.29}$$

Обозначим через (ξ, η) центр кривизны кривой Γ. Из формул (18.27) и (18.29) следует, что

$$\xi = x + \frac{(x'^2 + y'^2)^3}{(x'y'' - x''y')^2} \; \frac{(x'^2 + y'^2)^{1/2} x'' - \dfrac{x'x'' + y'y''}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}\, x'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \underset{(18.28)}{=}$$

$$\underset{(18.28)}{=} x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, y'. \tag{18.30}$$

Аналогично,

$$\eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\, x'. \tag{18.31}$$

В случае, когда кривая задается явно, т.е. функцией

$$y = f(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{18.32}$$

(в этом случае $x = t$, $x' = 1$, $x'' = 0$), формулы (18.29), (18.30), (18.31) принимают вид

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{18.33}$$

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\, y', \qquad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{18.34}$$

На примере кривой, имеющей явное задание, поясним, что кривизна кривой является *угловой скоростью вращения* касательной к этой кривой относительно длины ее дуги.

Обозначим через α угол, образованный касательной к кривой (18.7) с осью x (рис. 96), и будем его рассматривать как функцию длины дуги s этой кривой, а s в свою очередь — как функцию переменной x.

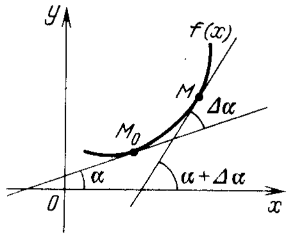


Рис. 96

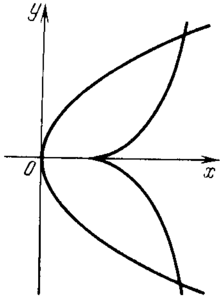


Рис. 97

Дифференцируя по x равенство $\operatorname{tg}\alpha = y'$, получим

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{ds}\,\dfrac{ds}{dx}}{\cos^2\alpha} = y'', \tag{18.35}$$

где $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}$, а следовательно, $\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. Поэтому

$$\frac{d\alpha}{ds} = y''\cos^3\alpha.$$

Но

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}}.$$

Из последних двух равенств имеем

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

и, таким образом,

$$\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} = k, \tag{18.36}$$

т.е. действительно кривизна кривой k равна абсолютной величине угловой скорости $\dfrac{d\alpha}{ds}$ вращения касательной.

Примеры. 1. Найдем кривизну и эволюту параболы $y^2 = 2px$. Дважды дифференцируя это уравнение по x, получим $yy' = p$, $y'^2 + yy'' = 0$

и, следовательно,

$$y' = \frac{p}{y}, \qquad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Подставив эти выражения в формулу (18.33), найдем кривизну

$$k = \frac{p^2}{|y^3|\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)^{3/2}} = \frac{p^2}{(y^2+p^2)^{3/2}}$$

и, подставив их в формулы (18.34), уравнение эволюты

$$\xi = x + \frac{\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)y^3}{p^2}\,\frac{p}{y} = x + \frac{y^2+p^2}{p} = 3x+p = \frac{3}{2p}\,y^2+p, \qquad (18.37)$$

$$\eta = y - \frac{\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)y^3}{p^2} = y - \frac{(y^2+p^2)y}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Таким образом, в получившемся уравнении эволюты параболы роль параметра играет переменная y; исключив ее из этих уравнений, получим

$$\eta^2 = \frac{8}{27p}\,(\xi - p)^3.$$

Эта кривая, как мы знаем (п. 3.7), называется полукубической параболой (рис. 97).

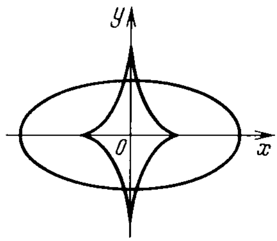


Рис. 98

2. Найдем радиус кривизны R и эволюту эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad a \geqslant b > 0.$$

Заметив, что $x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$, $x'' = -a\cos t$, $y'' = -b\sin t$, в силу формулы (18.29) получим

$$R = \frac{1}{k} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab},$$

а из формул (18.30), (18.31) получим уравнение эволюты

$$\xi = a \cos t - b \cos t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t,$$

$$\eta = b \sin t - a \sin t \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab} = \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t.$$

Исключив из этих уравнений параметр t (для чего достаточно возвести их в степень 2/3 и сложить их), найдем уравнение эволюты в неявном виде

$$(a\xi)^{2/3} + (b\eta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}.$$

Полученная кривая называется *астроидой* (рис. 98).

ГЛАВА 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 19. Многомерные пространства

19.1. Определение n-мерного пространства. Если на плоскости $\mathbf{R}^2$ фиксирована прямоугольная система координат, то между точками плоскости и всевозможными парами чисел (x, y) (x и y – координаты точек) существует взаимно однозначное соответствие. Если в пространстве задана аналогичная система координат, то между точками пространства и их координатами – всевозможными тройками (x, y, z) – также существует взаимно однозначное соответствие. С помощью координат точек на плоскости, используя теорему Пифагора, можно выразить расстояние ρ между двумя точками $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{19.1}$$

В пространстве $\mathbf{R}^3$ формула для расстояния ρ между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ имеет аналогичный вид

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{19.2}$$

Пары (x, y) и тройки (x, y, z) чисел можно рассматривать также и как координаты соответственно двумерных или трехмерных векторов. Как известно, различные операции над векторами можно описывать в терминах их координат. Например, координаты линейной комбинации $\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$ векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$ являются соответствующими линейными комбинациями координат данных векторов:

$$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2), \tag{19.3}$$

в частности,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{19.4}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \tag{19.5}$$

Скалярное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ выражается через их координаты следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \tag{19.6}$$

а для длины $|\boldsymbol{a}|$ вектора $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ имеет место формула

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{19.7}$$

Из (19.7) видно, что расстояние (19.2) между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ есть не что иное, как длина вектора с началом в одной из этих точек и концом в другой, т.е. длина разности (19.5) векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|. \tag{19.8}$$

Нам понадобится понятие n-мерного пространства, n — натуральное число, элементами x которого являются упорядоченные множества n действительных чисел

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_k \in \mathbf{R}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти элементы по аналогии с обычным пространством можно рассматривать и как точки, и как векторы (n-мерные). В первом случае для них определяется понятие расстояния, во втором — соответствующие векторные операции.

Линейная комбинация с коэффициентами λ и μ двух элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ по аналогии с формулой (19.3) определяется равенством

$$\lambda x + \mu y \overset{\text{def}}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1, \ \lambda x_2 + \mu y_2, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n). \tag{19.9}$$

В частности,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{19.10}$$

$$x - y = (x_1 - y_1, \ x_2 - y_2, \ldots, \ x_n - y_n), \tag{19.11}$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \tag{19.12}$$

Скалярное произведение элементов x и y определяется равенством

$$(x, y) \overset{\text{def}}{=} x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{19.13}$$

Подчеркнем, что в случае $n = 1, 2, 3$ формулы (19.9) и (19.13) доказываются с помощью свойств геометрии трехмерного пространства, а в случае $n > 3$ они принимаются за определение.

Определение 1. *Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n действительных чисел, для которых определены линейные комбинации* (19.9) *и скалярное произведение* (19.13), *называется* ***n-мерным арифметическим евклидовым векторным пространством*** *и обозначается* $\mathbf{R}^n$. *Его элементы* $x = (x_1, \ldots, x_n)$

называются n-мерными векторами, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – их координатами.

Отметим, что для простоты записи n-мерные векторы (в частности, одномерные, двумерные и трехмерные) обозначаются здесь светлым шрифтом.

Вектор $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ называется *нулевым вектором*. Для любого вектора x вектор $-x \overset{\text{def}}{=} (-1)\, x$ называется *противоположным* вектору x. Очевидно, что $x + (-x) = 0$.

Скалярное произведение (19.13) векторов пространства $\mathbf{R}^n$ имеет следующие свойства:

1°. *Симметричность*: $(x, y) = (y, x)$.

2°. *Линейность*:

$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y, z)$.

3°. $(x, x) \geqslant 0$.

4°. *Если* $(x, x) = 0$, *то* $x = (0, 0, \ldots, 0)$.

Все это верно для любых $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$, $z \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$. Свойства 1° – 4° непосредственно следуют из определения (19.13).

Длина $|x|$ *n-мерного* вектора x по аналогии с формулой (19.7) определяется равенством

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)}, \qquad (19.14)$$

следовательно,

$$|x| \underset{(19.13)}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \qquad (19.15)$$

Очевидно, что длина $|x|$ вектора x равна нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Длина вектора обладает тем свойством, что для любого числа λ имеет место равенство

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|. \qquad (19.16)$$

Л е м м а 1. *Для скалярного произведения векторов $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in \mathbf{R}^n$ справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant |x|\,|y|. \qquad (19.17)$$

Это неравенство называется *неравенством Коши – Шварца* *).

$\triangleright$ Если $x = 0$, то неравенство (19.17) очевидно, так как обе части обращаются в нуль.

Пусть $x \neq 0$. Для любого $t \in \mathbf{R}$ согласно свойству 3° скалярного произведения выполняется неравенство

$$(tx + y,\ tx + y) \geqslant 0. \qquad (19.18)$$

---

*) Г. Шварц (1843–1921) – немецкий математик.

С другой стороны, в силу свойств 1° и 2°

$$(tx+y,\ tx+y)=(x,x)t^2+2t(x,y)+(y,y), \tag{19.19}$$

поэтому

$$(x,x)t^2+2t(x,y)+(y,y) \underset{\substack{(19.18)\\(19.19)}}{\geqslant} 0,$$

где из условия $x \neq 0$ согласно свойству 4° имеем $(x, x) \neq 0$. Но если квадратный трехчлен неотрицателен, то его дискриминант неположителен:

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leqslant 0,$$

а это неравенство равносильно неравенству (19.17). ◁

С л е д с т в и е 1. *Для любых векторов* $x \in \mathbf{R}^n$ *и* $y \in \mathbf{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|. \tag{19.20}$$

▷ Действительно,

$$|x+y| \underset{(19.14)}{=} \sqrt{(x+y,x+y)} \underset{1^\circ,\,2^\circ}{=} \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \underset{(19.14),\,(19.17)}{\leqslant}$$

$$\underset{(19.14),\,(19.17)}{\leqslant} \sqrt{|x|^2+2|x||y|+|y|^2}\leqslant\sqrt{(|x|+|y|)^2}=|x|+|y|. \ \triangleleft$$

В координатной записи неравенства (19.17) и (19.20) имеют вид

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

С л е д с т в и е 2. *Для любых векторов* $x \in \mathbf{R}^n$ *и* $y \in \mathbf{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|. \tag{19.21}$$

▷ Это неравенство является непосредственным следствием неравенства (19.20). В самом деле,

$$|x|=|x-y+y| \underset{(19.20)}{\leqslant} |x-y|+|y|,$$

поэтому $|x|-|y|\leqslant|x-y|$. Аналогично, $|y|-|x|\leqslant|y-x| = |x-y|$. Из двух последних неравенств и следует неравенство (19.21). ◁

Для элементов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно ввести по аналогии с формулой (8) понятие расстояния $\rho(x, y)$ между ними:

$$\rho(x,y) \overset{\text{def}}{=} |x-y|. \tag{19.22}$$

Используя формулы (19.11) и (19.15), расстояние $\rho(x, y)$ можно записать в виде

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}, \tag{19.23}$$

откуда следует, что расстояние, определенное посредством формулы (19.22), в случае $n = 1, 2, 3$ (см. формулы (19.1) и (19.2)) совпадает с обычным расстоянием между точками.

Определение 2. *Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n действительных чисел, для которых определено по формуле* (19.23) *расстояние, называется* ***точечным n-мерным арифметическим евклидовым пространством*** *и также обозначается через $\mathbf{R}^n$. Элементы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются его* ***точками***, *а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – их координатами. Точка $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ называется* ***началом координат*** *этого пространства.*

Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ имеет следующие свойства:

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3°. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (19.24)

(*здесь x, y, z – произвольные точки* $\mathbf{R}^n$).

Неравенство (19.24) называется неравенством треугольника.

Свойство 1° расстояния следует из формулы (19.22), свойства 3° скалярного произведения и того, что длина $|x - y|$ вектора $x - y$ равна нулю в том и только том случае, когда $x = y$.

Свойство 2° расстояния следует из (19.16):

$$\rho(x,y)=|x-y|=|(-1)(y-x)|=|y-x|=\rho(x,y),$$

а свойство 3° – из следствия леммы 1. В самом деле,

$$\rho(x,y) \underset{(19.22)}{=} |x-y|=|(x-z)+(z-y)| \underset{(19.20)}{\leqslant}$$

$$\underset{(19.20)}{\leqslant} |x-z|+|z-y| \underset{(19.22)}{=} \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

В ближайших параграфах в основном будет встречаться точечное n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$. Векторная структура, которой его можно наделить, будет мало использоваться (однако именно она позволила нам компактно доказать свойства расстояния в n-мерном пространстве).

19.2. Сходимость последовательностей точек в n-мерном пространстве. Прежде всего определим понятие окрестности в n-мерном пространстве.

Определение 3. *Пусть $x \in \mathbf{R}^n$ и $\epsilon > 0$. Совокупность всех таких точек $y \in \mathbf{R}^n$, что $\rho(x, y) < \epsilon$, называется* ***n-мерным открытым шаром радиуса ϵ с центром в точке x*** *или* ***ϵ-окрестностью*** *(а иногда* ***сферической*** *или, правильнее,* ***шаровой окрестностью***) ***точки x в пространстве*** $\mathbf{R}^n$ *и обозначается $U(x; \epsilon)$.*

Таким образом,

$$U(x;\epsilon) \overset{\text{def}}{=} \{y: y\in \mathbf{R}^n,\ \rho(x,y)<\epsilon\}. \tag{19.25}$$

В координатной записи это определение выглядит следующим образом:

$$U(x;\epsilon)=\{y=(y_1,\ldots,y_n):\ \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2<\epsilon^2\},$$

$$x=(x_1,\ldots,x_n),\quad \epsilon>0.$$

Если $n=1$, то $U(x;\ \epsilon)=(x-\epsilon, x+\epsilon)$ – интервал длины 2ϵ с центром в точке x. Если $n=2$, то $U(x;\ \epsilon)$ – круг радиуса ϵ с центром в точке (x_1, x_2). Если же $n=3$, то $U(x;\ \epsilon)$ – обычный трехмерный шар радиуса ϵ с центром в точке (x_1, x_2, x_3).

Иногда бывает полезным также и понятие прямоугольной окрестности.

Определение 4. Множество

$$P(x;\delta_1,\ldots,\delta_n)=$$

$$=\{y=(y_1,\ldots,y_n):\ |y_i-x_i|<\delta_i,\quad i=1,2,\ \ldots,n\} \tag{19.26}$$

называется ***прямоугольной*** *(или при $n\geqslant 3$ –* ***параллелепипедальной****)* ***окрестностью точки*** *x.*

В частном случае $\delta_1=\delta_2=\ldots=\delta_n=\delta$ множество

$$P(x;\delta) \overset{\text{def}}{=} P(x;\delta,\ldots,\delta) \tag{19.27}$$

называется *кубической окрестностью точки x.*

Очевидно, что если для чисел $\delta_1,\ldots,\delta_n$ положить

$$\delta_0=\min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\},\quad \delta=\max\{\delta_1,\ldots,\delta_n\},$$

то

$$P(x;\delta_0)\subset P(x;\delta_1,\ldots,\delta_n)\subset P(x;\delta). \tag{19.28}$$

Прямоугольную окрестность $P(x;\ \delta_1,\ \ldots,\ \delta_n)$ называют также *n-мерным открытым параллелепипедом, $P(x;\ \delta)$ – n-мерным открытым кубом,* а число 2δ – *длиной ребер* этого куба.

Если $n=1$, то $P(x;\ \delta)=(x-\delta,\ x+\delta)$ – снова интервал; если $n=2$, то $P(x;\ \delta_1,\ \delta_2)$ – прямоугольник, а $P(x;\ \delta)$ – квадрат, а если $n=3$, то $P(x;\ \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ – обычный трехмерный параллелепипед, а $P(x;\ \delta)$ – куб.

Лемма 2. *Любая сферическая окрестность точки пространства $\mathbf{R}^n$ содержит прямоугольную окрестность и содержится в прямоугольной окрестности этой точки.*

Любая прямоугольная окрестность точки содержит сферическую окрестность и содержится в сферической окрестности этой точки.

$\triangleright$ Прежде всего отметим, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$|a_i| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant$$
$$\leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19.29}$$

которое доказывается возведением обеих его частей в квадрат. В силу этого неравенства для координат любых двух точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ справедливо неравенство

$$|y_i - x_i| \underset{(19.29)}{\leqslant} \rho(x, y) \underset{(19.23)}{=}$$
$$\underset{(19.23)}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} \underset{(19.29)}{\leqslant}$$
$$\underset{(19.29)}{\leqslant} |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \ldots + |y_n - x_n|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19.30}$$

из которого согласно определениям (19.25) и (19.26) сразу следуют оба утверждения леммы 2. $\triangleleft$

Упражнение 1. Доказать, что для любого $\epsilon > 0$ и любой точки $x \in \mathbf{R}^n$ справедливы включения

$$P\left(x, \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset U(x, \epsilon) \subset P(x, \epsilon) \subset U(x, \epsilon\sqrt{n}).$$

Мы будем рассматривать последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства $\mathbf{R}^n$, т.е. отображения $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}^n$ множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ в пространство $\mathbf{R}^n$ (см. п. 4.6*), где

$$x^{(m)} = f(m), \quad m \in \mathbf{N}.$$

По аналогии со случаем числовых последовательностей определяется понятие подпоследовательности. Если из некоторых членов последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек n-мерного пространства составлена новая последовательность $\{x^{(m_k)}\}$, в которой порядок следования ее членов совпадает с порядком их следования в исходной последовательности (из $k_1 > k_2$ следует $m_{k_1} > m_{k_2}$), то последовательность $\{x^{(m_k)}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x^{(m)}\}$.

Определение 5. *Точка $x \in \mathbf{R}^n$ называется пределом последовательности $x^{(m)} \in \mathbf{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, если*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0. \tag{19.31}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

и говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ сходится к точке x.

Последовательность, которая сходится к некоторой точке пространства $\mathbf{R}^n$, *называется* *сходящейся.*

Условие (19.31) означает, что для любого $\epsilon > 0$ (и, следовательно, для любой ϵ-окрестности $U(x, \epsilon)$ точки x) существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, x) < \epsilon, \tag{19.33}$$

т.е. включение

$$x^{(m)} \in U(x, \epsilon). \tag{19.34}$$

Согласно лемме 2 отсюда вытекает, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$ в том и только том случае, когда для любой кубической окрестности $P(x;\ \delta)$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in \in P(x, \delta)$.

В случае $n = 1$ определение 5 превращается в обычное определение предела числовой последовательности. При $n = 2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости $\mathbf{R}^2$ к точке x этой плоскости означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности находятся внутри указанного круга (рис. 99). Аналогичная ситуация имеет место и при $n = 3$, только там роль круга играет шар. Как и в случае числовых последовательностей, определение 5 означает, что точка x

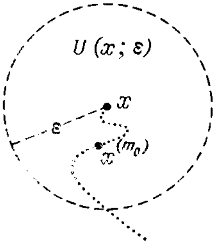


Рис. 99

является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$, если вне любой ϵ-окрестности точки x имеется лишь конечное множество (быть может, пустое) членов этой последовательности.

Понятие предела последовательности точек n-мерного пространства может быть сведено к понятию предела числовых последовательностей их координат.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность*

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}) \in \mathbf{R}^n, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

имела своим пределом точку $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, *необходимо и доста-*

точно, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19.35}$$

$\triangleright$ Это утверждение сразу следует из неравенства (19.30) при $y = x^{(m)}$, т.е. из неравенства

$$|x_i^{(m)} - x_i| \leqslant \rho(x^{(m)}, x) \leqslant |x_1^{(m)} - x_1| + |x_2^{(m)} - x_2| + \ldots$$

$$\ldots + |x_n^{(m)} - x_n|, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \triangleleft$$

Напомним, что теорема 1 при $n = 2$, т.е. для плоскости, была уже доказана в п. 5.11, когда точки плоскости интерпретировались как комплексные числа.

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единствен, и что всякая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Последовательность $x^{(m)} \in \mathbf{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, называется *фундаментальной* или последовательностью, удовлетворяющей условию Коши, если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ и всех натуральных p выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) < \epsilon.$$

Из неравенства (19.30) следует, что для того чтобы последовательность $\{x^{(m)}\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы все n числовых последовательностей координат ее точек были фундаментальными. Отсюда, согласно теореме 1 и критерию Коши сходимости числовых последовательностей, следует, что *для того чтобы последовательность* $x^{(m)} \in \mathbf{R}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Это утверждение называется *критерием Коши сходимости последовательности точек n-мерного пространства.*

Определение 6. *Множество в n-мерном пространстве называется* *ограниченным, если оно содержится в некотором n-мерном кубе.*

Согласно лемме 2 множество ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором n-мерном шаре.

Определение 7. *Последовательность точек пространства* $\mathbf{R}^n$ *называется* *ограниченной, если множество ее значений ограничено.*

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек n-мерного пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

$\triangleright$ Пусть $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, \ldots,$ – ограниченная последовательность точек в $\mathbf{R}^n$. Следовательно, согласно определениям 6 и 7 существует n-мерный куб $P(a, \delta)$, содержащий все члены этой последовательности: $x^{(m)} \in P(a, \delta)$, $m = 1, 2, \ldots$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Это означает (см. определения (19.26) и (19.27)), что для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняются неравенства

$$|x_i^{(m)} - a_i| < \delta, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

и, таким образом, все n числовых последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ограничены.

Согласно теореме Больцано – Вейерштрасса из числовой последовательности $\{x_1^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, $k_1 = 1, 2, \ldots$ Подпоследовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$ ограниченной последовательности $\{x_2^{(m)}\}$ также ограничена и потому содержит сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее $\{x_2^{(m_{k_2})}\}$ и заметим, что подпоследовательность $\{x_1^{(m_{k_2})}\}$ сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$ также является сходящейся. Продолжая этот процесс, через n шагов получим n сходящихся последовательностей $\{x_1^{(m_{k_n})}\}$, $\{x_2^{(m_{k_n})}\}$, . . . , $\{x_n^{(m_{k_n})}\}$, а тогда, согласно теореме 1, последовательность $\{x^{(m_{k_n})}\}$ точек пространства $\mathbf{R}^n$ также является сходящейся. $\triangleleft$

Аналогично случаю числовых последовательностей для последовательностей точек n-мерного пространства можно ввести понятие бесконечного предела. Для этой цели удобно пополнить пространство $\mathbf{R}^n$ бесконечно удаленной точкой, которая обозначается ∞. Она характеризуется заданием ее ϵ-окрестностей.

Определение 8. *ϵ-окрестностью $U(\infty; \epsilon)$ бесконечно удаленной точки ∞, $\epsilon > 0$, называется множество, состоящее из всех таких точек x пространства $\mathbf{R}^n$, что $\rho(x, 0) > 1/\epsilon$, и из бесконечно удаленной точки ∞, т.е.*

$$U(\infty; \epsilon) = \left\{ x:\ \rho(x, 0) > \frac{1}{\epsilon} \right\} \cup \{\infty\},$$

где $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ – начало координат пространства $\mathbf{R}^n$.

Определение 9. *Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называется последовательностью, стремящейся к бесконечности (или к бесконечно удаленной точке), если*

$$\lim \rho(x^{(m)}, 0) = +\infty. \tag{19.36}$$

Легко видеть, что условие (19.36) можно записать в виде $\lim\limits_{m \to \infty} |x^{(m)}| = +\infty$, ибо $|x^{(m)}| = \rho(x^{(m)}, 0)$. В этом случае пишут

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty. \tag{19.37}$$

Отметим, что в случае $n > 1$ бесконечный предел определен только для бесконечностей без знака.

В силу определения ϵ-окрестности бесконечно удаленной точки *последовательность $\{x^{(m)}\}$ стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер m_ϵ, что для всех $m > m_\epsilon$ выполняется включение $x^{(m)} \in U(\infty; \epsilon)$.* Справедливость этого утверждения сразу следует из равносильности сформулированного условия с условием (19.36).

Как и на прямой, в n-мерном пространстве *всякая неограниченная последовательность содержит подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.*

▷ В самом деле, если $x^{(n)}$ – неограниченная последовательность точек пространства $\mathbf{R}^n$, то существует такой ее член $x^{(m_1)}$, что $\rho(x^{(m_1)}, 0) > 1$. Далее, существует член $x^{(m_2)}$ такой, что $m_2 > m_1$ и $\rho(x^{(m_2)}, 0) > 2$. Вообще существует член $x^{(m_k)}$ такой, что

$$m_k > m_{k-1}, \quad \rho(x^{(m_k)}, 0) > k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Очевидно, что $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = \infty$. ◁

Точки пространства $\mathbf{R}^n$ для их отличия от бесконечно удаленной точки будем называть также и *конечными точками.*

19.3. Различные типы множеств. В этом разделе под множествами будем понимать множества, лежащие в n-мерном пространстве.

Определение 10. *Точка множества называется его внутренней точкой, если у нее существует ϵ-окрестность, содержащаяся в этом множестве.*

Совокупность всех внутренних точек данного множества называется его внутренностью.

Определение 11. *Множество, у которого все точки являются внутренними, называется открытым.*

Таким образом, открытые множества – это те множества, которые совпадают со своей внутренностью.

Лемма 3. *Сферическая окрестность является открытым множеством.*

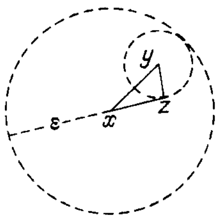


Рис. 100

▷ Если $U(x;\ \epsilon)$ – сферическая окрестность точки $x \in \mathbf{R}^n$ и $y \in U(x;\ \epsilon)$, то, положив

$$\delta = \epsilon - \rho(y, x), \tag{19.38}$$

покажем, что

$$U(y;\ \delta) \subset U(x; \epsilon). \tag{19.39}$$

Действительно, если $z \in U(y; \delta)$, то (рис. 100)

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, z) < \delta + \rho(y, x) \underset{(19.38)}{=} \epsilon$$

и, следовательно, $z \in U(x;\ \epsilon)$ т.е. включение (19.39) доказано. ◁

Аналогично показывается, что и прямоугольная окрестность точки является открытым множеством.

Упражнение 2. Доказать, что ϵ-окрестность бесконечно удаленной точки является открытым множеством.

Оказывается удобным следующее

Определение 12. *Всякое открытое множество, содержащее данную точку пространства* $\mathbf{R}^n$, *называется ее окрестностью. Окрестностью бесконечно удаленной точки* ∞ *называется всякое открытое множество, у которого существует содержащаяся в нем ϵ-окрестность бесконечности.*

Иначе говоря, открытое множество G является окрестностью ∞, если существует такое $\epsilon > 0$, *что* $U(\infty; \epsilon) \subset G$.

Таким образом, открытое множество является окрестностью конечной или бесконечно удаленной точки x_0 тогда и только тогда, когда некоторая сферическая окрестность этой точки содержится в нем.

Окрестность точки обозначается

$$U = U(x)$$

(иногда и другими буквами, например $V = V(x)$, $W = W(x)$).

Замечание. Пусть $\{x^{(m)}\}$ – последовательность точек в $\mathbf{R}^n$. Поскольку, какова бы ни была точка $x \in \mathbf{R}^n$, в любой ее окрестности содержится сферическая окрестность, то согласно определению 5

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

в том и только том случае, когда для любой окрестности $U(x)$ (не обязательно сферической или прямоугольной существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in U(x).$$

Полезным в случае n-мерного пространства оказывается и понятие проколотой окрестности.

Определение 13. *Проколотой окрестностью* $\overset{\circ}{U}(x)$ *точки* x *(конечной или бесконечно удаленной) называется всякое множество, получающееся удалением точки x из некоторой ее окрестности* $U(x)$:

$$\overset{\circ}{U}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x) \setminus \{x\}.$$

Аналогично одномерному случаю для всякого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ вводятся понятия его *точек прикосновения, предельных* и *изолированных точек* (см. пп. 6.1 и 6.9).

Определение 14. *Точка пространства называется точкой прикосновения некоторого множества, если любая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества.*

Как и в случае числовой прямой (см. замечание 1 в п. 6.1), доказывается, что точка x пространства $\mathbf{R}^n$ является точкой прикосновения множества X в том и только том случае, когда существует такая последовательность $\{x^{(m)}\}$, состоящая из точек, принадлежащих множеству X, что

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x.$$

Бесконечность ∞ будем называть *бесконечно удаленной точкой прикосновения* всякого неограниченного множества. Это естественно, так как если X – неограниченное множество, то пересечение любой окрестности $U(\infty)$ бесконечно удаленной точки ∞ с множеством X непусто. Это равносильно тому, что существует такая последовательность $x^{(m)} \in X$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$.

Определение 15. *Точка x (конечная или бесконечно удаленная) называется* ***предельной точкой*** *некоторого множества, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества, отличная от нее самой.*

С помощью понятия проколотой окрестности это определение можно перефразировать следующим образом: точка x называется предельной точкой множества X, если любая ее проколотая окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества.

Очевидно, что *предельная точка некоторого множества является и его точкой прикосновения.*

Если точка x является предельной точкой множества X, то, выбрав в каждой окрестности $U(x; 1/m)$ точку из множества X, отличную от x, и обозначив ее $x^{(m)}$, получим такую последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$ и $x^{(m)} \neq x$, $m = 1, 2, \ldots$, т.е. если x – предельная точка множества, то существует такая последовательность точек этого множества, сходящаяся к x, у которой ни одна из ее точек не совпадает с точкой x.

Определение 16. *Если у точки множества существует окрестность, не содержащая никаких других его точек, кроме нее самой, то эта точка называется изолированной точкой этого множества.*

Как и в одномерном случае (п. 6.2), каждая точка прикосновения множества является либо его изолированной точкой, либо предельной.

Определение 17. *Совокупность всех точек прикосновения множества называется его* ***замыканием.*** *Замыкание множества X обозначается $\overline{X}$.*

Определение 18. *Множество называется* ***замкнутым,*** *если оно содержит все свои точки прикосновения.*

Поскольку каждая точка множества является и точкой его прикосновения (так как любая ее окрестность, содержа саму эту точку, тем самым содержит по крайней мере одну точку рассматриваемого множества), т.е. $X \subset \overline{X}$, то замкнутость множества X означает, что

$$X = \overline{X}. \tag{19.40}$$

Л е м м а 4. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

$\triangleright$ Если X – некоторое множество, x – точка прикосновения его замыкания $\overline{X}$ и $U = U(x)$ – ее произвольная окрестность, то согласно определению точки прикосновения в этой окрестности имеется точка $y \in \overline{X}$. Поскольку U – открытое множество, то оно является и окрестностью точки y, а так включение $y \in \overline{X}$ означает, что точка y является точкой прикосновения множества X, то в множестве U имеется точка множества X. Таким образом, в любой окрестности U точки x имеются точки множества X, а это означает, что $x \in \overline{X}$, т.е. $\overline{X}$ содержит все свои точки прикосновения. $\triangleleft$

Для всякого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ множество $\mathbf{R}^n \setminus X$ называется его *дополнением в пространстве* $\mathbf{R}^n$. Оказывается, что открытые множества (будем их обозначать буквой G) и замкнутые множества (их будем обозначать F) являются дополнениями друг друга в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Л е м м а 5. *Дополнение открытого множества является замкнутым, а дополнение замкнутого множества – открытым множеством.*

$\triangleright$ Пусть F – замкнутое множество и $G = \mathbf{R}^n \setminus F$. Если $x \in G$, то $x \notin F$ и, следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества F. Поэтому существует окрестность $U(x)$ точки x, не содержащая точек множества F, т.е. содержащаяся в G. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, а это означает, что G – открытое множество.

Пусть G – открытое множество, $F = \mathbf{R}^n \setminus G$ и $x \in G$. Поскольку G – открытое множество, то оно является окрестностью точки x, причем, являясь дополнением множества F, оно не содержит его точек. Следовательно, никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения множества F. Иначе говоря, все точки прикосновения множества F содержатся в нем самом, а это означает, что F – замкнутое множество. $\triangleleft$

Заметим, что все пространство и пустое множество являются одновременно открытыми и замкнутыми.

Т е о р е м а 3. *Из любой последовательности точек ограниченного замкнутого множества можно выделить сходящуюся к его точке подпоследовательность.*

Это свойство ограниченных замкнутых множеств в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется *компактностью,* а сами они называются *компактами.*

$\triangleright$ Пусть F – ограниченное замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$ и $x^{(m)} \in F$, $m = 1, 2, \ldots$ Поскольку множество F ограничено, то и последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена. Следовательно, согласно теореме 2, у нее существует сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Если $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x$, то из условия $x^{(m_k)} \in F$ следует, что x является точкой прикосновения множества F, а так как F – замкнутое множество, то $x \in F$. $\triangleleft$

Для любых двух множеств $X \subset \mathbf{R}^n$ и $Y \subset \mathbf{R}^n$ определяется *расстояние* $\rho(X, Y)$ между ними по формуле

$$\rho(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in X,\, y \in Y} \rho(x, y). \tag{19.41}$$

Очевидно, что в случае, когда множества X и Y пересекаются, расстояние между ними равно нулю.

Теорема 4. *Если X и Y – замкнутые непересекающиеся множества, причем хотя бы одно из них – компакт, то расстояние между ними больше нуля.*

$\triangleright$ Пусть X и Y – замкнутые непересекающиеся множества и, например, X – компакт. Допустим, что $\rho(X, Y) = 0$, тогда, согласно определению (19.41), для любого $m = 1, 2, \ldots$ найдется пара таких точек $\{x^{(m)}\} \in X$, $y^{(m)} \in Y$, что

$$\rho(x^{(m)}, \ y^{(m)}) < 1/m. \tag{19.42}$$

Поскольку X – компакт, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$ (теорема 3):

$$\lim_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x. \tag{19.43}$$

Поскольку

$$\rho(x, y^{(m_k)}) \leqslant \rho(x, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, \ y^{(m_k)}) \underset{(19.42)}{<}$$

$$\underset{(19.42)}{<} \rho(x, x^{(m_k)}) + \frac{1}{m_k}$$

и

$$\lim_{k \to \infty} \rho(x, \ x^{(m_k)}) \underset{(19.43)}{=} 0, \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{1}{m_k} = 0,$$

то $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x, y^{(m_k)}) = 0$, т.е.

$$\lim_{k \to \infty} y^{(m_k)} = x.$$

Таким образом, точка x оказывается пределом как последовательности точек из множества X, так и из Y, а поскольку они – замкнутые множества, то точка x принадлежит им обоим: $x \in X \cap Y$. Это противоречит тому, что множества X и Y не пересекаются. Следовательно,

$$\rho(X, Y) > 0. \ \triangleleft$$

Отметим, что условие теоремы о том, что одно из множеств X или Y есть компакт, существенно: так, гипербола и ее асимптота – замкнутые непересекающиеся множества, но расстояние между ними равно нулю, каждое из них неограничено и, следовательно, не является компактом.

О п р е д е л е н и е 19. *Точка пространства называется* ***г р а н и ч н о й т о ч к о й*** *некоторого множества, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие этому множеству, так и не принадлежащие ему.*

Совокупность всех граничных точек множества X называется его *границей* и обозначается ∂X.

Каждая точка прикосновения множества X является либо его граничной точкой, либо его внутренней, поэтому

$$\overline{X} = X \cup \partial X,$$

а если G – открытое множество, то в формуле

$$\overline{G} = G \dot{\cup} \partial G$$

слагаемые в правой части не пересекаются. В самом деле, поскольку множество G открыто, то каждая его точка является внутренней и тем самым не принадлежит его границе.

П р и м е р ы. 1. Замыкание ϵ-окрестности $U(x;\epsilon)$ точки x (см. (19.25)) называется *замкнутым шаром* с центром в точке x и радиуса ϵ; оно, согласно лемме 4, является замкнутым множеством

$$\overline{U(x;\epsilon)} = \{y:\ \rho(y, x) \leqslant \epsilon\}. \tag{19.45}$$

2. В пространстве $\mathbf{R}^n$ замкнутое множество вида

$$S^{n-1} = \{x:\ \rho(x, a) = r\} \tag{19.46}$$

называется $(n-1)$-*мерной сферой* радиуса r с центром в точке a.

Оно является границей как открытого, так и замкнутого шара радиуса r с центром в точке a.

Всякое отображение $x(t)$ отрезка $[a, b]$ числовой прямой (или какого-либо другого множества) в пространство $\mathbf{R}^n$ можно описать при помощи n числовых функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называемых *координатными* и являющихся координатами точки $x(t)$, т.е. $x(t) = (x_i(t), \ldots, x_n(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$.

Отображение называется *непрерывным* на отрезке, если на нем непрерывны все координатные функции этого отображения.

О п р е д е л е н и е 20. *Непрерывное отображение отрезка в n-мерное пространство называется* ***к р и в о й*** *в этом пространстве, а образ отрезка –* ***н о с и т е л е м к р и в о й.***

Как и в трехмерном случае, будем обозначать кривую буквой Γ и писать

$$\Gamma = \{x(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}, \tag{19.47}$$

или

$$\Gamma = \{x_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, n;\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Для кривой (19.47) всякая пара (x, t), $x \in \mathbf{R}^n$, $t \in [a, b]$, у которой $x = x(t)$ называется точкой кривой и там, где это не может привести к недоразумениям, обозначается $x(t)$. Точка кривой $x(a)$ называется ее началом, а точка $x(b)$ – концом.

Определение 21. *Множество точек* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *пространства* $\mathbf{R}^n$, *координаты которых представимы в виде*

$$x_i = x_i^{(0)} + a_i t, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad -\infty < t < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0, \tag{19.48}$$

называется ***прямой в пространстве*** $\mathbf{R}^n$, *проходящей через точку* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ *в направлении вектора* $a = (a_1, \ldots a_n)$.

Сужение отображения (19.48) на какой-либо отрезок $[a, b]$, т.е. кривую $\{x_i = a_i + b_i t,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ a \leqslant t \leqslant b\}$, так же как и носитель этой кривой, называется *отрезком прямой в пространстве* $\mathbf{R}^n$.

Отрезок прямой, началом которого является $x(a)$, а концом – $x(b)$, обозначается $[x(a),\ x(b)]$.

Если $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(0)})$ рассматривать как n-мерные векторы, то уравнения (19.48) можно записать в векторном виде

$$x = x^{(0)} + at, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{19.49}$$

Пример 3. Рассмотрим множество

$$Q^n = \{x.\ |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant a, \quad i = 1, 2, \ldots, n\},$$

называемое *n-мерным замкнутым кубом.* Для всякого фиксированного i_0 (i_0 может принимать значения $1, 2, \ldots, n$) множество вида

$$\{x\colon |x_{i_0} - x_{i_0}^{(0)}| \leqslant a, \quad x_i = x_i^{(0)} \pm a, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_0\}\},$$

где при каждом $i \neq i_0$ в равенстве $x_i = x_i^{(0)} \pm a$ выбран один из знаков плюс или минус, является отрезком в пространстве $\mathbf{R}^n$ (эти отрезки называются *ребрами* куба Q^n). В самом деле, координаты точек рассматриваемого множества могут быть заданы формулами

$$x_{i_0} = x_{i_0}^{(0)} + at, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad x_i = x_i^{(0)} \pm a,$$
$$i \in \{1, 2, \ldots, n,\} \setminus \{i_0\}.$$

Будем говорить, что две точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ множества $X \subset \mathbf{R}^n$ можно соединить в этом множестве кривой, если существует такая кривая (19.47), что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и ее носитель лежит в множестве X.

Определение 22. *Множество* $X \subset \mathbf{R}^n$, *любые две точки которого можно соединить в нем кривой, называется* ***линейно связным множеством.***

Линейно связное открытое множество называется ***областью.***

Определение 23. *Множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, лежащим в этом множестве, называется* ***выпуклым.***

Примеры. 4. Открытый шар в $\mathbf{R}^n$ является выпуклой областью.

5. Объединение двух непересекающихся открытых шаров в $\mathbf{R}^n$ является открытым множеством, но не является областью.

6. Объединение двух пересекающихся, но не совпадающих прямых является примером линейно связного, но не выпуклого множества.

§ 20. Предел и непрерывность функций многих переменных

20.1. Функции многих переменных. Перейдем к изучению функций $y = f(x)$, которые заданы на множествах X, лежащих в n-мерном пространстве и которые принимают числовые (вообще говоря, комплексные) значения. Поскольку точка x n-мерного пространства описывается n числами – своими координатами: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то вместо $f(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n$, пишут также $f(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X \subset \mathbf{R}^n$, и называют функцию f *функцией n переменных* $x_1, \ldots, x_n$, каждая из которых принимает уже числовые значения. Если $n > 1$, то функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функцией многих переменных, а точка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и ее координаты $x_1, \ldots, x_n$ называются аргументами функции f.

Функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X \subset \mathbf{R}^n$, можно изучать с помощью их графиков. Если функция f принимает только действительные значения, то ее график

$$\{(x_1, \ldots, x_n, y): \quad (x_1, \ldots, x_n) \in X, \quad y = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

лежит в $(n+1)$-мерном пространстве.

Функции $f(x, y)$ двух переменных можно достаточно наглядно изображать рисунком: их графики лежат в трехмерном пространстве. Графики

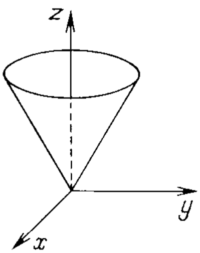


Рис. 101

функций, зависящих от более чем двух переменных, не обладают, конечно, такой интуитивно понятной геометрической интерпретацией. Эти функции приходится изучать более формальными методами, используя функции двух, а иногда и трех переменных лишь для геометрически наглядных аналогий.

На рис. 101 изображена часть графика функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{20.1}$$

О поведении функции $f(x, y)$ можно судить и по изображению ее *линий уровня* на плоскости переменных x, y, т.е. множества точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнениям вида

$$f(x, y) = c,$$

где c – некоторое фиксированное число (часто бывает удобно брать числа, отличающиеся последовательно друг от друга на одно и то же значение).

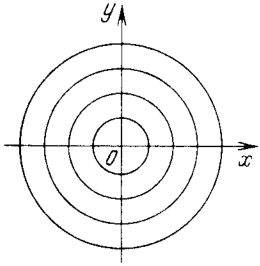


Рис. 102

На рис. 102 изображены линии уровня функции (20.1): они являются окружностями $x^2 + y^2 = c^2$. Рассматриваются и множества уровней

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c$$

функций f любого числа переменных.

В заключение заметим, что между множеством всех точек (x, y) плоскости и множеством всех комплексных чисел ζ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой

$$\zeta = x + iy,$$

равносильной формулам (задающим обратное отображение)

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}, \qquad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i}.$$

Поэтому каждую функцию двух действительных переменных можно рассматривать как функцию одного комплексного переменного.

20.2. Определение предела и непрерывности функций многих переменных. Понятие предела функции многих переменных, принимающей числовые (вообще говоря, комплексные) значения, является обобщением понятия предела функции одного переменного. Пусть, как и в одномерном случае, точка a является либо конечной точкой числовой оси, либо одной из бесконечно удаленных точек ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 1. *Пусть функция f задана на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ и $x^{(0)}$ – (конечная или бесконечно удаленная) точка прикосновения множества X.*

Точка a называется п р е д е л о м ф у н к ц и и f в т о ч к е $x^{(0)}$ *или, что то же самое,* п р и $x \to x^{(0)}$, *если для любой последовательности точек* $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, *такой, что*

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)}, \tag{20.2}$$

числовая последовательность $\{f(x^{(m)})\}$ *имеет своим пределом точку* a:

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = a. \tag{20.3}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a, \tag{20.4}$$

или

$$f(x) \to a \quad \text{при} \quad x \to x^{(0)}.$$

В случае, когда $x^{(0)}$ – конечная точка, для обозначения предела функции f в точке $x^{(0)}$ употребляется также и следующая запись:

$$\lim_{\rho(x,\, x^{(0)}) \to 0} f(x), \qquad \lim_{|x - x^{(0)}| \to 0} f(x).$$

По аналогии с одномерным случаем (пп. 6.1 и 6.4) можно дать другое, эквивалентное сформулированному определение предела функции в терминах окрестностей.

О п р е д е л е н и е 1$'$. *Пусть функция f задана на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ и $x^{(0)}$ – (конечная или бесконечно удаленная) точка прикосновения множества X.*

Тогда a называется п р е д е л о м ф у н к ц и и f в т о ч к е $x^{(0)}$ *(или при $x \to x^{(0)}$), если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что*

$$f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a). \tag{20.5}$$

В случае, когда a – число, а $x^{(0)}$ – конечная точка, сформулированное определение можно перефразировать в терминах неравенств следующим образом:

Точка a называется п р е д е л о м ф у н к ц и и f в т о ч к е $x^{(0)}$, *если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки x множества X, для которой*

$$\rho(x, x^{(0)}) < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - a| < \epsilon. \tag{20.6}$$

Действительно, в этом случае выполнение условия (20.5) при $U(x^{(0)}) = U(x^{(0)};\ \delta)$ в силу определения δ-окрестности равносильно выполнению условий (20.6).

Подобно функциям одного переменного, для функций многих переменных определения 1 и 1' эквивалентны, т.е. выполнение условий (20.2), (20.3) равносильно выполнению условия (20.5). Доказательство этого факта, проведенное для одномерного случая (п. 6.4), формально остается справедливым и для n-мерного случая, если только под точками и окрестностями понимать точки и окрестности в n-мерном пространстве.

При рассмотрении предела функции $f(x)$, $x \in X$, в точке $x^{(0)}$ эта точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X. Если $x^{(0)} \in X$ и существует предел (20.4), то поскольку стационарная последовательность $x^{(m)} = x^{(0)}$, $m = 1, 2, \ldots$, очевидно, удовлетворяет условиям $x^{(m)} \in X$ и (20.2), то из определения 1 следует, что для указанной стационарной последовательности

$$a = \lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = \lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) = \lim_{m \to \infty} f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}).$$

Иначе говоря, в этом случае существует конечный предел, равный $f(x^{(0)})$:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}). \tag{20.7}$$

Если для функции f выполняется это условие, то она называется *непрерывной в точке* $x^{(0)}$.

Из сказанного следует, что функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и $x^{(0)} \in X$.

Если

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \Delta x_i = x_i - x_i^{(0)},$$

$$\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n), \quad |\Delta x| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2},$$

$$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}),$$

то, перенеся в условии (20.7) число $f(x^{(0)})$ в левую часть равенства под знак предела, получим условие непрерывности в виде

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \Delta y = 0.$$

Если функция f задана на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, $E \subset X$, и $x^{(0)}$ – точка прикосновения (конечная или бесконечно удаленная) множества E, то предел в точке $x^{(0)}$ сужения f_E функции f на множестве E называется пределом функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E и обозначается

$$\lim_{x \to x^{(0)},\, x \in E} f(x).$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to x^{(0)},\, x \in E} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \to x^{(0)}} f_E(x). \qquad (20.8)$$

Очевидно, что если в точке $x^{(0)}$ существует предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то в этой точке существует и предел функции f по любому указанному выше множеству E и эти пределы совпадают. В частности, если функция f непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$, то ее сужение на множество E также непрерывно в этой точке.

Если $x^{(0)} \in E \subset X$, то функция $f_{(0)}$ называется *непрерывной в точке $x^{(0)}$ по множеству E* тогда, когда в этой точке непрерывно сужение f_E функции f на множестве E.

Если множество X содержит окрестность или проколотую окрестность точки $x^{(0)}$ и множество E является пересечением множества X с некоторой прямой (кривой) Γ, проходящей через точку $x^{(0)}$ ($E = X \cap \Gamma$), то предел функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E называется *пределом функции f в точке $x^{(0)}$ по прямой* (*кривой*) Γ. Пределы же функции f в точке $x^{(0)}$ по всей окрестности или по всей проколотой окрестности называются *всесторонними пределами.*

Если Γ – луч с вершиной в точке $x^{(0)}$, а l – вектор, параллельный этому лучу, то предел функции f в точке $x^{(0)}$ по пересечению луча Γ с множеством, на котором задана функция, называется также *пределом* этой *функции в точке $x^{(0)}$ в направлении вектора l*.

П р и м е р. Пусть $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат $(0, 0)$. Исследуем существование пределов у этой функции в точке $(0, 0)$ по различным направлениям и по параболе $y = x^2$. Уравнение луча с вершиной в начале координат и параллельного вектору (a, b), $a^2 + b^2 > 0$, имеет вид

$$x = at, \quad y = bt, \quad t > 0.$$

Поэтому вдоль этого луча имеем

$$f(at, bt) = \frac{a^2 bt}{a^4 t^2 + b^2} \to 0 \ \text{ при } \ t \to 0,$$

т.е. у функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ существует предел по любому направлению и он равен нулю.

Если же $y = x^2$, то $f(x, x^2) \equiv 1/2$ и, следовательно, предел в точке $(0, 0)$ вдоль параболы $y = x^2$ также существует, но равен $1/2$.

Из сказанного, очевидно, следует, что у функции f не существует всестороннего предела в точке $(0, 0)$.

Если функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ определены на множестве X и, как всегда, $x^{(0)}$ является конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X, то функцию $\beta(x)$ называют *бесконечно малой по сравнению с функцией* $\alpha(x)$ при $x \to x^{(0)}$ и пишут

$$\beta = o(\alpha), \quad x \to x^{(0)}, \tag{20.9}$$

если существует такая функция $\epsilon(x)$, также определенная на X, что

$$\beta(x) = \epsilon(x)\alpha(x), \quad x \in X, \tag{20.10}$$

и

$$\lim_{x \to x^{(0)}} \epsilon(x) = 0. \tag{20.11}$$

Если $x^{(0)} \in X$, то из условия (20.11) следует (см. (20.7)), что

$$\epsilon(x^{(0)}) = 0. \tag{20.12}$$

20.3. Свойства пределов функций многих переменных. Поскольку определение предела и непрерывности функций многих переменных по форме дословно совпадает с соответствующими определениями для функции одного переменного, то для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций и непрерывных функций, доказанные в § 6, кроме, естественно, тех, для которых существенна упорядоченность точек числовой прямой (предел слева и справа, пределы монотонных функций). Формулировка этих свойств и их доказательства остаются прежними, следует только под множествами понимать множества, лежащие в n-мерном пространстве. Поэтому ограничимся сказанным о свойствах предела и непрерывности функций, сделав лишь исключение для теоремы о пределе композиции функций многих переменных, так как в формулировке и доказательстве этой теоремы имеются некоторые специфические особенности, связанные с тем, что можно рассматривать композиции функций разного числа переменных.

20.4. Предел и непрерывность композиции функций многих переменных. Пусть на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ задана система m числовых функций

$$y_1 = f_1(x), \ldots, y_m = f_m(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in X. \tag{20.13}$$

Эта система каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие точку $y = (y_1, \ldots, y_m)$ m-мерного пространства $\mathbf{R}^m$, т.е. задает отображение множества X в $\mathbf{R}^m$. Обозначим это отображение через $f = (f_1, \ldots, f_m)$ и будем называть функции $f_1, \ldots, f_m$ его координатными функциями.

Определение 2. *Пусть* $x^{(0)}$ – *конечная или бесконечно удаленная точка прикосновения множества* X. *Будем говорить, что точка*

$$y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \in \mathbf{R}^m \tag{20.14}$$

является ***пределом отображения*** $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ***при*** $x \to x^{(0)}$, *и писать*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = y^{(0)}, \tag{20.15}$$

если для каждой координатной функции f_j *отображения* f *имеет место*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = y_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{20.16}$$

Отметим, что если $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ и существует предел (20.15), то

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = y^{(0)}. \tag{20.17}$$

В самом деле, если существует предел (20.15) и, следовательно, для всех координатных функций f_j отображения f выполняются условия (20.16), то в силу определения 1 предела функции для всех $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняется равенство

$$\lim_{k \to \infty} f_j(x^{(k)}) = y_j^{(0)}.$$

Это означает, что последовательности координат точек

$$f(x^{(k)}) = (f_1(x^{(k)}), \ldots, f_m(x^{(k)}))$$

сходятся к координатам точек $y^{(0)}$, а следовательно (см. теорему 1 в п. 19.2), последовательность самих точек $f(x^{(k)})$ пространства $\mathbf{R}^m$ сходится к точке $y^{(0)}$, т.е. что имеет место равенство (20.17).

Если $x^{(0)} \in X$ и

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}), \tag{20.18}$$

то отображение f называется *непрерывным в точке* $x^{(0)}$.

В силу определений (20.15), (20.16) условие (20.18) равносильно тому, что

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = f_j(x^{(0)}), \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

т.е. тому, что все координатные функции f_j отображения f непрерывны в точке $x^{(0)}$.

Если на множестве $Y = f(X) \subset \mathbf{R}^m$ задана числовая функция g (являющаяся тем самым функцией m переменных), то имеет смысл композиция

$$g \circ f = g(f) = g(f_1, \ldots, f_m),$$

которая является числовой функцией, определенной на множестве X.

Т е о р е м а 1. *Если имеет смысл композиция $g(f(x))$, $x \in X$, и существуют пределы*

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = y^{(0)} \in \mathbf{R}^m, \tag{20.19}$$

$$\lim_{y \to y^{(0)}} g(y) = a, \tag{20.20}$$

то существует и предел

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = a. \tag{20.21}$$

Подчеркнем, что в равенстве (20.21) вместо m аргументов $y_1, \ldots, y_m$ в функцию g подставляются функции $f_j(x_1, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, от n переменных.

Объединив формулы (20.20) и (20.21), получим

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = \lim_{y \to y^{(0)}} g(y). \tag{20.22}$$

Эта формула называется *формулой замены переменного* для пределов функций.

$\triangleright$ Пусть $\{x^{(k)}\}$ – такая последовательность точек из $\mathbf{R}^n$, что

$$x^{(k)} \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^{(0)}. \tag{20.23}$$

Тогда в силу условия (20.19) будем иметь

$$y^{(k)} \overset{\text{def}}{=} f(x^{(k)}) \to y^{(0)} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому, согласно предположению (20.20),

$$\lim_{k \to \infty} g(y^{(k)}) = a.$$

Таким образом,

$$\lim_{k \to \infty} g(f(x^{(k)})) = a. \tag{20.24}$$

Поскольку последовательность $\{x^{(k)}\}$ является произвольной последовательностью, удовлетворяющей условиям (20.23), то равенство (20.24) согласно определению предела функции и означает справедливость формулы (20.21). $\triangleleft$

С л е д с т в и е. *Если отображение f непрерывно в точке $x^{(0)} \in X \subset \mathbf{R}^n$, а функция g непрерывна в точке $y^{(0)} = f(x^{(0)}) \in Y \overset{\mathrm{def}}{=} f(X)$, то сложная функция $g(f)$ также непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Короче: *непрерывная функция от непрерывной непрерывна.*

$\triangleright$ Точка $x^{(0)}$ принадлежит области определения сложной функции $g(f)$, а так как согласно теореме 1 эта функция имеет в точке $x^{(0)}$ конечный предел, то она и непрерывна в $x^{(0)}$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 1 функция g непрерывна в точке $y^{(0)}$:

$$\lim_{y \to y^{(0)}} g(y) = g(y^{(0)}), \tag{20.25}$$

то

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)),$$

т.е., как и в случае функций одного переменного, операция взятия непрерывной функции перестановочна с предельным переходом. В самом деле,

$$\lim_{x \to x^{(0)}} g(f(x)) \underset{(20.22)}{=} \lim_{y \to y^{(0)}} g(y) \underset{(20.25)}{=} g(y^{(0)}) \underset{(20.19)}{=}$$

$$\underset{(20.19)}{=} g(\lim_{x \to x^{(0)}} f(x)).$$

З а м е ч а н и е 2. Если отображение f отображает некоторую окрестность U точки $x^{(0)}$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ в m-мерное пространство $\mathbf{R}^m$ и f непрерывно в $x^{(0)}$, а отображение g отображает некоторую окрестность V точки $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ в m-мерном пространстве $\mathbf{R}^m$ в p-мерное пространство $\mathbf{R}^p$, то в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ определена композиция $g \circ f$ отображений f и g.

Если, кроме того, отображение g непрерывно в точке $y^{(0)}$, то композиция $g \circ f$ непрерывна в точке $x^{(0)}$.

Действительно, пусть

$$y^{(0)} = f(x^{(0)}) = (y_1^{(0)}, \ldots, y_m^{(0)}) \tag{20.26}$$

и f_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, — координатные функции отображения f, т.е. $f = (f_1, \ldots, f_m)$; тогда

$$f_j(x^{(0)}) \underset{\substack{(20.13)\\(20.26)}}{=} y_j^{(0)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{20.27}$$

Без ограничения общности можно считать, что V является кубической окрестностью, т.е. существует такое $\epsilon > 0$, что

$$V = \{ y = (y_1, \ldots, y_m): \ |y_j - y_j^{(0)}| < \epsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, m \}. \qquad (20.28)$$

Непрерывность отображения f в точке $x^{(0)}$ означает непрерывность в этой точке всех его координатных функций f_j. Из этого следует, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ существует такая окрестность $U_0 \subset U$ точки $x^{(0)}$, что для всех $x \in U_0$ и всех $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства $|f_j(x) - f_j(x^{(0)})| < \epsilon$, т.е. неравенства (см. (20.27))

$$|f_j(x) - y_j^{(0)}| < \epsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

А это и означает (см. (20.28)), что

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in V.$$

Таким образом, для всех $x \in U_0$ выражение $g(f(x))$ имеет смысл, т.е. на окрестности U_0 определена композиция $g \circ f$ отображений f и g.

Если теперь g_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, – координатные функции отображения g, т.е. $g = (g_1, \ldots, g_p)$, то согласно следствию из теоремы 1 все сложные функции $g_k(f)$ непрерывны в точке $x^{(0)}$. Следовательно, в этой точке непрерывна композиция $g \circ f$ отображений f и g, ибо функции $g_k(f)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, являются координатными функциями для этой композиции.

Элементарной функцией многих переменных называется функция, получающаяся из основных элементарных функций (каждая из которых зависит от одной из переменных) с помощью четырех арифметических действий и композиций основных элементарных функций. Так как все эти операции не выводят из класса непрерывных функций, то справедлива следующая

Теорема 2. *Всякая элементарная функция многих переменных непрерывна на множестве своего определения.*

20.5. Повторные пределы. У функций многих переменных наряду с пределом в смысле определения 1 можно рассматривать предел другого вида, а именно связанный с последовательным переходом к пределу по разным координатам, т.е. предел вида

$$\lim_{x_{i_1} \to x_{i_1}^{(0)}} \ \lim_{x_{i_2} \to x_{i_2}^{(0)}} \ldots \lim_{x_{i_n} \to x_{i_n}^{(0)}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (20.29)$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ – некоторая перестановка чисел $1, 2, \ldots, n$, а функция f определена, например, в некоторой проколотой или обычной окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Пределы вида (20.29) называются *повторными пределами.*

Примеры. 1. Пусть

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0 \text{ и } y\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0 \text{ или } y=0.\end{cases}$$

Исследуем различные пределы функции f в точке $(0, 0)$. Очевидно, что у этой функции в точке $(0, 0)$ существует предел по всему множеству ее задания:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

Что же касается повторных пределов

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),\quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),$$

то они не существуют, так как уже не существуют пределы

$$\lim_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x},\qquad y\neq 0,$$

$$\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y},\qquad x\neq 0,$$

а $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{y}\right)=0,\ y\neq 0$, и $\lim\limits_{y\to 0}\left(y\sin\dfrac{1}{x}\right)=0,\ x\neq 0.$

2. Для функции $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, заданной этой формулой на всей плоскости, кроме начала координат, оба повторных предела в точке $(0, 0)$ существуют и равны нулю:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

Что же касается всестороннего предела функции f в точке $(0, 0)$, то он не существует, так как ее пределы в этой точке вдоль координатных осей равны 0, а вдоль прямой $y=x$ ее предел равен $1/2$, ибо $f(x,x)\equiv 1/2, x\neq 0$.

Замечание. Аналогично случаю функций одного переменного понятие предела функции многих переменных обобщается и на случай функций, принимающих комплексные значения. Пусть $x^{(0)}$ – конечная или бесконечно удаленная точка прикосновения множества $X\subset \mathbf{R}^n$, а w_0 – конечная или бесконечно удаленная точка комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Для функции f, заданной на множестве X, $f: X\to C$, определение предела

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x)=w_0 \tag{20.30}$$

можно сформулировать как в терминах последовательностей, так и в терминах окрестностей. Например, в терминах последовательностей это определение имеет следующий вид.

Существование предела (20.30) означает, что для любой последовательности точек $x^{(n)} \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = x^{(0)}$, выполняется равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(x^{(n)}) = w_0$.

Если $f(x) = u(x) + iv(x)$, $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbf{C}$, $u(x), v(x), u_0, v_0 \in \mathbf{R}$, $x \in X$, то предел (20.30) существует в том и только том случае, когда существуют пределы

$$\lim_{x \to x^{(0)}} u(x) = u_0, \qquad \lim_{x \to x^{(0)}} v(x) = v_0.$$

Если $x^{(0)} \in X$ и $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$, то функция f называется *непрерывной в точке* $x^{(0)}$.

Для непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ необходимо и достаточно существование предела $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$ и принадлежности точки $x^{(0)}$ множеству X, на котором задана функция f.

Очевидно, что функция $f(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in X$, непрерывна в точке $x^{(0)}$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны функции $u(x)$ и $v(x)$.

§ 21. Функции многих переменных, непрерывные на множествах

21.1. Непрерывные функции на компактах. Функция называется *непрерывной на некотором множестве,* если она непрерывна в каждой его точке.

Теорема 1. *Всякая непрерывная на компакте функция ограничена и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения.*

$\triangleright$ Пусть X — компакт, $X \subset \mathbf{R}^n$, функция f непрерывна на X и

$$M = \sup_{x \in X} f(x). \tag{21.1}$$

Выберем числовую последовательность $\{y_m\}$ такую, что

$$\lim_{m \to \infty} y_m = M, \tag{21.2}$$

$$y_m < M, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{21.3}$$

В силу определения верхней грани существуют такие точки $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что

$$y_m \underset{(21.3)}{<} f(x^{(m)}) \underset{(21.1)}{\leqslant} M, \tag{21.4}$$

и потому

$$\lim_{m \to \infty} f(x^{(m)}) \underset{(21.2)}{=} M. \qquad (21.5)$$

Поскольку X – компакт, т.е. ограниченное и замкнутое множество, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x^{(0)} \in X$ подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, $\lim\limits_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, откуда в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = f(x^{(0)}). \qquad (21.6)$$

Из условия же (21.5) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x^{(m_k)}) = M. \qquad (21.7)$$

Таким образом, $f(x^{(0)}) = M$. Это означает, что $M < +\infty$, т.е. что функция f ограничена сверху и что она принимает наибольшее значение (достигает своей верхней грани) на множестве X.

Аналогично доказывается ограниченность снизу функции f и достижимость ее нижней грани. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. Если функция определена на некотором множестве n-мерного пространства и ее значениями являются комплексные числа, то она называется *ограниченной на этом множестве*, если на нем ограничена ее абсолютная величина.

Таким образом, ограниченность комплекснозначной функции сводится к ограниченности функции, принимающей только действительные значения, – ее абсолютной величине. Из этого в силу теоремы 1 сразу следует, что всякая комплекснозначная функция, непрерывная в каждой точке некоторого компакта, ограничена на нем.

21.2. Функции, непрерывные на линейно связных множествах. В случае функций многих переменных аналогом того, что всякая непрерывная на некотором промежутке функция, принимая какие-либо значения, принимает и любое промежуточное, является следующая

Т е о р е м а 2. *Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

С л е д с т в и е. *Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

$\triangleright$ Докажем теорему. Пусть X – линейно связное множество, $X \subset \mathbf{R}^n$, функция f непрерывна на X, $x^{(1)} \in X$, $x^{(2)} \in X$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < c < b$. В силу линейной связности множества X существует такая кривая $\Gamma = \{x(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, лежащая в X, что $x^{(1)}$ является началом, а $x^{(2)}$ – ее концом:

$$x(\alpha) = x^{(1)}, \quad x(\beta) = x^{(2)}, \quad x(t) \in X, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{21.8}$$

Функция $F(t) = f(x(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ как композиция непрерывных функций $f(x)$ и $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Кроме того,

$$F(\alpha) = f(x(\alpha)) \underset{(21.8)}{=} f(x^{(1)}) = a, \quad F(\beta) = f(x(\beta)) = f(x^{(2)}) \underset{(21.8)}{=} b.$$

Поэтому, в силу теоремы Коши о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций (п. 7.2), существует такое $t_0 \in [\alpha, \beta]$, что $F(t_0) = c$. Полагая $x^{(0)} = x(t_0)$, получим $f(x^{(0)}) = f(x(t_0)) = F(t_0) = c$. $\lhd$

$\rhd$ Докажем следствие. Пусть функция f непрерывна на замыкании $\bar{X}$ линейно связного множества $X \subset \mathbf{R}^n$, $x^{(1)} \in \bar{X}$, $x^{(2)} \in \bar{X}$, $f(x^{(1)}) = a$, $f(x^{(2)}) = b$ и, например, $a < c < b$. В силу непрерывности функции f в точке $x^{(1)}$ для $\epsilon = c - a > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \in \bar{X} \cap U(x^{(1)}; \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < c - a$ и, следовательно, неравенство

$$f(x) < c. \tag{21.9}$$

Поскольку $x^{(1)}$ – точка прикосновения множества X, то в ее δ-окрестности $U(x^{(1)}; \delta)$ существует точка $y^{(1)}$, принадлежащая X:

$$y^{(1)} \in X \cap U(x^{(1)}; \delta).$$

Для нее в силу (21.9) выполняется неравенство

$$f(y^{(1)}) < c. \tag{21.10}$$

Аналогично, существует и такая точка $y^{(2)} \in X$, что

$$f(y^{(2)}) > c. \tag{21.11}$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 2, и потому из условий (21.10) и (21.11) следует, что существует такая точка $x^{(0)} \in X$, что $f(x^{(0)}) = c$. $\lhd$

З а м е ч а н и е. Из теоремы 2 и ее следствия вытекает, в частности, что функция, непрерывная на области или ее замыкании (п. 19.3), принимая какие-либо два значения, принимает и все промежуточные.

У п р а ж н е н и е. Построить пример линейно связного множества, замыкание которого не является линейно связным.

21.3. Равномерная непрерывность функций. Если функция f непрерывна на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, то это означает, что для любого $x \in X$ и любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x' \in X$, для которого $\rho(x', x) <$

$< \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon.$$

Важно подчеркнуть, что здесь δ зависит от точки $x \in X$ и числа $\epsilon > 0$, т.е. $\delta = \delta(x, \epsilon)$. Отказ от зависимости δ от точки $x \in X$ приводит к понятию равномерной непрерывности.

Определение 1. *Функция f называется равномерно непрерывной на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in X$ и $x' \in X$, для которых $\rho(x', x) < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon.$$

В этом определении δ зависит только от ϵ и не зависит от выбора точек x и x' из множества X.

Примеры. 1. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси $\mathbf{R}$. Действительно, если задано $\epsilon > 0$, то, выбрав $\delta = \epsilon$, получим, что для любых точек x и x' таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| = |x' - x| < \delta = \epsilon,$$

т.е. условия определения 1 выполнены.

2. Функция $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывна на всей числовой оси $\mathbf{R}$. Это следует из того, что для любого $h \neq 0$ имеет место

$$\lim_{x \to \infty} [f(x+h) - f(x)] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} [(x+h)^2 - x^2] = \lim_{x \to \infty} (2hx + h^2) = \infty. \tag{21.12}$$

Поэтому, если задано $\epsilon > 0$, то, каково бы ни было $\delta > 0$, зафиксировав $h \neq 0$, $|h| < \delta$, можно в силу (21.12) так выбрать x, что для точек $x' = x + h$ и x будем иметь

$$|f(x') - f(x)| > \epsilon$$

и в то же время

$$|x' - x| = |h| < \delta.$$

Теорема 3 (Кантор). *Всякая непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна на нем.*

Следствие. *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

$\triangleright$ Пусть существует непрерывная на некотором компакте X функция f, не равномерно непрерывна на нем, т.е. для нее существует такое $\epsilon_0 > 0$, что для всякого $\delta > 0$ найдутся $x_\delta \in X$ и $x'_\delta \in X$, для которых $\rho(x'_\delta, x_\delta) < \delta$ и $|f(x'_\delta) - f(x_\delta)| \geqslant \epsilon_0$. Возьмем $\delta = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$, и положим

$x^{(m)}=x_{1/m}, x'^{(m)}=x'_{1/m}$, тогда будем иметь

$$\rho(x'^{(m)}, x^{(m)})<\frac{1}{m}, \quad x^{(m)}\in X, \quad x'^{(m)}\in X, \tag{21.13}$$

$$|f(x'^{(m)})-f(x^{(m)})|\geqslant \epsilon_0. \tag{21.14}$$

Так как X – компакт, т.е. ограниченное замкнутое множество, то последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена, и из нее можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x^{(0)}$ подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(m_k)}=x^{(0)}, \tag{21.15}$$

причем, в силу замкнутости компакта X, точка $x^{(0)}$ содержится в X:

$$x^{(0)}\in X. \tag{21.16}$$

Рассмотрим теперь подпоследовательность $\{x'^{(m_k)}\}$ *последовательности* $\{x'^{(m)}\}$. Из выполнения соотношения

$$\rho(x'^{(m_k)}, x^{(0)})\leqslant \rho(x'^{(m_k)}, x^{(m_k)})+\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) \underset{(21.13)}{<}$$

$$\underset{(21.13)}{<} \frac{1}{m_k}+\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) \xrightarrow[(21.15)]{} 0, \quad k\to\infty,$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} x'^{(m_k)}=x^{(0)}. \tag{21.17}$$

Поэтому в силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)}\in X$ (см. (21.16)) имеем

$$\lim_{k\to\infty}[f(x'^{(m_k)})-f(x^{(m_k)})]=\lim_{k\to\infty} f(x'^{(m_k)})-\lim_{k\to\infty} f(x^{(m_k)}) \underset{\substack{(21.15)\\(21.17)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(21.15)\\(21.17)}}{=} f(x^{(0)})-f(x^{(0)})=0,$$

что противоречит условию

$$|f(x'^{(m_k)})-f(x^{(m_k)})| \underset{(21.14)}{\geqslant} \epsilon_0>0.$$

Теорема доказана. Следствие вытекает из того, что всякий отрезок является компактом. ◁

Доказанная теорема дает возможность получать конкретные примеры равномерно непрерывных функций – любая непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна. Требование в теореме 3 о том, что множество, на котором задана функция, является компактом, существенно: имеются примеры функций, непрерывных на множествах, не являющихся компактами, и не равномерно непрерывных на них (пример 2).

Приведем пример ограниченной непрерывной функции, определенной на ограниченном множестве и не равномерно непрерывной на нем.

Пример. 3. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ непрерывна на интервале $(0, 1)$, но не равномерно непрерывна на нем.

В самом деле, если $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$, $x'_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}$, то

$$f(x_n) = \sin \pi n = 0, \quad f(x'_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x'_n = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} |x'_n - x_n| = 0. \tag{21.18}$$

Если $0 < \epsilon < 1$, то, каково бы ни было $\delta > 0$, из условия (21.18) следует, что всегда найдется такое n_0, для которого $|x'_{n_0} - x_{n_0}| < \delta$, $x_{n_0} \in \in (0, 1)$, $x'_{n_0} \in (0, 1)$, а

$$|f(x'_{n_0}) - f(x_{n_0})| = 1 - 0 > \epsilon.$$

Это и означает, что функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна на интервале $(0, 1)$.

Введем еще два полезных для дальнейшего понятия.

Определение 2. *Верхняя грань всевозможных разностей значений функции f, заданной на множестве X, называется* колебанием $\omega(f;\ X)$ функции f *на множестве X:*

$$\omega(f; X) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x, x' \in X} [f(x') - f(x)]. \tag{21.19}$$

Легко видеть, что получится та же самая величина, если под знаком верхней грани в равенстве (21.19) написать абсолютную величину, т.е.

$$\omega(f; X) = \sup_{x, x' \in X} |f(x') - f(x)|. \tag{21.20}$$

Это следует из того, что из двух значений $f(x') - f(x)$ и $f(x) - f(x')$, которые присутствуют в формулах (21.19) и (21.20) под знаком верхней грани, одно из них неотрицательно и, следовательно, совпадает с $|f(x') - f(x)|$.

Определение 3. *Верхняя грань расстояний между точками множества $X \subset \mathbf{R}^n$ называется его* д и а м е т р о м *и обозначается* $\operatorname{diam} X$:

$$\operatorname{diam} X \overset{\text{def}}{=} \sup_{x, x' \in X} \rho(x', x).$$

Равномерная непрерывность функции f на множестве X означает, что колебание функции f на любом множестве достаточно малого диаметра сколь угодно мало. Точнее, это означает следующее: для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого множества $E \subset X$, диаметр $\operatorname{diam} E$ которого меньше δ:

$$\operatorname{diam} E < \delta,$$

колебание $\omega(f;\ E)$ на нем функции f меньше ϵ:

$$\omega(f; E) < \epsilon.$$

Это, по существу, является просто перефразировкой определения равномерной непрерывности.

§ 22. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных

22.1. Частные производные. Пусть функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Тогда, например, *частной производной* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ *в точке* $x^{(0)}$ называется обычная производная $\dfrac{df}{dx_1}$ в точке $x_1^{(0)}$ функции, получающейся из данной фиксированием всех аргументов: $x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$, кроме первого, т.е. функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Таким образом,

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Вспомнив определение производной функции одной переменной и положив $\Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)}$,

$$\Delta_{x_1} f(x^{(0)}) \overset{\text{def}}{=} f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

получим

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^{(0)})}{\Delta x_1}.$$

$(\Delta_{x_1} f(x^{(0)})$ называется *приращением функции* f *в точке* $x^{(0)}$ *по переменной* x_1). Правильнее было бы писать не $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}$, а $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)})$, так как $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ есть единый символ для обозначения частной производной, но обычно по традиции употребляется первое обозначение.

Аналогично определяются частные производные функции f по другим переменным $x_2, \ldots, x_n$.

Отметим, что из существования у функции всех частных производных в точке не следует непрерывность этой функции в рассматриваемой точке. Это естественно, так как существование частных производных в данной точке накладывает ограничения на поведение функции в окрестности точки лишь в направлении координатных осей, в то время как в определении непрерывности функции содержится требование к поведению функции при приближении аргумента к точке произвольным образом. Это подтверждается примером функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy = 0, \\ 1, & \text{если } xy \neq 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке $(0, 0)$ частные производные

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

(функция f постоянна на координатных осях – она на них равна тождественно нулю), но не является непрерывной в этой точке, так как, например ее предел по биссектрисе $x = y$ первого координатного угла при $(x, x) \to (0, 0)$, $x \neq 0$, не равен ее значению в точке $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x, x) = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

В заключение отметим, что частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ обозначаются также символами f'_{x_i}, f_{x_i} и $D_{x_i} f$.

Аналогично случаю обычной производной для функции одной переменной определяется понятие односторонних частных производных.

22.2. **Дифференцируемость функции многих переменных.** Определим сначала для простоты записи понятие дифференцируемости функции для случая функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(M_0;\ \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$. Для точки $M = (x, y)$ положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Тогда условие $M \in U(M_0;\ \delta)$ можно записать в виде $\rho < \delta$.

Очевидно, что если U_0 является δ-окрестностью начала координат $(0,0)$, то условие $M = (x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \in U$ равносильно условию $(\Delta x,\ \Delta y) \in U_0$, так как и то, и другое означает, что $\rho < \delta$.

Пусть

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0);$$

Δz называется (*полным*) *приращением функции* f *в точке* $M_0 = (x_0, y_0)$.

Определение 1. *Функция* $z = f(x, y)$ *называется дифференцируемой в точке* (x_0, y_0), *если существуют два таких числа* A *и* B, *что*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),\quad \rho \to 0. \tag{22.1}$$

Так как функции

$$\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y) \underset{(22.1)}{=} o(\rho) \tag{22.2}$$

и $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ определены в окрестности U_0 начала координат $(0, 0)$ (в частности, в самой точке $(0, 0)$, в которой $\rho = 0$ и $o(0) \underset{(22.2)}{=} 0$, ибо при $\Delta x = \Delta y = 0$ и $\Delta z = 0$), то согласно определению $o(\rho)$ (см. (20.9) – (20.11)) существует такая функция $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$, определенная также на окрестности U_0, что

$$o(\rho) \underset{(20.10)}{=} \epsilon(\Delta x, \Delta y)\,\rho,\quad (\Delta x, \Delta y) \in U_0, \tag{22.3}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \epsilon(\Delta x, \Delta y) \underset{(20.11)}{=} 0. \tag{22.4}$$

Заметим, что так как $(0, 0) \in U_0$, то функция $\epsilon(\Delta x, \Delta y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$ и, следовательно,

$$\epsilon(0,0) \underset{(20.12)}{=} 0. \tag{22.5}$$

Итак, определение дифференцируемости (22.1) функции f в точке (x_0, y_0) можно записать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \epsilon(\Delta x, \Delta y)\,\rho, \tag{22.6}$$

причем выполняется условие (22.4), а поэтому и условие (22.5).

Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется ее *дифференциалом в этой точке* и обозначается dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

В этом случае приращения аргументов Δx и Δy обозначают обычно соответственно dx и dy и, таким образом,

$$dz = A\,dx + B\,dy. \tag{22.7}$$

Докажем лемму, показывающую, что условие дифференцируемости функции в точке можно записать в несколько другом виде.

Л е м м а. *Для того чтобы функция* $z = f(x, y)$, *заданная в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0), *была дифференцируема в этой точке, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие функции* $\epsilon_1 = \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ *и* $\epsilon_2 = \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$, *стремящиеся к нулю:*

$$\lim_{\rho \to 0} \epsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \epsilon_2 = 0, \tag{22.8}$$

что приращение Δz *функции* f *в точке* (x_0, y_0) *имело бы вид*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y. \tag{22.9}$$

$\triangleright$ 1. Пусть имеет место равенство (22.6). При $\rho \neq 0$ имеем

$$\epsilon\rho = \epsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \epsilon\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y\right).$$

Положим

$$\epsilon_1(\Delta x, \Delta y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\epsilon\Delta x}{\rho}, \quad \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\epsilon\Delta y}{\rho} \tag{22.10}$$

и

$$\epsilon_1(0, 0) \overset{\text{def}}{=} 0, \quad \epsilon_2(0, 0) \overset{\text{def}}{=} 0. \tag{22.11}$$

Тогда

$$\epsilon\rho = \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y. \tag{22.12}$$

Так как

$$\frac{|\Delta x|}{\rho} \leqslant 1, \quad \frac{|\Delta y|}{\rho} \leqslant 1, \quad \rho \neq 0, \tag{22.13}$$

то

$$|\epsilon_1| \underset{(22.10)}{=} \left|\frac{\epsilon\Delta x}{\rho}\right| \leqslant |\epsilon|, \quad |\epsilon_2| \underset{(22.10)}{=} \left|\frac{\epsilon\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\epsilon|$$

(причем неравенства $|\epsilon_1| \leqslant |\epsilon|$ и $|\epsilon_2| \leqslant |\epsilon|$ верны и при $\rho = 0$, так как в этом случае они обращаются в равенства $|\epsilon_1| = |\epsilon_2| = |\epsilon| = 0$).

В силу этих неравенств из соотношений (22.10) и (22.11) следует выполнение условий (22.8). Подставив выражение (22.12) в формулу (22.6), получим (22.9).

2. Пусть имеет место равенство (22.9). Преобразуем два последних слагаемых в правой части этого равенства следующим образом:

$$\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \left(\epsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}\right)\rho, \quad \rho \neq 0.$$

Положим

$$\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \epsilon_1 \dfrac{\Delta x}{\rho} + \epsilon_2 \dfrac{\Delta y}{\rho}, & \text{если } \rho \neq 0, \\ 0, & \text{если } \rho = 0. \end{cases} \tag{22.14}$$

Тогда для всех ρ получим равенство $\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \epsilon\rho$, т.е. снова равенство (22.12), в котором при $\rho \neq 0$ для функции $\epsilon = \epsilon(\Delta x, \Delta y)$ справедлива следующая оценка:

$$|\epsilon| = \left|\epsilon_1 \frac{\Delta x}{\rho} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\rho}\right| \leqslant |\epsilon_1| \frac{|\Delta x|}{\rho} + |\epsilon_2| \frac{|\Delta y|}{\rho} \underset{(22.13)}{\leqslant} |\epsilon_1| + |\epsilon_2|.$$

Отсюда и из условия $\epsilon(0, 0) \underset{(22.14)}{=} 0$ следует, что $\lim\limits_{\rho \to 0} \epsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Подставив выражение (22.12) в формулу (22.9), получим (22.6). ◁

Выясним теперь свойства функции, которые следуют из ее дифференцируемости.

Т е о р е м а 1. *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

▷ В самом деле, если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$\lim_{\rho \to 0} \Delta z \underset{(22.6)}{=} \lim_{\rho \to 0} [A\Delta x + B\Delta y + \epsilon(\Delta x, \Delta y)\rho] = 0. \ ◁$$

Т е о р е м а 2. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = Adx + Bdy$ – ее дифференциал в этой точке, то у функции f в точке (x_0, y_0) существуют частные производные по x и по y, причем*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B. \tag{22.15}$$

Таким образом, дифференциал (22.7) можно записать в виде

$$dz \underset{\substack{(22.7)\\(22.15)}}{=} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

▷ Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то, положив в формуле (22.9) $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \epsilon_1 \Delta x, \tag{22.16}$$

где $\Delta_x z$ – приращение функции f по переменной x в точке (x_0, y_0), и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon_1 = 0, \tag{22.17}$$

ибо в этом случае $\rho = |\Delta x|$.

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \underset{(22.16)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} (A + \epsilon_1) \underset{(22.17)}{=} A,$$

т.е. существует частная производная по x функции f в точке (x_0, y_0) и

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A.$$

Аналогично доказывается существование производной $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ и ее равенство числу B. ◁

З а м е ч а н и е 1. Функция, имеющая в некоторой точке частные производные, может быть недифференцируемой в этой точке. Примером такой функции является функция, рассмотренная в конце п 22.1. Она имеет в точке (0, 0) частные производные, но не является в ней непрерывной и тем более дифференцируемой, так как из дифференцируемости следует непрерывность (теорема 1). Однако, если у функции потребовать не только существование, но и непрерывность ее частных производных, то такая функция окажется уже дифференцируемой.

Т е о р е м а 3. *Если функция имеет в окрестности точки частные производные и они непрерывны в этой точке, то функция в ней дифференцируема.*

▷ Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в δ-окрестности U точки (x_0, y_0), имеет в этой окрестности частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ и они непрерывны в точке (x_0, y_0). Заметим, что если $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, то отрезки с концами в точках (x_0, y_0), $(x_0, y_0 + \Delta y)$ и в точках $(x_0, y_0 + \Delta y)$, $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ целиком лежат в окрестности U, т.е. в множестве задания функции f (рис. 103).

Имеем

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \\ &+ [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].\end{aligned} \tag{22.18}$$

В квадратных скобках стоят приращения функций одного переменного (другое переменное фиксировано): в первой скобке – приращение по переменному x, во второй – по y. Применив к этим приращениям формулу конечных приращений Лагранжа (см. п. 12.2), получим

$$\Delta z \underset{(22.18)}{=} f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\, \Delta y, \tag{22.19}$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1. \tag{22.20}$$

Значения θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от Δx и Δy. Важным для дальнейшего является то, что в силу условий (22.20) при $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ точки

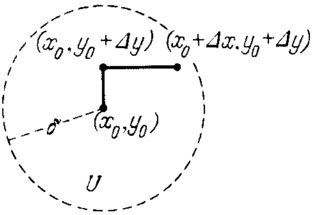


Рис. 103

$(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y)$ и $(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y)$ имеют своим пределом точку (x_0, y_0)*). Частные производные f_x и f_y непрерывны в точке (x_0, y_0), поэтому

$$\lim_{\rho \to 0} f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0),$$
$$\lim_{\rho \to 0} f_y(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y) = f_y(x_0, y_0), \tag{22.21}$$

следовательно, если

$$f_x(x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1(\Delta x, \Delta y),$$
$$f_y(x_0, y_0 + \theta_2\Delta y) = f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) \tag{22.22}$$

(эти равенства определяют функции ϵ_1 и ϵ_2), то

$$\lim_{\rho \to 0} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{\rho \to 0} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) \underset{(22.21)}{=} 0.$$

Подставив (22.22) в равенство (22.19), получим

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\,\Delta x + f_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y,$$

что согласно лемме и означает дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 2. Определения дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функций любого числа переменных. Дифференцируемость функции $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ означает, что ее приращение $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$, где $x^{(0)} + \Delta x = (x_1^{(0)} + \Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \Delta x_n)$, представимо в виде

$$\Delta y = dy + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{22.23}$$

---

*) Здесь пределы понимаются как пределы отображений

$(\Delta x, \Delta y) \mapsto (x_0 + \theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y)$ и $(\Delta x, \Delta y) \mapsto (x_0, y_0 + \theta_2\Delta y)$.

где

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i, \tag{22.24}$$

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad dx_i = \Delta x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

22.3. Дифференцирование сложной функции. Рассмотрим вначале вопрос о дифференцируемости композиции функции двух переменных и функции одного переменного.

Теорема 4. Если *функции* $x = x(t)$ *и* $y = y(t)$ *дифференцируемы в точке* t_0, *а функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0), *где* $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, *то сложная функция* $f(x(t), y(t))$ *дифференцируема в точке* t_0 *и в этой точке*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{22.25}$$

Отметим, что при выполнении условий теоремы в некоторой окрестности точки t_0 сложная функция заведомо имеет смысл. В самом деле, согласно определению дифференцируемости, функция f определена в некоторой окрестности U точки (x_0, y_0). Из дифференцируемости же функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 следует, что они, а следовательно, и отображение $(x(t), y(t))$, ставящее в соответствие числу t точку плоскости $(x(t), y(t))$, определены в некоторой окрестности точки t_0 и непрерывны в самой этой точке. Отсюда и из замечания 2 из п. 20.4 сразу следует, что сложная функция $f(x(t), y(t))$ определена в некоторой окрестности точки t_0.

▷ В силу дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) имеем (обозначения Δx, Δy, Δz и ρ см. в п. 22.2)

$$\Delta z \underset{\substack{(22.9)\\(22.15)}}{=} \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \tag{22.26}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \epsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \epsilon_2 = 0, \tag{22.27}$$

где частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ берутся в точке (x_0, y_0).

Выберем теперь Δx и Δy специальным образом: задав произвольно (достаточно малое) Δt, положим

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), \quad \Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0). \tag{22.28}$$

В силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 имеем $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$, а поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \rho = \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0. \tag{22.29}$$

Следовательно, согласно теореме о пределе композиции функций (п. 20.4)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \epsilon_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \epsilon_2 = 0. \tag{22.30}$$

Поделим обе части равенства (22.26) на $\Delta t \neq 0$. Тогда, в силу существования в точке t_0 конечных производных

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

выражение, которое получится в правой части равенства, будет иметь конечный предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \Bigg|_{t = t_0},$$

т.е. будет существовать производная $\dfrac{dz}{dt}$ и для нее будет справедлива формула (22.25). ◁

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях теоремы 1 вместо дифференцируемости функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ в точке t_0 потребовать лишь, чтобы они были дифференцируемы справа (слева) в этой точке, то при сохранении прочих условий теоремы сложная функция $f(x(t), y(t))$ будет также дифференцируема справа (слева) в точке t_0 и будет справедлива формула (22.25), если только под производными $\dfrac{dz}{dt}, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ понимать производные справа (слева).

З а м е ч а н и е 2. Если функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0) и, следовательно, имеют в этой точке частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ (теорема 2), а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то в точке (u_0, v_0) существуют и частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$ сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ и

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{22.31}$$

▷ Доказательство того, что при сделанных предположениях сложная функция $f(x(u, v), y(u, v))$ определена в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), проводится аналогично случаю, рассмотренному в теореме 4.

Формулы же (22.31) сразу следуют из формулы (22.25), так как, зафиксировав одно из переменных u или v, мы окажемся в условиях теоремы 4: сложная функция $f(x(u, v), y(u, v))$ будет функцией одного переменного. ◁

Замечание 3. Формула (22.31) обобщается на случай функций любого числа переменных: если функция $y = y(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, дифференцируема в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, дифференцируемы в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_m^{(0)})$ и $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то сложная функция $y(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial t_j}$ и

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{22.32}$$

22.4. Инвариантность формы первого дифференциала. Аналогично случаю одного переменного запись дифференциала функции многих переменных имеет один и тот же вид как относительно независимых, так и зависимых переменных.

Теорема 5. *Если функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, имеют в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_m^{(0)})$ непрерывные частные производные, а функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, — непрерывные частные производные в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, где $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то сложная функция $f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$ и*

$$dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i,$$

короче,

$$dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i. \tag{22.33}$$

▷ Заметим, что из непрерывности частных производных функции следует дифференцируемость этой функции, поэтому в условиях теоремы функции $f(x)$ и $x_j(t)$ дифференцируемы соответственно в точках $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$. Согласно определению дифференцируемости функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Из дифференцируемости же функций $x_j(t)$ следует их непрерывность в точке $t^{(0)}$, а поэтому непрерывность в этой точке и отображения $x(t) \overset{\text{def}}{=} (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Отсюда, согласно замечанию 2 из п. 20.4, следует, что в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ определена сложная функция $f(x(t))$, о которой идет речь в теореме.

Из формулы (22.32) и непрерывности частных производных $\frac{\partial y}{\partial x_i}$, $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, следует, что сложная функция $y = f(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ непрерывные частные производные $\frac{\partial y}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и, следовательно, она дифференцируема.

Первое равенство (22.33) следует из определения дифференциала (см. теорему 2 и формулу (22.24)). Докажем второе равенство:

$$dy \underset{(22.24)}{=} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial t_j} dt_j \underset{(22.32)}{=} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j \right) \underset{(22.24)}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i.$$

Здесь после того, как дифференциал dy был записан по формуле (22.24) через приращения $dt_j = \Delta t_j$ независимых переменных $t_1, t_2, \ldots, t_m$, были использованы формулы (22.32) для производных сложных функций. После этого был изменен порядок суммирования по индексам i и j, а затем снова были использованы формулы (22.24), но уже для функций $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\triangleleft$

Подчеркнем, что в формуле (22.33) дифференциалы dt_j являются дифференциалами независимых переменных и поэтому совпадают с их приращениями Δt_j, а dx_i — дифференциалы функций; они, вообще говоря, не совпадают с приращениями Δx_i переменных x_i.

Свойство дифференциала, выражаемое формулой (22.33), называется *инвариантностью формы дифференциала:* дифференциал записывается одинаковым образом, использованы ли в его записи дифференциалы зависимых или независимых переменных.

22.5. Геометрический смысл частных производных и дифференциала. Рассмотрим снова для простоты функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть она имеет в точке (x_0, y_0) частную производную

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x = x_0} = \operatorname{tg} \alpha, \qquad (22.34)$$

где α, согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной $f(x, y_0)$, является углом наклона касательной к графику этой функции (рис. 104), т.е. к кривой

$$z = f(x, y), \quad y = y_0,$$

в точке (x_0, y_0, z_0) где $z_0 = f(x_0, y_0)$. В этом и состоит геометрический смысл частной производной.

Вспомним теперь, что дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) означает, что

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{22.35}$$

где

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = z - z_0. \tag{22.36}$$

Подставив (22.36) в равенство (22.35), получим

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{22.37}$$

Плоскость, определяемая уравнением

$$z = z_0 + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0), \tag{22.38}$$

называется *касательной плоскостью к графику функции* $z = f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0, z_0). Если ее аппликату обозначить $z_{\text{кас}}$, то формулу (22.37) можно записать в виде

$$z - z_{\text{кас}} = o(\rho), \quad \rho \to 0, \quad z = f(x, y),$$

т.е. разность между аппликатами графика функции и касательной плоскости является бесконечно малой более высокого порядка, чем ρ при $\rho \to 0$. Плоскость $z = z_0 + A(x - x_0) + B(y - y_0)$, удовлетворяющая такому условию, единственна, ибо это условие равносильно дифференцируемости функции и коэффициенты A и B уравнения такой плоскости совпадают с коэффициентами дифференциала, которые, будучи равными соответствующим частным производным, определены однозначно.

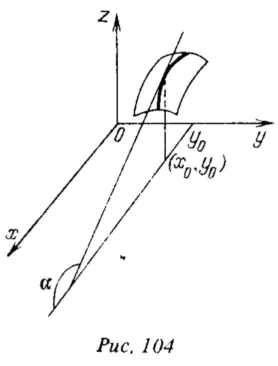


Рис. 104

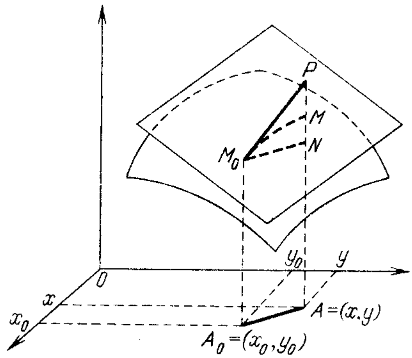


Рис. 105

Равенство (22.38) можно записать (см. (22.36)) в виде

$$z_{\text{кас}} - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \underset{(22.10)}{=} dz.$$

Таким образом, дифференциал функции равен приращению аппликаты касательной плоскости к графику функции:

$$dz = z_{\text{кас}} - z_0.$$

На рис. 105

$$A_0 = (x_0, y_0),\ A = (x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

$$z_0 = f(x_0, y_0) = A_0M_0 = AN,\ z = f(x, y) = AM,\ z_{\text{кас}} = AP$$

и, следовательно, $dz = NP = AP - AN = z_{\text{кас}} - z_0$, $AM - AP = o(\rho)$, $\rho = A_0A \to 0$.

22.6. Производная по направлению. Градиент. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) и задан вектор $l \neq \mathbf{0}$.

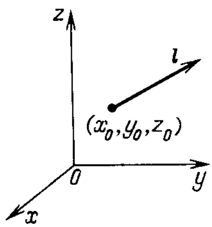


Рис. 106

Обозначим через $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ его направляющие косинусы, т.е. координаты единичного вектора $l_0 = l/|l|$ в направлении вектора l:

$$l_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{22.39}$$

Проведем через точку (x_0, y_0, z_0) луч в направлении вектора l (рис. 106) и запишем его уравнение в параметрическом виде

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\quad y = y_0 + t\cos\beta,\quad z = z_0 + t\cos\gamma,\quad t \geqslant 0. \tag{22.40}$$

Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \underset{(22.39)}{=} 1$, то из формул (22.40) следует, что

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t,$$

т.е. значение параметра t равно расстоянию от точки (x, y, z) луча (22.40), соответствующей этому значению параметра, до точки (x_0, y_0, z_0).

Рассмотрим сужение функции f на луч (22.40), т.е. композицию функций $f(x, y, z)$ и функций (22.40):

$$f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, \quad z_0 + t\cos\gamma), \qquad t \geqslant 0 \tag{22.41}$$

(она определена для всех достаточно малых t). Правая производная этой функции в точке $t = 0$ называется *производной функции f в точке (x_0, y_0, z_0) по направлению вектора l* и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial l}$:

$$\frac{\partial f}{\partial l} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, \quad y_0 + t\cos\beta, \quad z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0} \tag{22.42}$$

В правой части этого равенства стоит производная функции одного переменного.

Если $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а $M = (x, y, z)$ – точка луча (22.40) и, следовательно, $M_0M = t$, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} \underset{(22.42)}{=} \lim_{t \to +0} \frac{f(M) - f(M_0)}{t}.$$

Так как все величины в правой части этого равенства не зависят от выбора системы координат (они определяются функцией f, точкой M_0 и вектором l), то производная по направлению $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ в точке M_0 функции f, аргументом которой является точка пространства, не зависит от выбора системы координат.

Функции (22.40) линейны по t и поэтому, очевидно, дифференцируемы. Следовательно, если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0, z_0), то сложная функция (22.41) дифференцируема в точке $t = 0$ (теорема 4 из п. 22.3). Вычислив ее производную по формуле производной сложной функции (см. (22.25)), получим

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{22.43}$$

где, в силу (22.40), $\dfrac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\dfrac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\dfrac{dz}{dt} = \cos\gamma$.

Подставив эти выражения в формулу (22.43), будем иметь

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{22.44}$$

Здесь значения частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ взяты в точке (x_0, y_0, z_0).

Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ называется *градиентом функции* f (в точке, в которой взяты значения частных производных) и обозначается либо $\operatorname{grad} f$, либо ∇f (читается "набла эф"). Таким образом,

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{22.45}$$

Использовав понятие градиента и скалярного произведения, формулу (22.44) для производной по направлению можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma = (\nabla f, l_0) =$$

$$= |\nabla f|\,|l_0|\cos(\widehat{\nabla f l_0}) \underset{(22.39)}{=} |\nabla f|\cos\varphi, \tag{22.46}$$

где φ – угол между векторами ∇f и l или, что то же, между векторами ∇f и $l_0 = l/|l|$.

Из формулы (22.46) видно, что градиент функции не зависит от выбора системы координат, как это могло бы показаться из определения (22.45). Если $\nabla f \neq \mathbf{0}$, то направление градиента ∇f является единственным направлением, по которому в данной точке производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}$ имеет наибольшее значение (оно достигается при $\varphi = 0$, т.е. когда $\cos\varphi = 1$), а длина градиента ∇f равна этому наибольшему значению (для направления градиента, и только для него, $\cos\varphi = 1$). Если же $\nabla f = \mathbf{0}$, то в данной точке производные функции f по всем направлениям равны 0.

Понятие производной функции по направлению существует для функций любого числа переменных. Если функция $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geqslant 2$, определена в окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, задан n-мерный вектор $l \neq \mathbf{0}$ и $l_0 = l/|l| = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$, то производная функция f в точке $x^{(0)}$ по направлению вектора l определяется равенством

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial l} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} f(x_1^{(0)} + t\cos\alpha_1, \dots, x_n^{(0)} + t\cos\alpha_n)\Big|_{t=0}, \quad t \geqslant 0. \tag{22.47}$$

Если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то из формулы (22.47) следует, что в этой точке существует производная по любому направлению и

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}\cos\alpha_i.$$

Градиент $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ функции f в общем случае определяется по формуле

$$\operatorname{grad} f(x) \equiv \nabla f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right),$$

и для производной дифференцируемой функции f по направлению вектора l справедлива формула

$$\frac{\partial f(x)}{\partial l} = (\nabla f(x), l_0), \qquad l_0 = \frac{l}{|l|}.$$

Из этой формулы, так же как и в случае $n = 3$, следует, что *градиент функции любого числа переменных не зависит от выбора системы координат.*

Замечание. Существуют такие функции, имеющие в некоторой точке производные по любым направлениям (и даже равные между собой), что эти функции не непрерывны в этой точке и, следовательно, заведомо недифференцируемы.

Примером такой функции является функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ y \neq x^2 \ \text{ или если } \ x = y = 0, \\ 1, & \text{если } \ y = x^2 \ \text{ и } \ x^2 + y^2 > 0. \end{cases}$$

Действительно, так как пересечение любой прямой, проходящей через точку $(0, 0)$, с достаточно малой окрестностью (зависящей от выбранной прямой) этой точки содержится в множестве точек (x, y), для которых $f(x, y) = 0$ (рис. 107), то в точке $(0, 0)$ существует производная $\frac{\partial f}{\partial l}$ по

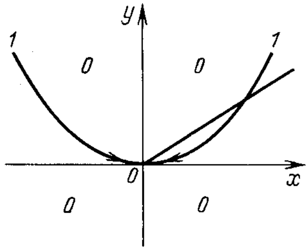


Рис. 107

любому направлению и она равна нулю, т.е. для любого вектора $l \neq \mathbf{0}$ имеет место

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial l} = 0.$$

Однако функция $f(x, y)$ не является непрерывной в точке $(0, 0)$. Чтобы в этом убедиться, найдем предел функции f при $(x, y) \to (0, 0)$ по параболе

$y=x^2$ с выколотой точкой $(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,x^2)\to(0,0)\\ x\neq 0}} f(x,x^2)=1\neq 0=f(0,0).$$

Это и означает, что рассматриваемая функция не является непрерывной в начале координат.

§ 23. Частные производные и дифференциалы высших порядков

23.1. Частные производные высших порядков. Частные производные функции в свою очередь являются функциями, и потому можно рассматривать их частные производные. Например, у функции $z = f(x, y)$ могут существовать частные производные $f_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$,

$$f_{xx}=(f_x)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$f_{xy}=(f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},$$

$$f_{yx}=(f_y)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

$$f_{yy}=(f_y)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

и т.д., причем смысл введенных обозначений ясен из самой записи. Производные $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ называются *частными производными второго порядка.* Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Оказывается, что при достаточно общий условиях результат дифференцирования по различным переменным не зависит от выбора порядка переменных, по которым происходит дифференцирование.

Т е о р е м а. *Если функция f определена вместе со своими частными производными f_x, f_y, f_{xy} и f_{yx} в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и производные f_{xy} и f_{yx} непрерывны в этой точке, то*

$$f_{xy}(x_0, y_0)=f_{yx}(x_0, y_0). \tag{23.1}$$

$\triangleright$ Рассмотрим повторные приращения $\Delta_{xy}f \overset{\text{def}}{=} \Delta_x(\Delta_y f), \Delta_{yx}f \overset{\text{def}}{=} \Delta_y(\Delta_x f)$ в точке (x_0, y_0). Нетрудно убедиться, что

$$\Delta_{xy}f=\Delta_x(\Delta_y f)=\Delta_x[f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)] =$$

$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]. \tag{23.2}$$

Переставив местами средние слагаемые, получим

$$\Delta_{xy} f \underset{(23.2)}{=} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] -$$

$$- [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] = \Delta_y [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] =$$

$$= \Delta_y (\Delta_x f) = \Delta_{yx} f.$$

Итак,

$$\Delta_{xy} f(x_0, y_0) = \Delta_{yx} f(x_0, y_0). \tag{23.3}$$

Введем обозначение

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0), \tag{23.4}$$

тогда

$$\varphi'(x) = f_x(x, y_0 + \Delta y) - f_x(x, y_0). \tag{23.5}$$

Преобразуем теперь выражение $\Delta_{xy} f$ следующим образом, применив последовательно формулу конечных приращений Лагранжа к функциям φ и f_x:

$$\Delta_{xy} f \underset{(23.2),\,(23.4)}{=} \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\,\Delta x \underset{(23.5)}{=}$$

$$\underset{(23.5)}{=} [f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)]\,\Delta x =$$

$$= f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1. \tag{23.6}$$

Аналогично,

$$\Delta_{xy} f = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y) \Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1. \tag{23.7}$$

В силу равенства (23.3) из (23.6) и (23.7) имеем

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y) \Delta x \Delta y.$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0, \quad \Delta y \neq 0$

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f_{yx}(x_0 + \theta_3 \Delta x, y_0 + \theta_4 \Delta y).$$

Перейдя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, в силу непрерывности функций f_{xy} и f_{yx} в точке (x_0, y_0) будем иметь

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \lhd$$

З а м е ч а н и е. Из доказанной теоремы в случае непрерывности соответствующих частных производных следует независимость результата дифференцирования от порядка переменных, по которым проводится дифференцирование, для функций любого числа переменных и для частных производных любого порядка, так как этот более общий случай можно свести к последовательному рассмотрению вторых частных производных функций двух переменных и тем самым к формуле (23.1). Например, для функции $f(x, y, z)$ трех переменных имеем

$$f_{xyz} = f_{zyx}.$$

В самом деле,

$$f_{xyz} = (f_x)_{yz} = (f_x)_{zy} = (f_{xz})_y = (f_{zx})_y = (f_z)_{xy} = (f_z)_{yx} = f_{zyx}.$$

23.2. Дифференциалы высших порядков. Для дифференцируемой функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ ее дифференциал имеет вид

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} dx_i \tag{23.8}$$

и является функцией от $2n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, $dx_1, \ldots, dx_n$. Вычислим дифференциал от dy, рассматривая его только как функцию $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ (т.е. зафиксировав значения $dx_1, \ldots, dx_n$). Обозначив дифференциалы при новом дифференцировании символом δ и опустив для простоты записи обозначение аргументов $x_1, \ldots, x_n$, будем иметь

$$\delta(dy) \underset{(23.8)}{=} \sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\delta x_j\right) dx_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \delta x_j.$$

Таким образом, дифференциал от дифференциала является билинейной формой относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ и $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$. Соответствующая ей квадратичная форма (получающаяся из нее при $\delta x_i = dx_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$) называется вторым дифференциалом функции f в данной точке и обозначается символом $d^2 y$. Таким образом,

$$d^2 y \overset{\text{def}}{=} \delta(dy)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i = 1, 2, \ldots, n}},$$

откуда

$$d^2 y = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Аналогично определяются и дифференциалы высших порядков

$$d^{m+1} y = \delta(d^m y)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i = 1, 2, \ldots, n}}. \tag{23.9}$$

Можно доказать, что

$$d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^{\{m\}} f(x_1, \ldots, x_n). \tag{23.10}$$

Здесь m — символическая степень, обозначающая, что выражение $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{\{m\}}$ записывается с теми же коэффициентами, которые получаются при обычном возведении в степень. Формула (23.10) в раскрытом виде выглядит следующим образом:

$$d^m y = \sum_{m_1+\ldots+m_n=m} \frac{m!}{m_1!\ldots m_n!} \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}} dx_1^{m_1}\ldots dx_n^{m_n}.$$

При $m = 1$ формула (23.10) уже известна (см. (23.8)), для произвольного натурального m она доказывается методом математической индукции, исходя из определения (23.9).

Замечание. Как и для случая функций одной переменной, для функций любого числа переменных дифференциалы порядков выше первого не имеют инвариантной формы относительно выбора переменных.

§ 24. Формула Тейлора для функций многих переменных

24.1. Формула Тейлора для функций двух переменных. Введем удобное для дальнейшего обозначение

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{k} C_k^j \frac{\partial^k f(x, y)}{\partial x^{k-j}\partial y^j}\Delta x^{k-j}\Delta y^j.$$

Теорема. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до порядка m включительно, $m \geqslant 1$, в некоторой δ-окрестности точки (x_0, y_0); тогда для любых Δx и Δy, удовлетворяющих условию*

$$\rho \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta,$$

существует такое $\theta \in (0, 1)$, что

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \qquad (24.1)$$

Следствие. *В условиях теоремы имеет место формула*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + o(\rho^m),$$

$$\rho \to 0. \qquad (24.2)$$

Формулы (24.1) и (24.2) называются *формулами Тейлора функции f в точке* (x_0, y_0).

Пусть $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Многочлен

$$P_m(x,y) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0)$$

называется *многочленом Тейлора степени m функции f в точке* (x_0, y_0), а разность $f(x,y) - P_m(x,y)$ – *остаточным членом* $r_m(x,y)$ *формулы Тейлора*. Таким образом, формула Тейлора имеет вид

$$f(x,y) = P_m(x,y) + r_m(x,y).$$

Формула (24.1) называется *формулой Тейлора с остаточным членом* $r_{m-1}(x, y)$ *в виде Лагранжа*, а формула (24.2) – *формулой Тейлора с остаточным членом* $r_m(x)$ *в виде Пеано.*

▷ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) \overset{\text{def}}{=} f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{24.3}$$

являющуюся композицией функций $f(x, y)$ и $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ (Δx и Δy фиксированы) и потому m раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$. Согласно формуле Тейлора для функции одного переменного с остаточным членом в форме Лагранжа (см. ниже п. 41.3)

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}t^{m-1} + \frac{F^{(m)}(\theta t)}{m!}t^m,$$

$$0 < \theta < 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Отсюда при $t = 1$ получим

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \underset{(24.3)}{=} F(1) =$$

$$= F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{F^{(m)}(\theta)}{m!}, \tag{24.4}$$

$$0 < \theta < 1.$$

Вычислим производные функции F. Из формул $x = x_0 + t\Delta x$ и $y = y_0 + t\Delta y$ следует, что

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x, \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y, \tag{24.5}$$

поэтому

$$F'(t) \underset{(24.3)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \underset{(24.5)}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y, \tag{24.6}$$

$$F''(t) \underset{(24.6)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\Delta y \underset{(24.5)}{=}$$

$$\underset{(24.5)}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2.$$

Вообще, по индукции легко получить, что

$$F^{(k)}(t) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y),\quad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Следовательно,

$$F^{(j)}(0) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{j\}} f(x_0, y_0),\quad j = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$F^{(m)}(\theta) = \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y).$$

Подставив эти выражения в формулу (24.4), получим формулу Тейлора (24.1). ◁

▷ Докажем следствие. Положим

$$\epsilon_j = \epsilon_j(\Delta x, \Delta y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^{m-j}\partial y^j} - \frac{\partial^m f(x_0, y_0)}{\partial x^{m-j}\partial y^j}, \tag{24.7}$$

$j = 0, 1, \ldots, m$.

По условию теоремы все частные производные функции f до порядка m включительно непрерывны в точке (x_0, y_0), поэтому

$$\lim_{\rho\to 0}\epsilon_j(\Delta x, \Delta y) = 0,\qquad j = 0, 1, \ldots, m. \tag{24.8}$$

Преобразуем теперь при $\rho \neq 0$ остаточный член $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ в формуле (24.1) следующим образом:

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) \underset{(24.1)}{=} \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) =$$

$$= \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{\partial^m f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x^{m-j}\partial y^j}\Delta x^{m-j}\Delta y^j \underset{(24.7)}{=}$$

$$\underset{(24.7)}{=} \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x^{m-j}\partial y^j}\Delta x^{m-j}\Delta y^j + \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} C_m^j\epsilon_j\Delta x^{m-j}\Delta y^j =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + \frac{\rho^m}{m!}\sum_{j=0}^{m} C_m^j\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|^{m-j}\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|^{j}\epsilon_j. \tag{24.9}$$

Так как $|\Delta x/\rho| \leqslant 1$, $\quad |\Delta y/\rho| \leqslant 1$, то

$$\lim_{\substack{\rho \to 0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|^{m-j} \left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|^{j} \epsilon_j \underset{(24.8)}{=} 0 \tag{24.10}$$

и, следовательно,

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) \underset{\substack{(24.9)\\(24.10)}}{=} \frac{1}{m!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0, y_0) + o(\rho^m),$$

$\rho \to 0$.

Подставив это выражение в (24.1), получим формулу Тейлора в виде (24.2). ◁

З а м е ч а н и е 1. В случае $m = 1$ формула (24.1) имеет вид

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial f(x_0 + \theta\Delta x,\ y_0 + \theta\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

$$0 < \theta < 1.$$

Эта формула называется *формулой конечных приращений Лагранжа для функции двух переменных.*

24.2. Формула Тейлора для функций любого числа переменных. Рассмотрим теперь случай функций $f(x)$ от n переменных, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$. Пусть $k_1, \ldots, k_n$ – неотрицательные целые числа, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$ (т.е. здесь $|k|$ обозначает величину, отличную, вообще говоря, от длины вектора k), $k! = k_1! \ldots k_n!$, $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$,

$$\Delta x^k = \Delta x_1^{k_1} \ldots \Delta x_n^{k_n}, \quad f^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Введем обозначение

$$\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{l\}} f(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{|k| = l} \frac{l!}{k!} f^{(k)}(x)\Delta x^k,$$

l – неотрицательное целое.

Для функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, m раз непрерывно дифференцируемой в окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, формула

Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа имеет вид

$$f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n) =$$
$$= \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{l!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{l\}} f(x_1,\ldots,x_n) +$$
$$+ \frac{1}{m!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\{m\}} f(x_1+\theta\Delta x_1,\ldots,x_n+\theta\Delta x_n),$$
$$0<\theta<1,$$

или (что в силу введенных обозначений то же самое)

$$f(x+\Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\Delta x^k + \sum_{|k|=m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x+\theta\Delta x)\Delta x^k.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в этом случае имеет вид

$$f(x+\Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\Delta x^k + o(\rho^m),\quad \rho\to 0, \tag{24.11}$$
$$\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2}.$$

Вывод всех этих формул производится совершенно аналогично случаю $n=2$.

Покажем единственность представления функции $f(x+\Delta x)$ (x фиксировано) в виде

$$f(x+\Delta x) = P_m(\Delta x) + o(\rho^m),\quad \rho\to 0, \tag{24.12}$$

где

$$P_m(\Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k \Delta x^k \tag{24.13}$$

– многочлен степени не выше m от n переменных $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$.

Лемма. *Если многочлен*

$$P_m(x) = \sum_{|k|=0}^{m} a_k x^k,\ x=(x_1,\ldots,x_n),\ x^k = x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n},\ \ k=(k_1,\ldots,k_n),$$

тождественно равен нулю,

$$P_m(x)\equiv 0, \tag{24.14}$$

в некоторой окрестности нуля, то все его коэффициенты равны нулю.

▷ Из (24.14) следует, что для любого $k=(k_1,\ldots,k_n)$ имеет место равенство $P_m^{(k)}(0)=0$, но если $0\leqslant|k|\leqslant m$, то $P_m^{(k)}(0)=k!a_k$. Из двух последних равенств следует, что для всех k таких, что $0 \leqslant |k| \leqslant m$, выполняются равенства $a_k = 0$. ◁

Теорема. *Если функция f задана в окрестности точки x, то ее представление в виде* (24.12) *единственно.*

▷ Пусть число $\delta > 0$ выбрано таким образом, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, у функции f наряду с представлением (24.12) имеет место представление

$$f(x + \Delta x) = \sum_{|k|=0}^{m} b_k \Delta x^k + o(\rho^m), \quad \rho \to 0. \tag{24.15}$$

Тогда, положив

$$c_k = b_k - a_k \tag{24.16}$$

и вычтя из равенства (24.15) равенство (24.12), получим, что

$$\sum_{|k|=0}^{m} c_k \Delta x^k + o(\rho^m) = 0, \quad \rho \to 0. \tag{24.17}$$

Зафиксируем произвольно Δx, $|\Delta x| < \delta$, тогда, если $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $|t\Delta x| < \delta$, и в (24.17) можно вместо Δx подставить $t\Delta x$. Выполнив эту подстановку, будем иметь

$$\sum_{|k|=0}^{m} c_k t^{|k|} \Delta x^k + o(\rho_t^m) = 0,$$

$$\rho_t = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (t\Delta x_j)^2} = t\rho \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +0$$

(поскольку фиксировано Δx, то и ρ также фиксировано), т.е.

$$\sum_{l=0}^{m} t^l \sum_{|k|=l} c_k \Delta x^k + o(t^m) = 0, \quad t \to 0.$$

В силу теоремы 2 из п. 14.1 отсюда следует, что

$$\sum_{|k|=l} c_k \Delta x^k = 0,$$

причем это верно для всех таких Δx, что $|\Delta x| < \delta$, т.е. стоящий в левой части этого равенства многочлен относительно переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ равен нулю в некоторой окрестности нуля. Согласно лемме отсюда следует, что все $c_k = 0$. Поэтому в силу (24.16) для всех k таких, что $0 \leqslant |k| \leqslant m$, выполняется равенство $a_k = b_k$. ◁

Из доказанной теоремы следует, что если для m раз непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки x функции f получено представление вида (24.12), то оно является формулой Тейлора для этой функции с остаточным членом в виде Пеано. Действительно, в этом случае формула Тейлора имеет место, а другого такого представления в силу теоремы 2 быть не может.

§ 25. Экстремумы функций многих переменных

25.1. Необходимые условия экстремума.

Определение 1. *Пусть функция f определена на множестве $X \subset \subset \mathbf{R}^n$. Точка $x^{(0)} \in X$ называется точкой локального максимума (минимума), если существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что для всех точек $x \in X \cap U(x^{(0)})$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x^{(0)})$ (соответственно неравенство $f(x) \geqslant f(x^{(0)})$).*

Если, кроме того, при $x \neq x^{(0)}$ имеет место неравенство $f(x) \neq f(x^{(0)})$, то точка $x^{(0)}$ называется точкой строгого локального максимума (минимума).

Точки (строгого) локального максимума и минимума называются точками (строгого) локального экстремума. Эпитет "локальный" часто для краткости опускается.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Если функция f определена в окрестности точки экстремума $x^{(0)}$ и если в этой точке существует частная производная $\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i}$, то она равна нулю:*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0.$$

$\triangleright$ Пусть для определенности $i = 1$. Если точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(0)})$ является точкой экстремума функции f, то точка $x_1^{(0)}$ является точкой экстремума функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ одного переменного x_1. При этом, поскольку точка $x^{(0)}$ была внутренней точкой множества определения X функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, точка $x_1^{(0)}$ является внутренней точкой определения функции $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Следовательно, согласно теореме Ферма,

$$\frac{\partial f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\partial x_1} = \left.\frac{df(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{dx_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = 0. \triangleleft$$

Определение 2. *Точка $x^{(0)}$, в которой все частные производные функции f существуют и равны нулю:*

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_n} = 0, \qquad (25.1)$$

называется критической точкой функции f.

Согласно теореме 1, если точка экстремума функции f является внутренней для области определения функции и в ней существуют все частные производные, то эта точка является критической. Уже в теории экстремумов функций одного переменного мы видели, что не всякая критическая точка является точкой экстремума. Найдем условия, при выполнении которых критическая точка функции многих переменных является точкой экстремума этой функции.

25.2. Достаточные условия экстремума. Квадратичная форма $A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$, выполняется неравенство $A(x) > 0$ (соответственно $A(x) < 0$).

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются *знакоопределенными*. Квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, называются *знаконеопределенными* или *знакопеременными*.

Отметим, что для любой квадратичной формы $A(x)$ и любого числа $t \in \mathbf{R}$ имеет место равенство

$$A(tx) = t^2 A(x) \tag{25.2}$$

(мы рассматриваем точки пространства $\mathbf{R}^n$ как n-мерные векторы). В самом деле,

$$A(tx) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,tx_i\,tx_j = t^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = t^2 A(x).$$

Отсюда следует, что на каждой прямой $x = tx^{(0)}$, $x^{(0)} \neq 0$, $-\infty < t < +\infty$, квадратичная форма $A(x)$ сохраняет один и тот же знак при $t \neq 0$, ибо

$$A(x) = A(tx^{(0)}) = t^2 A(x^{(0)}),$$

и потому знак $A(x)$ в любой указанной точке x такой же, как и в точке $x^{(0)}$.

Лемма 1. *Если квадратичная форма $A(x)$ – знакоопределенная, то нижняя грань абсолютных величин ее значений на единичной сфере*

$$S^{n-1} = \{ x\colon\ |x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \}$$

положительна:

$$\inf_{S^{n-1}} |A(x)| > 0. \tag{25.3}$$

$\triangleright$ Сфера S^{n-1} является ограниченным замкнутым множеством, т.е. компактом. Функция $A(x)$, будучи многочленом, непрерывна на всем пространстве $\mathbf{R}^n$, следовательно, функция $A(x)$, а потому и ее абсолютная величина $|A(x)|$, непрерывны на компакте S^{n-1}. Согласно теореме Вейерштрасса функция $|A(x)|$ достигает своего наименьшего значения на S^{n-1} в некоторой точке $x^{(0)} \in S^{n-1}$:

$$|A(x^{(0)})| = \inf_{x \in S^{n-1}} |A(x)|.$$

Поскольку $|x^{(0)}| = 1$, а следовательно, $x^{(0)} \neq 0$, а квадратичная форма $A(x)$ – знакоопределенная, то $|A(x^{(0)})| > 0$, т.е. неравенство (25.3) доказано. ◁

Лемма 2. *Если $A(x)$ – квадратичная форма и $x^{(0)} \neq 0$, то для всякой точки x прямой $x = tx^{(0)}$, $-\infty < t < +\infty$, при $t \neq 0$ выполняется равенство*

$$A\left(\frac{x}{|x|}\right) = A\left(\frac{x^{(0)}}{|x^{(0)}|}\right). \tag{25.4}$$

Иначе говоря, значение $A(x/|x|)$ не зависит от выбора точки x на рассматриваемой прямой.

▷Действительно,

$$\frac{x}{|x|} = \frac{tx^{(0)}}{|tx^{(0)}|} = \frac{t}{|t|}\,\frac{x^{(0)}}{|x^{(0)}|} = \pm\frac{x^{(0)}}{|x^{(0)}|},$$

поэтому

$$A\left(\frac{x}{|x|}\right) = A\left(\pm\frac{x^{(0)}}{|x^{(0)}|}\right) \underset{(25.2)}{=} A\left(\frac{x^{(0)}}{|x^{(0)}|}\right). \ \triangleleft$$

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности своей критической точки $x^{(0)}$. Тогда, если второй дифференциал*

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j$$

функции f является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то $x^{(0)}$ есть точка строгого минимума (максимума). Если второй дифференциал $d^2 f(x^{(0)})$ – знакопеременная квадратичная форма, то в точке $x^{(0)}$ экстремума нет.

▷ Согласно формуле Тейлора для приращения функции

$$\Delta f = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}), \quad \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n),$$

в силу определения (25.1) критической точки будем иметь

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \epsilon(\Delta x)|\Delta x|^2, \tag{25.5}$$

где $|\Delta x| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$, и

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0. \tag{25.6}$$

Положим

$$A(\Delta x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j.$$

Очевидно, что $A(\Delta x)$ есть квадратичная форма переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Из (25.5) при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\Delta f = \frac{|\Delta x|^2}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\Delta x_i}{|\Delta x|} \frac{\Delta x_j}{|\Delta x|} + 2\epsilon(\Delta x)\right) =$$

$$= \frac{|\Delta x|^2}{2}\left(A\left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right) + 2\epsilon(\Delta x)\right). \tag{25.7}$$

Здесь $\left|\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta x|} = 1$ и, следовательно, точка $\Delta x / |\Delta x|$ лежит на единичной сфере S^{n-1}.

Рассмотрим два случая.

1. Если $A(\Delta x)$ – знакоопределенная квадратичная форма, то согласно лемме 1

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \inf_{S^{n-1}} |A(\Delta x)| > 0. \tag{25.8}$$

Поскольку $\frac{\Delta x}{|\Delta x|} \in S^{n-1}$, то для всех $\Delta x \neq 0$ выполняется неравенство

$$\left|A\left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right)\right| \geqslant \mu, \tag{25.9}$$

а в силу условия (25.6) существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, для которых $|\Delta x| < \delta$, имеет место неравенство

$$|2\epsilon(\Delta x)| < \mu. \tag{25.10}$$

Из соотношений (25.7), (25.9) и (25.10) следует, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, $\Delta x \neq 0$, знак приращения функции Δf совпадает со знаком квадратичной формы $A(\Delta x / |\Delta x|)$, и, следовательно, если $A(x)$ – положительно определенная квадратичная, форма, то $\Delta f > 0$, т.е. точка $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума, а если $A(x)$ – отрицательно определенная форма, то $\Delta f < 0$, т.е. точка $x^{(0)}$ является точкой строгого максимума.

2. Если $A(\Delta x)$ – знакопеременная квадратичная форма, то существуют такие $\Delta x'$ и $\Delta x''$, что $A(\Delta x') > 0$, $A(\Delta x'') < 0$ (отсюда, очевидно, следует, что $\Delta x' \neq 0$ и $\Delta x'' \neq 0$, ибо $A(0) = 0$). Тогда для любого $t \neq 0$ будем

иметь $A(t\Delta x') > 0$ и $A(t\Delta x'') < 0$, в частности, $A(\Delta x'/|\Delta x'|) > 0$, $A(\Delta x''/|\Delta x''|) < 0$.

В силу условия (25.6) существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, $|\Delta x| < \delta$, имеют место неравенства

$$|2\epsilon(\Delta x)| < A(\Delta x'/|\Delta x'|), \quad |2\epsilon(\Delta x)| < |A(\Delta x''/|\Delta x''|)|. \tag{25.11}$$

Поэтому для любой точки Δx вида $\Delta x = t\Delta x'$, $|\Delta x| < \delta$, получим неравенство

$$\Delta f \underset{(25.7)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right) + 2\epsilon(\Delta x)\right] \underset{(25.4)}{=}$$

$$\underset{(25.4)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x'}{|\Delta x'|}\right) + 2\epsilon(\Delta x)\right] \underset{(25.11)}{>} 0,$$

а для точки Δx вида $\Delta x = t\Delta x''$, $|\Delta x| < \delta$, – неравенство

$$\Delta f \underset{(25.7)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x}{|\Delta x|}\right) + 2\epsilon(\Delta x)\right] \underset{(25.4)}{=}$$

$$\underset{(25.4)}{=} \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[A\left(\frac{\Delta x''}{|\Delta x''|}\right) + 2\epsilon(\Delta x)\right] \underset{(25.11)}{<} 0.$$

Поскольку среди указанных Δx имеются сколь угодно малые по длине $|\Delta x|$, то существуют сколь угодно близкие к $x^{(0)}$ точки $x = x^{(0)} + \Delta x$, для которых как $\Delta f > 0$, так и $\Delta f < 0$. Это и означает, что точка $x^{(0)}$ не является точкой экстремума. ◁

Замечание. Для установления знакоопределенности квадратичной формы существует критерий Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $A(x)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы квадратичная форма $-A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} (-a_{ij})x_ix_j$ была положительно определенной.

В качестве примера рассмотрим случай функции двух переменных и сформулируем для него условия в терминах, удобных для применения, когда в точке имеется строгий максимум или минимум, и условия, когда в точке нет экстремума.

Пусть функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) и эта точка является критической:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Обозначим через f^0_{xx}, f^0_{xy} и f^0_{yy} соответствующие вторые частные производные функции f в точке (x_0, y_0). Если

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} > 0, \qquad f^0_{xx} \neq 0, \tag{25.12}$$

то согласно критерию Сильвестра при $f^0_{xx} > 0$ квадратичная форма

$$A(dx, dy) = f^0_{xx} dx^2 + 2 f^0_{xy} dx dy + f^0_{yy} dy^2 \tag{25.13}$$

положительно, а при $f^0_{xx} < 0$ отрицательно определенная. Поэтому в силу теоремы 2, если

$$f^0_{xx} > 0, \qquad \begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} > 0, \tag{25.14}$$

то точка (x_0, y_0) является точкой строгого локального минимума, а если

$$f^0_{xx} < 0, \qquad \begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} > 0, \tag{25.15}$$

то (x_0, y_0) является точкой строгого локального максимума.

Если же

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} < 0, \tag{25.16}$$

то квадратичная форма (25.13) знаконеопределенная, и потому точка (x_0, y_0) согласно теореме 2 не является точкой экстремума.

Исследование квадратичной формы двух переменных (в частности, (25.13)) на знакоопределенность легко провести и без критерия Сильвестра. Действительно, если $f^0_{xx} \neq 0$, то

$$A(dx, dy) \underset{(25.13)}{=} \frac{1}{f^0_{xx}} \left[(f^0_{xx} dx + f^0_{xy} dy)^2 + (f^0_{xx} f^0_{yy} - f^{0\,2}_{xy}) dy^2 \right]. \tag{25.17}$$

Отсюда следует, что если $dx^2 + dy^2 \neq 0$, то при выполнении условий (25.12) имеем

$$\operatorname{sign} A(dx, dy) = \operatorname{sign} f^0_{xx},$$

т.е. квадратичная форма (25.13) положительно определенная при $f^0_{xx} > 0$ и отрицательно определенная при $f^0_{xx} < 0$.

Если же выполняется условие (25.16), то при $dx \neq 0$, $dy = 0$ имеем

$$\operatorname{sign} A(dx, 0) = \operatorname{sign} f^0_{xx},$$

а при $dx = f^0_{xy}$, $dy = -f^0_{xx}$ получим

$$\operatorname{sign} A(f^0_{xy}, -f^0_{xx}) = -\operatorname{sign} f^0_{xx}.$$

Это означает, что квадратичная форма (25.13) является знаконеопределенной.

Аналогично проводится исследование знакоопределенности квадратичной формы (25.13) в случае, когда $f^0_{xx} = 0$, но $f^0_{yy} \neq 0$ при условии, что

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (25.18)$$

Если же это условие выполнено, а

$$f^0_{xx} = f^0_{yy} = 0, \qquad (25.19)$$

то квадратичная форма (25.13) имеет вид

$$A(dx, dy) = 2f^0_{xy}\,dx\,dy,$$

причем в силу выполнения условий (25.18) и (25.19) здесь $f^0_{xy} \neq 0$. Поэтому

$$A(-dx, dy) = -A(dx, dy),$$

откуда сразу видно, что квадратичная форма в этом случае знакопеременная.

В случае, когда

$$\begin{vmatrix} f^0_{xx} & f^0_{xy} \\ f^0_{xy} & f^0_{yy} \end{vmatrix} = 0, \qquad (25.20)$$

точка (x_0, y_0) может как быть точкой экстремума, так и не быть ею. Например, для функций $f_1(x, y) = x^3 + y^3$ и $f_2(x, y) = x^4 + y^4$ точка $(0, 0)$ является критической точкой, в которой выполняется условие (25.20), причем $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$. Функция f_1 меняет знак в любой окрестности точки $(0, 0)$, и потому точка $(0, 0)$ не является ее точкой экстремума, а функция f_2 всюду, кроме точки $(0, 0)$, положительна, и, следовательно, точка $(0, 0)$ является для нее точкой строго минимума.

§ 26. Неявные функции. Отображения

26.1. Неявные функции, задаваемые одним уравнением. Если функция двух переменных $F(x, y)$ определена на некотором подмножестве E плоскости $\mathbf{R}^2$ переменных x, y, т.е. $E \subset \mathbf{R}^2$, и существует такая функция f одного переменного, определенная на некотором подмножестве X числовой пря мой, т.е. $X \subset \mathbf{R}$, что для любого $x \in X$ имеет место включение $(x, f(x)) \in E$ и выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$, то функция f называется *неявной функцией, определенной уравнением*

$$F(x, y) = 0 \tag{26.1}$$

(или решением этого уравнения). Говорят также, что функция f *задана неявно уравнением* (26.1).

П р и м е р. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{26.2}$$

Это уравнение задает неявно бесконечное множество функций, определенных на отрезке $X = [-1, 1]$. Функциями, задаваемыми уравнением (26.2), например, являются функции (рис. 108)

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < 0, \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{если} \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ -\sqrt{1 - x^2}, & \text{если} \quad -1 \leqslant x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если наложить дополнительные условия, которым должна удовлетворять неявная функция, задаваемая уравнением (26.2), то может случиться, что такая функция будет единственной. Так, если потребовать, чтобы функция f была неотрицательна и определена на отрезке $[-1, 1]$, то

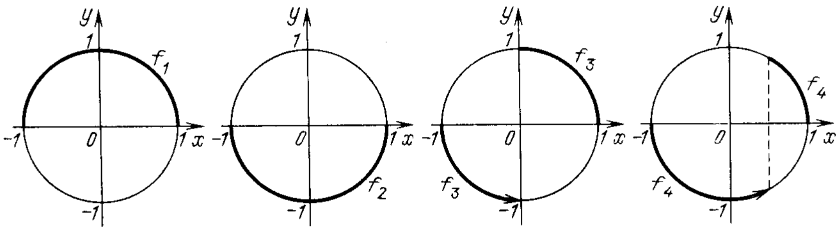


Рис. 108

имеется только одна неявная функция, задаваемая уравнением (26.2), а именно функция f_1, для которой выполняются эти требования.

Другой пример. Если координаты точки (x_0, y_0) удовлетворяют уравнению (26.2),

$$x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

$y_0 \neq 0$ и $U = U(x_0, y_0)$ – какая-то круговая окрестность точки (x_0, y_0), не пересекающаяся с осью x (рис. 109), то снова существует единственная неявная функция f, определенная уравнением (26.2) и такая, что ее график содержится в окрестности U.

Сформулируем в виде леммы одно общее утверждение, представляющее собой условие, при котором существует единственная неявная функция, определяемая уравнением (26.1).

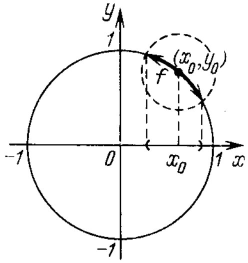


Рис. 109

Лемма. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывна в прямоугольной окрестности*

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y): |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \eta\}$$

точки (x_0, y_0) и при каждом фиксированном $x \in (x_0 - \xi, x_0 + \xi)$ строго монотонна по y на интервале $(y_0 - \eta, y_0 + \eta)$. Тогда, если $F(x_0, y_0) = 0$, то для любой окрестности $U(y_0) = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$, $0 < \epsilon < \eta$, точки y_0 существует такая окрестность $U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $0 < \delta < \xi$, точки x_0, что для каждого $x \in U(x_0)$ имеется и притом единственное решение $y \in \in U(y_0)$ уравнения

$$F(x, y) = 0.$$

Это решение – обозначим его $y = f(x)$ – непрерывно в точке x_0, и $f(x_0) = y_0$.

Таким образом, решение x, y уравнения (26.1) в окрестности

$$U \overset{\text{def}}{=} \{(x, y): |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \epsilon\}$$

точки (x_0, y_0), т.е. при условии, что $(x, y) \in U$, единственно и задается функцией $y = f(x)$, $x \in U(x_0)$, $f(x) \in U(y_0)$.

Это означает, что условия

$$F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in U,$$

выполняются тогда и только тогда, когда $y = f(x)$, $x \in U(x_0)$.

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно ϵ, $0 < \epsilon < \eta$. В силу сделанного предположения функция $F(x_0, y)$ строго монотонна по y на отрезке $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$, а поскольку $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 \pm \epsilon) \neq 0$. Пусть для определенности функция $F(x_0, y)$ строго возрастает; тогда $F(x_0, y_0 + \epsilon) > 0$, а $F(x_0, y_0 - \epsilon) < 0$.

В силу того, что функция $F(x, y)$ непрерывна на открытом множестве $U(x_0, y_0)$ и

$$(x_0, y_0 + \epsilon) \in U(x_0, y_0), \ (x_0, y_0 - \epsilon) \in U(x_0, y_0),$$

существует такое $\delta > 0$, $0 < \delta < \xi$, что в δ-окрестностях точек $(x_0, y_0 + \epsilon)$ и $(x_0, y_0 - \epsilon)$ функция F сохраняет тот же знак, что и в самих этих точках. В частности, для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняются неравенства

$$F(x, y_0 - \epsilon) < 0, \ \ F(x, y_0 + \epsilon) > 0. \qquad (26.3)$$

Зафиксируем произвольно x из интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Функция $F(x, y)$ непрерывна по y на отрезке $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$, поэтому из выполнения условий (26.3) следует, что существует такое $y^* \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$, что

$$F(x, y^*) = 0, \qquad (26.4)$$

а так как, кроме того, функция $F(x, y)$ строго монотонна по y на отрезке $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$, то такое значение y^* единственно.

Таким образом, определена однозначная функция: каждому значению $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ поставлено в соответствие единственное число

$$y^* \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon). \qquad (26.5)$$

Обозначим эту функцию через f, т.е. $y^* = f(x)$. Согласно ее определению при любом $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеет место равенство $F(x, y^*) = 0$, т.е.

$$F(x, f(x)) = 0, \qquad (26.6)$$

причем, так как при каждом $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ значение y^*, обладающее свойством (26.4), единственно, то существует только одна функция f, определенная на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ и удовлетворяющая условию (26.6). При этом из того, что $F(x_0, y_0) = 0$, и из единственности функции f следует, что $y_0 = f(x_0)$ (рис. 110). Наконец, из произвольного задания достаточно малого $\epsilon > 0$ следует, что функция f непрерывна в точке x_0: для любого $\epsilon > 0$ было найдено такое $\delta > 0$, что из включения $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ вытекало, что $f(x) \underset{(26.5)}{\in} (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$. ◁

Т е о р е м а 1. *Если функция $F(x, y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), имеет в этой окрестности частную производную $F_y(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), и*

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

то найдутся такие окрестности $U(x_0)$ и $U(y_0)$ соответственно точек x_0 и y_0, что для любого $x \in U(x_0)$ существует единственное решение $y \in U(y_0)$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение, обозначаемое $y = f(x)$, непрерывно на $U(x_0)$, и $y_0 = f(x_0)$.

Если, кроме того, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная $F_x(x, y)$, непрерывная в самой точке (x_0, y_0), то *функция f имеет в точке x_0 производную и*

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{26.7}$$

С л е д с т в и е. *Если в дополнение к условиям теоремы частные производные функции F непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), то неявная функция f в некоторой окрестности точки x_0 имеет непрерывную производную.*

Интересно отметить, что для неявной функции f можно доказать ее существование, но нельзя, вообще говоря, ее явно выразить через функцию F, а для производной функции f такое явное выражение имеется — формула (26.7).

$\triangleright$ Пусть для определенности $F_y(x_0, y_0) > 0$. Тогда из условий теоремы следует, что существует такая прямоугольная окрестность

$$U(x_0, y_0) = \{(x, y): |x - x_0| < \xi, |y - y_0| < \eta\}$$

точки (x_0, y_0), что функция $F(x, y)$ в ней непрерывна, а производная $F_y(x, y)$ положительна: $F_y(x, y) > 0$. В этой окрестности выполняются все условия леммы, в частности, из неравенства $F_y(x, y) > 0$ следует строгое возрастание по переменной y функции $F(x, y)$ при фиксированном значении x. Поэтому для произвольно заданной ϵ-окрестности

$$U(y_0) = (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon), \quad 0 < \epsilon < \eta,$$

точки y_0 в силу леммы найдется δ-окрестность точки x_0:

$$U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

для которой существует единственная функция $y = f(x)$, заданная на

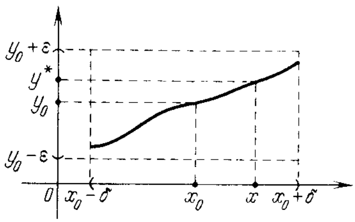


Рис. 110

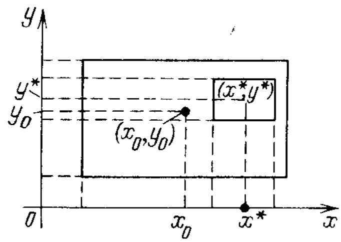


Рис. 111

окрестности $U(x_0)$, непрерывна в точке x_0 и такая, что при всех $x \in U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in U(y_0)$ и равенство $F(x, f(x)) = 0$.

Покажем, что эта функция непрерывна во всех точках окрестности $U(x_0)$. Если $x^* \in U(x_0)$, $y^* \in U(y_0)$ и $F(x^*, y^*) = 0$, т.е. $y^* = f(x^*)$, то, очевидно, существует прямоугольная окрестность

$$U(x^*, y^*) = \{(x, y): |x - x^*| < \xi^*, |y - y^*| < \eta^*\},$$

содержащаяся в $U(x_0, y_0)$ (рис. 111):

$$U(x^*, y^*) \subset U(x_0, y_0).$$

Ясно, что из этого включения следует, что в окрестности $U(x^*, y^*)$ также выполняются все условия леммы, а поэтому функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x^*, и так как x^* – произвольная точка окрестности $U(x^{(0)})$ то функция $y = f(x)$ непрерывна на этой окрестности.

Пусть, наконец, у функции F в окрестности точки (x_0, y_0) существует частная производная F_x, непрерывная в самой точке (x_0, y_0). Тогда функция F дифференцируема в этой точке, т.е.

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) =$$
$$= F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y, \tag{26.8}$$

где (см. лемму в п. 22.1)

$$\lim_{\rho \to 0} \epsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \epsilon_2 = 0, \qquad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{26.9}$$

Если $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и, следовательно, $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \in U(y_0)$, то согласно определению функции f будем иметь

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0.$$

Кроме того, по условию теоремы $F(x_0, y_0) = 0$, поэтому условие (26.8) в данном случае имеет вид

$$F_x(x_0, y_0)\Delta x + F_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = 0.$$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$ следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x_0, y_0) + \epsilon_1}{F_y(x_0, y_0) + \epsilon_2}. \tag{26.10}$$

Так как, в силу непрерывности функции f, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \rho = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0 \tag{26.11}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon_2 \underset{\substack{(26.9)\\(26.11)}}{=} 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (26.10) имеет предел при $\Delta x \to$ $\to 0$, равный $-\dfrac{F_x(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}$, тот же предел имеет и левая часть, а это означает, что существует производная $f'(x_0)$ и что

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \underset{(26.10)}{=} -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \lhd$$

Для доказательства следствия заметим, что если частные производные F_x и F_y дополнительно к условиям теоремы 1 непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), то согласно доказанному производная f' существует в некоторой окрестности точки x_0 и в силу формулы (26.7) для всех точек x этой окрестности имеет место равенство

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \tag{26.12}$$

Отсюда в силу непрерывности композиции непрерывных функций следует, что в этом случае производная $f'(x)$ также непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.

З а м е ч а н и е. Формула (26.12) дает возможность, в частности, написать уравнение касательной к плоской кривой, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

Если (x_0, y_0) – точка рассматриваемой кривой и в этой точке для функции F выполняются условия теоремы 1, то в окрестности точки (x_0, y_0) кривая имеет явное представление $y = f(x)$, для которого $y_0 = f(x_0)$ и

$$f'(x_0) \underset{(26.12)}{=} -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}. \tag{26.13}$$

Поскольку уравнение касательной к графику функции f в точке (x_0, y_0) имеет вид (п. 10.3)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,$$

то, подставив в это уравнение выражение (26.13) для производной $f'(x_0,)$, преобразуем его к виду

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{26.14}$$

Это и есть канонический вид уравнения касательной к кривой, заданной неявным образом.

Случай одного уравнения более чем с двумя неизвестными, т.е. уравнения вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0, \qquad n > 1, \tag{26.15}$$

рассматривается аналогично. Следует лишь в формулировках и доказательствах леммы и теоремы 1 под x понимать точку $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$, а под окрестностью $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ – ее окрестность в $\mathbf{R}^n$ (рис. 112, на котором изображен случай $n = 2$). В частности, если функция F непрерывна в окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$, имеет в этой окрестности производную по y, непрерывную в точке $(x^{(0)}, y_0)$, и

$$F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0) = 0, \qquad F_y(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0) \neq 0,$$

то существуют такие окрестности $U(x^{(0)})$ и $U(y_0)$ точек $x^{(0)}$ и y_0, что уравнение (26.15) однозначно разрешимо в окрестности

$$U(x^{(0)}, y_0) \overset{\text{def}}{=} \{(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y):\ x \in U(x^{(0)}), y \in U(y_0)\}$$

точки $(x^{(0)}, y_0) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0)$ и решение непрерывно во всех точках $x \in U(x^{(0)})$.

Если, кроме того, существуют частные производные F_{x_i}, непрерывные в точке $(x^{(0)}, y_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то у функции f в точке $x^{(0)}$ существуют частные производные f_{x_i} и

$$f_{x_i}(x^{(0)}) = -\frac{F_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F_y(x^{(0)}, y_0)}. \tag{26.16}$$

Для обобщения теории неявных функций на случай систем уравнений удобно сформулировать теорему о неявной функции, задаваемой одним уравнением $F(x, y) = 0$ для случая, когда у функции F непрерывны все ее частные производные на некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$.

Функция, у которой все ее частные производные непрерывны на некотором множестве, называется *непрерывно дифференцируемой* на этом множестве.

Т е о р е м а 1. *Если функция F непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_0)$, $F(x^{(0)}, y_0) = 0$, $F_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, то найдутся такие окрестности $U(x^{(0)})$ и $U(y_0)$ соответственно точек $x^{(0)}$ и y_0, что для них существует единственное решение $y = f(x)$ уравнения $F(x, y) = 0$ такое, что для любой точки $x \in U(x^{(0)})$ имеет место $f(x) \in \in U(y_0)$; при этом функция f непрерывно дифференцируема на окрестности $U(x^{(0)})$ и $f(x^{(0)}) = y_0$.*

Непрерывность частных производных неявно заданной функции f в силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций следует из того, что они, согласно (26.16), задаются формулами

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F(x, f(x))}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial F(x, f(x))}{\partial y}},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

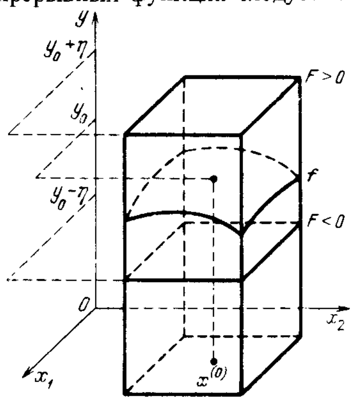


Рис. 112

26.2. Декартово произведение множеств.

Если даны два каких-то множества X и Y, то множество всевозможных пар (x, y), $x \in X$, $y \in Y$, называется *декартовым произведением множеств* X и Y и обозначается $X \times Y$.

Примеры. 1. Если $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$, т.е. X и Y – соответственно m- и n-мерные арифметические пространства и, следовательно, состоят из всевозможных точек $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$, то элементами $X \times Y$ являются всевозможные пары (x, y) или, что равносильно, всевозможные системы $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Отсюда следует, что декартово произведение $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ является $(m + n)$-мерным арифметическим пространством:

$$\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}.$$

2. Если $x^{(0)} \in \mathbf{R}^m$, $y^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, U и V – соответственно прямоугольные окрестности точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ в пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$, то $U \times V$ является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ в пространстве $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$.

В самом деле, если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$, $y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ и

$$U = \{x = (x_1, \dots, x_m): \ |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m\},$$

$$V = \{y = (y_1, \dots, y_n): \ |y_j - y_j^{(0)}| < \epsilon_j, \ j = 1, 2, \dots, n\},$$

то

$$U \times V = \{(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n): \\ |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, \ i = 1, 2, \dots, m; \ |y_j - y_j^{(0)}| < \epsilon_j, \ j = 1, 2, \dots, n\},$$

что и является прямоугольной окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ в $\mathbf{R}^{m+n}$.

3. Если X и Y – открытые множества соответственно в пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$, то их произведение $X \times Y$ является открытым множеством в пространстве $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m+n}$.

Действительно, если $(x, y) \in X \times Y$, то в силу открытости множеств X и Y существуют такие прямоугольные окрестности U и V соответственно точек x и y, что $U \subset X$, $V \subset Y$, а следовательно, $U \times V \subset X \times Y$. Поскольку же, согласно примеру 2, множество $U \times V$ является окрестностью точки (x, y), то $X \times Y$ – открытое множество.

4. Если $X \subset \mathbf{R}^n$, $[a, b]$ – отрезок числовой оси $\mathbf{R}$, то множество $X \times [a, b]$ состоит из всевозможных точек $(n + 1)$-мерного пространства $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ вида (x, y) таких, что $x \in X$, $a \leqslant y \leqslant b$.

Множество $X \times [a, b]$ называется цилиндром, множество X – его основанием, а число $h = b - a$ – его высотой.

26.3. Неявные функции, задаваемые системой уравнений. Если задана система функций

$$\varphi_i(t_1, \dots, t_m), \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{26.17}$$

каждая из которых имеет в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \dots, t_m^{(0)})$ частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, то матрица, составленная из этих частных производных так, что i является номером строки, а j – столбца, т.е. матрица

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_m} \end{pmatrix} \tag{26.18}$$

называется *матрицей Якоби системы* (26.17) *в точке* $t^{(0)}$. Если $n = m$, то определитель матрицы Якоби (26.18) называется *якобианом системы функций* (26.17) *в точке* $t^{(0)}$ и обозначается $\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)}$ (при $t = t^{(0)}$).

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0, \end{aligned} \tag{26.19}$$

или, короче, полагая $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, систему

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Сформулируем условия, при которых эту систему можно разрешить относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$, в результате чего получится система функций

$$\begin{aligned} &y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned} \tag{26.20}$$

задающая отображение $y = f(x)$ некоторой окрестности точки $x \in \mathbf{R}^m$ в n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$.

Т е о р е м а 2. *Если функции* $F_i(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_1^{(0)}, \ldots$ $\ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$,

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{26.21}$$

и

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right|_{(x^{(0)},\, y^{(0)})} \neq 0, \tag{26.22}$$

то существуют такие окрестности $U(x^{(0)})$ *и* $U(y^{(0)})$ *точек* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$

соответственно в пространствах $\mathbf{R}^m$ *и* $\mathbf{R}^n$, *что система уравнений* (26.19) *однозначно разрешима в окрестности* $U(x^{(0)}) \times U(y^{(0)})$ *точки* $(x^{(0)}, y^{(0)})$ *относительно переменных* $y_1, \ldots, y_n$, *т.е. для любого* $x \in U(x^{(0)})$ *существует и притом единственное* $y \in U(y^{(0)})$ *такое, что*

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{26.23}$$

– указанное решение, то все функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *непрерывно дифференцируемы на* $U(x^{(0)})$ *и* $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Δ Доказательство проведем по индукции: пусть теорема доказана для случая системы из $n - 1$ уравнений, $n \geqslant 2$ (для одного уравнения теорема доказана в п. 26.1).

Если дана система n уравнений (26.19), удовлетворяющая условиям теоремы, то в силу предположения (26.22) по крайней мере один из элементов последней строчки якобиана $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$ в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ не обращается в нуль. Пусть для определенности этим элементом будет $\dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}$, т.е. $\dfrac{\partial F_n(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y_n} \neq 0$.

При выполнении этого условия последнее уравнение системы (26.19) можно разрешить относительно y_n в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, т.е. существует такая функция

$$y_n = \varphi\,(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

что в указанной окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ система (26.19) равносильна системе

$$\begin{gathered} F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \\ y_n = \varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}), \end{gathered} \tag{26.24}$$

причем

$$F_n(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-1})) \equiv 0, \tag{26.25}$$

и функция φ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, y_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)})$.

Введем для краткости записи обозначения

$$\begin{gathered} \tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}), \quad \tilde{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, \ldots, y_{n-1}^{(0)}), \\ \Phi_j(x, \tilde{y}) = F_j(x, \tilde{y}, \varphi(x, \tilde{y})). \end{gathered} \tag{26.26}$$

Теперь условие (26.25) примет вид

$$F_n(x, \tilde{y}, \varphi(x, \tilde{y})) = 0, \tag{26.27}$$

а система (26.24) – вид

$$\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \quad y_n = \varphi(x, \tilde{y}). \tag{26.28}$$

Покажем, что $\left.\dfrac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}\right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})} \neq 0$. Действительно,

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k} \underset{(26.28)}{=} \frac{\partial F_j}{\partial y_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \\
\frac{\partial F_n}{\partial y_k} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \underset{(26.27)}{=} 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{gathered} \tag{26.29}$$

Поэтому, умножив последний столбец якобиана $\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$ на $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_k}$ и прибавив его к k-му столбцу, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, получим

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial F_n}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix}
\underset{(26.29)}{=}
\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_1} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\
0 & \ldots & 0 & \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}
\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}.$$

Отсюда, в силу условия (26.22), следует, что

$$\left.\frac{\partial(\Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{n-1})}\right|_{(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})} \neq 0.$$

Поэтому, согласно предположению индукции, система $n-1$ уравнений

$$\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{26.30}$$

в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, \tilde{y}^{(0)})$ может быть разрешена единственным образом относительно переменных $y_1, \ldots, y_{n-1}$:

$$y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \ldots, x_m), \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{26.31}$$

Поэтому, положив $\tilde{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x))$, будем иметь

$$\Phi_j(x, \tilde{f}(x)) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{26.32}$$

В указанной окрестности соотношения (26.30) и (26.31) равносильны, а функции f_j, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.

Если

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x, \tilde{f}(x)) =$$
$$= \varphi(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m)), \tag{26.33}$$

то система функций

$$f(x) = (\tilde{f}(x), f_n(x)) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{26.34}$$

является непрерывно дифференцируемым решением системы (26.19) в некоторой окрестности

$$U(x^{(0)}, y^{(0)}) = U(x^{(0)}) \times U(y^{(0)})$$

точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$: при $x \in U(x^{(0)})$ имеем $f(x) \in U(y^{(0)})$ и

$$F_j(x, f(x)) \underset{(26.34)}{=} F_j(x, \tilde{f}(x), f_n(x)) \underset{(26.33)}{=}$$
$$\underset{(26.33)}{=} F_j(x, \tilde{f}(x), \varphi(x, \tilde{f}(x))) \underset{(26.26)}{=} \Phi_j(x, \tilde{f}(x)) \underset{(26.32)}{=} 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$F_n(x, f(x)) \underset{(26.34)}{=} F_n(x, \tilde{f}(x), f_n(x)) \underset{(26.33)}{=}$$
$$\underset{(26.33)}{=} F_n(x, \tilde{f}(x), \varphi(x, \tilde{f}(x))) \underset{(26.27)}{=} 0.$$

В силу единственности решения (26.34) в рассматриваемой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ соотношения (26.19) и (26.34) равносильны и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. $\lhd$

Используя обозначения (26.24), (26.26) и (26.33), схему доказательства теоремы 2 можно кратко изобразить следующим образом:

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
$$\Updownarrow$$
$$F_j(x, y) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$y_n = \varphi(x, \tilde{y}),$$
$$\Updownarrow$$

$$\Updownarrow$$
$$\Phi_j(x, \tilde{y}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$y_n = \varphi(x, \tilde{y}),$$
$$\Updownarrow$$
$$y_j = f_j(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$y_n = \varphi(x, \tilde{y}),$$
$$\Updownarrow$$
$$y_i = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Полученное решение $y = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ системы (26.19) единственно, так как в вышеуказанной схеме при переходе от каждой системы уравнений к следующей получается равносильная система.

26.4. Свойства якобианов отображений. Напомним, что отображение f множества $X \subset \mathbf{R}^m$ в пространство $\mathbf{R}^n$ задается n функциями от m переменных:

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m), \end{cases} \tag{26.35}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_m) \in X, \qquad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Функции f_j называются *координатными функциями отображения* f, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Если X – открытое множество, то отображение (26.35) называется *непрерывно дифференцируемым на множестве* X, если все координатные функции f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы на X (т.е. имеют на X непрерывные производные).

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества $X \subset \mathbf{R}^m$ в открытое множество $Y \subset \mathbf{R}^n$, а $z = g(y)$ – непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества Y в пространство $\mathbf{R}^p$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_p)$. Тогда имеет смысл композиция $g \circ f$ отображений f и g и она также непрерывно дифференцируема.

Согласно правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j},$$

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$j = 1, 2, \ldots, m.$$

Это означает в силу правила умножения матриц, что при композиции отображений их матрицы Якоби перемножаются:

$$\left(\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_k}\right)\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j}\right). \tag{26.36}$$

Если $m = n = p$, то, поскольку при умножении матриц их определители также перемножаются, из равенства (26.36) следует равенство

$$\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\,\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}, \tag{26.37}$$

т.е. при композиции отображений якобианы их перемножаются.

Если отображение $z = g(y)$ является обратным отображению $y = f(x)$, то отображение $g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ является тождественным отображением:

$$z_1 = x_1, \ldots, z_n = x_n$$

и его якобиан, очевидно, равен 1. Поэтому равенство (26.37) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\;\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1. \tag{26.38}$$

Отсюда следует, что если отображение $y = f(x)$ непрерывно дифференцируемо, взаимно однозначно и имеет якобиан, не равный нулю, то обратное отображение $y = f^{-1}(y)$ также имеет якобиан, не равный нулю, и

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}}. \tag{26.39}$$

Формулы (26.38) и (26.39) показывают, что якобианы отображений ведут себя в определенном смысле аналогично производным функций одного переменного.

26.5. Непрерывно дифференцируемые отображения. Для функций одной переменной имеется простое достаточное условие обратимости дифференцируемой функции на промежутке, т.е. условие существования у нее однозначной обратной функции – этим условием является неравенство нулю ее производной. Но уже даже для отображений плоских областей нет аналогичного простого признака существования однозначного обратного отображения. Тем не менее можно указать условие локальной обратимости отображения, т.е. его обратимости в достаточно малой окрестности точки. Предварительно докажем, что непрерывно дифференцируемые отображения с якобианом, не равным нулю, сохраняют свойства открытости множества.

Т е о р е м а 3. *Если непрерывно дифференцируемое отображение*

$$y = f(x) = \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \tag{26.40}$$

открытого множества $G \subset \mathbf{R}_x^n$ *в пространство* $\mathbf{R}_y^n$ *имеет не равный нулю на* G *якобиан, то образ* $f(G)$ *множества* G *при отображении* f *является открытым в* $\mathbf{R}_y^n$ *множеством.*

$\triangleright$ Пусть $y^{(0)} \in f(G)$. Покажем, что $y^{(0)}$ – внутренняя точка множества $f(G)$. Поскольку $y^{(0)} \in f(G)$, то существует такая точка $x^{(0)} \in G$, что

$$f(x^{(0)}) = y^{(0)}, \tag{26.41}$$

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \quad y^{(0)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}).$$

Введем для удобства обозначение

$$F_i(x, y) \overset{\text{def}}{=} f_i(x_1, \dots, x_n) - y_i,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in G, \quad y \in \mathbf{R}_y^n,$$

и рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{26.42}$$

Очевидно, что соотношения (26.40) и (26.42) равносильны. По условию функции f_i непрерывно дифференцируемы на G, а следовательно, функции F_i, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывно дифференцируемы на $G \times \mathbf{R}_y^n$, являющемся окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Кроме того,

$$F_i(x^{(0)}, y^{(0)}) = f_i(x^{(0)}) - y_i^{(0)} \underset{(26.40)}{=} 0,$$

$$\left.\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0.$$

Поэтому, согласно теореме 2, систему уравнений (26.42) или, что то же самое, систему (26.40) в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ можно разрешить относительно $x = (x_1, \dots, x_n)$ (в системах (26.40) и (26.42) роли переменных x и y по сравнению с формулировкой теоремы 2 поменялись местами: там система разрешалась относительно y, а здесь – относительно x), т.е. в пространстве $\mathbf{R}^n$ существуют окрестности $U = U(x^{(0)})$, $V = V(y^{(0)})$ соответственно точек $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ и отображение $x = x(y)$, отображающее окрестность V в окрестность U и удовлетворяющее уравнению $y = f(x)$:

$$y \equiv f(x(y)), \quad y \in V.$$

Таким образом, отображение $x = x(y)$ является обратным к отображению $y = f(x)$ и определено на окрестности V. Тем самым в каждую точку этой окрестности при отображении f отображается какая-то точка множества $U \subset G$, и, следовательно, $f(G) \supset V$.

Итак, вместе с каждой точкой $y^{(0)} \in f(G)$ существует такая ее окрестность V, что $V \subset f(G)$, т.е. $f(G)$ является открытым множеством. $\triangleleft$

Теорема 4. *Если непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $x^{(0)}$ отображение $y = f(x)$ множества $X \subset \mathbf{R}_x^n$ в пространство $\mathbf{R}_y^n$ имеет в точке $x^{(0)}$ не равный нулю якобиан, то существуют такие окрестности U и V соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, что отображение f непрерывно дифференцируемо и взаимно однозначно отображает окрестность U на окрестность V и обратное отображение f^{-1} непрерывно дифференцируемо на V.*

$\triangleright$ Пусть G – окрестность точки $x^{(0)}$, на которой отображение f непрерывно дифференцируемо. Рассуждая, как в начале доказательства предыдущей теоремы 3, в силу теоремы 2 о неявных функциях найдем в пространстве $\mathbf{R}^n$ такие окрестности U и V соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, что в каждую точку окрестности V при отображении f отображается единственная точка из окрестности U, т.е. на V определено однозначное отображение f^{-1}, обратное к отображению f, причем отображение f^{-1}, так же как и отображение f, непрерывно дифференцируемо. Произведение якобианов отображений f и f^{-1} соответственно в точках $x = f^{-1}(y)$ и $y \in V$ равно единице (см. (26.38)), и, следовательно, эти якобианы не равны нулю. А тогда из теоремы 3, примененной к отображению f^{-1} множества V, следует, что это отображение переводит открытое множество V также в открытое множество $U_0 = f^{-1}(V) \subset U$. Очевидно, $f(U_0) = V$ и U_0 отображается отображением f на V взаимно однозначно, ибо отображение f^{-1} однозначно отображает V на U_0. Таким образом, U_0 и V – искомые окрестности соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$. $\triangleleft$

§ 27. Условный экстремум

27.1. Прямой метод отыскания точек условного экстремума. Пусть на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ задано $m + 1$ функций $f_0, f_1, \ldots, f_m$ и пусть X_0 – подмножество множества X, на котором последние m функций одновременно обращаются в нуль:

$$X_0 = \{x \in X\colon\ f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}.$$

Уравнения

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \tag{27.1}$$

называются *уравнениями связи.*

Определение 1. *Точка* $x^{(0)} \in X_0$ *называется* *точкой условного, или относительного, экстремума* *функции* f_0 *при выполнении условий связи* (27.1), *если она является точкой обычного экстремума сужения функции* f_0 *на множестве* X_0.

Пример. Найдем точку условного экстремума для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ при выполнении уравнения связи $x + y - 1 = 0$ (рис. 113).

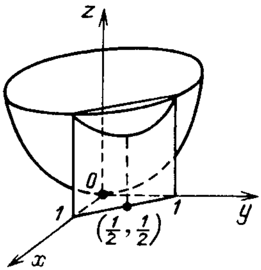


Рис. 113

Из этого уравнения связи следует, что $y = x - 1$, и поэтому при его выполнении рассматриваемая функция имеет вид

$$f(x, 1 - x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

Найдем ее производную

$$\frac{df(x, 1 - x)}{dx} = 4x - 2.$$

Следовательно, если $\dfrac{df(x, 1 - x)}{dx} = 0$, то $x = 1/2$. В силу уравнения связи $x + y - 1 = 0$ значению $x = 1/2$ соответствует значение $y = 1/2$, а так как $\left.\dfrac{d^2 f(x, 1 - x)}{dx^2}\right|_{x = 1/2} = 4 > 0$, то точка $(1/2, 1/2)$ является точкой минимума функции $f(x, 1 - x)$, т.е. точкой условного минимума функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ при выполнении уравнения связи $x + y - 1 = 0$. Из проведенного рассуждения следует также, что других точек условного экстремума в рассматриваемой задаче нет.

Метод, примененный при решении этой задачи, можно применить и в общем случае для изучения условного экстремума.

Пусть все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, а градиенты $\nabla f_1, \nabla f_2, \ldots, \nabla f_m$ последних m функций линейно независимы в точке $x^{(0)}$ или, что то же самое, ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{27.2}$$

равен m (отсюда, очевидно, следует, что $m \leqslant n$, так как ранг матрицы не может быть больше числа ее столбцов).

Равенство ранга матрицы (27.2) числу m равносильно существованию у нее минора порядка m, не равного нулю.

Пусть для определенности

$$\left.\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0$$

и $n > m$. Тогда, согласно теореме о неявных функциях, система уравнений (27.1) в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$ равносильна заданию m функций

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= \varphi_m(x_{m+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{27.3}$$

в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^{(0)} = (x_{m+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ в пространстве $\mathbf{R}^{n-m}$ переменных $x_{m+1}, \dots, x_n$.

Определим функцию $g(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$, как результат подстановки выражений (27.3) для переменных $x_1, \dots, x_m$ в $y = f_0(x_1, \dots, x_n)$, т.е.

$$g(\tilde{x}) = g(x_{m+1}, \dots, x_n) \overset{\text{def}}{=} f_0(\varphi_1(\tilde{x}), \dots, \varphi_m(\tilde{x}), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Функция $g(\tilde{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\tilde{x}^{(0)}$ в пространстве $\mathbf{R}^{n-m}$; при этом, какова бы ни была точка $\tilde{x}$ из этой окрестности, точка $(\varphi_1(\tilde{x}), \dots, \varphi_m(\tilde{x}), x_{m+1}, \dots, x_n)$ удовлетворяет уравнениям связи (27.1).

Ввиду равносильности условий (27.1) и (27.3) точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функции f_0 при выполнении уравнений связи тогда и только тогда, когда точка $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для функции g.

Затруднение при практическом использовании изложенного метода сведения задачи отыскания точек условного экстремума к задаче отыскания точек обычного экстремума состоит в том, что решение системы уравнений (27.1) не выражается через элементарные функции даже во многих простейших случаях. В следующем пункте будет изложен метод отыскания точек условного экстремума, значительно более удобный для применения.

27.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Теорема 1. *Пусть функции* $f_0, f_1, \ldots, f_m$ *непрерывно дифференцируемы в окрестности точки* $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$. *Если* $x^{(0)}$ *является точкой условного экстремума функции* f_0 *относительно уравнений связи* (27.1), *то в этой точке градиенты* $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ *линейно зависимы, т.е. существуют такие числа* λ_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, *одновременно не равные нулю, что*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m = 0. \tag{27.4}$$

Следствие. *Если в точке* $x^{(0)}$ *условного экстремума функции* f_0 *относительно уравнений связи* (27.1) *градиенты* $\nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ *линейно независимы, то существуют такие числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *что*

$$\nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \ldots + \lambda_m \nabla f_m = 0, \tag{27.5}$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{27.6}$$

Функция $F(x) \overset{\text{def}}{=} f_0(x) + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x)$ называется *функцией Лагранжа*, а коэффициенты λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, – *множителями Лагранжа*. Условие (27.6) означает, что точка $x^{(0)}$ является критической точкой функции Лагранжа:

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, это условие является необходимым условием для того, чтобы точка $x^{(0)}$ была точкой рассматриваемого условного экстремума.

$\triangleright$ Пусть точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяет уравнениям связи (27.1):

$$f_k(x^{(0)}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{27.7}$$

и в ней градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы. Покажем, что в этом случае точка $x^{(0)}$ не может быть точкой условного экстремума.

Если градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы в точке $x^{(0)}$, то в этой точке ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_0}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{27.8}$$

равен $m+1$ и, следовательно, у этой матрицы существует минор порядка $m+1$, не равный нулю. Пусть для определенности этим минором будет минор, образованный первыми $m+1$ столбцами матрицы (27.8), т.е.

$$\left.\frac{\partial(f_0, f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})}\right|_{x^{(0)}} \neq 0. \tag{27.9}$$

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} y_0 &= f_0(x_1, \ldots, x_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n), \\ y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n). \end{aligned} \tag{27.10}$$

В силу выполнения уравнений связи (27.1) для точки $x^{(0)}$ имеем

$$\begin{aligned} f_0(x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_n) &= f_0(x^{(0)}), \\ f_1(x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_n) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_n) &= 0, \end{aligned}$$

т.е. (27.10) отображает точку $(x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_{m+1})$ в точку $(f_0(x^{(0)}), \underbrace{0, \ldots, 0}_{m \text{ раз}})$.

В силу же условия (27.9) отображение (27.10) отображает любую достаточно малую окрестность U точки $(x^{(0)}_1, \ldots, x^{(0)}_{m+1})$ в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_{m+1}$ на некоторую окрестность V точки $(f_0(x^{(0)}), 0, \ldots, 0)$ (п. 26.5). Поэтому для всех достаточно малых $\eta > 0$, а именно таких, что $(f(x^{(0)}) \pm \eta, 0, \ldots, 0) \in V$, отображение (27.10) отображает в точки $(f_0(x^{(0)}) + \eta, 0, \ldots, 0)$ и $(f_0(x^{(0)}) - \eta, 0, \ldots, 0)$ какие-то точки $(x'_1, \ldots, x'_{m+1})$ и $(x''_1, \ldots, x''_{m+1})$ из U (рис. 114). Это означает, что для $x' = (x'_1, \ldots, x'_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n)$ и $x'' = (x''_1, \ldots, x''_{m+1}, x^{(0)}_{m+2}, \ldots, x^{(0)}_n)$

выполняются соотношения (см. (27.10))

$$f_0(x') = f_0(x^{(0)}) + \eta, \quad f_1(x') = \ldots = f_m(x') = 0,$$
$$f_0(x'') = f_0(x^{(0)}) - \eta, \quad f_1(x'') = \ldots = f_m(x'') = 0.$$

Таким образом, точки x' и x'' удовлетворяют уравнениям связи, причем в первой из них значение функции f_0 больше $f(x^{(0)})$, а во второй меньше. Поскольку U — произвольно малая окрестность точки $x^{(0)}$, то это

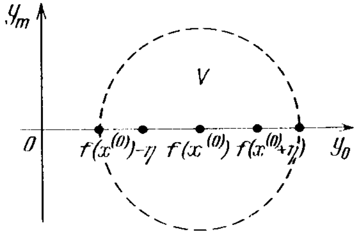


Рис. 114

и означает, что точка $x^{(0)}$ не является точкой условного экстремума функции f_0. ◁

Для доказательства следствия заметим, что если векторы $\nabla f_1, \nabla f_2, \ldots$ $\ldots, \nabla f_m$ линейно независимы, то в равенстве (27.4) имеем $\lambda_0 \neq 0$, так как в случае $\lambda_0 = 0$ указанные векторы оказались бы линейно зависимыми. Разделив обе части равенства на λ_0 и обозначив λ_k/λ_0 снова через λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, получим равенство (27.5).

З а м е ч а н и е. Имеется ли в точке $x^{(0)}$, удовлетворяющей уравнениям связи (27.1) и уравнениям (27.6), условный экстремум, можно выяснить, исследовав второй дифференциал функции f_0 в точке $x^{(0)}$. Если он при выполнении соотношений между дифференциалами dx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, вытекающими из уравнений связи (27.1), является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то точка $x^{(0)}$ является точкой условного минимума (максимума).

П р и м е р. Найдем, применив метод множителей Лагранжа, точки условного экстремума функции $f(x, y) = xy$ при выполнении уравнения связи $x - y = 0$.

В этом случае функция Лагранжа имеет

$$F(x, y) = xy + \lambda(x - y).$$

Решая соответствующую систему уравнений (27.6) совместно с уравнением связи, т.е. систему уравнений

$$x - y = 0, \quad y + \lambda = 0, \quad x - \lambda = 0,$$

получим $x = y = \lambda = 0$.

Чтобы выяснить, имеется в точке $(0, 0)$ условный экстремум или нет, исследуем второй дифференциал

$$d^2 f(x, y) = 2\,dx\,dy$$

при условии

$$dx - dy = 0,$$

получающемся дифференцированием уравнения связи $x - y = 0$. Имеем

$$d^2 f(x, y)|_{x-y=0} = 2\,dx\,dy|_{dx=dy} = 2\,dx^2$$

– положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, в точке $(0, 0)$ имеется строгий условный минимум. В этом, конечно, легко убедиться и непосредственно; из уравнения связи получим $y = x$, а функция

$$f(x, x) = x^2$$

в точке $x = 0$ имеет минимум.

ГЛАВА 3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 28. Определение и свойства неопределенного интеграла

28.1. Первообразная и неопределенный интеграл. В этом параграфе рассматривается задача отыскания функции, для которой заданная функция является производной.

Пусть Δ – конечный или бесконечный промежуток числовой оси, т.е. интервал, полуинтервал или отрезок*), и на Δ заданы функции f и F.

Определение 1. *Функция F называется первообразной функцией (или, короче, первообразной) функции f на промежутке Δ, если F дифференцируема на Δ и в каждой точке этого промежутка производная функции F равна значению функции f:*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in \Delta. \tag{28.1}$$

При этом, если некоторый конец промежутка Δ принадлежит этому промежутку, то под производной в этом конце естественно понимается соответствующая односторонняя производная. Поскольку функция, имеющая в данной точке производную, непрерывна в этой точке (односторонне непрерывна, если речь идет об односторонней производной), то первообразная F функции f непрерывна на промежутке Δ.

Пример. Функция $F(x) = x^3/3$ является первообразной функции $f(x) = x^2$ на всей числовой оси.

Иногда вместо "первообразная данной функции" говорят "первообразная для данной функции".

Лемма 1. *Для того чтобы две дифференцируемые на некотором промежутке функции были первообразными одной и той же функции, необходимо и достаточно, чтобы они на этом промежутке отличались на постоянную.*

Иначе говоря, функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ являются на промежутке Δ первообразными одной и той же функции тогда и только тогда, когда

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in \Delta, \quad C \text{ – константа.} \tag{28.2}$$

---

*) Если рассматриваемый промежуток является отрезком, то само собой разумеется, что он может быть только конечным.

▷ Если F — первообразная функции f, т.е. $F' = f$, то функция $F + C$ является первообразной той же функции f, ибо $(F + C)' = F' = f$.

Если F и Φ — первообразные для одной и той же функции f, т.е. $F' = \Phi' = f$, то $(F - \Phi)' = F' - \Phi' = 0$ и, следовательно, согласно следствию 1 теоремы Лагранжа (п. 12.2, теорема 3), разность $F - \Phi = C$ является постоянной на промежутке Δ. ◁

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть функция f задана на некотором промежутке Δ. Совокупность всех ее первообразных на этом промежутке называется* н е о п р е д е л е н н ы м и н т е г р а л о м *от функции f и обозначается*

$$\int f(x)\,dx. \tag{28.3}$$

Если F — какая-либо первообразная функции f на рассматриваемом промежутке, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{28.4}$$

хотя правильнее было бы писать

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C\}$$

(здесь и в дальнейшем C — произвольная постоянная).

Иногда под $\int f(x)\,dx$ понимается не совокупность всех первообразных функции f, а произвольный элемент этого множества, т.е. произвольная первообразная рассматриваемой функции. С разночтением одного и того же обозначения мы встречались и раньше, например, символом $f(x)$ обозначается как сама функция, так и ее значение в точке x. Из контекста обычно всегда бывает ясно, в каком смысле в данном месте употреблено то или иное обозначение. Следует, однако, иметь в виду, что всякое равенство, в обеих частях которого стоят неопределенные интегралы, есть равенство между множествами.

Под знаком интеграла пишут для удобства не саму функцию f, а ее произведение на дифференциал dx. Это делается, например, для того, чтобы указать, по какой переменной ищут первообразную:

$$\int x^2 z\,dx = \frac{x^3 z}{3} + C, \qquad \int x^2 z\,dz = \frac{x^2 z^2}{2} + C.$$

Здесь в обоих случаях подынтегральная функция равна $x^2 z$, но ее неопределенные интегралы в первом и втором случаях различны, так как в первом случае она рассматривается как функция от переменной x, а во втором – как функция от z.

Другие принципиально более важные удобства, вытекающие из употребления записи $\int f(x)\,dx$, будут указаны в дальнейшем (см. замену переменного в интеграле, п. 28.4).

Если F — какая-либо первообразная функции f на промежутке Δ, то согласно формуле (28.4) под знаком интеграла стоит дифференциал функции F:

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx. \tag{28.5}$$

Будем считать по определению, что этот дифференциал под знаком интеграла можно записывать в любом из указанных видов, т.е. согласно этому соглашению

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = \int dF(x). \tag{28.6}$$

28.2. Основные свойства интеграла. Все рассматриваемые в этом пункте функции определены на некотором фиксированном промежутке Δ. Перечислим свойства неопределенного интеграла, вытекающие непосредственно из его определения.

1°. *Если функция F дифференцируема на промежутке Δ, то*

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или, что то же самое,

$$\int F'(x)dx = F(x) + C.$$

Это сразу следует из определения неопределенного интеграла как совокупности всех дифференцируемых функций, дифференциал которых стоит под знаком интеграла.

2°. *Пусть функция f имеет первообразную на промежутке Δ; тогда для всех $x \in \Delta$ имеет место равенство*

$$d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{28.7}$$

Отметим, что в этом равенстве под интегралом $\int f(x)dx$ понимается произвольная первообразная F функции f. Поэтому (28.7) можно записать в виде равенства

$$dF(x) = f(x)dx,$$

справедливость которого следует из того, что F – первообразная f (т.е. из (28.1)).

3°. *Если функции f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке Δ, то и функция $f_1 + f_2$ имеет первообразную на этом промежутке, причем*

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{28.8}$$

Это равенство выражает собой совпадение двух множеств функций. В правой его части стоит арифметическая сумма множеств (ее определение см. в п. 4.3*). Оно означает, что сумма каких-либо первообразных для функций f_1 и f_2 является первообразной для функции $f_1 + f_2$ и что, наоборот, всякая первообразная для функции $f_1 + f_2$ является суммой некоторых первообразных для функций f_1 и f_2.

⊳ Пусть F_1 и F_2 – первообразные соответственно функций f_1 и f_2, т.е. в каждой точке $x \in \Delta$ выполняется равенство $F_1'(x) = f_1(x)$, $F_2'(x) = f_2(x)$. Тогда неопределенные интегралы $\int f_1(x)dx$ и $\int f_2(x)dx$ состоят соответственно из функций вида $F_1(x) + C_1$ и $F_2(x) + C_2$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Положим $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, тогда функция F будет первообразной для функции $f_1 + f_2$, ибо

$$F'(x) = F_1'(x) + F_2'(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in \Delta.$$

Следовательно, интеграл $\int (f_1(x) + f_2(x))dx$ состоит из функций $F(x) + C = F_1(x) + F_2(x) + C$, в то время как сумма интегралов $\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ – из функций вида $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. Поскольку C, C_1, C_2 – произвольные постоянные, то оба эти множества, т.е. левая и правая части равенства (28.8), совпадают. $\triangleleft$

4°. *Если функция f имеет первообразную на промежутке Δ и k – число, то функция kf также имеет на Δ первообразную и при $k \neq 0$ справедливо равенство*

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx. \tag{28.9}$$

$\triangleright$ Пусть F – первообразная функции f, т.е. $F'(x) = f(x)$, $x \in \Delta$. Тогда функция kF является первообразной функции kf, ибо $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$, $x \in \Delta$. Поэтому интеграл $\int kf(x)dx$ состоит из всевозможных функций вида $kF + C$, а интеграл $k\int f(x)dx$ – из всевозможных функций $k(F + C) = kF + kC$. В силу произвольности постоянной C и условия $k \neq 0$ обе совокупности функций совпадают. Это и означает справедливость равенства (28.9). $\triangleleft$

Следствие (линейность интеграла). *Если функции f_1 и f_2 имеют первообразные на промежутке Δ, а $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ и $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ – такие числа, что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0$, то функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ также имеет первообразную на Δ, причем*

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx.$$

Это непосредственно следует из свойств 3° и 4°.

Вопрос о существовании первообразной будет изучаться несколько позже (п. 34.2), а теперь рассмотрим простейшие методы вычисления интегралов для элементарных функций.

28.3. Табличные интегралы. Из всякой формулы для производной некоторой функции

$$F'(x) = f(x) \tag{28.10}$$

следует формула для неопределенного интеграла

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{28.11}$$

Иначе говоря, чтобы проверить формулу (28.11) для конкретных функций, надо проверить для них справедливость равенства (28.10) во всех точках рассматриваемого промежутка. Таким способом можно доказать справедливость следующих пятнадцати формул, называемых *табличными* *интегралами*:

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, a > 0,\ a \neq 1$, в частности, $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C.$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

9. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^{2} x} = \operatorname{th} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^{2} x} = -\operatorname{cth} x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{x^{2} + a^{2}} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a} \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{a} + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{x^{2} - a^{2}} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2} - x^{2}}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2} \pm a^{2}}} = \ln\left|x + \sqrt{x^{2} \pm a^{2}}\right| + C$ (если под корнем стоит $x^{2} - a^{2}$, то $|x| > |a|$).

Само собой разумеется, что если знаменатель подынтегральной функции обращается в нуль в некоторой точке, то написанные формулы будут справедливы лишь для тех промежутков, в которых не происходит обращение в нуль указанного знаменателя.

28.4. Формула замены переменного. Познакомимся в заключение этого параграфа с двумя свойствами неопределенного интеграла, весьма полезными, в частности, для вычисления интегралов.

Теорема 1. *Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$.*

Если функция f имеет на Δ_x первообразную $F(x)$ и, следовательно,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{28.12}$$

а функция φ дифференцируема на Δ_t, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет на Δ_t первообразную $F(\varphi(t))$ и

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}. \tag{28.13}$$

Иначе говоря, сделаем сначала подстановку $x = \varphi(t)$, а затем возьмем интеграл или сначала возьмем интеграл, а потом сделаем указанную подстановку, результат будет один и тот же.

$\triangleright$ Функции f и F определены на промежутке Δ_x, и так как по условию теоремы справедливо включение $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$, то имеют смысл сложные функции $f(\varphi(t))$ и $F(\varphi(t))$. При этом, поскольку

$$F'(x) = f(x), \qquad x \in \Delta_x, \tag{28.14}$$

то по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in \Delta_t.$$

Это и означает, что функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет в качестве одной из своих первообразных функцию $F(\varphi(t))$. Отсюда, согласно определению интеграла, следует, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{28.15}$$

Подставив же в формулу (28.12) $x = \varphi(t)$, получим

$$\int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + C. \tag{28.16}$$

В формулах (28.15) и (28.16) равны правые части, следовательно, равны и левые, т.е. имеет место равенство (28.13). $\triangleleft$

Формула (28.13) называется *формулой интегрирования подстановкой*, а именно подстановкой $\varphi(t) = x$. Эту формулу можно записать также в виде

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\,|_{x=\varphi(t)}. \tag{28.17}$$

Ее применение к вычислению интегралов состоит в том, что вместо интеграла $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ вычисляется интеграл $\int f(x)dx$ и затем полагается $x = \varphi(t)$.

Например, при вычислении интегралов вида $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx$ естественно применить подстановку $u = \varphi(x)$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{du}{u}\Bigg|_{u=\varphi(x)} =$$

$$= (\ln|u| + C)|_{u=\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

К такому типу интегралов относится интеграл

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Иногда, прежде чем применить метод интегрирования подстановкой, приходится проделать некоторые преобразования подынтегральной функции:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Отметим, что формулу (28.13) бывает целесообразно использовать и в обратном порядке, т.е. справа налево. Именно, иногда удобно вычисление интеграла $\int f(x)dx$ с помощью соответствующей замены переменного $x = \varphi(t)$ свести к вычислению интеграла

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(если этот интеграл в каком-то смысле "проще" исходного).

В случае, когда функция φ имеет обратную φ^{-1}, то, перейдя в обеих частях формулы (28.13) к переменной x с помощью подстановки $t = \varphi^{-1}(x)$ и поменяв местами стороны равенства, получим

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (28.18)$$

Эта формула называется обычно *формулой интегрирования заменой переменного.*

Для того чтобы существовала функция φ^{-1}, обратная φ, в дополнение к условиям теоремы 1 достаточно, например, потребовать, чтобы на рассматриваемом промежутке Δ_t функция φ была строго монотонной. В этом случае, как известно (п. 7.3), существует однозначная обратная функция φ^{-1}.

Вычислим, например, с помощью формулы (28.18) интеграл $\int\sqrt{1 - x^2}\,dx$, $-1 < x < 1$. Сделав замену переменного $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, получим

$$\int\sqrt{1 - x^2}\,dx = \int\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\,dt = \int\cos^2 t\,dt =$$

$$= \int\frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int\cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C =$$

$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + C.$$

Аналогично вычисляется и интеграл $\int\sqrt{1 + x^2}\,dx$, только здесь целесообразно положить $x = \operatorname{sh} t$:

$$\int\sqrt{1 + x^2}\,dt = \int\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\,dt = \int\operatorname{ch}^2 t\,dt =$$

$$= \int\frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + C = \frac{1}{2}(t + \operatorname{sh} t\operatorname{ch} t) + C.$$

В полученном выражении надо вернуться к переменной x. Имеем $\operatorname{sh} t = x$, $\operatorname{ch} t = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1 + x^2}$. Переменную же t найдем из уравнения $x = \operatorname{sh} t$, т.е. из уравнения $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Из него следует, что $y = e^t$ удовлетворяет квадратному уравнению $y^2 - 2xy - 1 = 0$ и, следовательно,

$$e^t = x + \sqrt{1 - x^2}$$

(другой корень указанного квадратного уравнения отрицателен, а e^t принимает только положительные значения), откуда

$$t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

В результате окончательно получим

$$\int\sqrt{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + x\sqrt{1 + x^2}) + C.$$

28.5. Формула интегрирования по частям.

Теорема 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на некотором промежутке и на этом промежутке существует интеграл $\int v\,du$, то на нем существует и интеграл $\int u\,dv$, причем*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{28.19}$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям* неопределенного интеграла.

▷ Пусть функции u и v дифференцируемы на промежутке Δ; тогда по правилу дифференцирования произведения $d(uv) = vdu + udv$, и потому

$$udv = d(uv) - vdu. \tag{28.20}$$

Интеграл от каждого слагаемого правой части существует: интеграл $\int vdu$ существует по условию, а по свойству 1° из п. 28.2 имеем

$$\int d(uv) = uv + C. \tag{28.21}$$

Поэтому, согласно свойству 3° из п. 28.2, существует и интеграл $\int udv$, причем

$$\int udv \underset{(28.20)}{=} \int d(uv) - \int vdu \underset{(28.21)}{=} uv - \int vdu,$$

где постоянная интегрирования C (см. (28.21)) отнесена к интегралу $\int vdu$. Формула (28.19) доказана. ◁

П р и м е р. Для вычисления интеграла $\int x \ln x dx$ положим $u = \ln x$, $dv = xdx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$ и, следовательно,

$$\int x \ln x dx = \int \ln x d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

§ 29. Интегрирование рациональных дробей

29.1. Интегрирование элементарных рациональных дробей. В этом параграфе будут рассматриваться рациональные дроби, у которых в числителе и знаменателе стоят многочлены с действительными коэффициентами. Будет всегда предполагаться, что коэффициент у старшего члена многочлена, стоящего в знаменателе, равен 1 — этого, очевидно, всегда можно достичь, поделив числитель и знаменатель дроби на указанный коэффициент.

Будут изложены методы, с помощью которых можно вычислить, т.е. выразить через элементарные функции, интегралы от рациональных дробей.

Рассмотрим сначала элементарные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^n}$. Если $n > 1$, то

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) =$$

$$= \frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \tag{29.1}$$

Если $n = 1$, то

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C. \tag{29.2}$$

Вычислим теперь интеграл от элементарной дроби вида

$$\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}, \quad \frac{p^2}{4} - q < 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Заметив, что

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2,$$

где $a^2 \overset{\text{def}}{=} q - \frac{p^2}{4} > 0$, и положив $t = x + \frac{p}{2}$, будем иметь

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{Bx+D}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n}\,dx =$$

$$= \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+D}{(t^2+a^2)^n}\,dt = B\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(D - \frac{pB}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, вычисление интеграла $\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}\,dx$ сводится к вычислению интегралов, стоящих в правой части получившегося равенства.

Если $n = 1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C, \tag{29.3}$$

$$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C. \tag{29.4}$$

Если же $n > 1$, то

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}\,d(t^2+a^2) = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C. \tag{29.5}$$

Для интеграла

$$I_n \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, \quad n > 1,$$

выведем с помощью интегрирования по частям рекуррентную формулу, т.е. выразим I_n через I_{n-1}:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int t\,\frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} \underset{(29.5)}{=}$$

$$\underset{(29.5)}{=} \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}\right),$$

т.е.

$$I_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right) I_{n-1},\quad n = 2, 3, \ldots \qquad (29.6)$$

Так как интеграл I_1 уже вычислен (см. (29.4)), то по формуле (29.6) можно последовательно вычислить I_2, I_3 и т.д.

Таким образом, интеграл от любой элементарной дроби находится в явном виде и является элементарной функцией.

29.2. Общий случай. Любую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а всякая правильная рациональная дробь раскладывается в сумму элементарных рациональных дробей (см. п. 3.5), поэтому задача интегрирования рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов и элементарных рациональных дробей, т.е. функций, от которых мы уже умеем вычислять интегралы. Имеет место следующая

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором ее знаменатель не обращается в нуль, существует и выражается через элементарные функции, являющиеся линейной комбинацией композиций рациональных дробей, логарифмов и арктангенсов.*

▷ Для доказательства достаточно, поделив числитель на знаменатель, данную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представить в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ и $R(x)$ – многочлены, причем либо $R(x)$ – нулевой многочлен, либо его степень меньше степени $Q(x)$, т.е. $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Разложив ее, согласно теореме 2 из п. 3.5, на элементарные, получим, что всякая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и конечного числа элементарных рациональных дробей. Интеграл от каждого слагаемого этой суммы (см. пп. 28.3 и 29.1) имеет вид, указанный в теореме. ◁

Следует отметить, что при применении описанного метода интегрирования рациональных дробей на практике он приводит к окончательному результату, т.е. к элементарной функции, только в том случае, когда удается найти все корни знаменателя интегрируемой рациональной дроби.

§ 30. Интегрирование некоторых иррациональностей

30.1. Рациональные функции от функций. Функции вида

$$P(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}$$

называются *многочленами*, а функции $\dfrac{P(u_1, u_2, \dots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}$, где P и Q – многочлены, – *рациональными дробями* (или *рациональными функциями*) от переменных $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Композиции рациональных дробей $\dfrac{P(u_1, u_2, \dots, u_n)}{Q(u_1, u_2, \dots, u_n)}$ с функциями $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x), \dots, u_n = f_n(x)$, т.е. функции вида

$$\frac{P(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))}{Q(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))},$$

называются рациональными функциями от функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ и обозначаются $R(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Например, $R(\sin x, \cos x) \equiv \dfrac{\sin^2 x + \cos x}{\cos^2 x - \sin x}$ – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, а $R(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}) \equiv \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$ – рациональная функция от $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$.

30.2. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$. Рассмотрим интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx.$$

Будем предполагать, что числа $r_1, \dots, r_n$ рациональны и записаны с одним и тем же знаменателем: $r_i = \dfrac{p_i}{m}$, m – натуральное число, p_i – целые,

$i = 1, 2, \ldots, n$, и что определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ не равен 0. Если бы $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, то существовали бы такие числа λ, μ, что $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ и $\lambda a + \mu c = 0$, $\lambda b + \mu d = 0$, а тогда, например, при $\lambda \neq 0$ имело бы место равенство

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda(cx+d)} = \frac{-\mu cx - \mu d}{\lambda(cx+d)} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

и, следовательно, функция $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$ была бы просто рациональной функцией.

Сделаем в рассматриваемом интеграле замену переменного

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{30.1}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \overset{\text{def}}{=} \rho(t). \tag{30.2}$$

Здесь $\rho(t)$ – рациональная функция, поэтому $\rho'(t)$ – также рациональная функция. Поскольку

$$dx = \rho'(t)dt, \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_j} \underset{(30.1)}{=} (t^m)^{p_j/m} = t^{p_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx =$$

$$= \int R(\rho(t), t^{p_1}, \ldots, t^{p_n})\rho'(t)dt = \int R^*(t)dt,$$

где $R^*(t) = R(\rho(t), t^{p_1}, \ldots, t^{p_n})\rho'(t)$ – рациональная функция.

Таким образом, замена переменного (30.1) сводит интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx \tag{30.3}$$

к интегралу от рациональной функции.

К рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$$\int R(x, (ax+b)^{r_1}, \ldots, (ax+b)^{r_n})dx, \quad a \neq 0,$$

в частности интегралы $\int R(x, x^{r_1}, \ldots, x^{r_n})dx$.

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Сделаем, согласно формуле (30.1), замену переменного $t^2 = x$, $t > 0$, откуда $dx = 2tdt$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t}\, dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t}\right) =$$

$$= 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})) + C.$$

К интегралам вида (30.3) иногда удается свести интегралы других типов, например интегралы вида $\int R(x, \sqrt{x^2+px+q})dx$, когда квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет действительные корни. В самом деле, если $x^2 + px + q = (x-a)(x-b)$, то

$$R(x, \sqrt{x^2+px+q}) = R(x, \sqrt{(x-a)(x-b)}) =$$

$$= R\left(x, |x-b|\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\right) = R_1\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/2}\right),$$

где R_1 — рациональная функция. Поэтому

$$\int R(x, \sqrt{x^2+px+q})dx = \int R_1\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/2}\right)dx$$

и в правой части получился интеграл типа (30.3).

30.3*. Интегралы от дифференциального бинома. Рассмотрим интеграл вида

$$\int (a+bx^\beta)^\alpha x^\gamma dx; \tag{30.4}$$

его подынтегральное выражение называется *дифференциальным биномом*. Будем рассматривать случаи, когда α, β и γ являются рациональными, а a и b — произвольными действительными числами.

Сделаем в интеграле (30.4) замену переменного

$$x = t^{1/\beta}, \tag{30.5}$$

тогда $dx = \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt$ и, следовательно,

$$\int (a+bx^\beta)^\alpha x^\gamma dx = \frac{1}{\beta} \int (a+bt)^\alpha t^{\frac{\gamma+1}{\beta}-1} dt. \tag{30.6}$$

Таким образом, интеграл (30.4) с помощью подстановки (30.5) сводится к интегралу вида

$$\int (a+bt)^\alpha t^\lambda dt, \tag{30.7}$$

где α и λ — рациональные числа,

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{\beta} - 1.$$

Рассмотрим три случая.

1. α — целое число. Пусть $\lambda = m/n$, где m и $n > 0$ — целые числа. Согласно результатам п. 30.1 подстановки $u = t^{1/n}$ сводит интеграл (30.7) к интегралу от рациональной дроби.

2. λ — целое число. Пусть теперь $\alpha = m/n$, где m и $n > 0$ — целые числа. Тогда, согласно тому же п. 30.1, интеграл (30.7) приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $u = (a + bt)^{1/n}$.

3. $\alpha + \lambda$ — целое число. Пусть, как и выше, $\alpha = m/n$, m и $n > 0$ — целые числа. Имеем

$$\int (a+bt)^{\alpha} t^{\lambda} dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{\alpha} t^{\alpha+\lambda} dt.$$

Снова получился интеграл типа, рассмотренного в п. 30.1: подстановка $u = \left(\frac{a+bt}{t}\right)^{1/n}$ сводит его к интегралу от рациональной функции.

Итак, в трех случаях, когда α, λ или $\alpha + \lambda$ являются целыми числами, интеграл (30.7) сводится к интегралу от рациональных функций. Поэтому, если хотя бы одно из чисел α, $\frac{\gamma+1}{\beta}$ или $\frac{\gamma+1}{\beta} + \alpha$ в первоначальном интеграле (30.4) является целым числом, то этот интеграл сводится к интегралу от рациональных функций и, следовательно, выражается через элементарные функции.

Русский математик П.Л. Чебышев*) показал, что ни в каком другом случае интеграл (30.4) не выражается через элементарные функции.

§ 31. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

31.1. Интегралы $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

Интеграл

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

сводится подстановкой

$$u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad -\pi < x < \pi, \tag{31.1}$$

*) П.Л. Чебышев (1821–1894) — русский математик.

к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u,$$

$$dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2},$$

т.е. получился интеграл от рациональной функции.

При вычислении интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x)dx$ часто оказываются полезными также и подстановки

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x. \tag{31.2}$$

В ряде случаев при интегрировании с помощью этих подстановок требуется провести меньше вычислений, чем при интегрировании с помощью подстановки (31.1).

Примеры. 1. Применим подстановку (31.1) для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{1-\sin x}$. Имеем

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = 2\int \frac{du}{\left(1 - \frac{2u}{1+u^2}\right)(1+u^2)} =$$

$$= 2\int \frac{du}{(1-u)^2} = \frac{2}{1-u} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

2. Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ применим подстановку $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \int \frac{1}{\cos^4 x} d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) =$$

$$= \int (1 + u^2)^2 du = \int (1 + 2u^2 + u^4) du =$$

$$= u + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \operatorname{tg} x + \frac{2\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

31.2. Интегралы $\int \sin^m x \cos^n x dx$. В случае, когда m и n – рациональные числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ подстановкой $u = \sin x$ или $v = \cos x$ сводится к интегралу от иррациональной функции, а именно к интегралу от дифференциального бинома (п. 30.3*).

В самом деле, если, например, $u = \sin x$, то

$$dx = \frac{du}{\cos x} = (1 - u^2)^{-1/2} du$$

и, следовательно,

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int u^m (1 - u^2)^{(n-1)/2} du,$$

т.е. действительно получился интеграл от дифференциального бинома и, таким образом, выражается ли он через элементарные функции, зависит от того, какие при этом получились показатели степеней (см. п. 30.3*).

В случае, когда m и n – целые числа, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x dx$ относится к типу интегралов, рассмотренных в предыдущем пункте, и для его вычисления целесообразно использовать подстановки (31.2). Например,

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} d\cos x = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} d\cos x \underset{u = \cos x}{=}$$

$$\underset{u = \cos x}{=} -\int \frac{1 - u^2}{u^2} du = \int du - \int \frac{du}{u^2} = u + \frac{1}{u} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

Если $m = 2k + 1$ и $n = 2l + 1$ – нечетные числа, то полезна подстановка $t = \cos 2x$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^{2l+1} x dx = \frac{1}{2} \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{4} \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^l d\cos 2x =$$

$$= -\frac{1}{2^{k+l+2}} \int (1 - t)^k (1 + t)^l dt,$$

т.е. получился интеграл от рациональной дроби (k и l могут быть отрицательными).

Если m и n — четные числа, то полезна подстановка $u = \operatorname{tg} x$ — см. пример 2 в п. 31.1.

Если оба показателя m и n — неотрицательные и четные, то, применив формулы

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

получим интеграл того же типа, но с меньшими показателями, например,

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Отметим, что методами, аналогичными методам, описанным в этом пункте, берутся интегралы вида $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch}^n x\,dx$.

31.3. Интегралы $\int \sin\alpha x \cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x\,dx$. Интегралы $\int \sin\alpha x \cos\beta x\,dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x\,dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x\,dx$ вычисляются, если их подынтегральные выражения преобразовать по формулам

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x].$$

Например,

$$\int \sin x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x + C.$$

31.4. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляющиеся с помощью интегрирования по частям. К интегралам от трансцендентных функций, вычисляющимся с помощью интегрирования по частям, относится много разнообразных интегралов, например,

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx, \quad \int x^n\cos\alpha x\,dx,$$

$$\int x^n\sin\alpha x\,dx, \quad \int x^n e^{\alpha x}\,dx, \quad \int x^n\arcsin x\,dx,$$

$$\int x^n\arccos x\,dx, \quad \int x^n\operatorname{arctg} x\,dx, \quad \int x^n\operatorname{arcctg} x\,dx, \quad \int x^n\ln x\,dx.$$

Здесь везде n — целое неотрицательное число.

Для вычисления интегралов $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ и $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$ следует их дважды проинтегрировать по частям – в результате для них получится линейное уравнение, из которого они сразу находятся. Например,

$$I = \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = -\frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x} d\cos\beta x =$$
$$= -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx =$$
$$= -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\int e^{\alpha x} d\sin\beta x =$$
$$= -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx\right) =$$
$$= \frac{(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I;$$

отсюда

$$I = \frac{\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha x} + C.$$

В интегралах

$$\int x^n\cos\alpha x dx, \quad \int x^n\sin\alpha x dx, \quad \int x^n e^{\alpha x} dx$$

после однократного интегрирования по частям получаются интегралы того же типа, но с меньшим показателем степени.

Рассмотрим пример:

$$\int x\sin x dx = -\int x d\cos x =$$
$$= -x\cos x + \int\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

В интегралах

$$\int x^n\arcsin x dx, \quad \int x^n\arccos x dx, \quad \int x^n\operatorname{arctg} x dx,$$
$$\int x^n\operatorname{arcctg} x dx, \quad \int x^n\ln x dx$$

в результате однократного интегрирования по частям пропадает трансцендентная функция, причем в первых двух получается интеграл от иррациональной функции, выражающийся через элементарные функции, а в трех последних – интеграл от рациональной функции и, следовательно, также выражающийся через элементарные функции. Например,

$$\int\arcsin x dx = x\arcsin x - \int\frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} =$$
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int(1 - x^2)^{-1/2} d(1 - x^2) = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

В заключение подчеркнем, что далеко не всякий интеграл от элементарной функции выражается через элементарные функции. Среди таких интегралов встречаются интегралы, которые находят большое применение в различных разделах математики. К числу их относятся, например, вероятностный интеграл $\int e^{-x^2}dx$, интегральный логарифм $\int \frac{dx}{\ln x}$, интегральный синус $\int \frac{\sin x}{x}dx$.

§ 32. Определенный интеграл

32.1. Определенный интеграл Римана*). Напомним, что множество $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ точек отрезка $[a, b]$ таких, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k_\tau - 1} < x_{k_\tau} = b,$$

называется *разбиением отрезка* $[a, b]$, $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$.

Точки x_k называются *точками разбиения* τ, отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ — *отрезками разбиения* τ; их длины обозначаются Δx_k, т.е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, а число

$$|\tau| \overset{\text{def}}{=} \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_{k_\tau}\}$$

называется *мелкостью разбиения* τ.

Разбиение $\tau^* = \{x_k^*\}_{k=0}^{k=k_{\tau^*}}$ называется *разбиением, вписанным в разбиение* τ, если каждый отрезок $[x_{k-1}^*, x_k^*]$ разбиения τ^* содержится в некотором отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения τ. Это, как легко видеть, равносильно тому, что каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ^*. Иначе говоря, если τ^* получается из τ добавлением новых точек.

Разбиение τ^*, вписанное в разбиение τ, называют также разбиением, *следующим за разбиением* τ, и пишут $\tau^* \succ \tau$. В этом случае говорят также, что разбиение τ *предшествует разбиению* τ^*, и пишут $\tau \prec \tau^*$. Существенными являются следующие два свойства разбиений отрезка:

1°. *Если $\tau \prec \tau'$, а $\tau' \prec \tau''$, то $\tau \prec \tau''$.*

$\triangleright$ Действительно, если каждый отрезок разбиения τ'' содержится в некотором отрезке разбиения τ', а каждый отрезок разбиения τ' содержится в некотором отрезке разбиения τ, то каждый отрезок разбиения τ'' содержится в соответствующем отрезке разбиения τ. $\triangleleft$

2°. *Для любых разбиений τ' и τ'' существует такое разбиение τ, что $\tau \succ \tau'$ и $\tau \succ \tau''$.*

$\triangleright$ В самом деле, таким разбиением является, например, разбиение, состоящее из всех точек обоих разбиений τ' и τ''. $\triangleleft$

---

*) Б. Риман (1826–1866) — немецкий математик.

Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, $a < b$, и $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — некоторое разбиение этого отрезка. Всякая сумма σ_τ вида

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k],$$

$$k = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

называется *интегральной суммой Римана функции* f.

В случае, если функция f неотрицательна, то интегральная сумма σ_τ равна площади фигуры, составленной из прямоугольников с основанием $[x_{k-1}, x_k]$ и высотой длины $f(\xi_k)$ (рис. 115).

Определение 1. *Функция f называется* ***интегрируемой по Риману на отрезке*** $[a, b]$, *если существует такое число I, что для любой последовательности разбиений $\tau_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=0}^{k=k_{\tau_n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, отрезка $[a, b]$ мелкостей, стремящихся к нулю при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, и при любом выборе точек*

$$\xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}], \quad k = 1, 2, \ldots, k_{\tau_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

существует предел интегральных сумм $\sigma_{\tau_n}(f;\ \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_{\tau_n}}^{(n)})$ и он равен I:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_{\tau_n}} f(\xi_k^{(n)})\,\Delta x_k^{(n)} = I.$$

Здесь $\Delta x_k^{(n)} = x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, k_{\tau_n}$, $n = 1, 2, \ldots$

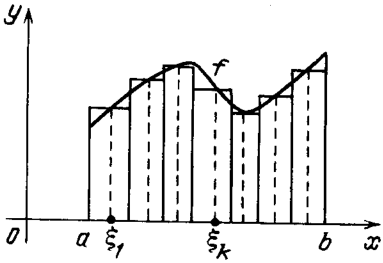


Рис. 115

Число I называется ***интегралом Римана от функции*** f *на отрезке $[a, b]$ и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Можно сформулировать определение интеграла Римана и не используя понятия предела последовательности, а, как говорят, "на языке ϵ-δ".

О п р е д е л е н и е 2. *Число I называется* **и н т е г р а л о м Р и м а н а о т ф у н к ц и и** *f на отрезке $[a, b]$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каково бы ни было разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$, мелкость которого меньше δ: $|\tau| < \delta$, и каковы бы ни были точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, выполняется неравенство*

$$|\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}) - I| < \epsilon.$$

Аналогично равносильности определений предела функции в терминах последовательностей и в терминах окрестностей доказывается и равносильность определений 1 и 2 интеграла Римана. Это рекомендуется читателю проделать самостоятельно.

В дальнейшем для краткости вместо "функция, интегрируемая по Риману" будем говорить "интегрируемая функция", а вместо "интеграл Римана" – просто "интеграл".

Дополним определение интеграла следующими соглашениями.

Если функция f задана в точке $x = a$, то по определению

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то положим

$$\int_b^a f(x)dx \overset{\text{def}}{=} -\int_a^b f(x)dx.$$

32.2. Ограниченность интегрируемых функций. Изучение определенного интеграла начнем с исследования необходимых, а затем и достаточных условий интегрируемости функций.

Т е о р е м а 1. *Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем.*

$\triangleright$ Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

Зафиксируем какое-либо $\epsilon > 0$, например $\epsilon = 1$. Согласно определению 2 интеграла существует такое $\delta > 0$, что для любой интегральной суммы σ_τ, соответствующей разбиению τ мелкости $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство $|\sigma_\tau - I| < 1$, а следовательно, и неравенство

$$I - 1 < \sigma_\tau < I + 1, \tag{32.1}$$

т.е. множество $\{\sigma_\tau\}$ значений интегральных сумм σ_τ, $|\tau| < \delta$, функции f ограничено.

Допустим теперь, что существует функция f, интегрируемая на некотором отрезке $[a, b]$, но неограниченная на этом отрезке. Возьмем произвольное разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$. Из того, что функция f неограничена на отрезке $[a, b]$, следует, что она неограничена и по крайней мере на одном из отрезков разбиения τ. Пусть для определенности функция f неограничена на отрезке $[x_0, x_1]$. Из ее неограниченности на этом отрезке следует, что для любого числа n на нем существует такая точка, обозначим ее $\xi_1^{(n)}$, что

$$|f(\xi_1^{(n)})| > n, \qquad \xi_1^{(n)} \in [x_0, x_1], \; n = 1, 2, \ldots \tag{32.2}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_1^{(n)}) = \infty. \tag{32.3}$$

Зафиксируем какие-либо точки ξ_k в остальных отрезках разбиения τ:

$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \qquad k = 2, 3, \ldots, k_\tau.$

Тогда сумма

$$\sum_{k=2}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{32.4}$$

будет иметь вполне определенное значение. Добавив к этой сумме слагаемое $f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1$, получим интегральную сумму

$$\sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_k),$$

причем в силу условия (32.3) и постоянства суммы (32.4) будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[f(\xi_1^{(n)})\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k\right] = \infty,$$

а следовательно, для любого разбиения τ множество значений интегральных сумм $\sigma_\tau(f; \xi_1^{(n)}, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau})$ неограничено. Поэтому неограничено и множество $\{\sigma_\tau\}$, $|\tau| < \delta$ (число $\delta > 0$ было выбрано выше), что противоречит неравенству (32.1). ◁

З а м е ч а н и е. Условие ограниченности функции, являясь необходимым условием интегрируемости функции по Риману, не является достаточным условием для этого. В самом деле, рассмотрим, например, функцию Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Каковы бы ни были отрезок $[a, b]$ и его разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, выбрав все точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ рациональными, в силу условия $f(\xi_k) = 1$, $k =$

$= 1, 2, \ldots, k_\tau$, получим

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = b - a,$$

а выбрав точки ξ_k иррациональными, в силу условия $f(\xi_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, будем иметь

$$\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}) = \sum_{k=1}^{k_\tau} 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

Поэтому интегральные суммы σ_τ функции Дирихле заведомо не имеют предела при $|\tau| \to 0$.

Тем самым функция Дирихле дает пример функции, ограниченной на любом отрезке, но неинтегрируемой на нем.

32.3. Верхние и нижние суммы Дарбу*). Пусть функция f определена на отрезке $[a, b]$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение этого отрезка, $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Положим

$$M_k = \sup_{x \in \Delta_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x), \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau, \tag{32.5}$$

$$S_\tau = S_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k \Delta x_k, \quad s_\tau = s_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k. \tag{32.6}$$

Сумма S_τ называется *верхней*, а сумма s_τ – *нижней суммой Дарбу функции* f. Очевидно, что в случае, когда функция f ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани (32.5) конечны, и потому суммы Дарбу (32.6) при любом разбиении принимают конечные значения. В дальнейшем будем предполагать, что функция f ограничена – это естественно, так как нас будут интересовать свойства интеграла от функции f, а он, согласно теореме 1, существует только в том случае, когда функция ограничена.

Из того, что выполняется неравенство $m_k \leqslant M_k$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, следует, что при любом разбиении τ выполняется неравенство

$$s_\tau \leqslant S_\tau. \tag{32.7}$$

Очевидно также, что в силу определения (32.5) чисел m_k и M_k для любых $\xi_k \in \Delta_k$ имеет место неравенство

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k, \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau.$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \equiv \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}) \leqslant S_\tau. \tag{32.8}$$

---

*) Г. Дарбу (1842–1917) – французский математик.

Отметим еще следующие свойства сумм Дарбу:

1°. *Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней:*

$$s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2} \tag{32.9}$$

(*τ_1 и τ_2 – разбиения отрезка* $[a, b]$).

▷ Пусть сначала $\tau^* \succ \tau$, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=1}^{j=j_{\tau^*}}$ – разбиения отрезка $[a, b]$,

$$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k],\ \Delta_j^* = [x_{j-1}^*, x_j^*],$$

$$m_k = \inf_{x \in \Delta_k} f(x),\ k = 1, 2, \ldots, k_\tau,\ m_j^* = \inf_{x \in \Delta_j^*} f(x),\quad j = 1, 2, \ldots, j_{\tau^*}.$$

Условие $\tau^* \succ \tau$ означает, что каждый отрезок Δ_k разбиения τ является объединением некоторых отрезков разбиения τ^*. Обозначим эти отрезки $\Delta_{j_k}^*$, тогда

$$\Delta_k = \bigcup_{j_k} \Delta_{j_k}^*,$$

где суммирование ведется по всем таким индексам j_k, что $\Delta_{j_k}^* \subset \Delta_k$. Отсюда следует, что

$$\Delta x_k = \sum_{j_k} \Delta x_{j_k}^*. \tag{32.10}$$

Кроме того, выполняются неравенства

$$m_k \leqslant m_{j_k}^*, \tag{32.11}$$

так как при переходе от отрезка Δ_k к содержащемуся в нем отрезку $\Delta_{j_k}^*$ нижняя грань значений функции может только увеличиться.

Теперь легко доказать неравенство

$$s_\tau \leqslant s_{\tau^*}. \tag{32.12}$$

В самом деле,

$$s_\tau = \sum_k m_k \Delta x_k \underset{(32.10)}{=} \sum_k m_k \sum_{j_k} \Delta x_{j_k}^* \underset{(32.11)}{\leqslant} \sum_k \sum_{j_k} m_{j_k}^* \Delta x_{j_k}^* =$$

$$= \sum_j m_j^* \Delta x_j^* = s_{\tau^*}.$$

Аналогично доказывается неравенство

$$S_{\tau^*} \leqslant S_\tau. \tag{32.13}$$

Пусть теперь τ_1 и τ_2 – два произвольных разбиения отрезка $[a, b]$. Возьмем какое-либо разбиение τ, вписанное в разбиения τ_1 и τ_2, т.е. $\tau \succ \tau_1$ и $\tau \succ \tau_2$. Тогда неравенство (32.9) вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$s_{\tau_1} \underset{(32.12)}{\leqslant} s_\tau \underset{(32.7)}{\leqslant} S_\tau \underset{(32.13)}{\leqslant} S_{\tau_2}. \triangleleft$$

2°. *Нижняя (верхняя) сумма Дарбу является нижней (верхней) гранью интегральных сумм Римана, соответствующих данному разбиению:*

$$s_\tau = \inf_{\xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}), \tag{32.14}$$

$$S_\tau = \sup_{\xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}). \tag{32.15}$$

$\triangleright$ Пусть $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$. Тогда в силу того, что нижняя грань арифметической суммы числовых множеств равна сумме нижних граней этих множеств, и того, что положительный постоянный множитель можно внести под знак нижней грани (п. 4.3*), получим

$$s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} \inf_{\xi_k \in \Delta_k} f(\xi_k) \Delta x_k =$$

$$= \inf_{\substack{\xi_k \in \Delta_k \\ k=1, 2, \ldots, k_\tau}} \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k) \Delta x_k = \inf_{\substack{\xi_k \in \Delta_k \\ k=1, 2, \ldots, k_\tau}} \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}),$$

т.е. равенство (32.14) доказано. Аналогично доказывается равенство (32.15). $\triangleleft$

3°. *Имеет место равенство*

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k, \tag{32.16}$$

где $\omega_k(f)$ — *колебание функции* f *на отрезке* $[x_{k-1}, x_k]$ *разбиения* τ, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$ (см. п. 21.3).

$\triangleright$ Формула (32.16) следует из того, что разность верхней и нижней граней двух множеств равна верхней грани разности этих множеств (п. 4.3*). В самом деле, так как

$$M_k - m_k \underset{(32.5)}{=} \sup_{x \in \Delta_k} f(x) - \inf_{x \in \Delta_k} f(x) =$$

$$= \sup_{x', x \in \Delta_k} |f(x') - f(x)| = \omega_k(f), \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

то

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k. \triangleleft$$

При заданной на отрезке $[a, b]$ ограниченной функции f верхние и нижние суммы Дарбу являются функциями, заданными на множестве $\{\tau\}$ всех разбиений отрезка $[a, b]$. Для таких функций можно определить их предел по аналогии с понятием предела интегральных сумм Римана.

Пусть $F(\tau)$ – функция, определенная на множестве $\{\tau\}$ всех разбиений τ отрезка $[a, b]$.

Определение 3. *Число A назовем* **пределом функции** *$F(\tau)$* **при** *$|\tau| \to 0$, если для любой последовательности $\{\tau_n\}$ разбиений τ_n отрезка $[a, b]$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |\tau_n| = 0$, имеет место*

$$\lim_{n \to \infty} F(\tau_n) = A.$$

Если A – предел функции $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$, то пишут

$$\lim_{|\tau| \to 0} F(\tau) = A. \tag{32.17}$$

Определение предела (32.17) можно сформулировать и "на языке ϵ-δ".

Определение 4. *Число A называется* **пределом функции** *$F(\tau)$* **при** *$|\tau| \to 0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ отрезка $[a, b]$, имеющих мелкость $|\tau| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|F(\tau) - A| < \epsilon.$$

Поскольку определение предела (32.17) можно, например, сформулировать в терминах пределов последовательностей, то на пределы (32.17) переносятся обычные свойства пределов, в частности возможность перехода к пределу (32.17) (когда он существует) в неравенствах.

В смысле предела (32.17) мы и будем в дальнейшем говорить о пределах нижних и верхних сумм Дарбу: $\lim\limits_{|\tau| \to 0} s_\tau$ и $\lim\limits_{|\tau| \to 0} S_\tau$.

32.4. Нижний и верхний интегралы. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим верхнюю грань I_* всевозможных ее нижних сумм Дарбу и нижнюю грань I^* всевозможных верхних сумм Дарбу:

$$I_* = \sup_\tau s_\tau, \quad I^* = \inf_\tau S_\tau. \tag{32.18}$$

Число I_* называется *нижним*, а число I^* – *верхним интегралом функции f.* Из неравенства (32.9) следует, что если функция f ограничена на отрезке $[a, b]$, то ее нижний и верхний интегралы конечны и для них выполняется неравенство

$$I_* \leqslant I^*. \tag{32.19}$$

$\triangleright$ В самом деле, перейдя в левой части неравенства (32.9) к верхней грани по разбиениям τ_1, получим, что для любого разбиения τ_2 выполняется неравенство $I_* \leqslant S_{\tau_2}$. Перейдя здесь к нижней грани по τ_2, получим $I_* \leqslant I^*$. $\triangleleft$

Интегралы I_* и I^* понадобятся нам ниже при доказательстве критерия интегрируемости функции.

32.5. Необходимые и достаточные условия интегрируемости функций.

Теорема 2. *Для того чтобы ограниченная на некотором отрезке функция была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу s_τ и S_τ этой функции удовлетворяли условию*

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{32.20}$$

Следствие 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\, \Delta x_k = 0, \tag{32.21}$$

где $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, а $\omega_k(f)$ – колебание функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$.

Следствие 2. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и s_τ, S_τ – ее суммы Дарбу, то*

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{32.22}$$

$\triangleright$ Необходимость. Пусть ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f интегрируема на этом отрезке и

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Тогда $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = I$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$, имеющее мелкость $|\tau| < \delta$, и точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, для интегральной суммы $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f;\ \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau})$, выполняется неравенство $|\sigma_\tau - I| < \epsilon$, а следовательно, и неравенство

$$I - \epsilon < \sigma_\tau < I + \epsilon. \tag{32.23}$$

Переходя в неравенстве (32.23) к нижней и верхней граням относительно точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k_\tau}$, в силу свойств сумм Дарбу (32.14) и (32.15) получим

$$I - \epsilon \leqslant s_\tau \leqslant S_\tau \leqslant I + \epsilon.$$

Таким образом, если $|\tau| < \delta$, то $0 \leqslant S_\tau - s_\tau \leqslant 2\epsilon$. Отсюда сразу и следует, что

$$\lim_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и для ее сумм Дарбу выполняется условие (32.20). Из определения нижнего I_* и верхнего I^* интегралов (см. п. 32.4) и неравенства (32.19) имеем

$$s_\tau \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_\tau. \tag{32.24}$$

Поэтому $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S_\tau - s_\tau$. Отсюда в силу условия (32.20) следует, что $I^* - I_* = 0$. Обозначим общее значение нижнего и верхнего интегралов через I, т.е. $I = I_* = I^*$. Из (32.24) будем иметь $s_\tau \leqslant I \leqslant S_\tau$, а поэтому

$$0 \leqslant I - s_\tau \leqslant S_\tau - s_\tau, \qquad 0 \leqslant S_\tau - I \leqslant S_\tau - s_\tau.$$

В силу этих неравенств согласно условию (32.20) имеем

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau = I. \tag{32.25}$$

Поскольку же для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ и для любого выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, выполняется неравенство (см. (32.8))

$$s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau, \qquad \sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{k_\tau}), \tag{32.26}$$

то из (32.25) и (32.26) следует, что

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = I.$$

Это и означает интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$. $\lhd$

Следствие 1 непосредственно вытекает из свойства (32.16) сумм Дарбу.: условие (32.21) равносильно, в силу указанного свойства, условию (32.20).

Докажем следствие 2.

$\rhd$ Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме 2 выполняется условие (32.20). При доказательстве же достаточности выполнения условия (32.20) для интегрируемости функции было показано, что из выполнения этого условия следует справедливость соотношения (32.25), совпадающего в силу равенства

$$I = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)\,dx$$

с соотношением (32.22). $\lhd$

32.6. Интегрируемость непрерывных и монотонных функций.

Т е о р е м а 3. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.*

$\rhd$ Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она, во-первых, ограничена на нем, а во-вторых, равномерно непрерывна. Последнее означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$ таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \epsilon$.

Возьмем для отрезка $[a, b]$ какое-либо разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ мелкости $|\tau| < \delta$. Тогда для любых двух точек x и x', принадлежащих одному и тому же отрезку разбиения τ,

$$x \in [x_{k-1}, x_k], \quad x' \in [x_{k-1}, x_k],$$

имеет место неравенство $|x' - x| \leqslant x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leqslant |\tau| < \delta$, а поэтому и неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon.$$

Отсюда следует, что колебание $\omega_k(f)$ функции f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_k(f) = \sup_{x,\, x' \in [x_{k-1},\, x_k]} |f(x') - f(x)| \leqslant \epsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau. \tag{32.27}$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\, \Delta x_k \underset{(32.27)}{\leqslant} \epsilon \sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = \epsilon(b - a). \tag{32.28}$$

Поскольку ϵ было произвольным положительным числом, то неравенство (32.28) означает, что

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\, \Delta x_k = 0,$$

и в силу следствия 1 теоремы 2 функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. $\lhd$

Т е о р е м а 4. *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.*

$\rhd$ Пусть для определенности функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда, в частности, для любого $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$$

и, следовательно, функция f ограничена на отрезке $[a, b]$. Очевидно также, что в силу возрастания функции f для любого разбиения $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \\ M_k &= \sup_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) = f(x_k). \end{aligned} \tag{32.29}$$

Поэтому, заметив, что

$$x_k - x_{k-1} = \Delta x_k \leqslant |\tau|, \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau, \tag{32.30}$$

и что $x_0 = a$, $x_{k_\tau} = b$, получим

$$S_\tau - s_\tau \underset{(32.29)}{=} \sum_{k=1}^{k_\tau} (M_k - m_k)\,\Delta x_k \underset{(32.29)}{=}$$

$$\underset{(32.29)}{=} \sum_{k=1}^{k_\tau} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\,\Delta x_k \underset{(32.30)}{\leqslant}$$

$$\underset{(32.30)}{\leqslant} [f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \ldots$$

$$\ldots + (f(x_{k_\tau}) - f(x_{k_\tau - 1}))]\ |\tau| = [f(b) - f(a)]\ |\tau|.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{|\tau| \to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0$, и потому, согласно теореме 2, функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$. ◁

З а м е ч а н и е. Отметим, что монотонные на отрезке функции могут быть и разрывными. Так, например, функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ монотонна и разрывна на любом отрезке, содержащем точку $x = 0$. Поскольку же всякая монотонная функция, согласно теореме 4, интегрируема, то отсюда следует, что существуют разрывные интегрируемые функции.

§ 33. Свойства интегрируемых функций

33.1. Основные свойства определенного интеграла. Перечислим свойства определенного интеграла, вытекающие непосредственно из того, что он является пределом интегральных сумм.

1°. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

▷ В данном случае подынтегральная функция тождественно равна 1, и потому при любом разбиении $\tau = \{x_j\}_{j=0}^{j=j_\tau}$ все интегральные суммы Римана равны $b - a$,

$$\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} \Delta x_j = b - a,$$

следовательно,

$$\int\limits_a^b dx = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = b - a. \ ◁$$

2°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[a^*, b^*] \subset [a, b]$.*

$\triangleright$ Из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ следует ее ограниченность на нем, а следовательно, и на отрезке $[a^*, b^*]$. Если $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{j=j_{\tau^*}}$ — какое-либо разбиение отрезка $[a^*, b^*]$, то всегда, добавив к нему соответствующее конечное множество точек, лежащих на отрезках $[a, b]$, но уже вне отрезка $[a^*, b^*]$, можно получить разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$, $k_\tau \geqslant j_{\tau^*}$, отрезка $[a, b]$ той же мелкости

$$|\tau| = |\tau^*|. \tag{33.1}$$

Обозначив посредством $\omega_k(f)$ и $\omega_j^*(f)$ колебания функции f соответственно на отрезках $[x_{k-1}, x_k]$ и $[x_{j-1}^*, x_j^*]$ и заметив, что $\sum\limits_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\,\Delta x_k$ отличается от $\sum\limits_{j=1}^{j_{\tau^*}} \omega_j^*(f)\,\Delta x_j^*$ на неотрицательные слагаемые вида $\omega_k(f)\,\Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta x_j^* = x_j^* - x_{j-1}^*$, получим

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{j_{\tau^*}} \omega_j^*(f)\,\Delta x_j^* \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\,\Delta x_k. \tag{33.2}$$

Из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$, согласно следствию 1 теоремы 2 из п. 32.5, вытекает, что

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{k=0}^{k_\tau} \omega_k(f)\Delta x_k = 0,$$

поэтому в силу (33.1) и (33.2)

$$\lim_{|\tau^*| \to 0} \sum_{j=1}^{j_{\tau^*}} \omega_j^*(f)\,\Delta x_j^* = 0,$$

а это, согласно тому же следствию теоремы 2 п. 32.5, и означает интегрируемость функции f на отрезке $[a^*, b^*]$. $\triangleleft$

3°. Аддитивность интеграла. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{33.3}$$

$\triangleright$ Если τ_a^c и τ_c^b — разбиения соответственно отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, то объединение этих разбиений $\tau = \tau_a^c \cup \tau_c^b$ является разбиением отрезка $[a, b]$, причем

$$|\tau_a^c| \leqslant |\tau|, \quad |\tau_c^b| \leqslant |\tau|. \tag{33.4}$$

Пусть $\sigma_{\tau_a^c}$ и $\sigma_{\tau_c^b}$ – какие-либо интегральные суммы Римана функции f, соответствующие разбиениям τ_a^c и τ_c^b; тогда

$$\sigma_\tau = \sigma_{\tau_a^c} + \sigma_{\tau_c^b} \tag{33.5}$$

– интегральная сумма Римана функции f на отрезке $[a, b]$.

Согласно свойству 2° из интегрируемости функции f на отрезке $[a, b]$ следует ее интегрируемость на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Следовательно, интегральные суммы σ_τ, $\sigma_{\tau_a^c}$ и $\sigma_{\tau_c^b}$ при условии, что мелкости разбиения τ, а следовательно, в силу (33.4) и мелкости разбиений τ_a^c и τ_c^b стремятся к нулю, имеют конечные пределы – интегралы от функции по указанным отрезкам:

$$\lim_{|\tau_a^c| \to 0} \sigma_{\tau_a^c} = \int_a^c f(x)\,dx, \qquad \lim_{|\tau_c^b| \to 0} \sigma_{\tau_c^b} = \int_c^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Поэтому, перейдя к пределу в равенстве (33.5) при условии $|\tau| \to 0$, получим формулу (33.3). $\lhd$

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что *если функция f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, $a < c < b$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, а тогда в силу уже доказанного имеет место формула* (33.3).

Из этого свойства интеграла и из теоремы 3 п. 32.6 следует интегрируемость так называемых кусочно непрерывных на отрезке функций.

Функция называется *кусочно непрерывной на отрезке*, если она имеет на нем только конечное множество точек разрыва, и притом только первого рода. На концах отрезка функция может быть не определена.

Таким образом, функция f кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$, если найдется такое разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ этого отрезка, что для всех $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$ существуют конечные пределы $f(x_{k-1} + 0)$ и $f(x_k - 0)$. В точке x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, k_\tau$, функция f может быть определена или не определена.

Если положить

$$f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x_{k-1} + 0) & \text{при} \quad x = x_{k-1}, \\ f(x) & \text{при} \quad x_{k-1} < x < x_k, \\ f(x_k - 0) & \text{при} \quad x = x_k, \end{cases}$$

то функция f_k непрерывна, а поэтому, согласно теореме 3 п. 32.6, и интегрируема на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$.

Оказывается, что отсюда следует интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$ (значения функции f в тех точках x_k, в которых она не определена, можно задавать произвольно: это не влияет ни на существование, ни на значение интеграла) и справедливость формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{k_\tau} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\,dx.$$

4°. Линейность интеграла. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то при любых $\lambda \in R$ и $\mu \in R$ функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{33.6}$$

$\triangleright$ Каковы бы ни были разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$ и точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, будем иметь

$$\sigma_\tau(\lambda f + \mu g) = \sum_{k=1}^{k_\tau} [\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k)]\,\Delta x_k =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \mu \sum_{k=1}^{k_\tau} g(\xi_k)\,\Delta x_k = \lambda\sigma_\tau(f) + \mu\sigma_\tau(g). \tag{33.7}$$

Поскольку при $|\tau| \to 0$ предел правой части этого равенства в силу интегрируемости функций f и g существует, то существует при этом условии и предел левой части:

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(\lambda f + \mu g),$$

что означает интегрируемость функции $\lambda f + \mu g$. Перейдя в равенстве (33.7) к пределу при $|\tau| \to 0$, получим формулу (33.6). $\triangleleft$

5°. Интегрируемость произведения интегрируемых функций. *Если функции f и g интегрируемы на некотором отрезке, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке.*

$\triangleright$ Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то они на нем ограничены, т.е. существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$|f(x)| \leqslant A, \qquad |g(x)| \leqslant A, \tag{33.8}$$

а следовательно, и $|f(x)\,g(x)| \leqslant A^2$, т.е. произведение fg ограничено на отрезке $[a, b]$. Проверим для него выполнимость критерия (32.21) интегрируемости функций. Из тождества

$$f(x')g(x') - f(x)g(x) = [f(x') - f(x)]\,g(x') + [g(x') - g(x)]\,f(x),$$

$$x \in [a, b], \qquad x' \in [a, b],$$

имеем

$$|f(x')g(x')-f(x)g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x')-f(x)|\ |g(x')|+|g(x')-g(x)|\ |f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant A[|f(x')-f(x)| + |g(x')-g(x)|]. \qquad (33.9)$$

Если $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, то, выбирая точки x и x' в одном и том же отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ этого разбиения и переходя в неравенстве (33.9) к верхним граням по всевозможным $x \in [x_{k-1}, x_k]$ и $x' \in [x_{k-1}, x_k]$, получим

$$\omega_k(fg) \leqslant A[\omega_k(f)+\omega_k(g)], \qquad k = 1, 2, \ldots, k_\tau;$$

здесь $\omega_k(\cdot)$, как обычно, – колебание соответствующей функции на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(fg)\,\Delta x_k \leqslant A\left[\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega(f)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(g)\,\Delta x_k\right]. \qquad (33.10)$$

В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ имеем (см. (32.21))

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega(f)\,\Delta x_k = \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(g)\,\Delta x_k = 0.$$

Поэтому из неравенства (33.10) следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(fg)\,\Delta x_k = 0,$$

откуда в силу того же критерия (32.21) и вытекает интегрируемость произведения fg. ◁

6°. Интегрирование неравенств. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на отрезке* $[a, b]$,

$$f(x) \geqslant 0, \qquad x \in [a, b], \qquad (33.11)$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0. \qquad (33.12)$$

▷ Из неравенства (33.11) следует, что для любой интегральной суммы σ_τ функции f выполняется неравенство

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geqslant 0,$$

откуда в пределе при $|\tau| \to 0$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau \geqslant 0. \lhd$$

Следствие. *Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и*

$$f(x) \geqslant g(x), \quad x \in [a, b], \tag{33.13}$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{33.14}$$

$\rhd$ Из неравенства (33.13) следует, что $f(x) - g(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \underset{(33.6)}{=} \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \underset{(33.12)}{\geqslant} 0,$$

что и означает выполнение неравенства (33.14) $\lhd$

7°. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой функция f непрерывна, и $f(x_0) >$ > 0, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

$\rhd$ Если функция f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$ и $f(x_0) > 0$, то существует такой отрезок $[\alpha, \beta]$, что

$$x_0 \in [\alpha, \beta] \subset [a, b], \quad \alpha \neq \beta,$$

и для всех точек $x \in [\alpha, \beta]$ выполняется неравенство (см. доказательство следствия из свойства 2° пределов функций – леммы о сохранении знака – в п. 6.7)

$$f(x) \geqslant \frac{f(x_0)}{2}, \tag{33.15}$$

а тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{(33.3)}{=} \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \underset{(33.12)}{\geqslant}$$

$$\underset{(33.12)}{\geqslant} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \underset{\substack{(33.14)\\(33.15)}}{\geqslant} \int_\alpha^\beta \frac{f(x_0)}{2}\,dx \underset{(33.16)}{=}$$

$$\underset{(33.16)}{=} \frac{f(x_0)}{2} \int_\alpha^\beta dx = \frac{1}{2} f(x_0)(\beta - \alpha) > 0. \lhd$$

8°. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем и*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{33.16}$$

$\triangleright$ Прежде всего из интегрируемости функции f следует ее ограниченность, а следовательно, и ограниченность функции $|f|$. Покажем, что для функции $|f|$ выполняется критерий интегрируемости (32.21).

Заметив, что для любых двух точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$\big|\, |f(x')| - |f(x)| \,\big| \leqslant |f(x') - f(x)|, \tag{33.17}$$

рассмотрим какое-либо разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$. Тогда, выбирая точки x и x' из одного и того же отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ этого разбиения, $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $x' \in [x_{k-1}, x_k]$, и переходя в обеих частях неравенства (33.17) к верхним граням, будем иметь

$$\omega_k(|f|) = \sup_{x,\, x' \in [x_{k-1}, x_k]} \big|\, |f(x')| - |f(x)| \,\big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,\, x' \in [x_{k-1}, x_k]} |f(x') - f(x)| = \omega_k(f),$$

где $\omega_k(|f|)$ и $\omega_k(f)$ — колебания соответственно функций $|f|$ и f на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$. Поэтому

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{k_\tau} \omega_k(|f|)\,\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\,\Delta x_k,$$

а поскольку, согласно уже упоминавшемуся критерию интегрируемости (32.21), для интегрируемой функции f выполняется условие

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f)\,\Delta x_k = 0,$$

то и

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(|f|)\,\Delta x_k = 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $|f|$.

Если теперь

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

т.е. $\sigma_\tau(f)$ — интегральная сумма Римана функции f, то

$$|\sigma_\tau(f)| = \left| \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\,\Delta x_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} |f(\xi_k)|\,\Delta x_k = \sigma_\tau(|f|), \tag{33.18}$$

где в правой части неравенства стоит интегральная сумма Римана функции $|f|$. Так как

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau(|f|) = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

то, перейдя в неравенстве (33.18) к пределу при $|\tau| \to 0$, получим

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \ \triangleleft$$

Заметим, что если не предполагать, что $a < b$ (см. п. 32.1), то вместо неравенства (33.16) следует писать

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)|\,dx \right|. \tag{33.19}$$

9°. Непрерывность интеграла. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функции*

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt, \tag{33.20}$$

$$G(x) \overset{\text{def}}{=} \int_x^b f(t)\,dt \tag{33.21}$$

непрерывны на этом отрезке.

Следствие. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad 0 < \epsilon < b - a. \tag{33.22}$$

$\triangleright$ Функция f, будучи интегрируемой на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем, поэтому существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c. \tag{33.23}$$

Представим интеграл $\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$ в виде суммы (см. (33.3)):

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dt \tag{33.24}$$

(отметим, что это равенство верно как при $\Delta x \geqslant 0$, так и при $\Delta x < 0$, лишь бы $x \in [a, b]$ и $x + \Delta x \in [a, b]$). Теперь видно, что приращение $\Delta F(x)$ функции $F(x)$ (см. (33.20)) можно записать в виде

$$\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x) \underset{(33.20)}{=}$$

$$\underset{(33.20)}{=} \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \underset{(33.24)}{=} \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt. \tag{33.25}$$

Поэтому

$$|\Delta F(x)| = |\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt| \underset{(33.19)}{\leqslant} |\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,dt| \underset{(33.23)}{\leqslant}$$

$$\underset{(33.23)}{\leqslant} c\,|\int\limits_x^{x+\Delta x} dt| = c\,|\Delta x|.$$

Отсюда, очевидно, сразу следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0$, т.е. непрерывность функции $F(x)$.

Непрерывность функции $G(x)$ следует из непрерывности функции $F(x)$. В самом деле, поскольку

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_x^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b f(t)\,dt,$$

т.е. $F(x) + G(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, то

$$G(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt - F(x), \tag{33.26}$$

а так как интеграл $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ – постоянная величина, то непрерывность функции F влечет за собой непрерывность функции G. $\lhd$

Свойство непрерывности функции F называется *непрерывность интеграла* $\int\limits_a^x f(t)\,dt$ *по верхнему пределу интегрирования,* соответственно свойство непрерывности функции G – *непрерывностью интеграла по нижнему пределу интегрирования.*

$\rhd$ Для того чтобы убедиться в справедливости равенства (33.22), выберем какую-либо точку $c \in (a, b)$, тогда, применяя свойство 9° к отрезкам $[a, c]$ и $[c, b]$, будем иметь

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f(x)\,dx \underset{(33.3)}{=}$$

$$\underset{(33.3)}{=} \lim_{\epsilon \to 0} [\int\limits_{a+\epsilon}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{b-\epsilon} f(x)\,dx] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{a+\epsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{c}^{b-\epsilon} f(x)\,dx \underset{\text{св. } 9^\circ}{=}$$

$$\underset{\text{св. } 9^\circ}{=} \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \underset{(33.3)}{=} \int\limits_a^b f(x)\,dx. \lhd$$

33.2. Интегральная теорема о среднем.

Теорема 1. *Пусть*

1) *функции* f *и* g *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$;

2) $m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a, b]$; $$\tag{33.27}$$

3) *функция* g *не меняет знака на* $[a, b]$.

Тогда существует такое число μ, $m \leqslant \mu \leqslant M$, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{33.28}$$

Следствие. *При дополнительном предположении о непрерывности функции* f *на отрезке* $[a, b]$ *на интервале* (a, b) *существует такая точка* ξ, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx, \quad a < \xi < b, \tag{33.29}$$

в частности, при $g(x) \equiv 1$ *на* $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \quad a < \xi < b$$

(рис. 116).

$\triangleright$ Умножив неравенство (33.27) на $g(x)$, получим, что для всех $x \in [a, b]$ в случае $g(x) \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x),$$

а в случае $g(x) \leqslant 0$ – неравенство

$$mg(x) \geqslant f(x)g(x) \geqslant Mg(x).$$

Интегрируя эти неравенства, будем иметь

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx, \tag{33.30}$$

или, соответственно,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \geqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{33.31}$$

Если

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0, \tag{33.32}$$

то как в первом, так и во втором случае

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0 \tag{33.33}$$

и, следовательно, равенство (33.28) верно при любом μ, так как обе его части, согласно (33.32) и (33.33), обращаются в нуль.

Если же $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, то при $g(x) \geqslant 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx > 0$, а при $g(x) \leqslant 0$ – соответственно $\int_a^b g(x)\,dx < 0$.

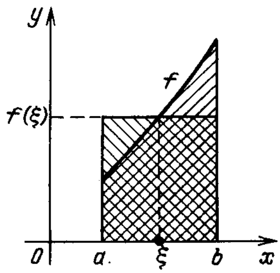


Рис. 116

Поделив обе части неравенств (33.30) и (33.31) на интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$, в обоих случаях получим одно и то же неравенство

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M. \tag{33.34}$$

Определим число μ равенством

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}, \tag{33.35}$$

тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx,$$

причем в силу (33.34) и (33.35) выполняется неравенство $m \leqslant \mu \leqslant M$. $\lhd$

Докажем следствие.

$\rhd$ Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, то в силу формулы (33.28)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0,$$

и поэтому равенство (33.29) имеет место при любом выборе точек $\xi \in (a, b)$.

Пусть теперь

$$\int_a^b g(x)\,dx \neq 0 \tag{33.36}$$

и для определенности $g(x) \geqslant 0$ во всех точках x отрезка $[a, b]$, а следовательно,

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0. \tag{33.37}$$

(Случай $g(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a, b]$ сводится к рассматриваемому заменой функции $g(x)$ на $-g(x)$: применив к неотрицательной функции $-g(x)$ формулу (33.29) и умножив обе части на -1, получим и в этом случае равенство (33.29).) При сделанных предположениях имеем

$$\int_a^b g(x)\,dx \underset{\substack{(33.36)\\(33.37)}}{>} 0. \tag{33.38}$$

Выберем теперь числа m и M специальным образом, именно,

$$m = \inf_{[a, b]} f(x), \quad M = \sup_{[a, b]} f(x).$$

Этот выбор m и M допустим, так как при нем, очевидно, выполняется условие (33.27). Согласно теореме число μ удовлетворяет неравенствам $m \leqslant \mu \leqslant M$, поэтому возможны три случая: $m < \mu < M$, $\mu = M$ и $\mu = m$.

Если $m < \mu < M$, то в силу теоремы Вейерштрасса о достижимости непрерывной на отрезке функцией своих наибольшего и наименьшего значений существуют такие точки $\alpha \in [a, b]$ и $\beta \in [a, b]$, что $f(\alpha) = m$, $f(\beta) = M$. Согласно же теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на интервале с концами α и β существует такая точка ξ, что $f(\xi) = \mu$. Очевидно, что $\xi \in (a, b)$.

Если же $\mu = M$, то равенство (33.28) примет вид

$$\int_a^b f(x) g(x)\,dx = M \int_a^b g(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b (M - f(x)) g(x)\,dx = 0. \tag{33.39}$$

Из неравенства (33.38), в силу следствия из свойства 9° определенного интеграла (см. п. 33.1), существует такое $\epsilon > 0$, что

$$\int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} g(x)\,dx > 0. \tag{33.40}$$

Если бы на интервале (a, b) не существовала точка ξ, в которой $f(\xi) = M$, то непрерывная функция $M - f(\xi)$ была бы положительной во всех точках отрезка $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, а следовательно, и в точке x_0, в которой она принимает наименьшее значение на этом отрезке, т.е. если

$$M - f(x_0) = \min_{[a + \epsilon,\, b - \epsilon]} (M - f(x)), \tag{33.41}$$

то

$$M - f(x_0) > 0. \tag{33.42}$$

Поэтому

$$\int_a^b (M - f(x)) g(x)\, dx \geqslant \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} (M - f(x)) g(x)\, dx \underset{(33.41)}{\geqslant}$$

$$\underset{(33.41)}{\geqslant} (M - f(x_0)) \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} g(x)\, dx \underset{\substack{(33.40)\\(33.42)}}{>} 0,$$

что противоречит равенству (33.39). А это означает, что на интервале (a, b) существует такая точка ξ, что $\mu = M = f(\xi)$.

Случай $\mu = m$ рассматривается аналогично. $\triangleleft$

§ 34. Определенный и неопределенный интегралы

34.1. Дифференцирование определенного интеграла по верхнему пределу. При изучении свойств интеграла была установлена (см. свойство 9° в п. 33.1) его непрерывность по пределам интегрирования, т.е. непрерывность функций

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \qquad G(x) = \int_x^b f(t)\, dt$$

на отрезке $[a, b]$. Оказывается, что с "улучшением" свойств подынтегральной функции f "улучшаются" и свойства функций F и G. Так, например, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то будет показано, что функции F и G являются уже дифференцируемыми.

Докажем даже более точную теорему о дифференцируемости функции F в точке x_0.

Т е о р е м а 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

дифференцируема в этой точке и

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{34.1}$$

$\triangleright$ Используя представление приращения $\Delta F(x_0)$ в виде (см. (33.25))

$$\Delta F(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt,\quad x_0\in[a,b],\ x_0+\Delta x\in[a,b],$$

и тождество $\dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt=1$, будем иметь

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt-\frac{f(x_0)}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}[f(t)-f(x_0)]\,dt\right|\leqslant\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right|. \tag{34.2}$$

Зададим произвольно $\epsilon>0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta>0$, что если $|x-x_0|<\delta$ и $x\in[a,b]$, то

$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon. \tag{34.3}$$

Пусть Δx таково, что $|\Delta x|<\delta$; тогда для всех значений t, принадлежащих отрезку с концами x_0 и $x_0+\Delta x$ (по которому ведется интегрирование в неравенстве (34.2)), будем иметь

$$|t-x_0|\leqslant|\Delta x|<\delta.$$

и, следовательно,

$$|f(t)-f(x_0)|<\epsilon. \tag{34.4}$$

Поэтому

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}-f(x_0)\right|\underset{(34.2)}{\leqslant}\frac{1}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}|f(t)-f(x_0)|\,dt\right|\underset{(34.4)}{\leqslant}$$

$$\underset{(34.4)}{\leqslant}\frac{\epsilon}{|\Delta x|}\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}dt\right|=\epsilon.$$

Это, согласно определению предела, и означает, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=f(x_0),$$

и, таким образом, формула (34.1) доказана. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. Из доказанного следует, что в условиях теоремы 1 функция

$$G(x)=\int\limits_{x}^{b} f(t)\,dt$$

также имеет производную в точке x_0 и

$$G'(x_0)=-f(x_0). \tag{34.5}$$

Это сразу следует из формулы (34.1), ибо (см. (33.26))

$$G(x) = \int_a^b f(t)\,dt - F(x)$$

и $\int_a^b f(t)\,dt$ – постоянная величина.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для каждой его точки x справедливы формулы

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x). \tag{34.6}$$

34.2. Существование первообразной.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна во всех точках некоторого промежутка Δ, то на этом промежутке у нее существует первообразная; при этом, если x_0 – какая-либо точка рассматриваемого промежутка Δ, то функция*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt, \quad x \in \Delta, \tag{34.7}$$

является одной из первообразных функций f на промежутке Δ.

$\triangleright$ Достаточно проверить, что функция (34.7) действительно является первообразной функции f. Если $x > x_0$, $x \in \Delta$, то равенство $F'(x) = f(x)$ сразу следует из теоремы 1. Если же $x < x_0$, $x \in \Delta$, то

$$F'(x) \underset{(34.7)}{=} \frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(t)\,dt = -\frac{d}{dx}\int_x^{x_0} f(t)\,dt \underset{(34.6)}{=} -(-f(x)) = f(x). \triangleleft$$

Замечание 1. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором промежутке Δ функции f составляет неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$, $x \in \Delta$, а определенный интеграл $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$, $x_0 \in \Delta$, $x \in \Delta$, является одной из первообразных функции f на Δ.

Поскольку две любые первообразные отличаются на постоянную, то

$$\int f(x)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt + C, \tag{34.8}$$

где C – произвольная постоянная. Так выглядит связь между неопределенным и определенным интегралами. Из теоремы 2 следует, что у всякой непрерывной на некотором промежутке функции существует на этом промежутке неопределенный интеграл.

Теорема 3 (основная теорема интегрального исчисления). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, какова* *бы ни была на этом отрезке ее первообразная* Φ, *справедлива формула*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{34.9}$$

называемая формулой Ньютона – Лейбница.

$\triangleright$ По теореме 2 функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной функции f на отрезке $[a, b]$. Если Φ – какая-либо первообразная на $[a, b]$ той же функции f, то они отличаются на постоянную, т.е. существует такая постоянная C, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C. \tag{34.10}$$

Положив здесь $x = a$ и вспомнив, что $\int_a^a f(t)dt = 0$, получим

$$C = -\Phi(a).$$

Подставив это значение в формулу (34.10), будем иметь

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a), \quad x \in [a, b].$$

Формула (34.9) получается отсюда при $x = b$. $\triangleleft$

Отметим, что формула Ньютона – Лейбница (34.9) справедлива и для $a > b$. Действительно, если в ней поменять местами a и b, то обе части равенства (34.9) изменят знак на противоположный.

Замечание 2. Можно доказать, что формула Ньютона – Лейбница (34.9) остается верной и в случае, когда функция Φ непрерывна, а ее производная f кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Примеры 1. Вычислить значение интеграла $\int_0^1 x^3 dx$. Поскольку $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, то по формуле Ньютона – Лейбница получим

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2. Найдем значение интеграла $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos x\,dx$. Имеем

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

§ 35. Формулы замены переменного и интегрирования по частям в определенном интеграле

35.1. Формула замены переменного. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ_x, а функция $\varphi(t)$ – на промежутке Δ_t и $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, т.е. сложная функция $f(\varphi(x))$.

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ_x, а функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \qquad (35.1)$$

где $\alpha \in \Delta_t$, $\beta \in \Delta_t$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ (рис. 117).

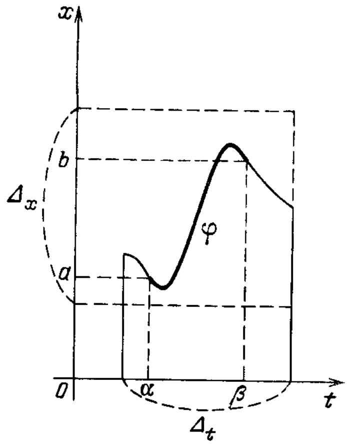


Рис. 117

Формула (35.1) называется *формулой замены переменного* в определенном интеграле.

> Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на промежутке Δ_x; тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t, ибо

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Поэтому по теореме Ньютона – Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \lhd$$

35.2. Формула интегрирования по частям.

Т е о р е м а 2. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (35.2)$$

Формула (35.2) называется *формулой интегрирования по частям* для определенного интеграла.

▷ Имеем

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (uv' + u'v)\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du. \tag{35.3}$$

Все интегралы в (35.3) существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны. Для интеграла в левой части равенства, согласно формуле Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b.$$

Подставив выражение, стоящее в првой части последнего равенства, в (35.3), получим

$$\int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du = uv\Big|_a^b,$$

что равносильно (35.2). ◁

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что формула интегрирования по частям (35.2) остается верной и в том случае, когда функции u и v непрерывны, а их производные кусочно непрерывны.

П р и м е р ы 1. Применим формулу интегрирования по частям для вычисления интеграла $\int_1^2 \ln x\,dx$:

$$\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\,|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Приведем пример интеграла, при вычислении которого применим и замену переменного, и интегрирование по частям. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Сделав сначала замену переменного $t = \cos x$, а затем проинтегрировав по частям, получим

$$I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \int_{-1}^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_{-1}^1 t\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} =$$

$$= \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\Big|_{+1}^{1} + \int_{-1}^1 t\,d\sqrt{1+t^2} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + t\sqrt{1+t^2}\,\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = 2\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} - I.$$

Из получившегося относительно I уравнения находим

$$I = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

Заметим, рассмотренный интеграл можно вычислить и применяя только замену переменного. Для этого можно воспользоваться, например, уже вычисленным неопределенным интегралом $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ (пример в п. 28.4).

3*. Покажем, что для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \tag{35.4}$$

Под $n!!$, $n \in \mathbf{N}$, понимается произведение всех натуральных чисел, не превышающих n и имеющих ту же четность, что и число n:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2)\,2n,$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1).$$

По определению $0!! = 1$.

Положив для удобства $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \dfrac{\pi}{2}$ и проинтегрировав по частям интеграл I_n при $n \geqslant 2$, имеем

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}. \tag{35.5}$$

Заметим, что

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1. \tag{35.6}$$

Поэтому при $n = 2k + 1$, т.е. при нечетном n,

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \tag{35.7}$$

а при $n = 2k$, т.е. при четном n,

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}. \tag{35.8}$$

Равенство интегралов $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ сразу получается с помощью замены переменных $x = \frac{\pi}{2} - t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, формулы (35.4) доказаны. Из них легко получается формула Валлиса *):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2. \tag{35.9}$$

В самом деле, проинтегрировав по отрезку $[0, \pi/2]$ неравенства

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\, dx,$$

т.е.

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}. \tag{35.10}$$

Отсюда в силу формул (35.4) имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Если ввести обозначения

$$x_n = \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2, \quad y_n = \frac{1}{2n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2, \tag{35.11}$$

то неравенства (35.10) можно записать в виде

$$x_n \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant y_n, \tag{35.12}$$

---

*) Дж. Валлис (1616–1703) – английский математик.

где

$$y_n - x_n \underset{(35.11)}{=} \frac{1}{2n}\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2n}x_n \underset{(35.12)}{\leqslant}$$

$$\underset{(35.12)}{\leqslant} \frac{1}{2n}\,\frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 0,$$

т.е. длины отрезков $[x_n, y_n]$, содержащих точку $\pi/2$, стремятся к нулю, а это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = \frac{\pi}{2}.$$

Равенство $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$ в силу первой формулы (35.11) и представляет собой формулу Валлиса.

§ 36. Площади и объемы

36.1. Понятие площади плоского множества. Проведем на координатной плоскости x, y для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ всевозможные прямые

$$x = 10^{-k}p, \quad y = 10^{-k}q, \quad p \in \mathbf{Z}, \quad q \in \mathbf{Z}.$$

В результате при фиксированном k получим разбиение плоскости на замкнутые квадраты со сторонами длины 10^{-k}. Квадраты, из которых состоит это разбиение, будем называть *квадратами ранга* k. Очевидно, что каждый квадрат ранга k состоит из 100 равных квадратов ранга $k + 1$.

Пусть X – множество на плоскости x, y. Обозначим через $s_k = s_k(X)$ объединение всех квадратов ранга k, содержащихся в множестве X. Все квадраты ранга $k + 1$, которые получаются разбиением квадратов ранга k, содержащихся в s_k, заведомо принадлежат s_{k+1}. Поэтому при переходе от k и $k + 1$ множество s_k может только увеличиться за счет тех квадратов ранга $k+1$, которые содержатся в X, но не содержаться в квадратах ранга k, принадлежащих s_k. Таким образом,

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset \ldots \subset X. \tag{36.1}$$

Каждое s_k состоит из конечного или бесконечного множества квадратов ранга k. Если их конечное множество, то через μs_k обозначим площадь многоугольника s_k. Если же s_k состоит из бесконечного множества квадратов ранга k, то s_k не может иметь конечной площади. В этом случае будем писать $\mu s_k = +\infty$.

Очевидно, что если некоторое множество s_k состоит из бесконечного множества квадратов ранга k, то и для всех $k' > k$ множества $s_{k'}$ так же состоят из бесконечного множества квадратов ранга k', так как уже тех квадратов ранга k', которые содержатся в квадратах ранга k, принадлежащих s_k, будет бесконечно много. Поэтому, если $\mu s_k = +\infty$, то и для всех $k' > k$ имеет место $\mu s_{k'} = +\infty$.

Из включений (36.1) следует, что

$$\mu s_0 \leqslant \mu s_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \ldots, \tag{36.2}$$

иначе говоря, последовательность $\{\mu s_k\}$ точек, вообще говоря, расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$ возрастает и потому имеет конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{k \to \infty} \mu s_k$, называемый *площадью* или *мерой множества* X и обозначаемый μX. Таким образом,

$$\mu X \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to \infty} \mu s_k(X). \tag{36.3}$$

Согласно этому определению каждое множество на плоскости имеет конечную или бесконечную площадь. Площадь всякого ограниченного множества конечна. В самом деле, если множество X ограничено, то оно содержится в некотором многоугольнике S_0, состоящем из конечного числа квадратов нулевого ранга и имеющем поэтому конечную площадь. В силу этого при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$s_k(X) \subset X \subset S_0$$

и, следовательно,

$$\mu s_k(X) \leqslant \mu S_0 < +\infty,$$

т.е. последовательность $\{\mu s_k(X)\}$ ограничена сверху, а поэтому имеет конечный предел.

Иногда меру μX называют *нижней мерой множества* X по причинам, которые будут ясны из дальнейшего.

Из курса элементарной математики известно, что если множество X является многоугольником, замкнутым или открытым, то его площадь совпадает с определенной нами площадью μX.

Теорема 1. *Если X_1 и X_2 – подмножества координатной плоскости переменных x, y и $X_1 \subset X_2$, то*

$$\mu X_1 \leqslant \mu X_2. \tag{36.4}$$

$\triangleright$ Если $s_k(X_1)$ и $s_k(X_2)$ – совокупность всех квадратов ранга k, содержащихся соответственно в множествах X_1 и X_2, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то из условия $X_1 \subset X_2$, очевидно, следует, что $s_k(X_1) \subset s_k(X_2)$, а потому $\mu s_k(X_1) \leqslant \mu s_k(X_2)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство (36.4). $\triangleleft$

36.2*. Пример неограниченного множества конечной площади. Всякое ограниченное множество, как это было показано выше, имеет конечную площадь. Однако существуют и неограниченные множества с конечной площадью. Примером неограниченного множества нулевой площади является прямая. Приведем пример неограниченного множества с положительной конечной площадью. Этот пример был построен еще в XIV веке французским математиком Н. Оресмом *).

На координатной плоскости переменных x и y рассмотрим квадрат

$$Q = \{(x, y): \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

Его правую половину, т.е. его часть, для точек которой выполняется неравенство $x \geqslant 1/2$, переместим так, что она займет положение прямоугольника

$$Q_1 = \left\{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2\right\}$$

(т.е. "поставим" правую половину квадрата Q на его левую половину, рис. 118). Далее, правую половину прямоугольника Q_1, т.е. его часть, для точек которой выполняется неравенство $x \geqslant 1/4$, переместим так, что она займет положение прямоугольника

$$Q_2 = \left\{(x, y); \ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \quad 2 \leqslant y \leqslant 3\right\}$$

(т.е. снова "поставим" правую половину на левую) и т.д.

Продолжая этот процесс, получим неограниченную фигуру P ("башню") являющуюся объединением левой половины Q и правых половин прямоугольников Q, Q_1, Q_2, ..., поставленных друг на друга и на левую половину квадрата Q. Указанные части, составляющие фигуру P, представляют собой прямоугольники, равновеликие прямоугольникам, лежащим в квадрате, площади которых образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, сумма которой равна 1, т.е. площади квадрата Q:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1.$$

Естественно, что площадь бесконечной фигуры P равна (как это можно доказать) площади квадрата Q, т.е. положительной конечной величине.

Заметим, что бесконечная фигура P лежит над осью x и под графиком "ступенчатой" (кусочно постоянной) функции, изображенной на рис. 119.

---

*) Н. Оресм (1323?–1382) – французский математик.

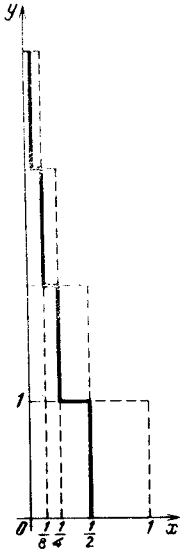


Рис. 118

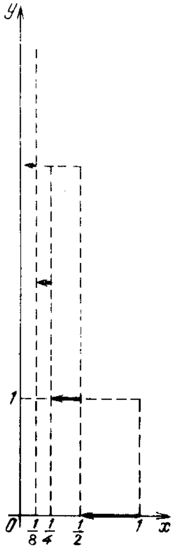


Рис. 119

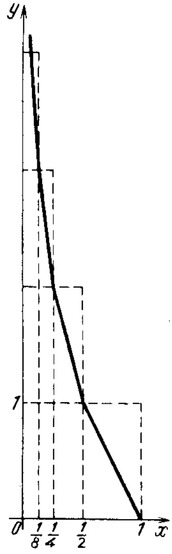


Рис. 120

Нетрудно получить и бесконечное множество конечной площади, ограниченное графиком непрерывной на полуинтервале $(0, 1]$ функции, положительной полуосью оси y, отрезком $0 \leqslant x \leqslant 1, y = 0$ оси x. Чтобы получить график такой функции, достаточно, например, соединить прямолинейными отрезками правые концы ступенек графика функции, изображенной на рис. 119. В результате получится функция, график которой изображен на рис. 120. Отметим, что эта функция, будучи неограниченной, неинтегрируем по Риману.

36.3. Понятие объема. Пусть в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ фиксирована декартова прямоугольная система координат x, y, z. Аналогично разбиению плоскости на квадраты ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$ можно произвести разбиение пространства $\mathbf{R}^3$ на замкнутые кубы с помощью плоскостей, параллельных координатным плоскостям и отстоящих последовательно друг от друга на расстояние 10^{-k}, точнее, с помощью плоскостей

$$x = 10^{-k}p, \quad y = 10^{-k}q, \quad z = 10^{-k}r, \quad p, q, r \in \mathbf{Z}.$$

При фиксированном k получится разбиение пространства $\mathbf{R}^3$ на замкнутые кубы с ребрами длины 10^{-k}. Кубы этого разбиения называются кубами ранга k.

Для любого множества $X \subset \mathbf{R}^3$ через $s_k(X)$ обозначается совокупность всех кубов ранга k, содержащихся в множестве X. Очевидно, как и в случае плоскости,

$$s_0(X)\subset s_1(X)\subset\ldots\subset s_k(X)\subset\ldots\subset X, \tag{36.5}$$

и, следовательно, последовательность объемов $\mu s_k(X)$ конечных или бесконечных многогранников $s_k(X)$, $k=0,1,2,\ldots$, является возрастающей:

$$\mu s_0(X)\leqslant\mu s_1(X)\leqslant\ldots\leqslant\mu s_k(X)\leqslant\ldots \tag{36.6}$$

Объем (мера) μX множества X определяется как конечный или бесконечный предел этой последовательности:

$$\mu X\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{k\to\infty}\mu s_k(X). \tag{36.7}$$

Таким образом, всякое множество трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$ имеет конечный или бесконечный объем. Как и в случае плоскости, доказывается, что если

$$X_1\subset X_2\subset\mathbf{R}^3, \tag{36.8}$$

то

$$\mu X_1\leqslant\mu X_2. \tag{36.9}$$

§ 37. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

37.1. Вычисление площадей криволинейных трапеций.

Теорема 1. *Если функция f неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, а*

$$P=\{(x,y)\colon\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}, \tag{37.1}$$

то площадь S множества P выражается формулой

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{37.2}$$

Множество вида (37.1) называется *криволинейной трапецией*, порожденной графиком функции f (рис. 121).

▷ Пусть $\tau=\{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение отрезка $[a,b]$,

$$\Delta_k=[x_{k-1},x_k],\quad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},$$

$$m_k=\inf_{x\in\Delta_k}f(x),\quad M_k=\sup_{x\in\Delta_k}f(x),\quad k=1,2,\ldots,k_\tau. \tag{37.3}$$

Обозначим соответственно через p_τ и P_τ замкнутые прямоугольники, составленные из всех прямоугольников вида

$$p_{\tau,k}=\{(x,y)\colon\ x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ 0\leqslant y\leqslant m_k\}, \tag{37.4}$$

$$P_{\tau,k}=\{(x,y)\colon\ x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k,\ 0\leqslant y\leqslant M_k\}, \tag{37.5}$$

т.е.

$$p_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} p_{\tau,k}, \qquad P_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} P_{\tau,k}. \tag{37.6}$$

Из (37.3) следует, что для любого разбиения τ выполняется включение $p_\tau \subset P \subset P_\tau$, а следовательно (см. теорему в п. 36.1),

$$\mu p_\tau \leqslant \mu P \leqslant \mu P_\tau. \tag{37.7}$$

Из (37.4) и (37.5) следует, что $\mu p_{\tau,k} = m_k \Delta x_k$, $\mu P_{\tau,k} = M_k \Delta x_k$, и так как

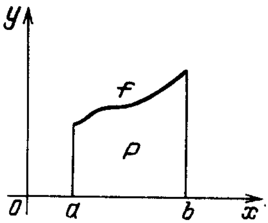


Рис. 121

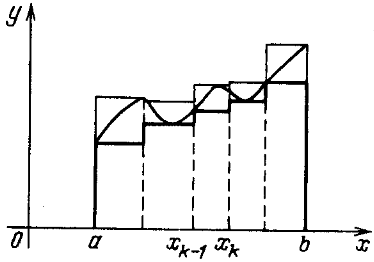


Рис. 122

прямоугольники $P_{\tau,k}$, соответственно $p_{\tau,k}$ не имеют общих внутренних точек, то в силу (37.6)

$$\mu p_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu p_{\tau,k} = \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k \Delta x_k = s_\tau, \tag{37.8}$$

$$\mu P_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu P_{\tau,k} = \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k \Delta x_k = S_\tau. \tag{37.9}$$

Иначе говоря, площади многоугольников p_τ и P_τ равны соответственно нижней и верхней суммам Дарбу функции f (рис. 122). Поэтому из неравенства (37.7) следует, что

$$s_\tau \leqslant \mu P \leqslant S_\tau. \tag{37.10}$$

А так как

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

то

$$\mu P = \int_a^b f(x)\,dx. \quad \lhd$$

Если функция f неположительна и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $P = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$, то

$$\mu P = -\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{37.11}$$

▷ Действительно, если

$$f^*(x) \overset{\text{def}}{=} -f(x), \qquad x \in [a, b], \tag{37.12}$$

а P^* – множество, симметричное с множеством P относительно оси x (рис. 123), то в силу формулы (37.2)

$$\mu P^* = \int\limits_a^b f^*(x)\,dx, \tag{37.13}$$

ибо функция f^* уже неотрицательна. Поскольку площади симметричных множеств равны, т.е. $\mu P^* = \mu P$, а

$$\int\limits_a^b f^*(x)\,dx \underset{(37.12)}{=} -\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

то из равенства (37.13) сразу следует формула (37.11). ◁

Если функция f непрерывна и знакопеременна на отрезке $[a, b]$, то интеграл от нее равен "алгебраической сумме", вообще говоря, бесконечного числа слагаемых, равных площадям криволинейных трапеций, образованных частями графика функции f, расположенными соответственно

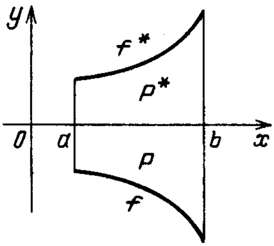


Рис. 123

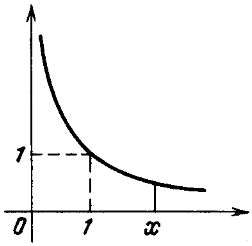


Рис. 124

в полуплоскостях $y \geqslant 0$ и $y \leqslant 0$, причем площади первых берутся со знаком плюс, а площади вторых – со знаком минус.

Примеры. 1. Найдем площадь образованную одной аркой синусоиды:

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\,\Big|_0^\pi = 2.$$

2. Найдем площадь $S(x)$ криволинейной трапеции, ограниченной дугой гиперболы $y = 1/x$, отрезком $[1, x]$ оси x и соответствующими отрезками, параллельными оси y (рис. 124):

$$S(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{t} = \ln t\,\Big|_1^x = \ln x.$$

37.2. Вычисление площадей в полярных координатах. Пусть P – замкнутое множество, граница которого состоит из некоторой кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ ($\rho(\varphi)$ – непрерывная функция), и двух отрезков (которые могут превращаться в точки) лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (рис. 125), т.е.

$$P = \{(\rho, \varphi)\colon\ \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta,\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant \rho(\varphi)\}.$$

Найдем формулу для вычисления площади $S = \mu P$ множества P. Возьмем

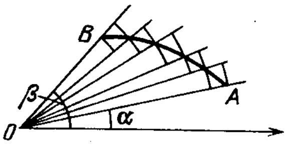


Рис. 125

какое-либо разбиение $\tau = \{\varphi_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ и положим

$$\Delta_k = [\varphi_{k-1}, \varphi_k],$$

$$m_k = \inf_{\varphi \in \Delta_k} \rho(\varphi),\quad M_k = \sup_{\varphi \in \Delta_k} \rho(\varphi),\quad \Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1},$$

$$p_{\tau,k} = \{(\rho, \varphi)\colon\ \varphi_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k,\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant m_k\},$$

$$P_{\tau,k} = \{(\rho, \varphi)\colon\ \varphi_{k-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_k,\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant M_k\},$$

$$k = 1, 2, \ldots, k_\tau,$$

$$p_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} p_{\tau,k},\qquad P_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} P_{\tau,k}.$$

Множества $p_{\tau,k}$ и $P_{\tau,k}$ представляют собой круговые секторы с углом $\Delta\varphi_k$ и радиусами соответственно m_k и M_k, а p_τ и P_τ – ступенчатые фигуры, составленные из указанных секторов и соответственно вписанные в множество P и описанные около него:

$$p_\tau \subset P \subset P_\tau.$$

Из этих включений следует, что

$$\mu p_\tau \leqslant \mu P \leqslant \mu P_\tau. \tag{37.14}$$

Согласно формуле для площади сектора

$$\mu p_{k,\tau} = \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\varphi_k,\qquad \mu P_{k,\tau} = \frac{1}{2} M_k^2 \Delta\varphi_k,$$

поэтому

$$\mu p_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu p_{k,\tau} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_\tau} m_k^2 \Delta\varphi_k,$$

$$\mu P_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \mu P_{k,\tau} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_\tau} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Получившиеся суммы являются соответственно нижней s_τ и верхней S_τ суммами Дарбу функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$:

$$s_\tau = \mu p_\tau, \qquad S_\tau = \mu P_\tau.$$

Таким образом, в силу (37.14)

$$s_\tau \leqslant S = \mu P \leqslant S_\tau. \tag{37.15}$$

Поскольку суммы Драбу s_τ и S_τ при $|\tau| \to 0$ стремятся к одному и тому же пределу – интегралу от функции $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$:

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi,$$

то из неравенств (37.15) следует, что

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{37.16}$$

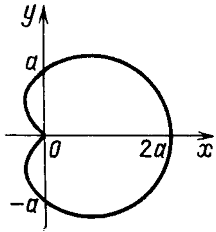


Рис. 126

Пример. Найдем площадь S множества, ограниченного кривой

$$\rho = a(1+\cos\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

называемой *кардиоидой* (рис. 126):

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi + a^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

37.3. Вычисление длины кривой. Применение определенного интеграла к задачам вычисления площадей множеств было основано на его равенстве пределу интегральных сумм. Приведем теперь пример применения определенного интеграла, который основан на формуле Ньютона – Лейбница, позволяющий найти значение функции, если известна ее производная.

Пусть Г – кривая, заданная своим непрерывно дифференцируемым векторным представлением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$; тогда она спрямляема, и если $s = s(t)$ – ее переменная длина дуги, отсчитываемая от начала, то функция $s(t)$ дифференцируема и $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$.

По формуле Ньютона – Лейбница для длины $S = s(b)$ кривой имеем формулу

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)\,dt = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

$$(s(a) = 0). \tag{37.17}$$

Если $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то

$$S = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt. \tag{37.18}$$

В случае, когда кривая Г является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant \leqslant b$, для ее длины S в силу (37.18) справедлива формула

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{37.19}$$

Пример. Вычислим длину астроиды

$$x = a \cos^3 t, \qquad y = a \sin^3 t$$

(рис. 127). В силу симметричности астроиды относительно координатных

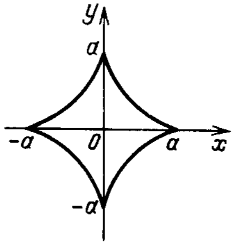


Рис. 127

осей ее длина S равна учетверенной длине ее части, лежащей в первом координатном угле, т.е. соответствующей изменению параметра на отрезке $[0, \pi/2]$.

Заметив, что

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t, \qquad y' = 3a \sin^2 t \cos t,$$

согласно формуле (37.18), в которой надо положить $z' = 0$, получим

$$S = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\, dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = 6a.$$

37.4. Площадь поверхности вращения. Пусть функция f неотрицательна на отрезке $[a, b]$, а $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – какое-либо разбиение отрезка $[a, b]$. Впишем в график функции f ломаную λ_τ, соответствующую разбиению τ, т.е. ломаную с вершинами в точках (x_k, y_k), где

$$y_k = f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, k_\tau \tag{37.20}$$

(рис. 128). Звено этой ломаной с концами в точках (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k) (будем называть его k-м звеном ломаной λ_τ) при вращении его вокруг оси x описывает боковую поверхность усеченного конуса (в частности, при $y_{k-1} = y_k$ — боковую поверхность цилиндра), площадь которой равна

$$\pi(y_{k-1}+y_k)\Delta(\lambda_\tau)_k,$$

где y_{k-1} и y_k — радиусы оснований усеченного конуса, а $\Delta(\lambda_\tau)_k$ — длина его образующей, т.е. длина k-го звена ломаной λ_τ.

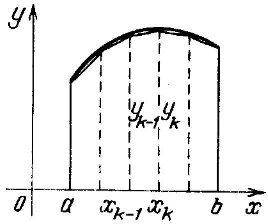


Рис. 128

Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, тогда

$$\Delta(\lambda_\tau)_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}. \tag{37.21}$$

Поэтому площадь L_τ поверхности, получающейся от вращения всей рассматриваемой ломаной вокруг оси x, выражается формулой

$$L_\tau = \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1}+y_k)\Delta(\lambda_\tau)_k = \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1}+y_k)\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}. \tag{37.22}$$

Если существует предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0} L_\tau$, то он называется *площадью поверхности вращения*, образованной вращением графика функции вокруг оси x. Таким образом, обозначив через L площадь указанной поверхности вращения, будем иметь

$$L \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau|\to 0} L_\tau. \tag{37.23}$$

Пусть теперь функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$; тогда для площади поверхности L можно получить удобную для вычислений формулу в виде некоторого интеграла. Проделаем это.

По формуле конечных приращений Лагранжа

$$\Delta y_k = f'(\xi_k)\Delta x_k, \quad x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, k_\tau, \tag{37.24}$$

поэтому

$$L_\tau \underset{(37.22)}{=} \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} (y_{k-1}+y_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k. \tag{37.25}$$

Сумма L_τ не является интегральной суммой Римана, так как в нее входят значения функции в трех точках x_{k-1}, ξ_k и x_k, лежащих на одном и том же отрезке разбиения τ. Сравним сумму L_τ с суммой

$$\sigma_\tau = 2\pi \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k, \tag{37.26}$$

$k = 1, 2, \ldots, k_\tau$,

являющейся интегральной суммой для функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$.

Отметим, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на нем, т.е. для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in [a, b]$, $x' \in [a, b]$, $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \epsilon$. Поэтому, если разбиение τ таково, что $|\tau| < \delta$, то (см. (37.20))

$$|y_{k-1} - f(\xi_k)| < \epsilon, \quad |y_k - f(\xi_k)| < \epsilon. \tag{37.27}$$

Отметим еще, что функция f', будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем, а следовательно, ограничена на нем и функция $\sqrt{1+f'^2(x)}$, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\sqrt{1+f'^2(x)} \leqslant c. \tag{37.28}$$

Оценим отклонение суммы L_τ от σ_τ:

$$|L_\tau - \sigma_\tau| \underset{\substack{(37.25)\\(37.26)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(37.25)\\(37.26)}}{\leqslant} \pi \sum_{k=1}^{k_\tau} |y_{k-1} + y_k - 2f(\xi_k)|\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k \underset{(37.28)}{\leqslant}$$

$$\underset{(37.28)}{\leqslant} \pi c \sum_{k=1}^{k_\tau} |[y_{k-1} - f(\xi_k)] + [y_k - f(\xi_k)]|\,\Delta x_k \underset{(37.27)}{\leqslant}$$

$$\underset{(37.27)}{\leqslant} \pi c \sum_{k=1}^{k_\tau} [|y_{k-1} - f(\xi_k)| + |y_k - f(\xi_k)|]\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi c\epsilon \sum_{k=1}^{k_\tau} \Delta x_k = 2\pi c(b-a)\epsilon.$$

Ввиду произвольности $\epsilon > 0$ это неравенство означает, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} (L_\tau - \sigma_\tau) = 0. \tag{37.29}$$

Но σ_τ является интегральной суммой функции $2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, где $y = f(x)$, поэтому

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{37.30}$$

И так как, в силу формулы (37.29), $\lim\limits_{|\tau|\to 0} L_\tau = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau$, то для площади L поверхности вращения получают формулу

$$L \underset{(37.23)}{=} \lim_{|\tau|\to 0} L_\tau \underset{\substack{(37.29)\\(37.30)}}{=} 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{37.31}$$

Вспоминая, что $\sqrt{1+y'^2}\,dx = ds$ (см. п. 17.3), т.е. является дифференциалом длины дуги, формулу (37.31) для площади L поверхности вращения можно записать в более компактном виде

$$L = 2\pi \int_a^b y\,ds. \tag{37.32}$$

Можно показать, что эта формула остается справедливой для площади поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси x любой непрерывно дифференцируемой кривой, заданной параметрическим представлением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant d$ и не пересекающей ось x. В этом случае в развернутом виде формула (37.32) имеет вид

$$L = 2\pi \int_a^b y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{37.33}$$

Пример. Найдем площадь L поверхности, полученной вращением вокруг оси x одной арки синусоиды $y = \sin x$. Согласно формуле (37.31) имеем

$$L = 2\pi \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, был вычислен раньше (пример 2 в п. 35.2); он равен $\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}$. Поэтому сразу находим значение искомой площади

$$L = 2\pi(\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}).$$

37.5. Объем тел вращения. Пусть функция f неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$, а Q – тело, полученное вращением криволинейной трапеции P (см. (37.1)), порожденной графиком функции $y = f(x)$. Покажем, что для объема V этого тела имеет место формула

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx. \tag{37.34}$$

Обозначим через q_τ и Q_τ тела, образованные вращением вокруг оси x ступенчатых фигур p_τ и P_τ (см. (37.6)), соответствующих некоторому разбиению τ отрезка $[a, b]$. Из включения $p_\tau \subset p \subset P_\tau$ следует включение $q_\tau \subset Q \subset Q_\tau$, а следовательно, и неравенство

$$\mu q_\tau \leqslant V = \mu Q \leqslant \mu Q_\tau. \tag{37.35}$$

Объемы μq_τ и μQ_τ равны суммам объемов составляющих их цилиндров, образованных вращением прямоугольников $p_{\tau,k}$ и $P_{\tau,k}$ (см. (37.4) и (37.5)):

$$\mu q_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} \pi m_k^2 \Delta x_k, \quad \mu Q_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} \pi M_k^2 \Delta x_k$$

(рис. 129). Из этих равенств видно, что μq_τ и μQ_τ являются нижними и

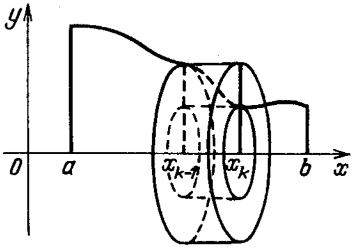


Рис. 129

верхними суммами Дарбу функции $\pi f^2(x)$, поэтому

$$\lim_{|\tau| \to 0} \mu q_\tau = \lim_{|\tau| \to 0} \mu Q_\tau = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

откуда в силу (37.35) и следует, что

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{37.36}$$

Пример. Найдем объем тела, получающегося от вращения вокруг оси x одной арки синусоиды $y = \sin x$:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \cos 2x\,dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

37.6*. Теоремы Гульдина. Центры тяжести плоских фигур и их моменты относительно осей. Пусть Γ – график неотрицательной непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции f, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение этого отрезка, а λ_τ – ломаная, соответствующая этому разбиению и вписанная в кривую Γ. Будем кривую Γ и ломаные λ_τ рассматривать как материальные кривые, т.е. как имеющие массу. Будем предполагать, что их линейные плотности равны единице. Это означает, что массы их частей совпадают с длинами этих частей.

Как и выше (см. п. 37.4), положим

$$y_k = f(x_k), \quad \Delta x_k = x_k = x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1},$$

$$\Delta(\lambda_\tau)_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, k_\tau.$$

Рассмотрим физический смысл суммы

$$\sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta(\lambda_\tau)_k = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k, \tag{37.37}$$

являющейся, очевидно, интегральной суммой функции $y\sqrt{1+y'^2}$, $y=f(x)$, и потому имеющей своим пределом при $|\tau|\to 0$ интеграл

$$\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_a^b y\,ds. \tag{37.38}$$

Каждое слагаемое $f(\xi_k)\Delta(\lambda_\tau)_k$ суммы (37.37) является произведением массы $\Delta(\lambda_\tau)_k$ k-го звена ломаной λ_τ на некоторое среднее расстояние $f(\xi_k)$ этого звена от оси x, т.е. $f(\xi_k)\Delta(\lambda_\tau)_k$ является приближенным значением момента k-го звена ломаной λ_τ относительно оси x, а вся сумма (37.37) представляет собой приближенное значение момента этой ломаной относительно той же оси. Предел этих приближенных значений моментов ломаных λ_τ при $|\tau|\to 0$ равен моменту M_x кривой Γ относительно оси x. Поскольку сумма (37.37) при $|\tau|\to 0$ стремится к интегралу (37.38), то

$$M_x = \int_a^b y\,ds. \tag{37.39}$$

Этот момент равен моменту относительно оси x материальной точки, масса которой равна массе кривой Γ (в данном случае совпадающей с ее длиной S), помещенной в центр тяжести (x_0, y_0). Момент относительно оси x материальной точки массы S, находящейся в точке (x_0, y_0), равен Sy_0. В силу сказанного он совпадает с моментом M_x, т.е.

$$Sy_0 = M_x. \tag{37.40}$$

Используя формулу (37.39), это равенство можно записать в виде

$$Sy_0 = \int_a^b y\,ds.$$

Умножив обе его части на 2π и вспомнив, что $2\pi\int_a^b y\,ds$ является площадью L поверхности вращения (см. п. 37.4), получим, что

$$L = S\cdot 2\pi y_0. \tag{37.41}$$

Мы доказали эту формулу в предположении, что кривая Γ является графиком функции f (имеет явное представление). Можно показать, что формула (37.40), а следовательно и формула (37.41), остается справедливой и для любой непрерывно дифференцируемой кривой, замкнутой или незамкнутой, не пересекающей ось x. Таким образом, верна следующая

Т е о р е м а 1 (п е р в а я т е о р е м а Г у л ь д и н а*)). *Площадь поверхности, полученной вращением кривой вокруг оси, равна длине кри-*

---

*) П. Гульдин (1577–1633) – швейцарский математик.

вой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести кривой.

В этой теореме предполагается, что кривая, которая вращается около оси, непрерывно дифференцируема, лежит в одной плоскости с указанной осью и по одну сторону от нее.

Эта теорема позволяет иногда находить площади поверхностей вращения без вычисления интегралов. Например, найдем площадь поверхности тора,

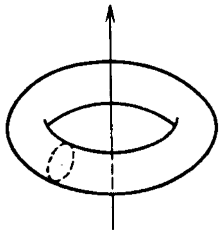


Рис. 130

т. е. поверхности, образованной вращением вокруг оси окружности радиуса r, центр которой находится на расстоянии a от оси. При этом будем считать, что ось и окружность лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. $a > r$ (рис. 130).

Поскольку длина вращаемой окружности равна $2\pi r$, а ее центр является и ее центром тяжести, то согласно формуле (37.41)

$$L = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar.$$

Отметим, что аналогично формуле (37.40) для другой координаты x_0 центра тяжести кривой Г имеет место формула

$$Sx_0 = M_y. \tag{37.42}$$

Из соотношений (37.40) и (37.42) следуют формулы для координат x_0, y_0 центра тяжести кривой Г, именно,

$$x_0 = M_y / S, \qquad y_0 = M_x / S, \tag{37.43}$$

где момент M_y кривой Г относительно оси y может быть вычислен по формуле, аналогичной формуле (37.39) для момента M_x:

$$M_y = \int_a^b x\, ds.$$

Если кривая Г не удовлетворяет условиям, при которых получена формула (37.39), то можно попытаться разбить кривую Г на конечное число кривых, каждая из которых уже удовлетворяет указанным условиям, и воспользоваться тем, что момент относительно оси объединения тел равен сумме их моментов.

Перейдем ко второй теореме Гульдина.

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$, $x \in [a, b]$,

$$P \overset{\text{def}}{=} \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b, \; g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{37.44}$$

как всегда, $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение отрезка $[a, b]$,

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

а P_τ – на этот раз ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников

$$P_{\tau, k} = \{(x, y): x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k, \quad g(\xi_k) \leqslant y \leqslant f(\xi_k)\}$$

с основаниями и высотами, равными соответственно Δx_k и $f(\xi_k) - g(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$ (рис. 131):

$$P_\tau = \bigcup_{k=1}^{k_\tau} P_{\tau, k}.$$

Будем рассматривать фигуры P и P_τ как материальные, т. е. как фигуры, имеющие массу с плотностью 1. Это означает, что масса каждой из их частей совпадает с площадью этой части.

Центр тяжести прямоугольника $P_{\tau, k}$ находится в его центре и, следовательно, на расстоянии

$$\frac{1}{2}[f(\xi_k) + g(\xi_k)] \tag{37.45}$$

от оси x.

Момент прямоугольника $P_{\tau, k}$ относительно оси x равен произведению ординаты его центра тяжести (37.45) на его массу, т. е. в данном случае на площадь $[f(\xi_k) - g(\xi_k)]\Delta x_k$. Таким образом, этот момент равен

$$\frac{1}{2}[f^2(\xi_k) - g^2(\xi_k)]\Delta x_k.$$

Для момента же M_τ ступенчатой фигуры P_τ, равного сумме моментов составляющих его прямоугольников $P_{\tau, k}$, имеем формулу

$$M_\tau = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_\tau} [f^2(\xi_k) - g^2(\xi_k)]\Delta x_k. \tag{37.46}$$

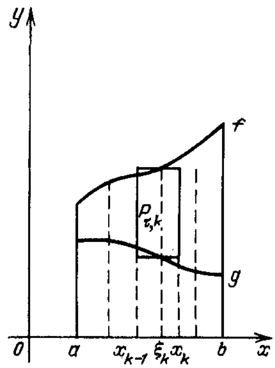


Рис. 131

Момент M_x самой фигуры P относительно оси x равен пределу моментов M_τ ступенчатых фигур при $|\tau| \to 0$:

$$M_x = \lim_{|\tau| \to 0} M_\tau. \tag{37.47}$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (37.46), представляет собой интегральную сумму функции $\frac{1}{2}[f^2(x) - g^2(x)]$, поэтому имеем также

$$\lim_{|\tau| \to 0} M_\tau = \frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx. \tag{37.48}$$

Таким образом, из (37.47) и (37.48) следует, что момент M_x фигуры P относительно оси x равен интегралу, стоящему в правой части формулы (37.48):

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx. \tag{37.49}$$

Момент фигуры относительно оси равен моменту материальной точки, масса которой равна массе фигуры и которая помещена в центр тяжести фигуры.

Поэтому, если (x_0, y_0) – центр тяжести фигуры P, то, так как ее масса в данном случае совпадает с ее площадью S, получим

$$M_x = Sy_0, \tag{37.50}$$

или, в силу (37.49),

$$Sy_0 = \frac{1}{2} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

Умножим обе части последнего равенства на 2π:

$$S \cdot 2\pi y_0 = \pi \int_a^b f^2(x) dx - \pi \int_a^b g^2(x) dx.$$

В правой части этого равенства стоит разность объемов тел, полученных вращением вокруг оси x криволинейных трапеций, порожденных графиками соответственно функций f и g (п. 37.5), т.е. объем V тела, получающегося вращением фигуры P вокруг оси x:

$$V = S \cdot 2\pi y_0. \tag{37.51}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2 (вторая теорема Гульдина). *Объем тела, полученного вращением плоской фигуры вокруг оси, равен площади фигу-*

ры, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести фигуры.

Здесь под плоской фигурой понимается множество P рассмотренного выше типа (см. (37.44)), а под ее вращением – вращение этой фигуры вокруг оси, лежащей с фигурой в одной плоскости и не пересекающей ее.

Пример. Найдем объем V тора, рассмотренного в качестве примера применения первой теоремы Гульдина. Поскольку площадь вращаемой фигуры, в данном случае круга, равна πr^2, то в силу формулы (37.51)

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 r^2 a.$$

Отметим в заключение, что для координаты x_0 центра тяжести фигуры P имеет место формула (аналогичная формуле (37.50))

$$M_y = Sx_0, \tag{37.52}$$

где момент M_y фигуры P находится по формуле, аналогичной формуле (37.49).

Из формул (37.50) и (37.52) получаются следующие формулы для координат центра тяжести (x_0, y_0) фигуры P:

$$x_0 = M_y/S, \qquad y_0 = M_x/S.$$

§ 38. Несобственные интегралы

38.1. Определение несобственных интегралов. Пусть функция f определена на конечном или бесконечном полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и для любого числа $\eta \in [a, b)$ интегрируема на отрезке $[a, \eta]$.

Определение 1. *Функция $F(\eta) = \int\limits_a^\eta f(x)\, dx$ верхнего предела интегрирования, $a \leqslant \eta < b$, называется несобственным интегралом и обозначается*

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\eta \to b} \int\limits_b^\eta f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, а если этот предел не существует, то – расходящимся.

В случае, когда несобственный интеграл сходится, говорят также, что он *существует*, а если расходится, то *не существует*.

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то предел $\lim_{\eta \to b} \int_b^\eta f(x)dx$ обозначается тем же символом, что и сам интеграл, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)dx, \tag{38.1}$$

и для краткости также называется несобственным интегралом (иногда его *значением*).

Подчеркнем, что здесь возможны два случая: когда b – конечное число и когда b равно бесконечности (рис. 132).

Если b конечно, а функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то в силу непрерывности интеграла (свойство 9° в п. 33.1) предел $\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)dx$, $a \leqslant \eta < b$, существует и равен интегралу $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, интеграл Римана является частным случаем несобственного интеграла.

При условии конечности b определение 1 содержательно, только если функция f неограничена в любой окрестности точки b (см. рис. 132).

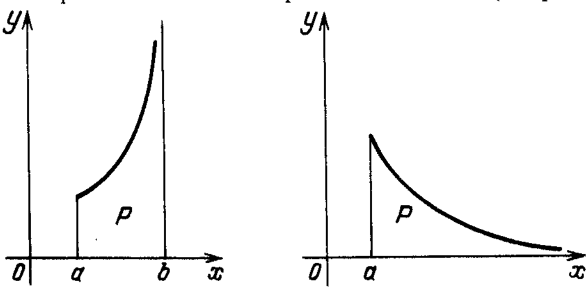


Рис. 132

Для отличия интеграла Римана от несобственного интеграла интеграл Римана называют иногда *собственным интегралом.*

Геометрический смысл несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ от неотрицательной функции f состоит в том, что он, подобно собственному интегралу, равен площади криволинейной трапеции

$$P = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x < b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

порожденной графиком функции f, причем эта трапеция как в случае неограниченной функции f и конечного промежутка $[a, b)$, так и в случае бесконечного промежутка $[a, b)$ всегда является (в отличие от того, что имело место для собственного интеграла) неограниченным множеством.

Если $a < c < b$, то из равенства

$$\int_a^\eta f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^\eta f(x)dx \tag{38.2}$$

сразу видно, что несобственный интеграл (38.1) существует в том и только том случае, когда существует несобственный интеграл

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\eta \to b} \int_c^\eta f(x)dx,$$

причем в случае существования этих интегралов, перейдя в равенстве (38.1) к пределу при $\eta \to b$, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{38.3}$$

В этом равенстве интегралы $\int_a^b$ и $\int_c^b$ — несобственные, а интеграл $\int_a^c$ — собственный.

Если функция f определена на полуинтервале $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, и при любом $\xi \in (a, b]$ интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, b]$, то аналогично формуле (38.1) несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется как функция $F(\xi) = \int_\xi^b f(x)\, dx$ нижнего предела интегрирования, $a < \xi \leqslant b$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi \to a} \int_\xi^b f(x)dx$, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если этот предел не существует, то — *расходящимся*.

Здесь, как и выше, в случае, когда несобственный интеграл сходится, говорят, что он существует, а когда расходится, что он не существует.

Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то предел $\lim\limits_{\xi \to a} \int_\xi^b f(x)dx$ обозначается тем же символом, что и сам интеграл, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\xi \to a} \int_\xi^b f(x)dx, \tag{38.4}$$

и для краткости также называется несобственным интегралом (иногда его *значением*).

Для интеграла (38.4) имеет место свойство, аналогичное свойству (38.3) для интеграла (38.1).

Если функция f определена на интервале (a, b) и $c \in (a, b)$, то несобственным интегралом $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется пара несобственных интегралов $\int\limits_a^c f(x)dx$, $\int\limits_c^b f(x)dx$. Если оба эти интеграла сходятся, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, а если хотя бы один расходится, то — расходящимся. Если интегралы $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ сходятся, то их сумма обозначается тем же символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \qquad (38.5)$$

Из свойства (38.3) и аналогичного свойства для интеграла (38.4) следует, что существование и значение несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ не зависят в этом случае от выбора точки $c \in (a, b)$.

Определим теперь общее понятие несобственного интеграла от функции f по промежутку Δ с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.

Всякое множество точек $X = \{x_k\}_{k=0}^{k=n}$ расширенной числовой прямой называется *правильным разбиением промежутка* Δ *относительно функции* f, если

1) $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$;

2) при $a = -\infty$ имеет место $x_0 = -\infty$, а при $b = +\infty$ имеет место $x_n = +\infty$;

3) функция f интегрируема по Риману на любом отрезке, лежащем на промежутке Δ и не содержащем точек множества X.

Ясно, что на каждом из промежутков (a, x_0), (x_0, x_1), ..., (x_n, b) имеет смысл несобственный интеграл от функции f одного из трех вышерассмотренных типов.

Совокупность интегралов

$$\int_a^{x_0} f(x)dx, \qquad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad \int_{x_n}^{b} f(x)dx \tag{38.6}$$

называется в этом случае *несобственным интегралом* $\int_a^b f(x)dx$.

Если все интегралы (38.6) сходятся, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *сходящимся*, а если хотя бы один из них расходится, то – *расходящимся*.

В случае, когда интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то через $\int_a^b f(x)dx$ обозначается и сумма интегралов (38.6), т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \int_a^{x_0} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx + \int_{x_0}^{b} f(x)dx,$$

и эта сумма также называется *несобственным интегралом* (иногда его значением).

Сходимость и расходимость несобственного интеграла, как и его значение, если он сходится, не зависят от выбора правильного разбиения промежутка Δ относительно заданной функции f.

Заметим, что если к правильному разбиению X промежутка Δ добавить любое конечное множество точек расширенной числовой прямой, принадлежащих замыканию $\overline{\Delta}$ этого промежутка, то полученное множество также будет, очевидно, правильным разбиением Δ относительно функции f. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $x_0 = a$ и $x_k = b$.

Перейдем к рассмотрению примеров. Вычислим несобственные интегралы от функции $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, на полуинтервале $(0, 1]$ (где она неограничена) и на бесконечном промежутке $[1, +\infty)$.

Примеры. 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} \underset{(38.4)}{=} \lim_{\xi \to 0} \int_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi \to 0} \ln x \,\Big|_\xi^1 = +\infty.$

2. $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \underset{(38.4)}{=} \lim_{\xi \to 0} \int_\xi^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\xi \to 0} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\xi^1 =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha < 1, \\ +\infty, & \text{если} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что при $0 < \alpha < 1$ несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ существует, в то время как собственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ заведомо не существует, поскольку функция $x^{-\alpha}$ при любом ее доопределении в точке $x = 0$ будет неограниченной на отрезке $[0, 1]$.

Этот пример говорит о том, что в случае конечного промежутка понятие несобственного интеграла шире понятия собственного интеграла. В случае же бесконечного промежутка понятия собственного интеграла просто нет.

Итак, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$ (при $\alpha < 0$ это интеграл является интегралом Римана).

3. $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \underset{(38.1)}{=} \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \to +\infty} \ln x \,\Big|_1^{\eta} = +\infty.$$

4. $$\alpha \neq 1, \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \underset{(38.1)}{=} \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\eta \to +\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^{\eta} =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{если} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

Итак, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

38.2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов. В силу свойства предела функций и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, на собственные интегралы предельным переходом переносятся многие свойства определенного интеграла.

В дальнейшем в этом параграфе для простоты в вопросах теории будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке

$[a, \eta]$, $a \leqslant \eta < b$ (определение (38.1)), если, конечно, специально не оговорено что-либо другое.

Аналогичные определения и теоремы для интегралов (38.4) и (38.5) читатель без труда сформулирует самостоятельно.

Для общего несобственного интеграла (38.6) утверждения, аналогичные тем, которые будут сформулированы ниже для интеграла вида (38.1), также справедливы и в случае необходимости могут быть сформулированы читателем.

1°. Формула Ньютона – Лейбница. *Если функция f непрерывна на промежутке $[a, b)$ и F – какая-либо ее первообразная, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a). \tag{38.7}$$

В этом равенстве либо обе части одновременно имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, т. е. стоящие в них пределы не существуют.

▷ Справедливость формулы (38.7) следует из того, что для любого $\eta \in [a, b)$, согласно формуле Ньютона – Лейбница для интеграла Римана (теорема 3 из п. 34.2), имеет место равенство

$$\int_a^\eta f(x)dx = F(\eta) - F(a). \tag{38.8}$$

Из него следует, что предел

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)dx$$

существует тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{\eta \to b} F(\eta),$$

причем, если эти пределы существуют, то, перейдя в равенстве (38.8) к пределу при $\eta \to b$, получим формулу (38.7). ◁

2°. Линейность интеграла. *Если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел λ и μ несобственный интеграл $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx$ также сходится и*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \tag{38.9}$$

▷ Действительно, на основании соответствующих свойств предела и линейности интеграла Римана имеем

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx \underset{(38.1)}{=}$$

$$\underset{(38.1)}{=} \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx =$$

$$= \lim_{\eta \to b} [\lambda \int_a^\eta f(x)dx + \mu \int_a^\eta g(x)dx] =$$

$$= \lambda \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x)dx + \mu \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta g(x)dx \underset{(38.1)}{=}$$

$$\underset{(38.1)}{=} \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx. \lhd$$

3°. Интегрирование неравенств. *Если интегралы* $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *сходятся и для всех* $x \in [a, b)$ *выполняется неравенство* $f(x) \leqslant g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx. \tag{38.10}$$

▷ В силу соответствующего свойства интеграла Римана (см. следствие свойства 6° в п. 33.1) для любого $\eta \in [a, b)$ выполняется неравенство

$$\int_a^\eta f(x)dx \leqslant \int_a^\eta g(x)dx.$$

Перейдя в нем к пределу при $\eta \to b$, получим неравенство (38.10). ◁

Аналогичным образом, исходя из соответствующих свойств интеграла Римана, с помощью предельного перехода доказываются и следующие два свойства несобственных интегралов (проведение доказательств которых предоставляется читателю).

4°. Правило замены переменного. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на полуинтервале* $\Delta_x = [a, b)$, *функция* $\varphi(t)$ *непрерывно диф-*

ференцируема на полуинтервале $\Delta_t = [\alpha, \beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leqslant +\infty$, *и выполняются условия* $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$,

$$a = \varphi(\alpha), \qquad b = \lim_{t \to \beta} \varphi(t).$$

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{38.11}$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в этом равенстве, следует существование интеграла, стоящего справа.

Если функция φ такова, что обратная функция φ^{-1} однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на функцию φ, и, следовательно, в интеграле, стоящем в правой части равенства (38.11), можно сделать замену переменного $t = \varphi^{-1}(x)$, то оба интеграла в этом равенстве сходятся или расходятся одновременно.

С помощью замены переменного из условий сходимости интегралов, рассмотренных в примерах 1 и 2 п. 38.1, следует, что интегралы $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ и $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $-\infty < a < b < +\infty$, сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geqslant 1$. В самом деле, первый интеграл с помощью замены переменного $t = x - a$, а второй с помощью $t = b - x$ приводятся к интегралу $\int_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha}$.

5°. Правило интегрирования по частям. *Если функции u и v непрерывны на промежутке $[a, b)$, а их производные кусочно непрерывны на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$, то*

$$\int_a^b u\,dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{38.12}$$

При этом из существования любых двух из следующих трех пределов:

$$\int_a^b u\,dv = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta u\,dv, \qquad \int_a^b v\,du = \lim_{\eta \to b} \int_a^\eta v\,du,$$

$$uv\,|_a^b = \lim_{\eta \to b} u(\eta)v(\eta) - u(a)v(a)$$

следует существование оставшегося.

П р и м е р ы. 1. Посредством замены переменной $x = 1/t$ вычислим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Проинтегрировав по частям при $n > 0$, будем иметь

$$I_n = -\int_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}. \tag{38.13}$$

Поскольку

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

то, применив последовательно рекуррентную формулу (38.13), получим

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \ldots = n!\,I_0 = n!.$$

38.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Установим признаки сходимости для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Л е м м а 1. *Если функция f неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$, то для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов $\int\limits_a^\eta f(x)dx$, $\eta \in [a, b)$, было ограничено сверху, т. е. чтобы существовала такая постоянная $c > 0$, что для всех $\eta \in [a, b)$ выполнялось бы неравенство*

$$\int_a^\eta f(x)dx \leqslant c. \tag{38.14}$$

$\triangleright$ Положим

$$\varphi(\eta) \overset{\text{def}}{=} \int_a^\eta f(x)dx. \tag{38.15}$$

Если $a \leqslant \eta < \eta' < b$, то

$$\varphi(\eta') = \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_a^{\eta} f(x)\,dx + \int_{\eta}^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant \int_a^{\eta} f(x)\,dx = \varphi(\eta)$$

(ибо в силу неотрицательности функции f имеет место неравенство $\int_{\eta}^{\eta'} f(x)\,dx \geqslant 0$), т.е. функция $\varphi(\eta)$ возрастает на полуинтервале $[a, b)$. Существование несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ означает существование конечного предела

$$\lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

что имеет место тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\eta)$ ограничена сверху (см. теорему 4 в п. 6.11), а это в силу (38.15) равносильно условию (38.14). ◁

Замечание. При доказательстве леммы 1 было показано, что в случае неотрицательности функции f функция $\varphi(\eta)$ (см. (38.15)) возрастает на $[a, b)$ и, следовательно, всегда имеет при $\eta \to b$ конечный или бесконечный, равный $+\infty$, предел в зависимости от того, ограничена она или нет. Если функция $\varphi(\eta)$ неограничена на $[a, b)$, то

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^{\eta} f(x)\,dx \underset{(38.15)}{=} \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = +\infty,$$

и в этом случае пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$$

(как мы уже и поступали в примерах п. 38.1).

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть*

$$0 \leqslant g(x) \leqslant f(x), \qquad x \in [a, b). \tag{38.16}$$

Тогда:

1) *если интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится, то сходится и интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$;

2) *если интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$ *расходится, то расходится и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Следствие. *Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a, b)$, $g(x) \neq 0$ при всех $x \in [a, b)$ и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \tag{38.17}$$

Тогда:

1) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится и* $0 \leqslant k < +\infty$, *то и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится*;

2) *если интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *расходится и* $0 < k \leqslant +\infty$, *то и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *расходится.*

В частности, если

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

т.е. если функции f *и* g *эквивалентны при* $x \to b$: $f \sim g$, *то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *одновременно сходятся или расходятся.*

$\triangleright$ Докажем теорему. Для любого $\eta \in [a, b)$ в силу неравенства (38.16) имеем

$$\int\limits_a^\eta g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^\eta f(x)\,dx.$$

Поэтому, если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится и, следовательно, согласно лемме 1 ограничены сверху интегралы $\int\limits_a^\eta f(x)\,dx$, то будут ограничены сверху и интегралы $\int\limits_a^\eta g(x)\,dx$, откуда, согласно той же лемме, интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится.

Если же расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, то в силу уже доказанного интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не может сходиться, так как тогда бы сходился и интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$, а это противоречит условию. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ расходится. $\triangleleft$

Докажем теперь следствие.

$\triangleright$ Пусть выполняется условие (38.17) и $0 \leqslant k < +\infty$. Из того, что k является пределом функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k < k + 1$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что если $\eta < x < b$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} < k + 1$, т.е.

$$f(x) < (k+1)g(x). \tag{38.18}$$

Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, то сходится интеграл $\int\limits_\eta^b (k+1)\,g(x)\,dx$ (см. (38.3) и (38.9)), следовательно, в силу неравенства (38.18) интеграл $\int\limits_\eta^b f(x)\,dx$, а поэтому и интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходятся.

Пусть теперь условие (38.17) выполняется при $0 < k \leqslant +\infty$. Тогда зафиксируем произвольно такое k', что $0 < k' < k$. Из того, что k является пределом функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k' < k$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что для всех $x \in (\eta, b)$ выполняется неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} > k'$, т.е. неравенство

$$f(x) > k'g(x).$$

Отсюда в силу расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ следует по теореме 1 расходимость интеграла $\int\limits_\eta^b f(x)\,dx$, а следовательно, и расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. ◁

При применении признака сходимости для исследования интеграла обычно начинают со сравнения подынтегральной функции с функциями

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha}, \qquad \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \qquad \frac{1}{x^\alpha},$$

сходимость интегралов от которых уже известна (примеры пп. 38.1 и 38.2).

П р и м е р ы. 1. Выясним, сходится ли интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1-x^2}}. \tag{38.19}$$

Имеем

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x}}\;\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{2}(1-x)^{1/4}}, \quad x \to 1,$$

а так как интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{(1-x)^{1/4}}$ сходится, то сходится и интеграл (38.19).

2. Исследуем интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln x\,dx. \tag{38.20}$$

Для любого $\alpha > 0$, применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^{\alpha}} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\alpha/x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to 0} x^{\alpha} = 0,$$

в частности, это равенство имеет место при $0 < \alpha < 1$. Но при $0 < \alpha < 1$ интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится, следовательно, сходится и интеграл (38.20).

3. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}. \tag{38.21}$$

Поскольку $\ln x = \ln\,[1 + (x-1)] \sim x - 1$ при $x \to 1$ и интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$ расходится, то расходится и интеграл (38.21).

4. Рассмотрим на бесконечном промежутке $(0, +\infty)$ интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{38.22}$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^{x/2}} = 0$$

(в этом легко можно убедиться по правилу Лопиталя) и что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$, очевидно, сходится:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x/2}dx = -\,2e^{-x/2}\Big|_0^{+\infty} = 2.$$

Отсюда в силу следствия теоремы 1 при $f(x) = x^n e^{-x}$ и $g(x) = e^{-x/2}$ вытекает, что интеграл (38.22) сходится.

38.4. Критерий Коши.

Теорема 2 (критерий Коши сходимости интеграла). *Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ существует такое η, что для всех η' и η'', удовлетворяющих условию*

$$\eta < \eta' < b, \qquad \eta < \eta'' < b, \tag{38.23}$$

выполняется неравенство

$$\Big|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\Big| < \epsilon \tag{38.24}$$

(рис. 133).

▷ Если положить

$$\varphi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx, \tag{38.25}$$

то сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ будет означать существование конечного предела функции $\varphi(\eta)$ при $\eta \to b$. Согласно критерию Коши для предела функции (п.6.12) для существования указанного предела необходимо и

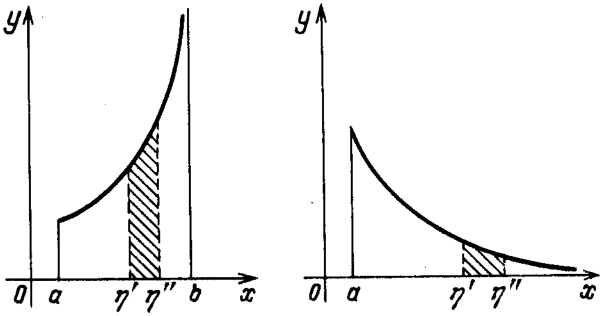


Рис. 133

достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ нашлось такое η, что если $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, то

$$|\varphi(\eta'') - \varphi(\eta')| < \epsilon. \tag{38.26}$$

Так как

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') \underset{(38.25)}{=} \int_a^{\eta''} f(x)\,dx - \int_a^{\eta'} f(x)\,dx = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx,$$

то неравенство (38.24) совпадает с неравенством (38.26). ◁

38.5. Абсолютно сходящиеся интегралы. Как и выше, будем предполагать, что функция f задана на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$.

О п р е д е л е н и е 2. *Несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Т е о р е м а 3 (к р и т е р и й К о ш и а б с о л ю т н о й с х о д и м о с т и и н т е г р а л а). *Для того чтобы интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\epsilon > 0$ *существо-*

вало такое η, $a \leqslant \eta < b$, что если $\eta < \eta' < b$, $\eta < \eta'' < b$, то

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \epsilon. \tag{38.27}$$

Применив критерий Коши сходимости несобственного интеграла (теорема 2) к интегралу $\int_a^b |f(x)|\,dx$, получим утверждение теоремы 3.

Т е о р е м а 4. *Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится.*

▷ Если интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то согласно необходимости выполнения условий критерия Коши абсолютной сходимости интеграла для любого $\epsilon > 0$ существует такое η, что если

$$\eta < \eta' < b, \quad \eta < \eta'' < b, \tag{38.28}$$

то

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right| < \epsilon. \tag{38.29}$$

Но

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|\,dx\right|, \tag{38.30}$$

поэтому, если выполнено условие (38.28), то

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \underset{\substack{(38.30)\\(38.29)}}{<} \epsilon. \tag{38.31}$$

В силу достаточности выполнения условий критерия Коши для сходимости интеграла из (38.28) и (38.31) следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx. \ ◁$$

Если интеграл от абсолютной величины функции сходится, то она называется *абсолютно интегрируемой* (в несобственном смысле) на соответствующем промежутке.

Теорема 4 показывает, что если функция абсолютно интегрируема, то она и просто интегрируема в несобственном смысле. Обратное утверждение неверно. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx. \tag{38.32}$$

Прежде всего, если доопределить подынтегральную функцию при $x = 0$ единицей, то, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, получившаяся функция будет непрерывной, а следовательно интегрируемой по Риману, на любом отрезке $[0, \eta]$, $\eta > 0$. Поэтому определение (38.1) несобственного интеграла (38.32) имеет смысл. Кроме того, интеграл (38.32) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx. \tag{38.33}$$

Для выяснения сходимости этого интеграла проинтегрируем его по частям: если в результате получатся выражения, имеющие смысл и принимающие конечные значения, то это будет являться обоснованием возможности интегрирования по частям и будет означать сходимость интеграла (38.33). Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, d\cos x =$$

$$= -\frac{\cos x}{x}\Bigg|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x\, d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \tag{38.34}$$

Получившийся интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \tag{38.35}$$

абсолютно сходится, ибо $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, а интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится. Следовательно, интегралы (38.35), а потому и (38.33) сходятся.

Покажем теперь, что интеграл (38.33) не сходится абсолютно, т.е. что интеграл $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ расходится. Из неравенства

$$|\sin x| \geqslant \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{38.36}$$

следует, что для любого $\eta > 1$ выполняется неравенство

$$\int_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \underset{(38.36)}{\geqslant} \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x}\, dx. \tag{38.37}$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, т.е

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x} = +\infty, \tag{38.38}$$

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится. Действительно, аналогично случаю интеграла (38.33) имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{\sin 2x}{2x}\Bigg|_1^{+\infty} - \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \sin 2x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx, \tag{38.39}$$

и поскольку $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ абсолютно, а следовательно, и просто сходится. Поэтому из равенства (38.39) следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x} dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx. \tag{38.40}$$

Из неравенства (38.37) и выполнения условий (38.38) и (38.40) получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \lim_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty,$$

т.е. действительно интеграл (38.33) не сходится абсолютно.

З а м е ч а н и е. Отметим одно простое свойство абсолютно сходящихся интегралов. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ абсолютно сходится, а функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$ и ограничена на полуинтервале $[a, b)$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ также абсолютно сходится.

В самом деле, произведение интегрируемых по Риману функций также интегрируемо по Риману (свойство 5° в п. 33.1), поэтому функция $f(x)\, g(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$, и, следовательно, можно говорить о несобственном интеграле $\int\limits_a^b f(x)\, g(x)\, dx$.

Из ограниченности функции $g(x)$ следует, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, b)$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant c$, а поэтому и неравенство

$$|f(x) g(x)| \leqslant c\, |f(x)|,$$

из которого явствует, что сходимость интеграла $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx$ вытекает, согласно признаку сравнения для сходимости интегралов от неотрицательных функций, из сходимости интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

38.6. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Теорема 5 (признак Дирихле). *Если на полуоси* $x \geqslant a$

1) *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную,*

2) *функция g непрерывно дифференцируема и убывает, стремясь к нулю при* $x \to +\infty$, т.е.

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0,$$

то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) g(x)\, dx \tag{38.41}$$

сходится.

▷ Пусть F – ограниченная первообразная функции f на полуоси $x \geqslant a$. Проинтегрируем по частям интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx$, $a < b < +\infty$:

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dF(x) =$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{38.42}$$

Поскольку по условию функция F ограничена на полуоси $x \geqslant a$, то существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \geqslant a$ выполняется неравенство

$$|F(x)| \leqslant c \tag{38.43}$$

и, следовательно,

$$|F(b)g(b)| \leqslant c\,|g(b)|.$$

В силу стремления к нулю функции g при $x \to +\infty$ отсюда получаем

$$\lim_{b \to +\infty} F(b)g(b) = 0. \tag{38.44}$$

Докажем теперь, что интеграл $\int\limits_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$, стоящий в правой части равенства (32.42), абсолютно сходится. Из убывания функции $g(x)$ (второе условие теоремы) вытекает, что $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant a$, т.е.

$$|g'(x)| = -g'(x). \tag{38.45}$$

Далее, из того, что функция g при $x \geqslant a$, убывая, стремится к нулю, когда $x \to +\infty$, следует, что $g(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant a$, в частности,

$$g(b) \geqslant 0. \tag{38.46}$$

В результате

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \underset{(38.45)}{=} -\int_a^b |F(x)|\,g'(x)\,dx \underset{(38.43)}{\leqslant}$$

$$\underset{(38.43)}{\leqslant} -c\int_a^b g'(x)\,dx = c\,[g(a) - g(b)] \underset{(38.46)}{\leqslant} cg(a).$$

Таким образом, множество интегралов $\int\limits_a^b |\, F(x)\, g'(x)\,|\, dx$ при всех $b \geqslant a$ ограничено сверху, а это, согласно лемме п. 38.3, и означает сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} |\, F(x)\, g'(x)\,|\, dx$. Итак, интеграл $\int\limits_a^{+\infty} F(x)\, g'(x)\, dx$ абсолютно, а следовательно, и просто сходится, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b F(x) g'(x)\,dx = \int_a^{+\infty} F(x)\, g'(x)\,dx. \tag{38.47}$$

В силу выполнения условий (38.44) и (38.47) из равенства (38.42) следует существование конечного предела

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, g(x)\,dx = -F(a) g(a) - \int_a^{+\infty} F(x)\, g'(x)\,dx,$$

что и означает сходимость интеграла (38.41) ◁

Т е о р е м а 6 (п р и з н а к А б е л я). *Если на полуоси $x \geqslant a$*

1) *функция f непрерывна и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{38.48}$$

сходится,

2) *функция g непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\,dx$$

сходится.

▷ Покажем, что эта теорема вытекает из предыдущей. Прежде всего отметим, что интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,[-g(x)]\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно и что в силу монотонности функции g одна из функций g или $-g$ убывает. Пусть для определенности убывает функция g. В силу ее ограниченности и монотонности существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=c,$$

а так как функция g убывает, то убывая, стремится к нулю и разность $g(x)-c$ при $x\to+\infty$.

Представим произведение $f(x)\,g(x)$ в виде

$$f(x)g(x)=f(x)[g(x)-c]+cf(x). \tag{38.49}$$

В силу первого условия теоремы интеграл $\int_a^{+\infty} cf(x)\,dx$ сходится. Из этого же условия следует, что интегралы

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt, \qquad x\geqslant a,$$

ограничены. В самом деле, из существования конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

следует ограниченность функции F в некоторой окрестности $U(+\infty)=\{x\colon x>b\}$ бесконечно удаленной точки $+\infty$ (свойство 1° из п. 6.7). На отрезке же $[a,b]$ функция F ограничена, ибо она непрерывна. В результате функция F ограничена на всей полупрямой $x\geqslant a$. Функция F является первообразной функции f, тем самым функция f имеет ограниченную первообразную при $x\geqslant a$.

Таким образом, для интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,[g(x)-c]\,dx$ выполнены все условия признака Дирихле, и потому этот интеграл сходится. В силу доказанного из равенства (38.49) следует сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx. \ \triangleleft$$

Примеры. 1. Интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ в силу признака Дирихле сходится при всех $\alpha>0$. Действительно, функция $f(x)=\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, а функция $g(x)=1/x^\alpha$, убывая стремится к нулю.

2. Интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\operatorname{arctg} x}{x^\alpha}\,dx$, $\alpha>0$, в силу признака Абеля сходится.

В самом деле, как мы уже знаем, интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ сходится, а функция $g(x)=\operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна.

З а м е ч а н и е. Усовершенствовав доказательства теорем 5 и 6, можно показать, что признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов остаются справедливыми, если у функции f условие ее непрерывности заменить условием ее интегрируемости на любом конечном отрезке $[a, b]$, а у функции g отбросить требование ее непрерывной дифференцируемости, оставив все остальные.

38.7. Интегралы от комплекснозначных функций действительного аргумента. Если функция $f(x)$ определена на промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и ее значениями являются комплексные числа, т.е.

$$f(x) = u(x) + iv(x), \qquad u(x) \in \mathbf{R}, \qquad v(x) \in \mathbf{R}, \tag{38.50}$$

то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (собственный или несобственный) определяется равенством

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx. \tag{38.51}$$

Это определение имеет, конечно, смысл только тогда, когда оба интеграла в правой части равенства существуют.

Определение (38.51) сохраняет свойство линейности:

$$\int\limits_a^b (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))\,dx = \lambda_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,dx,$$

$$\lambda_1 \in \mathbf{C}, \quad \lambda_2 \in \mathbf{C}.$$

Интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *несобственным*, если хотя бы один из интегралов $\int\limits_a^b u(x)dx$, $\int\limits_a^b v(x)dx$ несобственный. При этом несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int\limits_a^b u(x)dx$, $\int\limits_a^b v(x)dx$. В этом случае, согласно определению, имеет место равенство (38.51).

Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой*, если абсолютно интегрируемы функции $u(x)$ и $v(x)$.

В силу определения (38.51) ряд свойств интеграла от действительных функций (его линейность, аддитивность по множествам интегрирования, формула Ньютона–Лейбница, правила замены переменного и интегрирования по частям) переносится и на случай комплекснозначных функций.

Если $f(x) = u(x) + iv(x)$, причем действительные функции $u(x)$ и $v(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, также называемый в этом случае *интегралом Римана*, является пределом (комплекснозначных) интегральных сумм

$$\sigma_\tau = \sum_{k=1}^{k_\tau} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

где $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$|\tau|$ – мелкость разбиения τ.

Отсюда тем же методом, что и для действительных функций, легко показать, что если для функции f существует интеграл Римана, то он существует и для ее абсолютной величины, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Предельным переходом справедливость этого неравенства устанавливается и для абсолютно интегрируемых в несобственном смысле комплекснозначных функций.

Подобным же образом вводится и понятие *неопределенного интеграла* от функции (38.50):

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx. \qquad (38.52)$$

Для этого интеграла также имеет место свойство линейности, справедливы формулы замены переменного и интегрирования по частям, которые в силу формулы (38.52) вытекают из соответствующих свойств интегралов от функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения.

Для непрерывных функций f определенный и неопределенный интегралы (38.51) и (38.52), как и в действительной области, связаны соотношением

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C.$$

ГЛАВА 4

РЯДЫ

§ 39. Числовые ряды

39.1. Определение ряда.

Определение 1. *Пара последовательностей* $\{u_n\}$ *и* $\{s_n\}$, $u_n, s_n \in \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, *где*

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{39.1}$$

называется ***рядом***, *или* ***бесконечной суммой***, *и обозначается*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{39.2}$$

Элементы последовательности $\{u_n\}$ *называются* ***членами ряда***, *а элементы последовательности* $\{s_n\}$ *– его частичными суммами.*

Если существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s, \tag{39.3}$$

то он называется *суммой ряда.* В этом случае ряд называется *сходящимся*, и пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Если последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ не стремится к конечному пределу, то ряд (39.2) называется *расходящимся.*

Очевидно, что

$$u_1 = s_1, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{39.4}$$

Из формул (39.1) и (39.4) видно, что каждая из последовательностей $\{u_n\}$ и $\{s_n\}$ однозначно определяет другую. Таким образом, чтобы задать ряд (39.2), достаточно задать одну из последовательностей $\{u_n\}$ или $\{s_n\}$. В этом смысле изучение рядов равносильно изучению последовательностей.

Часто нумерацию членов ряда производят не натуральными числами, а целыми, начиная с нуля, т.е. числами 0, 1, 2, ..., а иногда — начиная с некоторого целого n_0, т.е. числами $n_0, n_0+1, \ldots$

П р и м е р ы. 1. Примером сходящегося ряда является ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \tag{39.5}$$

членами которого являются элементы геометрической прогрессии $\{q^n\}$, $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$. В самом деле, в этом случае

$$s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Следовательно, ряд (39.5) при $|q| < 1$ сходится и

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

2. Примером расходящегося ряда является ряд, все члены которого равны единице: $u_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 = n$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty.$$

39.2. Свойства сходящихся рядов.

Т е о р е м а 1 (н е о б х о д и м ы е у с л о в и я с х о д и м о с т и р я д а). *Если ряд сходится, то последовательность его членов стремится к нулю.*

$\triangleright$ Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ его частичных сумм, то из равенства

$$u_n = s_n - s_{n-1}, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0. \triangleleft$$

П р и м е р. Ряд (39.5), членами которого являются члены геометрической прогрессии $\{q^n\}$, в случае, когда знаменатель прогрессии q по абсолютной величине не менее единицы, т.е. $|q| \geqslant 1$, $q \in \mathbf{C}$, расходится, так как последовательность его членов $\{q^n\}$ не стремится к нулю, ибо $|q^n| \geqslant 1$.

Теорема 2. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n''$ *сходятся, причем их сумма соответственно равна* s' *и* s'', *то при любых* $\lambda' \in \mathbf{C}$, $\lambda'' \in \mathbf{C}$ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda' u_n' + \lambda'' u_n'')$ *также сходится, и если* s *– его сумма, то*

$$s = \lambda' s' + \lambda'' s''.$$

▷ Введем обозначения для частичных сумм рассматриваемых рядов:

$$s_n' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k', \quad s_n'' \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k'', \quad s_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} (\lambda' u_k' + \lambda'' u_k'').$$

Заметив, что

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda' u_k' + \lambda'' u_k'') =$$

$$= \lambda' \sum_{k=1}^{n} u_k' + \lambda'' \sum_{k=1}^{n} u_k'' = \lambda' s_n' + \lambda'' s_n'',$$

получим

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} (\lambda' s_n' + \lambda'' s_n'') =$$

$$= \lambda' \lim_{n \to \infty} s_n' + \lambda'' \lim_{n \to \infty} s_n'' = \lambda' s' + \lambda'' s''. \triangleleft$$

Определение 2. *Для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$$

называется n*-м* **остатком** *данного ряда.*

Если n-й остаток ряда сходится, то его сумму будем обозначать r_n, т.е.

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{39.6}$$

Теорема 3. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-то остаток ряда сходится, то сам ряд также сходится, причем, если*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad r_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k},$$

то при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$s = s_n + r_n. \tag{39.7}$$

▷ Положим

$$s_l^{(n)} \overset{\text{def}}{=} u_{n+1} + \ldots + u_{n+l}, \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

т.е. $s_l^{(n)}$ есть l-я частичная сумма n-го остатка (39.6). Тогда, если $m > n$, то при $l = m - n$

$$s_m = s_n + s_l^{(n)}. \tag{39.8}$$

Поэтому при произвольно фиксированном n и $l \to \infty$ или, что равносильно, при $m \to \infty$ одновременно существуют или не существуют конечные пределы

$$\lim_{m \to \infty} s_m = s \quad \text{и} \quad \lim_{l \to \infty} s_l^{(n)} = r_n.$$

При этом, если они существуют, то, перейдя к пределу в равенстве (39.8) при $l \to \infty$, получим формулу (39.7). ◁

Отметим, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его остатки стремятся к нулю. Это сразу следует из формулы (39.7), так как сходимость ряда означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s$, и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} r_n \underset{(39.7)}{=} \lim_{n \to \infty} (s - s_n) = 0.$$

39.3. Критерий Коши.

Теорема 4 (критерий Коши сходимости ряда). *Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало такое n_0, что для всех $n > n_0$ и всех целых $p \geqslant 0$ имело бы место*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \epsilon. \tag{39.9}$$

▷ Это утверждение сразу следует из критерия Коши существования конечного предела последовательности, примененного к последовательности частичных сумм $\{s_n\}$ данного ряда, ибо

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} = s_{n+p} - s_{n-1}. \,◁$$

Замечание. При $p = 0$ из теоремы следует, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|u_n| < \epsilon$, а это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Таким образом, мы получим еще одно доказательство необходимого условия сходимости ряда (см. теорему 1).

П р и м е р. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots, \tag{39.10}$$

называемый *гармоническим*, и докажем, что он расходится. При любом натуральном n имеем

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}}_{n\text{ слагаемых}}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ слагаемых}}=\frac{1}{2}.$$

Поэтому, если $0<\epsilon<\frac{1}{2}$, то для ряда (39.10) нельзя подобрать номера n_0, указанного в критерии Коши, так как при любом $n=1,2,\ldots$ и $p=n-1$ не выполняется условие (39.9). Следовательно, гармонический ряд расходится.

Отметим, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ членов гармонического ряда стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Таким образом, условие стремления к нулю последовательности членов ряда, являясь необходимым условием сходимости ряда, не является достаточным для этого.

39.4. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Л е м м а 1. *Если члены ряда неотрицательны, то он сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены сверху.*

$\triangleright$ Если члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{39.11}$$

неотрицательны ($u_n\geqslant 0$, $n=1,2,\ldots$), то

$$s_{n+1}=s_n+u_n\geqslant s_n, \tag{39.12}$$

т.е. последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ данного ряда возрастает, а возрастающая последовательность имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Если члены ряда (39.11) неотрицательны, то последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$, согласно (39.12), возрастает и, следовательно, всегда имеет конечный или бесконечный предел s, причем

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\sup_n s_n, \tag{39.13}$$

и поэтому

$$s_n \leqslant s, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{39.14}$$

Если $s = +\infty$, то пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty.$$

З а м е ч а н и е 2. Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда сходится п о к р а й н е й м е р е о д н а п о д п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь последовательности его частичных сумм. Действительно, последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными

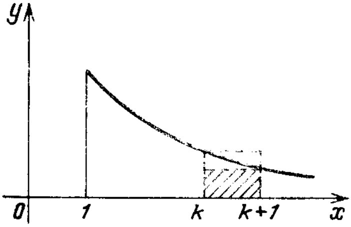


Рис. 134

членами возрастает и потому всегда имеет конечный или бесконечный предел, совпадающий, конечно, с пределом любой ее подпоследовательности.

Т е о р е м а 5 (и н т е г р а л ь н ы й п р и з н а к К о ш и с х о д и м о с т и р я д а). *Если функция f неотрицательна и убывает на полупрямой $x \geqslant 1$, то для того чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{39.15}$$

сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{39.16}$$

$\triangleright$ В силу монотонности функции f на промежутке $[1, +\infty)$ она интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[1, \eta]$, $\eta \in [1, +\infty)$, и потому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (39.16).

Если $k \leqslant x \leqslant k + 1$, $k = 1, 2, \ldots$, то в силу убывания функции f будем иметь

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1).$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[k, k+1]$ длины 1, получим (рис. 134)

$$f(k) \int_k^{k+1} dx \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1) \int_k^{k+1} dx,$$

т.е. получим

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1).$$

Просуммировав получившиеся неравенства по k от 1 до n, придем к основному неравенству

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

т.е. к неравенству

$$s_{n+1} - f(1) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant s_n, \tag{39.17}$$

где

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если ряд (39.15) сходится и его сумма равна s, то $s_n \leqslant s$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. (39.14)), и, следовательно, в силу неравенства (39.17)

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant s, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{39.18}$$

Если $\eta \geqslant 1$, то, выбрав такое натуральное n, что $\eta \leqslant n + 1$, будем иметь (в силу неотрицательности функции f)

$$\int_1^{\eta} f(x)\,dx \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \underset{(39.18)}{\leqslant} s, \tag{39.19}$$

т.е. множество всех интегралов $\int_1^{\eta} f(x)\,dx$, $\eta \geqslant 1$, ограничено сверху и, следовательно (см. п. 38.3), в силу той же неотрицательности функции f интеграл (39.16) сходится.

Пусть, наоборот, известно, что интеграл (39.16) сходится. Из неравенства (39.17) снова в силу неотрицательности функции следует, что

$$s_{n+1} \leqslant f(1) + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т.е. последовательность частичных сумм s_n ряда (39.15) с неотрицательными членами ограничена сверху, и поэтому, согласно лемме, этот ряд сходится. $\triangleleft$

Для применения интегрального признака к исследованию сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами надо подобрать (если это, конечно, возможно) такую убывающую функцию f, что

$$f(n) = u_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и затем исследовать сходимость интеграла (39.16).

Применим этот метод к исследованию сходимости рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \tag{39.20}$$

В этом случае при $\alpha \geqslant 0$ требуемой функцией, очевидно, является функция $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Поскольку интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$, то и ряд (39.20) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. Расходимость ряда (39.20) при $\alpha < 0$ ясна непосредственно: последовательность его членов не стремится к нулю, ибо $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant 1$ при $\alpha < 0$.

Теорема 6 (признак сравнения). *Пусть*

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{39.21}$$

тогда:

1) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится*;

2) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Следствие. *Пусть* $u_n \geqslant 0$, $v_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, *и*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l; \tag{39.22}$$

тогда:

1) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится и* $0 \leqslant l < +\infty$, *то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;

2) *если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *расходится и* $0 < l \leqslant +\infty$, *то расходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

В частности, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$$

то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся и расходятся одновременно.*

$\triangleright$ Доказательство теоремы. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, т.е. имеет конечную сумму $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, и

$$\sigma_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} v_k,$$

то для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sigma_n \underset{(39.14)}{\leqslant} \sigma. \tag{39.23}$$

В силу же условия (39.21) имеем

$$s_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{(39.21)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} v_k = \sigma_n. \tag{39.24}$$

Следовательно,

$$s_n \underset{\substack{(39.23)\\(39.24)}}{\leqslant} \sigma,$$

а это в силу леммы означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, так как если бы он сходился, то в силу уже доказанного сходился бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. $\triangleleft$

$\triangleright$ Доказательство следствия. Если $l < +\infty$, то в силу условия (39.22) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{v_n} < l + 1$, а следовательно, и неравенство

$$u_n < (l+1) v_n, \quad n > n_0. \tag{39.25}$$

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (l+1) v_n$ (теорема 2), а поэтому по признаку сравнения (теорема 6) в силу неравенства (39.25) сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а тогда (см. теорему 3) сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $l > 0$, то выберем число l' так, чтобы $0 < l' < l$. В силу условия (39.22) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{v_n} > l'$, а следовательно, и неравенство

$$u_n > l' v_n, \quad n > n_0. \tag{39.26}$$

Поскольку из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ вытекает, очевидно, и расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l' v_n$, то согласно второму утверждению теоремы 6 из неравенства (39.26) следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а потому и ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. ◁

Заметим, что при применении признака сравнения для исследования сходимости ряда с неотрицательными членами в качестве ряда, с которым сравнивается данный ряд, часто бывает удобным брать ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ сходится, ибо

$$0 \leqslant \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ расходится, ибо

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Теорема 7 (признак Даламбера). *Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{39.27}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l. \tag{39.28}$$

Тогда, если $l < 1$, то ряд (39.27) *сходится, а если $l > 1$, то расходится.*

▷ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (34.28) существует такой номер $n_0 > 1$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$ и, следовательно, неравенство $u_n < q u_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для $n =$

$= n_0 + 1,\ n_0 + 2, \ldots,$ получим

$$u_{n_0+1} < q u_{n_0},$$
$$u_{n_0+2} < q u_{n_0+1} < q^2 u_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{n_0+k} < q^k u_{n_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k u_{n_0} = u_{n_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу условия $0 < q < 1$ сходится, поэтому, согласно признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а следовательно, и ряд (39.27).

Пусть теперь $l > 1$; тогда в силу условия (39.28) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, а поэтому и неравенство $u_n > u_{n-1}$. Применяя его последовательно для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, получим

$$u_{n+1} > u_n > \ldots > u_{n_0+1} > u_{n_0} > 0.$$

Поэтому последовательность членов ряда (39.27) не стремится к нулю, откуда и следует его расходимость. ◁

Теорема 8 (признак Коши). *Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geqslant 0, \tag{39.29}$$

существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l; \tag{39.30}$$

тогда, если $l < 1$, то ряд (39.29) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

▷ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (39.30) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$. Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а поэтому и ряд (39.29).

Если $l > 1$, то в силу условия (39.30) существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1$, т.е. $u_n > 1$, и, следовательно, последовательность членов ряда (39.29) не стремится к нулю, поэтому этот ряд расходится. ◁

Примеры. 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. Это устанавливается, например, с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится. Это сразу можно установить с помощью признака Коши:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

5. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (это сразу следует, например, из интегрального признака сходимости, примененного к указанному ряду), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (см. п. 39.3), причем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1/n+1}{1/n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Здесь использовано соотношение $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$ при $x = \frac{1}{n}$ (см. пример 4 в п. 13.2). Таким образом, среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами, для которых $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, соответственно $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, имеются как сходящиеся $\left(\text{например, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$, так и расходящиеся $\left(\text{например, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$ ряды.

39.5. Знакочередующиеся ряды.

Теорема 9 (Лейбниц). *Если последовательность* $\{u_n\}$ *убывает и стремится к нулю, т.е.*

$$u_n \geqslant u_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} u_n = 0, \tag{39.31}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{39.32}$$

сходится, причем, если

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k,$$

то при любом $n = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$|s_n - s| \leqslant u_{n+1}. \tag{39.33}$$

Прежде всего отметим, что из условия (39.31) следует, что

$$u_n \geqslant 0, \tag{39.34}$$

в силу чего члены ряда (39.32) поочередно то $\geqslant 0$, то $\leqslant 0$.

Ряды вида (39.32) при $u_n > 0$ называются *знакочередующимися.*

$\triangleright$ Частичные суммы с четными номерами ряда (39.32) возрастают. В самом деле,

$$s_{2n+2} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) =$$

$$= s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqslant s_{2n}, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{39.35}$$

ибо в силу убывания последовательности $\{u_n\}$ имеем $u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0$. Кроме того, последовательность $\{s_{2n}\}$ ограничена сверху:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1,$$

ибо

$$u_k - u_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u_{2n} \underset{(39.34)}{\geqslant} 0.$$

Поскольку последовательность $\{s_{2n}\}$ возрастает и ограничена сверху, то она имеет конечный предел

$$s = \lim_{n \to \infty} s_{2n}. \tag{39.36}$$

Покажем, что тот же предел имеет и последовательность частичных сумм с нечетными номерами. Действительно,

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n+1} \underset{(39.31)}{=} 0,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = s. \qquad (39.37)$$

Из (39.36) и (39.37) следует, что последовательность $\{s_n\}$ всех частичных сумм ряда (39.32) имеет конечный предел s, т.е. этот ряд сходится

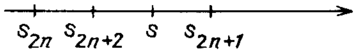


Рис. 135

и s является его суммой. При этом, поскольку последовательность $\{s_{2n}\}$ возрастает, то

$$s_{2n} \leqslant s, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (39.38)$$

Последовательность же $\{s_{2n+1}\}$ убывает:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (u_{2n} - u_{2n+1}) \leqslant s_{2n-1},$$

ибо $u_{2n} \underset{(39.31)}{\geqslant} u_{2n+1}$. Поэтому частичные суммы ряда (39.32) с нечетными номерами стремятся к пределу s, убывая, и, следовательно,

$$s \leqslant s_{2n+1}. \qquad (39.39)$$

Объединив неравенства (39.35), (39.38) и (39.39), получим (рис. 135)

$$s_{2n} \leqslant s_{2n+2} \leqslant s \leqslant s_{2n+1}.$$

Отсюда

$$0 \leqslant s - s_{2n} \leqslant s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1},$$

$$0 \leqslant s_{2n+1} - s \leqslant s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}.$$

Это и означает справедливость неравенства (39.33). ◁

Пример. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится. Это сразу следует из теоремы 9.

39.6. Абсолютно сходящиеся ряды.

Определение 3. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \in \mathbf{C}, \qquad (39.40)$$

называется абсолютно сходящимся, если ряд, членами которого являются абсолютные величины членов данного ряда, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \qquad (39.41)$$

сходится.

Т е о р е м а 10 (к р и т е р и й К о ш и а б с о л ю т н о й с х о д и м о с т и р я д а). *Для того чтобы ряд* (39.40) *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\epsilon > 0$ *существовало такое* n_0, *что для всех номеров* $n > n_0$ *и всех* $p = 0, 1, \ldots$ *выполнялось бы неравенство*

$$\sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}| < \epsilon.$$

$\triangleright$ Это сразу следует из определения абсолютно сходящегося ряда и критерия Коши сходимости ряда (теорема 4 из п. 39.3). $\triangleleft$

Т е о р е м а 11. *Если ряд абсолютно сходится, то он сходится.*

$\triangleright$ Это следует из неравенства

$$\left| \sum_{k=0}^{p} u_{n+k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{p} |u_{n+k}|. \tag{39.42}$$

В самом деле, в силу критерия Коши абсолютной сходимости ряда (39.40) для любого $\epsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $p \geqslant 0$ правая часть неравенства (39.42) меньше ϵ. Следовательно, и левая часть этого неравенства окажется меньше ϵ, т.е. для ряда (39.40) выполняется критерий Коши сходимости рядов, и потому ряд (39.40) сходится. $\triangleleft$

П р и м е р ы. 1. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}$ абсолютно, а значит, и просто сходится. Это следует из равенства $\left|\frac{i^n}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$ и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится (см. п. 39.5), но не абсолютно, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т.е. гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходится (см. п. 39.3).

Т е о р е м а 12. *Если ряд* (39.40) *абсолютно сходится, то любой ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^*, \tag{39.43}$$

составленный из тех же членов, что и данный ряд, но взятых, вообще говоря, в другом порядке, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

$\triangleright$ Пусть ряд (39.40) абсолютно сходится. Докажем, во-первых, что ряд (39.43) сходится и имеет ту же сумму, что и ряд (39.40), а во-вторых, что ряд (39.43) абсолютно сходится. Пусть

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s_m^* = \sum_{k=1}^{m} u_k^*,$$

$$\widetilde{s} = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|, \quad \widetilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|.$$

Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. В силу абсолютной сходимости ряда (39.40) существует такой номер n_0, что

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| = \widetilde{s} - \widetilde{s}_{n_0} < \frac{\epsilon}{2} \tag{39.44}$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$|s - s_{n_0}| = \Big|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{39.45}$$

Выберем номер m_0 так, чтобы частичная сумма $s_{m_0}^*$ ряда (39.43) содержала в качестве своих слагаемых все члены ряда (39.40), входящие в сумму s_{n_0}. Для всякого $m > m_0$ положим

$$s_m^{**} = s_m^* - s_{n_0}. \tag{39.46}$$

В силу выбора номера m_0 слагаемыми суммы $s_{m_0}^{**}$ являются члены ряда (39.40) с номерами, большими n_0. Поскольку абсолютная величина суммы s_m^{**} не превышает суммы абсолютных величин ее слагаемых, то

$$|s_m^{**}| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |u_n| \underset{(39.44)}{<} \frac{\epsilon}{2}. \tag{39.47}$$

Поэтому при $m > m_0$ будем иметь

$$|s - s_m^*| \underset{(39.46)}{=} |s - (s_{n_0} + s_m^{**})| \leqslant$$

$$\leqslant |s - s_{n_0}| + |s_m^{**}| \underset{\substack{(39.45)\\(39.47)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{m \to \infty} s_m^* = s$. Иначе говоря, ряд (39.43) сходится и его сумма равна s, т.е. равна сумме ряда (39.40):

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m^* = s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Второе утверждение – абсолютная сходимость ряда (39.43) – следует из уже доказанного первого утверждения, если его применить к ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{39.48}$$

В самом деле, если ряд (39.40) абсолютно сходится, т.е. сходится ряд (39.48), то по доказанному сходится и ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m^*|,$$

что и означает абсолютную сходимость ряда (39.43). ◁

Теорема 13. *Если ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{39.49}$$

абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов этих рядов, также абсолютно сходится, причем его сумма s равна произведению сумм данных рядов: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s', \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s'', \tag{39.50}$$

то

$$s = s's''. \tag{39.51}$$

Коротко говоря, утверждение теоремы означает, что абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно.

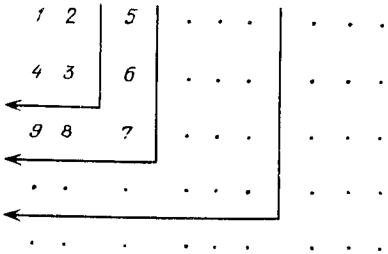
▷ Докажем абсолютную сходимость ряда, составленного из всевозможных попарных произведений $u_m v_n$ членов рядов (39.49). Заметим, что если будет показано, что ряд из этих произведений абсолютно сходится при каком-то их порядке, то согласно предыдущей теореме отсюда будет следовать, что он абсолютно сходится и при любом другом порядке своих членов. Поэтому расположим произведения $u_m v_n$ в конкретном порядке, удобном для доказательства теоремы. Для описания этого порядка составим следующую таблицу:

$$\begin{matrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n & \dots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \tag{39.52}$$

Рассмотрим составленный из элементов таблицы (39.52) ряд

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + \dots, \tag{39.53}$$

в котором порядок членов выбран согласно нумерации элементов таблицы (39.52) по схеме



(39.54)

Докажем абсолютную сходимость ряда (39.53), т.е. сходимость ряда

$$|u_1 v_1| + |u_1 v_2| + |u_2 v_2| + |u_2 v_1| + \ldots \tag{39.55}$$

Положим

$$\widetilde{s}' = \sum_{m=1}^{\infty} |u_m|, \qquad \widetilde{s}'' = \sum_{n=1}^{\infty} |v_n|,$$

$$\widetilde{s}'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|, \qquad \widetilde{s}''_n = \sum_{k=1}^{n} |v_k|,$$

а через $\widetilde{s}_n$ обозначим частичные суммы ряда (39.55). Тогда

$$\widetilde{s}_{n^2} \underset{\substack{(39.52)\\(39.54)}}{=} |u_1||v_1| + |u_1||v_2| + |u_2||v_2| + |u_2||v_1| + \ldots$$

$$\ldots + |u_n||v_1| = (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_1| + \ldots + |v_n|) =$$

$$= \widetilde{s}'_n \widetilde{s}''_n \leqslant \widetilde{s}'\widetilde{s}'' < +\infty. \tag{39.56}$$

Поскольку последовательность $\{\widetilde{s}_{n^2}\}$, очевидно, возрастает (она является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда (39.55), члены которого неотрицательны), то из ее ограниченности сверху (см. (39.56)) следует существование конечного предела

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{s}_{n^2} = \widetilde{s}.$$

Но последовательность $\{\widetilde{s}_n\}$ всех частичных сумм ряда (39.55) в силу неотрицательности его членов также возрастает и потому имеет предел, конечный или бесконечный, совпадающий, конечно, с пределом любой ее подпоследовательности, в частности с пределом $\widetilde{s}$ подпоследовательности $\{\widetilde{s}_{n^2}\}$. Таким образом, существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{s}_n = \widetilde{s},$$

т.е. ряд (39.53) абсолютно сходится и, следовательно, абсолютно сходится любой ряд, полученный перестановкой его членов.

Докажем теперь формулу (39.51). Обозначим через s_n частичные суммы ряда (39.53) и положим

$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad s''_n = \sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Аналогично (39.56) имеем

$$s_{n^2} = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n) = s'_n s''_n. \tag{39.57}$$

Поскольку уже доказано, что ряд (39.53) абсолютно, а следовательно, и просто сходится, то существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s. \tag{39.58}$$

Поэтому

$$s \underset{(39.58)}{=} \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} s_{n^2} \underset{(39.57)}{=} \lim_{n \to \infty} s'_n s''_n =$$
$$= \lim_{n \to \infty} s'_n \lim_{n \to \infty} s''_n \underset{(39.50)}{=} s' s''. \lhd$$

39.7. Условно сходящиеся ряды.

О п р е д е л е н и е 4. *Сходящийся, но не абсолютно сходящийся ряд называется* *у с л о в н о с х о д я щ и м с я р я д о м.*

Примером условно сходящегося ряда является ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (пример 2 из п. 39.6).

Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{39.59}$$

с действительными членами обозначим через $u_1^+, u_2^+, \ldots, u_n^+, \ldots$ и $-u_1^-$, $-u_2^-, \ldots, -u_n^-, \ldots$ соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде (39.59).

Если одно из множеств $\{u_n^-\}$ или $\{u_n^+\}$ окажется конечным, то, отбросив в ряде (39.59) соответствующее конечное число первых членов (от чего сходимость ряда не нарушится), получим остаток ряда, члены которого будут неотрицательны или неположительны и, следовательно, во втором случае неотрицательны после умножения всех членов на -1. И в том, и в другом случае, если исходный ряд сходится, то он очевидным образом абсолютно сходится. Таким образом, если ряд (39.59) условно сходится, то оба множества $\{u_n^+\}$ и $\{u_n^-\}$ бесконечны, т.е. являются последовательностями.

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+, \tag{39.60}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^- . \tag{39.61}$$

Согласно определению члены этих рядов u_n^+ и u_n^- неотрицательны.

Л е м м а 2. *Если ряд* (39.59) *условно сходится, то оба ряда* (39.60) *и* (39.61) *расходятся.*

▷ Положим

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad \widetilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|,$$

$$s_n^+ = \sum_{k=1}^{n} u_k^+, \quad s_n^- = \sum_{k=1}^{n} u_k^- .$$

Поскольку все слагаемые последних трех сумм $\widetilde{s}_n$, s_n^+ и s_n^- неотрицательны, то последовательности этих сумм возрастают и, следовательно, имеют конечные или бесконечные пределы.

Суммы s_n и $\widetilde{s}_n$ можно представить в виде

$$s_n = s_m^+ - s_k^-, \tag{39.62}$$

$$\widetilde{s}_n = s_m^+ + s_k^-, \tag{39.63}$$

$$n = m + k$$

(для заданного ряда m и k зависят от n); при этом условие стремления n к бесконечности равносильно стремлению к бесконечности каждого из индексов m и k. Действительно, если бы при $n \to \infty$ номера $m = m(n)$ (соответственно $k = k(n)$) не стремились к бесконечности, то это означало бы, что в ряде (39.59) имеется лишь конечное число неотрицательных (соответственно отрицательных) членов, а в этом случае ряд (39.59) абсолютно сходился бы, что противоречило бы его условной сходимости. То, что при $k \to \infty$ (соответственно при $m \to \infty$) имеет место $n \to \infty$, очевидно в силу равенства $n = m + k$.

Сложив и вычтя равенства (39.62) и (39.63), получим

$$s_m^+ = \frac{\widetilde{s}_n + s_n}{2}, \quad s_k^- = \frac{\widetilde{s}_n - s_n}{2}. \tag{39.64}$$

По условию ряд (39.59) сходится, но не абсолютно. Это означает, во-первых, что существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s \in \mathbf{R}, \tag{39.65}$$

а во-вторых, что

$$\lim_{n \to \infty} \widetilde{s}_n = +\infty. \tag{39.66}$$

Поэтому в силу равенств (34.64)

$$\lim_{m \to \infty} s_m^+ = \lim_{k \to \infty} s_k^- \underset{\substack{(34.65)\\(34.66)}}{=} +\infty. \tag{39.67}$$

Это и означает, что ряды (39.60) и (39.61) расходятся. ◁

Т е о р е м а 14 (Р и м а н). *Если ряд с действительными членами условно сходится, то, каково бы ни было действительное число s, можно так переставить члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна s.*

▷Пусть члены ряда (39.59) — действительные числа и пусть произвольно задано число s. Рассмотрим ряды (39.60) и (39.61). Наберем из (39.60) подряд столько членов, чтобы их сумма превышала s и чтобы сумма меньшего числа этих членов была не больше s. Точнее, обозначим через n_1 наименьшее натуральное число, при котором выполняется условие

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ > s.$$

Тогда при $n_1 > 1$ имеет место неравенство

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1 - 1}^+ \leqslant s.$$

Возможность выбора такого числа n_1 следует из расходимости ряда (39.60).

Наберем теперь из (39.61) подряд столько членов, чтобы, вычтя их сумму из суммы уже набранных из ряда (39.60) членов, получить значение, меньшее s, и чтобы меньшее число указанных членов ряда (39.61) не обладало этим свойством. Точнее, обозначим через n_2 такое наименьшее натуральное число n_2, что

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- < s,$$

и, следовательно, если $n_2 > 1$, то

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2 - 1}^- \geqslant s.$$

Существование такого числа n_2 следует из расходимости ряда (39.61).

Далее обозначим через n_3 такое наименьшее натуральное число, что

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ > s,$$

и, следовательно, если $n_3 > n_1 + 1$, то

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3 - 1}^+ \leqslant s.$$

Очевидно, $n_3 > n_1$. Продолжая этот процесс, т.е. набирая соответствующие суммы членов поочередно то из ряда (39.60), то из ряда (39.61), получим ряд

$$u_1^+ + \ldots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \ldots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \ldots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \ldots$$
$$\ldots - u_{n_4}^- + \ldots \tag{39.68}$$

Обозначим через s_n, $n = 1, 2, \ldots$, частичные суммы этого ряда. В силу выбора номеров $n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots$ будем иметь

$$
\begin{array}{llll}
s_{n_1} > s, & \text{и если} \quad n_1 > 1, & \text{то} & s_{n_1 - 1} \leqslant s, \\
s_{n_1 + n_2} < s, & \text{и если} \quad n_2 > 1, & \text{то} & s_{n_1 + n_2 - 1} \geqslant s, \\
s_{n_2 + n_3} > s, & \text{и если} \quad n_3 > n_1 + 1, & \text{то} & s_{n_2 + n_3 - 1} \leqslant s, \\
s_{n_3 + n_4} < s, & \text{и если} \quad n_4 > n_2 + 1, & \text{то} & s_{n_3 + n_4 - 1} \geqslant s, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
\tag{39.69}
$$

$$n_1 < n_3 < \ldots < n_{2k+1} < \ldots, \quad n_2 < n_4 < \ldots < n_{2k} < \ldots,$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из этих неравенств следует, что частичная сумма вида $s_{n_m + n_{m+1}}$ отличается от числа s не более чем на абсолютную величину последнего ее члена, т.е. для всех $m = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$\left| s_{n_m + n_{m+1}} - s \right| < u^{\pm}_{n_{m+1}}, \tag{39.70}$$

где через $u^{\pm}_{n_{m+1}}$ обозначена абсолютная величина последнего слагаемого суммы $s_{n_m + n_{m+1}}$ (член $u^{\pm}_{n_{m+1}}$ может принадлежать как ряду (39.60), так и ряду (39.61), поэтому в качестве верхнего индекса написано $\pm$).

По условию ряд (39.59) сходится, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Отсюда в силу неравенства (39.70) получаем, что

$$\lim_{m \to \infty} s_{n_m + n_{m+1}} = s. \tag{39.71}$$

Для любой же частичной суммы s_n ряда (39.67) в силу его построения существует такое m, что выполняется либо неравенство

$$s_{n_{m-1} + n_m} \leqslant s_n \leqslant s_{n_m + n_{m+1}},$$

либо

$$s_{n_{m-1} + n_m} \geqslant s_n \geqslant s_{n_m + n_{m+1}}.$$

Поэтому из равенства (39.71) следует, что и последовательность всех частичных сумм s_n ряда (39.68) имеет своим пределом число s:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

т.е. число s является суммой ряда (39.68). $\lhd$

Теорема Римана показывает, что одно из основных свойств конечных сумм чисел – независимость их суммы от порядка слагаемых (коммутативность сложения) – не переносится на сходящиеся ряды, т.е. на бесконечные суммы: если ряд сходится, но не абсолютно, то его сумма зависит от порядка слагаемых.

Отметим, что и ассоциативный закон сложения непосредственно не переносится на ряды: так, например, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

расходится, а ряды

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots+(1-1)+\ldots,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots-(1-1)-\ldots,$$

полученные из него указанным объединением его членов, сходятся; при этом сумма первого ряда равна 0, а второго 1.

39.8*. Признаки сходимости рядов Дирихле и Абеля. Рассмотрим одно преобразование конечных сумм вида $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j$, принадлежащее Абелю и часто весьма полезное при исследовании сходимости рядов.

Пусть $a_j \in \mathbf{C}$, $b_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$B_k = b_1 + \ldots + b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и, следовательно, $b_1 = B_1$, $b_j = B_j - B_{j-1}$, $j = 2, 3, \ldots, n$. Тогда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_{n-1} + a_n B_n.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n-1} (a_j - a_{j+1})B_j + a_n B_n. \tag{39.72}$$

Это равенство называется *преобразованием Абеля* суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j b_j$.

Если его переписать в виде

$$\sum_{j=2}^{n} a_j (B_j - B_{j-1}) = a_n B_n - a_1 B_1 - \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) B_j,$$

то видно, что его можно рассматривать как дискретный аналог интегрирования по частям.

В дальнейшем числа a_j будут действительными, а b_j – вообще говоря, комплексными.

Лемма 3 (Абель). *Если для всех* $j = 1, 2, \ldots, n-1$ *выполняются неравенства*

$$a_j \leqslant a_{j+1} \quad \text{или} \quad a_j \geqslant a_{j+1}, \tag{39.73}$$

а для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ – *неравенства*

$$|b_1 + b_2 + \ldots + b_k| \leqslant B, \tag{39.74}$$

то

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|). \tag{39.75}$$

$\triangleright$ Имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \underset{(39.72)}{\leqslant} \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{j+1}|\,|B_j| + |a_n|\,|B_n| \underset{(39.74)}{\leqslant}$$

$$\underset{(39.74)}{\leqslant} B\left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| + |a_n|\right) \underset{(39.73)}{=} B\left(\left|\sum_{j=1}^{n-1} (a_j - a_{j+1})\right| + |a_n|\right) =$$

$$= B(|a_1 - a_n| + |a_n|) \leqslant B(|a_1| + 2|a_n|).$$

Мы воспользовались здесь очевидным равенством

$$\sum_{j=1}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n. \ \triangleleft$$

Теорема 15 (признак Дирихле). *Если последовательность* $\{a_n\}$ – *монотонная и*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0, \tag{39.76}$$

а последовательность сумм $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *ограничена, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{39.77}$$

сходится.

$\triangleright$ Из ограниченности последовательности $\{B_n\}$ следует, что существует такое $B > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $|B_n| \leqslant B$ и, следовательно, для всех $n = 2, 3, \ldots$ и всех $p = 0, 1, \ldots$ – неравенства

$$\left|\sum_{k=0}^{p} b_{n+k}\right| = |B_{n+p} - B_{n-1}| \leqslant |B_{n+p}| + |B_{n-1}| \leqslant 2B. \tag{39.78}$$

Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. В силу условия (39.76) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|a_n| < \frac{\epsilon}{6B}. \tag{39.79}$$

Поэтому для всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\left| \sum_{k=0}^{p} a_{n+k} b_{n+k} \right| \underset{\substack{(39.75)\\(39.78)}}{\leqslant} 2B(|a_n| + 2|a_{n+p}|) \underset{(39.79)}{<}$$

$$\underset{(39.79)}{<} 2B\left(\frac{\epsilon}{6B} + \frac{2\epsilon}{6B}\right) = \epsilon,$$

т.е. ряд (39.77) удовлетворяет критерию Коши сходимости рядов и, следовательно, сходится. ◁

Теорема 16 (признак Абеля). *Если последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена и монотонна, а ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{39.80}$$

сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{39.81}$$

▷ Из ограниченности и монотонности последовательности $\{a_n\}$ следует существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, и потому $a_n = a + \alpha_n$, где последовательность $\{\alpha_n\}$ – монотонная и стремится к нулю. Из сходимости же ряда (39.80) следует, что последовательность $\{B_n\}$ его частичных сумм

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

– ограниченная. Теперь имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a + \alpha_n) b_n = a \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n.$$

Первый ряд в правой части равенства сходится по условию теоремы, а второй – в силу признака Дирихле. Поэтому сходится и ряд, стоящий в левой части равенства, т.е. ряд (39.81). ◁

Примеры. 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \tag{39.82}$$

сходится. Действительно, последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, монотонно убывая, стремится к нулю, а

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin ka \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^{n} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha\right] =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \dots$$

Поэтому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha\right| \leqslant \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha\right|}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|},$$

т.е. при $\alpha \neq 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \dots$, все рассматриваемые суммы ограничены. Отсюда в силу признака Дирихле следует, что при $\alpha \neq 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \dots$, ряд (39.82) сходится. Он сходится, очевидно, и при $\alpha = 2m\pi$, $m = 0, \pm 1, \dots$, так как в этом случае все члены его обращаются в нуль.

Итак, ряд (39.82) сходится при всех $\alpha \in \mathbf{R}$.

2. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \cos\frac{\pi}{n} \tag{39.83}$$

сходится по признаку Абеля, ибо сходится ряд (39.82), а последовательность $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ ограничена и монотонна.

3. Для исследования сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \tag{39.84}$$

заметим, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

и, следовательно,

$$u_n \overset{\text{def}}{=} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = a_n + b_n + c_n, \tag{39.85}$$

где

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2n}, \quad c_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакочередующийся; он сходится по признаку Лейбница. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, так как он только постоянным множителем $-1/2$ отличается от гармонического ряда, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится и даже абсолютно, так как условие $c_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $n \to \infty$, означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что $|c_n| \leqslant c/n^{3/2}$, $n = 1, 2, \ldots$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится. Из сказанного в силу соотношения (39.85) следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, т.е. ряд (39.84), расходится.

Последовательности $\{u_n\}$ и $\{a_n\}$ эквивалентны, ибо из соотношения (39.85) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{a_n} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{b_n}{a_n} + \frac{c_n}{a_n}\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1.$$

Таким образом, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ являются примерами рядов, члены которых эквивалентные бесконечно малые при $n \to \infty$, однако первый ряд расходится, а второй сходится. Как было выше доказано (следствие теоремы 6 из п. 39.4), в случае знакопостоянных рядов такая ситуация невозможна.

Подчеркнем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, а в то же время ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, составленный из "главных частей" a_n членов u_n, сходится.

39.9. Суммирование рядов методом средних арифметических. Если заданный числовой ряд расходится, то иногда оказывается полезным определить сумму ряда не обычным способом – как предел его частичных сумм – а каким-либо другим. Рассмотрим один из таких способов, называемый *суммированием рядов методом средних арифметических.*

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbf{C}$, составим из его частичных сумм s_n их средние арифметические

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma$, то заданный ряд называется *суммируемым методом средних арифметических к числу* σ.

П р и м е р. Расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ суммируется методом средних арифметических к числу $1/2$.

В самом деле, в этом случае $s_{2n} = 0$, $s_{2k-1} = 1$, $\sigma_{2k} = 1/2$, $\sigma_{2k-1} = k/(2k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n = 1/2$.

Понятие суммируемости ряда методом средних арифметических является обобщением понятия сходимости ряда, так как, с одной стороны, существуют расходящиеся ряды, суммируемые методом средних арифметических, а с другой – всякий сходящийся ряд суммируем методом средних арифметических к своей сумме. Покажем это.

Л е м м а 4. *Если последовательность $z_n \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится, то последовательность средних арифметических ее членов*

$$w_n = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{39.86}$$

также сходится, и притом к тому же пределу, что и сама последовательность $\{z_n\}$.

$\triangleright$ Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$. Для любых натуральных чисел n_0 и $n > n_0$ выполняется следующее тождество:

$$w_n - z_0 \underset{(39.86)}{=} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} - z_0 =$$

$$= \frac{z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} + \frac{(z_{n_0+1} - z_0) + \ldots + (z_n - z_0)}{n}. \tag{39.87}$$

Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Согласно определению предела последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|z_n - z_0| < \epsilon/2. \tag{39.88}$$

Поскольку $z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0$ – фиксированное число, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то существует такой номер m_0, что для всех $n > m_0$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{39.89}$$

Если теперь $n_\epsilon = \max\{n_0, m_0\}$ и $n > n_0$, то

$$|w_n - z_0| \underset{(39.87)}{\leqslant}$$

$$\underset{(39.87)}{\leqslant} \left| \frac{z_1 + \ldots + z_n - n_0 z}{n} \right| +$$

$$+ \left| \frac{(z_{n_0+1} - z_0) + \ldots + (z_n - z_0)}{n} \right| \underset{\substack{(39.88)\\(39.89)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$. ◁

Т е о р е м а 17. *Если ряд сходится, то он суммируется методом средних арифметических к своей сумме.*

▷ Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ означает, что последовательность его частичных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел, а тогда, согласно лемме 4, и последовательность средних арифметических $\{\sigma_n\}$ членов последовательности $\{s_n\}$ имеет тот же предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n. \ \triangleleft$$

§ 40. Функциональные последовательности и ряды

40.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов. Пусть на некотором множестве X (произвольной природы) задана последовательность функций

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{40.1}$$

принимающих числовые значения (вообще говоря, комплексные, в частности, только действительные). Элементы множества X будем называть *точками*.

Последовательность (40.1) называется *ограниченной на множестве X*, если существует такое число $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant c.$$

Последовательность (40.1) называется *сходящейся на множестве* X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится.

Если последовательность (40.1) сходится на множестве X, то функция f, определенная при каждом $x \in X$ равенством

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

называется *пределом последовательности* (40.1)

Пусть на множестве X задана последовательность числовых функций $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ Множество всех числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, в каждом из которых точка $x \in X$ произвольно фиксирована, называется *рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.2}$$

на множестве X, а функции $u_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, – его *членами*.

Аналогично случаю числовых рядов сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X,$$

называется *частичной суммой ряда* (40.2) *n-го порядка*, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ – его *n-м остатком*.

Ряд (40.2) называется *сходящимся на множестве* X, если последовательность $\{s_n(x)\}$ его частичных сумм сходится на этом множестве. При этом предел частичных сумм

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = s(x), \quad x \in X,$$

называется *суммой ряда* (40.2). В этом случае пишут

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

и говорят, что *функция* $s(x)$ *раскладывается в ряд* (40.2).

Если ряд (40.2) при любом фиксированном $x \in X$ сходится абсолютно, то он называется *абсолютно сходящимся на множестве* X.

Примеры. 1. Рассмотрим ряд, членами которого являются функции

$$u_n(z) = \frac{z^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

определенные на комплексной плоскости $\mathbf{C}$, т.е. ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{40.3}$$

Исследуем абсолютную сходимость этого ряда при фиксированном z с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Таким образом, при любом $z \in \mathbf{C}$ ряд (40.3) абсолютно, а следовательно, и просто сходится; иначе говоря, ряд (40.3) сходится, и притом абсолютно, на всей комплексной плоскости.

2. Рассмотрим ряд

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{40.4}$$

При $x = 0$ все его члены обращаются в нуль и, следовательно, его сумма $s(x)$ так же равна нулю:

$$s(0) = 0. \tag{40.5}$$

При $x \neq 0$ ряд (40.4) представляет собой сумму членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1,$$

и потому

$$s(x) = \frac{x^2}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = 1 + x^2. \tag{40.6}$$

Из формул (40.5) и (40.6) следует, что сумма ряда (40.4) оказывается

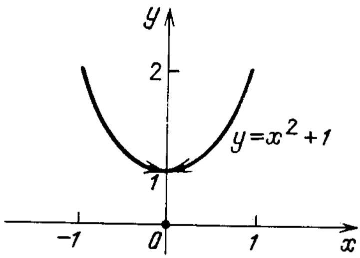


Рис. 136

разрывной в точке $x = 0$ функцией (рис. 136), хотя все его члены, очевидно, непрерывны на всей числовой оси.

Этот пример показывает, что сумма сходящегося и даже абсолютно сходящегося на некотором множестве ряда (члены ряда (40.4) неотрицательны, и потому ясно, что он абсолютно сходится), все члены которого непрерывны, может оказаться разрывной функцией. Таким образом, на сходящиеся и даже абсолютно сходящиеся ряды функций не переносится свойство конечных сумм: сумма конечной совокупности непрерывных на некотором множестве функций также непрерывна на нем. Для того чтобы описать ряды функций, на которые переносится это свойство, введем понятие равномерно сходящихся рядов.

40.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

О п р е д е л е н и е 1. *Функциональная последовательность* (40.1) *называется* р а в н о м е р н о с х о д я щ е й с я *к функции* f н а м н о ж е с т в е X, *если для любого* $\epsilon > 0$ *существует такой номер* n_0, *что для всех точек* $x \in X$ *и всех номеров* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon. \tag{40.7}$$

Очевидно, что если последовательность (40.1) равномерно сходится на множестве X к функции f, то эта последовательность сходится к функции f на рассматриваемом множестве (определение сходимости последовательности функций на множестве см. в п. 40.1).

Если последовательность $\{ f_n \}$ сходится на множестве X к функции f, то пишут

$$f_n \underset{X}{\to} f,$$

а если эта последовательность сходится равномерно к f на указанном множестве, то пишут

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

В символической записи определения сходящейся и равномерно сходящейся на множестве последовательности выглядят соответственно следующим образом:

$$f_n \underset{X}{\to} f \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon),$$

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f \overset{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0 \quad (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

Таким образом, если последовательность $\{ f_n \}$ только просто сходится к функции f на множестве X, то для каждой точки $x \in X$ существует, вообще говоря, свой номер $n_0 = n_0(\epsilon, x)$, для которого при $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

и может оказаться, что для всех точек $x \in X$ невозможно подобрать общий номер n_0, обладающий указанным свойством.

Равномерная же сходимость последовательности $\{f_n\}$ к функции f означает, что, какое бы число $\epsilon > 0$ ни задать, можно подобрать такой номер n_0, что в любой точке $x \in X$ значение функции f_n будет отличаться от значения функции f меньше чем на ϵ (рис. 137).

Лемма 1. *Для того чтобы последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходилась на X к функции f, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{40.8}$$

Значение этой леммы состоит в том, что она сводит понятие равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n\}$ к понятию

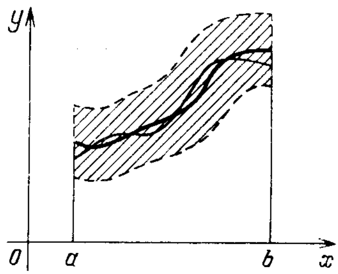


Рис. 137

сходимости числовой последовательности $\{\sup_X |f_n(x) - f(x)|\}$ ("числовой" в широком смысле этого слова: конечное число членов указанной последовательности может обратиться в $+\infty$). В силу этого обстоятельства условие (40.8) часто бывает удобно использовать для выяснения, сходится ли равномерно интересующая нас конкретная последовательность функций.

▷ 1. Пусть $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. Зададим произвольно $\epsilon > 0$, тогда существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, а следовательно, для всех $n > n_0$ – неравенство

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon.$$

Это и означает выполнение условия (40.8).

2. Пусть выполнено условие (40.8). Зададим произвольно $\epsilon > 0$. Тогда в силу определения предела числовой последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

а следовательно, для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ — неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Это означает, что $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. ◁

Следствие. *Если существует стремящаяся к нулю последовательность* $\{\alpha_n\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0,$$

такая, что для всех $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n, \tag{40.9}$$

то последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* X.

▷ Действительно, поскольку неравенство (40.9) выполняется для всех $x \in X$, то

$$\sup_X |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n,$$

а поэтому из условия $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ получаем, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_X |f_n(x) - f(x)| = 0. \ ◁$$

Примеры. 1. Пусть $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $X = [0, q]$, $0 < q < 1$. Предел $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, $x \in [0, q]$, существует и равен нулю:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0.$$

Так как $\sup\limits_{[0, q]} x^n = q^n$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{[0, q]} x^n = \lim_{n \to \infty} q^n = 0.$$

Следовательно, согласно лемме 1, последовательность $\{x^n\}$ равномерно сходится к нулю на отрезке $[0, q]$:

$$x^n \underset{[0, q]}{\rightrightarrows} 0, \quad 0 < q < 1.$$

2. Рассмотрим теперь последовательность функций $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, на полуинтервале $X = [0, 1)$. Здесь снова

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0, \qquad x \in [0, 1),$$

т.е. последовательность $\{x^n\}$ сходится на полуинтервале $[0, 1)$ к функции, равной нулю, однако $\sup\limits_{[0,1)} x^n = 1$, и потому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,1)} x^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0.$$

Следовательно, согласно той же лемме, сходящаяся на полуинтервале $[0, 1)$ последовательность $\{x^n\}$ не сходится на нем равномерно (рис. 138).

3. Последовательность $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится и на отрезке $[0, 1]$, но уже к разрывной функции

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, \text{ если } x = 1. \end{cases}$$

Поскольку последовательность $\{x^n\}$ не сходится равномерно на полуинтервале $[0, 1)$, то она не сходится равномерно и на отрезке $[0, 1]$. Это следует из того, что если неравенство (40.7) не выполняется на каком-то множестве X (в данном случае на $[0, 1)$), то оно, очевидно, не выполняется и на всяком множестве, содержащем в себе X.

Рассмотренная последовательность является еще одним примером сходящейся последовательности непрерывных функций, предел которой уже не является непрерывной функцией (первым примером такого рода у нас была последовательность частичных сумм ряда (40.4)). Ниже будет показано, что если потребовать, чтобы последовательность не только сходилась, но и равномерно сходилась, то подобная ситуация будет уже невозможной (теоремы 7 и 7′).

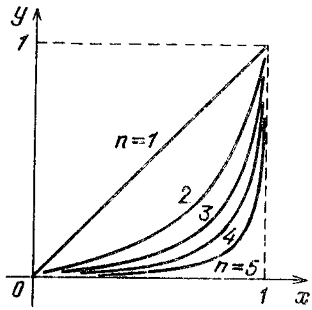


Рис. 138

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Для того чтобы последовательность f_n равномерно сходилась на множестве X к некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовал такой номер n_0, что для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, \ldots$ выполнялось*

неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

В символической записи это условие выглядит следующим образом:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall x \in X \ \forall n > n_0 \ \forall p \geqslant 0 \quad (|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon). \tag{40.10}$$

▷ 1. Пусть $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$. Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Для него в силу (40.7) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2.$$

Поэтому для всех точек $x \in X$, всех номеров $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

т.е. выполняется условие (40.10).

2. Пусть выполняется условие (40.10); тогда в каждой точке $x \in X$ последовательность $\{f_n(X)\}$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и, следовательно, сходится. Обозначим предел последовательности $\{f_n\}$ на множестве X через f:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \quad x \in X. \tag{40.11}$$

Перейдя к пределу в неравенстве (40.10) при $p \to \infty$, в силу (40.11) получим, что для всех номеров $n > n_0$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon.$$

Отсюда сразу следует выполнение условия (40.7). ◁

Определение 2. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in X$, *называется равномерно сходящимся на множестве* X, *если на* X *равномерно сходится последовательность его частичных сумм.*

Таким образом, если

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

то равномерная сходимость рассматриваемого ряда означает, что

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x). \tag{40.12}$$

Очевидно, что равномерно сходящийся на некотором множестве ряд сходится на этом множестве. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.13}$$

сходится и

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$$

— n-й остаток ряда. Поскольку условие (40.12) равносильно условию

$$s_n(x) - s(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0,$$

то условие равномерной сходимости ряда можно записать в виде

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \tag{40.14}$$

Таким образом, равномерная сходимость ряда на множестве X означает равномерную сходимость на X к нулю последовательности его остатков. Отсюда в силу леммы получаем, что для того чтобы ряд (40.13) равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{X} |r_n(x)| = 0. \tag{40.15}$$

Теорема 2 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Если ряд* (40.13) *равномерно сходится на множестве X, то последовательность его членов равномерно стремится к нулю на этом множестве.*

▷ В самом деле,

$$u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{40.16}$$

В случае равномерной сходимости на множестве X ряда (40.13) последовательности $\{s_n(x)\}$ и $\{s_{n-1}(x)\}$ его частичных сумм равномерно стремятся на X к его сумме $s(x)$:

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x), \quad s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0,$$

а это в силу (40.16) и означает, что

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \triangleleft \tag{40.17}$$

Отметим, что согласно лемме 1 для того, чтобы было выполнено условие (40.17), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \to \infty} \sup_X |u_n(x)| = 0.$$

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* (40.13) *равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовал такой номер n_0, что для всех $n > n_0$, всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ и всех $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

$\triangleright$ В силу равенства

$$u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x),$$

где $s_n(x)$ — частичные суммы рассматриваемого ряда, критерий Коши равномерной сходимости рядов сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости последовательностей. $\triangleleft$

Замечание. В дальнейшем нам понадобится следующее простое свойство равномерно сходящихся рядов:

Если ряд (40.13) *равномерно сходится на множестве X, а функция f ограничена на этом множестве, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ также равномерно сходится на X.*

$\triangleright$ Действительно, ограниченность функции f означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$. Поэтому для любых целых $n \geqslant 1$, $p \geqslant 0$ и любой точки $x \in X$ имеет место неравенство

$$|f(x)u_n(x) + f(x)u_{n+1}(x) + \ldots + f(x)u_{n+p}(x)| =$$
$$= |f(x)||u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant c\,|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)|.$$

Из этого неравенства следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда, ибо этому критерию удовлетворяет исходный ряд (40.13). $\triangleleft$

Теорема 4 (признак Вейерштрасса). *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \qquad \alpha_n \geqslant 0, \tag{40.19}$$

сходится и для всех $x \in X$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|u_n(x)| \leqslant \alpha_n, \tag{40.20}$$

то ряд (40.13) *абсолютно и равномерно сходится на множестве X.*

▷ Абсолютная сходимость ряда (40.13) в каждой точке x множества X следует, согласно признаку сравнения (теорема 6 в п. 39.4), из неравенства (40.20) и сходимости ряда (40.19).

Докажем равномерную сходимость ряда (40.13). Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. В силу сходимости ряда (40.19) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < \epsilon,$$

и, следовательно, для всех $x \in X$ и всех $n > n_0$ для остатков $r_n(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеем

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \underset{(40.20)}{\leqslant} \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < \epsilon,$$

т.е.

$$r_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0,$$

а это, согласно (40.14), и означает равномерную сходимость ряда (40.13). ◁

Пример 4. В п. 40.1 было показано, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{40.21}$$

сходится при любом $z \in \mathbf{C}$, в частности, для любого $r > 0$ сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Поскольку из неравенства $|z| \leqslant r$ следует неравенство $\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{r^n}{n!}$, то из признака Вейерштрасса следует, что ряд (40.21) абсолютно и равномерно сходится в круге $K_r = \{z\colon\ |z| \leqslant r\}$ любого радиуса r.

Однако ряд (40.21) не сходится равномерно на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$. Это следует из того, что последовательность членов ряда (40.21) не стремится равномерно к нулю на $\mathbf{C}$, ибо

$$\sup_{\mathbf{C}} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = +\infty,$$

и потому условие (40.18) заведомо не выполнено.

Итак, ряд (40.21) равномерно сходится в круге K_r сколь угодно большого радиуса r, но не сходится равномерно на всей плоскости $\mathbf{C}$. Это означает, что если обозначить через $s(z)$ и $s_n(z)$ сумму и соответственно частичные суммы ряда (40.21), то для любого $\epsilon > 0$ при заданном круге K_r можно так выбрать номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $z \in K_r$ будет выполняться неравенство $|s(z) - s_n(z)| < \epsilon$. Номер n_0 зависит не только от ϵ, но и от r, т.е. $n_0 = n_0(\epsilon, r)$, причем $\lim\limits_{r \to +\infty} n_0(\epsilon, r) = +\infty$. В силу этого и невозможно выбрать такой номер n_0, чтобы при всех $n > n_0$ неравенство $|s(z) - s_n(z)| < \epsilon$ выполнялось для всех $z \in \mathbf{C}$.

40.3*. Специальные признаки равномерной сходимости рядов. Для рядов функций справедливы признаки равномерной сходимости, аналогичные признакам Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов.

Теорема 5 (признак Дирихле – Харди*)). *Если последовательность функций $a_n(x) \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно стремится на множестве X к нулю, т.е.*

$$a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{40.22}$$

и в каждой точке $x \in X$ монотонна, а последовательность функций $b_n(x) \in \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots, x \in X$, такова, что последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \tag{40.23}$$

ограничена на X, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{40.24}$$

равномерно сходится на множестве X.

▷ Согласно условию последовательность частичных сумм

$$B_n(x) = b_1(x) + \ldots + b_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ряда (40.23) ограничена на множестве X, поэтому существует такая постоянная $B > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|B_n(x)| \leqslant B.$$

Отсюда для всех $x \in X$, всех $n = 2, 3, \ldots$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) \right| = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n+1}(x)| \leqslant 2B. \tag{40.25}$$

Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Из условия (40.22) следует, что существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и всех номеров $n > n_0$

*) Г. Харди (1877–1947) – английский математик.

выполняется неравенство

$$|a_n(x)| < \frac{\epsilon}{6B}.$$

Поэтому для любого $x \in X$, любого $n > n_0$ и любого $p = 0, 1, 2, \ldots$, согласно неравенству Абеля (39.75), будем иметь

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \underset{\substack{(39.75)\\(40.25)}}{\leqslant} 2B(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \underset{(40.26)}{<}$$

$$\underset{(40.26)}{<} 2B\left(\frac{\epsilon}{6B} + \frac{2\epsilon}{6B}\right) = \epsilon.$$

Таким образом, ряд (40.24) удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда. ◁

Теорема 6 (признак Абеля – Харди). *Если последовательность функций $a_n(x) \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена на множестве X и монотонна в каждой точке $x \in X$, а ряд (40.23) равномерно сходится на X, то и ряд (40.24) также равномерно сходится на множестве X.*

▷ В силу ограниченности на множестве X последовательности $\{a_n(x)\}$ существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| \leqslant A.$$

В силу же равномерной сходимости ряда (40.23) для произвольно фиксированного $\epsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right| < \frac{\epsilon}{3A}. \tag{40.28}$$

В результате, согласно неравенству Абеля (39.75), для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x)\right| \underset{\substack{(39.75)\\(40.28)}}{\leqslant} \frac{\epsilon}{3A}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \underset{(40.27)}{<}$$

$$\underset{(40.27)}{<} \frac{\epsilon}{3A}(A + 2A) = \epsilon,$$

т.е. снова ряд (40.24) удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда. ◁

Аналогично случаю числовых рядов теорему 6 можно доказать и с помощью теоремы 5.

П р и м е р. В п. 39.8* было показано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{40.29}$$

сходится на всей числовой оси $\mathbf{R}$. Там же было показано, что

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \quad x \neq 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{40.30}$$

Поэтому, если положить $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{a_n\}$ будет монотонной и, как всякая сходящаяся числовая последовательность, может рассматриваться как равномерно сходящаяся, например, на $\mathbf{R}$. Последовательность $\{b_n(x)\}$ ограничена на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $x = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, так как для любой точки x такого отрезка

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \underset{(40.30)}{\leqslant}$$

$$\underset{(40.30)}{\leqslant} \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \leqslant \max_{[a,b]} \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} < +\infty,$$

и, следовательно, последовательность $\left| \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \right|$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена сверху на отрезке $[a, b]$ числом $\max\limits_{[a,b]} \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$. Таким образом, на всяком отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $x = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ряд (40.29) удовлетворяет условиям признака Дирихле – Харди и потому равномерно сходится.

Можно показать, что если отрезок $[a, b]$ содержит точку вида $x = 2\pi m$ при некотором $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то ряд (40.29) не сходится равномерно на этом отрезке.

40.4. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. До сих пор при изучении последовательностей и рядов функций эти функции предполагались заданными на произвольном множестве X. Теперь мы перейдем к изучению свойств непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, в связи с чем на множество X будут накладываться различные ограничения.

Теорема 7. *Если функции* $u_n(x) \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X \subset \mathbf{R}^m$, *непрерывны в точке* $x_0 \in X$ *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.31}$$

равномерно сходится на X, *то его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.32}$$

также непрерывна в точке x_0.

▷ Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Пусть

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

— частичные суммы ряда (40.31). Согласно условиям теоремы последовательность $\{s_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $s(x)$. Поэтому существует такой номер n, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \epsilon/3, \tag{40.33}$$

так как такое неравенство имеет место для всех номеров, начиная с некоторого. Зафиксируем указанный номер n.

Функция $s_n(x)$, являясь конечной суммой непрерывных (согласно условиям теоремы) в точке $x_0 \in X$ функций $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$, сама непрерывна в этой точке. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $x \in U(x_0; \delta)$, выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s_n(x_0)| < \epsilon/3. \tag{40.34}$$

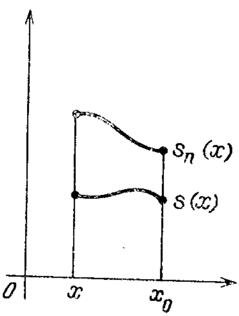


Рис. 139

В силу сказанного для любой точки $x \in X \cap U(x_0; \delta)$ имеем (рис. 139)

$$| s(x) - s(x_0) | =$$
$$= | [s(x) - s_n(x)] + [s_n(x) - s_n(x_0)] + [s_n(x_0) - s(x_0)] | \leqslant$$
$$\leqslant | s(x) - s_n(x) | + | s_n(x) - s_n(x_0) | + | s_n(x_0) - s(x_0) | \underset{\substack{(40.33)\\(40.34)}}{<}$$
$$\underset{\substack{(40.33)\\(40.34)}}{<} \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Это и означает непрерывность функции $s(x)$ в точке x_0. ◁

Отметим, что в условиях теоремы в точке $x_0 \in X$ для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ возможен почленный переход к пределу, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

▷ Действительно, в силу непрерывности функций $s(x)$ и $u_n(x)$ в точке x_0 имеем $\lim\limits_{x \to x_0} s(x) = s(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, $n = 1, 2, \ldots$, поэтому

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} s(x) = s(x_0) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x). \ ◁$$

Выше отмечалось, что изучение рядов равносильно изучению последовательностей (п. 39.1), поэтому каждое предложение о рядах можно перефразировать в соответствующее предложение о последовательностях. Так, теорема 7 в терминах последовательностей звучит следующим образом.

Теорема 7'. *Если последовательность $f_n(x) \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots, x \in X \subset \mathbf{R}^n$, равномерно сходится на множестве X к функции f и все функции f_n непрерывны в точке $x_0 \in X$, то и функция f непрерывна в этой точке.*

Теорема 8. *Пусть функции $u_n(x) \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in [a, b]$, непрерывны на отрезке $[a, b]$ и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.35}$$

равномерно сходится на этом отрезке. Тогда, какова бы ни была точка

$x_0 \in [a, b]$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt \qquad (40.36)$$

также равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ *и*

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt. \qquad (40.37)$$

Равенство (40.37) означает, что в условиях теоремы ряд (40.35) можно почленно интегрировать.

▷ В силу равномерной сходимости ряда (40.35) и непрерывности его членов на отрезке $[a, b]$ его сумма

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (40.38)$$

также непрерывна на этом отрезке (теорема 7), а следовательно, и интегрируема по Риману на любом отрезке с концами в точках $x_0 \in [a, b]$ и $x \in [a, b]$.

Покажем, что ряд (40.36) равномерно сходится к функции

$$\sigma(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{x_0}^{x} s(t)\,dt. \qquad (40.39)$$

Как всегда, положим

$$s_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \qquad r_n(x) \overset{\text{def}}{=} s(x) - s_n(x), \qquad (40.40)$$

а через $\sigma_n(x)$ обозначим частичные суммы ряда (40.36):

$$\sigma_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k(t)\right) dt = \int_{x_0}^{x} s_n(t)\,dt, \qquad (40.41)$$

$n = 1, 2, \ldots$

Имеем

$$|\sigma(x) - \sigma_n(x)| \underset{\substack{(40.39)\\(40.41)}}{=} \left|\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} s_n(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |s(t) - s_n(t)|\,dt\right| \underset{(40.40)}{=} \left|\int_{x_0}^{x} |r_n(t)|\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{[a,\,b]} |r_n(t)| \left|\int_{x_0}^{x} dx\right| = |x - x_0| \sup_{[a,\,b]} |r_n(t)| \leqslant$$

$$\leqslant (b - a) \sup_{[a,\,b]} |r_n(t)|. \qquad (40.42)$$

Согласно условию равномерной сходимости (40.15) ряда (40.35) числовая последовательность $\{(b-a)\sup\limits_{[a,\,b]}|r_n(t)|\}$ стремится к нулю. Поэтому последовательность $\sigma(x)-\sigma_n(x)$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно стремится к нулю на отрезке $[a, b]$ (см. следствие леммы 1 в п. 40.2). Это, согласно тому же условию (40.15), означает, что ряд (40.36) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ и что его сумма равна $\sigma(x)$:

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt.$$

Последнее равенство в силу (40.39) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} u_n(t)\,dt,$$

что согласно (40.38) равносильно равенству (40.37). ◁

Перефразировка теоремы 8 в терминах последовательностей имеет следующий вид.

Т е о р е м а 8′. *Если последовательность непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f_n(x)\in\mathbf{R}$, $n=1, 2, \ldots$, равномерно сходится на этом отрезке к функции $f(x)$, то, какова бы ни была точка $x_0\in[a, b]$, последовательность $\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к функции $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.*

Из этой теоремы следует, в частности, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt,$$

т.е. что в данном случае можно переходить к пределу под знаком интеграла, или коротко: в рассматриваемом случае предел интегралов равен интегралу от предела.

Т е о р е м а 9. *Пусть функции $u_n(x)\in\mathbf{R}$, $n=1, 2, \ldots$, непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$ и ряд, составленный из их производных:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{40.43}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Тогда, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.44}$$

сходится хотя бы в одной точке $x_0\in[a, b]$, то он сходится равномерно на *всем отрезке* $[a, b]$, *его сумма*

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{40.45}$$

является непрерывно дифференцируемой функцией и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{40.46}$$

В силу формулы (40.45) последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Таким образом, в условиях теоремы ряд (40.44) можно почленно дифференцировать.

▷ Положим

$$\sigma(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{40.47}$$

По теореме 8 этот ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)] \tag{40.48}$$

(мы использовали формулу Ньютона – Лейбница), причем ряд, стоящий в правой части этого равенства, в силу той же теоремы 8 равномерно сходится на отрезке $[a, b]$.

По условию теоремы числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, причем, как и для всякого числового ряда, у него сходимость совпадает с равномерной сходимостью. Сумма двух равномерно сходящихся на отрезке $[a, b]$ рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(x_0)], \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

также, очевидно, равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. В силу доказанной сходимости ряда (40.44) формулу (40.48) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0),$$

или (см. (40.45))

$$\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = s(x) - s(x_0). \tag{40.49}$$

Функция $\sigma(t)$ является суммой равномерно сходящегося ряда непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ (см. (40.47)), и поэтому она сама непрерывна на этом отрезке, а тогда функция $\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ (см. п. 34.1) и

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt = \sigma(x). \tag{40.50}$$

В силу формулы (40.49) это означает, что функция $s(x)$ непрерывно дифференцируема и что

$$s'(x) \underset{(40.49)}{=} \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \sigma(t)\,dt \underset{(40.50)}{=} \sigma(x) \underset{(40.47)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \triangleleft$$

Для последовательностей функций аналогичная теорема выглядит следующим образом.

Т е о р е м а 9'. *Если последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f_n(x) \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в некоторой точке $x_0 \in [a, b]$, а последовательность их производных $f'_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой функции $\varphi(x)$, то и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к непрерывно дифференцируемой функции f и $f' = \varphi$.*

Таким образом, если функции f_n непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и

$$f_n \underset{[a,b]}{\rightarrow} f, \qquad f'_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi,$$

то существует f' и $f' = \varphi$.

П р и м е р. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \qquad x > 1,$$

называемую *функцией Римана* (ряд, стоящий в правой части равенства, сходится при $x > 1$; см. (39.20)).

Каково бы ни было $\alpha > 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ и ряд, получающийся его формальным дифференцированием, т.е. ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{n^x}$, равномерно сходятся на полуинтервале $[\alpha, +\infty)$. Это сразу вытекает в силу признака

Вейерштрасса из неравенств $\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^\alpha}$, $0 < \frac{\ln n}{n^x} < \frac{\ln n}{n^\alpha} < \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}$, $x > \alpha$, $0 < \epsilon < \alpha - 1$, справедливых при фиксированном ϵ для достаточно больших n, и из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\epsilon}}$, $0 < \epsilon < \alpha - 1$.

В силу теоремы 9 при любом $x > \alpha$ имеет место равенство

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x},$$

а поскольку $\alpha > 1$ было выбрано произвольно, то это равенство верно и при любом $x > 1$.

§ 41. Степенные ряды

41.1. Радиус сходимости и круг сходимости. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbf{C}, \quad z_0 \in \mathbf{C}, \tag{41.1}$$

числа $a_n \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, называются *коэффициентами ряда* (41.1). С помощью замены переменного $\zeta = z - z_0$ ряд (41.1) может быть преобразован к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{41.2}$$

Поэтому, как правило, мы ограничимся рассмотрением рядов вида (41.2).

Теорема 1 (первая теорема Абеля). *Если степенной ряд* (41.2) *сходится при $z = z_0$, то при любом z таком, что $|z| < |z_0|$, ряд* (41.2) *сходится абсолютно.*

Следствие. *Если ряд* (41.2) *расходится в точке z_0, то в любой точке z такой, что $|z| > |z_0|$, он также расходится.*

▷ Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n \tag{41.3}$$

сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$, и потому существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|a_n z_0^n| \leqslant c. \tag{41.4}$$

Следовательно, при $z_0 \neq 0$ (в случае $z_0 = 0$ утверждение теоремы очевидно и бессодержательно, так как множество таких z, что $|z| < 0$, пусто)

имеем

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \underset{(41.4)}{\leqslant} c \left|\frac{z}{z_0}\right|^n, \qquad (41.5)$$

и если $|z| < |z_0|$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ сходится, ибо является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(\text{ее знаменатель } \left|\frac{z}{z_0}\right| = \frac{|z|}{|z_0|} < 1\right)$. Поэтому по признаку сравнения сходимости рядов из неравенства (41.5) следует, что сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$, т.е. ряд (41.2) абсолютно сходится (рис. 140). ◁

Следствие сразу вытекает из теоремы: если в точке z_0 ряд (41.2) расходится, то при $|z| > |z_0|$ он не может сходиться в точке z, так как тогда бы он по доказанной теореме сходился (и даже абсолютно) в точке z_0.

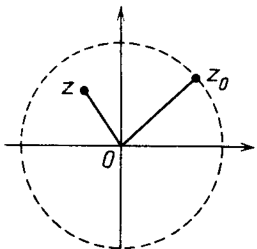


Рис. 140

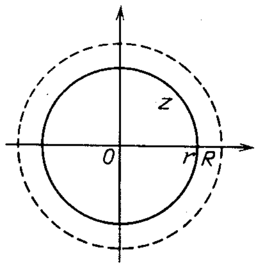


Рис. 141

Рассмотрим степенной ряд (41.2). Он заведомо сходится в точке $z = 0$. Обозначим через X множество всех таких действительных неотрицательных чисел $x \in \mathbf{R}$, что при $z = x$ ряд (41.2) сходится. Поскольку $0 \in X$, то $X \neq \phi$. Пусть

$$R = \sup X. \qquad (41.6)$$

Очевидно, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.

Если $R > 0$ и $z \in \mathbf{C}$ таково, что $|z| < R$, то согласно определению верхней грани всегда существует такое $x \in X$, что

$$|z| < x < R,$$

а так как во всех точках $x \in X$ ряд (41.2) сходится, то по первой теореме Абеля он сходится, и притом абсолютно, в точке z.

Если же $R < +\infty$ и $z \in \mathbf{C}$ таково, что $|z| > R$, то в любой точке $x > 0$ такой, что $R < x < |z|$, в силу определения (41.6) числа R ряд (41.2) расходится, а потому (следствие первой теоремы Абеля) он расходится и в точке z.

Итак, если $|z| < R$, то ряд (41.2) сходится, а если $|z| > R$, то он расходится.

Неравенство $|z| < R$ задает на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ открытый круг радиуса R с центром в точке $z = 0$ (при $R = 0$ этот круг является пустым множеством). Если с помощью замены переменного $z = \zeta - z_0$ перейти от ряда (41.2) к ряду вида (41.1), то круг $|z| < R$ перейдет в круг $|\zeta - z_0| < R$ того же радиуса, но с центром в точке z_0. При этом, если $|z - z_0| < R$, то ряд (41.1) сходится в точке z (и притом абсолютно), а при $|z - z_0| > R$ он расходится.

Определение 1. *Число (конечное или бесконечное) $R \geqslant 0$ называется **радиусом сходимости ряда** (41.1), если для любого z такого, что $|z - z_0| < R$, ряд (41.1) сходится, а для любого z такого, что $|z - z_0| > R$, — расходится.*

Круг в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, состоящий из точек z, для которых $|z - z_0| < R$, называется кругом сходимости ряда (41.1).

Теорема 2. *Для всякого степенного ряда (41.1) существует радиус сходимости R, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$; при этом, если $|z - z_0| < R$, то в точке z ряд (41.1) сходится абсолютно, а если $0 < r < R$, то в круге $|z - z_0| \leqslant r$ ряд (41.1) сходится равномерно.*

$\triangleright$ В силу сказанного выше достаточно рассматривать ряды вида (41.2). Существование радиуса сходимости у каждого ряда (41.2) уже доказано: он определяется по формуле (41.6). Доказано также, что при $|z| < R$ ряд (41.2) абсолютно сходится. Покажем, что если $0 < r < R$ (рис. 141), то в круге

$$|z| \leqslant r \tag{41.7}$$

ряд (41.2) сходится равномерно.

Действительно, из неравенства (41.7) следует, что

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n r^n|, \tag{41.8}$$

а так как $0 < r < R$, то согласно определению радиуса сходимости (41.2) при $z = r$ абсолютно сходится, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$, а тогда в силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса (п. 40.2) ряд (41.2) при $|z| \leqslant r$ равномерно сходится. $\triangleleft$

Отметим, что из равномерной сходимости ряда (41.1) в любом круге $|z - z_0| \leqslant r$, где $0 \leqslant r < R$, и непрерывности каждого члена этого ряда следует, что сумма каждого степенного ряда непрерывна внутри его круга сходимости (теорема 7 из п. 40.4).

Примеры. 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n. \tag{41.9}$$

Для исследования его абсолютной сходимости применим признак Даламбера (п. 39.4):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!\, z^{n+1}|}{|n!\, z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} (n+1) =$$

$$= \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad z \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad z = 0. \end{cases}$$

Следовательно, ряд (41.9) сходится только при $z = 0$, а потому его радиус сходимости равен нулю: $R = 0$.

2. Радиус сходимости R ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{41.10}$$

равен $+\infty$, так как в п. 40.1 было показано, что этот ряд сходится при любом $z \in \mathbf{C}$.

3. Радиус сходимости суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \tag{41.11}$$

равен 1, так как ряд (41.11) сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$ (пп. 39.1 и 39.2). На границе круга сходимости $|z| = 1$ и, следовательно, последовательность членов ряда (41.11) не стремится к нулю, откуда явствует, что во всех точках своего круга сходимости ряд (41.11) расходится.

4. У ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \tag{41.12}$$

радиус сходимости также равен 1. Действительно, при $|z| \leqslant 1$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{z^n}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2} \tag{41.13}$$

и, следовательно, согласно признаку равномерной сходимости Вейерштрасса, ряд (41.12) равномерно, а следовательно, и просто сходится. При $|z| > 1$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z^n|}{n^2} = +\infty$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. теорему 1 из п. 39.1), и, таким образом, ряд (41.12) при $|z| > 1$ расходится.

Отметим, что во в с е х точках границы круга сходимости, т.е. при $|z| = 1$, в силу того же неравенства (41.13) ряд (41.12) сходится.

5. Радиус сходимости R ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{41.14}$$

можно найти, применив признак Даламбера: имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left|\dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\dfrac{z^n}{n}\right|} = |z| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = |z|.$$

Поэтому ряд (41.14) сходится при $|z| < 1$ и расходится при $|z| > 1$. Таким образом, $R = 1$.

В точке $z = 1$ границы круга сходимости ряд (41.14) превращается в гармонический ряд и, следовательно, расходится, а при $z = -1$ получается сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Итак, у ряда (41.14) на границе круга сходимости имеются как точки, в которых он сходится, так и точки, в которых он расходится.

Разобранные примеры показывают, что существуют степенные ряды, у которых радиус сходимости равен нулю (ряд (41.9)), равен конечному положительному числу (ряд (41.11)) и равен бесконечности (ряд (41.10)). На границе круга сходимости ряд может во всех точках сходиться (ряд (41.12)), а может и сходиться в одних точках и расходиться в других (ряд (41.14)).

Функции, раскладывающиеся в степенные ряды, называются *аналитическими*. Точнее, имеет место следующее

Определение 2. *Функция f называется аналитической в точке z_0, если в некоторой окрестности* (см. п. 5.11) *этой точки функция f раскладывается в степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Поскольку в силу определения окрестности точки все точки, достаточно близкие к данной, принадлежат ее окрестности, то радиус сходимости написанного ряда положителен.

Теорема 3* (вторая теорема Абеля). *Если R – радиус сходимости степенного ряда* (41.2) *и этот ряд сходится при $z = R$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, R]$ действительной оси.*

Следствие. *Если ряд* (41.2) *сходится при $z = R$, то его сумма непрерывна на отрезке $[0, R]$ действительной оси.*

▷ Доказательство теоремы. Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n, \tag{41.15}$$

причем по условию теоремы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится. Поскольку этот ряд числовой, то его сходимость можно рассматривать как равномерную сходимость на отрезке $[0, R]$. Последовательность

$$(x/R)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ограничена на отрезке $[0, R]$, ибо если $0 \leqslant x \leqslant R$, то

$$0 \leqslant (x/R)^n \leqslant 1,$$

и монотонна при любом $x \in [0, R]$. Следовательно, в силу признака равномерной сходимости Абеля (п. 40.3*) ряд (41.2) равномерно сходится на отрезке $[0, R]$. ◁

Утверждение следствия вытекает из непрерывности каждого члена ряда (41.2) на отрезке $[0, R]$ и доказанной равномерной сходимости этого ряда на указанном отрезке.

Докажем еще одну лемму для степенных рядов в комплексной области, которая будет использована в следующем параграфе.

Лемма 1. *Радиусы сходимости R, R_1 и R_2 соответственно рядов*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{41.16}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \tag{41.17}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \tag{41.18}$$

равны:

$$R = R_1 = R_2. \tag{41.19}$$

Таким образом, ряды (41.17) и (41.18), получающиеся из (41.16) соответственно с помощью "формального интегрирования и дифференцирования", имеют те же радиусы сходимости, что и исходный ряд. Интегрирование и дифференцирование названо здесь формальным, поскольку для функций комплексного аргумента эти операции у нас не были определены и они были произведены так, как если бы a_n и z были действительными числами.

▷ Из неравенства

$$\left| \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} |z| |a_n z^n| \leqslant |z| |a_n z^n|$$

следует, что если в точке z абсолютно сходится ряд (41.16), то в этой точке абсолютно сходится и ряд (41.17), а это означает, что $R \leqslant R_1$. Из неравенства же

$$|a_n z^n| \leqslant n |a_n z^n| = \frac{1}{|z|} |n a_n z^{n-1}|$$

следует, что если в точке $z \neq 0$ абсолютно сходится ряд (41.18), то в этой точке абсолютно сходится и ряд (41.16), т.е. $R_2 \leqslant R$.

Таким образом,

$$R_2 \leqslant R \leqslant R_1. \tag{41.20}$$

Покажем теперь, что

$$R_1 \leqslant R_2. \tag{41.21}$$

Возьмем какую-либо точку $z_0 \neq 0$ из круга сходимости ряда (41.17) и докажем, что в ней сходится ряд (41.18). Поскольку $|z_0| < R_1$, то существует такое действительное число r, что

$$|z_0| < r < R_1. \tag{41.22}$$

Запишем абсолютную величину члена ряда (41.18) следующим образом:

$$|n a_n z_0^{n-1}| = \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} \left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \left| \frac{z_0}{r} \right|^{n+1} \tag{41.23}$$

В силу сходимости ряда (41.17) при $z = r$, т.е. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$, последовательность членов этого ряда стремится к нулю и потому ограничена, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$\left| \frac{a_n r^{n+1}}{n+1} \right| \leqslant c. \tag{41.24}$$

Положив $q = \left| \frac{z_0}{r} \right|$, из (41.22), (41.23) и (41.24) получим

$$|n a_n z_0^{n-1}| \leqslant c \frac{n(n+1)}{|z_0|^2} q^{n+1}, \quad 0 < q < 1.$$

Поскольку ряд с общим членом $c\dfrac{n(n+1)}{|z_0|^2}q^{n+1}$ сходится (в этом можно легко убедиться, например, с помощью признака Даламбера), то при $z = z_0$ абсолютно сходится и ряд (41.18). Неравенство (41.21) доказано. Из неравенств (41.20) и (41.21) следует, что имеет место равенство (41.19). $\triangleleft$

41.2. Аналитические функции в действительной области. Рассмотрим теперь аналитические функции, раскладывающиеся в степенной ряд с действительными коэффициентами в некоторой окрестности точки действительной оси $\mathbf{R}$. Если такая функция f аналитична в точке $x_0 \in \mathbf{R}$, то в некоторой окрестности этой точки на действительной оси функция f представима в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{41.25}$$

с действительными коэффициентами a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Рассмотрим некоторые свойства подобных функций. Прежде всего заметим, что для всякого степенного ряда (41.25) с действительными коэффициентами (как и для всякого степенного ряда) существует радиус сходимости R (теорема 2 из п. 41.1). В действительной области радиус сходимости R ряда (41.25) обладает тем свойством, что для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ рассматриваемый ряд абсолютно сходится, а при $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ расходится. Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (41.25).

Теорема 4. *Если функция f раскладывается в окрестности точки x_0 в степенной ряд* (41.25) *с радиусом сходимости R, $R > 0$, то*

1) *функция f имеет на интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$ производные всех порядков, которые могут быть найдены из ряда* (41.25) *почленным дифференцированием*:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}, \tag{41.26}$$

$m = 1, 2, \ldots;$

2) *для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}; \tag{41.27}$$

таким образом, ряд (41.25) *можно почленно интегрировать на интервале* $(x_0 - R, x_0 + R)$;

3) *ряды* (41.25), (41.26) *и* (41.27) *имеют одинаковые радиусы сходимости.*

$\triangleright$ В силу леммы п. 41.1 ряды (41.26) и (41.27), получающиеся из ряда (41.25) почленным дифференцированием и интегрированием, имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (41.25). Так как всякий степенной ряд вида (41.25) с радиусом сходимости $R > 0$ на любом отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$, $0 < r < R$, сходится равномерно (теорема 2 из п. 41.1), то утверждения 1) и 2) доказываемой теоремы непосредственно следуют из общих теорем о дифференцируемости и интегрируемости функциональных рядов (теоремы 8 и 9 из п. 40.4). $\triangleleft$

Т е о р е м а 5. *Если функция f раскладывается в некоторой окрестности точки x_0 в степенной ряд*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{41.28}$$

то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{41.29}$$

и, следовательно, справедлива формула

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{41.30}$$

С л е д с т в и е. *Если в некоторой окрестности заданной точки функция раскладывается в степенной ряд, то это разложение единственно.*

$\triangleright$Дифференцируя m раз равенство (41.28) (теорема 4), получим

$$f^{(m)}(x) = m(m-1)\ldots 2 \cdot 1\, a_m + (m+1)m \ldots 2a_{m+1}(x - x_0) +$$
$$+ (m+2)(m+1) \ldots 3a_{m+2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

Положив здесь $x = x_0$, получим

$$f^{(m)}(x_0) = m!a_m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

– формула (41.29) доказана.

Единственность разложения (41.28) следует из того, что его коэффициенты задаются формулами (41.29). $\triangleleft$

41.3. Разложение функций в степенные ряды. Различные способы записи остаточного члена формулы Тейлора.

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть действительная функция f определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{41.31}$$

называется р я д о м Т е й л о р а.

Согласно теоремам 4 и 5 всякая аналитическая в некоторой точке действительной оси функция (41.25) бесконечно дифференцируема в этой точке и раскладывается в ее окрестности в свой ряд Тейлора. Обратное также, очевидно, верно: если действительная функция раскладывается в некоторой окрестности какой-то точки в ряд Тейлора, т.е. в степенной ряд, то она аналитическая в этой точке. Если же функция бесконечно дифференцируема в какой-то точке, то может случиться, что она не равна сумме своего ряда Тейлора ни в какой окрестности этой точки (в этом случае функция в силу сказанного выше заведомо не аналитическая в рассматриваемой точке).

Приведем пример такой функции.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases} \tag{41.32}$$

Если $x \neq 0$, то

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-1/x^2} + \frac{4}{x^6} e^{-1/x^2},$$

вообще,

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, \tag{41.33}$$

где $P_n(t)$ – некоторый многочлен от переменной t (n – его порядковый номер, а не степень), т.е. $f^{(n)}(x)$ имеет вид

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} \sum_{k=0}^{m_n} \frac{\lambda_k}{x^k}, \quad \lambda_k \in \mathbf{R}, \quad m_n \in \mathbf{N}.$$

Найдем предел

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x).$$

(Заметим, что поскольку здесь производные $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, определены пока только при $x \neq 0$, то здесь и ниже предел берется по $x \neq 0$.) Сделав замену переменного $t = 1/x^2$, получим

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x^m} e^{-1/x^2} \right| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Отсюда в силу (41.33) имеем

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0. \tag{41.34}$$

Теперь, заметив, что

$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0),$$

т.е. что функция f непрерывна в точке $x = 0$, получим отсюда (см. следствие 3 теоремы 3 из п. 12.2), что она и дифференцируема в этой точке и что (в силу (41.34) при $n = 1$) $f'(0) = 0$. Следовательно, согласно (41.34), производная f' также непрерывна при $x = 0$. Повторив аналогичное рассуждение для производной f' вместо функции f, получим, что в точке $x = 0$ существует вторая производная f'', что $f''(0) = 0$ и что f'' непрерывна при $x = 0$. Продолжая этот процесс, докажем, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Из него следует, что все члены ряда Тейлора функции (41.32) равны нулю, т.е. указанный ряд имеет вид

$$0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots,$$

а поскольку сама функция $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, то она не равна сумме своего ряда Тейлора ни в какой окрестности точки $x = 0$.

Функция (41.32) является примером бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической в данной точке. То, что она бесконечно дифференцируема в точке $x = 0$, только что было доказано, а то, что она неаналитическая в данной точке (т.е. не раскладывается в степенной ряд), следует из того, что она ни в какой окрестности нуля не является суммой своего ряда Тейлора в этой точке.

Пусть f – бесконечно дифференцируемая в точке x_0 функция,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{41.35}$$

– ее ряд Тейлора,

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{41.36}$$

– частичная сумма порядка $n = 1, 2, \ldots$ ряда (41.35) и

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x) \tag{41.37}$$

– остаточный член формулы Тейлора для функции f (а не сумма остатка ряда (41.35), так как сумма остатка ряда имеет смысл только тогда, когда известно, что ряд сходится; относительно же ряда (41.35) это не предполагалось). Таким образом,

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \tag{41.38}$$

– формула Тейлора для функции f.

Отсюда видно, что для того чтобы функция f равнялась сумме своего ряда Тейлора в некоторой окрестности точки x_0, надо, чтобы в этой окрестности остаточный член формулы Тейлора (41.38) стремился к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0. \tag{41.39}$$

В самом деле, если это имеет место, то из формулы (41.38) следует, что

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x),$$

т.е. $f(x)$ является суммой ряда (41.35).

Для исследования свойства (41.39) остаточного члена $r_n(x)$ установим некоторые новые виды его записи.

Теорема 6. *Если функция f $n+1$ раз непрерывно дифференцируема на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, то остаточный член $r_n(x)$ ее формулы Тейлора (41.38) для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ можно записать в каждом из следующих трех видов:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt, \tag{41.40}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{41.41}$$

где ξ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, т.е. $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \tag{41.42}$$

где $0 < \theta < 1$.

Формула (41.40) называется *остаточным членом формулы Тейлора в интегральной форме*, формула (41.41) – *в форме Лагранжа*, а (41.42) – *в форме Коши*.

Число θ, $0 < \theta < 1$, участвующее в записи остаточного члена $r_n(x)$, зависит от x и от n.

▷ В силу формулы Ньютона – Лейбница имеем

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t).$$

Применив интегрирование по частям к интегралу в правой части этого равенства, получим

$$f(x) = f(x_0) + (-f'(t)(x-t))\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt. \tag{41.43}$$

Эта формула уже доказана нами для $m = 1$ и $m = 2$.

Проинтегрируем по частям последнее слагаемое в правой части равенства (41.43):

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt = -\frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$

$$= -\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt =$$

$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt.$$

Подставим получившееся выражение в (41.43):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}\int_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m dt.$$

В результате получилась формула (41.43), в которой m заменено на $m+1$.

Таким образом, формула Тейлора (41.43) доказана методом математической индукции для всех $m \leqslant n$. При $m = n$ ее остаточный член имеет вид (41.40).

Применим теперь интегральную теорему о среднем значении к интегралу (41.40). Заметив, что функция $(x-t)^n$ не меняет знака, а функция $f^{(n+1)}$ непрерывна на промежутке интегрирования, вынесем за знак интеграла "среднее значение" производной $f^{(n+1)}$ (см. следствие из теоремы п. 33.2):

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит на интервале с концами в точках x_0 и x. Формула (41.41) доказана.

Если применить интегральную теорему о среднем к интегралу (41.40), вынося за знак интеграла среднее значение всей подынтегральной функции (см. п. 33.2), то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \qquad (41.44)$$

где ξ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т.е. $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$. Отсюда $x - \xi = x - x_0 - \theta(x-x_0) = (x-x_0)(1-\theta)$. Подставив это выражение $x - \xi$ в (41.44), получим формулу (41.42). $\triangleleft$

Укажем теперь одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Т е о р е м а 7. *Если функция в окрестности точки x_0 имеет все производные, ограниченные в совокупности на этой окрестности, то функция раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности точки x_0.*

$\triangleright$ Пусть функция f имеет на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ производные всех порядков и они ограничены в совокупности на этом интервале, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant c. \tag{41.45}$$

Заметим, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{41.46}$$

Это следует из того, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ сходится при любом $a \in \mathbf{C}$ (пример 1 из п. 35.1), а равенство (41.46) выражает собой необходимое условие сходимости этого ряда: последовательность членов сходящегося ряда стремится к нулю.

Для того чтобы доказать, что функция f раскладывается в степенной ряд, т.е. в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < h, \tag{41.47}$$

достаточно убедиться в том, что (см. (36.39))

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \tag{41.48}$$

где $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора функции f в точке x_0. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа (см. (36.41)). Из неравенства (41.45) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \underset{(41.45)}{\leqslant} c\,\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{41.49}$$

где x и ξ таковы, что $|\xi - x_0| < |x - x_0| < h$. Так как согласно (41.46) имеет место

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

то в силу неравенства (41.49) при $|x - x_0| < h$ выполняется условие (41.48). $\triangleleft$

41.4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора.

1. Р а з л о ж е н и е в р я д ф у н к ц и и $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого фиксированного $a > 0$ для всех

$x \in (-a, a)$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$0 < f^{(n)}(x) < e^a.$$

Таким образом, на интервале $(-a, a)$ для функции e^x выполнены условия теоремы 7 ($x_0 = 0$) и, следовательно, функция e^x раскладывается в ряд Тейлора на любом конечном интервале, а потому и на всей числовой оси.

Заметив, что в данном случае $f^{(n)}(0) = 1$, получим (см. (41.46))

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{41.50}$$

Напомним, что в п. 40.1 было установлено, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ абсолютно сходится на всей комплексной плоскости (впрочем, это независимо от предыдущего следует согласно первой теореме Абеля и из доказанной здесь сходимости ряда (41.50) на всей действительной числовой оси). В силу формулы (41.50) для действительных $z = x$ его сумма равна e^x. В случае существенно комплексных z его сумму по аналогии обозначают e^z. Таким образом, формула

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{41.51}$$

для существенно комплексных чисел z является определением функции e^z.

Так определенная функция e^z, $z \in \mathbf{C}$, не только совпадает для действительных $z = x$ с известной показательной функцией e^x, но и сохраняет в комплексной области ряд свойств показательной функции действительного аргумента. Например,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad z_1 \in \mathbf{C}, \quad z_2 \in \mathbf{C}. \tag{41.52}$$

Действительно, ряды, полученные из (41.51) при $z = z_1$ и $z = z_2$, абсолютно сходятся, поэтому их можно почленно перемножить; так как получившийся при этом ряд также абсолютно сходится, то его члены можно располагать в произвольном порядке. Соберем все члены, содержащие произведения $z_1^m z_2^n$, с одинаковой суммой $m + n$, расположим эти группы по возрастанию $m + n$, а затем умножим и разделим их на $\frac{1}{(m+n)!}$:

$$e^{z_1} e^{z_2} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m}{m!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \right) =$$

$$= \sum_{m+n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+n} \frac{z_1^{m+n-k}}{(m+n-k)!} \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{m+n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!} \sum_{k=0}^{m+n} \frac{(m+n)!}{(m+n-k)!k!} z_1^{m+n-k} z_2^k =$$

$$= \sum_{m+n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+n)!}(z_1+z_2)^{m+n} = e_1^{z_1+z_2}.$$

2. Разложение в ряды $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$. Заменив в формуле (41.50) x на $-x$ (это означает просто изменение обозначения), получим

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}. \tag{41.53}$$

Сложив и вычтя равенства (41.50) и (41.53), а затем деля их на 2, получим

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \tag{41.54}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{41.55}$$

В правых частях этих формул в силу единственности разложений функций в степенные ряды стоят ряды Тейлора соответственно функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$.

Поскольку функция e^z определена для всех комплексных значений аргумента z, то на существенно комплексные значения аргумента можно распространить и гиперболические функции $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$, положив

$$\operatorname{ch} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Определенные таким образом функции $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$ для комплексных z раскладываются в степенные ряды (41.54) и (41.55), сходящиеся на всей комплексной плоскости.

3. Разложение в ряды $\sin x$ и $\cos x$. Формула Эйлера. Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$ (см. п. 11.1), поэтому $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$ для всех действительных x. Согласно теореме 7 отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей действительной числовой оси. Вспомнив формулу Тейлора для синуса (см. п. 14.2), получим для него ряд Тейлора

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{41.56}$$

Рассуждая аналогично для $\cos x$ и вспоминая его формулу Тейлора, получим

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}. \tag{41.57}$$

В силу первой теоремы Абеля ряды, стоящие в правых частях формул (41.56) и (41.57), сходятся на всей комплексной плоскости. Это позволяет распространить синус и косинус на комплексные значения аргумента, положив для любого комплексного z

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+z}}{(2k+1)\,!}, \tag{41.58}$$

$$\cos z \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}. \tag{41.59}$$

В комплексной области легко установить связь между показательной и тригонометрическими функциями. Заменив z в ряде (41.51) сначала на iz, а затем на $-iz$, получим

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n}{n!}, \qquad e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n z^n}{n!}. \tag{41.60}$$

Заметив, что $i^{2k} = (-1)^k$ и, следовательно, $i^{2k+1} = (-1)^k i$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, из (41.60) получим

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)\,!}.$$

Сравнив эти формулы с (41.58) и (41.59), видим, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{41.61}$$

Из этих формул непосредственно следует также формула

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}. \tag{41.62}$$

Формулы (41.61) и (41.62) называются *формулами Эйлера*. Они, конечно, справедливы и для действительных значений z.

Если в формуле (41.62) $z = \varphi$ – действительное число, то

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}. \tag{41.63}$$

Отсюда следует, что модуль комплексного числа вида $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{R}$, равен 1:

$$|\, e^{i\varphi} \,| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1.$$

Из формулы (41.63) следует также, что комплексное число z с модулем r и аргументом φ, т.е. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, можно записать в виде

$$z = re^{i\varphi}.$$

Положив здесь $r = 1$, $\varphi = \pi$ и, следовательно, $z = -1$, получим

$$e^{i\pi} = -1$$

– удивительную формулу, открытую Эйлером и устанавливающую связь между числами π, i и e. Удивительную потому, что эти числа были открыты в математике в связи с совершенно разными и далекими друг от друга обстоятельствами: число π – как отношение длины окружности к диаметру, мнимая единица i — при решении квадратных уравнений, а число e — как такое основание показательной функции, при котором с ней совпадает ее производная.

Из формулы (41.63) следует неожиданное на первый взгляд свойство функции e^z — она оказывается периодической на комплексной плоскости и ее период равен $2\pi i$. Действительно, так как $e^{2\pi i} \underset{(41.63)}{=} \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, то для любого z имеем $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$.

З а м е ч а н и е. Понятие функции комплексного переменного бывает полезно использовать и при изучении функций действительного аргумента, принимающих только действительные значения. Покажем это на примере вычисления интеграла $\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx$. Применив формулу Эйлера:

$$\sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i},$$

получим

$$\int e^{\alpha x} \sin \beta x\, dx = \frac{1}{2i} \int e^{(\alpha + i\beta)x} dx - \frac{1}{2i} \int e^{(\alpha - i\beta)x} dx =$$

$$= \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{2i(\alpha + i\beta)} - \frac{e^{(\alpha - i\beta)x}}{2i(\alpha - i\beta)} + C =$$

$$= \frac{\alpha e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) - i\beta e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x})}{2i(\alpha^2 + \beta^2)} + C =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C$$

(ср. с вычислением этого интеграла в п. 31.4).

4. Р а з л о ж е н и е в р я д $\ln(1 + x)$. Согласно формуле Тейлора

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ этой формулы в виде Лагранжа. Так как

$$(\ln(1 + x))^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x)^{n+1}},$$

то

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{(n+1)}}{(n+1)(1 + \theta x)^{n+1}}, \qquad 0 < \theta < 1$$

(θ, как всегда, зависит от x и от n).

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $0 < \dfrac{1}{1+\theta x} \leqslant 1$. Поэтому

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{41.64}$$

Если же $-1 < x < 0$, то запишем остаточный член $r_n(x)$ в виде Коши:

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n (1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \, x^{n+1}.$$

Здесь

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta |x|} < 1,$$

ибо в числителе дроби $\dfrac{1-\theta}{1-\theta|x|}$ из 1 вычитается большее число, чем в знаменателе: $\theta |x| < \theta$. Кроме того,

$$\frac{1}{1+\theta x} = \frac{1}{1-\theta |x|} < \frac{1}{1-|x|},$$

ибо $\theta |x| < |x|$. Поэтому при $x \in (-1, 0)$ имеем

$$|r_n(x)| = \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \frac{1}{|1+\theta x|} |x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$

и так как $|x| < 1$, то и здесь

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0, \qquad -1 < x < 0. \tag{41.65}$$

Из (41.64) и (41.65) следует, что для всех $x \in (-1, 1]$ справедливо разложение

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \tag{41.66}$$

При $x = -1$ этот ряд расходится, так как его члены только знаком минус отличаются от членов гармонического ряда, который, как мы знаем, расходится. Расходится ряд, стоящий в правой части формулы (41.66), и при всех x, больших по абсолютной величине единицы, так как в этом случае последовательность его членов не стремится к нулю; более того,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \infty, \qquad |x| > 1.$$

Если воспользоваться второй теоремой Абеля (п. 41.1), отмеченной звездочкой, как необязательной при сокращенной программе, то разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд можно получить косвенным, но более коротким путем. Рассмотрим следующий ряд, представляющий собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad |x| < 1. \tag{41.67}$$

Ряд в правой части равенства сходится равномерно на любом отрезке $[-q, q]$, $0 < q < 1$. Это следует, например, из признака Вейерштрасса, ибо при $|x| \leqslant q$ выполняются, очевидно, неравенства $|(-1)^n x^n| \leqslant q^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится.

Из равномерной сходимости ряда (41.67) вытекает, что его можно почленно интегрировать от 0 до $x \in (-1, 1)$ (теорема 8 из п. 40.4). Выполнив это интегрирование, получим

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{x+1} + \ldots,$$

или, записав правую часть с помощью знака суммирования,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

При этом, согласно указанной теореме, ряд в правой части этого равенства сходится на интервале $(-1, 1)$, а по признаку Лейбница (теорема 9 из п. 39.5) он сходится и в точке $x = 1$. Следовательно, согласно второй теореме Абеля (теорема 3* из. п. 41.1), сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$. Но так как функция $\ln(1+x)$ также непрерывна на этом отрезке, а на интервале $(-1, 1)$ совпадает с суммой рассматриваемого ряда, то, устремив x к 1, получим, что функция $\ln(1+x)$ и сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ совпадают и при $x = 1$. Таким образом, мы снова пришли к разложению функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд на промежутке $(-1, 1]$ (см. (41.66)).

5. Разложение в степенной ряд степени бинома $(1+x)^\alpha$. Формула Тейлора для функции $(1+x)^\alpha$ имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + r_n(x). \tag{41.68}$$

Соответствующий ряд, называемый биномиальным рядом с показателем α, имеет вид

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \tag{41.69}$$

Если α является натуральным числом, то этот ряд содержит лишь конечное число членов, не равных 0, и превращается в известную формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} c_\alpha^n x^n.$$

Будем предполагать, что α не является натуральным числом и что $x \neq 0$, тогда все члены ряда (41.69) не равны 0. Исследуем его абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера. Положив

$$u_n = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \right|,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n+1} |x| = |x|.$$

Следовательно, ряд (41.69) абсолютно сходится при $|x| < 1$ и, поскольку этот ряд степенной, расходится при $|x| > 1$.

Докажем, что суммой ряда (41.69) на интервале $(-1, 1)$ является функция $(1+x)^\alpha$. Для этого исследуем остаточный член $r_n(x)$ в формуле Тейлора (41.68), записав его в виде Коши. Поскольку

$$[(1+x)^\alpha]^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

то

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Положим

$$a_n(x) = \frac{(\alpha-1)[(\alpha-1)-1]\ldots[(\alpha-1)-n+1]}{n!} x^n,$$

$$b_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},$$

$$c_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n,$$

тогда

$$r_n(x) = a_n(x)\, b_n(x)\, c_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{41.70}$$

Сомножитель $a_n(x)$ является членом биномиального ряда с показателем $\alpha - 1$, и так как выше было показано, что любой биномиальный ряд сходится на интервале $(-1, 1)$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0. \tag{41.71}$$

Далее, из неравенств

$$1 - |x| < 1 - \theta|x| \leqslant 1 + \theta x \leqslant 1 + \theta|x| < 1 + |x|,$$

где $-1 < x < 1$, следует, что значения $|b_n(x)|$ заключены между числами $|\alpha x|(1 - |x|)^{\alpha-1}$ и $|\alpha x|(1 + |x|)^{\alpha-1}$, не зависящими от n, т.е. последовательность $\{b_n(x)\}$ ограничена при каждом $x \in (-1, 1)$.

Что же касается последовательности $\{c_n(x)\}$, то она ограничена равномерно на всем интервале $(-1, 1)$:

$$|c_n(x)| = \left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right)^n < 1.$$

В результате из (36.70) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \qquad -1 < x < 1,$$

а это означает, что на интервале $(-1, 1)$ имеет место разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Сходимость ряда, стоящего в правой части равенства, в точках $x = -1$ и $x = 1$ требует дополнительного исследования. Можно показать, что в точке $x = 1$ при $\alpha > -1$ биномиальный ряд сходится, а при $\alpha \leqslant -1$ расходится. В точке $x = -1$ при $\alpha \geqslant 0$ он абсолютно сходится, а при $\alpha < 0$ расходится. При этом, согласно второй теореме Абеля, всякий раз, когда биномиальный ряд (41.69) сходится, его сумма равна $(1 + x)^\alpha$.

41.5*. Формула Стирлинга. Разложение функции $\ln(1 + x)$ в степенной ряд дает возможность легко получить асимптотическую формулу для факториала $n!$ при $n \to \infty$. Эта формула называется *формулой Стирлинга**); она имеет вид

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}, \qquad n \to \infty, \tag{41.72}$$

т.е. отношение $n!$ к выражению, стоящему в правой части этой формулы, стремится к 1 при $n \to \infty$.

*) Д. Стирлинг (1692–1770) – шотландский математик.

$\triangleright$ Действительно, если $|x| < 1$, то

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k+1}.$$

Положив $x = \dfrac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}} =$$
$$= \frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right) > \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\dfrac{1}{2}},$$

откуда

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1.$$

Пропотенцировав и заметив, что функция $\ln x$ возрастает, а $1 = \ln e$, получим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e. \tag{41.73}$$

Положим

$$x_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{41.74}$$

Поскольку, согласно неравенству (41.73),

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1,$$

то последовательность $\{x_n\}$ убывает. Кроме того, она ограничена снизу: $x_n \geqslant 0$. Следовательно, она имеет конечный предел. Обозначим его a:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{41.75}$$

Покажем, что $a \neq 0$. Так как

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}{1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}}=\frac{1}{12n(n+1)},$$

то

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

и, следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Поэтому

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

т.е.

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}}<x_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}. \tag{41.76}$$

Последовательность $y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}$, $n = 1, 2, \ldots$, будучи произведением двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{e^{-\frac{1}{12n}}\}$, имеющих предел, также имеет предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{12n}} \underset{(41.75)}{=} a.$$

Неравенство (41.76) означает, что последовательность $\{y_n\}$ возрастает, поэтому $y_n < a$, а так как $y_n > 0$, то доказано, что $a > 0$.

Из равенства (41.75) следует, что

$$x_n = a(1+\epsilon_n), \tag{41.77}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0.$$

Подставив (41.77) в (41.74), получим

$$n! = a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\epsilon_n). \tag{41.78}$$

Для того чтобы найти значение числа a, вспомним, что по формуле Валлиса (см. (35.9) в п. 35.2)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2. \tag{41.79}$$

Из формулы (41.78) следует, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \underset{(41.78)}{=} a\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{(1+\epsilon_n)^2}{1+\epsilon_{2n}}.$$

Подставив это выражение в формулу Валлиса (41.79), получим

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\,a^2\,\frac{n}{2}\,\frac{(1+\epsilon_n)^4}{(1+\epsilon_{2n})^2} = \frac{a^2}{4}, \tag{41.80}$$

откуда $a = \sqrt{2\pi}$. Следовательно,

$$n! \underset{(41.78)}{=} \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}(1+\epsilon_n), \qquad \lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0,$$

т.е. формула Стирлинга (41.72) доказана. $\lhd$

ГЛАВА 5

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 42. Кратные интегралы

42.1. Объем (мера) в n-мерном пространстве. Пусть $\mathbf{R}^n$ является n-мерным арифметическим пространством точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Множество точек $x \in \mathbf{R}^n$, координаты x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, которых удовлетворяют линейному уравнению вида

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_0 = 0, \quad a_1^2 + \ldots + a_n^2 > 0$$

(a_i – фиксированные числа, $i = 1, 2, \ldots, n$), называется *гиперплоскостью в пространстве* $\mathbf{R}^n$. При $n = 3$ понятие гиперплоскости совпадает с понятием обычной плоскости в $\mathbf{R}^3$.

Зафиксируем целое неотрицательное k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Семейство всевозможных гиперплоскостей

$$x_i = m/10^k, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

разбивает пространство $\mathbf{R}^n$ на n-мерные замкнутые кубы вида

$$Q = \left\{ x\colon \ \frac{m_i}{10^k} \leqslant x_i \leqslant \frac{m_i + 1}{10^k}, \ i = 1, 2, \ldots, n \right\}. \tag{42.1}$$

Совокупность всех таких кубов обозначим T_k и назовем *кубильяжем ранга* k пространства $\mathbf{R}^n$, а кубы Q, входящие в кубильяж T_k, будем называть *кубами ранга* k. Пересечение множества внутренних точек любых двух кубов ранга k пусто – в пересечение двух указанных кубов могут входить только их граничные точки.

Очевидно, что при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ совокупность всех кубов ранга k покрывает все пространство $\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{R}^n = \bigcup_{Q \in T_k} Q. \tag{42.2}$$

По аналогии с формулой для объема обычного трехмерного куба определим объем μQ^n n-мерного куба

$$Q^n = \{ x\colon \ |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant a, \quad i = 1, 2, \ldots, n \}$$

как n-ю степень длины $2a$ его ребра, т.е.

$$\mu Q^n \overset{\text{def}}{=} (2a)^n, \tag{42.3}$$

в частности, согласно этому определению для куба (42.1), длина ребра которого равна 10^{-k}, имеем

$$\mu Q = 10^{-kn}. \tag{42.4}$$

Объем множества S, состоящего из некоторого множества кубов Q_j ранга k,

$$S = \bigcup_j Q_j, \tag{42.5}$$

определим как сумму объемов входящих в него кубов:

$$\mu S = \sum_j \mu Q_j. \tag{42.6}$$

Меру пустого множества будем считать по определению равной нулю:

$$\mu \phi \overset{\text{def}}{=} 0. \tag{42.7}$$

Очевидно, что

$$\mu S \geqslant 0, \tag{42.8}$$

причем, если S состоит из конечного числа кубов ранга k, то μS – конечное число, а если S состоит из бесконечного множества указанных кубов, то $\mu S = +\infty$.

Пусть теперь X – произвольное множество в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $s_k(X)$ множество точек всех тех кубов ранга k, которые целиком содержатся в X, а через $S'_k(X)$ – множество точек всех тех кубов ранга k, каждый из которых пересекается с X:

$$s_k = s_k(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \subset X}} Q, \quad S_k = S_k(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \cap X \neq \phi}} Q. \tag{42.9}$$

Из этого определения следует, что множество $s_k(X)$ содержится в X, а множество $S_k(X)$ содержит X:

$$s_k(X) \subset X \subset S_k(X) \tag{42.10}$$

(множества s_k и S_k могут быть и пустыми).

Кроме того, при возрастании k множества s_k возрастают, а множества S_k убывают (рис. 142):

$$s_0 \subset s_1 \subset \ldots \subset s_k \subset \ldots \subset X \subset \ldots \subset S_k \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0. \tag{42.11}$$

Из (42.6), (42.1) и (42.11) следует, что

$$0 \leqslant \mu s_0 \leqslant \ldots \leqslant \mu s_k \leqslant \ldots \leqslant \mu S_k \leqslant \ldots \leqslant \mu S_0. \tag{42.12}$$

(μs_k, как и μS_k, может быть нулем, положительным числом или $+\infty$.)

Таким образом, последовательность $\{\mu s_k\}$ возрастает, а последовательность $\{\mu S_k\}$ убывает в расширенном множестве действительных чисел $\bar{\mathbf{R}}$, а поэтому для любого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ всегда существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{k\to\infty} \mu s_k, \quad \lim_{k\to\infty} \mu S_k. \tag{42.13}$$

Определение 1. *Первый из пределов* (42.13) *называется нижней (или внутренней) n-мерной мерой Жордана множества* $X \subset \mathbf{R}^n$ *и обозначается* $\mu_* X$:

$$\mu_* X \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu s_k. \tag{42.14}$$

Второй из пределов (42.13) *называется верхней (или внешней)*

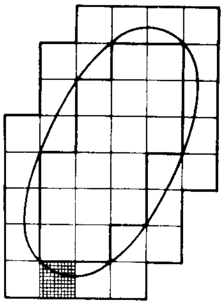


Рис. 142

n-мерной мерой Жордана множества X и обозначается $\mu^* X$:

$$\mu^* X \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu S_k. \tag{42.15}$$

Из (42.12) следует, что

$$0 \leqslant \mu s_k \leqslant \mu S_k \leqslant +\infty.$$

Перейдя в этих неравенствах к пределу при $k \to +\infty$, получим

$$0 \leqslant \mu_* X \leqslant \mu^* X \leqslant +\infty. \tag{42.16}$$

Если нижняя и верхняя n-мерные меры Жордана множества X конечны и равны, т.е.

$$\mu_* X = \mu^* X,$$

то множество X называется измеримым по Жордану и общее значение его верхней и нижней n-мерных мер Жордана называется n-мер-

ной мерой (объемом) Жордана и обозначается

$$\mu X = \mu_* X = \mu^* X. \tag{42.17}$$

В дальнейшем для краткости вместо верхняя (нижняя) n-мерная мера Жордана, n-мерная мера Жордана, измеримое по Жордану множество будем, как правило, говорить просто *верхняя (нижняя) мера, мера, измеримое множество.* Если будет важно указать, какова размерность n пространства, в котором рассматривается мера μ (42.17), то она будет обозначаться μ_n.

В случае $n = 2$ измеримые по Жордану множества называются также *квадрируемыми*, а при $n = 3$ – *кубируемыми.*

Конечно, далеко не всякое множество в $\mathbf{R}^n$ измеримо. Одним из простейших неизмеримых множеств на прямой является множество $\mathbf{Q}_0$ рациональных чисел отрезка $[0, 1]$: как легко убедиться, $\mu_* \mathbf{Q}_0 = 0$, $\mu^* \mathbf{Q}_0 = 1$, $n = 1$.

Замечание 1. Если $\mu^* X = 0$, то множество X измеримо и $\mu X = 0$. В самом деле, в этом случае в силу (42.16) имеем $\mu_* X = \mu^* X = 0$, т.е. $\mu X \underset{(42.17)}{=} 0$.

Замечание 2. Если множество ограничено, то его верхняя, а следовательно, и нижняя меры конечны. В самом деле, если множество X ограничено, то существует куб вида

$$Q_m = \{x\colon |x_i| \leqslant m\}, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{42.18}$$

содержащий в себе множество X,

$$X \subset Q_m, \tag{42.19}$$

а тогда для $k = 0$, а следовательно, и для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняются включения

$$S_k(X) \subset Q_{m+1}, \tag{42.20}$$

где куб Q_{m+1} определяется аналогично кубу (42.18), надо только m заменить на $m + 1$. Из включений (42.20), согласно определениям (42.3) и (42.6), следует, что

$$\mu S_k(X) \leqslant \mu Q_{m+1} \underset{(42.3)}{=} 2^n (m+1)^n.$$

Перейдя здесь к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\mu^* X \leqslant 2^n (m+1)^n,$$

следовательно, верхняя мера множества X конечна, а тогда в силу неравенства (42.16) конечна и его нижняя мера.

Замечание 3. Если множество X неограничено, то

$$\mu^* X = +\infty, \tag{42.21}$$

поэтому, если множество X измеримо, то оно ограничено.

Действительно, множества $S_k(X)$ при любом $k = 0, 1, \ldots$ содержат в себе множество X (см. (42.10)), поэтому при неограниченности множества X множества $S_k(X)$ также неограничены и потому состоят из бесконечного множества кубов ранга k (в противном случае $S_k(X)$, а следовательно, и $X \subset S_k(X)$ были бы ограниченными множествами). Отсюда, согласно определению (42.6), получаем, что при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место $\mu S_k(X) = +\infty$, и поэтому $\mu^* X = \lim\limits_{k\to\infty} \mu S_k(X) = +\infty$.

Если множество X измеримо, то его мера, а следовательно, и верхняя мера (так как они равны) конечны, и потому, согласно доказанному, множество X не может быть неограниченным.

З а м е ч а н и е 4. Нетрудно убедиться, что кубы (42.1) и множества вида (42.5), состоящие из к о н е ч н о г о числа кубов данного ранга, являются измеримыми множествами и их меры в смысле определения (42.17) совпадают соответственно с мерами (42.4) и (42.6).

У п р а ж н е н и е 1. Показать утверждение замечания 4.

Свойства меры.

С в о й с т в о 1 (н е о т р и ц а т е л ь н о с т ь м е р ы). *Для любого измеримого множества $X \subset \mathbf{R}^n$ всегда*

$$\mu X \geqslant 0. \tag{42.22}$$

Это сразу следует из (42.16) и (42.17).

Л е м м а 1 (м о н о т о н н о с т ь н и ж н е й и в е р х н е й м е р). *Если*

$$X_1 \subset X_2, \tag{42.23}$$

то

$$\mu_* X_1 \leqslant \mu_* X_2, \tag{42.24}$$

$$\mu^* X_1 \leqslant \mu^* X_2. \tag{42.25}$$

С л е д с т в и е. *Подмножество множества меры нуль также имеет меру нуль.*

▷ Если $X_1 \subset X_2$, то при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы включения

$$s_k(X_1) \subset s_k(X_2), \qquad S_k(X) \subset S_k(X_2),$$

так как в силу включения $X_1 \subset X_2$ из того, что куб Q ранга k содержится в X_1, следует, что он содержится и в X_2, а из того, что он пересекается с X_1, следует, что он пересекается и с X_2. Поэтому, согласно определению (42.6),

$$\mu s_k(X_1) \leqslant \mu s_k(X_2), \qquad \mu S_k(X_1) \leqslant \mu S_k(X_2).$$

Перейдя в этих неравенствах к пределу при $k \to \infty$, получим неравенства (42.24) и (42.25). ◁

Докажем следствие.

▷ Если $X_1 \subset X_2$ и $\mu X_2 = 0$, то

$$0 \underset{(42.16)}{\leqslant} \mu^* X_1 \underset{(42.25)}{\leqslant} \mu^* X_2 \underset{(42.17)}{=} \mu X_2 = 0,$$

т.е. $\mu^* X_1 = 0$, и, следовательно, согласно замечанию 1, множество X измеримо и его мера равна нулю. ◁

Свойство 2 (монотонность меры). *Если X_1 и X_2 – измеримые множества и $X_1 \subset X_2$, то*

$$\mu X_1 \leqslant \mu X_2. \tag{42.26}$$

Это сразу следует из леммы 1 и определения (42.17) меры измеримого множества.

Изучим теперь связь между измеримостью множества и мерой его границы. Для этого обозначим через $\sigma_k = \sigma_k(X)$ множество точек всех тех кубов Q ранга k, которые пересекаются с заданным множеством X (т.е. содержатся в $S_k(X)$), но не содержатся в X (т.е. не содержатся в $s_k(X)$):

$$\sigma_k = \sigma_k(X) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \subset S_k,\, Q \not\subset s_k}} Q \tag{42.27}$$

(символ $Q \not\subset s_k$ означает, что куб Q не содержится в множестве s_k).

Отметим, что из равенства (42.27) следует, что, вообще говоря, $\sigma_k \neq$ $\neq S_k \setminus s_k$, однако всегда $\sigma_k = \overline{S_k \setminus s_k}$.

Согласно определению (42.6)

$$\mu\sigma_k = \mu S_k - \mu s_k. \tag{42.28}$$

Лемма 2. *Для любого ограниченного множества $X \subset \mathbf{R}^n$ справедливы включения*

$$\partial X \subset \sigma_k(X) \subset S_k(\partial X), \tag{42.29}$$

где ∂X – граница множества X (рис. 143).

▷Сначала докажем включение

$$\partial X \subset \sigma_k(X). \tag{42.30}$$

Поскольку $X \subset S_k(X)$, то и для их замыканий имеет место аналогичное включение

$$\overline{X} \subset \overline{S_k(X)}. \tag{42.31}$$

Множество X ограничено, поэтому $S_k(X)$ состоит из конечного множества замкнутых кубов (42.1) ранга k, и поскольку каждый куб (42.1) является замкнутым множеством, то и $S_k(X)$ – также замкнутое множество: $\overline{S_k(X)} = S_k(X)$. Поэтому $\overline{X} \underset{(42.31)}{\subset} S_k(X)$. Заметив, что граница ∂X множества X содержится в его замыкании $\overline{X}$, т.е. $\partial X \subset \overline{X}$, получим

$$\partial X \subset S_k(X). \qquad (42.32)$$

Если $x \in \partial X$, то в силу (42.32) существует такой куб Q ранга k, что

$$x \in Q \qquad (42.33)$$

и $Q \subset S_k(X)$. Возможны два случая: либо куб Q содержится в $s_k(X)$,

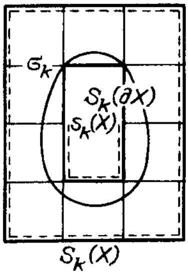


Рис. 143

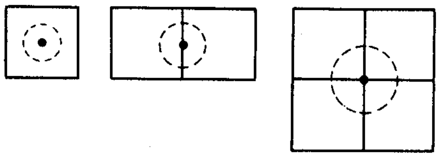


Рис. 144

либо нет. Если он не содержится в $s_k(X)$, то согласно (42.27) он содержится в $\sigma_k(X)$ и, следовательно, там же в силу (42.33) лежит точка x, т.е. в этом случае $x \in \sigma_k(X)$.

Если же $Q \subset s_k(X)$, то из включения (42.33) и включения $s_k(X) \subset X$ следует, что $x \in X$. Поэтому любой куб ранга k, содержащий точку x, содержится в $S_k(X)$. Однако все эти кубы не могут принадлежать $s_k(X)$, так как тогда бы они все лежали в X, а это невозможно, ибо совокупность всех кубов одного и того же ранга, содержащих некоторую точку, содержит и некоторую окрестность этой точки. (На рис. 144 изображен случай $n = 2$; точка может принадлежать одному, двум или четырем квадратам одного ранга; окрестности точки, содержащиеся в их объединении, отмечены пунктиром.) Таким образом, в рассматриваемом случае у точки x нашлась бы окрестность, целиком содержащаяся в множестве X, и точка x оказалась бы внутренней, а не граничной точкой множества X.

Итак, если $Q \subset s_k(X)$, то заведомо существует такой куб Q_0 ранга k, что

$$x \in Q_0 \subset S_k(X), \qquad Q_0 \not\subset s_k(X),$$

а тогда, согласно (42.27),

$$Q_0 \subset \sigma_k(X)$$

и, следовательно, $x \in \sigma_k(X)$, т.е. включение (42.30) доказано.

Докажем теперь, что

$$\sigma_k(X) \subset S_k(\partial X), \qquad (42.34)$$

т.е. что каждый из кубов ранга k, составляющих множество $\sigma_k(X)$, пересекается с границей ∂X множества X. Если $Q \subset \sigma_k(X)$, $Q \in T_k$, то куб Q пересекается с X, ибо в силу (42.27) $Q \subset S_k(X)$, но Q заведомо целиком не лежит в X, ибо в силу того же определения (42.27) куб Q не содержится в $s_k(X)$. Иначе говоря, в кубе Q имеются как точки, принадлежащие множеству X, так и не принадлежащие ему. Пусть, например,

$$a \in Q \cap X, \qquad b \in Q \setminus X.$$

Тогда, как в этом нетрудно убедиться, на отрезке $[a, b]$ с концами в точках a и b существует такая точка ξ, что $\xi \in \partial X$. (Если на отрезке $[a, b]$ ввести параметр t, например, так, чтобы $[a, b] = \{x = a + (b - a)t, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, и положить $t_0 = \sup\limits_{a + (b-a)t \in X} t$, то $\xi = a + (b - a)t_0 \in \partial X$.)

Поскольку же в силу выпуклости куба Q весь отрезок $[a, b]$ содержится в Q, то $\xi \in Q$ и, следовательно, пересечение куба Q с множеством ∂X непусто — оно во всяком случае содержит точку ξ. Отсюда сразу, согласно определению (42.9), вытекает, что куб Q содержится в $S_k(\partial X)$. Включение (42.34) доказано. $\lhd$

Теорема 1. *Для того чтобы множество X было измеримо по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограничено и чтобы его граница ∂X имела меру Жордана, равную нулю*:

$$\mu(\partial X) = 0. \tag{42.35}$$

$\rhd$ 1. Покажем необходимость условий теоремы для измеримости множества. Если множество $X \subset \mathbf{R}^n$ измеримо, то оно ограничено (замечание 3), а пределы $\lim\limits_{k \to \infty} s_k(X)$ и $\lim\limits_{k \to \infty} S_k(X)$, согласно определению измеримости множества, конечны и равны между собой. Поэтому, заметив, что (см. замечание 4)

$$\mu^* \sigma_k = \mu \sigma_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{42.36}$$

и использовав монотонность верхней меры, будем иметь

$$0 \leqslant \mu^* \partial X \underset{(42.30)}{\leqslant} \mu^* \sigma_k \underset{(42.36)}{=} \mu \sigma_k \underset{(42.28)}{=} \mu S_k - \mu s_k \underset{(42.16)}{\to} 0 \tag{42.37}$$

при $k \to \infty$ и, следовательно, $\mu^* \partial X = 0$. Отсюда, согласно замечанию 1, вытекает, что множество ∂X измеримо и что $\mu \partial X = 0$.

2. Докажем достаточность условий (42.35) для измеримости ограниченного множества. Пусть множество $X \subset \mathbf{R}^n$ ограничено и $\mu(\partial X) = 0$. Тогда, согласно определению измеримости множества,

$$\lim_{k \to \infty} \mu S_k(\partial X) = 0. \tag{42.38}$$

Из соотношения (42.28) с помощью включения (42.34) в силу монотонности меры имеем

$$0 \leqslant \mu S_k(X) - \mu s_k(X) \underset{(42.28)}{=} \mu \sigma_k(X) \underset{(42.34)}{\leqslant} \mu S_k(\partial X) \underset{(42.38)}{\to} 0 \tag{42.39}$$

при $k \to \infty$.

Из ограниченности множества X вытекает существование конечных пределов (замечание 2) $\lim\limits_{k \to \infty} S_k(X) = \mu^* X$, $\lim\limits_{k \to \infty} \mu s_k(X) = \mu_* X$, а из (42.39) – их равенство:

$$\mu^* X = \mu_* X,$$

т.е. множество X измеримо по Жордану. $\triangleleft$

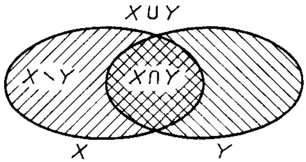


Рис. 145

З а м е ч а н и е 5. Для любой пары множеств X и Y, лежащих в пространстве $\mathbf{R}^n$, справедливы следующие включения:

$$\partial(X \cup Y) \subset \partial X \cup \partial Y, \tag{42.40}$$

$$\partial(X \cap Y) \subset \partial X \cup \partial Y, \tag{42.41}$$

$$\partial(X \setminus Y) \subset \partial X \cup \partial Y, \tag{42.42}$$

т.е. границы объединения, пересечения и разности двух множеств содержатся в объединении их границ (рис. 145). Отсюда по индукции следует, что граница объединения и пересечения конечного числа множеств содержится в объединении их границ.

Докажем, например, включение (42.41). Если $x \in \partial(X \cap Y)$, то в любой окрестности точки x имеются точки, принадлежащие одновременно множествам X и Y, т.е. точка x является точкой прикосновения каждого из них, а следовательно, она либо их граничная, либо внутренняя точка. Внутренней точкой одновременно множеств X и Y она быть не может, так как тогда она была бы и внутренней точкой их пересечения $X \cap Y$, что противоречило бы тому, что она является граничной точкой этого пересечения. Поэтому точка x есть граничная точка по крайней мере одного из множеств X или Y: либо $x \in \partial X$, либо $x \in \partial Y$, либо и то и другое, а тогда $x \in \partial X \cup \partial Y$. Итак, из условия $x \in \partial(X \cap Y)$ следует, что $x \in \partial X \cup \partial Y$.

Л е м м а 3 (п о л у а д д и т и в н о с т ь в е р х н е й м е р ы). *Для любой конечной совокупности множеств $X_1, X_2, \ldots, X_m$ имеет место неравенство*

$$\mu^* \bigcup_{i=1}^{m} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu^* X_i. \tag{42.43}$$

С л е д с т в и е 1. *Если множества $X_1, X_2, \ldots, X_m$ измеримы, то*

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \mu X_i. \tag{42.44}$$

С л е д с т в и е 2. *Объединение конечного числа множеств меры нуль также имеет меру нуль.*

▷ Каковы бы ни были множества $X_1, X_2, \ldots, X_m$, для любого ранга $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство

$$S_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right) = \bigcup_{i=1}^{m} S_k(X_i),$$

ибо, если куб Q пересекается с множеством $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, то он пересекается хотя бы с одним множеством X_i и наоборот. Поэтому

$$\mu S_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right) = \mu \bigcup_{i=1}^{m} S_k(X_i) \underset{(42.6)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{m} \mu S_k(X_i). \tag{42.45}$$

(Строгое неравенство получится в том случае, когда один и тот же куб Q ранга k будет входить в разные множества $S_k(X)$. Это заведомо будет иметь место, если среди X_i имеются пересекающиеся.) Заметив, что

$$\lim_{k \to \infty} \mu S_k\left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i\right) = \mu^* \bigcup_{k=1}^{m} X_i,$$

$$\lim_{k \to \infty} \mu S_k(X_i) = \mu^* X_i,$$

и перейдя в неравенстве (42.45) к пределу при $k \to \infty$, получим неравенство (42.43). ◁

Следствие 1 сразу следует из (42.43), так как в случае измеримости множеств X_i имеют место равенства $\mu^* X_i = \mu X_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если же $\mu X_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то из (42.44) следует, что

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i = 0.$$

Следствие 2 также доказано.

С в о й с т в о 3. *Объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств, а также разность двух измеримых множеств являются измеримыми множествами.*

▷ В самом деле, если множества $X_1, X_2, \ldots, X_m$ измеримы, то они ограничены, а поэтому ограничены их объединение и пересечение; кроме того, их границы ∂X_i имеют меру нуль (теорема 1), следовательно, и объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial X_i$ их границ имеет меру нуль (следствие 2 леммы 3).

Границы же $\partial(\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i)$ и $\partial(\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i)$ объединения и пересечения множеств X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, содержатся в множестве $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \partial X_i$ (замечание 5) и потому также имеют меру нуль (следствие леммы 1). Поэтому сами эти множества $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{m} X_i$ являются измеримыми множествами (теорема 1).

Аналогично доказывается измеримость разности измеримых множеств. $\triangleleft$

Свойство 4 (конечная аддитивность меры). *Мера объединения конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств равна сумме мер этих множеств.*

$\triangleright$Пусть X_i – измеримые множества $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и

$$X_i \cap X_j = \phi, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{42.46}$$

Докажем, что

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{m} X_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu X_i. \tag{42.47}$$

Мы уже имеем неравенство (42.44) даже без предположения о выполнении условия (42.46). Докажем противоположное неравенство. Если куб ранга k содержится в некотором множестве X_i, а следовательно, в $s_k(X_i)$, то он содержится и в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$, а следовательно, в $s_k(\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i)$, поэтому

$$\bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \subset s_k(\bigcup_{i=1}^{m} X_i), \tag{42.48}$$

откуда

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \underset{(42.6)}{\leqslant} \mu s_k(\bigcup_{i=1}^{m} X_i). \tag{42.49}$$

Поскольку множества X_i не пересекаются, то не пересекаются и множества $s_k(X_i) \subset X_i$. В силу этого имеет место равенство

$$\mu \bigcup_{i=1}^{m} s_k(X_i) \underset{(42.6)}{=} \sum_{i=1}^{m} \mu s_k(X_i). \tag{42.50}$$

Из соотношений (42.49) и (42.50) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu s_k(X_i) \leqslant \mu s_k(\bigcup_{i=1}^{m} X_i). \tag{42.51}$$

Множества X_i и $\bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ измеримы, поэтому существуют конечные пределы

$$\lim_{k \to \infty} \mu s_k(X_i) = \mu X_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad \lim_{k \to \infty} \mu s_k \left(\bigcup_{i=1}^{m} X_i \right) =$$

$$= \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i. \tag{42.52}$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве (42.51), в силу равенств (42.52) получим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu X_i \leqslant \mu \bigcup_{i=1}^{m} X_i. \tag{42.53}$$

Из неравенств (42.44) и (42.53) вытекает равенство (42.47), т.е. свойство 4. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 6. Добавление к измеримому множеству множества меры нуль или вычитание его из измеримого множества не нарушает измеримости исходного множества (это следует из свойства 3 меры, поскольку множества меры нуль измеримы) и не меняет его меры (а это следует непосредственно из свойства 4 меры). В частности, если X - измеримое множество, то измеримо и его замыкание $\overline{X}$, ибо

$$\overline{X} = X \cup \partial X,$$

и согласно теореме 1

$$\mu(\partial X) = 0,$$

причем из двух последних равенств следует, что

$$\mu \overline{X} = \mu X. \tag{42.54}$$

В частности, если $\mu X = 0$, то и $\mu \overline{X} = 0$.

З а м е ч а н и е 7. Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство $\mathbf{R}^{n+1}$ как произведение n-мерного $\mathbf{R}^n$ и числовой оси $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

Если $X \subset \mathbf{R}^n$, $[a, b] \subset \mathbf{R}$, то множество $X \times [a, b]$ точек $(x_1, \ldots, x_n, y)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in X$, $y \in [a, b]$, называется *цилиндром с основанием X и образующей* $[a, b]$. Можно доказать, что если X - измеримое в смысле n-мерной меры множество, то цилиндр $X \times [a, b]$ измерим в смысле $(n+1)$-мерной меры и

$$\mu_{n+1}(X \times [a, b]) = (b - a) \mu_n X. \tag{42.55}$$

У п р а ж н е н и е 2. Доказать утверждения замечания 7.

42.2. Множества меры нуль. Укажем два типа множеств, мера Жордана которых всегда равна нулю (на подобные множества нередко удается разбить границу рассматриваемых множеств и тем самым доказать их измеримость).

Т е о р е м а 2. *График всякой непрерывной на компакте функции имеет меру Жордана, равную нулю.*

$\triangleright$ Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$, X – компакт, $y = f(x)$ – непрерывная на X функция, $x \in X$, $y \in \mathbf{R}$ и

$$Y = \{(x, y): x = (x_1, \ldots, x_n) \in X, \; y = f(x)\}$$

– график функции f. Покажем, что $(n+1)$-мерная мера множества Y равна нулю.

Из компактности множества X следует его ограниченность. Поэтому существует n-мерный куб Q_m вида

$$Q_m = \{x: |x_i| \leqslant m, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{42.56}$$

содержащий множество X:

$$X \subset Q_m.$$

Обозначим через Q_{m+1} куб, определяемый аналогично (42.56) с заменой m на $m+1$. Тогда ясно, что

$$X \subset S_k(X) \subset Q_{m+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{42.57}$$

Множество $S_k(X)$ состоит из некоторого конечного числа l_k n-мерных

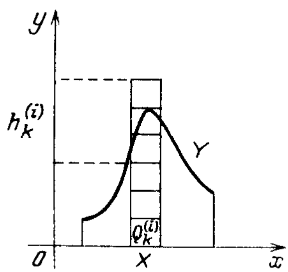


Рис. 146

кубов ранга k; занумеруем их индексами i и обозначим $Q_k^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, l_k$:

$$S_k(X) = \bigcup_{i=1}^{l_k} Q_k^{(i)}. \tag{42.58}$$

Для каждого куба $Q_k^{(i)}$ обозначим через $S_k^{(i)}$ объединение ("столбик") всех $(m+1)$-мерных кубов ранга k, содержащихся в $S_k(Y)$ и проектирующихся в указанный n-мерный куб $Q_k^{(i)}$ (рис. 146). Тогда

$$S_k(Y) = \bigcup_{i=1}^{l_k} S_k^{(i)}, \tag{42.59}$$

т.е. $S_k(Y)$ можно представить в виде объединения столбиков $S_k^{(i)}$. Обозначим через $h_k^{(i)}$ высоту столбика $S_k^{(i)}$, тогда

$$\mu_{n+1} S_k^{(i)} = h_k^{(i)} \mu_n Q_k^{(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, l_k. \tag{42.60}$$

Пусть $\omega_i f$ – колебание функции f на кубе $Q_k^{(i)} \cap X$, т.е. верхняя грань разностей $f(x') - f(x)$, когда $x, x' \in Q_k^{(i)}$ (см. п. 21.3). Тогда (рис. 146)

$$h_k^{(i)} \leqslant \omega_i(f) + \frac{2}{10^k}, \quad i = 1, 2, \ldots, l_k. \tag{42.61}$$

Зададим теперь произвольно $\epsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна на компакте X, то она и равномерно непрерывна на нем (теорема 3 из п. 21.3). Следовательно, существует такое $\delta > 0$, что если ранг k таков, что диаметр $10^{-k}\sqrt{n}$ куба ранга k меньше δ, то колебание $\omega_i(f)$ функции f на каждом кубе $Q_k^{(i)}$ меньше ϵ.

Второе слагаемое в правой части неравенства (42.61) стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому существует такой ранг k_0, что при $k > k_0$ выполняется неравенство $\omega_i(f) + \dfrac{2}{10^k} < \epsilon$, а следовательно, в силу (42.61) и неравенство

$$h_k^{(i)} < \epsilon. \tag{42.62}$$

В результате при $k > k_0$ имеем

$$\mu_{n+1} S_k(Y) \underset{\substack{(42.59)\\(42.6)}}{=} \sum_{i=1}^{l_k} \mu_{n+1} S_k^{(i)} \underset{(42.60)}{=} \sum_{i=1}^{l_k} h_k^{(i)} \mu_n Q_k^{(i)} \underset{(42.62)}{<}$$

$$\underset{(42.62)}{<} \epsilon \sum_{i=1}^{l_k} \mu_n Q_k^{(i)} \underset{(42.58)}{=} \epsilon \mu_n S_k(X) \underset{(42.57)}{\leqslant} \epsilon \mu_n Q_{m+1}.$$

Поскольку $\epsilon > 0$ было выбрано произвольно, а $\mu_n Q_{m+1}$ – фиксированное число, то

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{n+1} S_k(Y) = 0.$$

Это и означает, что $\mu_{n+1} Y = 0$. $\triangleleft$

Из теоремы 2 следует, что если граница подмножества n-мерного пространства представима как объединение конечного числа графиков непрерывных на некоторых компактах функций $n-1$ переменных, то это подмножество измеримо по Жордану, так как его граница имеет n-мерную меру Жордана, равную нулю. Простейшим примером такого множества при $n = 2$ является криволинейная трапеция, порожденная графиком непрерывной на отрезке функции (см. п. 37.1).

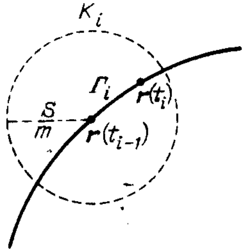


Рис. 147

Теорема 3. *Всякая плоская спрямляемая кривая имеет двумерную меру (площадь), равную нулю.*

$\triangleright$ Пусть $\Gamma = \{ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), a \leqslant t \leqslant b \}$ – плоская спрямляемая кривая ($\boldsymbol{r}(t)$ – точка плоскости $\mathbf{R}^2$) и S – ее длина. Разобьем кривую Γ точками $\boldsymbol{r}(t_i)$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_m = b$, на m равных по длине дуг $\Gamma_i = \{ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t),\ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i \}$, $i = 1, 2, \ldots, m$: длина Γ_i равна

$$S/m. \tag{42.63}$$

Пусть K_i – замкнутый круг с центром в точке $\boldsymbol{r}(t_{i-1})$ и радиуса S/m; тогда (см. рис. 147)

$$\Gamma_i \underset{(42.63)}{\subset} K_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и, следовательно,

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{m} \Gamma_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

Поэтому

$$\mu^* \Gamma \underset{(42.25)}{\leqslant} \mu^* \Big(\bigcup_{i=1}^{m} K_i \Big) \underset{(42.43)}{\leqslant} \sum_{i=1}^{m} \mu^* K_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu K_i = \sum_{i=1}^{m} \pi \left(\frac{S}{m} \right)^2 = \pi \left(\frac{S}{m} \right)^2 \sum_{i=1}^{m} 1 = \frac{\pi S^2}{m} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{42.64}$$

Мы воспользовались здесь равенством $\mu^* K_i = \mu K_i$. Справедливость его вытекает из того, что круг – измеримое множество, так как его границу можно представить в виде объединения двух полуокружностей, каждая из которых является непрерывной на отрезке функцией и, следовательно, по теореме 2 имеет меру нуль. Поэтому круг, согласно теореме 1, – измеримое множество.

Из (42.64) имеем $\mu^*\Gamma = 0$. Это и означает (см. замечание 1 в п. 42.1), что $\mu\Gamma = 0$. $\triangleleft$

Кривая называется кусочно гладкой, если ее можно представить в виде конечного объединения гладких (п. 17.2) кривых.

Как известно (п. 17.3), всякая гладкая кривая спрямляема, поэтому спрямляемы и кусочно гладкие кривые. Отсюда, согласно теореме 3, следует, что всякое ограниченное множество на плоскости, граница которого состоит из конечного числа кусочно гладких кривых, является квадрируемым.

З а м е ч а н и е 8. Аналогично теореме 4 доказывается, что n-мерная мера спрямляемой кривой, лежащей в n-мерном пространстве, равна нулю. Для этого в доказательстве теоремы 4 достаточно круги, которыми покрывается рассматриваемая кривая, заменить соответствующими шарами.

З а м е ч а н и е 9. Если множество X имеет n-мерную меру нуль, то цилиндр $X \times [a, b]$ имеет $(n+1)$-мерную меру нуль. Это сразу следует из формулы (42.55).

42.3. Разбиение измеримых множеств. Пусть X – измеримое по Жордану множество, лежащее в пространстве $\mathbf{R}^n$. Конечная система $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ непустых измеримых множеств X_j, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, называется *разбиением множества* X, если

1) $\mu(X_j \cap X_i) = 0$ при $j \neq i$;

2) $\bigcup\limits_{j=1}^{j_\tau} X_j = X$.

Число

$$|\tau| \overset{\text{def}}{=} \max_{j=1,2,\ldots,j_\tau} \operatorname{diam} X_j,$$

где $\operatorname{diam} X_j$ – диаметр множеств X_j, называется *мелкостью разбиения* τ.

Если $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ и $\tau^* = \{X_i^*\}_{i=1}^{i=i_{\tau^*}}$ – два разбиения множества X и для каждого $X_i^* \in \tau^*$ существует такое $X_j \in \tau$, что $X_i^* \subset X_j$, то говорят, что *разбиение* τ^* *вписано в разбиение* τ (или что *разбиение* τ^* *следует за разбиением* τ), и пишут $\tau^* \succ \tau$ или, что то же самое, $\tau \prec \tau^*$.

Свойства разбиений.

1° (т р а н з и т и в н о с т ь). *Если* $\tau \prec \tau^*$ *и* $\tau^* \prec \tau^{**}$, *то* $\tau \prec \tau^{**}$.

Это непосредственно вытекает из определения следования одного разбиения за другим (ср. с соответствующим свойством разбиения отрезка на отрезки в п. 32.1).

2° (ф и н а л ь н о с т ь). *Для любых двух разбиений* τ^* *и* τ^{**} *множества* X *существует его разбиение* τ, *следующее и за* τ^*, *и за* τ^{**}:

$$\tau \succ \tau^*, \quad \tau \succ \tau^{**}.$$

За элементы разбиения τ можно взять всевозможные непустые пересечения элементов разбиений τ^* и τ^{**}.

Лемма 4. *Если* $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ *– разбиение множества* X, *то*

$$\mu X = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j. \qquad (42.65)$$

▷ Пусть

$$X^* \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j \neq i} (X_j \cap X_i).$$

В силу условия 1) определения разбиения $\mu(X_j \cap X_i) = 0, j \neq i$, а следовательно, согласно следствию 2 леммы 3, мера множества X^* также равна нулю:

$$\mu X^* = 0. \qquad (42.66)$$

Положим

$$X_j^* = X_j \setminus X^*, \qquad (42.67)$$

тогда в силу аддитивности меры (свойство 4 меры)

$$\mu X_j^* = \mu X_j, \qquad (42.68)$$

множества $X^*, X_j^*, j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, попарно не пересекаются (см. (42.67)) и

$$X = \bigcup_{j=1}^{j_\tau} X_j^* \cup X^*.$$

Поэтому, снова используя аддитивность меры, получим

$$\mu X = \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j^* + \mu X^* \underset{(42.66)}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j^* \underset{(42.68)}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j. \ \triangleleft$$

42.4. Интегральные суммы. Определение кратного интеграла. Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$ определена функция f, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ – разбиение множества X, $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, и

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} f(\xi^{(j)}) \mu X_j.$$

Всякая сумма этого вида называется *интегральной суммой Римана функции* f, *соответствующей разбиению* τ.

Определение 2. *Функция* f *называется* *интегрируемой по Риману на множестве* X, *если один и тот же конечный предел имеет любая последовательность интегральных сумм*

$$\sigma_{\tau_m} = \sum_{j=1}^{j_m} f(\xi^{(j,m)}) \mu X_j^{(m)},$$

соответствующих разбиениям $\tau_m = \{X_j^{(m)}\}_{j=1}^{j=j_m}$ *множества* X*, у которых их мелкость* $|\tau_m|$ *стремится к нулю при* $m\to\infty$*, т.е.*

$$\lim_{m\to\infty} |\tau_m| = 0,$$

а точки $\xi^{(j,m)}$ *выбраны произвольным образом в множествах* $X_j^{(m)}$:

$$\xi^{(j,m)} \in X_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, \ldots, j_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Этот предел, если он существует, называется ***интегралом Римана от функции*** f ***по множеству*** X *и обозначается*

$$\int_X f(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int_X f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} \sigma_{\tau_m}(f;\ \xi^{(1,m)}, \ldots, \xi^{(j_m,m)}). \tag{42.69}$$

Условие (42.69) равносильно тому, что *существует число, обозначаемое* $\int_X f(x)\,dx$*, которое удовлетворяет следующему условию: каково бы ни было* $\epsilon > 0$*, найдется такое* $\delta > 0$*, что для любого разбиения* $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ *множества* X *мелкости* $|\tau| < \delta$ *и при любом выборе точек* $\xi^{(j)} \in X_j$, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$*, имеет место неравенство*

$$\left|\int_X f(x)\,dx - \sigma_\tau(f;\ \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)})\right| < \epsilon. \tag{42.70}$$

Доказательство эквивалентности условий (42.69) и (42.70) проводится аналогично доказательству эквивалентности определения предела функции в терминах последовательности и в терминах окрестностей (см. п. 6.4).

Упражнение 3. Доказать эквивалентность условий (42.69) и (42.70).

Выполнение условия (42.69) или, что равносильно, условия (42.70) коротко записывается равенством

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sigma_\tau = \int_X f(x)\,dx. \tag{42.71}$$

Вместо *функция, интегрируемая по Риману*, и *интеграл Римана* будем для краткости говорить просто *интегрируемая функция* и *интеграл*. Если $n > 1$, то интеграл $\int_X f(x)\,dx$ называется *кратным интегралом*. Его обозначают также

$$\int_X \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

В случае $n = 2$ он называется *двойным*, в случае $n = 3$ – *тройным* интегралом, а в случае произвольного $n \in \mathbf{N}$ – *n-кратным*.

З а м е ч а н и е 10. Можно показать, что в случае $n = 1$ и $X = [a, b]$ (т.е. когда X – отрезок) определения интеграла по отрезку в смысле ранее данного определения в п. 32.1 (т.е. когда рассматривались интегральные суммы, соответствующие только разбиению отрезка на отрезки) и в смысле определения этого пункта (т.е. когда рассматриваются интегральные суммы, соответствующие разбиению отрезка на произвольные измеримые множества) равносильны, т.е. приводят к одному и тому же понятию интеграла.

З а м е ч а н и е 11. В дальнейшем нам не раз придется встречаться с пределами типа (42.71) в несколько более простой ситуации, а именно, когда задана некоторая функция $F(\tau)$, определенная на множестве всех разбиений τ некоторого измеримого множества X (таким образом, здесь $F(\tau)$ зависит только от τ, в отличие от интегральных сумм, которые зависят еще от точек $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$).

Будем говорить, что число a является *пределом функции* $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$, и писать

$$\lim_{|\tau|\to 0} F(\tau) = a, \tag{42.72}$$

если для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ мелкости $|\tau| < \delta$ имеет место

$$|F(\tau) - a| < \epsilon.$$

У п р а ж н е н и е 4. Сформулировать в предположениях замечания 11 определение предела функции $F(\tau)$ при $|\tau| \to 0$ в терминах пределов последовательностей так, чтобы оно было равносильно определению (42.72).

42.5. Неполные интегральные суммы. Введем еще обозначения, которые мы будем неоднократно использовать. Если $X \subset \mathbf{R}^n$, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ – разбиение множества X и $X_0 \subset \overline{X}$, то положим

$$\tau_0(X_0) \overset{\text{def}}{=} \{X_j \in \tau\colon \overline{X}_j \cap X_0 \neq \phi\}, \tag{42.73}$$

$$\tau(X_0) \overset{\text{def}}{=} \{X_j \in \tau\colon \overline{X}_j \cap X_0 = \phi\}. \tag{42.74}$$

Очевидно, что

$$\tau = \tau_0(X_0) \cup \tau(X_0), \tag{42.75}$$

причем $\tau_0(X_0)$ и $\tau(X_0)$ не имеют общих элементов.

Л е м м а 5. *Если X – измеримое множество, $X_0 \subset \overline{X}$ и $\mu X_0 = 0$, то*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j = 0. \tag{42.76}$$

▷ Согласно определению предела (42.72) надо доказать, что для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ множества X мелкости $|\tau| < \delta$ выполняется неравенство

$$\sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j < \epsilon. \tag{42.77}$$

Из определения (42.9) множества $S_k(X)$ для произвольного множества $X \subset \mathbf{R}^n$ следует, что множество X содержится в множестве внутренних точек множества $S_k(X)$, т.е. множество X не пересекается с границей $\partial S_k(X)$ множества $S_k(X)$.

По условию $\mu X_0 = 0$, поэтому (замечание 6 из п. 42.1) и $\mu \bar{X}_0 = 0$. Поскольку X_0 – измеримое и, следовательно, ограниченное множество, то и

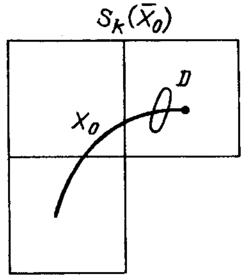


Рис. 148

$\bar{X}_0$ – ограниченное множество, а так как оно, кроме того, и замкнуто, то $\bar{X}_0$ является компактом. Согласно сказанному выше компакт $\bar{X}_0$ не пересекается с границей $\partial S_k(\bar{X}_0)$ множества $S_k(\bar{X}_0)$ ни при каком фиксированном $k = 0, 1, 2, \ldots$ и потому (см. теорему 4 в п. 19.3) находится от нее на положительном расстоянии, т.е.

$$\delta \overset{\text{def}}{=} \rho(\bar{X}_0, \partial S_k(\bar{X}_0)) \overset{\text{def}}{\equiv} \sup_{\substack{x \in \bar{X}_0 \\ y \in \partial S_k(\bar{X}_0)}} \rho(x, y) > 0. \tag{42.78}$$

Следовательно, если D – какое-либо множество диаметра, меньшего δ, $\operatorname{diam} D < \delta$, пересекает множество $\bar{X}_0$: $D \cap \bar{X}_0 \neq \phi$, то (рис. 148)

$$D \subset S_k(\bar{X}_0). \tag{42.79}$$

Пусть произвольно зафиксировано $\epsilon > 0$. В силу условия $\mu \bar{X}_0 = 0$ существует такое натуральное k, что

$$\mu S_k(\bar{X}_0) < \epsilon. \tag{42.80}$$

Определим для этого k число δ по формуле (42.78). Пусть, далее, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ – какое-либо разбиение множества X мелкости $|\tau| < \delta$ и тем самым для диаметров множеств X_j выполняются неравенства

$$\operatorname{diam} \bar{X}_j = \operatorname{diam} X_j < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, j_\tau.$$

Если $X_j \in \tau_0(X_0)$, т.е. $\bar{X}_j \cap X_0 \neq \phi$, то тем более $\bar{X}_j \cap \bar{X}_0 \neq \phi$, а тогда (см. (42.79))

$$X_j \subset \bar{X}_j \underset{(42.79)}{\subset} S_k(\bar{X}_0),$$

и потому

$$\bigcup_{X_j \in \tau_0(X_0)} X_j \subset S_k(\bar{X}_0). \tag{42.81}$$

Заметив, что множества $X_j \in \tau_0(X_0)$ образуют разбиение множества $\bigcup\limits_{X_j \in \tau_0(X_0)} X_j$ (и, следовательно, к ним можно применить лемму 4), будем иметь

$$\sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j \underset{(42.65)}{=} \mu \bigcup_{X_j \in \tau_0(X_0)} X_j \underset{(42.81)}{\leqslant}$$
$$\underset{(42.81)}{\leqslant} \mu S_k(\bar{X}_0) \underset{(42.80)}{<} \varepsilon. \lhd$$

Если на множестве X задана функция f, то положим

$$\sigma_{\tau(X_0)} \equiv \sigma_{\tau(X_0)}(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{X_j \in \tau(X_0)} f(\xi^{(j)}) \mu X_j, \tag{42.82}$$

$$\sigma_{\tau_0(X_0)} \equiv \sigma_{\tau_0(X_0)}(f; \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} f(\xi^{(j)}) \mu X_j, \tag{42.83}$$

где, как всегда, $\xi^{(j)} \in X_j \in \tau$, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$. Тогда интегральную сумму σ_τ (см. (42.69)) можно представить в виде

$$\sigma_\tau \underset{\substack{(42.82)\\(42.83)}}{=} \sigma_{\tau(X_0)} + \sigma_{\tau_0(X_0)}. \tag{42.84}$$

Если $\mu X_0 = 0$, то сумму $\sigma_{\tau(X_0)}$ будем называть *неполной интегральной суммой.*

Теорема 4. *Пусть X — измеримое множество, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ — его разбиение, $X_0 \subset \bar{X}$ и $\mu X_0 = 0$. Если функция f ограничена на множестве X, то интеграл $\int\limits_X f(x)dx$ существует тогда и только тогда, когда при $|\tau| \to 0$ существует конечный предел неполных интегральных сумм $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(X_0)}$, причем, если этот предел существует, то он равен интегралу $\int\limits_X f(x)dx$.*

Предел $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau(X_0)}$ определяется аналогично пределу (42.69) интегральных сумм σ_τ.

$\rhd$ Поскольку функция f ограничена на множестве X, то существует такая постоянная $c > 0$, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c. \tag{42.85}$$

Поэтому

$$|\sigma_{\tau_0(X_0)}| \underset{(42.83)}{\leqslant} \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} |f(\xi^{(j)})| \mu X_j \underset{(42.85)}{\leqslant}$$

$$\underset{(42.85)}{\leqslant} c \sum_{X_j \in \tau_0(X_0)} \mu X_j.$$

По условию $\mu X_0 = 0$, следовательно, согласно лемме 5, правая часть получившегося неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$, а потому $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_{\tau_0(X_0)} = 0$, и теперь утверждение теоремы сразу следует из равенства (42.84). $\triangleleft$

Из доказанной теоремы следует, что при определении интеграла $\int\limits_X f(x)dx$ можно пренебрегать значениями ограниченной функции f на множестве меры нуль, в частности на границе измеримого по Жордану множества.

Если $\mu X = 0$, то любая функция f, определенная на множестве X, интегрируема на нем и, как это легко видеть (все $\sigma_\tau = 0$),

$$\int\limits_X f(x)dx = 0.$$

В частности, функция f может быть и неограниченной.

Можно доказать, что при определенных ограничениях на множество X из интегрируемости функции по этому множеству следует ее ограниченность. Но мы в этом параграфе будем в дальнейшем просто заранее предполагать, что все рассматриваемые функции ограничены.

42.6. Существование кратного интеграла. По аналогии со случаем функций одного переменного введем понятие нижней и верхней сумм, соответствующих данному разбиению множества задания функции.

Определение 3. *Пусть функция f ограничена на измеримом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ – разбиение множества X,*

$$m_j = \inf_{x \in X_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in X_j} f(x), \quad j = 1, 2, \ldots, j_\tau.$$

Тогда суммы $s_\tau = \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu X_j$, $S_\tau = \sum\limits_{j=1}^{j_\tau} M_j \mu X_j$ называют соответственно нижними и верхними суммами Дарбу.

Для сумм Дарбу s_τ, S_τ и интегральных сумм Римана σ_τ справедливы очевидные неравенства $s_\tau \leqslant \sigma_\tau \leqslant S_\tau$. Кроме того, аналогично одномерному случаю (п. 32.3) доказывается, что для любых двух разбиений τ_1 и τ_2 множества X выполняется неравенство $s_{\tau_1} \leqslant S_{\tau_2}$.

При заданной на множестве X функции f суммы s_τ и S_τ являются функциями разбиений τ множества X, а поэтому для них имеет смысл понятия пределов $\lim\limits_{|\tau| \to 0} s_\tau$ и $\lim\limits_{|\tau| \to 0} S_\tau$ (см. 42.72)).

Т е о р е м а 5. *Для того чтобы функция f, ограниченная на измеримом по Жордану множестве X, была на нем интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для ее сумм Дарбу выполнялось условие*

$$\lim_{|\tau|\to 0} (S_\tau - s_\tau) = 0. \tag{42.86}$$

При выполнении этого условия

$$\lim_{|\tau|\to 0} s_\tau = \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau = \int_X f(x)\,dx. \tag{42.87}$$

Условие (42.86) *равносильно условию*

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{j=1}^{j_\tau} \omega(f; X_j)\mu X_j = 0, \tag{42.88}$$

где $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ *– разбиение множества X, на котором определена функция f, а*

$$\omega(f; X_j) = \sup_{x'\in X_j,\, x''\in X_j} [f(x'') - f(x')] \tag{42.89}$$

– колебание функции f на множестве X_j, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$ (определение колебания см. в. п. 21.3).

Все эти утверждения доказываются аналогично одномерному случаю.

Т е о р е м а 6. *Если функция непрерывна на измеримом по Жордану компакте, то она интегрируема на нем по Риману.*

И эта теорема доказывается аналогично одномерному случаю (п. 32.6). Поясним на ее примере, как это выглядит.

$\triangleright$ Пусть функция f непрерывна на измеримом компакте X. Тогда она ограничена и равномерно непрерывна на X. Последнее означает, что, каково бы ни было $\epsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что если диаметр множества $E \subset X$ меньше δ: $\operatorname{diam} E < \delta$, то колебание $\omega(f; E)$ функции f на множестве E меньше ϵ:

$$\omega(f; E) < \epsilon. \tag{42.90}$$

Если теперь $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ – произвольное разбиение мелкости $|\tau| < \delta$ компакта X, то

$$\operatorname{diam} X_j \leqslant |\tau| < \delta, \quad j = 1, 2, \ldots, j_\tau,$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{j_\tau} \omega(f; X_j)\mu X_j \underset{(42.90)}{<} \epsilon \sum_{j=1}^{j_\tau} \mu X_j \underset{(42.65)}{=} \epsilon\mu X.$$

В силу произвольности $\epsilon > 0$ отсюда следует равенство (42.88).

Таким образом, функция f ограничена и для нее выполняется условие (42.88), а поэтому она интегрируема. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 12. Можно доказать, что если функция ограничена на измеримом компакте и множество точек ее разрыва имеет меру Жордана, равную нулю, то функция интегрируема на рассматриваемом компакте.

42.7. Свойства кратных интегралов. На кратные интегралы от ограниченных функций переносятся все основные свойства интеграла по отрезку (п. 33.1): линейность, аддитивность по множествам, правило интегрирования неравенств, оценка абсолютной величины интеграла через интеграл от абсолютной величины подынтегральной функции и теоремы о среднем. Доказательства этих свойств кратных интегралов проводятся аналогично одномерному случаю, поэтому ограничимся лишь их формулировками. Исключение сделаем только для полной аддитивности интеграла, для которой приведем доказательство.

1°. *Если X – измеримое множество, то* $\int\limits_X dx = \mu X.$

2°. *Если X и Y – измеримые множества, $X \subset Y$, функция f ограничена и интегрируема на множестве Y, то она интегрируема и на множестве X.*

3° (а д д и т и в н о с т ь и н т е г р а л а п о м н о ж е с т в а м). *Если X – измеримое множество, $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j=j_\tau}$ – его разбиение, функция f определена и ограничена на множестве X, а ее сужения на X_j интегрируемы на X_j, $j = 1, 2, \ldots, j_\tau$, то функция f интегрируема на X и*

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{j_\tau} \int\limits_{X_j} f(x)\,dx.$$

4° (л и н е й н о с т ь и н т е г р а л а). *Если функции f_i интегрируемы на множестве X, то для любых чисел λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, функция $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$ также интегрируема на X и*

$$\int\limits_X \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_X f_i(x)\,dx.$$

5°. *Если функции f и g интегрируемы и ограничены на некотором множестве X, то и их произведение fg, а если $\inf\limits_X |g(x)| > 0$, то и отношение f/g интегрируемы на этом множестве.*

6° (и н т е г р и р о в а н и е н е р а в е н с т в). *Если функции f и g интегрируемы на множестве X и для всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то*

$$\int\limits_X f(x)\,dx \leqslant \int\limits_X g(x)\,dx.$$

7°. *Если функция f интегрируема на множестве X, то и ее абсолютная величина $|f|$ интегрируема на нем, причем*

$$\left| \int\limits_X f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_X |f(x)|\,dx.$$

8° (монотонность интеграла от неотрицательных функций по множествам). *Если X и Y – измеримые множества, $X \subset Y$, функция f неотрицательна и интегрируема на Y, то*

$$\int\limits_X f(x)\,dx \leqslant \int\limits_Y f(x)\,dx.$$

9°. *Если функция f интегрируема и неотрицательна на измеримом открытом множестве G, $x^{(0)} \in G$, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ и $f(x^{(0)}) > 0$, то*

$$\int\limits_G f(x)\,dx > 0.$$

Отсюда следует, что если функция f непрерывна и интегрируема на открытом множестве G и $\int\limits_G |f(x)|\,dx = 0$, то функция f тождественно равна нулю в G:

$$f(x) \equiv 0 \quad \textit{в} \quad G.$$

10° (полная аддитивность интеграла по множествам). *Если функция f ограничена и интегрируема на множестве X, $X_k \subset X$, X_k – измеримые множества, $k = 1, 2, \ldots$, и*

$$\lim_{k \to \infty} \mu X_k = \mu X, \tag{42.91}$$

то

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{X_k} f(x)\,dx = \int\limits_X f(x)\,dx. \tag{42.92}$$

▷ Ограниченность функции f на множестве X означает существование такой постоянной $c > 0$, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$. Поэтому

$$\left| \int\limits_X f(x)\,dx - \int\limits_{X_k} f(x)\,dx \right| \underset{3^\circ}{=}$$

$$\underset{3^\circ}{=} \left| \int\limits_{X \setminus X_k} f(x)\,dx \right| \underset{7^\circ}{\leqslant} \int\limits_{X \setminus X_k} |f(x)|\,dx \underset{6^\circ}{\leqslant}$$

$$\underset{6^\circ}{\leqslant} c \int\limits_{X \setminus X_k} dx \underset{1^\circ}{=} c\mu(X \setminus X_k) = c(\mu X - \mu X_k) \underset{(49.91)}{\longrightarrow} 0$$

при $k \to \infty$. Отсюда и следует равенство (49.92). ◁

11°. *Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на множестве X. Если функция g не меняет знака на X и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, $x \in X$, то существует такое число λ, $m \leqslant \lambda \leqslant M$, что*

$$\int\limits_X f(x) g(x)\,dx = \lambda \int\limits_X g(x)\,dx.$$

Следствие. *Пусть X – измеримое линейно связное множество или замыкание линейно связного множества. Тогда, если функция f ограничена,* *интегрируема и непрерывна на X, то существует такая точка $\xi \in X$, что*

$$\int_X f(x)\,dx = f(\xi)\,\mu X.$$

Замечание. Отметим, что если X – измеримое множество, то ограниченная на замыкании $\overline{X}$ множества X функция f интегрируема на X тогда и только тогда, когда она интегрируема на его замыкании; при этом, если функция f интегрируема на X, то

$$\int_{\overline{X}} f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx.$$

$\rhd$ Это следует из аддитивности интеграла по множествам и того, что интеграл по множеству меры нуль равен нулю. В самом деле,

$$\int_{\overline{X}} f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx + \int_{\overline{X}\setminus X} f(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx,$$

ибо $\overline{X}\setminus X \subset \partial X$, а $\mu(\partial X) = 0$, следовательно, и $\mu(\overline{X}\setminus X) = 0$, откуда получаем $\int_{\overline{X}\setminus X} f(x)\,dx = 0$. $\lhd$

§ 43. Сведение кратного интеграла к повторному

43.1. Сведение двойного интеграла к повторному. Пусть функции φ и ψ непрерывны на отрезке $[a, b]$ $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, и (рис. 149)

$$E = \{(x, y)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}. \tag{43.1}$$

Ясно, что множество E – измеримый по Жордану компакт, так как оно ограничено, замкнуто и его граница имеет меру нуль.

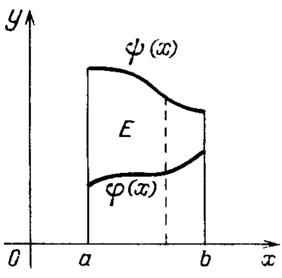


Рис. 149

Если функция f задана на множестве E и при каждом $x \in [a, b]$ интегрируема по y на отрезке $[\varphi(x), \psi(x)]$, то функция

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy \tag{43.2}$$

называется *интегралом, зависящим от параметра* x, а интеграл

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx \tag{43.3}$$

(если он, конечно, существует) называется *повторным интегралом*. Повторный интеграл (43.3) обычно записывают в виде

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy.$$

Лемма 1. *Если функция f непрерывна на компакте E* (см. (43.1)), *то интеграл* (43.2), *зависящий от параметра, непрерывен на отрезке* $[a, b]$.

$\triangleright$ Сделаем в интеграле (43.2), зависящем от параметра x, замену переменного так, чтобы получился интеграл с постоянными пределами интегрирования. Этой цели служит преобразование

$$y = \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

отображающее отрезок $[0, 1]$ на отрезок $[\varphi(x), \psi(x)]$. Поскольку $dy = (\psi(x) - \varphi(x))dt$, то

$$F(x) = \int_0^1 f(x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t)(\psi(x) - \varphi(x))dt.$$

Полагая для краткости

$$g(x, t) \overset{\text{def}}{=} f(x, \varphi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))t)(\psi(x) - \varphi(x)),$$

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{43.4}$$

будем иметь $F(x) = \int_0^1 g(x, t)dt$, где функция $g(x, t)$ определена на прямоугольнике

$$P = \{(x, t)\colon a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Из непрерывности функций f, φ и ψ в силу формулы (43.4) следует непрерывность функции g на прямоугольнике P, а так как всякий прямоугольник является компактом, то функция g и равномерно непрерывна на P. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех Δx, для которых $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|g(x + \Delta x, t) - g(x, t)| < \epsilon, \quad (x, t) \in P, \quad (x + \Delta x, t) \in P, \tag{43.5}$$

а следовательно, и неравенство

$$|\Delta F(x)| = |F(x + \Delta x) - F(x)| = \left| \int_0^1 g(x + \Delta x, t)dt - \int_0^1 g(x, t)dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 |g(x + \Delta x, t) - g(x, t)|dt \underset{(43.5)}{<} \epsilon,$$

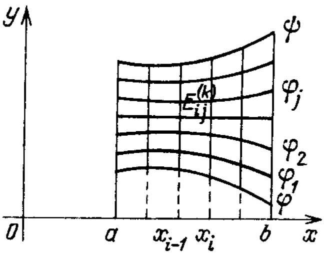


Рис. 150

а это означает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F(x) = 0, \quad x \in [a, b],$$

т.е. что функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$. ◁

Теорема 1. *Если функция f непрерывна на компакте E* (см. (43.1)), *то*

$$\iint_E f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{43.6}$$

▷ Прежде всего заметим, что согласно лемме 1 повторный интеграл, стоящий в правой части равенства (43.6), существует, ибо функция F (см. (43.2)) непрерывна, а потому и интегрируема на отрезке $[a, b]$, т.е. существует интеграл

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

Для доказательства равенства (43.6) зафиксируем произвольно натуральное число k и разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_i, $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_i < \ldots < x_k = b$, на k равных отрезков. Тогда $x_i = a + \dfrac{b-a}{k} i$ и

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{k}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{43.7}$$

Введем следующие функции (рис. 150):

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = \varphi(x),\\
&\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_j(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k} j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_k(x) = \varphi(x) + \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k} k = \psi(x).
\end{aligned} \tag{43.8}$$

Очевидно, что

$$\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x) = \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{k}. \tag{43.9}$$

Положим

$$E_{ij}^{(k)} = \{(x, y): x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ \varphi_{j-1}(x) \leqslant y \leqslant \varphi_j(x)\}.$$

Множества $E_{ij}^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, k$, образуют разбиение множества E. Обозначим это разбиение τ_k:

$$\tau_k = \{E_{ij}^{(k)}\}. \tag{43.10}$$

Покажем, что

$$\lim_{k \to \infty} |\tau_k| = 0, \tag{43.11}$$

где, как обычно, $|\tau_k|$ — мелкость разбиения τ_k:

$$|\tau_k| = \max_{i,\, j = 1,\, 2,\, \ldots,\, k} \operatorname{diam} E_{ij}^{(k)}.$$

По определению диаметра множества

$$\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} = \sup_{(x,\, y),(x',\, y') \in E_{ij}^{(k)}} \rho((x, y),(x', y')), \tag{43.12}$$

поэтому оценим расстояние $\rho((x, y), (x', y'))$ между точками $(x, y) \in E_{ij}^{(k)}$ и $(x', y') \in E_{ij}^{(k)}$. Сделаем это следующим образом (схематически метод

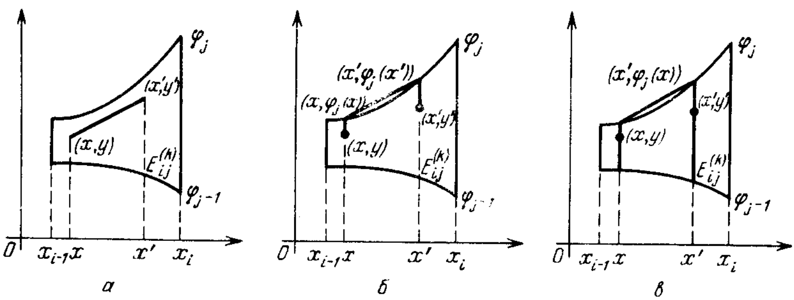


Рис. 151

оценки изображен на рис. 151):

$$\rho((x, y),(x', y')) \leqslant$$
$$\leqslant \rho((x, y),(x, \varphi_j(x))) + \rho((x, \varphi_j(x)), (x', \varphi_j(x'))) + \rho((x', \varphi_j(x')),(x', y')) \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_j(x) - y| + \sqrt{(x' - x)^2 + (\varphi_j(x') - \varphi_j(x))^2} + |\varphi_j(x') - y'| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| + |x' - x| + |\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| + |\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x)|. \tag{43.13}$$

Оценим каждое слагаемое правой части получившегося неравенства. Прежде всего

$$|x' - x| \underset{(43.7)}{\leqslant} \frac{b - a}{k}, \tag{43.14}$$

так как точки x и x' принадлежат одному и тому же отрезку $[x_{i-1}, x_i]$.

В силу непрерывности функций φ и ψ на отрезке $[a, b]$ они ограничены на нем, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех точек $x \in [a, b]$ выполняются неравенства

$$|\varphi(x)| \leqslant c, \quad |\psi(x)| \leqslant c. \tag{43.15}$$

Поэтому для любой точки $x \in [a, b]$ имеем

$$|\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| \underset{(43.9)}{=} \frac{|\psi(x) - \varphi(x)|}{k} \leqslant \frac{|\psi(x)| + |\varphi(x)|}{k} \underset{(43.15)}{\leqslant}$$
$$\underset{(43.15)}{\leqslant} \frac{2c}{k}. \tag{43.16}$$

Далее заметим, что в силу формул (43.8) из непрерывности функций φ и ψ на отрезке $[a, b]$ следует и непрерывность на этом отрезке всех функций φ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, а поэтому и их равномерная непрерывность на нем.

Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Поскольку функции φ_j равномерно непрерывны на отрезке $[a, b]$, то существует такое $\delta > 0$, что для любых точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$, $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \tag{43.17}$$

Выберем теперь такой номер k_0, что для всех $k > k_0$ выполняются неравенства

$$\frac{b-a}{k} < \frac{\epsilon}{3}, \tag{43.18}$$

$$\frac{b-a}{k} < \delta, \tag{43.19}$$

$$\frac{4c}{k} < \frac{\epsilon}{3}. \tag{43.20}$$

Тогда при $(x, y) \in E_{ij}^{(k)}$, $(x', y') \in E_{ij}^{(k)}$ получим

$$\rho((x, y), (x', y')) \underset{(43.13)}{\leqslant} |x' - x| + |\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)| +$$
$$+ |\varphi_j(x') - \varphi_{j-1}(x')| + |\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| \underset{\substack{(43.14)\\(43.16)}}{<}$$
$$\underset{\substack{(43.14)\\(43.16)}}{<} \frac{b-a}{k} + \frac{4c}{k} + |\varphi_j(x') - \varphi_j(x)| \underset{(43.17)-(43.20)}{<}$$
$$\underset{(43.17)-(43.20)}{<} \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Отсюда следует, что при всех $k > k_0$ **имеет** место неравенство

$$\operatorname{diam} E_{ij}^{(k)} \underset{(43.12)}{\leqslant} \epsilon, \quad i, j, = 1, 2, \ldots, k,$$

и, следовательно, неравенство $|\tau_k| \leqslant \epsilon$, а это и означает выполнение условия (43.11).

Положим теперь

$$m_{ij}^{(k)} = \inf_{E_{ij}^{(k)}} f(x, y), \quad M_{ij}^{(k)} = \sup_{E_{ij}^{(k)}} f(x, y), \quad i, j = 1, 2, \ldots, k,$$

$$s_{\tau_k} = \sum_{i, j = 1}^{k} m_{ij}^{(k)} \mu E_{ij}^{(k)}, \quad S_{\tau_k} = \sum_{i, j = 1}^{k} M_{ij}^{(k)} \mu E_{ij}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В силу интегрируемости функции $f(x, y)$ (она непрерывна на измеримом компакте E) из стремления к нулю мелкостей $|\tau_k|$ разбиений τ_k при $k \to \infty$ нижние s_{τ_k} и верхние S_{τ_k} суммы Дарбу функции $f(x, y)$ имеют своим пределом интеграл от нее по множеству E (см. (42.87)):

$$\lim_{k \to \infty} s_{\tau_k} = \lim_{k \to \infty} S_{\tau_k} = \iint_E f(x, y)\, dx dy. \tag{43.21}$$

Вспомнив (п. 37.1), что

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j(x)\, dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_{j-1}(x)\, dx = \mu E_{ij}^{(k)},$$

будем иметь

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy = \int_a^b dx \sum_{j=1}^{k} \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x, y)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} M_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varphi_j(x) - \varphi_{j-1}(x)]\, dx = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} M_{ij} \mu E_{ij}^{(k)} = S_{\tau_k}.$$

Аналогично,

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy \geqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} m_{ij} \mu E_{ij}^{(k)} = s_{\tau_k}.$$

Таким образом,

$$s_{\tau_k} \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \leqslant S_{\tau_k}.$$

Устремив здесь k к бесконечности, в силу (43.21) получим

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \leqslant \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy,$$

что доказывает равенство (43.6). $\triangleleft$

З а м е ч а н и е. Если множество E удовлетворяет относительно оси y условиям, аналогичным удовлетворенным относительно оси x, т.е.

$$E = \{(x,y):\ c \leqslant y \leqslant d,\quad \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\},$$

где $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ – непрерывные на отрезке $[c,\ d]$ функции, то в случае непрерывности на множестве E функции f будем иметь

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \iint\limits_E f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx. \quad (43.22)$$

43.2. Сведение интеграла производной кратности к повторному. Сформулируем теоремы о сведении n-кратного интеграла к повторным в случае $n > 2$. Пусть функция $f(x,\ y,\ z)$ непрерывна на множестве $E \subset \mathbf{R}^3$, проекция E_{xy} которого на плоскость переменных x и y является квадрируемым компактом, $\varphi(x,\ y)$ и $\psi(x,y)$ – непрерывные на этом компакте функции, $\varphi(x,y) \leqslant \psi(x,y)$, $(x,y) \in E_{xy}$, и (рис. 152)

$$E = \{(x,y,z):\ (x,y) \in E_{xy},\quad \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\}.$$

Тогда множество E является кубируемым компактом и

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{E_{xy}} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,\ y)}^{\psi(x,\ y)} f(x,y,z)\,dz. \quad (43.23)$$

Если множество E_{xy} имеет вид (43.1), т.е.

$$E_{xy} = \{(x,y):\ a \leqslant x \leqslant b,\quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \psi_1(x)\},$$

где функции φ_1 и ψ_1 непрерывны на отрезке $[a,\ b]$, то, применив в правой части формулы (43.23) формулу (43.6) к двойному интегралу по множеству E_{xy}, получим

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,\ y)}^{\psi(x,\ y)} f(x,y,z)\,dz. \quad (43.24)$$

Если обозначить через $E(x_0)$ сечение множества E плоскостью $x = x_0$, т.е.

$$E(x_0) = E \cap \{(x,y,z):\ x = x_0\}$$

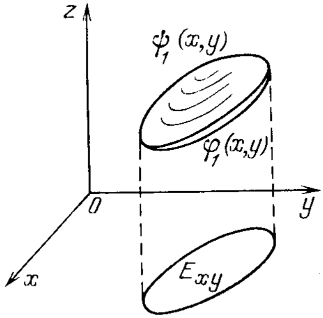


Рис. 152

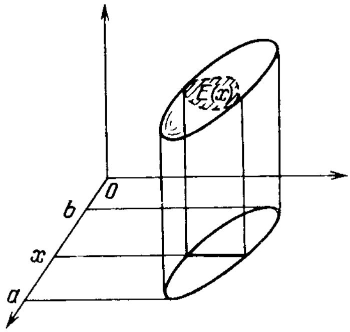


Рис. 153

(рис. 153), и объединить в формуле (43.24) два внутренних интегрирования по переменным y и z, то получим формулу

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x,y,z)\,dy\,dz. \tag{43.25}$$

Например, если $f(x, y, z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_{E} dx\,dy\,dz = \mu_3 E, \qquad \iint\limits_{E(x)} dy\,dz = \mu_2 E(x),$$

где μ_3 – объем (трехмерная мера), а μ_2 – площадь (двумерная мера), и из формулы (43.25) следует, что

$$\mu_3 E = \int\limits_a^b \mu_2 E(x)\,dx,$$

т.е. объем тела E равен одномерному интегралу от площадей сечений $E(x)$.

Аналогично, для $n > 3$ при соответствующих предположениях справедлива формула

$$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n \text{ раз}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n. \tag{43.26}$$

Объединяя в (43.26) интегрирования по различным группам переменных, получим формулы типа формул (43.24) и (43.25).

§ 44. Криволинейные интегралы

44.1. Криволинейный интеграл первого рода. Пусть $\Gamma = \{M(s), 0 \leqslant s \leqslant S\}$ – спрямляемая кривая в $\mathbf{R}^3$ (в частности, в $\mathbf{R}^2$), $M(s) = (x(s), y(s), z(s))$, s – переменная длина дуги и пусть на кривой Γ задана числовая функция F, т.е. F является функцией точки кривой $(x(s), y(s), z(s))$. Обычно пишут $F = F(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \Gamma$, хотя это и не совсем правильно, так как одна и та же точка (x, y, z) пространства может быть носителем разных точек кривой.

Если $M(0) = A$, $M(S) = B$, то кривую Γ, ориентированную с помощью представления $M = M(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, т.е. с отсчетом дуг от точки A, будем обозначать $\overset{\frown}{AB}$.

Определение 1. *Криволинейным интегралом первого рода от функции F по кривой $\overset{\frown}{AB}$ называется интеграл*

$$\int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds.$$

Этот криволинейный интеграл обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\, ds$, *или короче,*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F ds\,, \quad \int\limits_{\Gamma} F ds.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F ds \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F(x, y, z)\, ds \overset{\text{def}}{=} \int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds. \tag{44.1}$$

В данном случае знак $\equiv$ означает равноправность употребления символов, которые этот знак соединяет. Кривая $\overset{\frown}{AB}$ в интеграле (44.1) называется *путем интегрирования.*

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1°. *Если F непрерывна на кривой $\overset{\frown}{AB}$ (т.е. функция $F(x(s), y(s), z(s))$ непрерывна на отрезке $[0, S]$), то интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F ds$ существует.*

▷ Это следует из того, что указанный интеграл в силу определения (44.1) сводится к интегралу от непрерывной функции на отрезке, который существует. ◁

В дальнейшем в этом пункте будем для простоты всегда предполагать, что функция F непрерывна на кривой Γ.

2°. *Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F ds. \tag{44.2}$$

▷ Пусть $M = M(s)$, $0 \leqslant s \leqslant S$, – представление кривой.

Обозначим для ясности переменную длину дуги, отсчитываемую от точки B, через s^*. Очевидно, что

$$s^* = S - s, \quad ds^* = -ds, \tag{44.3}$$

а так как $s = S - s^*$, то $M = M(S - s^*) = (x(S - s^*), y(S - s^*), z(S - s^*))$, $0 \leqslant s^* \leqslant S$, является представлением кривой $\overset{\frown}{BA}$ (рис. 154). Поэтому

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} F(x, y, z)\, ds^* \underset{(44.1)}{=} \int\limits_0^S F(x(S - s^*), y(S - s^*), z(S - s^*))\, ds^* \underset{(44.3)}{=}$$

$$\underset{(44.3)}{=} -\int\limits_S^0 F(x(s), y(s), z(s))\, ds =$$

$$= \int\limits_0^S F(x(s), y(z), z(s))\, ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} F ds. \ ◁$$

Третье свойство интеграла будет касаться его вычисления в случае, когда кривая Γ задается с помощью произвольного параметра. Будем

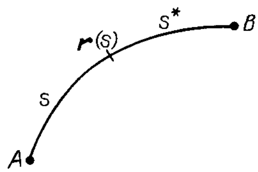


Рис. 154

предполагать, что кривая Γ – гладкая, т.е. задана непрерывно дифференцируемым представлением $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, без особых точек, т.е.

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0, \qquad t \in [a, b].$$

В этом случае кривая Γ спрямляема и ее переменная длина дуги $s = s(t)$ может быть принята за параметр:

$$\Gamma = \{x(s), y(s), z(s);\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$$

и, таким образом,

$$x(s(t)) = \varphi(t), \quad y(s(t)) = \psi(t), \quad z = z(s(t)) = \chi(t), \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{44.4}$$

3°. *Имеет место формула*

$$\int\limits_\Gamma F ds = \int\limits_a^b F s' dt, \tag{44.5}$$

или, подробнее,

$$\int_\Gamma F ds = \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt.$$

$\triangleright$ Сделав в интеграле, стоящем в правой части равенства (44.1), замену переменного $s = s(t)$ и вспомнив (п. 17.3), что

$$s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2},$$

получим

$$\int_\Gamma F ds \underset{(44.1)}{=} \int_0^S F(x(s), y(s), z(s))\, ds \underset{(44.4)}{=} \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\, s'(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b F(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt. \triangleleft$$

Отметим, что поскольку левая часть равенства (44.5) не зависит от параметра t, то и правая его часть также не зависит от выбора параметра.

В случае, если кривая Γ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, т.е. ее представлением являются функции $x = x$, $y = f(x)$, то формула (44.5) принимает вид

$$\int_\Gamma F(x, y)\, ds = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

44.2. Криволинейный интеграл второго рода. При изучении физических полей (например, поля скоростей текущей жидкости, поля тяготения, электромагнитного поля и т.п.) часто встречаются интегралы вида

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int_\Gamma P dx + Q dy + R dz,$$

где $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ — векторное поле на кривой Γ, а $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$. Сформулируем определение интегралов такого вида.

Пусть Γ — гладкая кривая, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $0 \leqslant s \leqslant S$, — ее векторное представление, в котором за параметр s взята переменная длина ее дуги,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) \tag{44.6}$$

— единичный касательный вектор к кривой Γ, направление которого соответствует выбранному отсчету длин дуг (п. 17.3). Если вектор $\boldsymbol{\tau}$ образует с координатными осями углы α, β и γ, то

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma). \tag{44.7}$$

Напомним, что из формул (44.6) и (44.7) следуют равенства

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \tag{44.8}$$

Пусть на кривой Г задано векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x, y, z)$, точнее, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(x(s), y(s), z(s))$, $0 \leqslant s \leqslant S$. Обозначим координаты вектора $\boldsymbol{a}$ через P, Q, R:

$$\boldsymbol{a} = (P, Q, R) \tag{44.9}$$

(ясно, что P, Q и R также являются функциями точки кривой Г).

Определение 2. *Криволинейным интегралом второго рода от векторной функции* $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ *по кривой* $\overset{\frown}{AB}$ *называется интеграл*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a\tau}\, ds. \tag{44.10}$$

Этот криволинейный интеграл обозначается $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$. Таким образом,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a\tau}\, ds. \tag{44.11}$$

Из этого определения видно, что криволинейный интеграл второго рода сводится к криволинейному интегралу первого рода специального вида. Для наглядности заметим, что интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a\tau}\, ds$ получается из интеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ с помощью формального преобразования $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}\, ds$ (см. (44.6)).

Интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$ обозначается также $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy + R dz$, где под знаком интеграла написано в координатной форме скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ и $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$, т.е.

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} \equiv \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy + R dz. \tag{44.12}$$

Записав скалярное произведение векторов

$$\boldsymbol{a} = (P, Q, R) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

(см. (44.7)) также в скалярной форме

$$\boldsymbol{a\tau} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma, \tag{44.13}$$

определение (44.10) в силу (44.11) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy + R dz \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds. \tag{44.14}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1°. *Если функция* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z)$ *непрерывна на кривой* $\overset{\frown}{AB}$ (*т.е. ее координаты* P, Q, R *непрерывны на кривой* Γ *как функции ее параметра*), *то интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ *существует.*

$\triangleright$ В силу непрерывной дифференцируемости кривой $\overset{\frown}{AB}$ и непрерывности на ней функций P, Q и R подынтегральная функция в криволинейном

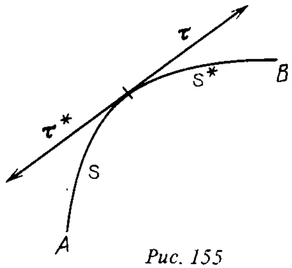


Рис. 155

интеграле первого рода, стоящем в правой части равенства (44.10) является непрерывной, а следовательно, этот интеграл существует (п. 44.1). $\triangleleft$

2°. *При изменении ориентации кривой криволинейный интеграл второго рода меняет только знак:*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \tag{44.15}$$

$\triangleright$ Пусть $s^* = S - s$, т.е. s^* – переменная длина дуги, отсчитываемая от точки B кривой Γ, а $\boldsymbol{\tau}^*$ – единичный касательный к кривой Γ вектор, соответствующий этому отсчету дуг. Очевидно, что (рис. 155) $\boldsymbol{\tau}^* = -\boldsymbol{\tau}^*$. В самом деле,

$$\boldsymbol{\tau}^* = \frac{d\mathbf{r}}{ds^*} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,\frac{ds}{ds^*} = -\boldsymbol{\tau}, \qquad \text{ибо} \quad \frac{ds}{ds^*} = -1. \tag{44.16}$$

Теперь имеем

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \underset{(44.13)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}^*\,ds^* \underset{(44.2)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}^*\,ds \underset{(44.16)}{=}$$

$$\underset{(44.16)}{=} -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\boldsymbol{\tau}\,ds \underset{(44.13)}{=} -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \triangleleft$$

3°. *Если* $\overset{\frown}{AB}$ – *гладкая ориентированная кривая,* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, – *ее векторное представление, то*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_a^b \mathbf{a}\mathbf{r}'\,dt \tag{44.17}$$

(*формально правая часть равенства* (44.17) *получается из левой, если положить* $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'dt$).

▷ Заметив, что

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{\boldsymbol{r}'}{s'} \tag{44.18}$$

(штрихом обозначены производные по t), получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} \underset{(44.13)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\tau}\,ds \underset{(44.5)}{=} \int\limits_a^b \boldsymbol{a}\boldsymbol{\tau}s'\,dt \underset{(44.18)}{=} \int\limits_a^b \boldsymbol{a}\boldsymbol{r}'\,dt. \ \triangleleft$$

В координатном виде формула (44.17) имеет вид

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b (Px' + Qy' + Rz')\,dt. \tag{44.19}$$

Эта формула выражает криволинейный интеграл второго рода по кривой Γ при помощи ее представления посредством произвольного параметра. Отметим, что поскольку интеграл, стоящий в левых частях формул (44.17) и (44.19), согласно определению 2 не зависит от выбора параметра на ориентированной кривой, то и интеграл, стоящий в правых частях этих формул, не зависит от выбора параметра.

Если кривая $\overset{\frown}{AB}$ является графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, то формула (44.19) приобретает в этом случае вид

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x))\,dx. \tag{44.20}$$

З а м е ч а н и е. Часто приходится рассматривать интегралы по кривым, получающимся объединением некоторых кривых. Кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(t);\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *объединением кривых* Γ_k, если существует такое разбиение $\tau = \{t_k\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ отрезка $[a, b]$, что $\Gamma_k = \{\boldsymbol{r}(t);\ t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, k_\tau$, т.е. представления кривых Γ_k являются сужениями представления кривой Γ на отрезки разбиения τ. В этом случае пишут

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k.$$

Криволинейный интеграл (первого или второго рода) по кусочно гладкой кривой $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Gamma_k$, где Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, – гладкие кривые, определяется как сумма соответствующих интегралов по гладким кривым Γ_k:

$$\int\limits_\Gamma \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_k}.$$

44.3. Обобщение понятия криволинейного интеграла второго рода. Часто оказывается полезным более общее понятие криволинейного интеграла второго рода, определяемое независимо от понятия криволинейного интеграла первого рода. Сформулируем это определение.

Пусть

$$\Gamma = \{ M(t);\ \ a \leqslant t \leqslant b \} \tag{44.21}$$

— параметрически заданная непрерывная кривая, $M(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ и функция F задана на множестве точек этой кривой. Если $\tau = \{ t_i \}_{i=0}^{i=i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ и $t_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant t_i$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, то положим

$$\tilde{\sigma}_\tau = \tilde{\sigma}_\tau (F; \varphi; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = \\ = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(M(\xi_i))\, \Delta x_i, \qquad \Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}). \tag{44.22}$$

Суммы $\tilde{\sigma}_\tau$ называются *интегральными суммами криволинейного интеграла второго рода* $\int\limits_\Gamma F(x, y, z)dx$. Для них определяется понятие предела аналогично тому, как это было сделано для интегральных сумм Римана.

Определение 2*. *Конечный предел* $\lim\limits_{|\tau| \to 0} \tilde{\sigma}_\tau$, *если он существует, называется криволинейным интегралом второго рода* $\int\limits_\Gamma F(x, y, z)\, dx$ *по кривой* Γ.

Таким образом,

$$\int\limits_\Gamma F(x, y, z)\, dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau| \to 0} \tilde{\sigma}_\tau. \tag{44.23}$$

Это определение оправдывается тем, что если кривая Γ — гладкая, а функция F непрерывна, то определения 2 и 2* эквивалентны.

$\triangleright$ В самом деле, пусть кривая (44.21) гладкая, а функция F непрерывна на ней, т.е. непрерывна функция $F(M(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$. Для каждого разбиения τ отрезка $[a, b]$ в силу формулы конечных приращений Лагранжа существуют такие точки $\eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, что $\Delta x_i = \varphi'(\eta_i) \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, а поэтому

$$\tilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(M(\xi_i))\, \varphi'(\eta_i)\, \Delta t_i.$$

Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(M(\xi_i))\, \varphi'(\xi_i)\, \Delta t_i$$

и сравним значения $\tilde{\sigma}_\tau$ и σ_τ. Пусть $c = \max\limits_{[a, b]} |F(M(t))|$. Очевидно, что $0 \leqslant c < +\infty$. Из гладкости кривой Γ следует, что производная $\varphi'(t)$ непрерывна, а следовательно, равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, каковы бы ни были точки $\xi \in [a, b]$, $\eta \in [a, b]$, для которых $|\eta - \xi| < \delta$, для них выполняется неравенство

$$|\varphi'(\eta) - \varphi'(\xi)| < \frac{\epsilon}{(b-a)c}.$$

Следовательно, для всякого разбиения τ отрезка $[a, b]$ мелкости $|\tau| < \delta$ имеет место оценка

$$|\widetilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} |F(M(\xi_i))|\,|\varphi'(\eta_i) - \varphi'(\xi_i)|\,\Delta t_i <$$

$$< c\,\frac{\epsilon}{(b-a)c} \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta t_i = \epsilon. \tag{44.24}$$

Это означает, что $\lim\limits_{|\tau| \to 0} (\widetilde{\sigma}_\tau - \sigma_\tau) = 0$.

Так как σ_τ является обычной интегральной суммой Римана функции $F(M(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int_a^b F(M(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

а тогда в силу (44.24) и

$$\lim_{|\tau| \to 0} \widetilde{\sigma}_\tau = \int_a^b F(M(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

В правой части этого равенства стоит интеграл, равный криволинейному интегралу второго рода в смысле определения 2 (см. (44.19) при $Q = R = 0$), тем самым эквивалентность определений 2 и 2* в рассматриваемом случае доказана. ◁

Заметим вместе с тем, что криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2* может существовать в таких случаях, когда определение 2 просто неприменимо, например, в случаях неспрямляемых кривых, или кривых, не имеющих касательных.

Криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2* меняет знак при изменении ориентации кривой. Действительно, при преобразовании параметра $t = a + b - \tau$ кривой (44.21) все приращения $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, функции φ изменяют знаки на противоположные, а поэтому каждая интегральная сумма $\widetilde{\sigma}_\tau$ также изменит знак на противоположный. Поэтому переменит знак и их предел, т.е. интеграл $\int\limits_\Gamma F(x, y, z)\,dx$.

Рассмотрим один пример криволинейных интегралов второго рода в смысле определения 2*, которые встретятся в дальнейшем.

Пусть плоская кривая Г является графиком непрерывной функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, а функция $F(x, y)$ непрерывна на этом графике. Если $\tau = \{x_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ – разбиение отрезка $[a, b]$, то в этом случае интегральная сумма $\widetilde{\sigma}_\tau$ интеграла второго рода $\int\limits_\Gamma F(x, y, z)\, dx$ имеет вид

$$\widetilde{\sigma}_\tau = \sum_{i=1}^{i_\tau} F(\xi_i, f(\xi_i))\, \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, i_\tau,$$

т.е. является интегральной суммой Римана непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $F(x, f(x))$, а поэтому ее предел при $|\tau| \to 0$ существует и равен интегралу $\int\limits_a^b F(x, f(x))\, dx$. Таким образом,

$$\int\limits_\Gamma F(x, y)\, dx \underset{(44.23)}{=} \lim_{\tau \to 0} \widetilde{\sigma}_\tau = \int\limits_a^b F(x, f(x))\, dx. \tag{44.25}$$

Этот пример является, в частности, примером, показывающим, что криволинейный интеграл второго рода в смысле определения 2* может существовать и в случае, когда о кривой Г не делается никаких предположений, кроме ее непрерывности, т.е. никаких предположений и ее "гладкости" в каком бы то ни было смысле.

Отметим, что если через Γ^- обозначить противоположно ориентированный график функции f, т.е. кривую, получающуюся из кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, при преобразовании параметра $x = a + b - t$, $a \leqslant t \leqslant b$, то в силу изменения знака криволинейного интеграла второго рода при изменении ориентации кривой получим

$$\int\limits_{\Gamma^-} F(x, y)\, dx = -\int\limits_a^b F(x, f(x))\, dx.$$

Пусть в случае кривой

$$\Gamma = \{ y = f(x);\ a \leqslant x \leqslant b \}, \tag{44.26}$$

заданной явно, существует такое непрерывно дифференцируемое преобразование параметра

$$x = x(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{44.27}$$

что функция $y = f(x(t))$ является непрерывно дифференцируемой (функция f предполагается только непрерывной) и $x_t'^2 + y_t'^2 > 0$. Тогда кривая

$$\Gamma_1 = \{ x = x(t),\ y = f(x(t));\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta \},$$

полученная из кривой Г преобразованием параметра (44.27), является гладкой (т.е. непрерывно дифференцируемой) и не имеет особых точек, а следовательно, в каждой ее точке существует касательный вектор $\boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, где α – угол, образованный вектором $\boldsymbol{\tau}$ с осью Ox.

Сделав в интеграле, стоящем в правой части равенства (44.25), замену переменного (44.27) и воспользовавшись формулой (44.19) (при $Q=R=0$), получим

$$\int_\Gamma F(x,y)\,dx \underset{(44.25)}{=} \int_a^b F(x,f(x))\,dx \underset{(44.27)}{=} \int_a^b F(x(t)),f(x(t))\,x'(t)\,dt \underset{(44.19)}{=}$$

$$\underset{(44.19)}{=} \int_{\Gamma_1} F(x,y)\,dx \underset{(44.14)}{=} \int_{\Gamma_1} F(x,y)\cos\alpha\,ds.$$

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемом случае представление кривой Г (44.26) не являлось, вообще говоря, дифференцируемым, для нее, какова бы ни была непрерывная на ней функция F, при надлежащем выборе параметра справедлива формула

$$\int_\Gamma F(x,y)\,dx = \int_{\Gamma_1} F(x,y)\cos\alpha\,ds. \tag{44.28}$$

Обычно в правой части этой формулы вместо Γ_1 пишут Г, рассматривая Г и Γ_1 как "одну и ту же кривую" с разными параметризациями.

В результате преобразования параметра (44.27) из кривой Г получилась гладкая кривая Γ_1. Один из простейших примеров подобной ситуации дает полуокружность, заданная как график функции $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ ($y=\sqrt{1-x^2}$ не имеет конечных производных в точках $x=\pm 1$). Если сделать преобразование параметра $x=\cos t$, то та же полуокружность будет задаваться непрерывно дифференцируемым вплоть до концов отрезка представлением $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, и, следовательно, для нее справедлива формула (44.28).

В связи со всем сказанным оказывается целесообразным следующим образом расширить понятие гладкой кривой.

Определение 3. *Кривая* $\Gamma=\{x(t),y(t),z(t);\ a\leqslant t\leqslant b\}$ *называется* ***гладкой***, *если существует такое преобразование параметра* $t=t(u)$, $c\leqslant u\leqslant d$, *что кривая* $\{x(t(u)),\ y(t(u)),z(t(u));\ c\leqslant u\leqslant d\}$ *является непрерывно дифференцируемой и* $x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2\neq 0$.

Иначе говоря, после преобразования параметра в кривой Г получается гладкая кривая в смысле данного ранее определения в п. 17.1.

Кривая, являющаяся объединением конечного множества гладких (в новом, более общем, чем раньше, смысле, т.е. в смысле определения 3), называется, как и прежде, кусочно гладкой.

Аналогично понятию интеграла $\int_\Gamma F(x,y,z)\,dx$ обобщаются и понятия криволинейных интегралов второго рода вида $\int_\Gamma F(x,y,z)\,dy$ и $\int_\Gamma F(x,y,z)\,dz$: они определяются так же, как пределы соответствующих интегральных сумм. Таким образом, в новом обобщенном смысле можно рассматривать и интегралы вида

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz, \tag{44.29}$$

определив их как сумму интегралов $\int_\Gamma Pdx$, $\int_\Gamma Qdy$ и $\int_\Gamma Rdz$. Интеграл (44.29) в случае гладких кривых совпадает с интегралом того же вида, рассмотренным в п. 44.2. Более того, это совпадение имеет место и для кусочно гладких кривых, так как криволинейный интеграл второго рода по кривой, являющейся объединением гладких кривых, равен сумме интегралов по этим кривым. Для криволинейного интеграла в смысле определения 2 это имеет место согласно сделанному соглашению (см. замечание в конце п. 44.2), а для интеграла в смысле определения 2* легко следует из равенства (44.23).

44.4. Формула Грина. Пусть на плоскости задана правая система координат. Ориентация простого замкнутого контура, лежащего на этой плоскости, называется *положительной*, если она соответствует движению против часовой стрелки, т.е. если при движении по контуру в соответствии с ориентацией конечная часть плоскости, ограниченная контуром, остается слева. Противоположная ориентация называется *отрицательной*.

Если на плоскости задана левая система координат, то *положительной ориентацией простого замкнутого контура* (соответствующей этой системе координат) называется его отрицательная ориентация при правой системе координат. Это определение оправдывается следующим обстоятельством. Если рассматриваемый контур гладкий, τ – единичный касательный вектор в направлении положительного (относительно правой или левой системы координат) обхода контура, а ν – единичная нормаль, направленная в сторону конечной области, ограниченной контуром (эта нормаль называется внутренней нормалью), то упорядоченная пара векторов τ, ν имеет ту же ориентацию, что и координатные орты. Это означает, что определитель матрицы перехода от векторов τ, ν к заданному на плоскости базису положителен независимо от того, задан правый или левый базис,

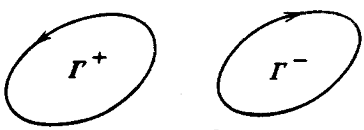


Рис. 156

лишь бы только контур был ориентирован положительно относительно системы координат, соответствующей этому базису.

Положительно ориентированный простой замкнутый контур Γ будем обозначать через Γ^+, а отрицательно ориентированный – через Γ^- (на рис. 156 изображен случай правой системы координат). Будем говорить, что обход контура, соответствующий положительной (отрицательной) ориентации, происходит в положительном (соответственно в отрицательном) направлении.

Ограниченная область G на плоскости переменных x, y называется элементарной относительно оси y, если существуют такие две непрерывные на некотором отрезке $[a, b]$ функции φ и ψ, что (рис. 157)

$$G = \{(x, y):\ a < x < b,\quad \varphi(x) < y < \psi(x)\}. \tag{44.30}$$

Аналогично определяется плоская область, элементарная относительно оси x.

Граница области G, элементарной относительно некоторой координатной оси, является, очевидно, простым замкнутым контуром. Как и всякую границу, будем его обозначать ∂G, а в случае, когда он положительно

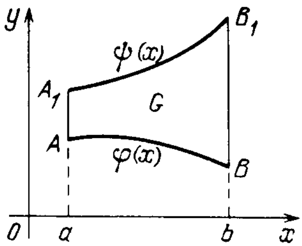


Рис. 157

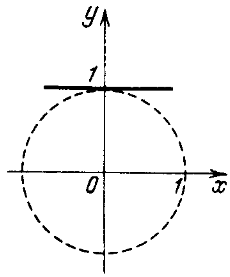


Рис. 158

(отрицательно) ориентирован (согласно сделанному выше соглашению), через ∂G^+ (соответственно через ∂G^-).

Область, элементарная относительно какой-либо координатной оси, квадрируема, так как ее граница состоит из четырех графиков непрерывных на некоторых отрезках функций. Например, в случае (44.30), т.е. области, элементарной относительно оси y, ее граница ∂G состоит из графиков непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций φ и ψ, а также графиков двух постоянных (относительно переменной y) на соответствующих отрезках функций.

Область, элементарная относительно обеих координатных осей, называется элементарной.

Если функция f задана на замыкании $\overline{G}$ области G, то может случиться, что в некоторой граничной точке этой области не имеет смысла говорить о той или иной частной производной. Например, если функция f задана только на круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$, то в точке $(0, 1)$ нельзя говорить о производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, так как функция f не определена в точках прямой $y = 1$, кроме точки $(0, 1)$ (рис. 158).

Оказывается удобным ввести понятие непрерывности частных производных вплоть до границы области следующим образом. Пусть функция f

имеет в области G, например, частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Будем говорить, что эта частная производная непрерывна *на замыкании* $\overline{G}$ *области* G, если $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ непрерывно продолжаема с области G на ее границу, т.е. если существует непрерывная на $\overline{G}$ функция, совпадающая на области G с частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Это определение, очевидно, имеет смысл для функций любого числа переменных.

Л е м м а 1. *Если область* G *– элементарная, а функции* $P = P(x, y)$ *и* $Q = Q(x, y)$ *непрерывны вместе со своими производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *на замыкании* $\overline{G}$ *области* G, *то*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial G^+} P\,dx + Q\,dy. \tag{44.31}$$

Эта формула называется *формулой Грина* *). Она является обобщением формулы Ньютона – Лейбница $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ на случай функций двух переменных.

$\triangleright$ Рассмотрим интеграл $\iint_G \dfrac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$. Так как область G – элементарная относительно оси Oy, то его можно свести к повторному. Проделав это и применив затем формулу Ньютона – Лейбница, получим (см. рис. 157, на котором изображен случай правой системы координат)

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \underset{\substack{(44.30)\\(43.6)}}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= \int_a^b \big(P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))\big)\,dx \underset{(44.25)}{=}$$

$$\underset{(44.25)}{=} \int_{\overset{\frown}{A_1 B_1}} P\,dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx = - \int_{\overset{\frown}{B_1 A_1}} P\,dx - \int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx. \tag{44.32}$$

Отрезки A_1A и BB_1 являются, очевидно, гладкими кривыми. Они параллельны оси Oy, поэтому их касательные, совпадающие с ними по направлению, образуют с осью Ox прямой угол $\alpha = \pi/2$. Следовательно, в формуле

---

*) Д. Грин (1793–1841) – английский математик.

(44.14) (в ней надо положить $Q = R = 0$) $\cos\alpha = 0$, а значит,

$$\int\limits_{\overset{\frown}{A_1 A}} P dx = \int\limits_{\overset{\frown}{B B_1}} P dx = 0.$$

В силу этого равенства (44.32) можно записать в виде

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{B_1 A_1}} P dx - \int\limits_{\overset{\frown}{A_1 A}} P dx - \int\limits_{\overset{\frown}{A B}} P dx - \int\limits_{\overset{\frown}{B B_1}} P dx = -\int\limits_{\partial G^+} P dx. \tag{44.33}$$

Аналогично, исходя из того, что область элементарна относительно оси Ox, доказывается, что

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_{\partial G^+} Q dy. \tag{44.34}$$

Вычтя из равенства (44.34) равенство (44.33), получим формулу (44.31). ◁

Если граница открытого плоского множества G состоит из конечного множества простых замкнутых контуров, то ее положительной ориентацией (при правой системе координат) называется совокупность таких ориентаций этих контуров G, что при обходе по ним в соответствии с их ориентацией множество всегда остается слева (рис. 159). Противоположная ориентация контуров называется отрицательной ориентацией указанной границы.

Положительно ориентированная граница ∂G открытого множества G обозначается ∂G^+, а отрицательно – ∂G^-.

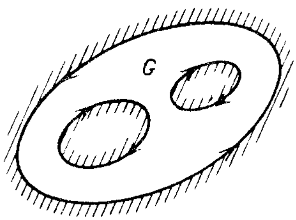


Рис. 159

Граница открытого плоского множества называется *кусочно гладкой*, если она состоит из конечного числа простых кусочно гладких контуров.

Так как площадь кусочно гладкой кривой, как и всякой спрямляемой кривой, равна нулю (п. 42.2), то и площадь границы плоского открытого множества, если эта граница кусочно гладкая, равна нулю, а следовательно, само множество квадрируемо (см. п. 42.1).

Если область G такова, что существуют такие элементарные области G_i, $i = 1, 2, \dots, m$, что

$$\overline{G} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{G}_i, \tag{44.35}$$

$$G_i \cap G_j = \phi, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \tag{44.36}$$

то говорят, что область G можно разбить на конечное множество элементарных областей.

Из того, что область можно разбить на конечное множество элементарных областей G_i, следует, что ее граница состоит из конечного множества простых контуров. Это вытекает из того, что границы элементарных областей G_i являются простыми контурами.

Т е о р е м а 1. *Если G – ограниченная плоская область, которую можно разбить на конечное множество элементарных областей, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{G}$ области G, то имеет место формула Грина*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G^+} P dx + Q dy. \tag{44.37}$$

С л е д с т в и е. *Если в дополнение к условиям теоремы граница ∂G области G – кусочно гладкая, то формулу* (44.37) *можно записать в виде*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int\limits_{\partial G^+} (P \cos\alpha + Q \cos\beta)\, ds, \tag{44.38}$$

где $(\cos\alpha, \cos\beta)$ *– единичный касательный к границе ∂G области G вектор (конечно, в тех точках, в которых он существует).*

Интегралы в правых частях формул (44.37) и (44.38) понимаются как суммы интегралов по контурам, из которых состоит граница ∂G области G.

Докажем теорему.

$\triangleright$ Пусть G_i, $i = 1, 2, \dots, m$, – такие области, что для них выполняются условия (44.35) и (44.36). Согласно лемме для каждого G_i, $i = 1, 2, \dots, m$, имеет место равенство

$$\iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int\limits_{\partial G_i^+} P dx + Q dy. \tag{44.39}$$

Суммируя левые части этих равенств, в силу выполнения условий (44.35) и (44.36) из аддитивности кратного интеграла получим

$$\sum_{i=1}^{m} \iint\limits_{G_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy. \tag{44.40}$$

При суммировании правых частей равенств (44.39) останется только криволинейный интеграл по ∂G^+, так как все другие части границ ∂G_i встретятся в сумме дважды и с противоположными ориентациями, в силу чего сумма интегралов по ним равна нулю (рис. 160):

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\partial G_i^+} Pdx + Qdy = \int_{\partial G^+} Pdx + Qdy. \tag{44.41}$$

Поскольку в силу формул (44.39) левые части равенств (44.40) и (44.41) равны, то равны и правые, т.е. формула (44.37) для рассматриваемого случая доказана. $\lhd$

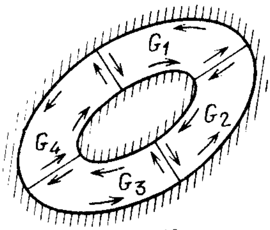


Рис. 160

Следствие теоремы вытекает из справедливости равенства (44.14) для кусочно гладких кривых.

З а м е ч а н и е. Формула Грина (44.37) верна вообще для любой области с кусочно гладкой границей. Ее доказательство в таких предположениях выходит за рамки настоящего курса.

44.5. Формула для площадей. В качестве приложения формулы Грина рассмотрим задачу вычисления площадей при помощи криволинейных интегралов.

Если в формуле Грина (44.37) положить $P = 0$, $Q = x$ на $\overline{G}$, то, заметив, что $\iint_G dxdy = \mu G$, получим

$$\mu G = \iint_G dxdy \underset{(44.37)}{=} \int_{\partial G^+} xdy. \tag{44.42}$$

Аналогично, при $P = -y$, $Q = 0$

$$\mu G = \iint_G dxdy = -\int_{\partial G^+} ydx. \tag{44.43}$$

Из равенств (44.42) и (44.43) следует формула

$$\mu G = \frac{1}{2} \int_{\partial G^+} xdy - ydx. \tag{44.44}$$

Пример. Вычислим с помощью формулы (44.44) площадь S, ограниченную эллипсом

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$
$$0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Применив формулу (44.44), получим

$$S = \frac{1}{2}\int_{\partial G^{+}} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}ab\int_{0}^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

§ 45. Замена переменного в кратном интеграле

45.1. Замена переменного в двойном интеграле. Пусть D – область на плоскости $\mathbf{R}^2_{xy}$, D^* – область на плоскости $\mathbf{R}^2_{uv}$,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{45.1}$$

– взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области D^* на D, якобиан которого не равен нулю на D^*:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in D^*. \tag{45.2}$$

Отображение (45.1) будем обозначать буквой F, таким образом, $D = F(D^*)$.

Отметим, что якобиан отображения (45.1) в силу его непрерывности, согласно теореме Коши о сохранении знака непрерывной функции в области, либо всюду в D^* положителен, либо всюду в D^* отрицателен.

Из сделанных предположений следует, что для любых точек $M \in D$, $M^* \in D^*$ таких, что $M = F(M^*)$, существуют сколь угодно малые по диаметру их окрестности, отображающиеся при отображении (45.1) взаимно однозначно друг на друга (п. 26.5). Поэтому, если E^* – какое-либо множество, замыкание $\overline{E}^*$ которого лежит в D^*, то образом внутренности множества E^* при отображении F является внутренность образа $F(E^*)$ этого множества, а образом границы ∂E^* множества E^* является граница образа $\partial F(E^*)$.

Пусть, далее, G и G^* – ограниченные области,

$$\overline{G} \subset D, \quad \overline{G}^* \subset D^*, \quad G = F(G^*) \tag{45.3}$$

(рис. 161). Будем предполагать, что границы областей G и G^* кусочно гладкие. Отметим, что для того чтобы выполнялось это условие, достаточно предположить, что граница только области G^* кусочно гладкая, так как нетрудно показать, что образ кусочно гладкой кривой при непрерывно дифференцируемом отображении с якобианом, не равным нулю, также является кусочно гладкой кривой.

Напомним, что из ограниченности множеств G, G^* и того, что кусочно гладкая кривая, будучи спрямляемой, имеет меру Жордана, равную нулю, следует, что при сделанных предположениях множества $\overline{G}$ и $\overline{G}^*$ являются измеримыми компактами.

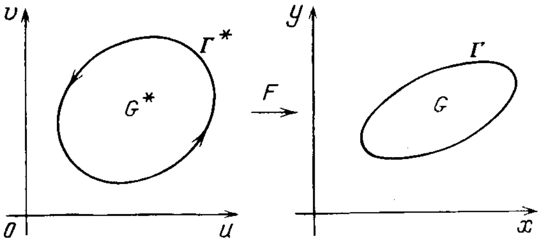


Рис. 161

Для простоты дальнейших рассуждений предположим, что область G элементарна относительно одной из осей координат (см. п. 44.4), например относительно оси y, т.е.

$$G = \{(x, y):\ a < x < b,\quad \varphi(x) < y < \psi(x)\}, \tag{45.4}$$

где φ и ψ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, и что в D^* существуют непрерывные (а следовательно, равные) вторые частные производные $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ и $\dfrac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ первой координатной функции (45.1). Оба эти предположения не являются существенными для доказываемой ниже теоремы, но упрощают ее доказательство и дают возможность ясно увидеть его идею.

Заметим, что если область G имеет вид (45.4), то ее граница, а следовательно, в силу свойств отображения (45.1) и граница области G^* состоят каждая только из одного контура.

Если выполняются все сделанные выше предположения, то справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции f имеет место формула*

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\,dx dy = \iint\limits_{G^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{45.5}$$

▷ Прежде всего заметим, что интегралы в обеих частях равенства (45.5) существуют, так как являются интегралами от непрерывных на измеримых компактах функций. Действительно, функция $f(x, y)$ непрерывна по условию на множестве $\overline{G}$, а функция $f(x(u, v), y(u, v)) \left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ непрерывна на $\bar{G}^*$ в силу непрерывной дифференцируемости отображения (45.1) и непрерывности композиции непрерывных функций.

Пусть

$$\Gamma^* = \{u(t), v(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{45.6}$$

– положительно ориентированный контур, ограничивающий область G^* (см. рис. 160), а Γ – ориентированный контур, являющийся границей области G, ориентация которого порождается ориентацией контура Γ^* при помощи отображения (45.1). Иначе говоря, Γ является образом при отображении (45.1) ориентированного контура Γ^*:

$$\Gamma = \{x(u(t), v(t)),\ y(u(t), v(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{45.7}$$

Введем следующее удобное для дальнейшего обозначение: пусть ϵ – такое число, что $\epsilon = 1$, если контур Γ ориентирован положительно, и $\epsilon = -1$, если контур Γ ориентирован отрицательно.

Положим еще

$$P(x, y) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\varphi(x)}^{y} f(x, t)\,dt,\quad a \leqslant x \leqslant b,\quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x).$$

Тогда ясно, что

$$f(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y},\quad (x, y) \in \bar{G}, \tag{45.8}$$

и что функции $P(x, y)$ и $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y}$ непрерывны на $\bar{G}$.

Теперь имеем (см. лемму 1 из п. 44.4)

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy \underset{(45.8)}{=} \iint\limits_G \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx\,dy \underset{(44.31)}{=} -\epsilon \int\limits_\Gamma P\,dx \underset{\substack{(44.19)\\(45.7)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(44.19)\\(45.7)}}{=} -\epsilon \int\limits_a^b Px'\,dt = -\epsilon \int\limits_a^b P\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt \underset{\substack{(44.19)\\(45.6)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(44.19)\\(45.6)}}{=} -\epsilon \int\limits_{\Gamma^*} P\frac{\partial x}{\partial u}\,du + P\frac{\partial x}{\partial v}\,dv \underset{(44.31)}{=}$$

$$\underset{(44.31)}{=} -\epsilon \iint\limits_{G^*} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] du\,dv =$$

$$= -\epsilon \iint\limits_{G^*} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - \right.$$

$$- \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \Bigg] du dv =$$

$$= \epsilon \iint\limits_{G^*} \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \underset{(45.8)}{=} \epsilon \iint\limits_{G^*} f(x(u, v), \; y(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \tag{45.9}$$

Это равенство верно для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции f. Так как $\iint\limits_G dx\,dy = \mu G$, то для функции $f \equiv 1$ из равенства (45.9) имеем

$$\mu G = \epsilon \iint\limits_{G^*} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv. \tag{45.10}$$

Левая часть этого равенства положительна, следовательно, и правая также положительна. Поскольку якобиан отображения сохраняет на G^* постоянный знак, то это возможно только тогда, когда $\epsilon \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$. Отсюда следует, что

$$\epsilon \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|. \tag{45.11}$$

Из формул (45.9) и (45.11) сразу следует формула (45.5). $\lhd$

Используя свойства аддитивности и полной аддитивности кратного интеграла, формулу (45.5) можно доказать при более слабых предположениях, чем те, при которых она была доказана выше (см. п. 45.4*).

45.2. Геометрический смысл абсолютной величины якобиана. Из формул (45.10) и (45.11) следует, что

$$\mu G = \iint\limits_{G^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \tag{45.12}$$

Поскольку G^* – квадрируемая область, а функция $\left| \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ непрерывна на ее замыкании, то согласно интегральной теореме о среднем существует такая точка $M^* \in \overline{G}^*$, что

$$\iint\limits_{G^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Bigg|_{M^*} \iint\limits_{G^*} du dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Bigg|_{M^*} \mu G^*,$$

и потому

$$\mu G = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Bigg|_{M^*} \mu G^*. \tag{45.13}$$

Если зафиксировать какую-либо точку $M_0^* \in D^*$ и рассматривать только области G^*, содержащие точку M_0^*, то, обозначив через $\operatorname{diam} G^*$ диаметр области G^*, будем иметь

$$\rho(M^*, M_0^*) \leqslant \operatorname{diam} G^*$$

и, следовательно,

$$\lim_{\operatorname{diam} G^* \to 0} M^* = M_0^*. \tag{45.14}$$

Отсюда в силу непрерывности функции $\left|\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|$ вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{diam} G^* \to 0} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Bigg|_{M^*} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Bigg|_{M_0^*}. \tag{45.15}$$

Из формул (45.13) – (45.15) окончательно получаем

$$\lim_{\operatorname{diam} G^* \to 0} \frac{\mu G}{\mu G^*} = \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Bigg|_{M_0^*}. \tag{45.16}$$

Таким образом, *геометрический смысл абсолютной величины якобиана отображения состоит в том, что она равна коэффициенту изменения площадей в данной точке*:

$$\frac{\mu G}{\mu G^*} \sim \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| \Bigg|_{M_0^*}, \quad \operatorname{diam} G^* \to 0. \tag{45.17}$$

Если отображение (45.1) линейно, т.е.

$$x = a_{11}u + a_{12}v + a_1,$$

$$y = a_{21}u + a_{22}v + a_2,$$

то его якобиан совпадает с его определителем:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Из геометрии известно, что для линейных отображений вместо приближенного равенства (45.17) для любой квадрируемой области G^* имеет место точное равенство

$$\frac{\mu G}{\mu G^*} = \left|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right|. \tag{45.18}$$

Всякое дифференцируемое отображение в окрестности каждой точки области своего определения с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращения аргументов, может быть приближенно линейным отображением, определителем которого является якобиан данного отображения. В силу этого обстоятельства точное равенство (45.18) и влечет за собой приближенное равенство (45.17).

45.3. Геометрический смысл знака якобиана. Из формулы (45.11) и выбора числа ϵ следует, что если $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$, то $\epsilon = 1$, т.е. положительной ориентации контура Γ^* при отображении (45.1) соответствует положительная же ориентация контура Γ, а если $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} < 0$, то $\epsilon = -1$, т.е. положительной ориентации контура Γ^* соответствует отрицательная ориентация контура Γ.

Таким образом, *отображения с положительными якобианами сохраняют ориентации контуров, а отображения с отрицательными якобианами меняют их на противоположные.* В этом и состоит геометрический смысл знака якобиана отображения.

45.4*. Обобщение теоремы о замене переменных в двойном интеграле. Формула (45.5) замены переменных в двойном интеграле в силу аддитивности интеграла легко обобщается на области, которые можно разбить на конечное число областей, для которых доказана формула (45.5).

Пусть квадрируемые области G^* и $G = F(G^*)$ таковы. что $\overline{G} \subset D$, $\overline{G}^* \subset D^*$, и существуют такие области $G_i^* \subset G^*$, что $\tau^* \overset{\text{def}}{=} \{\overline{G}_i^* \cap G^*\}_{i=1}^{i=k}$ и $\tau \overset{\text{def}}{=} \{\overline{G}_i \cap G\}_{i=1}^{i=k}$, где $G_i = F(G_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, являются разбиениями (п. 42.3) соответственно множеств G^* и G.

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на $\overline{G}$ и для каждой области G_i справедлива формула (45.5), т.е.

$$\iint\limits_{G_i} f(x, y)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G_i^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{45.19}$$

то эта формула справедлива и для всей области G.

В самом деле, сложив равенства (45.19), в силу аддитивности интеграла получим

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{G^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dxdy. \tag{45.20}$$

Формулу замены переменного в двойном интеграле для еще более широкого класса областей и при более слабых ограничениях на отображение (45.1) можно получить с помощью свойства полной аддитивности интеграла (п. 42.5).

Отображение называется *непрерывно дифференцируемым на замыкании открытого множества,* если все его координатные функции непрерывно дифференцируемы на этом замыкании.

Пусть G и G^* – области, лежащие соответственно в пространствах $\mathbf{R}^2_{xy}$ и $\mathbf{R}^2_{uv}$, отображение (45.1) отображает непрерывно и непрерывно дифференцируемо $\overline{G}^*$ на $\overline{G}$, взаимно однозначно G^* на G и его якобиан не равен нулю в G^*. Таким образом, здесь не предполагается на границе области G^*

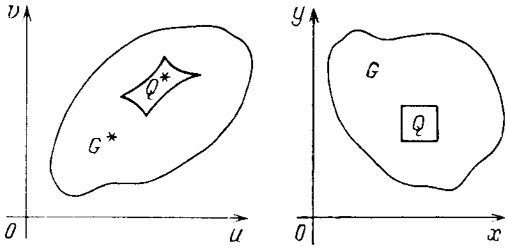


Рис. 162

ни взаимной однозначности отображения (45.1), ни неравенства нулю его якобиана, что имело место выше в силу условия $\overline{G}^* \subset D^*$ (п. 45.1).

Отображение F^{-1}, обратное к отображению F, рассматриваемому только на области G, определено на G^* и также является непрерывно дифференцируемым с якобианом, не равным нулю (п. 26.4).

Пусть Q – замкнутый квадрат, содержащийся в области G: $Q \subset G$. Его граница, очевидно, является кусочно гладкой. Поэтому ее прообраз при отображении F, являющийся границей прообраза $Q^* = F^{-1}(Q)$ квадрата Q, также является кусочно гладким (рис. 162).

Если функция f непрерывна на $\overline{G}$, то для ее сужения на всяком квадрате Q указанного вида в силу теоремы 1 имеет место формула замены переменного в двойном интеграле:

$$\iint\limits_{Q} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{Q^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv. \tag{45.21}$$

Если в качестве квадратов Q взять все квадраты ранга k, лежащие в G, и просуммировать для них равенства (45.21), то получим (см. (45.20))

$$\iint\limits_{s_k(G)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{F^{-1}(s_k(G))} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv \tag{45.22}$$

(обозначение s_k см в п. 42.1).

Пусть области G и G^* квадрируемы и функция f непрерывна на $\overline{G}$. Перейдя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве (45.22), в силу полной аддитивности интеграла будем иметь

$$\iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv. \tag{45.23}$$

Существование интегралов в обеих частях равенства снова следует из непрерывности подынтегральных функций соответственно на $\overline{G}$ и $\overline{G}^*$. Отметим, что абсолютная величина якобиана $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ непрерывна на $\overline{G}^*$ в силу того, что согласно определению непрерывной дифференцируемости отображения на замыкании области все частные производные функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ непрерывно продолжаемы на $\overline{G}^*$.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что формула (45.23) замены переменных в двойном интеграле справедлива не только для непрерывных, но и для любых интегрируемых по Риману функций f, и при этом без предположения, что якобиан не обращается в нуль в области G.

45.5. Случай интегралов произвольной кратности. Формула (45.23) замены переменных в двойном интеграле может быть обобщена на произвольные n-кратные интегралы, $n \in \mathbf{N}$. Напишем ее и сформулируем предположения, при которых она имеет место.

Пусть G и G^* – измеримые открытые множества,

$$G \subset \mathbf{R}^n_x, \quad G^* \subset \mathbf{R}^n_u, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad u = (u_1, \ldots, u_n),$$

$$x = F(u) = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n(u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

– непрерывное и непрерывно дифференцируемое отображение на $\overline{G}$, взаимно однозначно отображающее G^* на G.

Если функция f интегрируема на G, то имеет место формула

$$\int\limits_{G} f(x)\,dx = \int\limits_{G^*} f(F(u))\,|I(u)|\,du, \tag{45.24}$$

где $I(u) = \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$ – якобиан отображения F.

45.6. Криволинейные координаты. Взаимно однозначное отображение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{45.25}$$

открытого множества D плоскости $\mathbf{R}^2_{xy}$ на множество D^* плоскости $\mathbf{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x, y) \in D$ пару чисел (u, v), которые можно рассматривать как новые координаты той же точки (x, y) на плоскости $\mathbf{R}^2_{xy}$. Иначе говоря, формулы (45.25) можно рассматривать не как формулы, задающие отображение с одной плоскости на другую, на каждой из которых заданы декартовы координаты соответственно x, y и u, v, а как переход к новым координатам u, v точки (x, y) в той же плоскости. В этом случае множество D^* представляет собой множество пар новых координат точек множества D.

Обратный переход от координат u, v к координатам x, y осуществляется с помощью отображения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{45.26}$$

обратного к отображению (45.25). Это обратное отображение существует в силу взаимной однозначности отображения (45.25), и оно определено на D^*.

Множество точек плоскости $\mathbf{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется *координатной линией.* Если $u = u_0$, соответственно $v = v_0$, то из формул (45.26) получаются уравнения координатных линий в виде

$$x = x(u_0, v), \quad y = y(u_0, v),$$

соответственно

$$x = x(u, v_0), \quad y = y(u, v_0),$$

т.е., вообще говоря, получаются уравнения, являющиеся параметрическими представлениями некоторых кривых. Поэтому координаты u, v называются обычно *криволинейными координатами.*

Будем предполагать, что отображение (45.26) удовлетворяет на области D^* всем условиям, при которых была доказана формула замены переменных в кратном интеграле. Посмотрим, каков геометрический смысл якобиана $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ при интерпретации формул (45.25) как формул перехода от декартовых координат x, y к, вообще говоря, криволинейным координатам u, v.

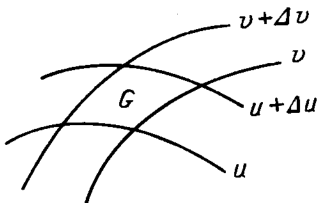


Рис. 163

Зафиксируем значения $u_0, v_0, \Delta u > 0, \Delta v > 0$, и обозначим через G ограниченную область, граница которой состоит из частей координатных линий $u = u_0$, $u = u_0 + \Delta u$, $v = v_0$, $v = v_0 + \Delta v$ (рис. 163), т.е. $G = \{(x, y)\colon\ x = x(u), y = y(v);\ u_0 < u < u_0 + \Delta u,\ v_0 < v < v_0 + \Delta v\}$ (G называется *координатным параллелограммом*), и пусть $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$.

Если рассмотреть вспомогательную плоскость переменных u, v то на ней неравенства $u_0 < u < u_0 + \Delta u$, $v_0 < v < v_0 + \Delta v$ задают прямоугольник G^*. Граница ∂G координатного параллелограмма G на плоскости переменных x, y, будучи при достаточно малых Δu и Δv образом при отображении (45.26) границы прямоугольника G^*, которая, как и граница всякого прямоугольника, является кусочно гладкой кривой, также представляет собой кусочно гладкую кривую. Поэтому к координатному параллелограмму G можно применять формулу (45.12). Согласно интегральной теореме о среднем существует такая точка $M \in G$, что

$$\mu G = \iint_G dx\,dy \underset{(45.12)}{=} \iint_{G^*} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_M \iint_{G^*} du\,dv =$$

$$= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_M \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} du \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} dv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_M \Delta u\,\Delta v. \qquad (45.27)$$

Положим

$$\epsilon(M) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_M - \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M_0}. \qquad (45.28)$$

Очевидно, что в силу непрерывной дифференцируемости отображения (45.26) $\lim\limits_{\Delta u^2 + \Delta v^2 \to 0} \epsilon(M) = 0$.

Подставив (45.28) в (45.27), получим

$$\mu G = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Bigg|_{M_0} \Delta u\,\Delta v + \epsilon(M)\Delta u \Delta v. \qquad (45.29)$$

Таким образом, абсолютная величина якобиана $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ равна "коэффициенту изменения" площади криволинейного координатного параллелограмма G по сравнению (с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем эта площадь) с площадью $\Delta u \Delta v$ декартова координатного прямоугольника со сторонами Δu и Δv. Это обстоятельство часто используется на практике при вычислении якобианов преобразований криволинейных координат в декартовы.

Аналогичным образом криволинейные координаты вводятся в областях пространств $\mathbf{R}^n$ при любом $n \geqslant 2$.

Если формулы

$$x = F(u) = \begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n(u_1, \ldots, u_n), \end{cases}$$

$u = (u_1, \ldots, u_n) \in G^*$,

рассматривать как формулы перехода от криволинейных координат $u_1, \ldots, u_n$ к декартовым $x_1, \ldots, x_n$ с якобианом

$$I(u) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)},$$

то вместо $\int\limits_{G^*} f(F(u))\,|I(u)|\,du$ пишут $\int\limits_G f(F(u))\,|I(u)|\,du$, и, таким образом, формула (45.24) замены переменных в кратном интеграле примет вид

$$\int\limits_G f(x)\,dx = \int\limits_G f(x(u))\,|I(u)|\,du, \tag{45.30}$$

т.е. в левой и правой частях равенства интегрирование производится по одному и тому же множеству.

Из криволинейных координат на плоскости отметим полярные координаты r, φ, связанные с декартовыми x, y соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \tag{45.31}$$

Координатными линиями полярных координат являются окружности $r = \text{const}$ и лучи, выходящие из начала координат, $\varphi = \text{const}$. В этом случае координатные линии пересекаются под прямыми углами (когда имеет место такое обстоятельство, то говорят, что криволинейные координаты ортогональны).

Рассмотрим координатный параллелограмм G полярных координат (рис. 164). Длины двух его сторон равны Δr и $r\Delta\varphi$. Вычислим приближенно его площадь, считая его обыкновенным прямоугольником:

$$\mu G \approx r\Delta r\Delta\varphi. \tag{45.32}$$

Поскольку отображение, задаваемое формулами (45.31), сохраняет ориентацию, то его якобиан положителен, а поэтому из формул (45.29) и

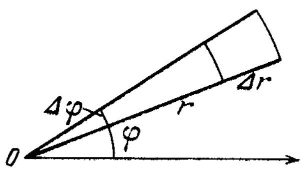


Рис. 164

(45.32) следует, что $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r$. В этом, конечно, легко убедиться и непосредственно, вычислив соответствующие частные производные.

Из криволинейных координат в пространстве отметим сферические и цилиндрические. Сферические r, φ, ψ связаны с декартовыми координатами

x, y, z формулами

$$x = r\cos\varphi\cos\psi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\psi,$$

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

(рис. 165). Сосчитаем якобиан

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \\ -r\sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\left(\sin\psi \begin{vmatrix} -\sin\varphi\ \cos\psi & \cos\varphi\ \cos\psi \\ -\cos\varphi\ \sin\psi & -\sin\varphi\ \sin\psi \end{vmatrix} + \cos\psi \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi \end{vmatrix}\right) =$$

$$= r^2(\sin^2\psi\cos\psi + \cos^3\psi) = r^2\cos\psi.$$

Цилиндрические координаты r, φ, h связаны с декартовыми x, y, z соотношениями

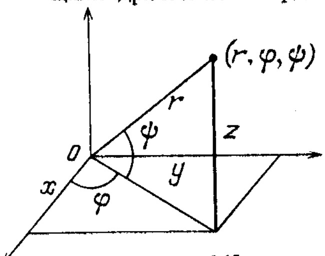


Рис. 165

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h,$$

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < h < +\infty.$$

Легко считается якобиан этого преобразования:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, h)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

З а м е ч а н и е. Если криволинейные координаты $u_1, u_2, \ldots, u_n$ таковы, что

$$\left|\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}\right| = 1, \tag{45.33}$$

то в силу этого равенства формула (45.30) для функции $f \equiv 1$ имеет вид

$$\mu G = \iint\limits_G dx_1 \ldots dx_n = \iint\limits_G du_1 \ldots du_n. \tag{45.34}$$

Это равенство заведомо имеет место для любого измеримого открытого множества G в случае, когда координаты $u_1, \ldots, u_n$ также являются декартовыми координатами, как и $x_1, \ldots, x_n$. В самом деле, переход от одних декартовых координат к другим происходит с помощью линейных ортогональных преобразований, а для них равенство (45.33) выполняется на всем пространстве. В этом случае равенство (45.34) означает, что мера измеримого открытого множества не зависит от выбора декартовой системы координат (напомним, что определение меры множества было дано в п. 42.1 для фиксированной системы координат). Таким образом, из формулы замены переменных в интеграле следует инвариантность меры относительно выбора декартовых координат.

§ 46. Элементы теории поверхностей

46.1. Основные определения. Пусть $\mathbf{R}^2_{uv}$ – координатная плоскость переменных u, v. Непрерывное отображение $M(u, v)$ (см. п. 20.3, определение (20.18)) замыкания $\overline{G}$ плоской области $G \subset \mathbf{R}^2_{uv}$, $(u, v) \in \overline{G}$, в пространство $\mathbf{R}^3$ называется *поверхностью.* Будем обозначать поверхность буквой S и писать

$$S = \{ M(u, v);\ (u, v) \in \overline{G} \}, \quad M(u, v) \in \mathbf{R}^3. \tag{46.1}$$

Образ множества $\overline{G}$ при отображении $M(u, v)$ называется *носителем поверхности* S.

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^3$ фиксирована декартова система координат x, y, z. Вектор-функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, где $\boldsymbol{r}(u, v)$ – радиус-вектор с началом в начале координат пространства $\mathbf{R}^3$ и концом в точке $M(u, v)$, называют *векторным представлением поверхности* S и пишут

$$S = \{ \boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{G} \}.$$

Тройку функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$, значения которых являются координатами точки $M(u, v)$ или, что то же самое, координатами вектора $\boldsymbol{r}(u, v)$, называют *координатным представлением поверхности* S и пишут

$$S = \{ x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v);\ (u, v) \in \overline{G} \}.$$

Переменные u и v называют *параметрами поверхности* S (или координатами на поверхности), а кривые вида $M(u, v_0)$ и $M(u_0, v)$ (u_0 и v_0 фиксированы) – соответствующими им *координатными линиями на этой поверхности.*

Точкой поверхности S называется точка $M = M(u, v) \in \mathbf{R}^3$, $(u, v) \in \overline{G}$, и пара значений параметров u, v, которым она соответствует. Сама точка M пространства $\mathbf{R}^3$ называется в этом случае *носителем* рассматриваемой *точки* поверхности. Очевидно, что точка поверхности однозначно определяется значениями параметров, которым она соответствует.

Совокупность всех носителей точек поверхности составляет носитель этой поверхности.

Отображение $M(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$, при определении поверхности не предполагается взаимно однозначным, т.е. поверхности могут самопересекаться. Таким образом, одна и та же точка пространства $\mathbf{R}^3$ может соответствовать разным значениям параметров, т.е. являться носителем разных точек поверхности: $M = M(u_1, v_1) = M(u_2, v_2)$, $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$.

Точка пространства, являющаяся носителем по крайней мере двух разных точек поверхности, называется *кратной точкой* этой поверхности. Поверхность, у которой имеются кратные точки, называется *поверхностью с самопересечением.*

Если векторное представление поверхности является дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой*) и т.д. функцией, то задаваемая им поверхность называется соответственно *дифференцируемой, непрерывно дифференцируемой, дважды дифференцируемой* и т.д. *поверхностью.*

По аналогии с понятием кривой для поверхности (46.1) вводится понятие преобразования ее параметров: если D – область на плоскости переменных s, t, то непрерывное взаимно однозначное отображение замыкания $\overline{D}$ области D на замыкание $\overline{G}$ области G:

$$u = u(s, t), \quad v = v(s, t), \quad (s, t) \in \overline{D}, \quad (u, v) \in \overline{G}, \tag{46.2}$$

принадлежащее соответствующему классу, называется *преобразованием параметров* поверхности S, и поверхность

$$\{M(u(s, t), v(s, t)); \ (s, t) \in \overline{D}\}$$

обычно называют той же поверхностью S, а отображения (46.1), (46.2) – разными ее представлениями.

Ясно, что поверхность, получающаяся из данной посредством преобразования параметров, имеет тот же носитель, что и исходная поверхность.

Аналогично случаю кривой для поверхности определяется понятие преобразования параметров в случае, когда представление поверхности непрерывно дифференцируемо то или иное число раз.

В случае, например, непрерывно дифференцируемых поверхностей преобразованиями параметров называются непрерывно дифференцируемые взаимно однозначные отображения (46.2) замыкания $\overline{D}$ области D на замыкание $\overline{G}$ области G с якобианом, не равным нулю на $\overline{D}$ (под якобианом в граничных точках области D, как всегда, понимается его непрерывное продолжение из области D на ее границу; см. об этом в п. 44.4). В этом случае отображение

$$s = s(u, v), \quad t = t(u, v), \quad (u, v) \in \overline{G}, \tag{46.3}$$

обратное к отображению (46.2), согласно теореме о неявных функциях будет также непрерывно дифференцируемым с якобианом, не равным нулю.

---

*) Понятия частных производных, дифференцируемости, непрерывной дифференцируемости и другие подобные понятия распространяются на случай векторных функций нескольких переменных по аналогии со скалярным случаем.

Пусть поверхность (46.1) непрерывно дифференцируемая, $\boldsymbol{r}_u$ – производная вектор-функции $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0)$ одного переменного u, т.е. $\boldsymbol{r}_u$ – касательный вектор к координатной линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v_0)$, соответственно $\boldsymbol{r}_v$ – касательный вектор к координатной линии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u_0, v)$.

Под кривыми (соответственно непрерывно дифференцируемыми кривыми и т.п.) на поверхности (46.1) будем понимать кривые, задаваемые представлениями вида $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, где $u(t)$ и $v(t)$ – такие непрерывные (соответственно непрерывно дифференцируемые) функции на отрезке $[a, b]$, что $(u(t), v(t)) \in \overline{G}$ при $t \in [a, b]$.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(t), v(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, – непрерывно дифференцируемая кривая на непрерывно дифференцируемой поверхности (46.1). Тогда

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{r}_u \frac{du}{dt} + \boldsymbol{r}_v \frac{du}{dt} \tag{46.4}$$

и, следовательно, касательная к любой кривой на поверхности лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. (Касательные векторы к кривым на поверхности будем считать приложенными в точке касания.)

Определение 1. *Точка $M_0 = \boldsymbol{r}(u_0, v_0)$ поверхности S называется неособой, если в ней векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ не коллинеарны. Это равносильно тому, что*

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0.$$

Если в точке $M_0 = M(u_0, v_0)$ векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ коллинеарны (в частности, хотя бы один из них равен нулю), то эта точка называется особой.

В силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ в неособой точке в ней однозначно определена плоскость, содержащая эти векторы. Как было показано выше, эта плоскость содержит касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в рассматриваемой неособой точке поверхности. Это делает естественным следующее

Определение 2. *Плоскость, проходящая через неособую точку $M(u_0, v_0)$ поверхности S параллельно векторам $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ и $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$, называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке.*

Ясно, что касательная плоскость определена однозначно.

Равенство (46.4) означает, что касательная в точке $M(u_0, v_0)$ к любой непрерывно дифференцируемой кривой на поверхности лежит в касательной плоскости к поверхности S в этой точке.

Если $\boldsymbol{r}_u^0 = \boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{r}_v^0 = \boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$, $\boldsymbol{r}_0$ – радиус-вектор точки $M_0 = M(u_0, v_0)$, а $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор произвольной точки касательной плоскости к поверхности S в точке $\boldsymbol{r}_0$, то уравнение касательной плоскости в векторной записи имеет вид (рис. 166)

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_u^0, \boldsymbol{r}_v^0) = 0. \tag{46.5}$$

Если $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{r}_u^0 = (x_u^0, y_u^0, z_u^0)$, $\boldsymbol{r}_v^0 = (x_v^0, y_v^0, z_v^0)$, то уравнение (46.5) в координатной записи имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (46.6)$$

Если поверхность S является графиком функции, т.е. имеет представление вида $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$ (такие представления называются явными),

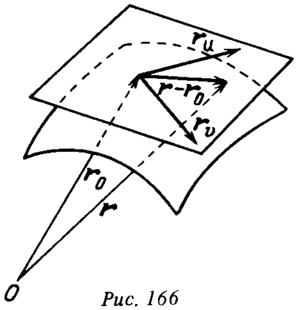


Рис. 166

и, следовательно, переменные x и y могут быть приняты за координаты на поверхности S, то

$$\boldsymbol{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad \boldsymbol{r}_x = (1, 0, f_x), \quad \boldsymbol{r}_y = (0, 1, f_y). \qquad (46.7)$$

Поэтому уравнение (46.6) принимает вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x^0 \\ 0 & 1 & f_y^0 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. вид

$$z - z_0 = (x - x_0) f_x^0 + (y - y_0) f_y^0, \qquad (46.8)$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$, $f_x^0 = f_x(x_0, y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0, y_0)$.

Для случая графика дифференцируемой функции ранее в п. 22.5 было дано другое определение касательной плоскости, основанное на локальном приближении дифференцируемой функции линейной функцией. Оно приводило к тому же уравнению (46.8). Это означает, что два определения касательной плоскости к графику дифференцируемой функции (данное в п. 22.5 и здесь) равносильны.

Ненулевой вектор, перпендикулярный касательной плоскости в точке $M(u_0, v_0)$ поверхности S, называется *нормальным вектором*, или *нормалью* *к поверхности S в этой точке*, а прямая, проходящая через точку $M(u_0, v_0)$ в направлении нормали, — *нормальной прямой*.

Очевидно, что если $M(u_0, v_0)$ — неособая точка поверхности, то вектор $\boldsymbol{r}_u^0 \times \boldsymbol{r}_v^0$ является в этой точке нормалью, а вектор

$$\nu = \frac{\boldsymbol{r}_u^0 \times \boldsymbol{r}_v^0}{|\boldsymbol{r}_u^0 \times \boldsymbol{r}_v^0|} \tag{46.9}$$

— единичной нормалью.

Запишем векторное произведение $\boldsymbol{r}_u^0 \times \boldsymbol{r}_v^0$ в координатной форме

$$\boldsymbol{r}_u^0 \times \boldsymbol{r}_v^0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}.$$

Здесь и в дальнейшем $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, как обычно, обозначают единичные векторы координатных осей (правой или левой) ортонормированной системы координат x, y, z. Так как

$$\boldsymbol{r}_u^0 \times \boldsymbol{r}_v^0 = \left(\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} x_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix} \right),$$

то уравнение нормальной прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u^0 & z_u^0 \\ y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u^0 & x_u^0 \\ z_v^0 & x_v^0 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u^0 & y_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 \end{vmatrix}},$$

а в случае поверхности, заданной явным представлением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \in \overline{G}$, — вид

$$\frac{x - x_0}{f_x^0} = \frac{y - y_0}{f_y^0} = -(z - z_0), \tag{46.10}$$

где $f_x^0 = f_x(x_0, y_0)$, $f_y^0 = f_y(x_0, y_0)$.

Иногда поверхность задается в неявном виде с помощью уравнения

$$F(x, y, z) = 0 \tag{46.11}$$

в том смысле, что координаты (x, y, z) точек рассматриваемой поверхности удовлетворяют уравнению (46.11). Если функция F непрерывно дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и одна из частных производных функции F в точке (x_0, y_0, z_0) не равна нулю, например, $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то согласно теореме о неявных функциях в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) уравнение (46.11) можно записать в виде

$$z = f(x,y),$$

т.е. локальное множество точек (x, y, z), удовлетворяющих уравнению (46.11), является параметрически заданной поверхностью с явным представлением. Вспомнив, что для частных производных функции (46.12) имеют место формулы

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

из уравнения (46.8) получим, что уравнение касательной плоскости поверхности, заданной неявно уравнением (46.11), имеет вид

$$(x - x_0)F_x^0 + (y - y_0)F_y^0 + (z - z_0)F_z^0 = 0, \tag{46.13}$$

где $F_x^0 = F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y^0 = F_y(x_0, y_0, z_0)$, $F_z^0 = F_z(x_0, y_0, z_0)$, а уравнение нормальной прямой — вид

$$\frac{x - x_0}{F_x^0} = \frac{y - y_0}{F_y^0} = \frac{z - z_0}{F_z^0}.$$

46.2. Первая квадратичная форма поверхности. Рассмотрим на непрерывно дифференцируемой поверхности $S = \{\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{G}\}$ кривую, заданную функциями $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, т.е. кривую $\{\boldsymbol{r}(u(t), v(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$, и вектор

$$d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv,$$

где $du = u'(t)\, dt$, $dv = v'(t)\, dt$, являющийся касательным вектором к рассматриваемой кривой и, следовательно, лежащий в касательной плоскости к поверхности S в соответствующей точке.

Найдем квадрат длины вектора $d\boldsymbol{r}$:

$$(d\boldsymbol{r})^2 = (\boldsymbol{r}_u\, du + \boldsymbol{r}_v\, dv)^2 =$$
$$= \boldsymbol{r}_u^2\, du^2 + 2\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v\, du\, dv + \boldsymbol{r}_v^2\, dv^2.$$

Введем обозначения

$$g_{11} = \boldsymbol{r}_u^2, \quad g_{12} = \boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v, \quad g_{22} = \boldsymbol{r}_v^2. \tag{46.14}$$

Тогда

$$(d\boldsymbol{r})^2 = g_{11}\, du^2 + 2g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2. \tag{46.15}$$

Квадратичная форма (46.15) называется первой квадратичной формой поверхности (есть еще вторая и третья квадратичные формы поверхности, но мы не будем их изучать в нашем курсе). Мы увидим, что, зная коэффициенты g_{11}, g_{12} и g_{22} первой квадратичной формы поверхности в каждой точке поверхности, можно решать ряд задач, например находить длины кривых на поверхности и вычислять площадь поверхности.

Лемма 1. *Первая квадратичная форма поверхности является положительно полуопределенной формой, а во всякой неособой точке поверхности положительно определенной.*

$\triangleright$ Положительная полуопределенность формы (46.15) очевидна, так как $(d\boldsymbol{r})^2 \geqslant 0$. Докажем ее положительную определенность в неособой точке. Прежде всего в неособой точке $\boldsymbol{r}_u \neq 0$, и потому

$$g_{11} = \boldsymbol{r}_u^2 > 0. \tag{46.16}$$

Далее, для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеем

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\widehat{\boldsymbol{ab}},$$

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\widehat{\boldsymbol{ab}}.$$

Возводя эти равенства в квадрат и сложив, получим тождество Лагранжа

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{ab})^2.$$

В частности, при $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}_v$ будем иметь

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \boldsymbol{r}_u^2 \boldsymbol{r}_v^2 - (\boldsymbol{r}_u \boldsymbol{r}_v)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2, \tag{46.17}$$

т.е. получился дискриминант первой квадратичной формы поверхности. Иначе говоря,

$$|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Поскольку в неособой точке поверхности $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} > 0. \tag{46.18}$$

Из неравенств (46.16) и (46.18), согласно критерию Сильвестра, следует положительная определенность квадратичной формы (46.15). $\triangleleft$

Пример. Если непрерывно дифференцируемая поверхность имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, то в силу формул (46.7) и (46.14) получим

$$g_{11} = 1 + f_x^2, \quad g_{12} = f_x f_y, \quad g_{22} = 1 + f_y^2, \tag{46.19}$$

и потому первая квадратичная форма в этом случае имеет вид

$$d\boldsymbol{r}^2 = (1 + f_x^2)\, dx^2 + 2 f_x f_y\, dx\, dy + (1 + f_y^2)\, dy^2.$$

46.3. Длина кривых на поверхности. Пусть на непрерывно дифференцируемой поверхности $S = \{\boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{G}\}$ задана непрерывно дифференцируемая кривая $\Gamma = \{\boldsymbol{r}(u(t), v(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}$ и $s = s(t)$ — переменная длина дуги этой кривой. Мы знаем, что $\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1$ (п. 17.2) или, что то же самое, $|dr| = |ds|$. Поэтому в силу формулы (46.14)

$$ds^2 = dr^2 = g_{11}\,du^2 + 2g_{12}\,du\,dv + g_{22}\,dv^2, \tag{46.20}$$

где $du = u'(t)\,dt$, $dv = v'(t)\,dv$. Таким образом, первая квадратичная форма поверхности равна квадрату дифференциала длины кривой на поверхности.

Если длина дуги s отсчитывается от начала рассматриваемой кривой, т.е. $\frac{ds}{dt} > 0$, то из (46.20) получим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

и, следовательно, для длины S_Γ кривой Γ имеем формулу

$$S_\Gamma = \int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt = \int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$$

46.4. Площадь поверхности. Пусть $S = \{r(u, v);\,(u, v)\in\overline{G}\}$ – непрерывно дифференцируемая поверхность, причем G – квадрируемая область на плоскости переменных u, v. Рассмотрим разбиение T_k этой плоскости на квадраты некоторого ранга k (k фиксировано, $k = 0, 1, 2, \ldots$). Обозначим через τ совокупность всех непустых каким-либо образом перенумерованных пересечений замыкания $\overline{G}$ области G с квадратами ранга k (таких пересечений только конечное множество). Таким образом, если $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$, то для каждого $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$ существует такой квадрат $Q_i \in T_k$, что $X_i = \overline{G} \cap Q_i \neq \phi$. Ясно, что τ является разбиением множества $\overline{G}$ и что элементы X_i этого разбиения являются замкнутыми множествами (в самом деле, X_i представляет собой пересечение двух замкнутых множеств $\overline{G}$ и Q_i и потому замкнуто).

Пусть $\tau(\partial G)$ – совокупность тех элементов разбиения τ, которые не пересекаются с границей ∂G области G (см. определение (42.74) в п. 42.3). Очевидно, что каждое множество $X_i \in \tau(\partial G)$ является целым квадратом Q_i. Действительно, пусть $\overline{G} \cap Q_i = X_i \neq Q_i$; тогда в квадрате Q_i найдется точка, не принадлежащая $\overline{G}$. Поскольку же в квадрате Q_i заведомо есть точка из $\overline{G}$, ибо $\overline{G} \cap Q_i \neq \phi$, то в нем найдется и точка границы ∂G области G (см. доказательство включения (42.34) в п. 42.1), что противоречит выбору множества X_i. Пусть Q_i – один из таких квадратов: $Q_i = X_i \in \tau(\partial G)$, $M_i = (u, v)$ – одна из его вершин, а h – длина его сторон. Тогда

$$\boldsymbol{r}(u + h, v) - \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_u h + o(h),$$
$$\boldsymbol{r}(u, v + h) - \boldsymbol{r}(u, v) = \boldsymbol{r}_v h + o(h).$$

Обозначим $\Delta\sigma_i$ площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\boldsymbol{r}_u h$ и $\boldsymbol{r}_v h$ (рис. 167). Имеем

$$\Delta\sigma_i = |\boldsymbol{r}_u h \times \boldsymbol{r}_v h| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, h^2 = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\Big|_{M_i} \mu X_i. \qquad (46.21)$$

Наряду с поверхностью S рассмотрим "чешуйчатую поверхность", состоящую из всех параллелограммов, натянутых на векторы $\boldsymbol{r}_u h$ и $\boldsymbol{r}_v h$, взятые в вершинах M_i квадратов $Q_i = X_i \in \tau(\partial G)$, и определим площадь

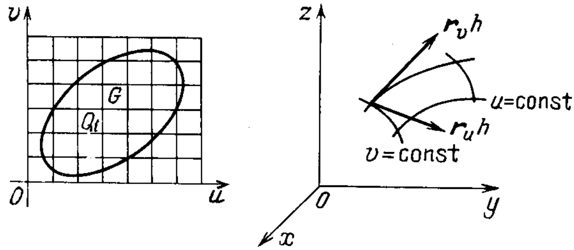


Рис. 167

μS поверхности S как предел суммы площадей всех указанных параллелограммов, когда мелкость $|\tau|$ разбиений τ стремится к нулю: $|\tau| \to 0$ (это равносильно тому, что ранг $k \to +\infty$). Таким образом,

$$\mu S \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau| \to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial G)} \Delta\sigma_i. \qquad (46.22)$$

В силу (46.21)

$$\sum_{X_i \in \tau(\partial G)} \Delta\sigma_i = \sum_{X_i \in \tau(\partial G)} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\Big|_{M_i} \mu X_i.$$

Отсюда видно, что эта сумма является неполной интегральной суммой от функции $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|$ на области G, и поскольку $\mu(\partial G) = 0$, то (см. теорему 4 в п. 42.3)

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sum_{X_i \in \tau(\partial G)} \Delta\sigma_i = \iint_G |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv.$$

В результате для площади μS поверхности S получилась формула

$$\mu S = \iint_G |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, du\, dv. \qquad (46.23)$$

Применив соотношение (46.17), ее можно записать в виде

$$\mu S = \iint_G \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv. \qquad (46.24)$$

Выражение $\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv$ называют иногда *элементом площади* поверхности и обозначают его dS, т.е.

$$dS = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, du\, dv. \qquad (46.25)$$

П р и м е р. Если поверхность S задана явным представлением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, то в силу формул (46.19) из (46.24) следует, что

$$\mu S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy. \tag{46.26}$$

46.5. Ориентация поверхности. Непрерывно дифференцируемая поверхность называется *гладкой*, если она не имеет особых точек.

Для гладкой поверхности $S = \{ \boldsymbol{r}(u, v); (u, v) \in \overline{G} \}$ единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$ (см. (46.9)) является непрерывной функцией (параметров u и v) на поверхности S.

Всякая непрерывная единичная нормаль на поверхности называется *ориентацией поверхности*. В каждой точке поверхности S имеются лишь две единичные нормали $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$, поэтому у поверхности S имеются только две ориентации $\boldsymbol{\nu}$ и $-\boldsymbol{\nu}$.

Иногда бывает полезным более общее понятие поверхности, чем введенные выше. Именно из рассматриваемых нами поверхностей с помощью отождествления ("склейки") некоторых их точек образуются новые "поверхности". Мы не будем формулировать точные определения таких поверхностей, а лишь поясним сказанное на примерах.

Если у прямоугольника $ABCD$ (рис. 168) склеить отрезки AB и DC, то получится боковая поверхность цилиндра. Если же предварительно "перекрутить" прямоугольник $ABCD$ и склеить уже отрезки AB и CD, то получится поверхность, называемая *листом Мёбиуса*. Между двумя получившимися поверхностями имеется большая принципиальная разница: на боковой поверхности цилиндра можно выбрать непрерывную единичную нормаль, а на листе Мёбиуса нельзя. У листа Мёбиуса, в отличие от боковой поверхности цилиндра, есть только одна сторона (лист Мёбиуса нельзя покрасить двумя различными красками так, чтобы две части, окрашенные разными красками, нигде не соприкасались; для боковой поверхности цилиндра это, очевидно, возможно). Рассматриваемые более общие поверхности (получаемые из параметрически заданных поверхностей (45.1) с помощью склейки) называются гладкими, если в замыкании некоторой окрестности каждой своей точки они являются гладкими параметрически заданными поверхностями.

Гладкая поверхность называется *ориентируемой* (или *двусторонней*), если на ней можно выбрать единичную непрерывную нормаль, и *неориентируемой* (или *односторонней*), если этого нельзя сделать.

Всякая гладкая параметрически заданная поверхность, как мы видели выше, ориентируема. Примером неориентируемой поверхности является лист Мёбиуса.

Объединение конечного числа гладких поверхностей будем называть *кусочно гладкой поверхностью* (она может состоять из нескольких отдельных "кусков"). Области, границы которых представляют собой кусочно гладкую поверхность, называются *областями с кусочно гладкой границей*.

Если кусочно гладкая поверхность S является границей некоторой области $G \subset \mathbf{R}^3$, то единичная нормаль $\boldsymbol{\nu}$ к этой поверхности (там, где она, конечно, существует), направленная внутрь области, называется *внутренней нормалью* (относительно области G), а противоположная ей нормаль $-\boldsymbol{\nu}$, направленная наружу от области G, – *внешней нормалью* (относительно той же области).

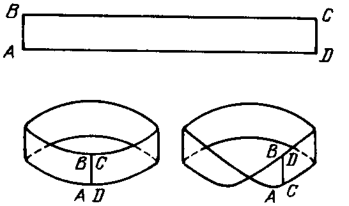


Рис. 168

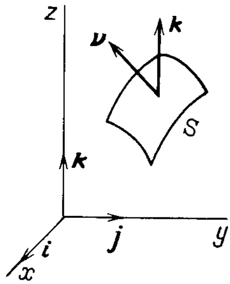


Рис. 169

Можно показать, что если поверхность S, являющаяся границей некоторой области, – гладкая, то ее внешняя и внутренняя нормали непрерывны на ней и, следовательно, являются двумя ее ориентациями. Если же поверхность S – кусочно гладкая, но не гладкая, то внешняя и внутренняя нормали по определению называются ее *ориентациями*.

Пример. Если гладкая поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in G$, то в силу формул (46.7) будем иметь

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \boldsymbol{i} - f_y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}. \tag{46.27}$$

Отсюда следует, что вектор

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y|} = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},\ -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) \tag{46.28}$$

является ориентацией поверхности S (рис. 169). При этом

$$\cos \widehat{\boldsymbol{\nu k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} > 0,$$

т.е. ориентация $\boldsymbol{\nu}$ образует острый угол с осью z. Это означает, что вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен вверх от поверхности S. Поэтому поверхность S, ориентированная единичной нормалью ν, называется "верхней стороной" $\hat{S}$ поверхности S, а ориентированная противоположной нормалью $-\nu$ (направленной вниз) – ее "нижней стороной" $\check{S}$.

§ 47. Поверхностные интегралы

47.1. Определения поверхностных интегралов. Пусть

$$S=\{ r(u,v);\ (u,v)\in \bar{D}\} \tag{47.1}$$

– поверхность, D – квадрируемая область, $r(u,v)$ – непрерывно дифференцируемая в ее замыкании $\bar{D}$ векторная функция, g_{11}, g_{12} и g_{22} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S, F – функция, заданная на поверхности S, т.е. $F=F(r(u,v)) = F(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$, $(u,v)\in \bar{D}$.

Интегралом первого рода $\iint\limits_S F dS$ *по поверхности* S называется интеграл

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \iint\limits_D F(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv \tag{47.2}$$

(здесь под dS понимается элемент площади поверхности S; см. (46.23)).

Если подынтегральная функция в интеграле правой части равенства (47.2) непрерывна на замыкании $\bar{D}$ области D (в частности, если функция F непрерывна на поверхности S), то поверхностный интеграл $\iint\limits_S FdS$ существует как интеграл от непрерывной функции по измеримому по Жордану компакту $\bar{D}$ (функция $\sqrt{g_{11}g_{12}-g_{22}}$ непрерывна на множестве в силу непрерывной дифференцируемости на нем векторной функции $r(u,v)$). Напомним, что интегралы по области D и ее замыканию $\bar{D}$ совпадают (см. п. 42.3).

Примеры. 1. Если $F\equiv 1$ на поверхности S, то поверхностный интеграл (47.2) равен площади поверхности S:

$$\iint\limits_S dS = \iint\limits_G \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du\,dv=\mu S.$$

2. Если поверхность S задана явным представлением $z=f(x,y)$, $(x,y)\in \bar{G}$, то

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy.$$

Поверхностный интеграл первого рода по кусочно гладкой поверхности определяется как сумма интегралов по ее гладким частям.

Пусть теперь

$$\boldsymbol{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{47.3}$$

— непрерывная единичная нормаль на поверхности S. Ориентированную с помощью этой нормали поверхность обозначим S^+. Пусть далее $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M(u, v))$ — векторная функция, заданная на поверхности S, и P, Q, R — координаты вектора $\boldsymbol{a}$, т.е.

$$\boldsymbol{a} = (P, Q, R). \tag{47.4}$$

Таким образом P, Q и R являются числовыми функциями на поверхности S:

$$P = P(M(u, v)),$$

$$Q = Q(M(u, v)),$$

$$R = R(M(u, v)).$$

Поверхностным интегралом $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}$ *второго рода по ориентированной поверхности* S^+ называется интеграл $\iint\limits_{S} \boldsymbol{a\nu}dS$, т.е.

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} \overset{\text{def}}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a\nu}dS. \tag{47.5}$$

Обозначение $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}$ называется *векторной записью* поверхностного интеграла второго рода. Его *координатной записью* называется выражение

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \tag{47.6}$$

так как по определению левая и правая части этого равенства являются разными записями одной и той же величины.

Записав скалярное произведение $\boldsymbol{a\nu}$ в координатном виде

$$\boldsymbol{a\nu} \underset{\substack{(47.3)\\(47.4)}}{=} P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma,$$

согласно определению (47.5) получим

$$\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \underset{(47.6)}{=} \iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} \underset{(47.5)}{=}$$

$$\underset{(47.5)}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a\nu}dS = \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \tag{47.7}$$

В частности, взяв поочередно две функции из трех P, Q и R тождественно равными нулю, будем иметь

$$\iint\limits_{S^+} P\,dy\,dz = \iint\limits_{S} P\cos\alpha\,dS, \qquad \iint\limits_{S^+} Q\,dz\,dx = \iint\limits_{S} Q\cos\beta\,dS,$$
$$\iint\limits_{S^+} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S} R\cos\gamma\,dS. \tag{47.8}$$

Интуитивный смысл этих формул состоит в том, что элемент площади dS (см. (46.25)) данной поверхности, умноженный на косинус угла, который он составляет с некоторой координатной плоскостью, "приближенно" равен элементу площади его проекции на рассматриваемую координатную плоскость, как если бы речь шла о площади плоской фигуры и ее проекции. На рис. 170 изображен случай, когда указанное проектирование производится на плоскость переменных x и y. В этом случае

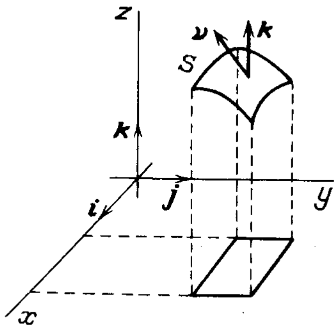


Рис. 170

$$dx\,dy \approx dS\cos\gamma,$$

где dS – элемент площади поверхности S, $dx\,dy$ – элемент площади проекции этой поверхности на плоскость переменных x, y а γ – угол между dS и указанной плоскостью, очевидно, равный углу между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности S и единичным ортом $\boldsymbol{k}$ к оси z.

Если за непрерывную единичную нормаль на поверхности S взять вектор $-\boldsymbol{\nu}$ и обозначить через S^- поверхность S, ориентированную с помощью этой нормали, то согласно определению поверхностного интеграла второго рода получим

$$\iint\limits_{S^-} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}(-\boldsymbol{\nu})\,dS. \tag{47.9}$$

Очевидно, что

$$\iint\limits_{S^-} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} \underset{(47.9)}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}(-\boldsymbol{\nu})\,dS = -\iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\,dS \underset{(47.5)}{=} -\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}.$$

Таким образом

$$\iint\limits_{S^-} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S} = -\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}, \tag{47.10}$$

т.е. при изменении ориентации поверхности интеграл второго рода меняет только знак.

Если векторная функция a непрерывна на поверхности S, то интегралы $\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}$ и $\iint\limits_{S^-} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S}$ существуют, так как в силу выше сказанного существуют интегралы, стоящие в правых частях равенств (47.5) и (47.9).

47.2. Формулы для представления поверхностного интеграла второго рода в виде двойного интеграла. Пусть S – гладкая поверхность. Если она задана своим векторным представлением $S = \{ \boldsymbol{r}(u, v);\ (u, v) \in \overline{G}\}$, то обычно через S^+ обозначается поверхность S, ориентированная с помощью вектора

$$\nu = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}.$$

Вспомнив, что

$$dS \underset{(46.25)}{=} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dudv \underset{(46.17)}{=} |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv,$$

получим

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} \underset{(47.5)}{=} \iint\limits_{S} \boldsymbol{a}\nu dS =$$

$$= \iint\limits_{G} \boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|}|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, dudv = \iint\limits_{G} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)\, dudv, \tag{47.11}$$

где $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)$ – смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$.

Если $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, $\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $\boldsymbol{r}_u = (x_u, y_u, z_u)$, $\boldsymbol{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$, то формула (47.11) в координатной форме имеет вид

$$\iint\limits_{S^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{S} = \iint\limits_{G} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv, \tag{47.12}$$

где $P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $Q = Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $R = R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

В частности, если поверхность S имеет явное представление $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \overline{G}$, то

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(здесь $x = u$, $y = v$), и потому для интеграла по верхней стороне $\hat{S}$ (совпадающей в данном случае с S^+) поверхности S (см. пример в п. 46.5) в случае $P \equiv 0$ и $Q \equiv 0$ на S будем иметь

$$\iint\limits_{\hat{S}} R\,dxdy \underset{(47.8)}{=} \iint\limits_{S} R\cos\gamma\, dS \underset{(47.12)}{=} \iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\, dxdy, \tag{47.13}$$

а для интеграла по нижней стороне $\check{S}$ (совпадающей здесь с S^-) поверхности S

$$\iint\limits_{\check{S}} R\,dx\,dy = -\iint\limits_{G} R(x, y, f(x, y))\,dx\,dy. \tag{47.14}$$

При использовании координатной записи поверхностного интеграла второго рода (см. (47.6)) вместо $\iint\limits_{\hat{S}} R\,dx\,dy$ иногда пишут просто $\iint\limits_{S} R\,dx\,dy$, а вместо $\iint\limits_{\check{S}} R\,dx\,dy$ соответственно $\iint\limits_{S} R\,dy\,dx$, т.е. в случае нижней стороны $\check{S}$ поверхности S дифференциалы dx и dy пишутся в обратном порядке.

47.3. Обобщение понятия поверхностного интеграла второго рода. Подобно тому, как это было сделано в п. 44.3 для криволинейного интеграла второго рода, можно обобщить и понятие поверхностного интеграла второго рода на более широкий класс поверхностей, т.е. не обязательно кусочно гладких. Для этого введем понятие интегральной суммы $\tilde{\sigma}_\tau$ поверхностного интеграла второго рода.

Пусть

$$S = \{M(u, v);\ (u, v) \in \overline{G}\} \tag{47.15}$$

– поверхность, т.е. непрерывное отображение $M(u, v)$, $(u, v) \in \overline{G}$, замыкания плоской области G в пространство, $M(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(x, v))$ (см. п. 46.1), отображение

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in \overline{G} \tag{47.16}$$

(являющееся ортогональной проекцией точек поверхности S на плоскость переменных x, y), отображает $\overline{G}$ в плоскость x, y, G – квадрируемое множество, функция F задана на множестве точек поверхности S, т.е. задана функция $F(M(u, v))$, $(u, v) \in \overline{G}$, $\tau = \{X_i\}_{i=i_0}^{i=i_\tau}$ – разбиение замкнутой области $\overline{G}$ (см. п. 42.3), $(\xi_i, \eta_i) \in X_i$ и $X_i^{\varphi,\psi}$ – образ множества X_i при отображении (47.16). Предположив, что множества $X_i^{\varphi,\psi}$ измеримы по Жордану, определим интегральную сумму $\tilde{\sigma}_\tau$ равенством

$$\tilde{\sigma}_\tau = \tilde{\sigma}_\tau(F;\ \varphi, \psi;\ (\xi_1, \eta_1), \ldots, (\xi_{i_\tau}, \eta_{i_\tau})) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{i_\tau} F(M(\xi_i, \eta_i))\,\mu X_i^{\varphi,\psi}. \tag{47.17}$$

Будем предполагать, что поверхность S такова, что для нее существуют сколь угодно мелкие разбиения $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ замкнутой области $\overline{G}$, для которых множества $X_i^{\varphi,\psi}$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, измеримы по Жордану, и только такие разбиения τ будем рассматривать в дальнейшем. Примером поверхностей, удовлетворяющих перечисленным условиям, являются полусфера $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\leqslant r^2$, цилиндрическая поверхность $x^2+y^2=r^2$, $y\geqslant 0$, $0\leqslant z\leqslant h$, и т.п.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{|\tau|\to 0}\widetilde{\sigma}_\tau$ интегральных сумм $\widetilde{\sigma}_\tau$, то он называется *поверхностным интегралом второго рода от функции F по поверхности S* и обозначается $\iint\limits_S F(x,y,z)\,dx\,dy$.

Таким образом,

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dx\,dy \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{|\tau|\to 0}\widetilde{\sigma}_\tau. \tag{47.18}$$

Правомерность использования здесь уже ранее определенного термина "поверхностный интеграл второго рода" (см. (47.5)) оправдывается тем, что если поверхность S – гладкая, функция F непрерывна на ней и отображение (47.16) взаимно однозначно, то на поверхности S можно так выбрать ориентацию, что определения (47.5) и (47.18) будут эквивалентны. Это доказывается аналогично соответствующему утверждению для криволинейных интегралов второго рода.

Пусть поверхность S имеет явное представление

$$S=\{z=f(x,y);\ (x,y)\in\overline{G}\}, \tag{47.19}$$

G – измеримая по Жордану область, функция F непрерывна на поверхности S, т.е. непрерывна функция $F(x,\ y,\ f(x,\ y))$, $(x,\ y)\in\overline{G}$. В этом случае отображение (47.16) является тождественным, а так как у всякого измеримого множества существуют сколь угодно мелкие разбиения на также измеримые множества (например, всевозможные непустые пересечения $\overline{G}$ с кубами ранга $k=0,1,2,\ldots$), то здесь применимо определение (47.18). Интегральные суммы $\widetilde{\sigma}_\tau$ имеют в этом случае вид

$$\widetilde{\sigma}_\tau=\sum_{i=1}^{i_\tau}F(\xi_i,\eta_i,f(\xi_i,\eta_i))\,\mu X_i,\qquad (\xi_i,\eta_i)\in X_i,$$

т.е. являются обычными интегральными суммами Римана непрерывной на $\overline{G}$ функции $F(x,y,f(x,y))$. Следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{|\tau|\to 0}\widetilde{\sigma}_\tau=\iint\limits_G F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy. \tag{47.20}$$

Поэтому поверхностный интеграл второго рода (47.18) существует и равен интегралу Римана, стоящему в правой части равенства (47.20):

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dx\,dy=\iint\limits_G F(x,y,f(x,y))\,dx\,dy. \tag{47.21}$$

По аналогии со случаем гладких поверхностей (см. (47.13)) интеграл (47.21) будем называть интегралом "по верхней стороне $\hat{S}$" поверхности S и обозначать

$$\iint\limits_{\hat{S}} F(x, y, z)\,dx\,dy,$$

а противоположное по знаку число, т.е. $-\iint\limits_{G} F(x, y, f(x, y))\,dx\,dy$, будем называть интегралом "по нижней стороне $\check{S}$" поверхности S и обозначать

$$\iint\limits_{\check{S}} F(x, y, z)\,dx\,dy, \quad \text{или} \quad \iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dy\,dx.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\hat{S}} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} F(x, y, f(x, y))\,dx\,dy, \tag{47.22}$$

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dy\,dx = \iint\limits_{\check{S}} F(x, y, z)\,dx\,dy = -\iint\limits_{G} F(x, y, f(x, y))\,dx\,dy, \tag{47.23}$$

т.е. получились те же формулы, что и для случая гладких поверхностей S (см. (47.13) и (47.14)). Подчеркнем, что теперь благодаря обобщению понятия поверхностного интеграла второго рода формулы (47.22) и (47.23) доказаны для любой непрерывной функции f, тогда как раньше требовалась ее непрерывная дифференцируемость.

Пусть в случае поверхности S (47.19), заданной явно, существует такое непрерывно дифференцируемое преобразование параметров

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0, \quad (u, v) \in \bar{D}, \tag{47.24}$$

D – квадрируемая область, что функция $z = f(x(u, v), y(u, v))$ является непрерывно дифференцируемой (функция f предполагается только непрерывной). Тогда поверхность S_1, задаваемая представлением

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = f(x(u, v), y(u, v)), \quad (u, v) \in \bar{D},$$

является непрерывно дифференцируемой, а если у нее нет особых точек, то в каждой ее точке существует единичная нормаль $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Сделав в интеграле, стоящем в правой части равенства (47.21), замену переменного (47.24) и воспользовавшись формулой (47.12) (при $P = Q = 0$), получим

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} F(x, y, f(x, y))\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} F(x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v))) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\,dv \underset{(47.12)}{=}$$

$$\underset{(47.12)}{=} \iint\limits_{S_1} F(x, y, z) \cos\gamma\,dS.$$

Таким образом, несмотря на то, что в этом случае исходное явное представление поверхности S не является, вообще говоря, дифференцируемым, для нее, какова бы ни была непрерывная на ней функция F, при надлежащем выборе параметров справедлива формула

$$\iint_S F(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_{S_1} F(x, y, z) \cos \gamma\, dS. \tag{47.25}$$

Обычно в правой части этого равенства вместо S_1 пишут S, рассматривая S и S_1 как "одну и ту же поверхность" с разными параметризациями.

В результате преобразования параметров (47.24) из поверхности S получилась гладкая поверхность S_1. Один из простейших примеров подобной ситуации дает полусфера, заданная как график функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Если сделать преобразование параметров $x = \cos \varphi \cos \psi$, $y = \sin \varphi \cos \psi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то та же полусфера будет задаваться непрерывно дифференцируемым представлением

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \sin \varphi \cos \psi, \quad z = \sin \psi,$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и, следовательно, для нее справедлива формула (47.25).

Оказывается целесообразным следующим образом расширить понятие гладкой поверхности. Поверхность $\{M(u, v);\ (u, v) \in \overline{G}\}$ называется *гладкой*, если существует такое преобразование параметров

$$u = u(u_1, v_1), \quad v = v(u_1, v_1), \quad (u_1, v_1) \in \overline{G}_1,$$

что поверхность $\{M(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1));\ (u_1, v_1) \in \overline{G}_1\}$ является гладкой в старом смысле, т.е. в смысле определения, данного в п. 46.5. Поверхность, являющаяся объединением гладких в новом смысле поверхностей, называется, как и раньше, *кусочно гладкой*.

В дальнейшем нам встретится случай интеграла (47.18) по цилиндрической поверхности S, направляющей которой является некоторая спрямляемая кривая Γ, лежащая в плоскости переменных x и y, а образующая параллельна оси Oz. В этом случае

$$\iint_S F(x, y, z)\, dx\, dy = 0. \tag{47.26}$$

Действительно, кривая Γ, будучи спрямляемой, имеет плоскую меру, равную нулю. Следовательно, отображение (47.16), являющееся ортогональной проекцией точек поверхности S на плоскость переменных x и y, отображает замкнутую область $\overline{G}$ (см. (47.15)) на кривую Γ и, значит, мера образа множества $\overline{G}$ при отображении (47.16) равна нулю, а тогда для любого разбиения $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{i=i_\tau}$ множества $\overline{G}$ мера всех множеств

$X_i^{\varphi,\psi}$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$, на плоскости переменных x и y равна нулю. Поэтому все интегральные суммы $\widetilde{\sigma}_\tau$ равны нулю, откуда вытекает, что равен нулю и их предел при $|\tau| \to 0$, т.е. имеет место формула (47.26).

В случае рассмотренной цилиндрической поверхности S будем считать обозначения поверхности S и ее "сторон" S^+ и S^- равнозначными, поэтому

$$\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S^-} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dx\,dy = 0. \tag{47.27}$$

Так же, как и в частных случаях (47.22), (47.23) и (47.27), можно и в общем случае (47.18) ввести понятие поверхностного интеграла второго рода "по разным сторонам поверхности". Именно, по аналогии со случаем гладких поверхностей интегралы

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dx\,dy, \qquad -\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dx\,dy$$

называются интегралами по разным сторонам поверхности S.

Подобно тому, как выше было введено обобщение понятия поверхностного интеграла второго рода вида $\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dx\,dy$ по некоторой стороне поверхности, вводятся и обобщения понятий поверхностных интегралов второго рода вида $\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dy\,dz$ и $\iint\limits_{S} F(x, y, z)\,dz\,dx$, а следовательно, и вида $\iint\limits_{S} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$ как суммы вышеуказанных.

§ 48. Скалярные и векторные поля

48.1. Основные понятия. Действительную функцию $u(x, y, z)$, заданную на некотором множестве $E \subset \mathbf{R}^3$, называют также *скалярным полем на этом множестве*, в отличие от векторных функций, называемых *векторными полями*.

Всякой дифференцируемой на области $G \subset \mathbf{R}^3$ функции (или, что то же самое, дифференцируемому на G скалярному полю) $u(x, y, z)$ соответствует векторное поле ее градиентов

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{48.1}$$

Если ввести символический вектор $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$, то равенство (48.1) можно рассматривать как произведение этого вектора на число

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u.$$

Иначе говоря, ∇ – это оператор (векторнозначная функция), определенный на множестве дифференцируемых на области G функций.

Уравнение касательной плоскости в точке (x_0, y_0, z_0) к поверхности уровня функции u, т.е. к поверхности, задаваемой неявно уравнением $u = \text{const}$, имеет вид (см. (46.13))

$$(x - x_0)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

где значения частных производных функции u берутся в точке (x_0, y_0, z_0).

Отсюда в силу геометрического смысла коэффициентов уравнения плоскости и из формулы (48.1) видно, что градиент ∇u перпендикулярен поверхности уровня функции u (т.е. касательной плоскости к этой поверхности уровня).

Если G – плоская область, $G \subset \mathbf{R}^2_{xy}$, то градиент функции $u = u(x, y)$, определенной в G, имеет вид

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Поскольку уравнение касательной прямой к линии уровня $u = \text{const}$ функции u имеет вид (см. замечание в п. 41.1)

$$(x - x_0)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

то градиент ∇u функции u перпендикулярен ее линии уровня.

Если в области $G \subset \mathbf{R}^3_{xyz}$ задано векторное поле $\boldsymbol{a}$ и существует скалярное в G поле $u(x, y, z)$, для которого векторное поле $\boldsymbol{a}$ является полем градиентов, т.е. $\boldsymbol{a} = \nabla u$, то функция u называется *потенциальной функцией* (или *потенциалом*) векторного поля $\boldsymbol{a}$.

Векторное поле, для которого существует потенциальная функция, называется *потенциальным полем.*

В теории векторных полей имеются важные понятия *дивергенции* $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ и *вихря* (или, что то же, *ротора*) $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ дифференцируемого в области G векторного поля $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. Определим эти понятия формулами с помощью символического вектора ∇:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \overset{\text{def}}{=} \nabla \cdot \boldsymbol{a} \tag{48.2}$$

– как скалярное произведение векторов ∇ и $\boldsymbol{a}$, а

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \overset{\text{def}}{=} \nabla \times \boldsymbol{a} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{48.3}$$

– как векторное произведение этих же векторов.

В координатном виде эти определения записываются следующим образом:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{48.4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{48.5}$$

Если G – плоская область и, следовательно, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, $R \equiv 0$ (рассматриваемые векторные поля лежат в тех же плоскостях или пространствах, в которых множество G является областью), то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{48.6}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{48.7}$$

Определим еще понятия циркуляции и потока векторного поля $\boldsymbol{a}$.

Если Г – кусочно гладкий замкнутый контур и векторное поле $\boldsymbol{a}$ задано на Г, то интеграл

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} \tag{48.8}$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{a}$ по этому контуру.

Если кусочно гладкая поверхность S ориентирована с помощью единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$, то для векторного поля $\boldsymbol{a}$, заданного на поверхности S, интеграл

$$\iint_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\,dS \tag{48.9}$$

называется *потоком векторного поля через поверхность* S.

Если Г – кусочно гладкая плоская кривая, а $\boldsymbol{\nu}$ – единичная нормаль к Г, то для векторного поля $\boldsymbol{a}$, заданного на Г, интеграл

$$\int_\Gamma \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\,ds$$

называется *потоком векторного поля через контур* Г.

48.2. Формула Остроградского – Гаусса. Пусть G – область в пространстве $\mathbf{R}^3_{xyz}$. Предположим, что на плоскости $\mathbf{R}^2_{xy}$ существует такая квадрируемая область D, ограниченная спрямляемой кривой, что граница ∂G области G состоит из двух поверхностей S_1 и S_2, задаваемых явными представлениями соответственно $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где функции φ и ψ непрерывны на замыкании $\overline{D}$ области D, $\varphi(x, y) < \psi(x, y)$, $(x, y) \in D$, и, быть может, поверхности S_0, являющейся частью цилиндрической поверхности, основанием которой является граница ∂D области D, а образующая параллельна оси Oz (см. п. 44.1):

$$\partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \tag{48.11}$$

В этом случае область G называется *элементарной относительно оси* Oz (рис. 171). Она имеет вид

$$G = \{(x, y, z)\colon\ (x, y) \in D,\ \varphi(x, y) < z < \psi(x, y)\}. \tag{48.12}$$

Мы уже встречались с областями такого типа при изучении вопроса о сведении кратного интеграла к повторному. Обозначим для краткости границу ∂G области G через S, тогда (см. (48.11))

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_0. \tag{48.13}$$

Пусть на S задана функция $F = F(x, y, z)$. Поверхностные интегралы второго рода $\iint\limits_{\check{S}_1} F(x, y, z)\,dx\,dy$ от функции F по нижней стороне поверхности S_1, $\iint\limits_{\hat{S}_2} F(x, y, z)\,dx\,dy$ по верхней стороне поверхности S_2 и $\iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy$ по поверхности S_0 (см. п. 47.3) называются *поверхностными интегралами второго рода по внешним сторонам этих поверхностей*, а их сумма – *интегралом по внешней стороне* S^+ *поверхности* S и обозначается $\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy$, т.е.

$$\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\check{S}_1} F(x, y, z)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{\hat{S}_2} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{48.14}$$

Аналогично определяются *поверхностный интеграл* $\iint\limits_{S^-} F(x, y, z)\,dx\,dy$ *по внутренней стороне поверхности* S:

$$\iint\limits_{S^-} F(x, y, z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\hat{S}_1} F(x, y, z)\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{\check{S}_2} F(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy. \tag{48.15}$$

Напомним, что (п. 47.3) $\iint\limits_{S_0} F(x, y, z)\,dx\,dy = 0$ и, следовательно, это слагаемое можно было бы и не писать. Оно пишется для того, чтобы формулы (48.14) и (48.15) формально соответствовали формуле (48.13). Как будет видно из дальнейшего, это оказывается очень удобным.

Если поверхности S_1, S_2 и S_0 – кусочно гладкие, то интеграл $\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)\,dx\,dy$ представляет собой поверхностный интеграл по поверхности S, ориентированный с помощью внешней единичной нормали ν. В этом случае, если

$$\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \tag{48.16}$$

то

$$\iint_{S^+} F(x, y, z)\, dxdy = \iint_S F(x, y, z) \cos\gamma dS. \tag{48.17}$$

Здесь термин "кусочно гладкая поверхность" понимается в смысле общего определения в п. 47.3.

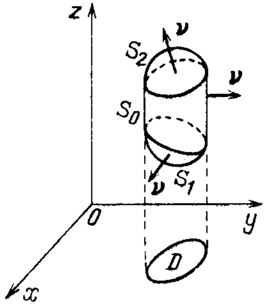


Рис. 171

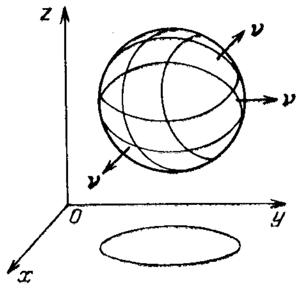


Рис. 172

Аналогично областям, элементарным относительно оси Oz, определяются области G, элементарные относительно осей Ox, Oy, и интегралы

$$\iint_{S^+} Fdydz, \quad \iint_{S^-} Fdydz, \quad \iint_{S^+} Fdzdx, \quad \iint_{S^-} Fdzdx \tag{48.18}$$

по внешней и внутренней сторонам их границ.

Области, элементарные относительно всех координатных осей, называются *элементарными* (рис. 172). Примерами элементарных областей являются пирамиды, параллелепипеды, вообще любые выпуклые многогранники, шары, эллипсоиды и т.п.

Для элементарных областей определены интегралы по внешней стороне S^+ их границы вида

$$\iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

и по внутренней стороне S^- вида

$$\iint_{S^-} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Теорема 1. *Если функции* $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ *и* $R = R(x, y, z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial x}$,

$\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ *на замыкании* $\overline{G}$ *элементарной области* G*, то имеет место формула*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy, \tag{48.19}$$

где интеграл в правой части равенства берется по внешней стороне поверхности S*, ограничивающей область* G.

Формула (48.19) называется формулой Остроградского–Гаусса*).

Следствие. *Если при выполнении условий теоремы граница области* G *кусочно гладкая, то*

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS, \tag{48.20}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ *– направляющие косинусы внешней единичной нормали* $\boldsymbol{\nu}$ *к поверхности* S (см. (48.16)). *Введя обозначение*

$$\boldsymbol{a} = (P, Q, R), \tag{48.21}$$

формулу (48.20) *можно записать в виде*

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\boldsymbol{a}\, dxdydz = \iint\limits_S \boldsymbol{a}\boldsymbol{\nu}\, dS. \tag{48.22}$$

Таким образом, *интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую область, в направлении внешней нормали.*

▷ Рассмотрим одно из слагаемых подынтегральной функции в левой части равенства (48.19), например последнее. В силу того, что область G элементарна относительно оси Oz, кратный интеграл $\iiint\limits_G \dfrac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz$ можно заменить повторным. Сделав это и применив формулу Ньютона–Лейбница, получим

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))]\, dxdy \underset{\substack{(47.22)\\(47.23)\\(47.26)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(47.22)\\(47.23)\\(47.26)}}{=} \iint\limits_{\hat{S}_2} Rdxdy + \iint\limits_{\check{S}_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_0} Rdxdy = \iint\limits_{S^+} Rdxdy. \tag{48.23}$$

---

*) М.В. Остроградский (1801–1861) – русский математик; К.Ф. Гаусс (1777–1855) – немецкий математик.

Аналогичным образом доказываются равенства

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \iint\limits_{S^+} Pdydz, \quad \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \iint\limits_{S^+} Qdzdx. \tag{48.24}$$

Сложив равенства (48.23) и (48.24), получим формулу (48.19). $\lhd$

Формула (48.20) в случае кусочно гладкой границы элементарной области G следует из формулы (48.19) и соотношения (47.7).

З а м е ч а н и е. Тем же методом, как это делалось на плоскости в случае формулы Грина, формулу Остроградского–Гаусса можно распространить на случай областей, которые разбиваются на конечное множество элементарных областей.

Формулу Остроградского–Гаусса можно доказать и для любой области с кусочно гладкой границей, но это значительно сложнее.

48.3. Геометрическое определение дивергенции.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\boldsymbol{a}(M)$ *– непрерывно дифференцируемое в области* $G \subset \mathbf{R}^3$ *векторное поле,* $M_0 \in G$, $\{D\}$ *– семейство ограниченных областей с кусочно гладкими границами* ∂D, *содержащее области сколь угодно малого диаметра и такое, что* $M_0 \in D \subset \overline{D} \subset G$, *а* ν *– внешняя нормаль на* ∂D *(относительно области* D*). Тогда*

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M_0) = \lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\nu\,dS}{\mu D}. \tag{48.25}$$

$\rhd$ Применив к векторному полю $\boldsymbol{a}$ в области D формулу Гаусса–Остроградского, а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\nu\,dS = \iiint\limits_D \operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dxdydz = \operatorname{div}\boldsymbol{a}(M)\mu D,$$

где $M \in D$ и, следовательно,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) = \frac{\iint\limits_{\partial D} \boldsymbol{a}\nu\,dS}{\mu D}. \tag{48.26}$$

Поскольку $M \in D$ и $M_0 \in D$, то

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} M = M_0,$$

а следовательно, в силу непрерывности дивергенции

$$\lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \operatorname{div}\boldsymbol{a}(M) = \operatorname{div}\boldsymbol{a}(M_0).$$

Поэтому, перейдя к пределу при $\operatorname{diam} D \to 0$ в обеих частях равенства (48.26), получим формулу (48.25). $\lhd$

Формула (48.18) дает геометрическое определение дивергенции в том смысле, что правая часть этой формулы записана через скалярное произведение векторов, объем области и площадь поверхности, которые не зависят от выбора координат в пространстве. Отсюда следует, что и дивергенция векторного поля не зависит от выбора координат.

Точки, в которых дивергенция векторного поля не равна нулю, называются *источниками* векторного поля.

48.4. Формула Стокса. Пусть поверхность S является графиком функции $z = f(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемой на замыкании $\overline{D}$ области $D \subset \mathbf{R}^2_{xy}$:

$$S = \{(x, y, z):\ (x, y) \in \overline{D},\ z = f(x, y)\},$$

и границей области D является кусочно гладкий контур. Обозначим его через Γ_0, а его образ при отображении f, т.е. график сужения функции f на множество Γ_0, через Γ. Контур Γ называется *краем поверхности* S. Очевидно, Γ_0 является проекцией контура Γ на координатную плоскость переменных x, y в направлении оси z.

Пусть

$$\Gamma_0^+ = \{x(t), y(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{48.27}$$

— положительно ориентированный на плоскости переменных x, y контур Γ_0. Ориентация контура Γ_0 в силу отображения f порождает ориентацию контура Γ. Контур Γ, ориентированный в соответствии с ориентацией контура Γ_0^+, обозначим Γ^+, т.е.

$$\Gamma^+ = \{x(t), y(t), f(x(t), y(t));\ a \leqslant t \leqslant b\}. \tag{48.28}$$

Γ^+ называется *положительно ориентированным краем* поверхности S.

Через

$$\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \tag{48.29}$$

обозначим единичную нормаль на поверхности S, составляющую острый угол с осью z (см. (46.27)) или, что то же самое, направленную согласованно ("по правилу штопора" в случае правой системы координат и "по правилу антиштопора" в случае левой) с ориентацией контура Γ^+ (рис. 173).

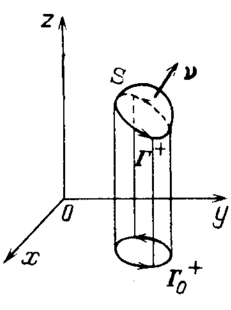


Рис. 173

В формулировке нижеследующей теоремы и при ее доказательстве будем использовать введенные обозначения и сделанные предположения без дополнительных пояснений.

Теорема 3. *Если в области $G \subset \mathbf{R}^3$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, *поверхность $S \subset G$ является графиком дважды непрерывно дифференцируемой на замыкании $\overline{D}$ области D функции $z = f(x, y)$, Γ^+ — положительно ориентированный край поверх-*

ности S и ν – единичная нормаль на поверхности S, направленная согласованно с ориентацией контура Γ^+, то

$$\int_{\Gamma^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{a})\nu\, dS, \tag{48.30}$$

или, в координатной записи,

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{48.31}$$

Формула (48.30) называется *формулой Стокса* *).

Она означает, что *поток вихря векторного поля через поверхность равен циркуляции этого векторного поля по краю поверхности, ориентированному согласованно с нормалью к поверхности.*

▷ Рассмотрим интеграл от первого слагаемого подынтегральной функции левой части равенства (48.31). Согласно формуле, выражающей криволинейный интеграл через интеграл по параметру, имеем

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)dx \underset{(48.28)}{=} \int_a^b P(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))x'(t)dt \underset{(48.27)}{=}$$
$$\underset{(48.27)}{=} \int_{\Gamma_0^+} P(x,y,f(x,y))dx, \tag{48.32}$$

т.е. рассматриваемый криволинейный интеграл от функции $P(x, y, z)$ по контуру Γ^+ равен криволинейному интегралу от функции $P(x, y, f(x, y))$ по проекции Γ_0^+ контура Γ.

Применив к получившемуся интегралу формулу Грина (44.37) (здесь $Q \equiv 0$) и вспомнив формулу (47.13), выражающую поверхностный интеграл через кратный, получим

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)dx \underset{(48.32)}{=} \int_{\Gamma_0^+} P(x,y,f(x,y))dx \underset{(44.37)}{=}$$
$$\underset{(44.37)}{=} -\iint_D \left[\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\Bigg|_{z=f(x,y)} dxdy =$$
$$= -\iint_D \frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy - \iint_D \frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dxdy \underset{(47.13)}{=}$$
$$\underset{(47.13)}{=} -\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma dS - \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma dS. \tag{48.33}$$

---

*) Дж. Стокс (1819–1903) – английский механик и математик.

Напомним (см. (48.29) и (46.28)), что

$$\cos\alpha = -\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \tag{48.34}$$

Отсюда следует, что

$$\cos\beta = -\frac{\partial f}{\partial y}\cos\gamma.$$

Подставив это выражение для косинуса в (48.33), получим

$$\int\limits_{\Gamma} P dx = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS. \tag{48.35}$$

Аналогично доказывается равенство

$$\int\limits_{\Gamma^+} Q dy = \iint\limits_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS \tag{48.36}$$

(в этом случае перед интегралами, стоящими в правой части формулы, аналогичной формуле (48.33), согласно формуле Грина не будет знаков минуса).

Несколько другой вид имеют преобразования интеграла $\int\limits_{\Gamma^+} R dz$:

$$\int\limits_{\Gamma^+} R(x,y,z)dz \underset{(48.28)}{=} \int\limits_a^b R(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))\times$$

$$\times\left[\frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f(x(t),y(t))}{\partial y}y'(t)\right]dt \underset{(48.29)}{=}$$

$$\underset{(48.29)}{=} \int\limits_{\Gamma_0^+} R(x,y,f(x,y))\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right] \underset{(44.37)}{=}$$

$$\underset{(44.37)}{=} \iint\limits_{D}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - R\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right]dxdy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) dxdy \underset{(47.13)}{=}$$

$$\underset{(47.13)}{=} \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \cos\gamma \right) dS \underset{(48.34)}{=}$$

$$\underset{(48.34)}{=} \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) dS. \tag{48.37}$$

Сложив (48.35), (48.36) и (48.37), получим

$$\int_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS,$$

а это является другой записью формулы (48.31). ◁

З а м е ч а н и е 1. Формулу Стокса можно доказать, предположив лишь, что функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема (а не дважды непрерывно дифференцируема, как это было потребовано в формулировке теоремы 3), но это значительно сложнее. В приведенном доказательстве возникала (где?), а затем исчезала вторая производная $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

З а м е ч а н и е 2. Кусочно гладкая поверхность S (см. п. 46.5) называется ориентированной, если ее можно представить как результат такой склейки конечного числа гладких ориентированных поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, при которой общие части краев ∂S_i поверхностей S_i принадлежат не более чем двум этим поверхностям и проходятся в противоположных направлениях при ориентациях ∂S_i, согласованных по правилу штопора с ориентациями указанных двух поверхностей S_i.

Объединение частей краев ∂S_i, принадлежащих только одному такому краю, является объединением конечного числа кусочно гладких контуров и называется *краем поверхности* S.

Примерами кусочно гладких ориентируемых поверхностей являются поверхности параллелепипедов, цилиндров, а примером неориентируемой поверхности и в новом смысле – все тот же лист Мёбиуса.

Если S – ориентированная кусочно гладкая поверхность, получающаяся склейкой гладких ориентированных поверхностей S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и если формула Стокса справедлива для всех поверхностей S_i, то она справедлива и для поверхности S:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \boldsymbol{a}) \nu dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r},$$

где ∂S – ориентированный край поверхности, ориентация которого порождается ориентациями ∂S_i, согласованными с нормалями ν_i поверхностей S_i.

Для доказательства достаточно написать формулы Стокса для каждой поверхности S_i и сложить получившиеся равенства (рис. 174).

Рис. 174

48.5. Геометрическое определение вихря. Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^3$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(M)$, $M_0 \in G$, $\boldsymbol{\nu}$ – произвольно фиксированный единичный вектор.

Найдем формулу для проекции вихря $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ в точке M_0 на направление вектора $\boldsymbol{\nu}$, т.е. для величины $(\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\boldsymbol{\nu}$. Для этого проведем плоскость π через точку M_0 перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\nu}$ (рис. 175). Возьмем на плоскости π какую-либо область $S \subset G$, содержащую точку M_0 и ограниченную кусочно гладким контуром Γ. Контур Γ, ориентированный согласованно (по правилу штопора) с направлением нормали $\boldsymbol{\nu}$, обозначим через Γ^+.

Теорема 4. *Имеет место формула*

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(M_0))\nu = \lim_{\operatorname{diam} S \to 0} \frac{\int\limits_{\Gamma^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}}{\mu S}. \tag{48.38}$$

▷ Применив к векторному полю $\boldsymbol{a}$ на поверхности S формулу Стокса, а затем интегральную теорему о среднем, получим

$$\int\limits_{\Gamma^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{S} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\nu dS = (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\nu|_M \, \mu S, \quad M \in S,$$

и, следовательно,

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\nu|_M = \frac{\int\limits_{\Gamma^+} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}}{\mu S}. \tag{48.39}$$

Поскольку $\lim\limits_{\operatorname{diam} S \to 0} M = M_0$, то в силу непрерывности функции $(\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\nu$ имеем

$$\lim_{\operatorname{diam} S \to 0} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\nu|_M = (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})\nu|_{M_0}. \tag{48.40}$$

Поэтому, перейдя в обеих частях равенства (48.39) к пределу, получим формулу (48.38). ◁

В правую часть равенства (48.38) входят скалярное произведение $\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$ и площадь множества S. И то и другое не зависит от выбора системы

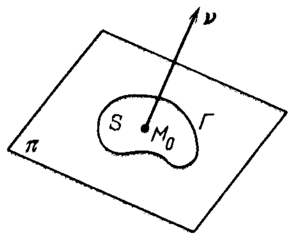


Рис. 175

координат. Кроме того, в правую часть равенства (48.38) входит криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}$, знак которого зависит от ориентации контура Г. При изменении ориентации системы координат ориентация контура Г, согласованная с направлением нормали $\boldsymbol{\nu}$, также меняется. Таким образом, правая часть равенства (48.38) не зависит от выбора системы координат, сохраняющей ориентацию (и меняет знак на противоположный при изменении ориентации системы координат).

Выбрав в качестве векторов $\boldsymbol{\nu}$ три единичных линейно независимых вектора, получим по формуле (48.38) три проекции ротора $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ на эти векторы. Этими своими проекциями ротор однозначно определяется. Поскольку они не зависят от выбора системы координат с одинаковой ориентацией, то и сам ротор не зависит от выбора таких координат. В силу сказанного выше из формулы (48.38) следует также, что при изменении ориентации системы координат на противоположную ротор меняет направление, что, впрочем, сразу видно и из формулы (48.3).

48.6. Соленоидальные векторные поля. Непрерывное в области $G \subset \mathbf{R}^3$ векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется соленоидальным в этой области, если для любой ограниченной области $D \subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial G \subset G$ его поток через эту границу равен нулю.

Заметим, что если поток векторного поля через какую-либо поверхность равен нулю при некотором выборе ориентации этой поверхности, то он, очевидно, равен нулю и при противоположной ориентации (при изменении ориентации поверхности абсолютная величина потока не меняется, может только измениться его знак). Поэтому понятие соленоидальности не зависит от выбора ориентаций на поверхностях ∂D, рассматриваемых в определении соленоидальности поля.

Теорема 5. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле* $\boldsymbol{a}$ *было соленоидальным в области* $G \subset \mathbf{R}^3$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* G *выполнялось равенство*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0. \tag{48.41}$$

$\triangleright$ Необходимость. Пусть поле $\boldsymbol{a}$ соленоидально в G и $M \in G$. Поскольку точка M — внутренняя для G, то все достаточно малые по диаметру шары D с центром в этой точке содержатся вместе с их границами

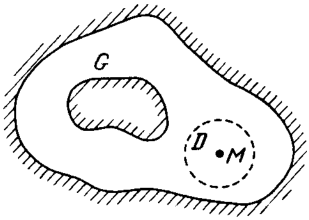


Рис. 176

∂D в области G (рис. 176). В силу соленоидальности поля $\boldsymbol{a}$ для этих шаров имеет место равенство

$$\iint_{\partial D} \boldsymbol{a} dS = 0, \tag{48.42}$$

а следовательно,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}(M) \underset{(48.25)}{=} \lim_{\operatorname{diam} D \to 0} \frac{\iint_{\partial D} \boldsymbol{a} dS}{\mu D} \underset{(48.42)}{=} 0.$$

Достаточность. Если выполняется условие (48.41), то для любой области $D \subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial D \subset G$ в силу формулы Гаусса–Остроградского имеем

$$\iint_{\partial D} \boldsymbol{a} dS \underset{\substack{(47.5)\\(48.22)}}{=} \iiint_G \operatorname{div} \boldsymbol{a} dx dy dz \underset{(48.41)}{=} 0. \triangleleft$$

48.7. Потенциальные векторные поля. Под областью G будем понимать либо область на плоскости $\mathbf{R}^2$, либо область в пространстве $\mathbf{R}^3$, кроме, конечно, тех случаев, когда будет оговорено что-либо определенное.

Пусть в области G задано непрерывное векторное поле $\boldsymbol{a}$.

Через $\overset{\frown}{AB}$ будем обозначать кусочно гладкую кривую, лежащую в области G, началом которой является точка A, а концом — точка B.

Напомним, что (п. 48.1) векторное поле $\boldsymbol{a}$ называется *потенциальным*, если у него существует потенциальная функция. Оказывается, что это свойство равносильно тому, что циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру равна нулю или, что то же самое, что интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a\,dr$ не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки A и B. Начнем с доказательства этого утверждения.

Лемма 1. *Для того чтобы для любого кусочно гладкого замкнутого контура* Γ, *лежащего в области* G, *циркуляция по нему векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *равнялась нулю, т.е.*

$$\int\limits_{\Gamma} a\,dr = 0, \tag{48.43}$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых точек $A \in G$ *и* $B \in G$ *интеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a\,dr$ *не зависел от выбора кривой* $\overset{\frown}{AB}$, *соединяющей эти точки в области* G.

$\triangleright$ Если выполнено условие (48.43), $A \in G$, $B \in G$, а $\overset{\frown}{AB}$ и $(\overset{\frown}{AB})_1$ – кусочно гладкие кривые, соединяющие в G точки A и B, то, заметив, что кривая $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \cup (\overset{\frown}{BA})_1$ является кусочно гладким замкнутым контуром (рис. 177), будем иметь

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a\,dr - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} a\,dr \underset{(44.15)}{=} \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a\,dr + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_1} a\,dr = \int\limits_{\Gamma} a\,dr \underset{(48.43)}{=} 0,$$

откуда и следует, что

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a\,dr = \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} a\,dr. \tag{48.44}$$

Если, наоборот, для любых точек $A \in G$, $B \in G$ и любых кусочно гладких кривых $\overset{\frown}{AB} \subset G$ и $(\overset{\frown}{AB})_1 \subset G$ выполняется условие (48.44), а Γ – кусочно гладкий замкнутый контур, лежащий в G, то, выбрав на нем какие-либо две точки $A \in \Gamma$, $B \in \Gamma$, получим $\Gamma = \overset{\frown}{AB} \cup (\overset{\frown}{BA})_1$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\Gamma} a\,dr = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} a\,dr + \int\limits_{(\overset{\frown}{BA})_1} a\,dr = \int\limits_{AB} a\,dr - \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})_1} a\,dr \underset{(48.44)}{=} 0. \triangleleft$$

Теорема 6. *Для того чтобы непрерывное векторное поле было потенциальным в области, необходимо и достаточно, чтобы его циркуляция по любому кусочно гладкому замкнутому контуру, лежащему в этой области, равнялась нулю.*

$\triangleright$ Пусть для определенности G – область в трехмерном пространстве. Если векторное поле $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$ – потенциальное в G, то это означает, что существует потенциальная функция $u = u(M) = u(x, y, z)$, $M = (x, y, z) \in G$, т.е. такая функция u, что $\nabla u = \boldsymbol{a}$ в G, или, в координатной записи,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R. \tag{48.45}$$

Пусть $A \in G$, $B \in G$ и

$$\overset{\frown}{AB} = \{ x(t),\ y(t),\ z(t);\ a \leqslant t \leqslant b \}$$

– кусочно гладкая кривая, соединяющая в G точки A и B; тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P dx + Q dy + R dz \underset{(44.19)}{=}$$

$$\underset{(44.19)}{=} \int\limits_a^b \left[\frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial y} y'(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u(x(t), y(t), z(t))}{\partial z} z'(t) \right] dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt} u(x(t), y(t), z(t))\, dt =$$

$$= u(x(b), y(b), z(b)) - u(x(a), y(a), z(a)) = u(B) - u(A).$$

Таким образом, интеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r}$ не зависит от выбора кривой $\overset{\frown}{AB}$, соединяющей точки A и B, а зависит только от самих этих точек. Следовательно, согласно лемме выполняется и условие (48.43).

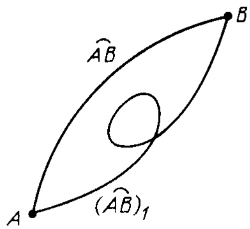


Рис. 177

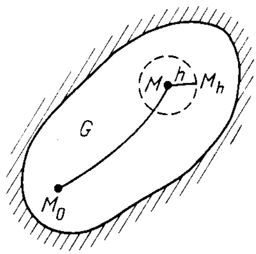


Рис. 178

Пусть теперь циркуляция векторного поля $\boldsymbol{a}$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области G, равна нулю. Зафиксируем какую-либо точку $M_0 \in G$. Определим функцию $u(M)$ по формуле

$$u(M) = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0 M}} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{M_0 M}} P dx + Q dy + R dz, \quad M \in G, \tag{48.46}$$

где $\overset{\frown}{M_0 M}$ – какая-либо кривая, соединяющая в G точки M_0 и M. Формула (48.46) определяет однозначную функцию в G, так как интеграл (48.46) не зависит от пути интегрирования, соединяющего в G точки M_0 и M (см. лемму). Покажем, что функция $u(M)$ является потенциальной функцией векторного поля $\boldsymbol{a}$. Для этого вычислим частные производные функции $u(M)$ в точке M.

Поскольку точка M – внутренняя для области G, то существует такое число $\delta > 0$, что δ-окрестность точки M содержится в G (рис. 178). Если $0 < |h| < \delta$, то отрезок MM_h с концами в точках $M = (x, y, z)$ и $M_h = (x + h, y, z)$ лежит в области G, и, следовательно, по нему можно брать интеграл $\int\limits_{MM_h} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$. Поскольку отрезок MM_h параллелен оси x, то (см. формулу (44.10), в которой в рассматриваемом здесь случае $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, $s = x$)

$$\int\limits_{MM_h} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int\limits_0^h (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \int\limits_{MM_h} P(x, y, z)\,dx. \tag{48.47}$$

Поэтому

$$u(x + h, y, z) - u(x, y, z) =$$

$$= \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M} \cup MM_h} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} - \int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = \int\limits_{MM_h} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} \underset{(48.47)}{=}$$

$$\underset{(48.47)}{=} \int\limits_{MM_h} P(x, y, z)\,dx \underset{(44.19)}{=} \int\limits_x^{x+h} P(t, y, z)\,dt =$$

$$= P(x + \theta h,\ y, z)\,h, \quad 0 < \theta < 1$$

(в конце мы применили интегральную теорему о среднем). Отсюда следует, что существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(x + h, y, z) - u(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$$

и, таким образом, в точке M имеет место равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P$.

Аналогично доказываются равенства $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = R$, т.е. действительно функция $u(x, y, z)$ является потенциальной функцией для векторного поля $\boldsymbol{a}$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в процессе доказательства теоремы мы получили полезную формулу для вычисления интеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$ в случае, когда известна потенциальная функция $u(M)$ векторного поля $\boldsymbol{a}(M)$:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r} = u(B) - u(A).$$

Эта формула является прямым обобщением формулы Ньютона – Лейбница для интегралов по отрезку.

Условие потенциальности поля (48.43), так же как и существование потенциальной функции, трудно проверяемы. Докажем для одного класса областей более удобный для применения критерий потенциальности поля.

Определение 1. *Множество $X \subset \mathbf{R}^3$ называется односвязным, если для любого кусочно гладкого замкнутого контура, лежащего в X, существует кусочно гладкая ориентируемая поверхность S, краем которой он является и которая также лежит в X.*

Рассматриваемые здесь поверхности S могут самопересекаться. В случае, когда множество X лежит на некоторой плоскости $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$, согласно сделанному определению, поверхность S также помещается на той же плоскости.

Можно показать, что определение односвязности для плоских областей равносильно выполнению следующего условия: каков бы ни был кусочно гладкий простой замкнутый контур, лежащий в области G, ограниченная им конечная область D также содержится в G (рис. 179). Наглядно это означает, что плоская область односвязна тогда, когда она не имеет "дыр".

Примерами односвязных областей являются выпуклые области, в частности вся плоскость в плоском случае и все пространство в пространственном случае. В пространстве односвязной областью может быть и область с "дырами", например открытый шаровой слой, т.е. множество точек, лежащих между двумя концентрическими сферами. Примером неодносвязной области на плоскости является плоское кольцо, а в пространстве — тор.

Теорема 7. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле было потенциальным в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы его вихрь в этой области равнялся нулю.*

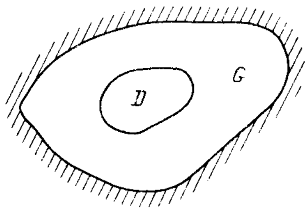


Рис. 179

Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{a}$ потенциально в односвязной области G тогда и только тогда, когда в G

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0. \tag{48.48}$$

Если G — трехмерная область и $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, то в координатной записи условие (48.48) имеет вид (см. (48.5))

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{48.49}$$

Если же G – плоская область, $\boldsymbol{a} = (P, Q)$, $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$, то координатная запись условия (48.48) приобретает вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} . \tag{48.50}$$

$\triangleright$ Если поле $\boldsymbol{a}$ – потенциальное, т.е. у него существует потенциальная функция u, то (см. (48.45))

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} . \tag{48.51}$$

В этом случае равенства (48.49) имеют место (даже и без условия односвязности области G), так как они означают равенство смешанных вторых производных потенциальной функции u, например,

$$\frac{\partial R}{\partial y} \underset{(48.51)}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \underset{(48.51)}{=} \frac{\partial Q}{\partial z} .$$

Наоборот, если выполняется условие (48.48) или, что то же самое, условие (48.49) и Γ – кусочно гладкий замкнутый контур, лежащий в области G, то в силу ее односвязности существует кусочно гладкая ориентируемая поверхность $S \subset G$, для которой контур Γ является ее краем, а тогда по теореме Стокса

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{r} = \iint_{S} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} d\boldsymbol{S} \underset{(48.48)}{=} 0,$$

т.е. выполняется условие потенциальности поля $\boldsymbol{a}$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что установленный в теореме 7 критерий существования потенциальной функции у векторного поля дает ответ на вопрос, когда функция

$$Pdx + Qdy + Rdz, \qquad P = P(x, y, z),$$
$$Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z),$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x, y, z)$ в односвязной области: для этого необходимо и достаточно выполнение условий (48.49).

§ 49. Интегралы, зависящие от параметра

49.1. Равномерная сходимость семейства функций по параметру. Пусть X – произвольное множество, $Y \subset \mathbf{R}^n$, y_0 – либо точка пространства $\mathbf{R}^n$, либо $y_0 = \infty$, причем любая окрестность y_0 пересекается с множеством Y (т.е. y_0 – конечная или бесконечно удаленная точка прикосновения множества Y).

Пусть, далее, функция $f(x, y)$ задана на произведении $X \times Y$, а функция $\varphi(x)$ – на множестве X (рис. 180, на котором X – отрезок на оси x, Y – числовое множество на оси y, а y_0 – его предельная точка).

При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x, y)$ является функцией от x, поэтому функцию f иногда называют *семейством указанных функций от x с параметром y*.

Определение 1. *Функции семейства $f(x, y)$ называются равномерно стремящимися на множестве X к функции*

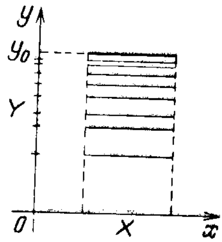


Рис. 180

$\varphi(x)$ при $y \to y_0$, если для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon. \tag{49.1}$$

В этом случае будем писать

$$f(x, y) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \qquad y \to y_0. \tag{49.2}$$

Здесь, как и обычно при предельном переходе, возможны случаи $y_0 \in Y$ и $y_0 \notin Y$.

Замечание 1. Если имеет место равномерная сходимость (49.2) и $\{y_n\}$ – такая последовательность точек $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n \to \infty} y_n = y_0, \tag{49.3}$$

то последовательность функций

$$f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, y_n) \tag{49.4}$$

равномерно стремится на множестве X к функции φ при $n \to \infty$.

Действительно, для любого $\epsilon > 0$ в силу условия (49.2) найдется такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для нее будет выполняться неравенство (49.1). Согласно же условию (49.3) существует такое n_0, что для всех $n > n_0$ будет иметь место включение

$$y_n \in U(y_0) \cap Y, \tag{49.5}$$

и, следовательно, для всех $x \in X$ при $n > n_0$ получим

$$|f_n(x) - \varphi(x)| \underset{(49.4)}{=} |f(x, y_n) - \varphi(x)| \underset{\substack{(49.5)\\(49.1)}}{<} \epsilon.$$

Это и означает, что

$$f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad n \to \infty.$$

Л е м м а 1. *Для того чтобы имела место равномерная сходимость* (49.2), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{y \to y_0} \sup_X |f(x, y) - \varphi(x)| = 0. \tag{49.6}$$

$\triangleright$1. Если выполняется условие (49.2), то согласно определению для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon/2.$$

Перейдя в этом неравенстве к верхней грани по $x \in X$, получим, что для произвольно заданного $\epsilon > 0$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ имеет место неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Это и означает выполнение условия (49.6).

2. Если же выполнено условие (49.6), то для произвольно фиксированного $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$\sup_{x \in X} |f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon,$$

а следовательно, для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ – неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon,$$

т.е. выполняется условие (49.2). $\triangleleft$

Т е о р е м а 1 (к р и т е р и й К о ш и). *Для того чтобы имела место равномерная сходимость* (49.2), *необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y' \in U(y_0) \cap Y$, $y'' \in U(y_0) \cap Y$ выполнялось неравенство*

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \epsilon. \tag{49.7}$$

$\triangleright$ 1. Если выполняется условие (49.2), то для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(y_0)$ точки y_0, что для всех $x \in X$ и всех $y \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - \varphi(x)| < \epsilon/2.$$

Следовательно, если $x \in X$, $y' \in U(y_0) \cap Y$ и $y'' \in U(y_0) \cap Y$, то

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < |f(x, y'') - \varphi(x)| + |\varphi(x) - f(x, y')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

т.е. выполняется условие (49.7).

2. Если выполняется условие (49.7), то при любом фиксированном x функция $f(x, y)$ переменного y удовлетворяет критерию Коши существования предела функции, и потому существует $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \varphi(x)$. Переходя к пределу в неравенстве (49.7) при $y'' \to y_0$, получим, что для любого $x \in X$ и любого $y' \in U(y_0) \cap Y$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - f(x, y')| \leqslant \epsilon.$$

Это и означает выполнение условия (49.2). ◁

П р и м е р. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на конечном прямоугольнике

$$P = \{(x, y)\colon \ a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

то

$$f(x, y) \underset{[a,\, b]}{\rightrightarrows} f(x, c), \quad y \to c.$$

Это сразу следует из того, что непрерывная на прямоугольнике P функция является и равномерно непрерывной на нем. В самом деле, тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что как только $|x - x'| < \delta$, $|y - y'| < \delta$, то

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \epsilon,$$

откуда при $x' = x$ и $y' = c$ получим: если $|y - c| < \delta$, то для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - f(x, c)| < \epsilon.$$

49.2. Свойства интегралов, зависящих от параметра. Пусть на множестве Y определены функции φ и ψ, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $y \in Y$, а на множестве $\{(x, y)\colon \ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y), y \in Y\}$ – функция $f(x, y)$.

О п р е д е л е н и е 2. *Интегралы вида*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx, \tag{49.8}$$

в частности интегралы

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx, \tag{49.9}$$

называются интегралами, з а в и с я щ и м и о т п а р а м е т р а y.

Если $y = (y_1, \ldots, y_n)$, *то интеграл* (49.8) *называют также интегралом от* *n* *параметров* $y_1, \ldots, y_n$.

Подстановка $x = \varphi(y) + [\psi(y) - \varphi(y)]\, t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, сводит интеграл вида (49.8) к интегралу вида (49.9) (рис. 181).

Рассмотрим вопросы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, и о его пределе при стремлении параметра к некоторому значению. Нам уже известно (лемма из п. 49.1) следующее утверждение.

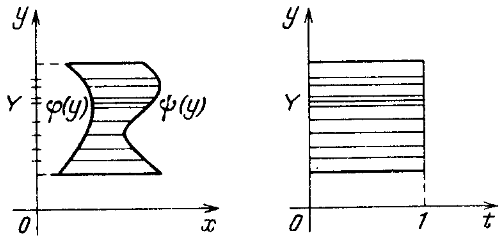


Рис. 181

Теорема 2. *Пусть функции* φ *и* ψ *непрерывны на отрезке* $[c, d]$, $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, $-\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty$. *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна на множестве*

$$E = \{(x, y):\ \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y),\quad c \leqslant y \leqslant d\}, \tag{49.10}$$

то функция $\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx$ *непрерывна на отрезке* $[c, d]$.

Таким образом, в этом случае для любой точки $y_0 \in [c, d]$ имеет место равенство

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx = \int\limits_{\varphi(y_0)}^{\psi(y_0)} f(x, y_0)\, dx.$$

Теорема 3. *Если функция* $f(x, y)$ *определена на прямоугольнике*

$$P = \{(x, y):\ a \leqslant x \leqslant b,\quad c \leqslant y \leqslant d\}, \tag{49.11}$$

если она при любом фиксированном $y \in [c, d]$ *непрерывна по* x *на отрезке* $[a, b]$ *и*

$$f(x, y) \underset{[a,\, b]}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad y \to y_0 \in [c, d],$$

то

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx.$$

▷ Пусть $y_n \to y_0$, $y_n \in [c, d]$ и $f_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, y_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда, согласно замечанию 1,

$$f_n(x) \underset{[a,\, b]}{\rightrightarrows} \varphi(x), \quad n \to \infty.$$

Отсюда, в силу теоремы 8 п. 40.4 о переходе к пределу под знаком интеграла, будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x, y_n)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx,$$

т.е. указанный предел существует и не зависит от выбора указанной последовательности $\{y_n\}$, а это и означает, что

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \varphi(x)\, dx. \lhd$$

Теорема 3, очевидно, представляет собой достаточное условие, при котором возможен предельный переход под знаком интеграла. Отметим, что в условиях теоремы 3 функция φ непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как она является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций f_n.

Рассмотрим интеграл от интеграла, зависящего от параметра.

Т е о р е м а 4. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике P* (49.11), *то*

$$\int_c^d \Phi(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{49.12}$$

▷ Равенство (49.12) следует из того, что оба повторных интеграла в этой формуле равны двойному интегралу $\iint\limits_P f(x, y)\, dx\, dy$ (см. п. 43.1).◁

Установим теперь правило дифференцирования интегралов, зависящих от параметров.

Т е о р е м а 5 (п р а в и л о Л е й б н и ц а). *Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике P* (49.11), *то*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx. \tag{49.13}$$

▷ Применив формулу конечных приращений Лагранжа, найдем выражение для $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta y}$:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} \equiv \frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y} \underset{(49.9)}{=} \frac{1}{\Delta y}\int_a^b [f(x, y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx, \tag{49.14}$$

$$0<\theta<1. \tag{49.15}$$

Нам надо оценить поведение разности $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$ при $\Delta y \to 0$. Имеем

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \underset{(49.14)}{=} \left|\int_a^b \frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|dx. \tag{49.16}$$

Функция $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ по условию непрерывна на прямоугольнике P. Поскольку всякий прямоугольник является компактом, то производная $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ равномерно непрерывна на P. Зададим произвольно $\epsilon > 0$. Тогда, согласно определению равномерной непрерывности, существует такое $\delta > 0$, что при $|\Delta y| < \delta$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\partial f(x, y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| < \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{49.17}$$

Если $|\Delta y| < \delta$, то

$$|\theta\Delta y| \underset{(49.15)}{<} |\Delta y| < \delta, \tag{49.18}$$

поэтому для всех указанных Δy выполняется неравенство

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx\right| \underset{(49.16)}{\leqslant} \int_a^b \left|\frac{\partial f(x, y+\theta\Delta y)}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|dx \underset{\substack{(49.17)\\(49.18)}}{\leqslant} \frac{\epsilon}{b-a}\int_a^b dx = \epsilon.$$

Это означает, что

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx,$$

т.е. производная $\dfrac{d\Phi}{dy}$ существует и имеет место формула (49.13). ◁

Замечание 2. Для интеграла

$$\Psi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx,$$

у которого функции φ и ψ дифференцируемы на отрезке $[c, d]$, а функции f и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на множестве E (49.10), причем $E \subset P$, по правилу дифференцирования сложной функции

$$F(y, u, v) = \int_u^v f(x, y)\, dx, \quad u = \varphi(y), \quad v = \psi(y),$$

имеем

$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} =$$

$$= \int_u^v \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + f(v, y)\frac{dv}{dy} - f(u, y)\frac{du}{dy},$$

откуда

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx =$$

$$= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx - f(\varphi(y), y)\frac{d\varphi(y)}{dy} + f(\psi(y), y)\frac{d\psi(y)}{dy}.$$

§ 50. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

50.1. Равномерно сходящиеся интегралы. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx, \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty, \quad y \in Y, \tag{50.1}$$

где Y — некоторое числовое множество, и при любом фиксированном $y \in Y$ существует, вообще говоря, несобственный интеграл (50.1).

Здесь возможны следующие три случая:

1) a и b конечны, а функция f ограничена на множестве $(a, b) \times Y = \{(x, y): a < x < b, \ y \in Y\}$;

2) a и b конечны, а функция f неограничена на множестве $(a, b) \times Y$;

3) имеет место либо $a = -\infty$, либо $b = +\infty$, либо и то и другое.

В первом случае при любом $y \in Y$ интеграл (50.1), зависящий от параметра, является интегралом Римана и называется также *собственным интегралом*, зависящим от параметра (интегралы, рассматривавшиеся в § 49, относятся к этому типу).

Интеграл (50.1), для которого возможен любой из трех вышеуказанных случаев, называется *несобственным интегралом, зависящим от параметра.*

Таким образом, собственный интеграл, зависящий от параметра, является частным случаем несобственного интеграла, зависящего от параметра. Однако существенным для нового понятия – понятия несобственного интеграла, зависящего от параметра, – являются, конечно, случаи 2) и 3).

Определение 1. *Если для любого $y \in Y$ интеграл (50.1) сходится, то он называется сходящимся на множестве Y.*

Заметим, что сходящийся несобственный интеграл, зависящий от параметра, при некоторых значениях параметра может оказаться собственным интегралом, т. е. интегралом Римана.

Рассмотрим подробно случай (рис. 182):

1) $-\infty < a < b \leqslant +\infty$;

2) для каждого $y \in Y$ функция $f(x, y)$ интегрируема в смысле Римана по переменной x на любом отрезке $[a, \eta]$, где $a < \eta < b$.

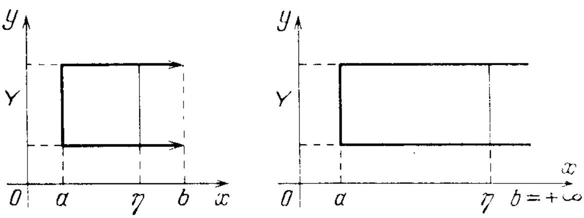


Рис. 182

Другие случаи несобственных интегралов, зависящих от параметра, рассматриваются аналогичным образом.

Сходимость интеграла (50.1) на множестве Y при выполнении условий 1) и 2) означает, что для любого $y \in Y$ существует конечный предел

$$\lim_{\eta \to b} \int_a^\eta f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{50.2}$$

Поскольку

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^\eta f(x, y)\,dx + \int_\eta^b f(x, y)\,dx, \tag{50.3}$$

то в случае сходящегося на множестве Y интеграла для каждого $y \in Y$ имеем

$$\lim_{\eta \to b} \int_{\eta}^{b} f(x, y)\, dx = 0. \tag{50.4}$$

О п р е д е л е н и е 2. *Если у сходящегося на множестве Y интеграла* (50.1) *стремление к пределу в формуле* (50.4) *происходит равномерно на множестве Y, т. е.*

$$\int_{\eta}^{b} f(x, y)\, dx \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, \qquad \eta \to b, \qquad a < \eta < b, \tag{50.5}$$

то интеграл (50.1) *называется* ***р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я н а м н о ж е с т в е*** Y.

Согласно лемме п. 49.1 условие (50.5) равносильно условию

$$\lim_{\eta \to b} \sup_{y \in Y} \left| \int_{\eta}^{b} f(x, y)\, dx \right| = 0. \tag{50.6}$$

Вспомнив определение равномерной сходимости семейства функций по параметру (параметром здесь является переменная $\eta \in [a, b)$) на множестве Y (в данном случае множество, которое играет роль множества X в определении 1 п. 49.1, обозначено через Y) и заметив, что пересечение любой окрестности точки b с конечным или бесконечным полуинтервалом $[a, b)$ имеет вид интервала (η, b), условие (50.5) на языке $\epsilon - \delta$ можно сформулировать следующим образом:

Сходящийся на множестве Y интеграл (50.1) *называется* ***р а в н о м е р н о с х о д я щ и м с я н а э т о м м н о ж е с т в е***, *если для любого $\epsilon > 0$ существует такое η_ϵ, $a \leqslant \eta_\epsilon < b$, что для всех $y \in Y$ и всех η, $\eta_\epsilon < \eta < b$, выполняется неравенство*

$$\left| \int_{\eta}^{b} f(x, y)\, dx \right| < \epsilon. \tag{50.7}$$

В силу равенства (50.3) условие (50.5) можно записать в виде

$$\int_{a}^{b} f(x, y)\, dx - \int_{a}^{\eta} f(x, y)\, dx \underset{Y}{\rightrightarrows} 0, \qquad \eta \to b,$$

откуда

$$\int_{a}^{\eta} f(x, y)\, dx \underset{Y}{\rightrightarrows} \int_{a}^{b} f(x, y)\, dx, \qquad \eta \to b. \tag{50.8}$$

Если положить

$$\Phi(y, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int_{a}^{\eta} f(x, y)\, dx, \qquad a \leqslant \eta < b, \tag{50.9}$$

и использовать обозначение (50.1), то условие (50.8) можно записать в виде

$$\Phi(y, \eta) \underset{Y}{\rightrightarrows} \Phi(y), \qquad \eta \to b. \tag{50.10}$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^{+\infty} ye^{-xy}dx$. В качестве множества Y возьмем числовую полуось $y \geqslant 0$ (при любом $y < 0$ этот интеграл расходится; почему?). Легко убедиться, что рассматриваемый интеграл сходится на множестве Y. Для каждого $\alpha > 0$ он сходится равномерно на промежутке $[\alpha, +\infty)$. Действительно, в этом случае легко проверяется, например, выполнение условия (50.6):

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} \left| \int\limits_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant \alpha} e^{-\eta y} = \lim_{\eta \to +\infty} e^{-\alpha\eta} = 0.$$

На всей же полуоси Y равномерной сходимости нет. В самом деле,

$$\lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant 0} \left| \int\limits_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx \right| = \lim_{\eta \to +\infty} \sup_{y \geqslant 0} e^{-\eta y} = 1,$$

т. е. на множестве Y условие (50.6) не выполняется.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходился на множестве Y, необходимо и доста-*

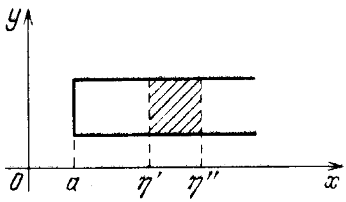


Рис. 183

точно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало такое η_ϵ, $a \leqslant \eta_\epsilon < b$, что для всех $y \in Y$ и для всех η' и η'', $\eta_\epsilon < \eta' < b$, $\eta_\epsilon < \eta'' < b$, выполнялось неравенство (рис. 183)

$$\left| \int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx \right| < \epsilon.$$

▷ Утверждение сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости семейства функций, примененного к функции $\Phi(y, \eta)$ (см.

(50.8)), ибо

$$\int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx = \int_a^{\eta''} f(x, y)dx - \int_a^{\eta'} f(x, y)dx =$$

$$= \Phi(y, \eta'') - \Phi(y, \eta'). \ \triangleleft$$

Т е о р е м а 2 (п р и з н а к В е й е р ш т р а с с а). *Если существует такая функция $\varphi(x) \geqslant 0$, $a \leqslant x < b$, что интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ сходится и для любого $x \in [a, b)$ и любого $y \in Y$ выполняется неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant \varphi(x), \tag{50.11}$$

то интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на множестве Y.

$\triangleright$ Покажем, что в условиях теоремы для интеграла $\int_a^b f(x, y)dx$ выполняется условие Коши равномерной сходимости интегралов. Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$, тогда из сходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$, согласно критерию Коши сходимости интегралов, следует, что существует такое число η_ϵ, $a \leqslant \eta_\epsilon < b$, что для всех η' и η'', $\eta_\epsilon < \eta' < b$, $\eta_\epsilon < \eta'' < b$, выполняется неравенство

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} \varphi(x)dx \right| < \epsilon, \tag{50.12}$$

откуда

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x, y)dx \right| \leqslant \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x, y)|dx \right| \underset{(50.11)}{<}$$

$$\underset{(50.11)}{<} \left| \int_{\eta'}^{\eta''} \varphi(x)dx \right| \underset{(50.12)}{<} \epsilon. \ \triangleleft$$

Пример 2. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$ равномерно сходится на всей числовой оси, так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и для всех $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $\frac{1}{1+x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$.

Замечание 1. Если интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y и $\eta_n \to b$, $a \leqslant \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, $n = 1, 2, \ldots$, то последовательность функций

$$\Phi_n(y) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^{\eta_n} f(x, y)dx \tag{50.13}$$

(равномерно) сходится на Y к функции (50.1) (см. замечание 1 в п. 49.1) и, следовательно, на множестве Y (равномерно) сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)dx = \int\limits_a^b f(x, y)dx, \tag{50.14}$$

для которого последовательность (50.13) является последовательностью его частичных сумм $s_n(y)$:

$$s_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} f(x, y)dx = \int\limits_{\eta_0}^{\eta_n} f(x, y)dx = \Phi_n(y),$$

ибо $\eta_0 = a$.

Представление несобственного интеграла, зависящего от параметра, в виде ряда (50.14) часто бывает удобно использовать для изучения этого интеграла, в чем мы убедимся уже в следующем п. 50.2.

50.2. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра. Для единообразия терминологии будем полуполосу

$$P = \{(x, y):\ -\infty < a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant y \leqslant d\} \tag{50.15}$$

называть бесконечным прямоугольником, в отличие от обычного прямоугольника

$$P = \{(x, y):\ -\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty,\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

который будет называться также и конечным прямоугольником (рис. 184). Здесь, как и выше, c и d – числа, т. е. $-\infty < c < +\infty$, $-\infty < d < +\infty$.

Теорема 3. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике P, а интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)$ равномерно сходится*

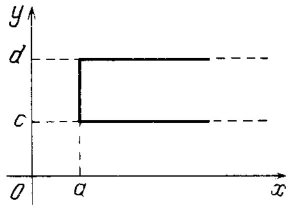


Рис. 184

на отрезке $[c, d]$, то этот интеграл является непрерывной функцией переменной y на указанном отрезке.

Следствие. *В условиях теоремы*

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx, \qquad y_0 \in [c, d].$$

$\triangleright$ Согласно формуле (50.14) интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ является суммой равномерно сходящегося на отрезке $[c, d]$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)dx$, члены которого, согласно теореме 2 п. 49.2, непрерывны на этом отрезке, поэтому сам интеграл $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ также является непрерывной на $[c, d]$ функцией (теорема 7 из п. 40.4), т. е. для любого $y_0 \in [c, d]$ имеет место равенство

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\,dx = \int\limits_a^b f(x, y_0)\,dx. \triangleleft$$

Следствие вытекает из того, что в силу непрерывности функции f выполняется равенство

$$\int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx.$$

Теорема 4. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике P, а интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$ равномерно сходится на отрезке $[c, d]$, то*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{50.16}$$

$\triangleright$ Прежде всего, поскольку интеграл $\int_a^b f(x, y)dx$, согласно теореме 3, является непрерывной на отрезке $[c, d]$ функцией, то интеграл, стоящий в левой части равенства (50.16), существует.

Для доказательства формулы (50.16) снова используем разложение (50.14), заметив, что в условиях теоремы каждый член ряда (50.14) в силу теоремы 2 п. 49.2 является непрерывной функцией. Применив теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда непрерывных на отрезке функций (см. теорему 8 в п. 40.4) и теорему 4 из п. 49.2 об интегрировании собственных интегралов, зависящих от параметра, получим

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \underset{(50.14)}{=} \int_c^d \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)dx\Big)dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d dy \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)dx \underset{(49.12)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{50.17}$$

В силу определения суммы ряда как предела его частичных сумм будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} dx \int_c^d f(x, y)dy =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} dx \int_c^d f(x, y)dy = \lim_{n \to \infty} \int_a^{\eta_n} dx \int_c^d f(x, y)dy. \tag{50.18}$$

Вспомнив теперь, что в качестве последовательности $\{\eta_n\}$ можно взять любую последовательность такую, что $\lim\limits_{n \to \infty} \eta_n = b$, $a \leqslant \eta_n < b$, $n = 1, 2, \ldots$, согласно определению несобственного интеграла, окончательно получим

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^{\eta_n} dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{50.19}$$

Из (50.17) – (50.19) следует (50.16). ◁

Т е о р е м а 5 (п р а в и л о Л е й б н и ц а). *Если функции* $f(x, y)$ *и* $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике* P, *интеграл* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *сходится, а интеграл* $\int_a^b \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$ *равномерно сходится на отрезке* $[c, d]$, *то функция* $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ *дифференцируема на отрезке* $[c, d]$ *и*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \tag{50.20}$$

▷ Согласно формуле (50.14) имеем

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)\,dx, \tag{50.21}$$

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx, \tag{50.22}$$

причем ряд (50.21) сходится, а ряд (50.22) равномерно сходится на отрезке $[c, d]$. В силу теоремы 5 п. 49.2 каждый член ряда (50.21) дифференцируем и для его производной справедлива формула

$$\frac{d}{dy} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)\,dx = \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx. \tag{50.23}$$

Поэтому из теоремы о почленном дифференцировании рядов (теорема 9 из п. 40.4) следует, что сумма ряда (50.21), т. е. интеграл $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$, является дифференцируемой на отрезке $[c, d]$ функцией и для его производной имеет место формула (50.20):

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx \underset{(50.21)}{=} \frac{d}{dy}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dy}\int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x, y)dx \underset{(50.23)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx. \lhd$$

50.3. Интегралы Эйлера. Интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx, \tag{50.24}$$

зависящий от параметра s, называется *гамма-функцией*, а интеграл

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{50.25}$$

зависящий от двух параметров p и q, называется *бета-функцией*. Гамма- и бета-функции называются *эйлеровыми интегралами*.

Разобьем интеграл (50.24) на два интеграла,

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx, \tag{50.26}$$

и заметим, что

$$x^{s-1}e^{-x} \sim x^{s-1} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$x^{s-1}e^{-x} = x^{s-1}e^{-x/2}e^{-x/2} = o(e^{-x/2}) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Так как интеграл $\int_0^1 x^{s-1}dx$ сходится при $s > 0$ и расходится при $s \leqslant 0$, а интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x/2}dx$ сходится, то в силу равенства (50.26) формула (50.24) для определения гамма-функции $\Gamma(s)$ имеет смысл только при $s > 0$. Иначе говоря, если $s > 0$, то интеграл (50.24) сходится; если же $s \leqslant 0$, то он расходится.

Аналогично,

$$\mathrm{B}(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx =$$

$$= \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \tag{50.27}$$

где

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1} \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1} \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

Поскольку интеграл $\int_0^{1/2} x^{p-1}dx$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leqslant 0$, а интеграл $\int_{1/2}^1 (1-x)^{q-1}dx$ сходится при $q > 0$ и расходится при $q \leqslant 0$, то в силу равенства (50.27) формула (50.25) для определения бета-функции $\mathrm{B}(p, q)$ имеет смысл только при $p > 0$ и $q > 0$, т.е. при этих значениях параметров интеграл (50.25) сходится, а если хотя бы одно из условий $p > 0$ и $q > 0$ не выполняется, то интеграл (50.25) расходится.

50.4*. Интеграл Дирихле. Рассмотрим на примере интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \tag{50.28}$$

метод вычисления определенных интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.

Можно показать, что первообразная для функции $\dfrac{\sin \alpha x}{x}$ не выражается через элементарные функции и тем самым интеграл (50.28) нельзя вычислить с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

Интеграл (50.28) сходится при всех значениях α. В самом деле, если $\alpha = 0$, то, очевидно, $I(0) = 0$. Если же $\alpha \neq 0$, то, сделав замену переменного $t = \alpha x$ при $\alpha > 0$ и $t = -\alpha x$ при $\alpha < 0$, получим

$$I(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = I(1), & \text{если} \quad \alpha > 0, \\ \displaystyle -\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -I(1), & \text{если} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Интеграл же $I(1)$ сходится (см. п. 38.6), поэтому сходится и интеграл $I(\alpha)$.

Интеграл (50.28) называют *интегралом Дирихле*, или разрывным множителем Дирихле (поскольку этот интеграл как функция параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$, имеет разрыв при $\alpha = 0$).

Если формально продифференцировать по правилу Лейбница интеграл (50.28), то получится расходящийся интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \cos \alpha x dx$. Поэтому для вычисления интеграла $I(\alpha)$ рассмотрим более общий интеграл

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Продифференцировав по правилу Лейбница интеграл $I(\alpha, \beta)$ по параметру α, получим интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx, \tag{50.29}$$

который при любом фиксированном $\beta > 0$ равномерно сходится относительно параметра α, $-\infty < \alpha < +\infty$. Следовательно, к интегралу $I(\alpha, \beta)$ при $\beta > 0$ можно применить правило Лейбница дифференцирования по параметру α. Заметив, что интеграл (50.29) вычисляется, например, двукратным интегрированием по частям, причем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

получим $\dfrac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Отсюда при $\beta > 0$ можно найти $I(\alpha, \beta)$:

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{\alpha} \frac{\beta dt}{t^2 + \beta^2} + C(\beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} + C(\beta).$$

Но $I(0, \beta) = 0$, следовательно, $C(\beta) = 0$. Итак,

$$I(\alpha, \beta) = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \beta > 0.$$

Нас, однако, интересует значение интеграла $I(\alpha, \beta)$ при $\beta = 0$. Покажем, что здесь возможен предельный переход под знаком интеграла при $\beta \to +0$. Зафиксируем произвольно число $b > 0$ и покажем, что интеграл

$I(\alpha, \beta)$ при любом фиксированном $\alpha \neq 0$ равномерно сходится по параметру β на отрезке $[0, b]$. В самом деле, вычислив по частям интеграл по полуинтервалу $[\eta, +\infty)$, $\eta > 0$, от функции $e^{-\beta x}\dfrac{\sin \alpha x}{x}$, получим

$$\int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\frac{1}{x} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \Bigg|_{\eta}^{+\infty} -$$

$$-\int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{dx}{x^2}.$$

Зададим произвольно $\epsilon > 0$ и выберем η_ϵ так, чтобы при $\eta > \eta_\epsilon$ выполнялись неравенства

$$\left| \frac{1}{\eta} e^{-\eta\beta} \frac{\alpha \cos \alpha \eta + \beta \sin \alpha \eta}{\alpha^2 + \beta^2} \right| \leqslant \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2} \frac{1}{\eta} < \frac{\epsilon}{2},$$

$$\left| \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\alpha \cos \alpha x + \beta \sin \alpha x}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{dx}{x^2} \right| \leqslant \frac{|\alpha| + b}{\alpha^2} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда при $\eta > \eta_\epsilon$ для всех $\beta \in [0, b]$ получим

$$\left| \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| < \epsilon,$$

что и доказывает равномерную сходимость интеграла $I(\alpha, \beta)$ по параметру β на отрезке $[0, b]$. Теперь в силу следствия теоремы 3 п. 50.2

$$I(\alpha) = I(\alpha, 0) = \lim_{\beta \to +0} I(\alpha, \beta) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha.$$

Таким образом,

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad \alpha > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

ГЛАВА 6

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§ 51. Тригонометрические ряды Фурье

51.1. Основные понятия. В этом параграфе будут изучаться ряды вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$
$$a_n \in \mathbf{R},\quad n = 0, 1, 2, \ldots,\quad b_n \in \mathbf{R},\quad n = 1, 2, \ldots, \tag{51.1}$$

называемые *тригонометрическими рядами*, т. е. ряды, членами которых являются функции системы

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots,\quad n = 1, 2, \ldots \tag{51.2}$$

(называемой *тригонометрической системой* или *системой простых гармоник*), умноженные на постоянные a_n, b_n, называемые *коэффициентами тригонометрического ряда* (51.1).

Лемма 1. *Функции тригонометрической системы* (51.2) *имеют следующие свойства*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0,\qquad m \neq n,\qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0,\qquad m \neq n,\qquad m, n = 1, 2, \ldots;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0,\qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots; \tag{51.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi,\qquad n = 1, 2, \ldots$$

▷ Действительно, например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]\, dx =$$

$$= \frac{\sin(n+m)x}{2(n+m)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-m)x}{2(n-m)} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad n \neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx =$$

$$= \pi + \frac{\sin 2nx}{4n} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Аналогично доказываются другие равенства (51.3).◁

Прежде всего возникает вопрос, как найти коэффициенты тригонометрического ряда (51.1), если известна его сумма. Ответ на него легко дать, когда ряд (51.1) сходится равномерно на всей числовой оси.

Теорема 1. *Если тригонометрический ряд* (51.1) *равномерно сходится на всей числовой оси и f – его сумма, т.е.*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{51.4}$$

то

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{51.5}$$

▷ Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (51.4), равномерно сходится, то его можно почленно интегрировать (теорема 8 из п. 40.4) на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому, проинтегрировав обе части равенства (51.4), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx)\, dx =$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 2\pi a_0.$$

Отсюда сразу следует первая формула (51.5).

Если обе части равенства (51.4) умножить на $\cos mx$ или на $\sin mx$, $m \in \mathbf{N}$, то, поскольку эти функции ограничены на числовой оси, в правой части будут снова стоять ряды, равномерно сходящиеся на всей числовой оси (см. замечание в п. 40.2). Для доказательства оставшихся формул (51.5) достаточно проинтегрировать обе части каждого из получившихся равенств и воспользоваться формулами (51.3). Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)\,dx =$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx +$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx \underset{(51.3)}{=} \pi a_m.$$

Отсюда $a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx$. $\lhd$

З а м е ч а н и е 1. Напомним (см. п. 38.1), что функция f называется абсолютно интегрируемой на некотором конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, если существует конечное число точек x_j, $j = 0, 1, \ldots, k$, таких, что

1) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_k = b$;

2) функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset \subset (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$;

3) интегралы $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$ абсолютно сходятся, $j = 1, 2, \ldots, k$.

При выполнении этих условий

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx. \tag{51.6}$$

Всякое множество $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ указанных точек называется *правильным разбиением* промежутка интегрирования абсолютно интегрируемой функции f. Отметим, что интеграл (51.6) на зависит от выбора правильного разбиения промежутка интегрирования.

З а м е ч а н и е 2. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, то из неравенств $|f(x)\cos nx| \leqslant |f(x)|$, $|f(x)\sin nx| \leqslant \leqslant |f(x)|$ следует, что интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

также абсолютно (см. замечание из п. 38.5), а следовательно, и просто сходятся. Таким образом, формулы (51.5) имеют смысл для любой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции.

О п р е д е л е н и е 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке* $[-\pi, \pi]$, *то тригонометрический ряд* (51.1), *коэффициенты которого заданы формулами* (51.5), *называется* ***т р и г о н о м е т р и ч е с к и м р я д о м Ф у р ь е*** (*или, короче,* ***р я д о м Ф у р ь е***) *функции f, его коэф-*

фициенты (51.5) – *к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е ф у н к ц и и* f (*по тригонометрической системе функций* (51.2)), *а частичные суммы порядка* n *ряда Фурье – с у м м а м и Ф у р ь е п о р я д к а* n *ф у н к ц и и* f.

Если ряд (50.1) является рядом Фурье функции f, то пишут

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

З а м е ч а н и е 3. Если у интегрируемой (в собственном или несобственном смысле) функции изменить ее значения на конечном множестве точек, то она останется интегрируемой и значение интеграла от нее по указанному промежутку не изменится. Поэтому две абсолютно интегрируемые на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, отличающиеся друг от друга лишь на конечном множестве точек, имеют одинаковые ряды Фурье.

З а м е ч а н и е 4. Напомним еще, что число $T > 0$ называется периодом функции f, если для любого числа x, принадлежащего области определения $X \subset \mathbf{R}$ функции f, числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат X и для всякого $x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$. Функция, имеющая период T, называется *T-периодической.*

Если функция f определена, например, на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) \neq$ $\neq f(\pi)$, то ее нельзя продолжить на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция, а ее сужение на полуинтервале $[-\pi, \pi)$ можно продолжить указанным образом: следует положить

$$\bar{f}(x + 2\pi k) \overset{\text{def}}{=} f(x), \quad x \in [-\pi, \pi), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функция $\bar{f}$, очевидно, – 2π-периодическая и на отрезке $[-\pi, \pi]$ отличается от функции f, быть может, только в одной точке $x = \pi$. Поэтому функция f и функция $\bar{f}$, рассматриваемая только на отрезке $[-\pi, \pi]$, имеют один и тот же ряд Фурье. В дальнейшем функции f и $\bar{f}$ будут обозначаться одной и той же буквой f.

З а м е ч а н и е 5. Если функция f является T-периодической, интегрируемой на отрезке $[0, T]$ (в собственном или несобственном смысле), то для любого числа a имеет место равенство (рис. 185)

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

В частности, для коэффициентов Фурье 2π-периодической функции, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, справедливы формулы

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

51.2. Приближение функций ступенчатыми функциями. Для изучения сходимости рядов Фурье полезно предварительно рассмотреть способ приближения абсолютно интегрируемых функций так называемыми ступенчатыми функциями (их определение будет дано ниже).

О п р е д е л е н и е 2. *Пусть на множестве* $X \subset \mathbf{R}^n$ *задана функция* f. *Замыкание множества всех точек* $x \in X$, *в которых функция* f *не равна* 0, *называется* ***н о с и т е л е м ф у н к ц и и*** f *и обозначается* $\operatorname{supp} f$ *):

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X\colon f(x) \neq 0\}}.$$

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть X является открытым множеством пространства* $\mathbf{R}^n$ *(в частности, интервалом* (a, b) *числовой прямой* $\mathbf{R}$). *Если у функции f, определенной на множестве X, ее носителем является компакт, лежащий в X, то f называется* ***ф и н и т н о й н а X ф у н к ц и е й*** *(соответственно* ***ф и н и т н о й н а и н т е р в а л е*** (a, b) ***ф у н к ц и е й***).

Если функция финитна на пространстве $\mathbf{R}^n$ (в частности, на $\mathbf{R}$), то для краткости будем называть ее *финитной*, опуская указание, где именно она финитна.

Если функция f финитна на интервале (a, b), т.е. $\operatorname{supp} f \subset (a, b)$, то множество $\operatorname{supp} f$ является компактом, а следовательно, замкнутым множеством. Поскольку точки a и b ему не принадлежат, то они не являются его точками прикосновения. Поэтому у них существуют окрестности, не содержащие точек множества $\operatorname{supp} f$. Во всех точках этих окрестностей функция f, очевидно, равна нулю (рис. 186).

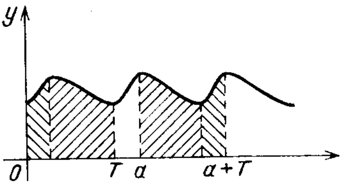


Рис. 185

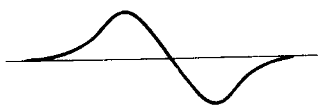


Рис. 186

О п р е д е л е н и е 4. *Для всякого множества* $X \subset \mathbf{R}^n$ *функция, равная* 1 *в точках этого множества и равная* 0 *вне его, называется* ***х а р а к т е р и с т и ч е с к о й ф у н к ц и е й м н о ж е с т в а X*** *и обозначается* χ_X.

Таким образом,

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X, \\ 0, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

В дальнейшем в этом параграфе мы будем рассматривать только функции одной переменной.

---

*) От латинского слова supportus – опора.

О п р е д е л е н и е 5. *Всякая линейная комбинация конечного множества характеристических функций попарно непересекающихся конечных полуинтервалов вида* $[a, b)$ *называется* ***ступенчатой функцией.***

Таким образом, если φ – ступенчатая функция, то существуют такая конечная система попарно непересекающихся конечных полуинтервалов $[a_j, b_j)$ и такие числа λ_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, что

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_j(x), \tag{51.7}$$

где χ_j – характеристическая функция полуинтервала $[a_j, b_j)$.

Очевидно, что ступенчатая функция является финитной функцией, ибо замыкание объединения конечного множества конечных промежутков является компактом.

З а м е ч а н и е 1. Ступенчатая функция интегрируема на всей числовой оси, причем, если она задана формулой (51.7), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \int_{a_j}^{b_j} dx = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (b_j - a_j). \tag{51.8}$$

Т е о р е м а 2. *Для любой функции f, абсолютно интегрируемой на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, существует последовательность таких ступенчатых функций φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, что*

$$1)\ \operatorname{supp} \varphi_n \subset (a, b),\ n = 1, 2, \ldots \tag{51.9}$$

(*т.е. φ_n – финитные на интервале (a, b) функции*);

$$2)\ \lim_{n \to \infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\,dx = 0. \tag{51.10}$$

$\triangleright$ Пусть сначала функция f интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$. Зададим произвольно $\epsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции f и согласно определению несобственного интеграла существуют такие точки ξ и η, что $a < \xi < \eta < b$ и

$$\int_a^{\xi} |f(x)|\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{51.11}$$

Пусть τ – некоторое разбиение отрезка $[\xi, \eta]$, $|\tau|$ – его мелкость и s_τ – нижняя сумма Дарбу функции f, соответствующая разбиению τ; тогда

$$\lim_{|\tau| \to 0} s_\tau = \int_{\xi}^{\eta} f(x)\,dx.$$

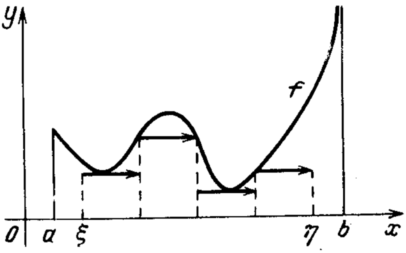


Рис. 187

Отсюда в силу определения предела следует, что существует такое разбиение $\tau_0 = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_0}$ отрезка $[\xi, \eta]$, что

$$0 \leqslant \int_\xi^\eta f(x)\,dx - s_{\tau_0} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{51.12}$$

Положим

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0, \tag{51.13}$$

тогда

$$s_{\tau_0} = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_0} m_i (x_i - x_{i-1}). \tag{51.14}$$

Это выражение напоминает формулу для значения интеграла от ступенчатой функции (51.8). Построим соответствующую ступенчатую функцию. Положим

$$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} m_i, \text{ если } x_{i-1} \leqslant x < x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, i_0, \\ 0, \text{ если } x < \xi \text{ или } x \geqslant \eta \end{cases} \tag{51.15}$$

(рис. 187). Очевидно, что φ – ступенчатая финитная на интервале (a, b) функция. Действительно, если χ_i – характеристическая функция полуинтервала $[x_{i-1}, x_i)$, то

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{i_0} m_i \chi_i(x); \tag{51.16}$$

при этом

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [\xi, \eta] \subset (a, b). \tag{51.17}$$

Сравнив выражение (51.14) для суммы Дарбу s_{τ_0} со значением интеграла от функции (51.16) (см. (51.8)), убедимся, что они равны:

$$\int_\xi^\eta \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i_0} m_i (x_i - x_{i-1}) = s_{\tau_0}. \tag{51.18}$$

Следовательно,

$$\int_{\xi}^{\eta} [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx - \int_{\xi}^{\eta} \varphi(x)dx \underset{(51.18)}{=}$$

$$\underset{(51.18)}{=} \int_{\xi}^{\eta} f(x)dx - s_{\tau_0} \underset{(51.12)}{<} \frac{\epsilon}{2}. \tag{51.19}$$

Отметим, что при всех $x \in [x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, выполняются неравенства $m_i \underset{(51.13)}{\leqslant} f(x)$, поэтому $\varphi(x) \underset{(51.16)}{\leqslant} f(x)$, $x \in [\xi, \eta)$, и

$$f(x) - \varphi(x) = |f(x) - \varphi(x)| \geqslant 0. \tag{51.20}$$

Теперь из (51.11) и (51.19) имеем

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx \underset{(51.17)}{=} \int_a^{\xi} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int_{\xi}^{\eta} |f(x) - \varphi(x)|\,dx + \int_{\eta}^{b} |f(x)|\,dx \underset{\substack{(51.11)\\(51.19)\\(51.20)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{51.21}$$

Положив $\epsilon = 1/n$ и обозначив соответствующую этому ϵ (в силу приведенной выше конструкции) ступенчатую функцию через φ_n, получим, согласно (51.17) и (51.21), последовательность ступенчатых функций $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющую условиям (51.9) и (51.10).

В общем случае абсолютно интегрируемой функции, когда правильное разбиение $\{x_i\}_{i=0}^{i=k}$ промежутка интегрирования функции f (замечание 1 из п. 51.1) обязательно содержит точки, отличные от точек a и b, утверждение теоремы следует из того, что в силу доказанного оно справедливо для каждого промежутка с концами в точках x_{i-1} и x_i этого разбиения, $i = 1, 2, \ldots, k$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что из определения ступенчатой функции φ, построенной при доказательстве теоремы 2 (см. (51.15)), следует, что если для всех $x \in [\xi, \eta]$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leqslant c, \tag{51.22}$$

то выполняется и неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant c. \tag{51.23}$$

Действительно, если $-c \leqslant f(x) \leqslant c$, то для любой точки $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_0$, будем иметь

$$-c \leqslant m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \leqslant c.$$

Поэтому (см. (51.15)) для всех $x \in [x_{i-1}, x_i)$ имеет место неравенство $-c \leqslant \varphi(x) \leqslant c$, т.е. $|\varphi(x)| \leqslant c$ на всех полуинтервалах $[x_{i-1}, x_i)$, а следовательно, и на отрезке $[\xi, \eta]$ (заметим, что $\varphi(\eta) = 0$).

51.3. Теорема Римана. Стремление коэффициентов Фурье к нулю. Вернемся снова к изучению рядов Фурье абсолютно интегрируемых функций и покажем, что последовательность их коэффициентов Фурье стремится к нулю. Докажем даже более сильное утверждение, принадлежащее Б. Риману.

Теорема 3 (Риман). *Если функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном промежутке с концами a и b, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x\, dx = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x\, dx = 0. \tag{51.24}$$

Следствие. *Коэффициенты Фурье a_n и b_n абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к нулю при $n \to \infty$:*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0. \tag{51.25}$$

$\triangleright$ Доказательство разобьем на три этапа.

1. Если функция f является характеристической функцией χ полуинтервала $[\xi, \eta) \subset (a, b)$ и $\lambda \neq 0$, то

$$\left| \int_a^b \chi(x) \cos \lambda x\, dx \right| = \left| \int_\xi^\eta \cos \lambda x\, dx \right| =$$
$$= \left| \frac{\sin \lambda\eta - \sin \lambda\xi}{\lambda} \right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|}.$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \chi(x) \cos \lambda x\, dx = 0. \tag{51.26}$$

Аналогично,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \chi(x) \sin \lambda x\, dx = 0. \tag{51.27}$$

2. Если функция f является ступенчатой функцией φ, носитель которой лежит на интервале (a, b), то она является конечной линейной комбинацией характеристических функций χ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, некоторых полуинтервалов $[x_{i-1}, x_i)$, лежащих вместе со своими концами в интервале (a, b):

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i(x).$$

Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \chi_i(x)\cos\lambda x\,dx \underset{(51.26)}{=} 0. \tag{51.28}$$

Аналогично,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,dx \underset{(51.27)}{=} 0. \tag{51.29}$$

3. Пусть f – произвольная абсолютно интегрируемая на промежутке с концами a и b функция. Зададим произвольно $\epsilon > 0$. Согласно лемме 2 существует такая ступенчатая функция φ, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\epsilon}{2}. \tag{51.30}$$

В силу равенства (51.28) для этой функции φ существует такое λ_ϵ, что для всех λ, удовлетворяющих неравенству $|\lambda| > \lambda_\epsilon$, выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{51.31}$$

Поскольку $f(x) = [f(x) - \varphi(x)] + \varphi(x)$ и $|\cos\lambda x| \leqslant 1$, то при $|\lambda| > \lambda_\epsilon$ будем иметь

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\cos\lambda x\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx + \left|\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx\right| <$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\lambda x\,dx = 0$. Аналогично доказывается равенство $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b \varphi(x)\sin\lambda x\,dx = 0$. $\lhd$

51.4. Интеграл Дирихле. Принцип локализации. Займемся теперь изучением сходимости рядов Фурье. Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ (или, как говорят, абсолютно интегрируема на периоде) и

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx. \tag{51.32}$$

Сумму Фурье порядка n для функции f будем обозначать $S_n(x;\ f)$, или, короче, $S_n(x)$. Найдем для этой суммы выражение, удобное для ее изучения:

$$S_n(x) = S_n(x;f) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \underset{(51.5)}{=}$$

$$\underset{(51.5)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt +$$

$$+ \frac{\sin kx}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\cos kt + \sin kx \sin kt\right] f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x)\right] f(t)\,dt. \tag{51.33}$$

Функция

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{51.34}$$

называется *ядром Дирихле порядка n*.

Используя обозначение (51.34), из (51.33) получим

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt. \tag{51.35}$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, называется *интегралом Дирихле*.

Лемма 2. *Ядро Дирихле D_n*

1) *является четной непрерывной периода 2π функцией;*

2) $$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1; \tag{51.36}$$

3) $$D_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{2\pi \sin\dfrac{t}{2}}, & \textit{если } t \neq 2\pi m, \\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\left(n + \dfrac{1}{2}\right), & \textit{если } t = 2\pi m, \end{cases} \tag{51.37}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots,\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\triangleright$ Свойство 1) очевидным образом следует из формулы (51.34). Формула $\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ получается из (51.34) интегрированием обеих частей этого равенства по отрезку $[-\pi, \pi]$, а формула $2\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ получается из предыдущей в силу четности ядра Дирихле. Докажем свойство 2). Пусть $t \neq 2\pi m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тогда

$$D_n(t) \underset{(51.34)}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sin \frac{t}{2}}\left(\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos kt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sin \frac{t}{2}}\left[\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right)\right] =$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\pi \sin\frac{t}{2}}.$$

Если же $t = 2\pi m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ то

$$D_n(2\pi m) \underset{(51.34)}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right) = \frac{1}{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right). \triangleleft$$

Нас будет интересовать предел сумм Фурье функции f, т.е. согласно формуле (51.35), предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x)f(t)\,dt. \tag{51.38}$$

Отметим, что для нахождения этого предела нельзя перейти к пределу при $n \to \infty$ в подынтегральном выражении хотя бы уже потому, что оно не имеет предела при $n \to \infty$ (см. (51.37)). Для того чтобы найти предел (51.38), докажем для сумм Фурье $S_n(x; f)$ справедливость одной асимптотической формулы.

Л е м м а 3. *Если функция f — 2π-периодическая и абсолютно интегрируема на периоде, то*

$$S_n(x;f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt \tag{51.39}$$

и

$$S_n(x;f) = \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt. \tag{51.40}$$

С л е д с т в и е. *Для любого δ, $0<\delta\leqslant\pi$, и любого $x\in[-\pi,\pi]$ имеет место асимптотическая формула*

$$S_n(x;f) = \int_{0}^{\delta} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt + o(1),\quad n\to\infty. \tag{51.41}$$

$\triangleright$ 1. Докажем формулу (51.39):

$$S_n(x;f) \underset{(51.35)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t)\,dt \underset{u=t-x}{=}$$

$$\underset{u=t-x}{=} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u)\,du \underset{\substack{\text{замечание 5}\\ \text{п. 51.1}}}{=}$$

$$\underset{\substack{\text{замечание 5}\\ \text{п. 51.1}}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\,du.$$

2. Для доказательства формулы (51.40) разобьем в формуле (51.39) промежуток интегрирования на отрезки $[-\pi, 0]$ и $[0,\pi]$, а затем сделаем в первом интеграле замену переменного $t=-u$:

$$S_n(x;f) \underset{(51.39)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} D_n(t) f(x+t)\,dt + \int_{0}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} D_n(-u) f(x-u)\,du + \int_{0}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\pi} D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt$$

(мы воспользовались тем, что $D_n(-u) = D_n(u)$, см. лемму 2, и обозначили u через t). $\triangleleft$

Докажем теперь следствие, т.е. формулу (51.41).

$\triangleright$ Зафиксируем произвольно δ, лишь бы выполнялись неравенства $0<\delta\leqslant\pi$, а затем разобьем промежуток интегрирования в формуле

(51.40) на отрезки $[0, \delta]$ и $[\delta, \pi]$. Тогда, использовав выражение (51.37) для ядра Дирихле, получим

$$S_n(x;f) \underset{\substack{(51.37)\\(51.40)}}{=} \int_0^\delta D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{51.42}$$

Функция $\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ непрерывна и ограничена на отрезке $[\delta, \pi]$, а функции $f(x+t)$ и $f(x-t)$ как функции переменной t абсолютно интегрируемы на этом отрезке. Поэтому и функция $\dfrac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[\delta, \pi]$ (см. замечание в п. 38.5), и, следовательно, согласно теореме Римана (теорема 3 из п. 51.3) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0. \tag{51.43}$$

Формулы (51.42) и (51.43) означают, что имеет место асимптотическое равенство (51.41). ◁

Теорема 4 (принцип локализации). *Если f является 2π-периодической и абсолютно интегрируемой на периоде функцией, то существование предела последовательности ее сумм Фурье $S_n(x; f)$, $n = 1, 2, \ldots$, в любой точке $x \in \mathbf{R}$ равносильно существованию предела*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt, \tag{51.44}$$

где δ, $0 < \delta < \pi$, произвольно фиксировано. При этом, если указанные пределы существуют, то они равны.

▷ Это сразу следует из формулы (51.41). ◁

Таким образом, несмотря на то, что коэффициенты ряда Фурье функции определяются с помощью ее значений на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ (как говорят, на всем периоде), сходимость ее ряда Фурье в любой точке $x \in [-\pi, \pi]$, а в случае сходимости этого ряда его сумма зависит только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки x (действительно, в подынтегральное выражение интеграла (51.44) входят только значения функции на отрезке $[x-\delta, x+\delta]$).

51.5. Сходимость ряда Фурье в точке. Займемся теперь более детальным изучением поведения сумм Фурье $S_n(x;\ f)$ в зависимости от поведения функции в окрестности точки x. Предварительно докажем одну лемму.

Л е м м а 4. *Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[0, a]$ $0 < a < 2\pi$, то при любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, a]$ интегралы*

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|f(t)|}{t}\,dt, \quad \int_0^{\delta_2} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{51.45}$$

одновременно сходятся или расходятся.

$\triangleright$ Поскольку функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[0, a]$, то существует такое $\delta \in (0, a]$, что, каково бы ни было $\xi \in (0, \delta]$, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, \delta]$ (см. замечание 1 в п. 51.1). Поскольку функции $1/t$ и $\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ непрерывны, а следовательно, интегрируемы по Риману на отрезке $[\xi, \delta]$, то функции $|f(t)|/t$ и $\dfrac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}$ также интегрируемы по Риману на этом отрезке. Поэтому для исследования сходимости интегралов

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(t)|}{t}\,dt, \quad \int_0^{\delta} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt \tag{51.46}$$

можно применить признак сравнения.

Так как

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = 1,$$

то подынтегральные функции в интегралах (51.46) эквивалентны при $t \to 0$:

$$\frac{|f(t)|}{t} \sim \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad t \to 0.$$

Отсюда следует, что интегралы (51.46) одновременно сходятся или расходятся.

При любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, a]$ интегралы

$$\int_0^{\delta_1} \frac{|f(t)|}{t} dt, \quad \int_0^{\delta_2} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \tag{51.47}$$

отличаются от интегралов (51.46) на заведомо сходящиеся интегралы

$$\int_\delta^{\delta_1} \frac{|f(t)|}{t} dt, \quad \int_\delta^{\delta_2} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt$$

(их сходимость, см. замечание в п. 38.5, следует из того, что если абсолютно интегрируемую на некотором отрезке функцию умножить на функцию, интегрируемую по Риману на этом отрезке, то получится снова абсолютно интегрируемая функция; в рассматриваемом случае абсолютно интегрируемая функция f умножается даже на непрерывные на отрезках с концами δ, δ_1 и δ, δ_2 соответственно функции $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$). Поэтому каждый из интегралов (51.47) сходится или расходится одновременно с соответствующим интегралом (51.46). ◁

Если функция f определена в некоторой проколотой окружности точки x и эта точка является точкой разрыва первого рода функции f, т.е. существуют конечные пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, то под *правосторонней* $f'_+(x)$ и соответственно *левосторонней* $f'_-(x)$ *производными* функции f в точке x будем понимать

$$f'_+(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to +0} \frac{f(x+h) - f(x+0)}{h},$$

$$f'_-(x) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to +0} \frac{f(x-h) - f(x-0)}{-h}.$$

Функция f называется *кусочно дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$, если существует такое его разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=i_\tau}$, что на каждом интервале (x_{i-1}, x_i) функция f дифференцируема, а в точках x_{i-1} и x_i существуют конечные $f(x_{i-1}+0)$, $f(x_i-0)$, $f'_+(x_{i-1})$ и $f'_-(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$.

Если положить

$$f_i(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x_{i-1}+0) & \text{при } x = x_{i-1}, \\ f(x) & \text{при } x_{i-1} < x < x_i, \\ f(x_i - 0) & \text{при } x = x_i, \end{cases}$$

то функции f_i в рассматриваемом случае будут дифференцируемыми соответственно на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, i_\tau$. Отсюда следует их непрерывность, а поэтому и интегрируемость по Риману на этих отрезках. В свою очередь это влечет за собой интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx.$$

Введем еще обозначение

$$f_x^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x+t) + f(x-t) - f(x+0) - f(x-0). \tag{51.48}$$

Очевидно, что если функция f – периодическая и абсолютно интегрируемая на периоде, то при любом фиксированном x функция $f_x^*(t)$ как функция переменного t будет также периодической с тем же периодом и абсолютно интегрируемой на периоде.

Т е о р е м а 5 (п р и з н а к Д и н и *)). *Пусть функция f – 2π-периодическая и абсолютно интегрируемая на периоде. Тогда, если x является точкой непрерывности или точкой разрыва первого рода функции f и при некотором δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, интеграл $\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt$ сходится, т.е.*

$$\int_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt < +\infty, \tag{51.49}$$

то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

в частности, в точке непрерывности – к значению $f(x)$ функции f в этой точке.

С л е д с т в и е 1. *Если f – 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция и в точке x существуют конечные $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то ряд Фурье функции f сходится в точке x к значению* $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

С л е д с т в и е 2. *Ряд Фурье кусочно дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi, \pi)$ к значению* $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, *а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ – к значению* $\dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$.

*) У. Дини (1845–1918) – итальянский математик.

⊳ Использовав представления сумм Фурье функции f в виде (51.40) и воспользовавшись свойствами ядра Дирихле (лемма 2 п. 51.4), будем иметь

$$S_n(x;f) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \underset{\substack{(51.40)\\(51.36)}}{=} \int_0^\pi D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)]\,dt -$$

$$-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\,2\int_0^\pi D_n(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi D_n(t)\,[f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\,dt \underset{(51.37)}{=}$$

$$\underset{(51.37)}{=} \int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{51.50}$$

Поскольку по условию теоремы интеграл (51.49) сходится, то согласно лемме 4 сходится и интеграл $\int_0^\pi \frac{|f_x^*(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt$, т.е. функция $\frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[0,\pi]$, а тогда, согласно теореме Римана (теорема 3 п. 51.3),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f_x^*(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt = 0.$$

Поэтому из (51.50) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;f) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \triangleleft \tag{51.51}$$

Докажем следствие 1.

⊳ Пусть в некоторой фиксированной точке x существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, а функция f – абсолютно интегрируемая на периоде. Так как

$$\lim_{t\to+0}\frac{f_x^*(t)}{t} = \lim_{t\to+0}\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} - \frac{f(x-t)-f(x-0)}{-t}\right] =$$

$$= f'_+(x) - f'_-(x)$$

и, следовательно, рассматриваемый предел конечен, то функция $f_x^*(t)/t$, $t > 0$, ограничена в некоторой окрестности нуля. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{|f_x^*(t)|}{t}\,dt$ существует даже в смысле Римана. Отсюда, согласно теореме 5, для любой точки $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x;f) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \triangleleft$$

Докажем теперь следствие 2.

$\triangleright$ Если функция f кусочно дифференцируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, то после ее периодического продолжения с полуинтервала $[-\pi,\pi)$ на всю числовую ось она будет удовлетворять условиям следствия 1 (при этом она будет интегрируема даже по Риману на отрезке $[-\pi,\pi]$) и, следовательно, для всех точек $x \in (-\pi,\pi)$ будет иметь место равенство (51.51). Что же касается точек $x = \pm\pi$, то, например, для $x = \pi$, заметив, что в силу периодичности функции f имеет место равенство $f(\pi+0) = f(-\pi+0)$, получим

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\pi;f) \underset{(51.51)}{=} \frac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}. \triangleleft$$

З а м е ч а н и е. В достаточных условиях сходимости рядов Фурье, сформулированных в следствиях теоремы 5, присутствуют некоторые дифференциальные свойства функции. Это не случайно, так как если функция f только кусочно непрерывна или даже, более того, непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то может случиться, что ее ряд Фурье в некоторых точках расходится*).

При разложении функций в ряд Фурье полезно иметь в виду, что из формул (51.5) для коэффициентов Фурье непосредственно следует (докажите это), что для нечетной функции все коэффициенты при косинусах и свободный член, а для четной – все коэффициенты при синусах равны нулю.

В качестве примера рассмотрим разложение в ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sh} x$. Эта функция непрерывно дифференцируема на отрезке $[-\pi,\pi]$, поэтому, согласно следствию 2 теоремы 5, ее ряд Фурье сходится во всех точках числовой оси, причем его сумма является, как и сумма всякого сходящегося тригонометрического ряда, 2π-периодической функцией. При этом в точках интервала $(-\pi,\pi)$ он сходится к значению функции $\operatorname{sh} x$, а на его концах $x = -\pi$ и $x = \pi$ – к $\frac{\operatorname{sh}(-\pi)+\operatorname{sh}\pi}{2} = 0$. Таким образом, не имея фактического разложения функции в ряд Фурье, можно

---

*) Соответствующие примеры функций можно найти, например, в книге Н.К. Бари "Тригонометрические ряды". (М.: Физматгиз, 1961).

получить его сумму. Графики функции $f(x) = \operatorname{sh} x$ и суммы $s(x)$ ее ряда Фурье изображены на рис. 188.

Найдем теперь ряд Фурье функции $f(x) = \operatorname{sh} x$. Поскольку она нечетная, то в ее ряд Фурье будут входить только члены с синусами, т.е.

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдем коэффициенты Фурье b_n, $n = 1, 2, \ldots$ (для вычисления получающихся интегралов можно, например, применить метод интегрирования по частям; см. п. 31.4):

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh} x \sin nx\, dx = (-1)^{n-1} \frac{2n \operatorname{sh} \pi}{\pi(1+n^2)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому

$$\operatorname{sh} x = \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Отметим, в частности, что полученный ряд сходится на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, но заведомо не равномерно, так как его члены являются

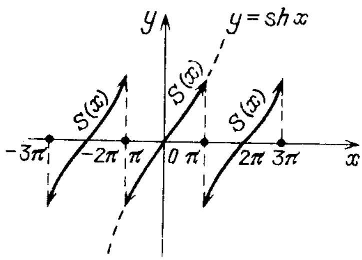


Рис. 188

непрерывными функциями, а его сумма имеет разрывы на концах этого отрезка.

51.6. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Пусть функция f имеет период 2π, абсолютно интегрируема на периоде и $S_n(x) = S_n(x; f)$ – ее суммы Фурье, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Положим

$$\sigma_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \tag{51.52}$$

$$\Phi_n(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{D_0(x) + D_1(x) + \ldots + D_n(x)}{n+1} \tag{51.53}$$

($D_k(x)$, как всегда, – ядра Дирихле). Сумма $\sigma_n(x)$ называется суммой Фейера, а $\Phi_n(x)$ – ядром Фейера, $n = 0, 1, \ldots$

Так как

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t)\,dt \tag{51.54}$$

(см. лемму 3 в п. 51.4), то из формул (51.52) и (51.53) следует, что

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t)\,dt. \tag{51.55}$$

Лемма 5. *Ядра Фейера имеют следующие свойства:*

1) *они являются непрерывными, четными, 2π-периодическими функциями;*

$$2)\ \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 2\int_{0}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1; \tag{51.56}$$

$$3)\ \Phi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2\pi}, & \textit{если} \quad t = 2\pi m, \\ \dfrac{\sin^2 \dfrac{n+1}{2} t}{2\pi(n+1)\sin^2 \dfrac{t}{2}}, & \textit{если} \quad t \neq 2\pi m, \end{cases} \tag{51.57}$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Следствие 1. *Ядра Фейера неотрицательны:*

$$\Phi_n(t) \geqslant 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{51.58}$$

Следствие 2. *При любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) = 0. \tag{51.59}$$

$\triangleright$ Свойства 1) и 2) вытекают из соответствующих свойств ядер Дирихле. Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \underset{(51.53)}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1.$$

Отсюда в силу четности ядер Фейера следует второе равенство (51.56).

Докажем свойство 3). Если $t = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то, вспомнив, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$, получим

$$\Phi_n(2\pi m) \underset{(51.53)}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(2\pi m) \underset{(51.37)}{=}$$

$$\underset{(51.37)}{=} \frac{1}{(n+1)\pi} \sum_{k=0}^{n} \left(k + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n+1}{2}\right] = \frac{n+1}{2\pi}.$$

Если же $t \neq 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) \underset{(51.37)}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2\pi \sin \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{2 \sin \frac{t}{2} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{4\pi \sin^2 \frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4(n+1)\pi \sin^2 \frac{t}{2}} \sum_{k=0}^{n} [\cos kt - \cos(k+1)t] =$$

$$= \frac{1 - \cos(n+1)t}{4(n+1)\pi \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1)\pi \sin^2 \frac{t}{2}}. \quad \triangleleft$$

Следствие 1 вытекает из формулы (51.57).

Докажем следствие 2.

$\triangleright$ При любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, имеем

$$0 \underset{(51.58)}{\leqslant} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \Phi_n(t) \underset{(51.57)}{=} \max_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1)\pi \sin^2 \frac{t}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2(n+1)\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда сразу следует (51.59). $\triangleleft$

Примерный вид графика ядра Фейера изображен на рис. 189. Образно говоря, ядра Фейера представляют собой такие неотрицательные функции, существенные значения которых при возрастании n все больше и больше сосредотачиваются в окрестности нуля в том смысле, что при любом δ, $0 < \delta \leqslant \pi$, их значения вне δ-окрестности нуля равномерно стремятся к нулю (см. (51.59)), а интегралы от этих функций все время сохраняют постоянное значение (см. (51.56)).

Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на концах одинаковые значения, $f(-\pi) = f(\pi)$; тогда ее периодическое продолжение с периодом 2π непрерывно на всей действительной оси. В силу непрерывности функции f абсолютная величина ее значений на отрезке $[-\pi, \pi]$

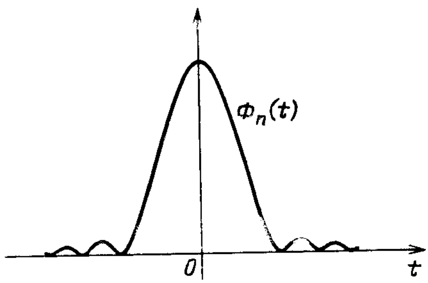


Рис. 189

ограничена сверху некоторой постоянной $c > 0$: $|f(x)| \leqslant c$, $x \in [-\pi, \pi]$. Очевидно, что и абсолютные величины всех значений указанного ее периодического продолжения (которое будем обозначать той же буквой f) ограничены той же постоянной c:

$$|f(x)| \leqslant c, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{51.60}$$

Функция f, будучи непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, равномерно непрерывна на нем. Поскольку при периодическом продолжении значения функции периодически повторяются, то периодическое продолжение функции f равномерно непрерывно на всей числовой оси.

Действительно, функция f непрерывна на отрезке $[0, 4\pi]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что, как только $|x_2 - x_1| < \delta$, $x_1 \in [0, 4\pi]$, $x_2 \in [0, 4\pi]$, выполняется неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon. \tag{51.61}$$

Если теперь $\delta_0 = \min\{\delta, 2\pi\}$, а x_1' и x_2' – произвольные точки числовой оси такие, что $|x_2' - x_1'| < \delta_0$, то найдется такая пара точек $x_1 \in [0, 4\pi]$ и $x_2 \in [0, 4\pi]$, что

$$f(x_1) = f(x_1'), \quad f(x_2) = f(x_2'), \tag{51.62}$$

$$x_2 - x_1 = x_2' - x_1'. \tag{51.63}$$

(Если, например, $x_1' < x_2'$, то достаточно подобрать целое n так, чтобы $x_1' - 2\pi n \in [0, 2\pi]$, и положить $x_1 = x_1' - 2\pi n$, $x_2 = x_2' - 2\pi n$.)

Поэтому, если $x_1' \in \mathbf{R}$, $x_2' \in \mathbf{R}$ и $|x_2' - x_1'| < \delta_0$, то

$$|x_2 - x_1| \underset{(51.63)}{=} |x_2' - x_1'| < \delta_0 \leqslant \delta,$$

а поэтому

$$|f(x_2') - f(x_1')| \underset{(51.62)}{=} |f(x_2) - f(x_1)| \underset{(51.61)}{<} \epsilon.$$

Это и означает равномерную непрерывность функции f на всей числовой оси $\mathbf{R}$.

Т е о р е м а 6 (Ф е й е р). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах равные значения, $f(-\pi) = f(\pi)$, то последовательность ее сумм Фейера равномерно сходится на этом отрезке к самой функции.*

С л е д с т в и е. *Если ряд Фурье непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции f, принимающей одинаковые значения на его концах, сходится в некоторой точке, то он сходится в ней к значению функции.*

▷ Зафиксируем точку $x \in [-\pi, \pi]$ и зададим произвольно $\epsilon > 0$. Используя лемму 5, будем иметь

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \underset{\substack{(51.55)\\(51.56)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(51.55)\\(51.56)}}{=} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t) f(x+t)\,dt - f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)[f(x+t) - f(x)]\,dt \right| \underset{(51.58)}{\leqslant} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,|f(x+t) - f(x)|\,dt. \tag{51.64}$$

Для заданного $\epsilon > 0$ в силу равномерной непрерывности на всей числовой оси функции f существует такое δ, $0 < \delta < \pi$, что для любых точек $x \in \mathbf{R}$, $x' \in \mathbf{R}$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon/3. \tag{51.65}$$

Представим интеграл, стоящий в правой части неравенства (51.64), в виде суммы следующих трех интегралов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \tag{51.66}$$

и оценим каждый из них. Имеем

$$\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt \underset{(51.65)}{\leqslant} \frac{\epsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(t)dt \underset{(51.58)}{<}$$

$$\underset{(51.58)}{<} \frac{\epsilon}{3}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)dt \underset{(51.56)}{=} \frac{\epsilon}{3}. \tag{51.67}$$

Два других интеграла в (51.66) оцениваются одинаковыми способами:

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt \leqslant \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)[|f(x+t)| + |f(x)|]dx \underset{(51.60)}{\leqslant}$$

$$\underset{(51.60)}{\leqslant} 2c\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)dt \leqslant 2c \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t)\int_{\delta}^{\pi} dt <$$

$$< 2c\pi \max_{\delta \leqslant t \leqslant \pi} \Phi_n(t) \to 0$$

при $n \to \infty$ согласно (51.59). Поэтому существует такое n_0, что при $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt < \frac{\epsilon}{3}. \tag{51.68}$$

Аналогично,

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(t)|f(x+t) - f(x)|dt < \frac{\epsilon}{3}, \qquad n > n_0. \tag{51.69}$$

Из (51.64) – (51.69) следует, что при $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

и поскольку выбор n_0 не зависел от выбора точки $x \in [-\pi, \pi]$, то это означает, что последовательность сумм Фейера $\{\sigma_n(x)\}$ равномерно сходится на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции f. $\lhd$

Докажем следствие.

$\rhd$ Известно, что если числовая последовательность сходится, то последовательность средних арифметических ее членов сходится к тому же пределу (см. п. 39.9). Поэтому, если при некотором $x \in [-\pi, \pi]$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = A$, то и $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x) = A$, а так как согласно теореме Фейера $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma_n(x) = f(x)$, то $A = f(x)$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$. $\lhd$

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось выше (см. п. 51.5), существуют непрерывные 2π-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках. Однако, если из частичных сумм этих рядов составить средние арифметические, т. е. суммы Фейера, то полученная последовательность согласно теореме 6 будет сходиться и даже равномерно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ к рассматриваемой функции. Этот пример показывает, в частности, полезность изучения не только сходящихся, но и расходящихся рядов.

51.7. Приближение непрерывных функций многочленами.

О п р е д е л е н и е 6. *Функции вида*

$$T(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называются ***т р и г о н о м е т р и ч е с к и м и м н о г о ч л е н а м и*** (***п о л и н о м а м и***). *Если $A_n^2 + B_n^2 > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, или $n = 0$, то $T(x)$ называется* ***т р и г о н о м е т р и ч е с к и м м н о г о ч л е н о м п о р я д к а*** n (*получающуюся при $n = 0$ сумму, у которой верхний предел суммирования оказывается меньше нижнего, принято считать равной нулю*).

Очевидно, что суммы Фурье и суммы Фейера абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции являются примерами тригонометрических многочленов.

Т е о р е м а 7 (В е й е р ш т р а с с). *Если функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимает на его концах одинаковые значения, т. е. $f(-\pi) = f(\pi)$, то для любого $\epsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(x)$, что для всех точек $x \in [-\pi, \pi]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - T(x)| < \epsilon.$$

$\triangleright$ В силу теоремы 6 в качестве требуемого тригонометрического многочлена $T(x)$ можно взять сумму Фейера с соответствующим номером. $\triangleleft$

Т е о р е м а 8 (В е й е р ш т р а с с). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\epsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon. \tag{51.70}$$

$\triangleright$ Отобразим линейно отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{51.71}$$

Положим

$$f^*(t) \overset{\text{def}}{=} f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Продолжим заданную так на отрезке $[0, \pi]$ функцию f^* четным образом:

$$f^*(t) = f^*(-t), \qquad t \in [-\pi, 0).$$

Так как по условиям теоремы функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция f^* непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и в силу ее четности $f^*(-\pi) = f^*(\pi)$. Поэтому, согласно теореме 7, для любого $\epsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен $T(t)$, что

$$|f^*(t) - T(t)| < \epsilon/2, \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi. \tag{51.72}$$

Тригонометрический многочлен $T(t)$, являясь конечной линейной комбинацией синусов и косинусов кратных дуг, раскладывается в степенной ряд

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

сходящийся на всей числовой оси и, следовательно, равномерно сходящийся на любом конечном отрезке (п. 41.1), в частности на отрезке $[-\pi, \pi]$. Поэтому для выбранного $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что если

$$P(t) = \sum_{n=0}^{n_\epsilon} c_n t^n,$$

то алгебраический многочлен $P(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|T(x) - P(t)| < \epsilon/2, \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi. \tag{51.73}$$

Из (51.72) и (51.73) вытекает, что

$$|f^*(t) - P(t)| \leqslant$$

$$\leqslant |f^*(t) - T(t)| + |T(t) - P(t)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \qquad (51.74)$$

Найдя t из равенства (51.71),

$$t = \pi \frac{x - a}{b - a}, \qquad (51.75)$$

и заметив, что $f^*\left(\pi \dfrac{x-a}{b-a}\right) = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, получим, подставив (51.75) в (51.74),

$$\left| f(x) - P\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \epsilon, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

где, очевидно, $P\left(\pi \dfrac{x-a}{b-a}\right)$ — многочлен от x. Искомый многочлен найден. ◁

Отметим, что всякое измерение может быть сделано лишь с определенной точностью, поэтому практически принципиально невозможно установить, что любой нарисованный график непрерывной функции не является графиком многочлена.

З а м е ч а н и е. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то согласно теореме Вейерштрасса (см. теорему 7) существует последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$, равномерно сходящаяся на отрезке $[a, b]$ к функции f:

$$P_n(x) \underset{[a,\, b]}{\rightrightarrows} f(x) \qquad (51.76)$$

(чтобы получить такую последовательность, достаточно обозначить через $P_n(x)$ многочлен, удовлетворяющий условию (51.70) при $\epsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$), и, таким образом, функция f оказывается представимой в виде суммы равномерно сходящегося на отрезке $[a, b]$ ряда

$$f(x) = P_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(x) - P_n(x)]. \qquad (51.77)$$

Очевидно и обратное: всякая функция, являющаяся пределом равномерно сходящейся на некотором отрезке последовательности многочленов, является непрерывной на этом отрезке (теорема 7 из п. 40.4). Иначе говоря, условие (51.76), или, что то же самое, условие (51.77), является необходимым и достаточным для того, чтобы функция была непрерывной. Тем самым всякая непрерывная на отрезке функция может быть записана с помощью формулы вида (51.77).

§ 52. Функциональные пространства

52.1. Метрические пространства. Одним из основных свойств n-мерных евклидовых пространств является то, что в них для любых двух точек x и y определено расстояние $\rho(x, y)$, удовлетворяющее трем условиям:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) для любых точек x и y имеет место равенство $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) для любых трех точек x, y и z выполняется неравенство (называемое неравенством треугольника)

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z). \tag{52.1}$$

Иногда удается определить функцию, удовлетворяющую этим условиям на парах элементов некоторого множества, которое не является евклидовым пространством. Подобное множество называется метрическим пространством.

Определение 1. *Если для произвольной упорядоченной пары (x, y) элементов x и y множества X определена функция $\rho(x, y)$, удовлетворяющая условиям* 1), 2) *и* 3), *то множество X называется **метрическим пространством**.*

*Функция $\rho(x, y)$ называется **расстоянием**, или **метрикой**. Элементы метрического пространства называются обычно его точками.*

Примеры. 1. Числовая прямая $\mathbf{R}$ является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.

2. Множество всех комплексных чисел $\mathbf{C}$ является метрическим пространством с расстоянием $\rho(z, w) = |z - w|$, $z \in \mathbf{C}$, $w \in \mathbf{C}$.

3. Арифметическое действительное евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

4. Множество $B(X)$ всех действительных ограниченных на некотором множестве X функций образует метрическое пространство *) с расстоянием

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \psi(x)|, \quad \varphi \in B(X), \quad \psi \in B(X). \tag{52.2}$$

---

*) B – первая буква английского слова boundedness – ограниченность.

▷ Действительно, выполнение в этом случае условий 1) и 2) для расстояния (52.2) очевидно. Докажем, что расстояние (52.2) удовлетворяет и третьему условию (52.1). Для любых трех функций φ, ψ и ω, принадлежащих множеству $B(X)$, и любого $x \in X$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x) - \omega(x)| = |[\varphi(x) - \psi(x)] + [\psi(x) - \omega(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \omega(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \psi(x)| + \sup_{x \in X} |\psi(x) - \omega(x)|.$$

Перейдя в левой части этого неравенства к верхней грани, получим

$$\sup_{x \in X} |\varphi(x) - \omega(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |\varphi(x) - \psi(x)| + \sup_{x \in X} |\psi(x) - \omega(x)|,$$

т. е. согласно (52.2)

$$\rho(\varphi, \omega) \leqslant \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \omega).$$

В случае $X = [a, b]$ множество $B(X)$ вместо $B([a, b])$ будет обозначаться $B[a, b]$. ◁

5. Множество $CL[a, b]$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций является метрическим пространством *) с расстоянием

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx \tag{52.3}$$

▷ Очевидно, $\rho(\varphi, \psi) \geqslant 0$. Если $\rho(\varphi, \psi) = 0$, т. е.

$$\int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx = 0,$$

то, поскольку $|\varphi(x) - \psi(x)|$ является неотрицательной непрерывной функцией, для всех $x \in [a, b]$ выполняется равенство (см. свойство 9 в п. 33.1) $|\varphi(x) - \psi(x)| = 0$. Это означает, что для всех точек $x \in [a, b]$ имеет место равенство $\varphi(x) = \psi(x)$.

Если $\varphi \in CL[a, b]$, $\psi \in CL[a, b]$ и $\omega \in CL[a, b]$, то, интегрируя по отрезку $[a, b]$ неравенство

$$|\varphi(x) - \omega(x)| \leqslant |\varphi(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \omega(x)|,$$

получим

$$\int_a^b |\varphi(x) - \omega(x)|\, dx \leqslant \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx + \int_a^b |\psi(x) - \omega(x)|\, dx,$$

---

*) Обозначение $CL[a, b]$ происходит от первых букв латинского слова continuum — непрерывность и фамилии французского математика А. Лебега (1875–1941).

т. е. в силу (52.3)

$$\rho(\varphi, \omega) \leq \rho(\varphi, \psi) + \rho(\psi, \omega) \quad \triangleleft$$

Заметим, что множество всех интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$ функций уже не будет образовывать метрического пространства, если попытаться и в этом случае задать расстояние между функциями по формуле (52.3), так как здесь из равенства $\int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)|\, dx = 0$ уже не будет следовать равенство $\varphi(x) = \psi(x)$ для всех точек $x \in [a, b]$.

Метрические пространства, элементами которых являются функции, называются *функциональными метрическими пространствами*. Примерами таких пространств являются пространства $B(X)$ и $CL\,[a, b]$.

Всякое подмножество метрического пространства является также метрическим пространством с тем же самым расстоянием и называется *подпространством* исходного пространства.

Например, множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$, будучи подмножеством действительных чисел $\mathbf{R}$, является метрическим пространством с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$, $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$.

Если X и Y – метрические пространства и отображение $f\colon X \to Y$ является биекцией, т. е. взаимно однозначно отображает множество X на множество Y и сохраняет расстояние (для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется равенство $\rho(f(x), f(x')) = \rho(x, x')$), то отображение f называется *изометрией*, или *изометрическим отображением X на Y*, а метрические пространства X и Y – *изометрическими*.

Например, если на геометрической плоскости, на которой, как обычно, расстоянием между двумя ее точками A и B является длина отрезка с концами в точках A и B ($\rho(A, B) = |AB|$), задать прямоугольную декартову систему координат и каждой геометрической точке A сопоставить ее координаты (x, y), то получим отображение $f(A) = (x, y)$ геометрической плоскости на арифметическую плоскость, т. е. на множество упорядоченных пар действительных чисел, на котором расстояние между точками (x, y) и (x', y') определяется по формуле

$$\rho((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Можно показать, что f является изометрическим отображением геометрической плоскости на арифметическую и что, следовательно, эти плоскости изометричны.

В дальнейшем, как правило, изометрические метрические пространства не будут различаться.

Определение 2. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется* с х о д я щ е й с я к т о ч к е *x этого простран-*

ства, если $\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, x) = 0$. *В этом случае пишут*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Рассмотрим, что означает сходимость последовательности функций в пространстве $B(X)$ (см. пример 4). Если $\varphi_n \in B(X)$, $\varphi \in B(X)$ и в смысле метрики пространства $B(X)$ имеет место $\lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi$, то в силу (52.2) это означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| = 0,$$

а это есть не что иное, как определение равномерной сходимости. Таким образом, сходимость в пространстве $B(X)$ означает равномерную сходимость.

Рассмотрим еще сходимость в пространстве $CL[a, b]$ (пример 5). Последовательность функций $\varphi_n \in CL[a, b]$ сходится к функции $\varphi \in CL[a, b]$ в пространстве $CL[a, b]$, если

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx = 0.$$

Мы уже встречались с подобного рода сходимостью в п. 51.2, правда, в случае, когда функции φ_n были ступенчатыми и потому, вообще говоря, разрывными.

Определение 3. *Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется* ***фундаментальной***, *или* ***последовательностью Коши***, *если для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$ выполняется неравенство*

$$\rho(x_n, x_m) < \epsilon.$$

Лемма 1. *Если последовательность точек метрического пространства сходится, то она является фундаментальной последовательностью.*

$\triangleright$ Если в метрическом пространстве $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, то согласно определению 2 для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех номеров $n > n_\epsilon$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x) < \epsilon/2$. Поэтому, если $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$, то

$$\rho(x_n, x_m) \underset{(52.1)}{\leqslant} \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная. $\triangleleft$

Определение 4. *Метрическое пространство называется* ***полным***, *если всякая его фундаментальная последовательность сходится.*

Пространства действительных чисел, комплексных чисел, евклидовы пространства $\mathbf{R}^n$ являются примерами полных пространств, поскольку для них имеет место критерий Коши сходимости последовательностей (условие, что последовательность удовлетворяет условию Коши, совпадает по определению с условием фундаментальности последовательности).

Множество рациональных чисел является примером неполного пространства. В самом деле, пусть, например, числа $x_n \in \mathbf{Q}$, $n = 1, 2, \ldots$, являются соответственно нижними десятичными приближениями порядка n числа $\sqrt{2}$. Тогда, поскольку в пространстве действительных чисел $\mathbf{R}$ последовательность $\{x_n\}$ сходится к $\sqrt{2}$, то она фундаментальная в $\mathbf{R}$, а следовательно, и в $\mathbf{Q}$. В силу же того, что предел сходящейся в $\mathbf{R}$ последовательности единствен, и того, что $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела в $\mathbf{Q}$.

Примером полного функционального метрического пространства является пространство $B(X)$ (пример 4). Действительно, сходимость в пространстве $B(X)$ означает равномерную сходимость. Отсюда, согласно критерию Коши равномерной сходимости (теорема 1 из п. 40.2), вытекает, что всякая фундаментальная в пространстве $B(X)$ последовательность равномерно сходится, а так как предел равномерно сходящейся последовательности ограниченных функций также является ограниченной функцией, то этот предел принадлежит пространству $B(X)$, что и означает полноту пространства $B(X)$.

Пусть множество X представляет собой компакт, лежащий в пространстве $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $C(X)$ пространство всех непрерывных на X функций. Если $f \in C(X)$, то функция f ограничена (теорема 1 из п. 21.1), следовательно, $C(X) \subset B(X)$. Множество $C(X)$, будучи подмножеством метрического пространства $B(X)$, само является метрическим пространством, а так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также является непрерывной функцией (теорема 7 из п. 40.4), то пространство $C(X)$ является полным подпространством полного пространства $B(X)$.

С помощью понятия расстояния в любом метрическом пространстве совершенно аналогично случаю n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ вводятся понятия ϵ-окрестности, открытого множества, точки прикосновения, предельной, изолированной и граничной точек, замыкания множества и замкнутого множества. Переносятся на случай произвольных метрических пространств и все утверждения, сделанные в § 19, при доказательстве которых использовались лишь три свойства расстояния. Мы сохраним принятые в § 19 обозначения: $U(x)$ для окрестности точки x и $\overline{E}$ для замыкания множества E, лежащего в рассматриваемом метрическом пространстве.

Определение 5. *Подмножество E метрического пространства X называется **плотным в пространстве** X, если его замыкание $\overline{E}$ совпадает со всем пространством X: $\overline{E} = X$.*

О п р е д е л е н и е 6. *Полное метрическое пространство* X^* *называется* *п о п о л н е н и е м метрического пространства* X, *если* X *содержится в* X^* *и плотно в нем*: $X \subset X^*$ *и* $\overline{X} = X^*$.

Прежде чем рассматривать вопрос о пополнении метрических пространств, докажем одну простую лемму.

Л е м м а 2. *Для любых четырех точек* x, y, u, v *метрического пространства* X *имеет место неравенство* (*называемое неравенством четырехугольника*)

$$|\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leqslant \rho(x, u) + \rho(y, v). \tag{52.4}$$

▷ В самом деле, применив дважды неравенство треугольника, получим

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, u) + \rho(u, y) \leqslant \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y).$$

Отсюда

$$\rho(x, y) - \rho(u, v) \leqslant \rho(x, u) + \rho(v, y).$$

Аналогично,

$$\rho(u, v) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x, u) + \rho(v, y).$$

Из последних двух неравенств следует неравенство (52.4). ◁

Т е о р е м а 1. *Для всякого метрического пространства существует его пополнение.*

▷ Пусть дано метрическое пространство X. Построение его пополнения, которое обозначим через X^*, разобьем на несколько шагов.

1. К о н с т р у к ц и я X^*. Последовательности $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0. \tag{52.5}$$

В этом случае будем писать $\{x_n\} \sim \{y_n\}$.

Рассмотрим множество X^*, состоящее из классов x^* эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей пространства X:

$$X^* = \{x^*\},$$

$$x^* = \{\{x_n\}\},$$

где $\{x_n\}$ – фундаментальные в пространстве X последовательности, причем, если $\{x_n\} \in x^* \in X^*$ и $\{y_n\} \in y^* \in X^*$, то $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ в том и только том случае, если $x^* = y^*$.

2. О п р е д е л е н и е р а с с т о я н и я в X^*. Пусть $x^* \in X^*$, $y^* \in X^*$, $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$. Положим

$$\rho^*(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n). \tag{52.6}$$

Покажем, что это определение корректно, т. е. что указанный предел существует и не зависит от выбора указанных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ соответственно в классах x^* и y^*.

Применив неравенство (52.4) к точкам x_m, y_m, x_n, y_n, получим

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_m, y_n). \tag{52.7}$$

Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – по условию фундаментальные, поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \rho(y_m, y_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Следовательно, при $m > n_\epsilon$ и $n > n_\epsilon$ из (52.7) имеем

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

т. е. числовая последовательность $\{\rho(x_n, y_n)\}$ – фундаментальная и потому, согласно критерию Коши, сходится. Таким образом, предел (52.6) действительно всегда существует.

Если $\{x_n'\} \in x^*$ и $\{y_n'\} \in y^*$, то в силу доказанного существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n')$. Из неравенства четырехугольника (52.4), примененного к точкам x_n', y_n', x_n, y_n, следует, что

$$|\rho(x_n', y_n') - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_n', x_n) + \rho(y_n, y_n').$$

Согласно же определению (52.5) для эквивалентных последовательностей $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$ и $\{y_n\} \sim \{y_n'\}$ имеют место равенства

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_n') = 0.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} |\rho(x_n', y_n') - \rho(x_n, y_n)| = 0$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n', y_n') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$

т. е. действительно значение функции $\rho^*(x^*, y^*)$ не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$.

3. Проверка свойств расстояния для функции ρ^*. Пусть $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$. Из неравенств $\rho(x_n, y_n) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, предельным переходом при $n \to \infty$ получим в силу (52.6) неравенство $\rho^*(x^*, y^*) \geqslant 0$. Условие $\rho^*(x^*, y^*) = 0$ в силу того же определения (52.6)

равносильно условию $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, что согласно определению (52.5) эквивалентных последовательностей означает, что последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ эквивалентны, т. е. принадлежат одному и тому же классу Иначе говоря, $x^* = y^*$.

Далее,

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(y_n, x_n) = \rho^*(y^*, x^*).$$

Наконец, если еще $\{z_n\} \in z^* \in X^*$, то, перейдя к пределу в неравенстве

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

получим $\rho(x^*, y^*) \leqslant \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*)$.

Таким образом, функция ρ^* действительно является метрикой на множестве X^*.

4. Изометричность вложения X в X^*. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ точку $x^* \in X^*$, содержащую стационарную последовательность $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$ (очевидно, она является фундаментальной), и обозначим это соответствие символом f, т. е. $f(x) = x^*$. Покажем, что для любых $x \in X$ и $y \in X$ выполняется условие $\rho^*(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$.

Действительно, если $x^* = f(x)$, $y^* = f(y)$, то $\{x, x, \ldots, x, \ldots\} \in x^*$, $\{y, y, \ldots, y, \ldots\} \in y^*$. Поэтому в формуле (52.6) в качестве последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in x^*$ можно взять последовательность $x_n = x$, $y_n = y$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда

$$\rho^*(x^*, y^*) \underset{(52.6)}{=} \lim_{n \to \infty} \rho(x, y) = \rho(x, y).$$

Из этого равенства следует, в частности, что если $x^* = f(x)$, $y^* = f(y)$, то при $x \neq y$ и $x^* \neq y^*$. Отождествим точку $x^* = f(x)$ с точкой x, тогда получим, что множество X является подмножеством метрического пространства X^*.

5. Плотность X в X^*. Пусть $x^* \in X$ и $\{x_n\} \in x^*$. Рассматривая x_n, $n = 1, 2, \ldots$, как точки пространства X^* (см. 4), покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*.$$

В формуле (52.6) расстояния $\rho^*(x_n, x^*)$ возьмем для точки $x_n \in X^*$ стационарную последовательность $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$, для точки x^* – данную последовательность $\{x_n\}$, в которой для удобства индекс n заменим на m; получим $\{x_m\} \in x^*$, тогда

$$\rho^*(x_n, x^*) \underset{(52.6)}{=} \lim_{m \to \infty} \rho(x_n, x_m). \tag{52.8}$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная, то для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$ имеет место неравенство $\rho(x_n, x_m) < \epsilon$. Перейдя в нем к пределу при $m \to \infty$, в силу (52.8) при любом $n > n_\epsilon$ получим $\rho^*(x_n, x^*) \leqslant \epsilon$. Это и означает, что

$$\lim_{n \to \infty} \rho^*(x_n, x^*) = 0, \tag{52.9}$$

т. е. что произвольно выбранная точка $x^* \in X^*$ является пределом последовательности $\{x_n\}$ точек пространства X (и именно любой последовательности $\{x_n\} \in x^*$). Следовательно, подпространство X плотно в X^*.

6. Полнота пространства X^*. Пусть $\{x_n^*\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве X^*. В силу плотности пространства X в X^* (см. 5) для любого натурального n существует такая точка $x_n \in X$, что

$$\rho^*(x_n, x_n^*) < \frac{1}{n}. \tag{52.10}$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальная. В самом деле,

$$\rho(x_m, x_n) = \rho^*(x_m, x_n) \leqslant \rho^*(x_m, x_m^*) + \rho^*(x_m^*, x_n^*) +$$

$$+ \rho^*(x_n^*, x_n) \underset{(52.10)}{<} \frac{1}{m} + \rho^*(x_m^*, x_n^*) + \frac{1}{n}.$$

Пусть $\epsilon > 0$ произвольно фиксировано. Тогда в силу фундаментальности последовательности $\{x_n^*\}$ и равенства $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех $m > n_\epsilon$, $n > n_\epsilon$ выполняются неравенства

$$\rho(x_m^*, x_n^*) < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{3}.$$

Поэтому при $m > n_\epsilon$ и $n > n_\epsilon$ имеем

$$\rho^*(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Это и означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$.

Пусть x^* – такая точка пространства X^*, что $\{x_n\} \in x^*$. Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n^* = x^*$. Действительно,

$$\rho^*(x_n^*, x^*) \leqslant \rho^*(x_n^*, x_n) + \rho(x_n, x^*) \underset{(52.10)}{<} \frac{1}{n} + \rho(x_n, x^*).$$

Отсюда в силу (52.9) получим

$$\lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n^*, x^*) = 0,$$

т. е. последовательность $\{x_n^*\}$ — сходящаяся.

Итак, X — полное пространство. ◁

Замечание. Наличие полноты метрического пространства является важным обстоятельством при решении многих задач, в частности тех, которые решаются методом последовательных приближений. Если в результате n-го шага отыскания приближенного решения получается элемент x_n, принадлежащий некоторому пространству X, то обычно при последующих шагах получаются в конце концов все более и более точные приближения искомого решения, т. е. элементы x_n "сближаются друг с другом", точнее, образуют фундаментальную последовательность. Если пространство X — полное, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу x, который и является, как правило, точным решением задачи.

Нетрудно привести пример элементарной задачи подобного типа, не имеющей решения в силу неудачного выбора пространства, в котором ищется решение. Рассмотрим в пространстве $C[-1, 1]$ непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций подмножество, состоящее из всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1, 1]$ функций. Обозначим это подмножество $CD[-1, 1]$. Оно, будучи подмножеством метрического пространства $C[-1, 1]$, в свою очередь является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{[-1, 1]} |f(x) - g(x)|, \qquad f \in CD[-1, 1], \quad g \in CD[-1, 1].$$

Рассмотрим задачу отыскания в пространстве $CD[-1, 1]$ функции f, график которой проходит через точки $M_1 = (-1, 1)$, $O = (0, 0)$, $M_2 = (1, 1)$ и имеет наименьшую длину. Поскольку отрезок прямой является кратчайшим путем, соединяющим две точки, то в классе всех спрямляемых кривых, проходящих через точки M_1, O, M_2, график функции $y = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, является кратчайшей кривой наименьшей длины. Однако функция $y = |x|$ не является непрерывно дифференцируемой и потому не принадлежит пространству $CD[-1, 1]$. Вместе с тем в пространстве $CD[-1, 1]$, очевидно, существуют функции, которые сколь угодно близки в смысле метрики $C[-1, 1]$ к функции $y = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, и длины графиков которых также сколь угодно близки к длине графика этой функции. Графики таких функций можно получить, делая достаточно малые закругления около вершины угла графика функции $y = |x|$ (рис. 190). Уменьшая раз за разом эти закругления, получим последовательность функций $\{f_n\}$, сходящуюся в пространстве $C[-1, 1]$ к функции $y = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Из сходимости этой последовательности следует ее фундаментальность в пространстве $C[-1, 1]$, а потому и в его подпространстве $CD[-1, 1]$. Поскольку предел последовательности в метрическом пространстве единствен и в случае последовательности $\{f_n\}$ он не принадлежит $CD[-1, 1]$, то эта последовательность не имеет предела в пространстве $CD[-1, 1]$, а поставленная задача не имеет решения.

Отметим еще, что теорема 1 важна тем, что она показывает, что если в некотором метрическом пространстве X при решении какой-то задачи получилась фундаментальная последовательность приближенных решений, то всегда можно указать такое метрическое пространство $X^* \supset X$ (быть может, $X^* = X$), в котором эта последовательность сходится к некоторому элементу $x^* \in X^*$, а это, как уже отмечалось, обычно означает, что

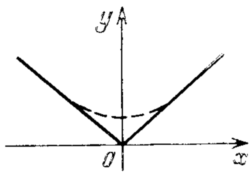


Рис. 190

x^* является точным решением. Таким образом, теорема 1 показывает, что в рассматриваемом случае всегда существует пространство, в котором решение задачи существует.

Для числовых функций, определенных на метрических пространствах, естественным образом определяется понятие непрерывности.

Определение 7. *Если X – метрическое пространство, то функция f: $X \to \mathbf{C}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Подобным же образом вводится понятие непрерывности функций нескольких переменных: например, если X и Y – метрические пространства, то функция f: $X \times Y \to \mathbf{C}$ называется непрерывной в точке $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если для любых последовательностей $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$, имеет место

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

52.2. Линейные пространства. Напомним некоторые основные понятия линейной алгебры, необходимые для дальнейшего.

Определение 8. *Множество X называется линейным (комплексным или действительным) пространством, если* *для любой пары его элементов $x \in X$, $y \in X$ и любой пары чисел λ, μ (соответственно комплексных или действительных) определена линейная операция $\lambda x + \mu y$, обладающая естественными свойствами* (см. курс линейной алгебры).

Как известно, конечная система $x_1, \ldots, x_n$ элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация обращается в нуль только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю.

Определение 9. *Система $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — произвольное множество, называемое в этом случае множеством индексов), называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.*

Определение 10. *Если X — линейное пространство, а $E \subset X$, то множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов множества E называется его линейной оболочкой и обозначается через $L(E)$.*

52.3. Нормированные и полунормированные пространства. Рассмотрим теперь пространства, являющиеся обобщением конечномерных векторных пространств.

Определение 11. *Линейное пространство X называется нормированным, если на нем задана такая действительная функция $\|x\|$, называемая нормой, что*

1° $\|x\| \geqslant 0$ *для всех* $x \in X$;

2° (*однородность*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *для всех $x \in X$ и всех чисел λ (комплексных или действительных)*;

3° (*неравенство треугольника*) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *для всех $x \in X$ и $y \in Y$*;

4° *если* $\|x\| = 0$, *то* $x = 0$.

Если в качестве чисел берутся комплексные числа, то линейное нормированное пространство называется *комплексным*, а если только действительные, то — *действительным.*

Если для функции $\|x\|$ выполняются условия 1°, 2° и 3°, то эта функция называется *полунормой*, а линейное пространство X — *полунормированным.* Согласно этому определению норма пространства является, конечно, и полунормой. Норма (полунорма) $\|\cdot\|$ пространства X обозначается также $\|\cdot\|_X$.

Из свойства 2° полунормы следует, что $\|0\| = 0$. Действительно,

$$\|0\| = \|0x\| = 0\|x\| = 0, \qquad x \in X. \tag{52.11}$$

Для полунормы (нормы) справедливо неравенство

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leqslant \|x - y\| \tag{52.12}$$

(здесь x и y — произвольные элементы пространства X).

$\triangleright$ В самом деле,

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \underset{3^\circ}{\leqslant} \|x-y\| + \|y\|,$$

поэтому

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|, \tag{52.13}$$

а так как x и y равноправны, то и

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|. \tag{52.14}$$

Из (52.13) и (52.14) непосредственно следует (52.12). $\triangleleft$

Примеры. 1. В линейном пространстве действительных чисел $\mathbf{R}$ функция $\|x\| \overset{\text{def}}{=} |x|$, $x \in \mathbf{R}$, является нормой.

2. В линейном пространстве комплексных чисел $\mathbf{C}$ функция $\|z\| \overset{\text{def}}{=} |z|$, $z \in \mathbf{C}$, является нормой.

3. В n-мерном действительном арифметическом векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ длина вектора

$$|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

является нормой: $|x| = \|x\|$.

4. Определим n-мерное комплексное арифметическое векторное пространство $\mathbf{C}^n$. Его точками z по определению являются конечные упорядоченные совокупности $(z_1, \ldots, z_n)$ из n комплексных чисел: $z_k \in \mathbf{C}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Если $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbf{C}^n$, а $\lambda \in \mathbf{C}$, $\mu \in \mathbf{C}$, то

$$\lambda z + \mu w \overset{\text{def}}{=} (\lambda z_1 + \mu w_1, \ldots, \lambda z_n + \mu w_n).$$

В силу этого определения множество $\mathbf{C}^n$ является линейным пространством. Длина $|z|$ вектора $z \in \mathbf{C}^n$ определяется по формуле

$$|z| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}.$$

Длина $|z|$ вектора $z \in \mathbf{C}^n$ является нормой в пространстве $\mathbf{C}^n$: $|z| = \|z\|$.

Функция, определенная на некотором множестве функций, называется обычно *функционалом.*

5. В линейном метрическом пространстве $B(X)$ действительных ограниченных функций, определенных на некотором множестве X, функционал

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_X |f(x)|, \qquad f \in B(X), \tag{52.15}$$

является нормой.

Проверка того, что функции $\|\cdot\|$ в примерах 1–5 действительно являются нормами, проводится без труда и предоставляется читателю.

6. В линейном пространстве абсолютно интегрируемых на интервале (a, b), конечном или бесконечном, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, функций f функционал

$$\| f \| \overset{\mathrm{def}}{=} \int_a^b | f(x) | \, dx \tag{52.16}$$

является полунормой. Это полунормированное пространство обозначается $RL = RL\,(a, b)$ *).

Свойства полунормы для функционала (52.16) легко проверяются. Покажем, что этот функционал не является нормой. Выберем произвольно точку x_0 так, чтобы $a < x_0 < b$, и положим

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для всех } x \neq x_0, \\ 1 & \text{для } \quad x = x_0. \end{cases} \tag{52.17}$$

Тогда, очевидно, $\| f \| \underset{\substack{(52.16)\\(52.17)}}{=} 0$ и вместе с тем функция f не является нулем пространства $RL\,(a, b)$.

7. В линейном пространстве $CL\,(a, b)$ непрерывных на интервале (a, b) функций f, принадлежащих пространству $RL\,(a, b)$, функционал (52.16) является уже нормой. Действительно, если функция f непрерывна на интервале (a, b) и хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$ имеет место неравенство $f(x_0) \neq 0$, то $\int_a^b | f(x) | \, dx > 0$. Это следует из свойства 7 определенного интеграла из п. 33.1 и из определения несобственного интеграла из п. 38.1. Поэтому если $\| f \| = 0$, то $f = 0$.

8. Пусть X – компакт в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $C(X)$ линейное пространство непрерывных на X функций. В этом пространстве функционал

$$\| f \| = \max_{x \in X} | f(x) |, \qquad f \in C(X),$$

является нормой.

Лемма 3. *Если X – нормированное пространство, то функция*

$$\rho(x, y) \overset{\mathrm{def}}{=} \| x - y \| \tag{52.18}$$

является метрикой в X.

---

*) Обозначение RL происходит от первых букв фамилий математиков Б. Римана и А. Лебега.

▷ Действительно, для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство $\rho(x, y) = \|x - y\| \geqslant 0$, причем, если $\rho(x, y) = 0$, т. е. $\|x - y\| = 0$, то $x - y \underset{4^\circ}{=} 0$ и, следовательно, $x = y$. Далее,

$$\rho(x, y) \underset{(52.18)}{=} \|x - y\| \underset{2^\circ}{=} \|y - x\| \underset{(52.18)}{=} \rho(y, x).$$

Наконец, для любых трех точек x, y и z пространства X имеем

$$\rho(x, y) \underset{(52.18)}{=} \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \underset{3^\circ}{\leqslant}$$

$$\underset{3^\circ}{\leqslant} \|x - z\| + \|z - y\| \underset{(52.18)}{=} \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, функция (52.18) удовлетворяет всем свойствам расстояния. ◁

Итак, всякое нормированное пространство является и метрическим пространством с метрикой (52.18). Очевидно, что в примерах 1, 2, 3, 5 и 7 метрики, порожденные указанными там нормами, совпадают с метриками этих пространств, рассмотренными в п. 52.1.

О п р е д е л е н и е 12. *Если $\|\cdot\|$ – полунорма (в частности, норма) в линейном пространстве X, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$, то последовательность $\{x_n\}$ называется* с х о д я щ е й с я к т о ч к е x *по данной полунорме (соответственно по норме). В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, или $x_n \to x$ при $n \to \infty$, и говорят, что точка x является* п р е д е л о м п о с л е д о в а т е л ь н о с т и x_n.

Л е м м а 4. *Если X – полунормированное пространство, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, и*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, \tag{52.19}$$

то равенство

$$\lim_{n \to \infty} x_n = y \tag{52.20}$$

возможно тогда и только тогда, когда

$$\|x - y\| = 0. \tag{52.21}$$

С л е д с т в и е. *В нормированном пространстве у последовательности может существовать только единственный предел.*

▷ Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Если имеют место равенства (52.19) и (52.20), то, заметив, что

$$\|x - y\| \leqslant \|x - x_n\| + \|x_n - y\|,$$

и перейдя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, в силу равенства

$$\lim_{n \to \infty} \| x - x_n \| \underset{(52.19)}{=} 0 \underset{(52.20)}{=} \lim_{n \to \infty} \| x_n - y \|$$

получим $\| x - y \| = 0$.

Наоборот, если выполнены условия (52.19) и (52.21), то

$$\| x_n - y \| \leqslant \| x_n - x \| + \| x - y \| \underset{(52.21)}{=} \| x_n - x \|,$$

а так как $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - x \| \underset{(52.19)}{=} 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - y \| = 0$, т. е. выполнено условие (52.20).

Если X – нормированное пространство, то равенство (52.21) равносильно равенству $x = y$ (свойство 4° нормы). $\lhd$

В полунормированном пространстве из условия $\| x - y \| = 0$ не следует, вообще говоря, что $x = y$. Поэтому у "сходящейся" в полунормированном пространстве последовательности может быть несколько разных пределов.

Определение 13. *Подмножество E полунормированного (нормированного) пространства X называется* ограниченным, *если существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство*

$$\| x \| \leqslant c,$$

иначе говоря, если множество полунорм элементов из E является ограниченным числовым множеством.

Лемма 5. *В полунормированном пространстве последовательность, имеющая предел, ограничена.*

$\rhd$ Пусть $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Для $\epsilon = 1$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\| x_n - x \| < 1$, поэтому

$$\| x_n \| = \| (x_n - x) + x \| \leqslant \| x_n - x \| + \| x \| < 1 + \| x \|.$$

Положим $c = \max \{ \| x_1 \|, \ldots, \| x_{n_0} \|, 1 + \| x \| \}$, тогда очевидно, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ будет выполняться неравенство $\| x_n \| \leqslant c$. $\lhd$

Определение 14. *Числовая функция $f\colon X \to \mathbf{R}$ (или $f\colon X \to \mathbf{C}$) называется* непрерывной по полунорме *в точке $x_0 \in X$, если для любой последовательности $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, имеет место*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Аналогично определяется непрерывность функции $f(x, y)$ двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, когда X и Y – полунормированные пространства:

функция $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ (или $f\colon X \times Y \to \mathbf{C}$) называется *непрерывной в точке* $(x_0, y_0) \in X \times Y$, если для любых последовательностей $x_n \in X$, $y_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$ таких, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$, имеет место

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0).$$

Пример 9. Полунорма является непрерывной функцией во всех точках полунормированного пространства.

$\triangleright$ В самом деле, если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, то в силу неравенства $|\,\|x_n\| - \|x_0\|\,| \underset{(52.12)}{\leqslant} \|x_n - x_0\|$ получим $\lim\limits_{n \to \infty} |\,\|x_n\| - \|x_0\|\,| = 0$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$. Это и означает непрерывность полунормы. $\triangleleft$

Определение 15. *Полное нормированное пространство называется* **банаховым пространством** *)*.

Полнота понимается здесь в смысле метрики (52.18), порожденной нормой пространства.

Примерами банаховых пространств являются пространства $B(X)$ (пример 5), а если X — компакт в $\mathbf{R}^n$, то и пространство $C(X)$ (пример 8).

Имеет место аналогичная теорема 1 о пополнении метрического пространства теорема о включении всякого нормированного пространства в банахово, причем так, что исходное пространство плотно в этом банаховом пространстве.

Теорема 2. *Всякое нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.*

Это банахово пространство по аналогии со случаем метрических пространств называется *пополнением* исходного нормированного пространства.

$\triangleright$ Пусть X — нормированное пространство и X^* — его пополнение как метрического пространства в смысле метрики, порожденной нормой (см. теорему 1 в п. 52.1). Определим в пространстве X^* линейную операцию и норму с помощью предельного перехода следующим образом. Если $x^* \in X^*$, $y^* \in X$, а λ и μ — числа (действительные или комплексные в зависимости от того, какое рассматривается пространство X, действительное или комплексное), то, поскольку множество X плотно в пространстве X^*, т.е. $\overline{X} = X^*$, существуют такие последовательности $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*, \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = y^*. \tag{52.22}$$

---

*) С. Банах (1895–1945) — польский математик.

Положим

$$\lambda x^* + \mu y^* \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} (\lambda x_n + \mu y_n), \tag{52.23}$$

$$\| x^* \| \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \| x_n \|. \tag{52.24}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что эти определения имеют смысл, т. е. что написанные пределы существуют, что они не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, удовлетворяющих условиям (52.22), что в силу определения (52.23) пространство X^* является линейным и что функция (52.24) обладает всеми свойствами нормы (см. определение 11).

Например, поскольку в силу условий (52.22) последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то они являются фундаментальными. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$ выполняются неравенства

$$\| x_n - x_m \| < \epsilon, \qquad \| y_n - y_m \| < \epsilon.$$

Следовательно, при $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$ имеет место неравенство

$$\| (\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x_m + \mu y_m) \| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \, \| x_n - x_m \| + |\mu| \, \| y_n - y_m \| < (|\lambda| + |\mu|)\epsilon,$$

а так как число ϵ произвольно, λ и μ фиксированы, то это означает, что последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ — фундаментальная и потому (в силу полноты пространства X^*) сходящаяся. Таким образом, предел (52.23) существует.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n' = x^*$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n' = y^*$, то

$$\| x_n' - x_n \| \leqslant \| x_n' - x^* \| + \| x^* - x_n \| \to 0,$$

$$\| y_n' - y_n \| \leqslant \| y_n - y^* \| + \| y^* - y_n \| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\| (\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x_n' + \mu y_n') \| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \, \| x_n - x_n' \| + |\mu| \, \| y_n - y_n' \| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

откуда следует, что действительно предел (52.23) не зависит от выбора последовательностей, удовлетворяющих условиям (52.22).

Аналогично доказывается корректность определения (52.24) нормы в пространстве X^*. $\lhd$

52.4. Гильбертовы пространства. В дальнейшем в этом параграфе будут рассматриваться только действительные линейные пространства, и это не будет специально оговариваться.

О п р е д е л е н и е 16. *Пусть X – линейное пространство. Числовая функция, обычно обозначаемая (x, y), $x \in X$, $y \in X$, заданная на множестве упорядоченных пар точек пространства X, называется* с к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м, *если для любых точек $x \in X$, $y \in X$ и любых чисел $\lambda \in \mathbf{R}$, $\mu \in \mathbf{R}$ выполняются следующие условия:*

$1°$ *коммутативность:* $(x, y) = (y, x)$;

$2°$ *линейность* $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, y) + \mu (y, z)$;

$3°$ $(x, x) \geqslant 0$;

$4°$ *если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Функция (x, y), удовлетворяющая условиям $1°$, $2°$ и $3°$, называется *почти скалярным произведением.* Очевидно, что скалярное произведение является и почти скалярным.

Л е м м а 6. *Если (x, y) – почти скалярное произведение в линейном пространстве X, то для любых $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}. \tag{52.25}$$

Это неравенство называется *неравенством Коши – Буняковского.*

С л е д с т в и е 1. *Для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство (называемое неравенством треугольника)*

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}. \tag{52.26}$$

С л е д с т в и е 2. *Если (x, y) – почти скалярное (в частности, скалярное) произведение в линейном пространстве X, то функция*

$$\| x \| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)} \tag{52.27}$$

является полунормой (соответственно нормой) в этом пространстве, и неравенство Коши – Буняковского (52.25) *можно записать в виде*

$$|(x, y)| \leqslant \| x \| \| y \|. \tag{52.28}$$

$\triangleright$ Докажем лемму. В силу свойства $3°$ почти скалярного произведения для любого действительного числа t имеем

$$(tx + y, tx + y) \geqslant 0.$$

Применив свойства $1°$ и $2°$ почти скалярного произведения, получим

$$t^2 (x, x) + 2t (x, y) + (y, y) \geqslant 0.$$

Если $(x, x) = 0$, то $2t(x, y) + (y, y) \geqslant 0$. Поскольку это неравенство выполняется для любого действительного t, то $(x, y) = 0$ (в самом деле, если бы было $(x, y) \neq 0$, то на числа t налагалось бы ограничение

$t > -\dfrac{(y, y)}{2(x, y)}$). Следовательно, неравенство (52.25) имеет место: обе его части обращаются в нуль.

Если же $(x, x) \neq 0$, то дискриминант получившегося квадратного относительно t трехчлена неположителен, т.е.

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

а это равносильно неравенству (52.25).

Докажем теперь неравенство (52.26):

$$(x+y,\ x+y) = |(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)| \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + |(x, y)| + |(y, x)| + (y, y) \underset{(52.25)}{\leqslant}$$
$$\underset{(52.25)}{\leqslant} (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = (\sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)})^2.$$

Свойства полунормы (соответственно нормы) для функции $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ проверяются непосредственно. Например,

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda|\, \|x\|,$$
$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y, x+y)} \underset{(52.26)}{\leqslant} \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)} = \|x\| + \|y\|. \ \triangleleft$$

Примеры. 1. Множество действительных чисел $\mathbf{R}$ является пространством со скалярным произведением, если под скалярным произведением (x, y) чисел x и y понимать их обычное произведение: $(x, y) = xy$.

2. В арифметическом действительном линейном n-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$ функция

$$(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n),$$
$$x_i \in \mathbf{R}, \quad y_i \in \mathbf{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

является скалярным произведением.

3. Обозначим через $RL_2 = RL_2(a, b)$ множество функций f, заданных на некотором конечном или бесконечном интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, для каждой из которых существует правильное разбиение (п. 51.1) этого интервала и интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx$ сходится.

Легко проверить, что множество $RL_2(a, b)$ является линейным пространством. Докажем, что функционал

$$(f, g) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx, \qquad f \in RL_2(a, b), \quad g \in RL_2(a, b). \tag{52.29}$$

является почти скалярным произведением.

Прежде всего, если $f \in RL_2(a, b)$ и $g \in RL_2(a, b)$, то в силу числового неравенства

$$|\alpha\beta| \leqslant \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}, \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \beta \in \mathbf{R},$$

для любой точки $x \in (a, b)$, в которой определены функции f и g, выполняется неравенство

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x)),$$

а поэтому, согласно признаку сравнения для сходимости интегралов, из конечности интегралов $\int\limits_a^b f^2(x)dx$ и $\int\limits_a^b g^2(x)dx$ следует сходимость (и даже абсолютная) интеграла $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$. Таким образом, определение (52.29) имеет смысл. Свойства почти скалярного произведения следуют в этом случае из свойств интеграла. Аналогично тому, как это было сделано в примере 6 п. 52.3 для пространства $RL(a, b)$, нетрудно показать, что полунорма

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in RL_2(a, b), \tag{52.30}$$

не является нормой на пространстве $RL_2(a, b)$ и, следовательно, почти скалярное произведение (52.29) не есть скалярное произведение в этом пространстве. Действительно, для функции f, равной тождественно нулю на всей числовой оси, кроме одной точки x_0, $a < x_0 < b$, в которой $f(x_0) = 1$, будем иметь $\|f\|^2 = (f, f) = \int\limits_a^b f^2(x)dx = 0$, а вместе с тем функция f не является нулем в пространстве $RL_2(a, b)$.

Отметим, что неравенство Коши – Буняковского в пространстве $RL_2(a, b)$ имеет вид

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)dx}. \tag{52.31}$$

Почти скалярное произведение (52.29) на подпространстве $CL_2(a, b)$ пространства $RL_2(a, b)$, состоящем из непрерывных на интервале (a, b) функций f, для которых сходится интеграл $\int\limits_a^b f^2(x)dx$, является уже скалярным произведением, а полунорма (52.30) – нормой (это доказывается аналогично тому, как это делалось в примере 7 п. 52.3 для пространства $CL(a, b)$).

Зафиксируем теперь некоторый конечный или бесконечный интервал (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и рассмотрим на множестве всех заданных на этом интервале функций функционал

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in (a,b)} |f(x)|. \tag{52.32}$$

Как мы знаем (пример 5 из п. 52.3), этот функционал на пространстве $B(a, b)$ всех ограниченных на интервале (a, b) функций является нормой, а для любой неограниченной на (a, b) функции f, очевидно, $\|f\|_\infty = +\infty$.

Рассмотрим далее множество функций, заданных на интервале (a, b), для каждой из которых существует правильное разбиение, и на этом множестве функционалы

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{52.33}$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}. \tag{52.34}$$

Выше было показано, что функционал (52.33) является полунормой в пространстве $RL(a, b)$ и нормой в $CL(a, b)$ (см. примеры 6 и 7 в п. 52.3). Заметим, что пространства $RL(a, b)$ и $CL(a, b)$ обозначаются также соответственно $RL_1(a, b)$ и $CL_1(a, b)$.

Функционал (52.34) является полунормой в пространстве $RL_2(a, b)$ и нормой в $CL_2(a, b)$ (пример 3 в этом пункте). Если же функция f не принадлежит пространству $RL(a, b)$, но для нее существует правильное разбиение интервала (a, b), то $\|f\|_1 = +\infty$, а если не принадлежит $RL_2(a, b)$, то $\|f\|_2 = +\infty$.

Сходимость последовательности функций по полунорме (52.33) называется *сходимостью в среднем*, а сходимость по полунорме (52.34) — *сходимостью в смысле среднего квадратичного*.

В дальнейшем, когда будет идти речь о функционалах (52.33) и (52.34), всегда будет предполагаться, что рассматриваются функции, для которых существуют правильные разбиения интервала (a, b), и это не будет специально оговариваться.

Нижеследующая лемма устанавливает соотношения между функционалами $\|f\|_\infty$, $\|f\|_1$ и $\|f\|_2$.

Лемма 7. *Если функция f задана на конечном интервале (a, b), то*

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2, \tag{52.35}$$

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty. \tag{52.36}$$

Следствие. *Если последовательность функций равномерно сходится на конечном интервале к некоторой функции, то она сходится к этой функции на том же интервале и в смысле среднего квадратичного, а если последовательность функций сходится на конечном интервале в смысле среднего квадратичного к некоторой функции, то она сходится и в среднем к той же функции.*

$\triangleright$ Докажем неравенство (52.35). Пусть $f \in RL_2(a, b)$. Поскольку $1 \in \in RL_2(a, b)$, то в силу неравенства Коши – Буняковского (см. (52.31) при $g(x) \equiv 1$) получим

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \cdot 1\, dx \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \sqrt{\int_a^b dx} = \sqrt{b-a}\, \|f\|_2.$$

Если же $f \notin RL_2(a, b)$, то $\|f\|_2 = +\infty$ и неравенство (52.35) очевидно. Докажем теперь неравенства (52.36). Пусть $f \in B(a, b)$; тогда

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \leqslant \sqrt{\int_a^b [\sup_{(a,b)} |f(x)|]^2\, dx} =$$

$$= \sqrt{\int_a^b \|f\|_\infty^2\, dx} = \|f\|_\infty \sqrt{\int_a^b dx} = \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty.$$

Если же $f \notin B(a, b)$, то $\|f\|_\infty = +\infty$ и неравенство (52.36) очевидно. $\triangleleft$ Следствие непосредственно вытекает из неравенства

$$\|f_n - f\|_1 \underset{(52.35)}{\leqslant} \sqrt{b-a}\, \|f_n - f\|_2 \underset{(52.36)}{\leqslant} (b-a) \|f\|_\infty.$$

Замечание 1. В лемме 7 является существенным условием то, что рассматриваемый промежуток ограничен. Для неограниченных промежутков полунорма $\|f\|_1$ не оценивается через полунорму $\|f\|_2$, которая в свою очередь не оценивается через норму $\|f\|_\infty$. Не имеет места и аналог следствия из леммы: последовательность функций может равномерно сходиться на бесконечном промежутке и не сходиться на нем ни в среднем, ни в смысле среднего квадратичного или сходиться в смысле среднего квадратичного, но не сходиться в среднем.

Замечание 2. Можно рассматривать и пространства функций, заданных не на интервалах, а на промежутках других типов, например на отрезках: пространства $RL[a, b]$, $RL_2[a, b]$, $CL[a, b]$, $CL_2[a, b]$.

Если (a, b) – конечный интервал, то отображение, при котором каждой функции, заданной на отрезке $[a, b]$, ставится в соответствии ее сужение на интервал (a, b), отображает пространства $RL[a, b]$, $RL_2[a, b]$ соответственно на пространства $RL(a, b)$, $RL(a, b)$ (т.е. является сюръекцией) и сохраняет полунорму, так как значение интеграла от a до b некоторой функции не зависит от значений этой функции или от их отсутствия в точках $x = a$ и $x = b$. При сужении на интервал (a, b) непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций уже не получится отображений пространств $CL[a, b]$, $CL_2[a, b]$ соответственно на пространства $CL(a, b)$, $CL_2(a, b)$, а только в эти пространства (не каждую функцию, непрерывную на интервале (a, b), можно продолжить с сохранением непрерывности на отрезок $[a, b]$), но зато эти отображения являются взаимно однозначными (т.е. инъекциями), так как они сохраняют значение норм.

В полунормированном пространстве можно рассматривать не только конечные суммы его элементов, но и бесконечные, т.е. ряды, членами которых являются элементы данного пространства X. При этом сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, определяется естественным образом как предел частичных сумм этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n. \tag{52.37}$$

Лемма 8. *Почти скалярное произведение непрерывно по порождаемой им полунорме.*

Следствие 1. *Если в линейном пространстве X с почти скалярным произведением сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, то для любого элемента $y \in X$ справедливо равенство*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y), \tag{52.38}$$

т.е. сходящийся в пространстве X ряд можно почленно умножить в смысле почти скалярного произведения на элемент этого пространства (в результате чего из ряда, сходящегося в смысле полунормы, порожденной почти скалярным произведением пространства X, получится сходящийся числовой ряд).

Следствие 2. *Если (a, b) – конечный интервал, $f_n(x) \in RL_2(a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится в пространстве $RL_2(a, b)$, то*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx, \tag{52.39}$$

т.е. ряды функций, принадлежащих пространству $RL_2(a, b)$, сходящиеся в смысле среднего квадратичного, можно почленно интегрировать.

▷ Пусть X – линейное пространство с почти скалярным произведением, $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in X$, $y \in X$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$; тогда

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| =$$

$$= |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \leqslant |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \underset{(52.28)}{\leqslant}$$

$$\underset{(52.28)}{\leqslant} \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \to 0$$

при $n \to \infty$, ибо последовательность $\{y_n\}$ ограничена, поскольку она сходящаяся (см. лемму 5) и $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y). \tag{52.40}$$

Лемма доказана. Докажем следствие 1.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\right) \underset{(52.37)}{=} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n, y\right) \underset{(52.40)}{=}$$

$$\underset{(52.40)}{=} \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} x_n, y\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_n, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n, y).$$

Докажем теперь следствие 2. Применим формулу (52.38) к ряду элементов пространства $RL_2(a, b)$, взяв за элемент y, на который почленно умножается данный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n(x) \in RL_2(a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$, функцию, тождественно равную единице (в силу конечности интервала (a, b) очевидно, что $1 \in RL_2(a, b)$):

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) 1\,dx \underset{(52.29)}{=}$$

$$\underset{(52.29)}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n, 1\right) \underset{(52.38)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (f_n, 1) \underset{(52.29)}{=}$$

$$\underset{(52.29)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx. \triangleleft$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда интервал (a, b) – конечный, то из равномерной сходимости на нем последовательности функций пространства $RL_2(a, b)$ следует ее сходимость в смысле среднего квадратичного (следствие леммы 7). Поэтому, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, $f_n \in RL_2(a, b)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится на конечном интервале (a, b), то этот ряд можно почленно интегрировать (следствие 2 леммы 8). При несколько более сильных ограничениях (непрерывность членов ряда и равномерная сходимость ряда на отрезке $[a, b]$) это утверждение было доказано раньше другим методом (см. теорему 8 в п. 40.4).

Как мы видели, скалярное произведение (x, y) порождает норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, а норма – метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Таким образом, всякое линейное пространство со скалярным произведением является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}. \tag{52.41}$$

О п р е д е л е н и е 17. *Полное линейное пространство со скалярным произведением называется* г и л ь б е р т о в ы м п р о с т р а н с т в о м.

Здесь полнота пространства понимается в смысле метрики (52.41), порожденной скалярным произведением.

Т е о р е м а 3. *Всякое линейное пространство со скалярным произведением содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве.*

Это гильбертово пространство называется *пополнением* исходного пространства со скалярным произведением.

▷ Если X – линейное пространство со скалярным произведением, то обозначим через X^* его пополнение как метрического пространства (см. теорему 1 в п. 52.1). Линейную операцию определим в пространстве X по формуле (52.23) п. 52.3. Скалярное произведение элементов пространства X^* также определим с помощью предельного перехода следующим образом. Пусть $x^* \in X^*$, $y^* \in X^*$; поскольку $\bar{X} = X^*$, то существуют такие последовательности $x_n \in X$, $y_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$. Положим

$$(x^*, y^*) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n). \qquad (52.42)$$

Легко проверить, что при заданных элементах x^* и y^* определение (52.42) имеет смысл, т.е. указанный предел существует и не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, и что из выполнения свойств $1^\circ - 4^\circ$ скалярного произведения в пространстве X в силу свойств предела следует наличие этих свойств у функции (x^*, y^*), т.е. она является скалярным произведением в пространстве X^*. ◁

З а м е ч а н и е*. Для комплексных линейных пространств также существуют понятия скалярных и почти скалярных произведений. Их определения отличаются только первым условием определения 16 этих произведений в действительных линейных пространствах: вместо выполнения условия коммутативности $(x, y) = (y, x)$ требуется, чтобы для всех элементов x и y рассматриваемого линейного пространства выполнялось равенство

$$(x, y) = \overline{(y, x)},$$

где черта над числом обозначает, как всегда, число, сопряженное стоящему под чертой комплексному числу.

Из этого свойства следует, что для любого комплексного числа λ имеет место равенство

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}\,(x, y).$$

В самом деле,

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda}\,\overline{(y, x)} = \bar{\lambda}(x, y).$$

Для комплексных линейных пространств сохраняются многие свойства действительных пространств. Например, для скалярного и полускалярного (в частности, для скалярного) произведений в комплексном линейном пространстве остается верным неравенство Коши– Буняковского (52.25), каждое комплексное линейное пространство со скалярным произведением можно дополнить, превратив его в полное пространство, в котором исходное пространство будет плотным множеством.

Докажем для примера неравенство Коши – Буняковского для почти скалярного произведения в комплексном линейном пространстве.

Пусть X – комплексное линейное пространство, $x \in X$, $y \in X$ и λ – произвольно фиксированное комплексное число. Согласно свойству 3° определения 16 почти скалярного произведения имеем

$$(x+\lambda y,\ x+\lambda y) \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$(x, x)+\lambda(y, x)+\bar{\lambda}(x, y)+\lambda\bar{\lambda}(y, y) \geqslant 0.$$

Если $(x, x)=(y, y)=0$, то

$$\lambda(y, x)+\bar{\lambda}(x, y) \geqslant 0.$$

Выбрав $\lambda=-\overline{(x, y)}$, получим

$$-2|(x, y)|^2 \geqslant 0,$$

что возможно лишь тогда, когда $(x, y)=0$. В этом случае неравенство Коши– Буняковского выполняется очевидным образом, так как обе его части обращаются в нуль.

Если же $(y, y) \neq 0$, то, выбрав $\lambda=-\dfrac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}$, будем иметь

$$(x, x)-\frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}(y, x)-\frac{(x, y)}{(y, y)}(x, y)+\frac{(x, y)\overline{(x, y)}}{(y, y)^2}(y, y) \geqslant 0,$$

или

$$(x, x)(y, y)-(x, y)\overline{(x, y)}-\overline{(x, y)}(x, y)+(x, y)\overline{(x, y)} \geqslant 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$(x, x)(y, y)-(x, y)\overline{(x, y)} \geqslant 0,$$

т.е. имеет место неравенство Коши–Буняковского

$$|(x, y)|^2 \leqslant(x, x)(y, y).$$

Случай, когда $(y, y)=0$, но $(x, x) \neq 0$, не нуждается в специальном доказательстве, так как легко сводится к уже рассмотренному.

52.5. Пространство L_2. Займемся изучением вопроса о полноте функциональных пространств.

Лемма 9. *Пространство $CL_2[a, b]$ не является гильбертовым.*

$\triangleright$ Приведем пример фундаментальной, но не сходящейся в пространстве $CL_2[-1, 1]$ последовательности. Пусть (рис. 191)

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{n}, \\ nx, \text{ если } -\dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{n}, \\ 1, \text{ если } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{52.43}$$

Функции f_n, очевидно, непрерывны. Покажем, что они образуют в пространстве $CL_2[-1, 1]$ фундаментальную последовательность. Считая, например, что $m > n$, получим

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx \leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f_m(x)|]^2 dx \underset{(52.43)}{\leqslant}$$

$$\underset{(52.43)}{\leqslant} 4 \int_{-1/n}^{1/n} dx = \frac{8}{n}.$$

Очевидно, что если задано $\epsilon > 0$, то достаточно выбрать $n_\epsilon > 8/\epsilon^2$, чтобы при $n > n_\epsilon$ и $m > n_\epsilon$ выполнялось неравенство $\|f_n - f_m\|_2 < \epsilon$, а это и означает фундаментальность последовательности $\{f_n\}$.

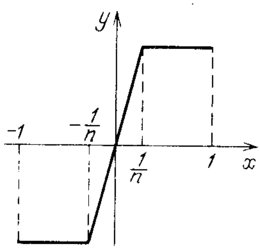


Рис. 191

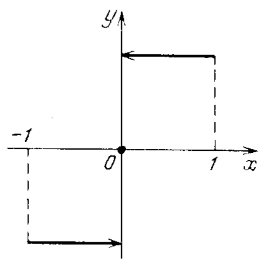


Рис. 192

В каждой точке отрезка $[-1, 1]$ эта последовательность сходится к функции (рис. 192)

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1, \text{ если } -1 \leqslant x < 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к функции f и по полунорме пространства $RL_2[-1, 1]$:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 dx =$$

$$= \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-1/n}^{1/n} [|f_n(x)| + |f(x)|]^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_2 = 0. \tag{52.44}$$

Функция f разрывна и, следовательно, не принадлежит пространству $CL_2[-1, 1]$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ не может одновременно сходиться в пространстве $RL_2[-1, 1]$ и к непрерывной функции. Допустим противное: пусть существует такая непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция g, что

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - g\|_2 = 0. \tag{52.45}$$

Поскольку

$$\|f - g\|_2 = \|(f - f_n) + (f_n - g)\|_2 \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\| \underset{\substack{(52.44)\\(52.45)}}{\to} 0$$

при $n \to \infty$ и разность $f - g$ не зависит от n, то $\|f - g\|_2 = 0$ (это равенство следует, конечно, и из леммы 4 п. 52.3), т.е.

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0.$$

Но

$$0 \leqslant \int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2 dx \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

$$0 \leqslant \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{0} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0, \quad \int_{0}^{1} |f(x) - g(x)|^2 dx = 0. \tag{52.46}$$

Функции f и g непрерывны на полуинтервалах $[-1, 0)$ и $(0, 1]$, поэтому равенства (52.46) возможны только в том случае, если

$$f(x) = g(x) \quad \text{при } x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

но тогда

$$\lim_{x \to -0} g(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to +0} g(x),$$

т.е. функция g не непрерывна в точке $x = 0$.

Итак, последовательность $\{f_n\}$ непрерывных функций является фундаментальной в пространстве $CL_2[-1, 1]$, но не имеет в нем предела. Это и означает, что пространство $CL_2[-1, 1]$ – неполное. $\lhd$

Пространство CL_2, как и всякое пространство со скалярным произведением, можно пополнить до гильбертова пространства. Прежде чем приступить к изучению этого пополнения, установим плотность пространства непрерывных и финитных на интервале (a, b) функций в пространстве $RL_2(a, b)$ по полунорме последнего. Здесь плотность понимается в смысле следующего определения (оно необходимо, так как пространство $RL_2(a, b)$ не является метрическим).

Определение 18. *Подмножество Y полунормированного пространства X называется плотным в пространстве X по его полунорме, если для любого элемента $x \in X$ и любого $\epsilon > 0$ существует такой элемент $y \in Y$, что $\|x - y\| < \epsilon$.*

Очевидно, что в случае, когда полунорма является нормой, понятие плотности подмножества в пространстве в смысле определения 18 совпадает с понятием его плотности в смысле метрики, порожденной нормой рассматриваемого пространства.

Лемма 10. *Пусть $f \in RL_2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует такая ступенчатая функция φ, что*

$$\operatorname{supp} \varphi \subset (a, b)$$

(т.е. функция φ – финитная на интервале (a, b)) и

$$\|f - \varphi\|_2 < \epsilon.$$

$\rhd$ Пусть функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi, \eta] \subset (a, b)$ (общий случай абсолютно интегрируемой функции легко сводится к этому случаю; см. п. 51.1). Зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. В силу сходимости интеграла $\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$ для этого ϵ существуют такие ξ и η, $a < \xi < \eta < b$, что

$$\int\limits_a^\xi f^2(x)\,dx + \int\limits_\eta^b f^2(x)\,dx < \frac{\epsilon^2}{2}. \tag{52.47}$$

На отрезке $[\xi, \eta]$ функция f интегрируема по Риману, следовательно, она ограничена на нем, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant c, \qquad \xi \leqslant x \leqslant \eta. \tag{52.48}$$

Согласно теореме 2 п. 51.2 (см. там же замечание 2) для функции f существует ступенчатая функция φ, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\operatorname{supp}\varphi \subset [\xi, \eta], \tag{52.49}$$

$$|\varphi(x)| \leqslant c, \quad \xi \leqslant x \leqslant \eta, \tag{52.50}$$

$$\int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\epsilon^2}{4c}. \tag{52.51}$$

Поэтому

$$\|f - \varphi\|_2^2 = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx =$$

$$= \int_a^\xi f^2(x)\,dx + \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|^2 dx + \int_\eta^b f^2(x)\,dx \underset{(52.47)}{<}$$

$$\underset{(52.47)}{<} \frac{\epsilon^2}{2} + \int_\xi^\eta |f(x) - \varphi(x)|\,[|f(x)| + |\varphi(x)|]\,dx \underset{\substack{(52.48)\\(52.50)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(52.48)\\(52.50)}}{\leqslant} \frac{\epsilon^2}{2} + 2c\int_\xi^\eta |f(x) - g(x)|\,dx \underset{(52.51)}{<} \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} = \epsilon^2. \tag{52.52}$$

Из выполнения условий (52.49) и (51.52) следует утверждение леммы (рис. 193). ◁

Л е м м а 11. *Если φ – ступенчатая функция,* $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *то для любого $\epsilon > 0$ существует такая непрерывная и финитная на интервале (a, b) функция g, что*

$$\|\varphi - g\|_2 < \epsilon. \tag{52.53}$$

▷ Поскольку всякая ступенчатая функция с носителем, лежащим в интервале (a, b), является линейной комбинацией характеристических функций

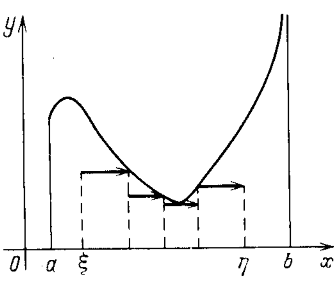


Рис. 193

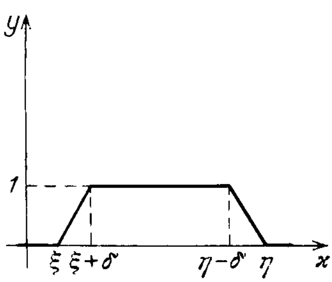


Рис. 194

конечных полуоткрытых промежутков типа $[\xi, \eta)$, то лемму достаточно доказать для характеристической функции χ произвольно фиксированного полуинтервала $[\xi, \eta)$, $a < \xi < \eta < b$. Пусть задано $\epsilon > 0$. Возьмем $\delta > 0$ так, что выполнялось условие

$$\delta < \min \left\{ \frac{\epsilon^2}{2}, \frac{\eta - \xi}{2} \right\},$$

и рассмотрим непрерывную кусочно линейную функцию g, график которой изображен на рис. 194 жирной линией. Эта функция g финитна на интервале (a, b), так как

$$\operatorname{supp} g(x) = [\xi, \eta] \subset (a, b)$$

и для нее во всех точках $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \chi(x) - g(x) \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\| \chi - g \|_2^2 = \int_\xi^\eta | \chi(x) - g(x) |^2 dx =$$

$$= \int_\xi^{\xi+\delta} (\chi(x) - g(x))^2 dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta} (\chi(x) - g(x))^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\xi^{\xi+\delta} dx + \int_{\eta-\delta}^{\eta} dx = 2\delta < \epsilon^2,$$

т.е. для функции $\varphi = \chi$ выполняется условие (52.53). $\triangleleft$

Обозначим через $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, подмножество полунормированного пространства $RL_2(a, b)$, состоящее из непрерывных и финитных на конечном или бесконечном интервале (a, b) функций.

Ясно, что любая непрерывная финитная на конечном или бесконечном интервале (a, b) функция принадлежит пространству $RL_2(a, b)$, так как в силу непрерывности и финитности функции интеграл от ее квадрата всегда конечен.

Примером непрерывной финитной на интервале функции является функция, построенная при доказательстве леммы 11.

Там, где это не приведет к недоразумению, мы не будем отличать функцию из пространства $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, заданную, согласно определению финитной на интервале функции (определение 3 из п. 51.2), на интервале (a, b), от ее продолжения нулем на всю числовую ось.

Т е о р е м а 4. *Множество $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, плотно в линейном полунормированном пространстве $RL_2(a, b)$ по его полунорме.*

$\triangleright$ Пусть $f \in RL_2(a, b)$ и произвольно фиксировано $\epsilon > 0$. Согласно лемме 10 существует такая финитная на интервале (a, b) ступенчатая функция φ, что

$$\|f-\varphi\|_2 < \frac{\epsilon}{2}. \tag{52.54}$$

Для этой функции φ, согласно лемме 11, существует такая непрерывная и финитная на интервале (a, b) функция g, т.е. функция $g \in \overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, что

$$\|\varphi - g\|_2 < \frac{\epsilon}{2}. \tag{52.55}$$

Поэтому

$$\|f-g\|_2 \leqslant \|f-\varphi\|_2 + \|\varphi - g\|_2 \underset{\substack{(52.54)\\(52.55)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Это и означает, что множество $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$ плотно в пространстве $RL_2(a, b)$. $\lhd$

В силу очевидного включения

$$\overset{\circ}{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b) \subset RL_2(a, b)$$

множество $CL_2(a, b)$ непрерывных на интервале (a, b) функций, интеграл от квадрата которых сходится, также плотно в пространстве $RL_2(a, b)$. В самом деле, всегда, если множество A, лежащее в некотором полунормированном пространстве X, плотно в этом пространстве, то и любое множество B такое, что $A \subset B \subset X$, также плотно в X.

Все сказанное справедливо для любого конечного или бесконечного промежутка. Отметим, что в случае отрезка всякая функция, непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$, так же как и ее квадрат, интегрируема по Риману на этом отрезке, а следовательно, заведомо принадлежит пространству $RL_2[a, b]$. Иначе говоря, для отрезка множество всех непрерывных на нем функций совпадает с множеством $CL_2[a, b]$ непрерывных с интегрируемым квадратом функций. Отсюда следует, что в случае отрезка множество всех непрерывных на нем функций плотно в пространстве $RL_2[a, b]$.

При использовании пространства RL_2 неудобным является то обстоятельство, что в нем определено почти скалярное, а не скалярное произведение, и поэтому, в частности, его нельзя дополнить до гильбертова пространства. Однако существует простая конструкция отождествления некоторых его элементов между собой, которая приводит к пространству со скалярным произведением. Опишем эту конструкцию.

Функции $f_1 \in RL_2(a, b)$ и $f_2 \in RL_2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, назовем эквивалентными и будем писать $f_1 \sim f_2$, если

$$\|f_1 - f_2\|_2 = 0. \tag{52.56}$$

Обозначим через $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2(a, b)$ множество, элементами которого являются классы эквивалентных функций пространства $RL_2 = RL_2(a, b)$.

Пусть F и G — элементы пространства $\widetilde{RL}_2$: $F = \{f\}$, $f \in RL_2$, и $G = \{g\}$, $g \in RL_2$. Выберем в классах F и G по элементу, $f \in F$, $g \in G$, и определим для любых чисел λ и μ элемент $\lambda F + \mu G$ как класс эквивалентных функций, содержащий функцию $\lambda f + \mu g$,

$$\lambda F + \mu G \overset{\text{def}}{=} \{\lambda f + \mu g\}, \tag{52.57}$$

а скалярное произведение F и G положим равным почти скалярному произведению элементов f и g:

$$(F, G) \overset{\text{def}}{=} (f, g). \tag{52.58}$$

Эти определения корректны, т.е. не зависят от выбора элементов $f \in F$ и $g \in G$. В самом деле, если $f_1 \in F$ и $g_1 \in G$, то, заметив, что $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, а следовательно,

$$\|f - f_1\|_2 = 0, \qquad \|g - g_1\|_2 = 0,$$

получим

$$\|(\lambda f + \mu g) - (\lambda f_1 + \mu g_1)\|_2 = \|\lambda(f - f_1) + \mu(g - g_1)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \, \|f - f_1\|_2 + |\mu| \, \|g - g_1\|_2 = 0.$$

Это и означает, что

$$\lambda f + \mu g \sim \lambda f_1 + \mu g_1.$$

Из того, что пространство RL_2 — линейное, вытекает, что операция $\lambda F + \mu G$ является линейной, т.е. что пространство $\widetilde{RL}_2$ — также линейное. Покажем, что произведение (52.58) не зависит от выбора представителей f, f_1 и g, g_1 соответственно в классах F и G эквивалентных функций:

$$|(f, g) - (f_1, g_1)| = |(f, g) - (f_1, g) + (f_1, g) - (f_1, g_1)| \leqslant$$

$$\leqslant |(f - f_1, g)| + |(f_1, g - g_1)| \underset{(52.28)}{\leqslant}$$

$$\underset{(52.28)}{\leqslant} \|f - f_1\|_2 \|g\|_2 + \|f_1\|_2 \|g - g_1\|_2 = 0,$$

а поэтому $(f, g) = (f_1, g_1)$.

Покажем, что (F, G) является скалярным произведением. Свойства 1°–3° скалярного произведения (см. определение 16) следуют из аналогичных свойств почти скалярного произведения (f, g), $f \in F$, $g \in G$, и определения (52.58). Докажем, что для произведения (F, G) выполняется и четвертое свойство скалярного произведения. Действительно, если $(F, F) = 0$ и $f \in F$, то $(f, f) \underset{(52.58)}{=} (F, F) = 0$. Следовательно,

$$\|f - 0\|_2 = \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = 0,$$

т.е. $f \sim 0$, а это и означает, что $F = 0$.

Итак, множество $\widetilde{RL}_2 = \widetilde{RL}_2(a, b)$ с введенными в нем операциями (52.57) и (52.58) является линейным пространством со скалярным произведением. Можно показать, что и оно не является гильбертовым (т.е. оно неполное).

В силу определения скалярного произведения (52.58) в пространстве $\widetilde{RL}_2$ с помощью почти скалярного произведения в пространстве RL_2 норма элемента в $\widetilde{RL}_2$ выражается через полунорму составляющих его эквивалентных функций: если $f \in F \in \widetilde{RL}_2$, то

$$\|F\|_{\widetilde{RL}_2} = \|f\|_{RL_2}. \tag{52.59}$$

В самом деле, $\|F\|_{\widetilde{RL}_2} = \sqrt{(F, F)} \underset{(52.58)}{=} \sqrt{(f, f)} = \|f\|_{RL_2}$.

Замечание 1. Если в классе $F \in \widetilde{RL}_2(a, b)$ эквивалентных функций имеется непрерывная функция $f \in F$, то такая функция единственна. Это следует из того, что если функции f и f_1 непрерывны и эквивалентны, т.е. если $\|f - f_1\|_2 = 0$, что в интегральной записи означает

$$\int_a^b (f(x) - f_1(x))^2 dx = 0,$$

то (независимо от того, является ли написанный интеграл собственным или несобственным) отсюда вытекает, что $f(x) = f_1(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Из этого замечания следует, что отображение, ставящее в соответствие каждой функции $f \in CL_2(a, b)$, т.е. каждой непрерывной с интегрируемым на (a, b) квадратом функции, содержащий ее класс эквивалентных функций $F \in \widetilde{RL}_2(a, b)$ является взаимно однозначным отображением пространства $CL_2(a, b)$ в пространство $\widetilde{RL}_2(a, b)$, т.е. инъекцией $CL_2(a, b)$ в $\widetilde{RL}_2(a, b)$. При этом, согласно данным выше определениям, линейные операции с функциями и скалярное произведение функций пространства $CL_2(a, b)$ совпадают соответственно с линейными операциями и скалярным произведением, примененными к содержащим рассматриваемые функции классам, т.е. к образам этих функций при указанной выше инъекции. Отождествив каждую функцию $f \in CL_2(a, b)$ с содержащим ее классом эквивалентных функций, множество $CL_2(a, b)$ можно рассматривать как подмножество пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$:

$$CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL}_2(a, b).$$

Поскольку множество $\mathring{C}L_2(a, b)$ непрерывных финитных на интервале (a, b) функций является подмножеством множества $CL_2(a, b)$, то

$$\mathring{C}L_2(a, b) \subset CL_2(a, b) \subset \widetilde{RL}_2(a, b). \tag{52.60}$$

Определение 19. *Пополнение пространства $\widetilde{RL}_2(a, b)$ называется* ***лебеговым пространством*** $L_2 = L_2(a, b)$ *("эль два")*.

Т е о р е м а 5. *Пространство* $\overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *плотно в гильбертовом пространстве* $L_2(a, b)$.

С л е д с т в и е. *Пространство* $L_2(a, b)$ *является пополнением пространства* $CL_2(a, b)$.

$\triangleright$ Пусть $H \in L_2(a, b)$. Зададим произвольно $\epsilon > 0$. Поскольку пространство L_2 является пополнением пространства $\widetilde{R}L_2$, то $\widetilde{R}L_2$ плотно в L_2, т.е. $\overline{\widetilde{R}L} = L_2$, и, следовательно, существует такой элемент $F \in \widetilde{R}L_2$, что

$$\|H - F\|_{L_2} < \frac{\epsilon}{2} \, . \tag{52.61}$$

Элемент F представляет собой класс эквивалентных функций пространства RL_2. Пусть f – одна из них: $f \in F$. Тогда $f \in RL_2(a, b)$ и согласно теореме 4 существует такая непрерывная финитная на интервале (a, b) функция g, т.е. такая $g \in \overset{\circ}{C}L_2(a, b)$, что

$$\|f - g\|_{RL_2} < \frac{\epsilon}{2} \, . \tag{52.62}$$

Функция g отождествлена с содержащим ее классом эквивалентных функций и поэтому является элементом пространства $\widetilde{R}L_2$. Следовательно,

$$\|F - g\|_{L_2} = \|F - g\|_{\widetilde{R}L_2} = \|f - g\|_{RL_2} \underset{(52.62)}{<} \frac{\epsilon}{2} \, . \tag{52.63}$$

В результате будем иметь

$$\|H - g\|_{L_2} \leqslant \|H - F\|_{L_2} + \|F - g\|_{L_2} \underset{\substack{(52.61)\\(52.63)}}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \triangleleft$$

Следствие сразу вытекает из включений (52.60), ибо если множество $\overset{\circ}{C}L_2$ плотно в пространстве L_2, то и множество CL_2, содержащее множество $\overset{\circ}{C}L_2$, тем более плотно в L_2.

З а м е ч а н и е 2. Иногда для краткости вместо $f \in RL_2(a, b)$ пишут $f \in L_2(a, b)$, понимая под этим, что у функции f ее квадрат f^2 интегрируем на рассматриваемом промежутке.

З а м е ч а н и е 3. Выше был рассмотрен метод, с помощью которого из пространства с почти скалярным произведением RL_2 посредством отождествления функций $f \in RL_2$ и $g \in RL_2$, удовлетворяющих условию $\|f - g\|_2 = 0$, конструировалось пространство со скалярным произведением $\widetilde{R}L_2$. То, что элементами исходного пространства являлись функции, несущественно: если в произвольном пространстве с почти скалярным произведением отождествить между собой элементы, у которых полунорма их разности равна нулю, то получится пространство со скалярным произведением.

§ 53. Ряды Фурье в гильбертовых пространствах

53.1. Ортонормированные системы. Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением, а $\mathfrak{A}$ – некоторое множество, которое будем называть *множеством индексов.* Система $\{x_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$, $x_\alpha \in X$, называется *ортогональной*, если $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{A}$. Если, кроме того, для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ выполняется условие

$$(x_\alpha, x_\alpha) = 1,$$

то система $\{x_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется *ортонормированной.*

Лемма 1. *Если $\{x_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ – ортогональная система в пространстве со скалярным произведением и для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ выполняется неравенство $x_\alpha \neq 0$, то эта система является линейно независимой системой.*

$\triangleright$ Надо показать, что, каково бы ни было конечное подмножество элементов системы $\{x_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$, его элементы линейно независимы (определение 9 из п. 52.2). Пусть $x_{\alpha_i} \in \{x_\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и существуют числа λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, такие, что

$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0. \tag{53.1}$$

Умножив это равенство скалярно на элемент x_{α_k} (k фиксировано, $k = 1, 2, \dots, n$), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) = 0.$$

Поскольку при $i \neq k$ выполняется равенство $(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_k}) = 0$, то

$$\lambda_k (x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) = 0.$$

По условию $x_{\alpha_k} \neq 0$, следовательно, и $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, поэтому $\lambda_k = 0$. Таким образом, из равенства (53.1) следует, что все числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ равны нулю, а это и означает линейную независимость элементов $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$. $\triangleleft$

Примеры. 1. Тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

ортогональна в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

ортонормирована (см. п. 51.1).

2. Многочлены

$$P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n = 1, 2, \dots,$$

называемые *многочленами Лежандра*, образуют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1, 1]$.

Докажем это. Заметив, что

$$\left.\frac{d^k(x^2-1)^n}{dx^k}\right|_{x=\pm 1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и проинтегрировав последовательно по частям, получим при $0 \leqslant m \leqslant n-1$:

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\,dx = x^m \left.\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\right|_{-1}^{1} -$$

$$- m\int_{-1}^{1} x^{m-1}\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}}\,dx = \ldots = (-1)^m m! \int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\,dx =$$

$$= (-1)^m m! \left.\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\right|_{-1}^{1} = 0, \tag{53.2}$$

ибо $0 \leqslant n-m-1 \leqslant n-1$.

Поскольку любой многочлен $Q_m(x)$ степени не выше m, $m = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, является линейной комбинацией степеней $1, x, x^2, \ldots, x^m$, то из равенства (53.2) следует, что

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

В частности,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

Аналогичными рассуждениями доказывается, что

$$\|P_n\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Л е м м а 2. *Всякий многочлен степени не выше n является линейной комбинацией многочленов Лежандра* $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$.

С л е д с т в и е. *Линейная оболочка степеней* $1, x, x^2, \ldots, x^n$, *т.е. множество всех многочленов степени не выше n, дополненных нулевым многочленом, совпадает с линейной оболочкой многочленов Лежандра*

$$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x). \tag{53.3}$$

▷ Прежде всего заметим, что степени $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы, так как если

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0 \tag{53.4}$$

на каком-то промежутке, то, продифференцировав последовательно n раз равенство (53.4), получим

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0,$$
$$1 \cdot \lambda_1 + 2\lambda_2 x + \ldots + (n-1)\lambda_{n-1} x^{n-2} + n\lambda_n x^{n-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n-1)!\lambda_{n-1} + n(n-1)\ldots 2\lambda_n x = 0,$$
$$n!\lambda_n = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\lambda_n = 0$. Подставив это значение λ_n в предпоследнее равенство, будем иметь $\lambda_{n-1} = 0$. Продолжив этот процесс, получим

$$\lambda_{n-2} = \lambda_{n-3} = \ldots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0,$$

что и означает линейную независимость степеней $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Следовательно, эти степени образуют базис в их линейной оболочке $L(1, x, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n)$, являющейся, очевидно, $(n+1)$-мерным пространством всех многочленов степени не выше n, дополненных нулевым многочленом.

Теперь заметим, что любая система $n + 1$ многочленов, степени которых различны и не превосходят n, т.е. система многочленов $Q_0(x), Q_1(x), \ldots$ $\ldots, Q_n(x)$, где многочлен $Q_k(x)$ имеет степень, равную k, $k = 0, 1, \ldots, n$, образует базис в пространстве $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$. Действительно, если $Q_k(x) = \sum\limits_{m=0}^{k} a_{km} x^m$, то по условию $a_{kk} \neq 0$. Таким образом, многочлены $Q_k(x)$ выражаются через элементы базиса $1, x, x^2, \ldots, x^n$ с помощью треугольной матрицы, диагональные элементы a_{kk} которой не равны нулю, и, следовательно, с помощью невырожденной матрицы. Поэтому многочлены $Q_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, также образуют базис в пространстве $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$.

Многочлены Лежандра $P_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, удовлетворяют указанному условию: многочлен $P_k(x)$ имеет в точности степень k. Поэтому они образуют базис в пространстве $L(1, x, x^2, \ldots, x^n)$, состоящем из всех многочленов степени не выше n и нулевого многочлена. Отсюда и следует, что любой многочлен степени не выше n является линейной комбинацией многочленов Лежандра (53.3). $\lhd$

53.2. Полные системы.

Определение 1. *Пусть X — полунормированное пространство. Система $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ его элементов называется* полной *в нем, если линейная оболочка этой системы плотна в нем* (определение 18 из п. 52.5) *по его полунорме.*

Иначе говоря, полнота системы $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в пространстве X означает, что для любого элемента $x \in X$ и любого $\epsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ этой системы и такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, что

$$\|x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n})\| < \epsilon.$$

Из этого определения следует, что если две системы $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и $\{x_\beta;\ \beta \in \mathfrak{A}\}$ элементов полунормированного пространства имеют одинаковые линейные оболочки, то они одновременно полны или неполны в нем.

Примером полной системы является система всех непрерывных финитных на интервале (a, b) функций в полунормированном пространстве $RL_2(a, b)$ и в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ (см. теоремы 4 и 5 в п. 52.5).

Определение 2. *Полунормированное пространство X называется вложенным в полунормированное пространство Y, если*

1) $X \subset Y$;

2) *существует такая постоянная $c > 0$, называемая константой вложения, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|x\|_Y \leqslant c\|x\|_X. \tag{53.5}$$

В этом случае пишут $X \hookrightarrow Y$.

Отметим, что если X_1 и Y_1 являются соответственно подпространствами пространств X и Y, причем $X_1 \subset Y_1$, то из вложения $X \hookrightarrow Y$ следует, очевидно, вложение $X_1 \hookrightarrow Y_1$ с той же константой.

Примеры. 1. Простейшим примером вложения является тождественное вложение, когда полунорма на пространстве X является сужением полунормы пространства Y, т.е. когда $\|x\|_X = \|x\|_Y$ для всех $x \in X$. Ясно, что в этом случае константа вложения равна единице. Примерами таких вложений являются вложения

$$C[a, b] \hookrightarrow B[a, b], \quad CL_1[a, b] \hookrightarrow RL_1[a, b],$$

$$CL_2[a, b] \hookrightarrow RL_2[a, b], \quad CL_2[a, b] \hookrightarrow L_2[a, b].$$

2. Из неравенства $\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$ (см. лемму 7 в п. 52.4) следует, что имеет место вложение

$$RL_2[a, b] \hookrightarrow RL_1[a, b],$$

а следовательно, и вложение для подпространств непрерывных функций:

$$CL_2[a, b] \hookrightarrow CL_1[a, b]. \tag{53.6}$$

3. Из неравенства $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$ (см. снова лемму 7 в п. 52.4) следует, что если в линейном пространстве $B[a, b] \cap RL_2[a, b]$ взять в качестве нормы норму $\|f\|_\infty$ пространства $B[a, b]$, то будет иметь место вложение

$$B[a, b] \cap RL_2[a, b] \hookrightarrow RL_2[a, b],$$

а следовательно, и вложение

$$C[a, b] \hookrightarrow CL_2[a, b]. \tag{53.7}$$

В примерах 2 и 3 число $\sqrt{b-a}$ является константой рассмотренных вложений.

Вложение пространств обладает, как это легко видеть, свойством транзитивности: если $X \hookrightarrow Y$ и $Y \hookrightarrow Z$, то $X \hookrightarrow Z$. Так, например, из вложений $C[a, b] \hookrightarrow CL_2[a, b]$ и $CL_2[a, b] \hookrightarrow L_2[a, b]$ следует, что

$$C[a, b] \hookrightarrow L_2[a, b]. \tag{53.8}$$

Отметим, что если пространство X вложено в пространство Y, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots, x \in X$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ по полунорме пространства X, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ также и по полунорме пространства Y. Действительно, из неравенства (53.5) следует, что $0 \leqslant \| x_n - x \|_Y \leqslant c \| x_n - x \|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|_Y = 0$.

Описанное свойство вложения называют его *непрерывностью.*

Лемма 3. *Пусть X и Y — полунормированные пространства. Если*

1) *система $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ элементов пространства X полна в нем,*

2) *пространство X вложено в пространство Y: $X \hookrightarrow Y$,*

3) *пространство X плотно в пространстве Y, то система $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ полна в пространстве Y.*

$\triangleright$ Пусть $y \in Y$ и задано $\epsilon > 0$. Поскольку множество X плотно в пространстве Y, то существует такой элемент $x \in X$, что

$$\| y - x \|_Y < \frac{\epsilon}{2}. \tag{53.9}$$

В силу же полноты системы $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в пространстве X существуют конечные множества $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ элементов системы $\{x_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ и чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$\| x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}) \|_X < \frac{\epsilon}{2c}, \tag{53.10}$$

где c — константа вложения $X \hookrightarrow Y$. Поэтому

$$\| y - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}) \|_Y \leqslant \| y - x \|_Y +$$

$$+ \| x - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}) \|_Y \underset{\substack{(53.5)\\(53.9)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(53.5)\\(53.9)}}{\leqslant} \frac{\epsilon}{2} + c \| - (\lambda_1 x_{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}) \|_X \underset{(53.10)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \triangleleft$$

Примеры. 4. Система степеней $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$, согласно теореме Вейерштрасса (см. теорему 7 в п. 51.7), полна в пространстве $C[a, b]$, а в силу вложений (53.6) и (53.7), согласно лемме 3, эта система полна и в пространствах $CL_2[a, b]$, $CL_1[a, b]$ (все пространства $C[a, b]$, $CL_2[a, b]$ и $CL_1[a, b]$ состоят из одних и тех же функций, поэтому условие плотности одного в другом выполняется очевидным образом).

Поскольку пространство $CL_2[a, b]$ плотно в пространстве $L_2[a, b]$ (см. следствие теоремы 5 в п. 52.5), то в силу тождественного вложения $CL_2[a, b] \hookrightarrow L_2[a, b]$, согласно лемме 3, система степеней $1, x, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n, \ldots$ полна в пространстве $L_2[a, b]$.

5. Система полиномов Лежандра полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_1[a, b]$, $CL_2[a, b]$ и $L_2[a, b]$. Это сразу следует из того, что согласно следствию леммы 2 многочлены Лежандра и степени $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ имеют одну и ту же линейную оболочку.

6. Обозначим через $C^*[-\pi, \pi]$ и $C^*L_2[-\pi, \pi]$ подмножества соответственно пространств $C[-\pi, \pi]$ и $CL_2[-\pi, \pi]$, состоящих из таких непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций f, что $f(-\pi) = f(\pi)$. Вспомнив, что пространство $\mathring{C}L_2[-\pi, \pi]$ состоит из таких непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, для которых $\operatorname{supp} f \subset (-\pi, \pi)$ и, следовательно, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, будем иметь

$$\mathring{C}L_2[-\pi, \pi] \subset C^*L_2[-\pi, \pi] \subset L_2[-\pi, \pi].$$

Множество $\mathring{C}L_2[-\pi, \pi]$ плотно в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ (теорема 5 из п. 52.5), поэтому множество $C^*L_2[-\pi, \pi]$ также плотно в $L_2[-\pi, \pi]$.

Тригонометрическая система $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$, согласно теореме Вейерштрасса, полна в пространстве $C^*[-\pi, \pi]$ (теорема 6 из п. 51.7), поэтому в силу вложения

$$C^*[-\pi, \pi] \underset{(53.8)}{\hookrightarrow} L_2[-\pi, \pi]$$

и плотности пространства $C^*L_2[-\pi, \pi]$ в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ тригонометрическая система полна и в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$.

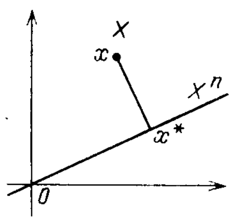


Рис. 195

Из сопоставления приведенных здесь примеров и примеров из п. 53.1 получаются примеры двух о р т о г о н а л ь н ы х полных систем: тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ и системы полиномов Лежандра в пространстве $L_2[-1, 1]$.

53.3. Ряды Фурье. Пусть X – пространство со скалярным произведением, X^n – его некоторое n-мерное подпространство, $x \in X$. Рассмотрим задачу отыскания такого элемента $x^* \in X^n$, что (рис. 195)

$$\|x - x^*\| = \inf_{y \in X^n} \|x - y\|. \tag{53.11}$$

Элемент x^* называется *элементом наилучшего приближения для элемента x в пространстве X^n*. Обозначим через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ какой-либо ортогональный базис в пространстве X^n:

$$(e_j, e_k) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k. \tag{53.12}$$

Тогда всякий элемент $y \in X^n$ можно записать в виде

$$y = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

Использовав это представление элемента $y \in X^n$ и ортогональность базиса $e_1, \ldots, e_n$, получим

$$\| x - y \|^2 = \left(x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j,\ x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right) =$$

$$= (x, x) - 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k (e_j, e_k) =$$

$$= (x, x) - 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, e_k) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 (e_k, e_k) =$$

$$= (x, x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \| e_k \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \| e_k \| \frac{(x, e_k)}{\| e_k \|} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{\| e_k \|^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{\| e_k \|^2} = (x, x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_k \| e_k \| - \frac{(x, e_k)}{\| e_k \|} \right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x, e_k)^2}{(e_k, e_k)}. \tag{53.13}$$

Из полученной формулы следует, что величины $\| x - y \|^2$, а следовательно, и $\| x - y \|$ будут принимать наименьшие значения тогда, когда для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ будут иметь место равенства

$$\lambda_k \| e_k \| - \frac{(x, e_k)}{\| e_k \|} = 0,$$

т.е. когда $\lambda_k = \dfrac{(x, e_k)}{\| e_k \|^2} = \dfrac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$.

Числа $\dfrac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, называются коэффициентами Фурье элемента x по ортогональной системе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и будут обозначаться a_k. Таким образом,

$$a_k \overset{\text{def}}{=} \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)}. \tag{53.14}$$

Если в формуле (53.13) положить $\lambda_k = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то по доказанному величина $\| x - y \|$, $y \in X^n$, примет наименьшее значение (это свойство называется минимальным свойством коэффициентов Фурье), т.е. элемент

$$x^* = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$$

удовлетворяет условию (53.11).

При этом, поскольку $\dfrac{(x,\ e_k)^2}{\| e_k \|^2} = \left(\dfrac{(x,\ e_k)}{\| e_k \|} \right)^2 \| e_k \|^2 = a_k^2 \| e_k \|^2$, то тождество (53.13) примет в этом случае вид

$$\| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \| e_k \|^2 = \| x - x^* \|^2 \geqslant 0. \tag{53.15}$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 1. *Задача* (53.11) *имеет и притом единственное решение*

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \tag{53.16}$$

коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *разложения которого по заданному базису* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *являются коэффициенты Фурье* (53.14) *и для которого выполняется соотношение* (53.15), *т.е.*

$$\| x - x^* \|^2 = \inf_{y \in X^n} \| x - y \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \| e_k \|^2. \tag{53.17}$$

С л е д с т в и е 1. *Элемент*

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \tag{53.18}$$

является элементом наилучшего приближения в пространстве X^n *элемента* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда элемент* $x - x_0$ *ортогонален пространству* X^n *(т.е. ортогонален каждому вектору этого пространства).*

$\triangleright$ Поскольку $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства X^n, то условие ортогональности элемента $x - x_0$ пространству X^n (будем записывать это условие в виде $(x - x_0) \perp X^n$) равносильно ортогональности этого элемента всем векторам указанного базиса:

$$(x - x_0, e_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Вычислим для элемента (53.18) скалярное произведение $(x - x_0, e_k)$:

$$(x - x_0, e_k) = (x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j, e_k) = (x, e_k) - \lambda_k (e_k, e_k) =$$

$$= \left(\frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} - \lambda_k \right) (e_k, e_k) = (a_k - \lambda_k)(e_k, e_k). \tag{53.19}$$

Отсюда следует, что равенство $(x - x_0, e_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ выполняются равенства $\lambda_k = a_k$, т.е. когда x_0 является рассматриваемым элементом наилучшего приближения. $\lhd$

Пусть теперь $\{e_n\}$ – бесконечная ортогональная система в некотором линейном пространстве X со скалярным произведением.

О п р е д е л е н и е 3. *Для всякого элемента $x \in X$ числа a_n, определяемые по формулам* (53.14), *т.е. числа*

$$a_n = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

также называются ***к о э ф ф и ц и е н т а м и Ф у р ь е э л е м е н т а** x* ***п о с и с т е м е** $\{e_n\}$ (на этот раз бесконечной, в отличие от случая* (53.14)), *а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ – ***е г о р я д о м Ф у р ь е**, и пишут*

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n. \tag{53.20}$$

Частичные суммы порядка n ряда (53.20) будем обозначать $s_n = s_n(x)$, т.е.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k,$$

и называть *суммами Фурье порядка n элемента x.*

Из теоремы 1 вытекает непосредственно ряд утверждений для сумм Фурье по бесконечной системе элементов.

С л е д с т в и е 2. *Последовательность* $\|x - s_n\|$, $n = 1, 2, \ldots$, *является убывающей последовательностью.*

$\rhd$ В самом деле, в силу минимального свойства коэффициентов Фурье для любого натурального n имеем

$$\|x - s_{n+1}\| \underset{(53.17)}{=} \inf_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}} \|x - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k\| \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n} \|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\| \underset{(53.17)}{=} \|x - s_n\|. \lhd$$

С л е д с т в и е 3 (н е р а в е н с т в о Б е с с е л я). *Если $\{e_n\}$ – ортогональная система в пространстве со скалярным произведением X и a_n – коэффициенты Фурье элемента $x \in X$ по системе $\{e_n\}$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{53.21}$$

$\rhd$ Это неравенство можно сразу получить предельным переходом при $n \to \infty$ из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

которое непосредственно следует из соотношения (53.15) и справедливо при любом $n = 1, 2, \ldots$ ◁

С л е д с т в и е 4. *Если $\{e_n\}$ – ортогональная система в пространстве со скалярным произведением X и существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства*

$$\| e_n \| \geqslant c \tag{53.22}$$

(в частности, если система $\{e_n\}$ – ортонормированная и, следовательно, $\| e_n \| = 1$), то для любого элемента $x \in X$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{a_n\}$ по системе $\{e_n\}$ стремится к нулю:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{53.23}$$

▷ Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} c^2 a_n^2 \underset{(53.22)}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \| e_n \|^2 a_n^2 \underset{(53.21)}{\leqslant} \| x \|^2 .$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится и, следовательно, его общий член стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^2 = 0$, а это равносильно (53.23). ◁

Т е о р е м а 2. *Если X – гильбертово пространство и $\{e_n\}$ – ортогональная в нем система, то для любого элемента $x \in X$ его ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ по этой системе сходится; при этом, если сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ равна x_0, т.е.*

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

то при любом $n = 1, 2, \ldots$ элементы $x - x_0$ и e_n ортогональны:

$$x - x_0 \perp e_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

▷ Пусть $x \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ и

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k; \tag{53.24}$$

тогда

$$\| s_{n+p} - s_n \|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \|^2 =$$

$$= \Bigl(\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k, \sum_{j=n+1}^{n+p} a_j e_j \Bigr) \underset{(53.12)}{=} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2 , \tag{53.25}$$

а так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2$ сходится (см. (53.21)), то для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер n_ϵ, что для всех $n > n_\epsilon$ и всех $p = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 \| e_k \|^2 < \epsilon^2 . \tag{53.26}$$

Поэтому для указанных n и p справедливо также неравенство

$$\| s_{n+p} - s_n \| \underset{\substack{(53.25)\\(53.26)}}{<} \epsilon,$$

т.е. последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм рассматриваемого ряда – фундаментальная, а поскольку пространство X гильбертово, т.е. полное, то эта последовательность сходится, т.е. существует такой элемент $x_0 \in X$, что

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n . \tag{53.27}$$

Покажем, что $x - x_0$ и e_n, $n = 1, 2, \ldots$, ортогональны:

$$(x - x_0, e_n) = (x, e_n) - (x_0, e_n) \underset{(53.27)}{=}$$

$$\underset{(53.27)}{=} (x, e_n) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_k e_k, e_n \right) \underset{(53.12)}{=} (x, e_n) - a_n (e_n, e_n) \underset{(53.14)}{=}$$

$$\underset{(53.14)}{=} (x, e_n) - \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} (e_n, e_n) = 0. \ \triangleleft$$

Теорема 3. *Пусть X – пространство со скалярным произведением и $\{e_n\}$ – ортогональная в нем система.*

Для того чтобы ряд Фурье элемента $x \in X$ по системе $\{e_n\}$ сходился к самому элементу x, необходимо и достаточно, чтобы для этого элемента выполнялось равенство

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \| e_n \|^2 , \tag{53.28}$$

где a_n – коэффициенты Фурье элемента x по системе $\{e_n\}$.

Иначе говоря, для того чтобы ряд Фурье некоторого элемента сходился к этому элементу, необходимо и достаточно, чтобы для него неравенство Бесселя (53.21) превратилось в равенство (53.28). Это равенство называется *равенством Парсеваля*)*. В случае, когда система $\{e_n\}$ ортонормиро-

*) М.А. Парсеваль (1755–1836) – французский математик.

вана, оно имеет вид

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{53.29}$$

и представляет собой обобщение теоремы Пифагора на случай бесконечномерного пространства.

▷ В силу равенства

$$\|x - s_n\|^2 \underset{(53.24)}{=} \|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| \underset{\substack{(53.16)\\(53.17)}}{=} \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|e_k\|^2$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \|x - s_n\| = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2;$$

поэтому условие $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = x$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - s_n\| = 0$, равносильно условию

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \|e_k\|^2. \lhd$$

Теорема 4. *Если X – пространство со скалярным произведением и $\{e_n\}$ – ортогональная в нем система, то для того чтобы у любого элемента $x \in X$ сумма его ряда Фурье по системе $\{e_n\}$ была равна самому этому элементу, необходимо и достаточно, чтобы система $\{e_n\}$ была полной.*

Следствие. *Для того чтобы система $\{e_n\}$ была полной в линейном пространстве со скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $x \in X$ выполнялось равенство Парсеваля.*

▷Необходимость. Пусть для каждого элемента $x \in X$ его ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ сходится к самому x. Тогда, каковы бы ни были $x \in X$ и $\epsilon > 0$, в силу определения сходимости ряда в пространстве X существует такой номер n, что

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| < \epsilon,$$

т.е. в любой близости от наперед заданного элемента x находится некоторая конечная линейная комбинация элементов системы $\{e_n\}$, что и означает полноту этой системы в пространстве X.

Достаточность. Пусть система $\{e_n\}$ – полная в пространстве X. Тогда для любого $x \in X$ и любого $\epsilon > 0$ существуют такое натуральное

n_0 и такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_0}$, что

$$\| x - \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n e_n \| < \epsilon. \tag{53.30}$$

В силу же минимального свойства коэффициентов Фурье a_n элемента x по системе $\{e_n\}$ имеем

$$\| x - \sum_{n=1}^{n_0} a_n e_n \| \leqslant \| x - \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n e_n \|. \tag{53.31}$$

Поэтому

$$\| x - s_{n_0} \| \underset{(53.24)}{=} \| x - \sum_{n=1}^{n_0} a_n e_n \| \underset{\substack{(53.30)\\(53.31)}}{<} \epsilon, \tag{53.32}$$

а так как числовая последовательность $\| x - s_n \|$, $n = 1, 2, \ldots$, убывает (следствие 2 теоремы 1) и, следовательно, при $n > n_0$ выполняются неравенства

$$\| x - s_n \| \leqslant \| x - s_{n_0} \|, \tag{53.33}$$

то

$$\| x - s_n \| \underset{\substack{(53.32)\\(53.33)}}{<} \epsilon \quad \text{при} \quad n > n_0.$$

Это и означает, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = x$. $\triangleleft$

Следствие из теоремы 4 непосредственно вытекает из самой этой теоремы и теоремы 3.

Т е о р е м а 5. *Если у двух элементов пространства со скалярным произведением соответствующие коэффициенты Фурье по некоторой полной ортогональной системе равны, то равны и сами эти элементы.*

В частности, если все коэффициенты Фурье некоторого элемента по полной системе равны нулю, то и сам этот элемент равен нулю.

$\triangleright$ Если $\{e_n\}$ полная ортогональная система в пространстве X со скалярным произведением, $x \in X$, $y \in X$, $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, $y \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$, то в силу теоремы 4 имеют место равенства

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n. \tag{53.34}$$

Если $a_n = b_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то, очевидно, из (53.34) следует, что $x = y$. $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 1. Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением и $\{e_n\}$ – ортогональная в нем система, причем для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $e_n \neq 0$.

Тогда, если для некоторого элемента $x \in X$ имеет место его представление в виде бесконечной линейной комбинации элементов системы $\{e_n\}$, т.е. в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \tag{53.35}$$

то оно единственно и коэффициенты λ_n разложения (53.35) являются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_n\}$.

▷ В самом деле, умножив скалярно равенство (53.35) на элемент e_k, получим

$$(x, e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(e_n, e_k) = \lambda_k(e_k, e_k),$$

и поскольку $(e_k, e_k) \neq 0$, то

$$\lambda_k = \frac{(x, e_k)}{(e_k, e_k)} \underset{(53.14)}{=} a_k.$$

Это означает, что коэффициенты в представлении (53.35) являются коэффициентами Фурье элемента x по системе $\{e_n\}$ и, следовательно, разложение (53.35) элемента x единственно. ◁

З а м е ч а н и е 2. Если $\{e_n\}$ – полная ортогональная система в пространстве X со скалярным произведением, $e_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то для любого его элемента x, согласно теореме 4, имеет место разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,$$

причем, в силу замечания 1, это разложение единственно.

Таким образом, понятие полной ортогональной системы является естественным обобщением понятия ортогонального базиса конечномерного пространства на случай линейного пространства со скалярным произведением.

О п р е д е л е н и е 4. *Ортогональная система $\{e_n\}$ называется* з а м к н у т о й *в* п р о с т р а н с т в е с о с к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м, *если в этом пространстве не существует элемента, не равного нулю и ортогонального всем e_n, $n = 1, 2, \ldots$*

Т е о р е м а 6. *В гильбертовом пространстве ортогональная система замкнута тогда и только тогда, когда она полна.*

▷ Пусть сначала ортогональная система $\{e_n\}$ – замкнутая, x – произвольно фиксированный элемент пространства X и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ – ряд Фурье этого элемента. Поскольку пространство X — полное, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, согласно теореме 2, сходится. Обозначим его сумму через x_0, т.е. $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. В силу той же теоремы 2 разность $x - x_0$ ортогональна всем e_n, т.е. $(x - x_0) \perp e_n$, $n = 1, 2, \ldots$; отсюда в силу замкнутости системы $\{e_n\}$ следует, что $x - x_0 = 0$, т.е. что $x = x_0$, и потому

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n. \tag{53.36}$$

Поскольку элемент x был выбран произвольно в пространстве X, то согласно теореме 4 из равенства (53.36) вытекает, что система $\{e_n\}$ — полная.

Пусть теперь система $\{e_n\}$ — полная. Если $x \in X$ и для всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место ортогональность $x \perp e_n$, т.е. $(x, e_n) = 0$, то все коэффициенты Фурье $a_n = \dfrac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, элемента x по системе $\{e_n\}$ равны нулю и, следовательно, согласно теореме 5, сам элемент x также равен нулю: $x = 0$. Это и означает замкнутость системы $\{e_n\}$. $\triangleleft$

П р и м е р. Пусть $X = L_2[-\pi, \pi]$ — гильбертово пространство. Согласно п. 53.2 тригонометрическая система $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ — полная. Поэтому, в силу теоремы 4 (тригонометрическая система, как мы знаем, является полной ортогональной системой), любой элемент $f \in L_2[-\pi, \pi]$ раскладывается в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье по тригонометрической системе. Если, как обычно, обозначить через s_m частичные суммы этого ряда, то

$$\lim_{m \to \infty} \| f - s_m \| = 0. \tag{53.37}$$

Если f — функция с интегрируемым на отрезке $[-\pi, \pi]$ квадратом и, следовательно, $f \in L_2[-\pi, \pi]$ (замечание 2 из п. 52.5), то

$$a_0 = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{(f, \cos nx)}{(\cos nx, \cos nx)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \tag{53.38}$$

$$b_n = \frac{(f, \sin x)}{(\sin nx, \sin nx)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

т.е. получается обычный тригонометрический ряд Фурье функции f (см.

определение 1 в п. 51.1). Если $S_n(x; f)$ – сумма Фурье порядка n функции f, то равенство (53.37), записанное с помощью интегралов, будет иметь вид

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x;f)]^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2^2 = 0.$$

Это означает, что *тригонометрический ряд Фурье каждой функции* $f \in L_2[-\pi, \pi]$ *сходится к ней на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *в смысле среднего квадратичного.*

Равенство Парсеваля (53.28) в силу формул (53.38) запишется в этом случае в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2. \tag{53.39}$$

Если функция f_1 эквивалентна функции f, т.е. $\|f - f_1\|_2 = 0$, то ряд Фурье функции f_1 будет тот же самый, что и у функции f, ибо $(f_1, 1) = (f, 1)$, $(f_1, \cos nx) = (f, \cos nx)$, $(f_1, \sin nx) = (f, \sin x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, f_1 и f имеют одинаковые коэффициенты Фурье.

Если все коэффициенты Фурье функции f равны нулю, то она эквивалентна нулю (см. п. 52.5), т.е. $\|f\|_2 = 0$, а если она, кроме того, и непрерывна, то она тождественно равна нулю, так как полунорма $\|f\|_2$ пространства $RL_2[-\pi, \pi]$ является нормой на пространстве $CL_2[-\pi, \pi]$.

Поскольку многочлены Лежандра образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_2[-1, 1]$ (см. пп. 53.1 и 53.2), то для них имеют место аналогичные утверждения.

53.4. Дифференцирование тригонометрических рядов Фурье и порядок убывания их коэффициентов. Покажем, что ряд Фурье производной при определенных условиях получается из ряда Фурье самой функции почленным дифференцированием.

Теорема 7. *Пусть функция f непрерывна и имеет кусочно непрерывную производную на отрезке* $[-\pi, \pi]$, *причем* $f(-\pi) = f(\pi)$.

Если

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.40}$$

то

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx. \tag{53.41}$$

▷ Пусть

$$f' \sim \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx; \tag{53.42}$$

тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ df(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n.$$

Аналогично,

$$\beta_n = -na_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, ряд (53.42) совпадает с рядом (53.41), т.е. действительно ряд Фурье для производной f' получается из ряда Фурье (53.40) самой функции f его почленным дифференцированием и при этом без каких-либо предположений о сходимости этих рядов! ◁

Теорема 7 позволяет доказать важное свойство рядов Фурье, состоящее в том, что чем "глаже" функция, тем быстрее стремятся к нулю ее коэффициенты, и, более того, установить порядок их убывания в зависимости от того, сколько раз дифференцируема рассматриваемая функция.

Теорема 8. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ $k-1$ непрерывных производных и кусочно непрерывную производную порядка k, $k \geqslant 1$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Если*

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.43}$$

то

$$|a_n| \leqslant \frac{\epsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\epsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{53.44}$$

где ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^2$ *сходится и, следовательно,* $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

▷ Если

$$f^{(k)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx, \tag{53.45}$$

то последовательным применением теоремы (т.е. дифференцируя последовательно k раз ряд (53.43) и сравнивая коэффициенты получившегося в результате тригонометрического ряда с коэффициентами ряда (53.45)) получим, что в зависимости от четности числа k выполняются либо равенства

$$\alpha_n = \pm n^k a_n, \quad \beta_n = \pm n^k b_n, \tag{53.46}$$

либо

$$\alpha_n = \pm n^k b_n, \quad \beta_n = \pm n^k a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{53.47}$$

Отсюда следует, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняются либо равенства

$$|a_n| \underset{(53.46)}{=} \frac{|\alpha_n|}{n^k}, \quad |b_n| \underset{(53.46)}{=} \frac{|\beta_n|}{n^k}, \tag{53.48}$$

либо

$$|a_n| \underset{(53.47)}{=} \frac{|\beta_n|}{n^k}, \quad |b_n| \underset{(53.47)}{=} \frac{|\alpha_n|}{n^k}. \tag{53.49}$$

Положим

$$\epsilon_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}. \tag{53.50}$$

Тогда, очевидно,

$$|\alpha_n| \leqslant \epsilon_n, \quad |\beta_n| \leqslant \epsilon_n. \tag{53.51}$$

Поэтому из (53.48) и (53.49) следует, что

$$|a_n| \leqslant \frac{\epsilon_n}{n^k}, \quad |b_n| \leqslant \frac{\epsilon_n}{n^k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{53.52}$$

причем, поскольку функция $f^{(k)}$, будучи кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$, интегрируема на нем в квадрате, то согласно равенству Парсеваля (53.39):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^2 \underset{(53.50)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 + \beta_n^2 \underset{(53.39)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(k)}(x)]^2 dx < +\infty$$

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^2$ сходится. Все утверждения теоремы 8 доказаны. ◁

53.5. Скорость сходимости тригонометрических рядов. Выясним теперь, как зависит от гладкости функции "скорость" сходимости к ней ряда Фурье, т.е. говоря более точно, как зависит от того, сколько раз дифференцируема функция, порядок убывания остатков ее ряда Фурье.

Теорема 9. *Пусть функция f имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ $k-1$ непрерывных производных и кусочно непрерывную k-ю производную, $k \geqslant 1$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Тогда ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции f и*

$$|f(x) - S_n(x, f)| \leqslant \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}}, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{53.53}$$

где $\{\eta_n\}$ – *бесконечно малая числовая последовательность. Иначе говоря,*

$$f(x) = S_n(x; f) + o(n^{-k+1/2}), \quad n \to \infty. \tag{53.54}$$

$\triangleright$ Пусть

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{53.55}$$

и $S_n(x; f)$ – сумма Фурье порядка n функции f. В силу непрерывности

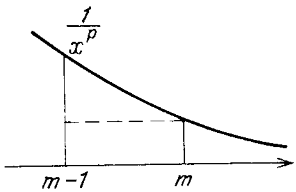


Рис. 196

функции f и заведомо кусочной непрерывности ее первой производной, согласно следствию 2 теоремы 4 (признак Дини) п. 51.5, имеем

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = f(x), \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Поэтому, если

$$r_n(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \tag{53.56}$$

– остаток ряда Фурье (53.55), то

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x; f). \tag{53.57}$$

Оценим остаток $r_n(x)$. При его оценке будет использовано неравенство Коши – Шварца для числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2}, \quad u_n, v_n \in \mathbf{R}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{53.58}$$

(оно получается предельным переходом из неравенства Коши – Шварца для конечных сумм), и неравенство

$$\frac{1}{m^p} \leqslant \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^p}, \quad p > 0, \tag{53.59}$$

которое получается интегрированием неравенства (рис. 196)

$$\frac{1}{m^p} \leqslant \frac{1}{x^p}, \quad m-1 \leqslant x \leqslant m,$$

по отрезку $[m-1, m]$.

Имеем

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx + b_m \sin mx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| \underset{(53.44)}{\leqslant}$$

$$\underset{(53.44)}{\leqslant} 2 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\epsilon_m}{m^k} \underset{(53.58)}{\leqslant} 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \epsilon_m^2}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^{2k}}} \underset{(53.59)}{\leqslant}$$

$$\underset{(53.59)}{\leqslant} 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \epsilon_m^2}\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_{m-1}^{m} \frac{dx}{x^{2k}}} =$$

$$= 2\sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \epsilon_m^2}\sqrt{\int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2k}}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \epsilon_m^2}\sqrt{\frac{1}{n^{2k-1}}} = \frac{\eta_n}{n^{k-1/2}}, \tag{53.60}$$

где

$$\eta_n = \frac{2}{\sqrt{2k-1}} \sqrt{\sum_{m=n+1}^{\infty} \epsilon_m^2}. \tag{53.61}$$

Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^2$ (см. теорему 8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \epsilon_m^2 = 0,$$

а поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n \underset{(53.61)}{=} 0. \tag{53.62}$$

Из (53.60) и (53.62) в силу равенства (53.57) следует утверждение (53.53). Элементы последовательности η_n не зависят от x, поэтому из неравенства (53.53) и выполнения условия (53.62) следует равномерная сходимость ряда Фурье функции f.

Наконец, цепочка неравенств (53.60) содержит в себе неравенство

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m \cos mx| + |b_m \sin mx| \underset{\substack{(53.60)\\(53.61)}}{\leqslant} \eta_n n^{-k+1/2}, \tag{53.63}$$

из которого следует, что остатки ряда, составленного из абсолютных величин членов ряда (53.55), стремятся к нулю, а поэтому ряд (53.55) абсолютно сходится. ◁

53.6*. Ряды Фурье функций с произвольным периодом. Теория ряда Фурье 2π-периодических функций переносится на функции с произвольным периодом $2l$, $l > 0$. Для этого достаточно линейно отобразить отрезок $[-l, l]$ на отрезок $[-\pi, \pi]$:

$$y = \frac{\pi}{l} x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi, \tag{53.64}$$

и тогда вопрос об определении ряда Фурье для $2l$-периодической функции сведется к вопросу о ряде Фурье 2π-периодической функции в следующем смысле. Если функция $f(x)$ имеет период $2l$ и абсолютно интегрируема на периоде, т.е. абсолютно интегрируема на отрезке $[-l, l]$, то после замены переменного $x = \frac{l}{\pi} y$, обратной к отображению (53.64), получится 2π-периодическая абсолютно интегрируемая на периоде функция $f\left(\frac{l}{\pi} y\right)$. Выполнив в ее ряде Фурье замену переменного (53.64), т.е. вернувшись к исходной переменной, получим ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{53.65}$$

называемый рядом Фурье заданной $2l$-периодической функции $f(x)$.

Формулы для коэффициентов ряда (53.65) с помощью той же замены переменного (53.64) следуют из формул для коэффициентов Фурье 2π-периодической функции:

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

С помощью замены переменного (53.64) доказанные выше теоремы для рядов Фурье 2π-периодических функций переносятся на ряды Фурье $2l$-периодических функций.

53.7*. Запись рядов Фурье в комплексной форме. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{53.66}$$

то, представив $\cos nx$ и $\sin nx$ по формулам Эйлера:

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

и сделав подстановку в ряд (53.66), получим

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} =$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx}.$$

Если ввести обозначения

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (53.67)$$

то получим запись ряда Фурье (53.66) в комплексной форме

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

где для коэффициентов c_n имеют место формулы

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i \sin nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx,$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i \sin nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Объединив получившиеся формулы в одну, получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Очевидно, что из формул (53.67) следует, что коэффициенты c_n и c_{-n} являются сопряженными комплексными числами: $c_{-n} = \bar{c}_n$.

§ 54. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

54.1. Представление функций интегралом Фурье. Пусть функция f задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ и абсолютно интегрируема на ней. Сопоставим функции f интеграл

$$\int_0^{+\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy, \tag{54.1}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt,$$
$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{54.2}$$

Интеграл (54.1) аналогичен ряду Фурье периодической функции: суммирование заменено интегрированием. Функции $a(y)$ и $b(y)$ в подынтегральном выражении аналогичны коэффициентам Фурье.

Подставив (54.2) в подынтегральное выражение интеграла (54.1), будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos xy\cos yt + \sin xy\sin yt)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{54.3}$$

Определение 1. *Интеграл*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt$$

называется интегралом Фурье функции f.

Подобно тому, как при определенных условиях периодическая функция раскладывается в ряд Фурье, так функция, определенная на всей числовой оси, представляется своим интегралом Фурье. Прежде чем это доказывать, докажем два вспомогательных утверждения. Первое из них аналогично теореме 4 п. 52.5.

Лемма 1. *На любом конечном или бесконечном интервале* (a, b) *множество непрерывных финитных на этом интервале функций плотно в пространстве* $RL_1(a, b)$ *абсолютно интегрируемых на* (a, b) *функций.*

$\triangleright$ Нам уже известно (см. теорему 2 п. 51.2), что множество финитных в интервале (a, b) ступенчатых функций плотно в пространстве $RL_1(a, b)$. Поэтому достаточно доказать, что в пространстве $RL_1(a, b)$ любую финитную на интервале (a, b) ступенчатую функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать непрерывными финитными на (a, b) функциями. Поскольку же финитная на (a, b) ступенчатая функция является конечной линейной комбинацией характеристических функций конечного промежутка вида $[\xi, \eta)$, $a < \xi < \eta < b$, то достаточно доказать, что лишь эти характеристические функции сколь угодно точно приближаются в пространстве $RL_1(a, b)$ непрерывными финитными на интервале (a, b) функциями. Это же утверждение доказывается с помощью почти дословного повторения доказательства леммы 11 из п. 52.5.

В самом деле, зафиксируем произвольно $\epsilon > 0$. Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция полуинтервала $[\xi, \eta)$, $a < \xi < \eta < b$. По аналогии с доказательством леммы 11 п. 52.5 рассмотрим непрерывную на всей числовой оси функцию $g(x)$, график которой изображен на рис. 194. Для этой функции имеет место включение

$$\operatorname{supp} g(x) = [\xi, \eta], \tag{54.4}$$

т.е. функция $g(x)$ финитна на интервале (a, b) и для всех $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant \chi(x) - g(x) \leqslant 1. \tag{54.5}$$

Выберем на этот раз $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta < \min \left\{ \frac{\epsilon}{2}, \quad \frac{\eta - \xi}{2} \right\}. \tag{54.6}$$

Тогда получим

$$\| \chi - g \|_{RL_1(a, b)} = \int_a^b | \chi(x) - g(x) | \, dx \underset{(54.4)}{=} \int_\xi^\eta | \chi(x) - g(x) | \, dx =$$

$$= \int_\xi^{\xi + \delta} [\chi(x) - g(x)] \, dx + \int_{\eta - \delta}^{\eta} [\chi(x) - g(x)] \, dx \underset{(54.5)}{\leqslant}$$

$$\underset{(54.5)}{\leqslant} \int_\xi^{\xi + \delta} dx + \int_{\eta - \delta}^{\eta} dx = 2\delta \underset{(54.6)}{<} \epsilon.$$

Лемма доказана. ◁

Л е м м а 2. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, а функция $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена в полосе*

$$\Pi = \{(x, y): \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < c \leqslant y \leqslant d < +\infty\}, \tag{54.7}$$

то

1) *функция*

$$\Phi(y) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) \, dx \tag{54.8}$$

непрерывна на отрезке $[c, d]$;

2) *справедливо равенство*

$$\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int_c^d \varphi(x,y)\,dy. \tag{54.9}$$

$\triangleright$ В силу ограниченности функции $\varphi(x, y)$ в полосе Π (см. (54.7)) существует такая постоянная $M > 0$, что для всех точек $(x, y) \in \Pi$ выполняется неравенство

$$|\varphi(x,y)| \leqslant M \tag{54.10}$$

и, следовательно,

$$|f(x)\varphi(x,y)| \leqslant M\,|f(x)|.$$

Согласно условию леммы функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, поэтому по признаку Вейерштрасса интеграл (54.8) равномерно сходится на отрезке $[c, d]$. Следовательно, функция $\Phi(y)$ определена на отрезке $[c, d]$. Докажем ее непрерывность. Зададим произвольно $\epsilon > 0$. Из равномерной сходимости интеграла (54.8) вытекает существование такого η_ϵ, что для всех $y \in [c, d]$ выполняется неравенство

$$\int_{|x| \geqslant \eta_\epsilon} |f(x)\varphi(x,y)|\,dx < \frac{\epsilon}{3}. \tag{54.11}$$

Функция $\varphi(x, y)$, будучи непрерывной функцией на конечном прямоугольнике

$$\Pi_\epsilon \overset{\text{def}}{=} \{(x,y):\ -\eta_\epsilon \leqslant x \leqslant \eta_\epsilon,\quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

равномерно непрерывна на нем. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех Δy, для которых $|\Delta y| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|\varphi(x, y+\Delta y) - \varphi(x,y)| < \frac{\epsilon}{3\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx}, \tag{54.12}$$

$$(x,y) \in \Pi_\epsilon,\quad (x, y+\Delta y) \in \Pi_\epsilon.$$

Теперь при произвольно фиксированных $y \in [c, d]$ и $y + \Delta y \in [c, d]$, лишь бы выполнялось условие

$$|\Delta y| < \delta, \tag{54.13}$$

будем иметь

$$|\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)| \underset{(54.8)}{\leqslant} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)[\varphi(x,y+\Delta y)-\varphi(x,y)]|\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\eta_\epsilon}^{\eta_\epsilon} |f(x)|\,|\varphi(x,y+\Delta y)-\varphi(x,y)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\epsilon} |f(x)||\varphi(x,y+\Delta y)-\varphi(x)|\,dx \underset{\substack{(54.13)\\(54.12)}}{\leqslant}$$

$$\underset{\substack{(54.13)\\(54.12)}}{\leqslant} \frac{\epsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx} \int\limits_{-\eta_\epsilon}^{\eta_\epsilon} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\epsilon} |f(x)|[\,|\varphi(x,y+\Delta y)|+|\varphi(x,y)|\,]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{3\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\epsilon} |f(x)\varphi(x,y+\Delta y)|\,dx + \int\limits_{|x|\geqslant\eta_\epsilon} |f(x)\varphi(x,y)|\,dx \underset{(54.11)}{<}$$

$$\underset{(54.11)}{<} \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.$$

Это и означает, что функция $\Phi(y)$ непрерывна на отрезке $[c,d]$.

Докажем теперь формулу (54.9). Прежде всего заметим, что в силу доказанной непрерывности функции (54.8) интеграл в левой части равенства (54.9) существует как интеграл от функции $\Phi(y)$ по отрезку, на котором она непрерывна. Существование интеграла в правой части равенства (54.9) следует из того, что функция

$$\Psi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)\int\limits_c^d \varphi(x,\varphi)\,dy$$

является произведением абсолютно интегрируемой на числовой оси $\mathbf{R}$ функции $f(x)$ на ограниченную непрерывную функцию $\int\limits_c^d \varphi(x,\ y)\,dy$ (см. замечание в п. 38.5). Здесь непрерывность собственного интеграла $\int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy$ по параметру x следует из теоремы 2 п. 49.2, а его ограниченность – из ограниченности функции φ:

$$\left|\int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy\right| \leqslant \int\limits_c^d |\varphi(x,y)|\,dy \underset{(54.10)}{\leqslant} M(d-c).$$

Далее, в силу леммы 1 для произвольного $\epsilon > 0$ существует такая непрерывная финитная функция f_ϵ, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)-f(x)|\,dx < \epsilon. \tag{54.14}$$

Для этой функции f_ϵ, согласно теореме 4 п. 49.2, справедлива формула

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\varphi(x,y)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy \tag{54.15}$$

(здесь в силу финитности функции f_ϵ можно бесконечные пределы заменить конечными, поэтому здесь и применима теорема 4 из п. 49.2). Покажем, что предел левой части равенства (54.15) при $\epsilon \to 0$ равен $\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,dx$, а правой – $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy$. Для этого оценим отклонения левой и правой частей равенства (54.15) от их предполагаемых предельных значений. Имеем

$$\left|\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\varphi(x,y)\,dx - \int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x,y)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)-f(x)|\,|\varphi(x,y)|\,dx \underset{(54.10)}{\leqslant}$$

$$\underset{(54.10)}{\leqslant} M\int\limits_c^d dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)-f(x)|\,dx =$$

$$= M(d-c)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)-f(x)|\,dx \underset{(54.14)}{<} M(d-c)\,\epsilon. \tag{54.16}$$

Соответственно, для правой части

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\epsilon(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \int\limits_c^d \varphi(x,y)\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)-f(x)|\,dx \int\limits_c^d |\varphi(x,y)|\,dy \underset{(54.10)}{\leqslant}$$

$$\underset{(54.10)}{\leqslant} M \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x)-f(x)|\,dx \int\limits_c^d dy \underset{(54.14)}{<} M(d-c)\,\epsilon. \tag{54.17}$$

Положив в равенстве (54.15) $\epsilon \to 0$, получим, в силу (54.16) и (54.17), равенство (54.9). ◁

Т е о р е м а 1. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси* $\mathbf{R}$, *то в каждой точке $x \in \mathbf{R}$, в которой существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, имеет место равенство*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt. \tag{54.18}$$

▷ Зафиксируем произвольно точку $x \in \mathbf{R}$, в которой существуют $f(x+0)$, $f(x-0)$, $f'_+(x)$, $f'_-(x)$, и положим

$$S(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \quad \eta > 0. \tag{54.19}$$

Функция $S(\eta)$ является для интеграла Фурье аналогом частичной суммы ряда Фурье периодической функции.

Поскольку функция $\cos y(x-y)$ непрерывна и ограничена на всей плоскости переменных y и t, то согласно формуле (54.9) в интеграле (54.19) можно поменять порядок интегрирования. Проделав это, получим

$$S(\eta) \underset{\substack{(54.19)\\(54.9)}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt \int_0^{\eta} \cos y(x-t)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{\sin\eta(x-t)}{x-t}\,dt \underset{u=t-x}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x+u)\,\frac{\sin\eta u}{u}\,du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} [f(x+t)+f(x-t)]\,\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \tag{54.20}$$

Формула (54.20) по своему виду напоминает соответствующую формулу для частных сумм ряда Фурье (см. формулу (51.40)). Поэтому естественно провести дальнейшие рассуждения по той же схеме, которая применялась в рядах Фурье при доказательстве формулы (51.51), учитывая, конечно, специфику рассматриваемого случая.

Вспомнив, что (см. п. 50.4)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad \eta > 0, \tag{54.21}$$

преобразуем разность между $S(\eta)$ и $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ следующим образом:

$$S(\eta)-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \underset{(54.21)}{\overset{}{\underset{(54.20)}{=}}}$$

$$\underset{(54.21)}{\underset{(54.20)}{=}} \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt -$$

$$-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x-t)-f(x-0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \qquad (54.22)$$

Получившиеся интегралы представим в виде сумм интегралов по промежуткам $[0,1]$ и $[1,+\infty)$:

$$\int_0^{+\infty}=\int_0^1+\int_1^{+\infty} \qquad (54.23)$$

и исследуем каждый из получившихся интегралов отдельно.

Так как в силу условий теоремы существует конечный предел

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}=f'_+(x)$$

и так как функция $f(x+t)-f(x+0)$ абсолютно интегрируема по переменному t на отрезке $[0,1]$ (напомним, что x фиксировано), то и функция $\dfrac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ абсолютно интегрируема на этом отрезке. Поэтому по теореме Римана (п. 51.3, теорема 3)

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\sin\eta t\,dt=0. \qquad (54.24)$$

Для соответствующего интеграла по промежутку $[1, +\infty)$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\eta t\,dt-\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt. \qquad (54.25)$$

Поскольку при $t\geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\frac{|f(x+t)|}{t}\leqslant|f(x+t)|,$$

то в силу абсолютной интегрируемости функции f на всей числовой оси будем иметь

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{|f(x+t)|}{t}\,dt\leqslant\int\limits_1^{+\infty}|f(x+t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)|\,dt\underset{u=x+t}{=}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|\,du<+\infty,$$

т.е. функция $\dfrac{f(x+t)}{t}$ также абсолютно интегрируема на всей числовой оси, и поэтому снова по теореме Римана получим

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t}\sin\eta t\,dt=0. \qquad (54.26)$$

Наконец, из сходимости интеграла $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{f(x+0)}{\pi}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin\eta t}{t}\,dt\underset{\eta t=u}{=}$$

$$\underset{\eta t=u}{=}\frac{f(x+0)}{\pi}\lim_{\eta\to+\infty}\int\limits_\eta^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=0. \qquad (54.27)$$

В результате из полученных равенств (54.23) – (54.27) вытекает, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}[f(x,t)-f(x+0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=0. \qquad (54.28)$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x-t)-f(x-0)]\frac{\sin\eta t}{t}\,dt=0. \tag{54.29}$$

Таким образом, для интеграла Фурье (54.3) функции f имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos y(x-t)\,dt \underset{(54.19)}{=}$$

$$\underset{(54.19)}{=}\lim_{\eta\to+\infty}S(\eta)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}. \quad \triangleleft$$

54.2. Главное значение интеграла. Введем новое понятие — понятие интеграла в смысле главного значения по действительной оси, который обозначается*)

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx. \tag{54.30}$$

Будем рассматривать функции действительного аргумента, принимающие, вообще говоря, комплексные значения

$$f(x)=u(x)+iv(x),\quad x\in\mathbf{R},\ u(x)\in\mathbf{R},\ v(x)\in\mathbf{R}.$$

Определение 2. *Пусть функция f интегрируема (в собственном или несобственном смысле) на любом отрезке $[a,b]$ числовой оси* **R** *(такие функции называются локально интегрируемыми); тогда*

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx\overset{\text{def}}{=}\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)\,dx,\quad b>0. \tag{54.31}$$

Отличие интеграла (54.30) от несобственного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx \tag{54.32}$$

состоит в том, что интеграл (54.32) является пределом интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$ при произвольном стремлении $a\to-\infty$ и $b\to+\infty$, интеграл (54.30) — предел тех же интегралов, но лишь в случае $a=-b$ и $b\to+\infty$.

Если существует несобственный интеграл (54.32), то, очевидно, существует и интеграл в смысле главного значения (54.30). Однако может случиться, что несобственный интеграл (54.32) не существует, а интеграл в смысле главного значения (54.30) существует.

*) Главное значение — по французски valeur principale.

Например, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dx$ не существует, а интеграл v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dx$ существует и равен нулю, ибо для любого $b > 0$ имеет место равенство. $\int\limits_{-b}^{b} x dx = 0$. Вообще, если функция f – нечетная и локально интегрируемая, то интеграл v.p.$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует и равен нулю, так как в силу нечетности функции f для каждого $b > 0$ имеет место равенство $\int\limits_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0$.

Заметим, что для интегралов (собственных, несобственных или в смысле главного значения) от комплекснозначных функций справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad a \leqslant b. \tag{54.33}$$

54.3. Преобразование Фурье. Если функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на всей числовой оси и в каждой ее точке имеет односторонние производные, то согласно теореме 1

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\,dt. \tag{54.34}$$

Отсюда в силу четности косинуса следует, что и

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\,dt. \tag{54.35}$$

Функция

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\,dt \tag{54.36}$$

непрерывна (а следовательно, и интегрируема по Риману) на любом отрезке $[-\eta, \eta]$, $\eta > 0$, как равномерно сходящийся интеграл от непрерывной по обеим переменным t и y функции $f(t)\sin y(x-t)$ (x фиксировано): равномерная сходимость интеграла (54.36) следует из признака Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов, так как

$$|f(t) \sin y(x-t)| \leqslant |f(t)|,$$

а функция f по условию абсолютно интегрируема на всей числовой оси. (Заметим, что непрерывность функции (54.36), конечно, сразу следует и из леммы 2 п. 54.1)

В силу нечетности синуса функция $\Phi(y)$ также нечетна, поэтому

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(y)\,dy \underset{(54.36)}{=} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin y(x-t)\,dt = 0. \tag{54.37}$$

Вспомнив, что $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$ (см. п. 41.4), получим для рассматриваемой функции:

$$f(x) \underset{\substack{(54.35)\\(54.37)}}{=} \text{v.p.}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(x-t)\,dt\right] =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,[\cos y(x-t) + i\sin y(x-t)]\,dt =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iy(x-t)}dt. \tag{54.38}$$

Перепишем получившееся равенство в виде

$$f(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iyt}dt\right)e^{iyx}dy. \tag{54.39}$$

О п р е д е л е н и е 3. *Отображение F, ставящее в соответствие функции f функцию, обозначаемую Ff или $\hat{f}$ и определяемую формулой*

$$(Ff)(y) = \hat{f}(y) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-iyt}dt, \tag{54.40}$$

называется п р е о б р а з о в а н и е м Ф у р ь е, а отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции f функцию, обозначаемую $F^{-1}f$ и определяемую формулой

$$(F^{-1}f)(y) = \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{iyt}dt, \tag{54.41}$$

– о б р а т н ы м п р е о б р а з о в а н и е м Ф у р ь е.

В формулах (54.40), (54.41) функция f может принимать и комплексные значения.

Заметим, что если функция принимает только действительные значения, то как ее преобразование Фурье, так и обратное преобразование Фурье принимают, вообще говоря, комплексные значения. Этим и объясняется, что теории преобразования Фурье было предпослано краткое изложение сведений о комплекснозначных функциях.

Функция Ff называется *образом Фурье функции f*. Преобразование Фурье, так же как и обратное преобразование Фурье, определено для всех функций f, для которых в смысле главного значения существует интеграл (54.40), соответственно интеграл (54.41), в частности, для всех абсолютно интегрируемых функций – в этом случае указанные интегралы превращаются в обычные абсолютно сходящиеся интегралы.

Действительно, рассмотрим, например, случай преобразования Фурье. Поскольку

$$|e^{-iyt}| = |\cos yt - i\sin yt| = \sqrt{\cos^2 yt + \sin^2 yt} = 1,$$

то $|f(t)e^{iyt}| = |f(t)|$ и в силу абсолютной интегрируемости функции f на всей числовой оси интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt$ абсолютно сходится.

Л е м м а 3. *Для любой непрерывной абсолютно интегрируемой на всей числовой оси функции f, у которой во всех ее точках существуют односторонние производные, имеет место формула*

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f. \tag{54.42}$$

С л е д с т в и е. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье взаимно однозначны на множестве функций, удовлетворяющем условиям леммы* 3.

▷ Равенство (54.39), записанное в обозначениях преобразования Фурье F и обратного преобразования Фурье F^{-1}, имеет вид

$$f = F^{-1}(Ff). \tag{54.43}$$

Докажем, что и

$$F(F^{-1}f) = f. \tag{54.44}$$

В силу четности косинуса из формулы (54.35) следует, что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt,$$

а в силу нечетности синуса из формулы (51.37) — что

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)\,dt = 0.$$

Отсюда по аналогии с (54.38) получим

$$f(x) = \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\cos y(t-x) + i\sin y(t-x)\right] dt =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(t-x)}dt =$$

$$= \text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt\right)e^{-iyx}dy,$$

т.е. равенство (54.44). ◁

Формулы (54.42) показывают, что отображения F и F^{-1} являются взаимно обратными отображениями. Это и оправдывает их обозначения символами прямой и обратной функций.

Следствие леммы вытекает из того, что если $Ff_1 = Ff_2$, то, применив к обеим частям этого равенства обратное преобразование Фурье F^{-1}, получим $F^{-1}(Ff_1) = F^{-1}(Ff_2)$, т.е. в силу (54.43) имеет место равенство $f_1 = f_2$. Это и означает взаимную однозначность (инъективность) преобразования Фурье. Аналогично доказывается и взаимная однозначность обратного преобразования Фурье.

Лемма 4. *Прямое и обратное преобразования Фурье являются линейными отображениями множеств, на которых они определены* (*т.е. множеств функций, для каждой из которых существует интеграл* (54.40), *соответственно интеграл* (54.41)).

Это означает, что для любых функций f_1 и f_2 из указанных множеств функций и для всех чисел $\lambda_1 \in \mathbf{C}$ и $\lambda_2 \in \mathbf{C}$ выполняются соотношения

$$F(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Ff_1 + \lambda_2 Ff_2, \tag{54.45}$$

$$F^{-1}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 F^{-1}f_1 + \lambda_2 F^{-1}f_2. \tag{54.46}$$

$\triangleright$ Равенства (54.45) и (54.46) сразу следуют из формул (54.40) и (54.41) в силу линейности интеграла. $\triangleleft$

54.4. Свойства преобразования Фурье абсолютно интегрируемых функций. Будем рассматривать абсолютно интегрируемые на всей числовой оси $\mathbf{R}$ функции, принимающие, вообще говоря, комплексные значения. Для таких функций определено преобразование Фурье (54.40).

Теорема 2. *Если функция f абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\mathbf{R}$, то ее преобразование Фурье Ff является ограниченной непрерывной на $\mathbf{R}$ функцией, стремящейся к нулю, когда ее аргумент стремится к бесконечности; при этом для любого $y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство*

$$|(Ff)(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{54.47}$$

Следствие. *Если последовательность абсолютно интегрируемых функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится в среднем на числовой оси $\mathbf{R}$ к абсолютно интегрируемой функции f, то последовательность преобразований Фурье Ff_n функций f_n сходится равномерно на всей числовой оси $\mathbf{R}$ к преобразованию Фурье Ff функции f.*

В символической записи

$$f_n \to f \text{ в } RL_1(R) \Rightarrow Ff_n \underset{R}{\rightrightarrows} Ff.$$

$\triangleright$ Пусть функция f абсолютно интегрируема на числовой оси $\mathbf{R}$. Так как $|e^{-ixy}| = 1$ (см. п. 54.3), то

$$|(Ff)(y)| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}| \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx,$$

т.е. неравенство (54.47) доказано.

Покажем теперь, что Ff является непрерывной функцией и что

$$\lim_{y \to \infty} (Ff)(y) = 0. \qquad (54.48)$$

Пусть сначала функция f принимает только действительные значения; тогда

$$(Ff)(y) \underset{(54.40)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\cos yx - i \sin yx) \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos yx \, dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin yx \, dx.$$

Каждый из получившихся в правой части интегралов в силу леммы 2 п. 54.1 является непрерывной функцией (так как функция f абсолютно интегрируема, а функции $\cos yx$ и $\sin yx$ ограничены и непрерывны), которая, согласно теореме Римана (теорема 3 п. 51.3), стремится к нулю при $y \to \infty$. Поэтому теми же свойствами обладает и функция Ff.

Если функция f – комплекснозначная, т.е. $f(x) = u(x) + iv(x)$, $u(x) \in \mathbf{R}$, $v(x) \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$, то в силу линейности преобразования Фурье $Ff = Fu + iFv$. Отсюда следует, что функция Ff непрерывна и стремится к нулю, когда ее аргумент стремится к бесконечности, так как этими свойствами, согласно доказанному выше, обладают функции Fu и Fv. $\triangleleft$

Следствие вытекает из неравенства

$$|(Ff_n)(y) - (Ff)(y)| \underset{(54.45)}{=} |(F(f_n - f))(y)| \underset{(54.47)}{\leqslant}$$

$$\underset{(54.47)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)| \, dx. \qquad (54.49)$$

Правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$ по условию (последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем на числовой оси к функции f), поэтому и левая его часть стремится к нулю. При этом, так как правая часть неравенства (54.49) не зависит от y, то стремление разности $(Ff_n)(y) - (Ff)(y)$ к нулю происходит равномерно на $\mathbf{R}$, а это и означает равномерную сходимость на $\mathbf{R}$ последовательности функций $\{Ff_n\}$ к функции Ff.

Т е о р е м а 3. *Если функция f и все ее производные до порядка n включительно абсолютно интегрируемы на числовой оси, $n \geqslant 1$, производная порядка $n-1$ непрерывна, а производная порядка n кусочно непрерывна на любом отрезке, то*

$$(Ff^{(n)})(y) = (iy)^n (Ff)(y) \tag{54.50}$$

и существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$|(Ff)(y)| \leqslant \frac{c}{|y|^n}. \tag{54.51}$$

▷ Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Прежде всего заметим, что из абсолютной интегрируемости функции f на всей числовой оси, т.е. из существования и, следовательно, конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx,$$

вытекает и сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (если интеграл абсолютно сходится, то он сходится). В частности, если абсолютно интегрируема производная $f'(x)$, то существует конечный предел

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f'(t)\,dt,$$

а тогда из формулы Ньютона – Лейбница

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt$$

следует и существование конечного предела

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Этот предел не может быть не равным нулю, так как тогда интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ не мог бы быть конечным (почему?). Поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0. \tag{54.52}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0. \tag{54.53}$$

Теперь, проинтегрировав по частям, получим

$$(Ff')(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} df(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \underset{\substack{(54.52)\\(54.53)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(54.52)\\(54.53)}}{=} iy\,(Ff)(y). \qquad (54.54)$$

Таким образом, дифференцированию функции f соответствует умножение ее преобразования Фурье $(Ff)(y)$ на iy. Отсюда следует, что если функция f имеет $n \geqslant 1$ абсолютно интегрируемых на числовой оси производных, то ее n-кратное дифференцирование соответствует умножению ее преобразования Фурье $(Ff)(y)$ на $(iy)^n$, т.е. справедлива формула (54.53).

Докажем неравенство (54.51). Производная $f^{(n)}$ по условию абсолютно интегрируема на всей числовой оси $\mathbf{R}$. Следовательно, согласно теореме 2, ее образ Фурье $Ff^{(n)}$ является ограниченной на этой оси функцией, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$|(Ff^{(n)})(y)| \leqslant c. \qquad (54.55)$$

Поэтому

$$|(Ff)(y)| \underset{(54.50)}{=} \frac{|(Ff^{(n)})(y)|}{|(iy)^n|} \underset{(54.55)}{\leqslant} \frac{c}{|y|^n}.$$

В силу определения производной комплекснозначной функции (см. п. 10.9) и линейности преобразования Фурье все проведенные выше рассуждения справедливы не только для функций f, принимающих действительные значения, но и для комплекснозначных функций. $\lhd$

Теорема 3 показывает, что дифференцирование функции приводит к умножению ее образа Фурье на множитель iy. Тем самым операции дифференцирования при преобразовании Фурье соответствует алгебраическая операция – умножение функции на ее аргумент и на i. На этом свойстве преобразования Фурье основываются его многочисленные применения в математике.

Из формулы (54.51) следует, что чем больше абсолютно интегрируемых производных имеет функция, тем, вообще говоря, быстрее стремится к нулю ее преобразование Фурье при стремлении аргумента к бесконечности (причем, если имеется n указанных производных, то не медленнее, чем $\frac{c}{|y|^n}$).

Т е о р е м а 4. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на всей числовой оси, то преобразование Фурье функции $f(x)$ является n раз дифференцируемой на всей числовой оси функцией и*

$$(Ff)^{(n)} = (-i)^n F(x^n f). \tag{54.56}$$

▷ Продифференцировав формально по параметру y интеграл

$$(Ff)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx, \tag{54.57}$$

будем иметь

$$-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, e^{-ixy}\, dx. \tag{54.58}$$

Поскольку $|\, xf(x)\, e^{-ixy} | = | xf(x) |$ и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} | xf(x) |\, dx$ по условию теоремы сходится, то согласно признаку Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра, интеграл (54.58) равномерно сходится.

По условию теоремы интеграл (54.57) сходится, поэтому для его дифференцирования по параметру y, согласно доказанному, можно применить правило Лейбница (см. теорему 5 п. 50.2), т.е. интеграл (54.58) является производной интеграла (54.57). Поэтому

$$(Ff)'(y) \underset{(54.58)}{=} -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, e^{-ixy}\, dx = -iF(xf(x)).$$

Таким образом, производная $(Ff)'$ преобразования Фурье Ff функции f равна произведению $-i$ на преобразование Фурье функции $f(x)$, умноженной на x. Произведя n раз дифференцирование преобразования Фурье Ff функции f, получим, что производная $(Ff)^{(n)}$ порядка n будет равна произведению $(-i)^n$ на преобразование Фурье функции $f(x)$, умноженной на x^n.

Так же, как и в предыдущей теореме, все проведенные рассуждения справедливы не только для функций, принимающих лишь действительные значения, но и для комплекснозначных функций. ◁

§ 55. Обобщенные функции

55.1 Пространства D и D'. *Обобщенными функциями* называются линейные непрерывные числовые функции, заданные на некотором линейном функциональном пространстве (называемом *пространством основных функций*), в котором определено понятие сходимости последовательности функций.

Числовые функции, заданные на множестве функций, называются обычно, как это уже отмечалось выше, *функционалами.*

Линейность функционала f, заданного на некотором пространстве X основных функций, означает, что для любых функций $\varphi_1 \in X$, $\varphi_2 \in X$ и любых чисел λ_1, λ_2 имеет место равенство

$$f(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 f(\varphi_1) + \lambda_2 f(\varphi_2), \tag{55.1}$$

а непрерывность — что из сходимости последовательности функций $\varphi_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, в пространстве X к функции $\varphi \in X$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = f(\varphi).$$

В качестве примера возьмем за пространство основных функций пространство $RL_2(a, b)$ функций с интегрируемым квадратом на интервале (a, b). Зафиксируем некоторую функцию $f \in RL_2(a, b)$ и рассмотрим порожденный ею функционал, определяемый формулой

$$f(\varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, \varphi), \qquad \varphi \in RL_2(a, b),$$

где (f, φ) — почти скалярное произведение в пространстве $RL_2(a, b)$. Функционал $f(\varphi) = (f, \varphi)$ является линейным и непрерывным, т.е. представляет собой обобщенную функцию, заданную на $RL_2(a, b)$.

По аналогии с рассмотренным примером для любой обобщенной функции f, заданной на некотором пространстве основных функций X, будем ее значение в точке $\varphi \in X$ обозначать не только посредством $f(\varphi)$, но и посредством (f, φ).

Линейная комбинация для обобщенных функций определяется по общему правилу как для любых числовых функций: если f_1 и f_2 — обобщенные

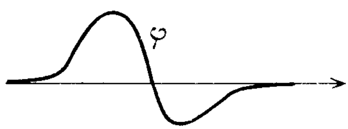


Рис. 197

функции, а λ_1 и λ_2 — числа, то обобщенная функция $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ определяется равенством

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \lambda_1(f_1, \varphi) + \lambda_2(f_2, \varphi), \tag{55.2}$$

где φ — произвольная функция из пространства основных функций.

Определение 1. *Обозначим через D пространство, состоящее из всех финитных (вообще говоря, комплекснозначных) бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси функций* (рис. 197). *При этом последовательность $\varphi_n \in D$, $n = 1, 2, \ldots$, назовем сходящейся к функции $\varphi \in D$, если существует отрезок $[a, b]$, содержащий носители всех функций φ и φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, и такой, что для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится равномерно на отрезке*

$[a, b]$ *к производной* $\varphi^{(k)}$:

$$\varphi_n^{(k)} \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}.$$

Пространство D является, очевидно, линейным пространством: если $\varphi_1 \in D$ и $\varphi_2 \in D$, то для любых чисел λ_1 и λ_2 имеет место

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \in D.$$

Здесь и в дальнейшем в этом параграфе под функциями φ можно понимать либо функции, принимающие только действительные значения, т.е. φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

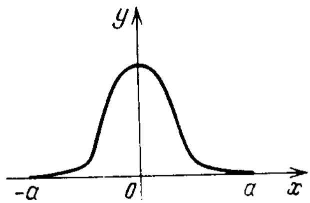


Рис. 198

и тогда числа λ – также действительные, либо функции, принимающие и комплексные значения, т.е. φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$, тогда числа λ также могут быть комплексными.

Примеры. 1. Если $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, то $\varphi \in D$.

2. Пусть (рис. 198)

$$\varphi_a(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}}, & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a. \end{cases} \tag{55.3}$$

Тогда $\varphi_a \in D$. В самом деле, односторонние производные всех порядков справа в точке $x = -a$ и слева в точке $x = a$ равны нулю (см. пример в п. 41.3):

$$\varphi_{a+}^{(n)}(-a) = \varphi_{a-}^{(n)}(a) = 0.$$

Очевидным образом $\varphi_{a-}^{(n)}(-a) = \varphi_{a+}^{(n)}(a) = 0$, так как вне отрезка $[-a, a]$ функция φ_a – тождественный нуль. Поэтому функция φ_a бесконечно дифференцируема на всей числовой оси, причем из $\operatorname{supp}\varphi_a = [-a, a]$ следует, что функция φ_a – финитная, а поэтому $\varphi_a \in D$.

Определение 2. *Всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на пространстве D, т.е. f: $D \to \mathbf{R}$ (или, более общо, f: $D \to \mathbf{C}$), называестя* **обобщенной функцией** *на D.*

Множество всех обобщенных функций в этом случае обозначается D'. Значение обобщенной функции $f \in D'$ на основной функции $\varphi \in D$, согласно сделанному выше замечанию, обозначается (f, φ).

Примеры. 3. Функция f, заданная на всей числовой оси и абсолютно интегрируемая на любом конечном отрезке (такие функции, как мы знаем, называются локально абсолютно интегрируемыми; см.п. 54.2), порождает обобщенную функцию, значение которой на любой основной функции $\varphi \in D$ задается формулой

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in D. \tag{55.4}$$

Это определение корректно в том смысле, что интеграл, стоящий в правой части равенства, существует. Действительно, для каждой функции $\varphi \in D$ существует отрезок $[a, b]$, содержащий носитель функции φ. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{55.5}$$

Функция φ, будучи непрерывной на отрезке $[a, b]$, ограничена на нем, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место неравенство $|\varphi(x)| \leqslant c$, а следовательно, и неравенство $|f(x)\, \varphi(x)| \leqslant \leqslant c |f(x)|$.

По условию функция f локально абсолютно интегрируема, поэтому интеграл $\int_a^b |f(x)|\, dx$ конечен, а тогда по признаку сравнения конечен и интеграл $\int_a^b |f(x)\, \varphi(x)|\, dx$. Это означает абсолютную сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Исходя из свойств интеграла, нетрудно проверить, что функционал, задаваемый формулой (55.4), является линейным и непрерывным на D.

Таким образом, всякую локально абсолютно интегрируемую функцию можно рассматривать как обобщенную функцию. Иначе говоря, каждая обычная локально абсолютно интегрируемая функция является и обобщенной функцией.

4. Рассмотрим на D функционал, обозначаемый символом δ и задаваемый формулой

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \qquad \varphi \in D. \tag{55.6}$$

Этот функционал называется *δ-функцией*, или *функцией Дирака*. Его линейность и непрерывность на пространстве D легко проверяются. Докажем, что δ-функцию нельзя представить в виде (55.4) ни при какой локально абсолютно интегрируемой функции f.

Действительно, если существует такая локально абсолютно интегрируемая функция f, что для любой функции $\varphi \in D$ имеет место равенство

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{55.7}$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

то для функции φ_a (см. (55.3)) будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_a(x)\,dx = \varphi_a(0) \underset{(55.3)}{=} \frac{1}{e}\,. \tag{55.8}$$

В силу локальной абсолютной интегрируемости функции f

$$\lim_{a \to 0} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx = 0 \tag{55.9}$$

(почему?). Заметив далее, что

$$\varphi_a(x) = e^{-\frac{a^2}{a^2 - x^2}} \leqslant \frac{1}{e}, \qquad x \in (-a, a), \tag{55.10}$$

получим

$$\frac{1}{e} \underset{(55.8)}{=} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_a(x)\,dx \right| \underset{(55.3)}{\leqslant} \int_{-a}^{a} |f(x)|\,|\varphi_a(x)|\,dx \underset{(55.10)}{\leqslant}$$

$$\underset{(55.10)}{\leqslant} \frac{1}{e} \int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx \underset{(55.9)}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при } a \to 0,$$

что противоречит тому, что левая часть равна положительной постоянной $\frac{1}{e}$. Итак, δ-функция не представима в виде (55.7). В этом смысле δ-функция является примером обобщенной функции, не являющейся обычной. По аналогии с формулой (55.4) иногда вместо (δ, φ) пишут $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx$, и, таким образом, согласно определению (55.6), имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

55.2. Дифференцирование обобщенных функций. Пусть функция f непрерывно дифференцируема на всей числовой оси и, следовательно, ее производная f', будучи непрерывной, является локально абсолютно интегрируемой функцией. Выберем произвольно основную функцию $\varphi \in D$. Для нее существует такой отрезок $[a, b]$, что $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, b]$. Отсюда, в частности, следует, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Использовав эти равенства при интегрировании по частям, получим

$$(f', \varphi) \underset{(55.4)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\,df(x) = f(x)\,\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -(f, \varphi'). \tag{55.11}$$

Равенство $(f', \varphi) = -(f, \varphi')$, являющееся для обычных функций утверждением, требующим доказательства (которое и было приведено выше), для обобщенных функций принимается за определение.

Определение 3. *Производной f' обобщенной функции f называется функционал, задаваемый формулой*

$$(f', \varphi) \overset{\text{def}}{=} -(f, \varphi'), \qquad \varphi \in D. \tag{55.12}$$

Правая часть этого равенства имеет смысл, ибо из того, что $\varphi \in D$, следует, что $\varphi' \in D$.

Свойством (55.12) обладает обычная производная f любой непрерывно дифференцируемой на $\mathbf{R}$ функции f, поэтому эта обычная производная f' является производной функции и в смысле обобщенных функций, т.е. в смысле определения 3.

В силу этого определения любая обобщенная функция $f \in D'$ имеет производную f', являющуюся также обобщенной функцией: $f' \in D'$ (линейность и непрерывность функционала f' легко проверяются). В частности, в смысле обобщенных функций любая обычная локально абсолютно интегрируемая функция имеет производную! Этот интересный факт является следствием того, что при сделанном выше обобщении понятия производной было взято за основу сохранение лишь одного свойства производной, а именно свойства, выражаемого формулой интегрирования по частям. Поэтому для обычных функций их производная в обобщенном смысле не сводится, вообще говоря, к обычной производной.

Производные высших порядков 2, 3, 4, ... определяются для обобщенных функций по индукции согласно формуле

$$f^{(n+1)} \overset{\text{def}}{=} (f^{(n)})', \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{55.13}$$

Из формул (55.12) и (55.13) следует, что любая обобщенная функция f бесконечно дифференцируема, причем

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \qquad \varphi \in D, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{55.14}$$

Примеры. 1. Найдем n-ю производную δ-функции:

$$(\delta^{(n)}, \varphi) \underset{(55.14)}{=} (-1)^n (\delta, \varphi^{(n)}) \underset{(55.6)}{=} (-1)^n \varphi^n(0).$$

2. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geqslant 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases} \tag{55.15}$$

Функция $\theta(x)$ называется *функцией Хевисайда**) (рис. 199). При $x = 0$, являясь разрывной, она не имеет конечной производной в обычном смысле,

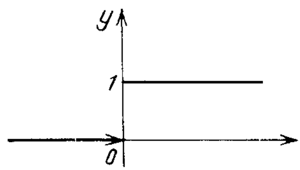


Рис. 199

но функция $\theta(x)$, будучи, очевидно, локально абсолютно интегрируемой, может рассматриваться как обобщенная функция и потому имеет производную в смысле определения 3. Найдем эту производную:

$$(\theta', \varphi) \underset{(55.12)}{=} -(\theta, \varphi') \underset{(55.4)}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \varphi'(x)\, dx \underset{(55.15)}{=}$$

$$\underset{(55.15)}{=} -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = -\varphi(+\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) \underset{(55.6)}{=} (\delta, \varphi), \qquad \varphi \in D,$$

ибо $\varphi(+\infty) = 0$. Поскольку полученное равенство имеет место для любой основной функции $\varphi \in D$, то из него следует, что

$$\theta' = \delta. \tag{55.16}$$

В смысле обычной производной при любом $x \neq 0$ имеет место $\theta'(x) = 0$, а при $x = 0$ производная функции $\theta(x)$ бесконечна: $\theta'(0) = +\infty$. Поэтому, согласно равенству (55.16), иногда говорят, что функция δ равна всюду на числовой оси нулю, кроме точки $x = 0$, где она равна $+\infty$. Хотя это выска-

---

*) О. Хевисайд (1850–1925) – английский физик.

зывание не является логически строгим, так как функция Дирака δ не есть обычная функция, и потому нельзя говорить о ее значениях в отдельных точках, оно бывает иногда удобным при правдоподобных рассуждениях.

Определение 4. *Последовательность обобщенных функций* $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, *называется* ***сходящейся к обобщенной функции*** $f \in D'$, *если для любой основной функции* $\varphi \in D$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi). \tag{55.17}$$

Пример 3. В пространстве обобщенных функций D' имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sin nx = 0.$$

Действительно, каждая функция φ пространства основных функций D, очевидно, абсолютно интегрируема на всей числовой оси, поэтому, согласно теореме Римана (см. п. 51.3, теорему 3), имеем

$$\lim_{n \to \infty} (\sin nx, \varphi) \underset{(55.4)}{=} \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ *в* D', *то для любого натурального* k *имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(k)} = f^{(k)}. \tag{55.18}$$

Следствие. *Если* $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *в* D', *то для любого натурального* k *имеет место равенство*

$$f^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}. \tag{55.19}$$

Иначе говоря, сходящиеся ряды обобщенных функций можно почленно дифференцировать любое число раз. Следовательно, в смысле обобщенных производных можно сколько угодно раз почленно дифференцировать сходящиеся ряды и обычных (локально абсолютно интегрируемых) функций! В результате будут получаться верные равенства.

Докажем теорему.

$\triangleright$ Если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$, то для любой основной функции $\varphi \in D$ и любого $k = 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$(f_n^{(k)}, \varphi) - (f^{(k)}, \varphi) \underset{(55.14)}{=} (-1)^k \left[(f_n, \varphi^{(k)}) - (f, \varphi^{(k)})\right] \underset{(55.17)}{\to} 0$$

при $n \to \infty$, ибо $\varphi^{(k)} \in D$. Таким образом, имеет место (55.18). $\triangleleft$

Для получения формулы (55.19) достаточно применить доказанную теорему к частичным суммам заданного ряда.

55.3. Пространство S. Для перенесения понятия преобразования Фурье на случай обобщенных функций целесообразно ввести другое основное пространство функций, которое будет обозначаться S.

Определение 5. *Пространство S состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых на всей числовой оси функций, стремящихся к нулю со всеми своими производными быстрее любой степени x^{-1} при стремлении аргумента x к бесконечности.*

Иначе говоря, для любой функции $\varphi \in S$ и любых неотрицательных целых k и m имеет место равенство

$$\lim_{x \to \infty} x^k \varphi^{(m)}(x) = 0. \tag{55.20}$$

Последовательность $\varphi_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся в S к функции* $\varphi \in S$, если для любых неотрицательных целых k и m последовательность $x^k \varphi_n^{(m)}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходится к функции $x^k\varphi^{(m)}(x)$ на всей числовой оси $\mathbf{R}$:

$$x^k \varphi_n^{(m)}(x) \underset{\mathbf{R}}{\rightrightarrows} x^k \varphi^{(m)}(x). \tag{55.21}$$

Лемма 1. *Условие* (55.20) *для бесконечно дифференцируемой на всей числовой оси функции φ равносильно следующему условию: для любых неотрицательных целых k и m существует такая постоянная $c_{k,m}$, что*

$$\sup_{\mathbf{R}} |x^k \varphi^{(m)}(x)| = c_{k,m} < +\infty. \tag{55.22}$$

▷ Если выполняется условие (55.22), то, заменив k на $k + 1$, получим

$$|x^{k+1}\varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{k+1,m}, \quad x \in \mathbf{R},$$

и потому

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \frac{c_{k+1,m}}{|x|} \to 0, \quad x \to \infty,$$

т.е. выполняется условие (55.20).

Наоборот, если выполнено условие (55.20), то функция $x^k\varphi^{(m)}(x)$, имея конечный предел в бесконечно удаленной точке ∞, будет ограничена на некоторой ее окрестности $U(\infty) = \{x\colon |x| > a > 0\}$. Будучи же непрерывной, функция $x^k\varphi^{(m)}(x)$ ограничена и на отрезке $[-a, a] = \mathbf{R} \setminus U(\infty)$. Таким образом, функция $x^k\varphi^{(m)}(x)$ ограничена на всей числовой прямой $\mathbf{R}$ и, следовательно, для нее существует постоянная $c_{k,m}$, удовлетворяющая условию (55.22). ◁

Заметим теперь, что если $\varphi \in S$, то для любого неотрицательного целого k функция $x^k\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Это следует из того, что функция $x^k\varphi(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени x^{-1}.

$\triangleright$ В самом деле, если $\varphi \in S$, то

$$|x^k \varphi(x)| \underset{(55.22)}{\leqslant} c_{k,0}, \quad x^2 |x^k \varphi(x)| = |x^{k+2} \varphi(x)| \underset{(55.22)}{\leqslant} c_{k+2,0}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$(1+x^2)|x^k \varphi(x)| \leqslant c_{k,0} + c_{k+2,0}$$

и, следовательно,

$$|x^k \varphi(x)| \leqslant \frac{c_{k,0} + c_{k+2,0}}{1+x^2},$$

а поскольку интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \tag{55.23}$$

сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x^k \varphi(x)|\, dx$. $\triangleleft$

В силу абсолютной интегрируемости функции $x^k \varphi(x)$, $\varphi \in S$, на всей числовой оси для нее определено как прямое преобразование Фурье $Fx^k \varphi(x)$, так и обратное $F^{-1} x^k \varphi(x)$ (см. п. 54.3).

Т е о р е м а 2. *Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье отображают пространство S линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя.*

Иначе говоря, как преобразование Фурье, так и обратное преобразование Фурье являются линейной биекцией S на S.

$\triangleright$ Прежде всего отметим, что линейность и взаимная однозначность (инъективность) преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье уже доказаны раньше (см. п. 54.3).

Покажем, что преобразование Фурье F отображает S в S. Для этого сначала заметим, что при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$ функция $x^k \varphi(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$, а следовательно, функция $F(x^k \varphi(x))$ бесконечно дифференцируема на всей числовой оси (см. теорему 4 в п. 54.4).

Докажем, что если $\varphi(x) \in S$, то и $(F\varphi)(y) \in S$. Для этого, согласно лемме, достаточно доказать, что при любых целых неотрицательных k и m функции $y^m (F\varphi)^{(k)}(y)$ ограничены на всей числовой оси.

Оценим эти функции:

$$|y^m (F\varphi)^{(k)}(y)| \underset{(54.56)}{=} |y^m F(x^k \varphi(x))| \underset{(54.50)}{=}$$

$$\underset{(54.50)}{=} |F(x^k \varphi(x))^{(m)}| \underset{(54.40)}{=} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^k \varphi(x))^{(m)} e^{-ixy} dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(x^{(k)} \varphi(x))^{(m)}|\, dx. \tag{55.24}$$

Заметим теперь, что в силу условия (55.22)

$$c \overset{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{R}} |(1+x^2)(x^k\varphi(x))^{(m)}| \underset{(55.22)}{<} +\infty, \tag{55.25}$$

так как, согласно формуле Лейбница для производной n-го порядка от произведения, $(x^k\varphi(x))^{(m)}$ представляет собой конечную сумму вида $\sum\limits_{p,q} \lambda_{p,q} x^p \varphi^q(x)$, где $\lambda_{p,q}$ – некоторые числовые коэффициенты, а каждое слагаемое этой суммы, согласно условию (55.22), ограничено на **R**. Поэтому, умножив и разделив подынтегральное выражение в интеграле, стоящем в правой части неравенства (55.24), на $1+x^2$, а затем заменив функцию $(1+x^2)\,|\,(x^k\varphi(x))^{(m)}\,|$ ее верхней гранью c, будем иметь

$$|y^m(F\varphi)^{(k)}(y)| \underset{(55.24)}{\leqslant}$$

$$\underset{(55.24)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\mathbf{R}} |(1+x^2)(x^k\varphi(x))^{(m)}| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \underset{\substack{(55.23)\\(55.25)}}{=}$$

$$\underset{\substack{(55.23)\\(55.25)}}{=} c\sqrt{\frac{\pi}{2}} < +\infty. \tag{55.26}$$

Это, согласно лемме, означает, что $F\varphi \in S$. Итак,

$$F(S) \subset S. \tag{55.27}$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}(S) \subset S. \tag{55.28}$$

Докажем, что преобразование Фурье F отображает пространство S на себя. Если $\psi \in S$, то положим

$$\varphi \overset{\text{def}}{=} F^{-1}\psi.$$

Согласно доказанному $\varphi \in S$ и $F\varphi = F(F^{-1}\psi) \underset{(54.44)}{=} \psi$.

Итак, F – биекция пространства S на S.

Аналогично доказывается, что и обратное отображение F^{-1} отображает пространство S на себя.

В заключение покажем, что преобразование Фурье F непрерывно на S. Сначала докажем, что отображение F непрерывно в нуле, т.е. что если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0 \text{ в } S, \tag{55.29}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} F\varphi_n = F0 = 0 \text{ в } S \tag{55.30}$$

(в силу линейности F имеет место $F(0)=0$, ибо $F(0)=F(0\cdot 0)=0\cdot F(0)=0$).

Из неравенства (55.26) для любых неотрицательных целых k и m имеем

$$| y^m (F\varphi_n)^{(k)}(y) | \leqslant c_n \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \tag{55.31}$$

где

$$c_n \underset{(55.25)}{=} \sup_{\mathbf{R}} | (1+x^2)(x^k \varphi_n(x))^{(m)} |. \tag{55.32}$$

Из условия (55.29) явствует согласно определению (55.21), что

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

Поэтому из (55.31) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbf{R}} | y^m (F\varphi_n)^{(k)}(y) | = 0,$$

т.е. для любых неотрицательных целых k и m имеет место

$$y^m (F\varphi_n)^{(k)}(y) \underset{\mathbf{R}}{\rightrightarrows} 0,$$

а это, согласно тому же определению (55.21), означает, что в пространстве S $\lim\limits_{n\to\infty} F\varphi_n = 0$.

Если теперь

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi, \tag{55.33}$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} (F\varphi_n - F\varphi) \underset{(54.45)}{=} \lim_{n\to\infty} F(\varphi_n - \varphi) \underset{\substack{(55.29)\\(55.30)}}{=} 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} F\varphi_n = F\varphi. \tag{55.34}$$

Выполнение условий (55.33), (55.34) и означает непрерывность F на S.

Аналогично доказывается и непрерывность F^{-1} на S. ◁

Отметим, что, в отличие от пространства S, пространство D не обладает свойством инвариантности относительно преобразования Фурье F: существуют такие функции $\varphi \in D$, что $F\varphi \notin D$. Этим обстоятельством и объясняется, что при изучении преобразования Фурье мы в качестве основного пространства функций взяли пространство S, а не D.

55.4. Преобразование Фурье обобщенных функций.

Определение 6. *Всякий линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве S, называется* о б о б щ е н н о й ф у н к ц и е й (на S).

Множество всех таких обобщенных функций обозначается S'. Пространство S является в этом случае пространством основных функций. По аналогии со случаем пространств D и D' значение обобщенной функции $f \in S'$ на функции $\varphi \in S$ обозначается (f, φ).

Последовательность обобщенных функций $f_n \in S'$, $n = 1, 2, \ldots$, называется сходящейся к обобщенной функции $f \in S'$, если для любой основной функции $\varphi \in S$ справедливо равенство

$$\lim_{n \to \infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi). \tag{55.35}$$

Примеры. 1. Функция Дирака, т.е. δ-функция, определяется в случае основного пространства S по аналогии со случаем основного пространства D:

$$(\delta, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \varphi(0), \quad \varphi \in S.$$

2. Всякая локально абсолютно интегрируемая функция f, для которой существуют окрестность бесконечности $U(\infty)$ и числа $k \geqslant 0$ и $A > 0$ такие, что для любой точки $x \in U(\infty)$ справедлива оценка

$$|f(x)| \leqslant A|x|^k, \tag{55.36}$$

порождает обобщенную функцию f согласно формуле

$$(f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{55.37}$$

Этот интеграл сходится, ибо функция $f(x)\varphi(x)$ стремится к нулю в силу (55.20) и (55.36) быстрее любой степени x^{-1} при $x \to \infty$.

Функции $f(x)$, удовлетворяющие условию (55.36), называются *функциями медленного роста (на бесконечности)*, к ним относятся, например, все многочлены. Поэтому и пространство S' также называют пространством обобщенных функций медленного роста. Поскольку $D \subset S$, то $S' \subset D'$ (в том смысле, что всякую обобщенную функцию из S' можно рассматривать и как обобщенную функцию из D', понимая под этим ее сужение на множестве $D \subset S$), т.е. обобщенные функции медленного роста составляют подмножество множества обобщенных функций D'.

Определение 7. *Для обобщенной функции $f \in S'$ ее* ***преобразованием Фурье*** *Ff и* ***обратным преобразованием Фурье*** *$F^{-1}f$ называются функционалы на S, определяемые соответственно формулами*

$$(Ff, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, F\varphi), \quad \varphi \in S, \tag{55.38}$$

$$(F^{-1}f, \varphi) \overset{\text{def}}{=} (f, F^{-1}\varphi), \quad \varphi \in S. \tag{55.39}$$

Эти определения имеют смысл, так как если $\varphi \in S$, то согласно теореме 2 $F\varphi \in S$ и $F^{-1}\varphi \in S$.

Можно доказать, что соотношения (55.38) и (55.39) выполняются, когда функция f является обычной функцией медленного роста (на бесконечности): они означают просто перемену порядка интегрирования. Например, формула (55.38) с точностью до констант имеет в этом случае вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,e^{-ixy}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-ixy}\,dx.$$

В силу примера 2 преобразование Фурье оказывается теперь определенным для более широкого класса и обычных функций, чем это было раньше, в частности, преобразование Фурье определено для многочленов и вообще для всех функций медленного роста на бесконечности.

Примеры. 3. Найдем преобразование Фурье единицы, т.е. функции $f(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$, рассматриваемой как обобщенная функция (она является, очевидно, функцией медленного роста: $1 \in S'$).
Имеем

$$(F1,\varphi) \underset{(55.38)}{=} (1, F\varphi) \underset{(55.5)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-ixy}\,dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,e^{-iy(x-t)}\,dx\right]_{t=0} \underset{(54.38)}{=}$$

$$\underset{(54.38)}{=} \sqrt{2\pi}\,[\varphi(t)]_{t=0} = \sqrt{2\pi}\varphi(0) = \sqrt{2\pi}\,(\delta,\varphi), \qquad \varphi \in S$$

(мы воспользовались здесь соотношением (54.38), т.е., что то же самое, соотношением $F^{-1}(F\varphi) = \varphi$). Таким образом,

$$F1 = \sqrt{2\pi}\,\delta.$$

4. Найдем $F\delta$:

$$(F\delta,\varphi) = (\delta, F\varphi) = (F\varphi)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{-ixy}dx\,\Big|_{y=0} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \underset{(55.6)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi\right), \qquad \varphi \in S.$$

Отсюда следует, что $F\delta = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Теорема 3. *Преобразование Фурье F отображает пространство S' линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя.*

Эта теорема является прямым следствием теоремы 2 об отображении пространства S с помощью прямого и обратного преобразований Фурье линейно, непрерывно и взаимно однозначно на себя, так как доказательство соответствующих свойств преобразования Фурье обобщенных функций сводится с помощью формул (55.38) и (55.39) к аналогичным свойствам преобразования Фурье основных функций. Убедимся в этом.

$\triangleright$ Прежде всего, если $f \in S'$, то Ff является линейным функционалом на S: если $\varphi_1 \in S, \varphi_2 \in S, \lambda_1 \in \mathbf{C}, \lambda_2 \in \mathbf{C}$, то

$$(Ff, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \underset{(55.38)}{=} (f, F(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)) \underset{(54.45)}{=}$$

$$\underset{(54.45)}{=} (f, \lambda_1 F\varphi_1 + \lambda_2 F\varphi_2) \underset{(55.1)}{=} \lambda_1(f, F\varphi_1) + \lambda_2(f, F\varphi_2) \underset{(55.38)}{=}$$

$$\underset{(55.38)}{=} \lambda_1(Ff, \varphi_1) + \lambda_2(Ff, \varphi_2).$$

Далее, Ff является непрерывным функционалом: если $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в S, то

$$\lim_{n\to\infty} (Ff, \varphi_n) \underset{(55.38)}{=} \lim_{n\to\infty} (f, F\varphi_n) \underset{\substack{(55.33)\\(55.34)}}{=} (f, F\varphi) \underset{(55.38)}{=} (Ff, \varphi).$$

Таким образом, преобразование Фурье обобщенной функции из пространства S' является снова обобщенной функцией из этого пространства:

$$F(S') \subset S'. \tag{55.40}$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}(S') \subset S'. \tag{55.41}$$

Покажем теперь, что для любой функции $f \in S'$ имеют место равенства

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f. \tag{55.42}$$

В самом деле, например,

$$(F^{-1}(Ff), \varphi) \underset{(55.39)}{=} (Ff, F^{-1}\varphi) \underset{\substack{(55.28)\\(55.38)}}{=} (f, F(F^{-1}\varphi)) \underset{(54.44)}{=} (f, \varphi), \quad \varphi \in S.$$

Из соотношений (55.42) сразу следует взаимно однозначность (инъективность) отображений F и F^{-1}. Например, если $f_1 \in S', f_2 \in S'$ и $Ff_1 = Ff_2$, то, применив к обеим частям этого равенства преобразование F^{-1}, в силу (55.42) получим $f_1 = f_2$.

Из соотношений (55.42) следует также, что преобразование Фурье F отображает пространство S' не только в S', но и на S' (т.е. F – биекция). Действительно, если $\psi \in S'$, то для элемента $\varphi \overset{\text{def}}{=} F^{-1}\psi$ будем иметь $F\varphi = F(F^{-1}\psi) \underset{(55.42)}{=} \psi$, т.е. в любой элемент ψ пространства S' при отображении F отображается некоторый элемент φ из S'.

Наконец, покажем, что отображение F непрерывно на S': если $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ в S' (см. (55.35)), то

$$\lim_{n \to \infty} (Ff_n, \varphi) \underset{(55.38)}{=} \lim_{n \to \infty} (f_n, F\varphi) \underset{\substack{(55.27) \\ (55.35)}}{=} (f, F\varphi) \underset{(55.36)}{=}$$

$$\underset{(55.38)}{=} (Ff, \varphi), \qquad \varphi \in S,$$

т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} Ff_n = Ff$ в S', а это и означает непрерывность преобразования Фурье на S'. $\triangleleft$

Аналогично теореме 3 доказывается, что и обратное преобразование Фурье также отображает линейно, непрерывно и взаимно однозначно пространство обобщенных функций S' на себя.

КРАТКИЙ ОЧЕРК ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Математический анализ состоит из дифференциального и интегрального исчислений функций действительного и комплексного аргумента, теории рядов, теории дифференциальных (обыкновенных и с частными производными) и интегральных уравнений, а также вариационного исчисления. Математический анализ дает общие методы решения разнообразных как чисто математических, так и прикладных задач.

Отдельные идеи и методы, получившие в дальнейшем свое развитие в математическом анализе, зародились еще в античной математике. Первые идеи интеграционных приемов, предвосхитившие появившийся впоследствии *метод неделимых*, были еще у греческого философа Демокрита (около 460–370 гг. до н.э.), рассматривавшего тела как состоящие из огромного числа мельчайших частей. В IV в. до н.э. на основе теории отношений величин, которая была построена греческим математиком Евдоксом (около 408–355 гг. до н.э.) и которую можно рассматривать как первую теорию действительных чисел (в III в. до н.э. она была изложена в "Началах" Евклида) был разработан метод доказательства формул для площадей плоских фигур и объемов тел. Этот метод, получивший название *метода исчерпывания*, основан на аппроксимации рассматриваемых объектов ступенчатыми фигурами или телами, составленными из простейших фигур или тел (прямоугольников, параллелепипедов, цилиндров и т.п.). Метод исчерпывания является античным интегральным методом. С помощью него древние математики нашли и доказали ряд формул для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел. Лучшие результаты в тот период по нахождению площадей и объемов принадлежат Архимеду (287–212 гг. до н.э.), который для их вычисления применял не только метод исчерпывания, но и разработал ряд новых методов.

Описание движения планет солнечной системы древнегреческим астрономом Птолемеем (около 100–178 гг. до н.э.) с помощью эпициклов высших порядков можно рассматривать как первую попытку разложить периодическое движение (периодическую функцию) на простые гармоники (частичные суммы ряда Фурье). Фактически он уже использовал понятие тригонометрических функций как отрезков в круге, и им была составлена первая таблица синусов, вычисленная через $30'$.

В античной математике были сделаны и первые шаги по изучению бесконечных сумм. Хорошо известен, например, парадокс Зенона (около 490–430 гг до н.э.), состоящий в том, что Ахиллес не может догнать черепаху, так как когда Ахиллес пробежит половину расстояния, отделяющего его от черепахи, та удалится от него за это время на некоторое расстояние. Когда он пробежит половину этого расстояния, черепаха снова удалится от него, и так далее до бесконечности. Получившееся кажущееся противоречие в этом рассуждении связано с тем, что до конца не было осознано понятие бесконечной суммы, не было понято, что такая сумма может иметь конечное значение. Подобная ситуация, когда возникающие математические понятия и математические модели казались противоречивыми современникам их появления, а затем в результате более глубокого изучения и четкого анализа этих понятий и моделей они после правильного их понимания оказывались лишенными каких-либо противоречий, типична для всего развития математики. Возвращаясь к бесконечным суммам, следует заметить, что уже Архимед рассматривал бесконечные суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и находил их значение. После гибели античной культуры достижения древних математиков были забыты на много веков.

После длительного периода застоя в раннее средневековье математика стала постепенно возрождаться в XIV веке. В это мрачное время, когда в Европе пылали костры инквизиции, началась столетняя война между Францией и Англией, когда рыцари сражались в битвах при Креси и Пуатье, когда Россия находилась еще под гнетом татарского ига и только что родился князь Дмитрий Донской, французский монах Оресм (около 1323–1382 г.) в своей тихой келье размышлял о бесконечных суммах. Он построил геометрический пример, показывающий, что сумма бесконечного числа слагаемых может быть конечной (в современной аналитической записи он получил равенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$). Кроме того, он доказал расходимость гармонического ряда, а следовательно, показал, что стремление к нулю членов ряда не обеспечивает его сходимости. Тем самым были сделаны первые принципиальные шаги по изучению бесконечных сумм – числовых рядов.

Шотландский математик Непер (1550–1617) открыл новую функциональную зависимость – логарифмическую и составил первые логарифмические таблицы тригонометрических функций. Он жил в жестокий век в нищей стране, опустошаемой религиозными войнами и междоусобицами феодалов. Непера окружали невежественные и суеверные подданые, считавшие его слугой дьявола.

В эпоху Возрождения искусство, литература и наука стали бурно развиваться, пробудился интерес к античной культуре, многие достижения которой были безвозвратно утеряны и забыты. Далеко не сразу были найдены и сохранившиеся научные сочинения древних ученых, так что, в частности математикам, пришлось заново переоткрывать то, что уже было известно в древние времена.

Поскольку Италия была центром Возрождения, то не удивительно, что именно в трудах итальянских математиков этой эпохи Бомбелли (1530–1572), Кавальери (1598–1647), Торричелли (1608–1647), Ферма (1601–1665) и др. был достигнут наиболее значительный прогресс в развитии математики, но, конечно, и в других странах в это время работало много выдающихся математиков, достаточно назвать немецкого математика и астронома Кеплера (1571–1630), французских математиков Декарта (1596–1650) и Паскаля (1623–1662). Эти ученые обогатили математику важными открытиями, содействовавшими прогрессу во многих актуальных ее направлениях. В частности, их исследования явились базой для создания дифференциального и интегрального исчислений.

В XVI веке у итальянских математиков при решении алгебраических уравнений появились комплексные числа, в "Алгебре" Бомбелли в 1579 году было дано описание правил действий с ними (но только в 1799 году немецкий математик Гаусс (1777–1855) дал их геометрическую интерпретацию на плоскости). Кеплер и Кавальери возродили античный метод неделимых. Используя его, Кеплер в своем сочинении "Новая стереометрия винных бочек" нашел объемы многих тел вращения. Новые идеи для вычисления площадей и объемов содержал подход ученика Галилея (1564–1642) Кавальери. Он сформулировал принцип, получивший его имя, согласно которому два тела имеют одинаковый объем, если сечения их одной и той же плоскостью имеют одинаковую площадь. С современной точки зрения этот принцип можно рассматривать как шаг, предшествующий сведению кратного интеграла к повторному. Понятию интеграла у Кавальери соответствует "совокупность всех неделимых".

Декарт, много сделавший для развития геометрии (он, в частности, является создателем координатного метода) содействовал также во многом развитию математического анализа: он ввел понятие переменной величины, решил ряд задач на вычисление площадей и о проведении касательных, что явилось новым шагом на пути создания геометрической теории интегрирования и дифференцирования.

Ферма своими выдающимися исследованиями обогатил много разделов математики и, прежде всего, теорию чисел, алгебру, геометрию. Он, как и Декарт, развил в геометрии метод координат, он фактически владел понятием производной для алгебраических многочленов и степенной функции с дробным показателем. Для создания дифференциального исчисления большое значение имел найденный им метод отыскания экстремумов функций – первый аналитический метод для задач такого рода (раньше задачи на экстремум решались геометрическим путем). Поэтому вполне справедливо, что необходимое условие экстремума дифференцируемой функции – равенство нулю ее производной – носит его имя. Разрабатывал Ферма и метод квадратур.

Паскаль известен в математике благодаря своим блестящим работам по геометрии, алгебре, теории чисел и теории вероятностей. Он впервые точно сформулировал и применил для доказательств теорем метод математической индукции. Его вклад в создание математического анализа состоял в разработке интегральных методов в геометрической форме для вычисления плоских фигур, объемов и площадей поверхностей. Декарт, Ферма и Паскаль фактически уже умели дифференцировать многочлены и проводить касательные к параболам всех степеней, а фундаментальный бесконечно малый треугольник со сторонами dx, dy, ds уже явно присутствовал в работах Паскаля.

Введение основных понятий дифференциального и интегрального исчислений – производной и интеграла, открытие основных связывающих их закономерностей и создание на основе этого нового метода математических исследований принадлежат английскому механику, физику, математику и теологу Ньютону (1643–1727) и немецкому философу, физику, математику, историку, дипломату Лейбницу (1646–1716). Дифференциальное исчисление было создано на базе предшествующих работ по изучению задач о проведении касательных к кривым и отыскании экстремальных значений величин (Аполлоний Пергамский около 260–170 гг. до н.э., Архимед, Ферма, Декарт и др.). Интегральное исчисление создавалось на основе решенных ранее задач о вычислении площадей плоских фигур и объемов тел (Демокрит, Евдокс, Архимед, Кеплер, Кавальери, Ферма, Декарт, Паскаль и др.). Первым математиком, осознавшим, что между задачами о проведении касательных и задачами о вычислении площадей плоских фигур существует двойственная связь, был учитель Ньютона Барроу (1630–1677). Но именно Ньютон и Лейбниц разработали новый метод решения задач, основанный на понятиях производной и интеграла (*флюксий* и *флюент* в терминологии Ньютона), осознали его принципиальную важность и решили с его помощью много как чисто математических, так и прикладных задач, прежде всего задач механики. Поэтому они по праву считаются создателями дифференциального и интегрального исчислений, или, как говорят, *анализа бесконечно малых*.

Ньютон исходил из понятия непрерывной математической величины – флюенты, представляющей собой абстракцию от различных видов механического движения. Общим аргументом флюент у Ньютона являлось время – некоторая отвлеченная равномерно текущая величина. Скорости изменения флюент Ньютон назвал флюксиями. Он изучил задачи о нахождении флюксий (скоростей) по флюентам (по законам движений), об определении соотношений между флюксиями при заданном соотношении между флюентами, о нахождении флюенты (первообразной) по флюксии (о нахождении пройденного пути при неравномерном движении по известной скорости), об определении соотношений между флюентами при заданном соотношении между флюксиями (интегрирование дифференциальных уравнений). Большую роль в этих исследованиях Ньютона играли не только механические, но и геометрические методы.

Ему принадлежат также глубокие исследования по теории бесконечных рядов, алгебре и теории интерполяции функций. Для него основным методом решения дифференциальных уравнений был метод разложения функций в степенные и дробно-степенные ряды, потому что под флюентой он фактически понимал величину, представимую степенным или дробно-степенным рядом. Он не ставил вопроса о сходимости получающихся у него рядов (тогда еще не было понятия предела), но все ряды, которые он рассматривал, были сходящимися. Он открыл ряды, получившие впоследствии имя его ученика Тейлора (1685–1731), и нашел разложения в степенные ряды всех основных элементарных функций.

Научная деятельность Ньютона была очень разнообразна, он занимался оптикой, создал первый в мире зеркальный телескоп – рефлектор, развил новую теорию света и цветов, создал единую и стройную систему земной и небесной механики на основе закона всемирного тяготения и трех законов механики, носящих ныне его имя. Много занимался Ньютон алхимией и теологией. Не все было гладко в его жизни. Ему приходилось отстаивать приоритет ряда своих научных открытий. Например, Гук (1635–1703) выступил с претензиями на приоритет в теории света, изложенной Ньютоном на заседании Лондонского королевского общества, и в открытии всемирного закона тяготения. Отношение между ними обострились до такой степени, что Ньютон, став в 1703 году президентом Лондонского королевского общества, приказал уничтожить после смерти Гука все его портреты. Это было выполнено столь добросовестно, что до нас не дошло ни одного портрета Гука. Свой метод флюксий и флюент Ньютон опубликовал не сразу после его создания, а лишь в 1686 году в сочинении "Математические начала натуральной философии". Лейбниц же опубликовал свое исчисление бесконечно малых на два года раньше, что дало повод ему и его ученикам претендовать на приоритет в создании дифференциального и интегрального исчислений. Спор о приоритете длился между Ньютоном и Лейбницем многие годы и принимал иногда весьма резкий характер.

У Лейбница анализ бесконечно малых, в отличие от Ньютона, излагается как формальное алгебраическое учение. Ему принадлежат современные обозначения интеграла и дифференциала. Он установил, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны, доказал формулу для многократного дифференцирования произведения функций, разработал способ отыскания экстремумов и точек перегиба функций с помощью анализа бесконечно малых, положил начало интегрированию рациональных дробей, нашел методы интегрирования ряда дифференциальных уравнений. Он также придавал большое значение разложению рассматриваемых функций в степенные ряды при решении дифференциальных уравнений. Лейбниц изобрел счетную машину и разрабатывал методы графического интегрирования.

Деятельность Лейбница была необычайно многогранна. В физике он ввел в качестве меры движения *живую силу* (кинетическую энергию), доказал закон сохранения живых сил, сформулировал принцип наименьшего действия, получивший впоследствии название принципа Мопертюи (1698–1759), и получил ряд других важных результатов. Большое значение имеют труды Лейбница для развития логики и философии. Он неоднократно встречался с русским царем Петром Великим и по его просьбе разработал ряд проектов по развитию образования и государственного устройства в России.

Дальнейшее развитие дифференциальное и интегральное исчисления получили в трудах швейцарских математиков Эйлера (1707–1783) и представителей трех поколений семейства Бернулли: братьев Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748), их племянника Николая (1687–1759), сыновей Иоганна – Николая (1695–1726) и Даниила (1700–1782), внуков Иоганна – Иоганна мл. (1744–1807) и Якоба мл. (1759–1789), французских математиков Д'Аламбера (1717–1783), Клеро (1713–1765), Лагранжа (1736–1813) и др.

Братья Якоб и Иоганн Бернулли успешно применяли методы дифференциального и интегрального исчислений к решению многих проблем геометрии, механики и физики. Вместе с Эйлером, Лейбницем и Лагранжем они заложили основы вариационного исчисления. Лагранжем, в частности, в 1797 году был предложен метод множителей для решения задач на относительный экстремум функций и функционалов. Якоб и Даниил Бернулли получили основополагающие результаты по теории вероятностей. Иоганн, Даниил и Иоганн мл. Бернулли были иностранными почетными членами, а племянник Якоба и Иоганна Николай и Якоб мл. Бернулли – действительными членами Санкт-Петербургской Академии наук.

Эйлер оставил огромное научное наследство. Он значительно расширил рамки математического анализа, рассматривая функции комплексного аргумента, выяснил некоторые основные свойства этих функций, вывел так называемое уравнение Эйлера – Д'Аламбера (его называют также уравнением Коши – Римана), исследовал свойства основных элементарных функций комплексного переменного, в частности, вывел формулы, связывающие тригонометрические функции (он ввел для них обозначения, которые употребляются в настоящее время) с показательной (формулы Эйлера), он получил необходимое условие экстремума функционалов интегрального вида (уравнение Эйлера), создал как самостоятельную дисциплину теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и заложил основы теории уравнений с частными производными. Большой вклад внес Эйлер и в теорию рядов, он ввел в математику новые важные типы рядов (например,тригонометрические ряды),в том числе и расходящихся, нашел суммы большого числа конкретных рядов, получил разложения элементарных функций в комплексной области в ряды и бесконечные произведения.

Расходящиеся ряды встречались в работах математиков и раньше. Например, еще в 1703 году монах Ганди, расставляя по-разному скобки в расходящемся ряде $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, получал его сумму равной то нулю, то единице. Он видел в этом подтверждение возможности создания Богом мира из ничего. Эйлер считал целесообразным использование расходящихся рядов в математике и предложил метод их обобщенного суммирования.

Эйлер является и основоположником теории специальных функций. Им создана теория гамма- и бета-функций, исследованы свойства эллиптических интегралов, гиперболических и цилиндрических функций, дзета-функции, некоторых тэта-функций, интегрального логарифма и важных классов специальных многочленов. Он положил начало всем главным направлениям теории чисел. Огромны заслуги Эйлера и в других разделах математики и ее приложений. Он был академиком Санкт-Петербургской Академии наук и работал в России в 1727–1741 годах и с 1766 года до своей смерти (в тревожное время регенства в России Анны Леопольдовны Эйлер уехал в Берлин, где проработал в Академии наук с 1741 до 1766 года).

Большую роль для выяснения того, что представляет собой понятие функции, сыграл спор по этому вопросу между Эйлером, Д'Аламбером и Даниилом Бернулли о природе решения дифференциального уравнения колебания струны. Эйлер считал, что функция – это произвольно начерченная кривая, Д'Аламбер – что аналитическое выражение, Д. Бернулли же получил решение в виде тригонометрического ряда и высказал мысль о том, что любая периодическая функция (в то время под функциями интуитивно понималась непрерывная функция) раскладывается в тригонометрический ряд, правда, он еще не имел формул для коэффициентов этого ряда. Д'Аламбер сомневался в справедливости этого и использовал в своих работах только степенные ряды.

В 1805 году французский математик Фурье (1768–1830) снова высказал утверждение Д. Бернулли о возможности разложения периодической функции в тригонометрический ряд и указал формулы для коэффициентов этого ряда, получившие его имя (эти формулы были известны еще Эйлеру). Несколько позже Фурье ввел представление функций с помощью интеграла, также получившего его имя. Лишь в 1829 году французский математик Дирихле (1805–1859) впервые доказал сходимость ряда Фурье для кусочно монотонных непрерывных функций.

Недостатком исчисления бесконечно малых, созданного в XVII–XVIII веках, являлось отсутствие четких определений, лежащих в основе этого исчисления, прежде всего в отсутствии точного определения предела функции, что не позволяло установить четкую границу корректного применения метода бесконечно малых. В результате при его использовании иногда получались неверные результаты, противоречащие здравому смыслу. Предлагались разные теории для обоснования действий с бесконечно малыми, например *теория компенсации ошибок*, которая, однако, сама требовала обоснования. Лишь в XIX веке методы математического анализа получили логическое обоснование на основе четкого определения предела функции. Это обоснование было проделано прежде всего в работах Коши (1789–1857), Больцано (1781–1848), Дирихле, Вейерштрасса (1815–1897) и Римана (1826–1866). После их работ математический анализ освободился от внутренних противоречий (во всяком случае, от замеченных в то время), он стал доступен значительно более широкому кругу исследователей и стал быстро развиваться.

Первое корректное определение предела последовательности было дано чешским математиком Больцано в 1817 году и французским математиком Коши в 1821 году. Коши получил свой критерий сходимости последовательности, основанный на принципе вложенных отрезков, который он считал очевидным. Коши и Больцано дали также определение предела функции, ввели понятие непрерывных функций и доказали ряд их основных свойств, в частности, теорему о промежуточных значениях. К сожалению, бо́льшая часть математических результатов Больцано не была опубликована при его жизни, а те результаты, которые были опубликованы, прошли незамеченными многими математиками того времени. По-настоящему его работы стали известны лишь в нашем веке. Например, первый пример непрерывной на всей числовой оси функции, не имеющей во всех точках конечной производной, впервые был указан Больцано в 1830 году, а опубликован он был лишь столетие спустя в 1930 году. Поэтому более известным является подобный пример, построенный независимо Вейерштрассом в 1860 году и опубликованный им в 1872 году.

Теорему об ограниченности непрерывных на отрезке функций и достижимости ими экстремальных значений получил Вейерштрасс около 1860 года. Немецкий математик Гейне (1821–1881) в 1870 году сформулировал понятие равномерной непрерывности функции и доказал равномерную непрерывность функции, непрерывной на отрезке.

Современная теория действительных чисел ведет свое начало от работ Гаусса, Больцано, Коши и окончательно оформилась в работах немецких математиков Дедекинда (1831–1916), Вейерштрасса и Кантора (1845–1918). Аксиомы действительных чисел были впервые сформулированы Дедекиндом в 1888 году и итальянским математиком Пеано (1858–1932) в 1891 году.

В 1823 году Коши дал корректное определение определенного интеграла для непрерывных функций с помощью предела интегральных сумм. Подобные определения интегралов для более широких, чем непрерывные, классов функций дали Риман в 1853 году, а затем французские математики Дарбу (1842–1917) в 1879 году и Жордан (1838–1922) в 1892 году. Новые идеи в понятие интеграла вложили нидерландский математик Стилтьес (1856–1894), французские математики Борель (1871–1956), Лебег (1875–1941), Данжуа (1884–1974) и др.

Общее определение числовых функций было сформулировано Н.И. Лобачевским (1792–1856) в 1834 году и Дирихле в 1837 году. Эти определения, данные в терминах зависимых переменных величин, отделили общее понятие функции от все расширяющегося в связи с развитием математики понятия аналитического выражения. Правда, в дальнейшем для действительных функций действительного аргумента в определенном смысле точки зрения на функцию как на соответствие и как на аналитическое выражение оказались равносильными: в 1940 году Д.Е. Меньшов (1892–1988) доказал, что всякую измеримую почти всюду конечную функцию можно представить сходящимся к ней почти всюду тригонометрическим рядом. Ранее существенные результаты по вопросу представимости функций тригонометрическими рядами получили Риман, Вейерштрасс, Лебег, Н.Н. Лузин (1883–1950), А.Н. Колмогоров (1903–1987) и др.

Первое корректное доказательство существования интеграла от непрерывной функции было дано Дарбу (ранее предложенное Коши доказательство было некорректным, так как в то время у Коши не было еще понятия равномерной непрерывности). Различные необходимые и достаточные условия интегрируемости разрывной функции были даны немецкими математиками Риманом и Дюбуа-Реймоном (1831–1889), а затем французским математиком Лебегом.

Многие конкретные несобственные интегралы были вычислены математиками еще в XVIII веке, но только Коши в 1821 году дал строгое определение сходимости несобственных интегралов и указал общие методы их вычислений. Абсолютно сходящиеся интегралы ввел Дирихле в 1854 году, а равномерно сходящиеся – бельгийский математик Валле Пуссен (1866–1962) в 1892 году, понятие равномерной сходимости появилось в работах английского физика и математика Стокса (1819–1903) и немецкого математика Зейделя (1821–1896) в 1847–1848 годах, а затем у Коши в 1853 году.

Двойной интеграл впервые появился еще у Эйлера в 1770 году, он дал и способ его вычисления путем сведения к повторному. Лагранж рассматривал уже не только двойные, но и тройные интегралы. Правило замены переменного в двойных и тройных интегралах было получено М.В. Остроградским (1801–1861) в 1836 году, а для интеграла любой кратности – немецким математиком Якоби (1804–1851) в 1841 году. При замене переменных в кратном интеграле Якоби впервые ввел функциональные определители, получившие впоследствии его имя.

Формула Грина была получена Эйлером в 1771–1772 годах, а затем независимо английским математиком Грином (1793–1841) в 1828 году. Формула Гаусса-Остроградского была получена Гауссом в 1813 году для одного частного случая, когда в тройном интеграле, входящем в эту формулу, подынтегральная функция равна 1, а в общем случае – М.В. Остроградским в 1828–1834 годах для функций любого числа переменных. Формулу Стокса впервые получил в 1849 году английский физик и математик Томсон (1824–1907), а Стокс впервые включил ее в программу студенческих экзаменов. Многомерное обобщение формулы Стокса было получено в 1889 году французским математиком Пуанкаре (1854–1912), а в современном виде – в 1899 году в терминах созданной им теории внешних дифференциальных форм французским математиком Картаном (1869–1951).

Современная теория аналитических функций комплексного переменного ведет свое начало от работ Коши, который начал систематически развивать эту теорию (ему принадлежат интегральные представления аналитических функций, теория вычетов и т.п.). Термин *аналитическая функция* был предложен Лагранжем.

В теории функций комплексного переменного большую роль играет теория эллиптических функций, разработанная Эйлером, Вейерштрассом и французским математиком Эрмитом (1822–1901).

Много сделал Коши и в теории дифференциальных уравнений (основные теоремы существования решений, методы интегрирования уравнений, постановка так называемой задачи Коши и т.д.). Его исследования по дифференциальным уравнениям получили развитие в работах ученицы Вейерштрасса С.В. Ковалевской (1850–1891) (теорема Коши – Ковалевской).

Большой вклад в математический анализ внес Гаусс, особенно в изучение рядов и эллиптических функций.

Некорректное использование расходящихся рядов приводило часто к ошибочным результатам, что естественно подрывало к ним доверие. В результате работ Коши по обоснованию анализа на основе четкого понятия предела расходящиеся ряды были надолго изгнаны из математики. Только в конце XIX – начале XX веков в работах итальянского математика Чезаро (1859–1906), русского математика Г.Ф. Вороного

(1868–1908), немецкого математика Теплица (1881–1940) и др. была создана логически строгая теория расходящихся рядов и было найдено много ее полезных применений в различных вопросах математического анализа. Первый пример ряда Фурье непрерывной функции, расходящегося в некоторых точках, был построен в 1876 году Дюбуа-Реймоном.

Многие методы современного математического анализа ведут свое начало от трудов Пуанкаре. Он ввел понятие асимптотического ряда, разработал асимптотические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений, построил теорию автоморфных функций.

Векторное исчисление появилось у ирландского математика и астронома Гамильтона (1805–1865), построившего теорию кватернионов. Абстрактное линейное пространство было введено в 1888 году Пеано. Пространство непрерывных функций изучалось итальянскими учеными Вольтерра (1860–1940), Асколи, Арцела, Дини, английскими математиками Харди (1877–1947) и Литлвудом (1885–1977) и многими другими. Вольтерра и шведский математик Фредгольм (1866–1927) построили теорию линейных дифференциальных уравнений. Немецкие математики Гильберт (1862–1943) и Шмидт (1876–1959) в 1902–1907 годах разработали спектральную теорию интегральных уравнений. Аксиоматическая теория гильбертовых пространств была построена американским математиком Стоуном (р. 1903) и немецким математиком фон Нейманом (1903–1957) в конце 20-х годов нашего столетия. Абстрактное определение линейных нормированных пространств появилось в начале 20-х годов в работах польского математика Банаха (1892–1945), австрийского математика Хана (1879–1934) и американского математика Винера (1894–1964). Понятие метрического пространства было введено в 1906 году французским математиком Фреше (1878–1973).

Большой вклад в развитие методов математического анализа внесли русские математики. В теорию функций – П.Л. Чебышев (1821–1894), А.А. Марков (1856–1922), С.Н. Бернштейн (1880–1968), Д.Ф. Егоров (1869–1931), А.Н. Колмогоров, Н.Н. Лузин и др. (Н.Н. Лузин вместе со своим учителем Д.Ф. Егоровым создал московскую школу теории функций). В теорию дифференциальных уравнений – А.А. Ляпунов (1857–1918), создавший теорию устойчивости решений, И.Г. Петровский (1901–1973), М.А. Лаврентьев (1900–1980), М.В. Келдыш (1911–1978). Качественно новым шагом в развитии вариационного исчисления явилась построенная Л.С. Понтрягиным (1908–1988) теория оптимальных процессов.

Большим достижением математики XX века явилось создание теории обобщенных функций. Впервые они появились в работах С.Л. Соболева (1908–1989), а их систематическая теория была развита в работах французского математика Шварца (р. 1915).

Конечно, далеко не всех математиков, работы которых имели существенное значение для развития математического анализа, возможно даже просто упомянуть в таком кратком очерке.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

SHORT COURSE OF MATHEMATICAL CALCULUS

by L.D. Kudryavtsev

Content

The textbook is written on the basis of lectures which have been delivered by professor L.D. Kudryavtsev at the Moscow Physico-Technical Institute (MFTI). Both the classical and modern methods of the mathematical calculus are considered. The account is on the level of simplicity for the large circle of students. All theorems are given with full demonstrations. The texbook contains the minimal information which is necessary for activ using of mathematical analysis methods.

The author Dr. of physics and mathematics sciences a corresponding Member of USSR Academy of Sciences L.D. Kudryavtsev is the Head of the Department of functin theory of Steklov Mathematical Institute and more than 35 years he has occupied the chair of higher mathematics at MFTI. The system of instruction in mathematics, as evolved at the MFTI under the direction of L.D. Kudryavtsev, is to be highly commended and has proved to be influential in the organization of mathematical training in number of the larger thechnical institutes of the USSR.

L.D. Kudryavtsev is a researcher in the theory of functions, of partial differential equations and topology. He has received the Prize of Moscow Mathematical Society for scientific articles on differential mapping and is State Prize laureate for the research about boundary value problems for differential operators and their applications to mathematical physics. He is the author of many scientific papers, monographs and textbooks.

L.D. Kudryavtsev has taken active part in the scientific community both in the Soviet Union and abroad. In 1966 he was consultant in mathematics at UNESCO in India, in 1967 he was invited on a lecture tour at a number of universities in Canada, he was elected to the Executive Committee of the International Commission on mathematical education for the period 1975–1978, since 1979 he is a member of the Editorial Board of the international journal "Education Stadies in Mathematics".