Вища
МАТЕМАТИКА

Основні розділи

1

Вища
МАТЕМАТИКА

У двох книгах

Книга 1
ОСНОВНІ РОЗДІЛИ

За редакцією професора Г. Л. КУЛІНІЧА

2-ге видання, перероблене й доповнене

Допущено
Міністерством освіти і науки України

Підручник для студентів
природничих спеціальностей університетів
і вищих технічних навчальних закладів

Київ
"Либідь"
2003

ББК 22.1я73
В55

Автори: *Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський, І. П. Васильченко, В. М. Шовкопляс*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. В Булдигін*
(Національний технічний університет України «КПІ»),
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Д. Кошманенко*
(Інститут математики НАН України)

Допущено Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/12—2355 від 10.09.2001 р.)

Редакція літератури з природничих і технічних наук

Редактор *А. С. Мнишенко*

В55 **Вища** математика: Підручник: У 2 кн. — 2-ге вид., перероб. і доп. — К.: Либідь, 2003. — Кн. 1. Основні розділи / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; За ред. Г. Л. Куленіча. — 400 с.
ISBN 966-06-0229-4 (кн. 1), ISBN 966-06-0228-6.

У першій книзі розглядаються загальні розділи математики: лінійна алгебра, аналітична геометрія, диференціальне й інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних.

Для студентів природничих спеціальностей університетів і вищих технічних навчальних закладів.

ББК 22.1я73

ISBN 966-06-0229-4 (кн. 1)
ISBN 966-06-0228-6

ПЕРЕДМОВА

Підручник відповідає програмам з вищої математики для природничих спеціальностей університетів і вищих технічних навчальних закладів.

При написанні підручника використано багаторічний досвід викладання вищої математики на природничих факультетах Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Тому в книзі наведено приклади застосування математики в природничих науках. Означення й доведення теорем здебільшого ілюструються прикладами, а в деяких випадках пропонуються завдання теоретичного характеру для самостійного вивчення або аналізу. Доведення теорем і підходи до викладення окремих розділів певною мірою відрізняють цей підручник від аналогічних видань.

Підручник складається з двох книг. У першій книзі розглядаються розділи вищої математики, що, як правило, вивчаються в загальних курсах: лінійна алгебра, аналітична геометрія, числові послідовності й ряди, похідні та диференціали, застосування похідних, інтеграли визначені й невизначені, функції багатьох змінних, кратні й криволінійні інтеграли.

У другій книзі подано деякі спеціальні розділи вищої математики: функціональні ряди, звичайні диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, функції комплексної змінної, теорія ймовірностей та математична статистика.

Перша книга складається з одинадцяти глав.

Глави 1, 2, 9, пп. 11.1 і 11.4 написав канд. фіз.-мат. наук, доц. В. В. Плахотник, 3 — канд. фіз.-мат. наук, доц. В. М. Шовкопляс, 4–8 — канд. фіз.-мат. наук, доц. Г. Й. Призва, 10 — канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Д. Гординський, пп. 11.2, 11.3, 11.5 — д-р техн. наук, проф. І. П. Васильченко.

Друга книга складається з шести глав.

Главу 12 написав канд. фіз.-мат. наук, доц. В. М. Бурим, 13 — канд. фіз.-мат. наук, доц. Л. Д. Гординський (пп. 13.1–13.4, 13.8, 13.9) і канд. фіз.-мат. наук, доц. В. Я. Данилов (пп. 13.5–13.7), 14 — д-р фіз.-мат. наук, проф. Є. Ю. Таран (пп. 14.1, 14.2, 14.9) та Л. Д. Гординський (пп. 14.3–14.8), 15 — Є. Ю. Таран, 16 — д-р фіз.-мат. наук, проф. Г. Л. Кулініч, 17 — канд. фіз.-мат. наук, доц. М. В. Грисенко.

Глава 1 МНОЖИНИ Й ФУНКЦІЇ

1.1 МНОЖИНИ Й ДІЇ НАД НИМИ

Поняття множини — одне з основних у математиці. Слова *сукупність, клас, система, набір* та інші часто вживають як синоніми слова *множина*. Однак слід наголосити, що ***множина*** — це деякі об'єкти (елементи множини), котрі виділені за певною ознакою (або ознаками) з інших об'єктів і розглядаються як одне ціле. При цьому клас усіх розглядуваних об'єктів має бути описаний іще раніше будь-яким способом, і цей клас називається ***універсальною множиною***.

Належність елемента a множині A позначають так: $a \in A$ (a належить до множини A). Якщо ж елемент a універсальної множини U не є елементом множини A, то це позначають як $a \overline{\in} A$ (a не належить до A).

Якщо вдається перелічити всі елементи множини A, то це позначають як $A = \{a, b, \ldots, c\}$, де у фігурних дужках наводять усі елементи множини A. Навіть якщо множина має безліч елементів, інколи так можна зробити. Наприклад: $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ — множина всіх натуральних чисел; $\mathbf{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$ — множина всіх цілих чисел.

Загальне правило полягає в тому, щоб, виписавши досить багато елементів множини, зробити очевидною закономірність їх подальшого виписування.

Найчастіше множина задається виразом $A = \{a \mid P(a)\}$. Такий запис означає, що A — множина всіх елементів певної універсальної множини, які задовольняють умову P. Якщо умова P не виконується для жодного елемента універсальної множини, тобто множина A не має жодного елемента, то її називають ***порожньою*** й позначають $\varnothing$.

■ **Приклад 1.1**. *Аби зрозуміти важливість поняття універсальної множини, розглянемо ситуацію, яка може виникнути, якщо відмовитися від нього.*

Для більшості з множин твердження $A \overline{\in} A$ істинне (навряд чи можна навести природний приклад множини, яка є своїм елементом). Позначимо тоді через M множину, елементами котрої є всі множини A, для яких виконується умова $A \overline{\in} A$. Ця умова виділяє елементи множини M, отже, можна вважати, що M задана. Хотілося б, щоб множина M задовольняла тільки одну з умов: або $M \overline{\in} M$, або $M \in M$.

Припустимо, що $M \overline{\in} M$, тоді умова $A \overline{\in} A$ для множини M виконується, отже, M є одним з елементів M, тобто, за прийнятою раніше домовленістю, ми маємо написати: $M \in M$. Навпаки, якщо $M \in M$, то умова $A \overline{\in} A$ для множини M не виконується. Отже, M не є своїм елементом: $M \overline{\in} M$. Як бачимо, в будь-якому разі ми дійшли б суперечності, оскільки не було описано універсальну множину, про елементи якої ми вирішуємо: чи $A \overline{\in} A$, чи $A \in A$.

■ **Приклад 1.2**. Вираз $A = \{a \mid 2a = 1\}$ сам по собі не задає деякої множини, оскільки універсальну множину U не вказано. Якщо тут U — множина цілих чисел, то $A = \varnothing$. Якщо ж, наприклад, U — множина раціональних чисел, то $A = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ — множина з одного елемента.

Якщо кожен елемент множини A є також елементом множини B, то A — ***підмножина множини** B*. Позначатимемо це як $A \subset B$ або (що одне й те саме) $B \supset A$. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто множини A і B мають одні й ті самі елементи, то $A = B$. Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої іншої множини.

➡ **Означення 1.1**. Нехай A — множина. Тоді через $\overline{A}$ позначатимемо множину всіх елементів універсальної множини, які не належать до A. *Цю множину $\overline{A}$ називають **доповненням множини** A.*

Нехай A, B — множини. ***Перерізом (перетином)** множин A і B називають множину $A \cap B$ усіх елементів, що належать як множині A, так і множині B:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

***Об'єднанням** A і B називають множину $A \cup B$ усіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин:*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

***Різницею** A і B називають множину $A \setminus B$ усіх елементів, що належать множині A й не належать множині B:*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \overline{\in} B\}.$$

Легко зрозуміти: останнє означення рівносильне тому, що $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. Зауважимо також, що $\overline{A} = U \setminus A$, де U — відповідна універсальна множина.

Маючи множину A, можна утворити множину, елементами якої будуть усі підмножини множини A.

■ **Приклад 1.3.** *Нехай* $A = \{1; 2; 3\}$. Тоді A має підмножину $\varnothing$; $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ — підмножини з одного елемента, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$ — підмножини з двох елементів і, крім того, $A \subset A$, отже, множина всіх підмножин множини A має вісім елементів.

Легко зрозуміти, скільки підмножин має множина A, яка складається зі скінченної кількості елементів, а саме — з n. Для кожного елемента $a \in U$ є дві можливості: $a \in A$ і $a \overline{\in} A$. Отже, в разі збільшення кількості елементів на одиницю до тих підмножин, які не містять «нового» елемента a, додаються утворені з них приєднанням a. Оскільки множина A з одного елемента має дві підмножини $\varnothing$ і A, і при збільшенні кількості елементів множини на одиницю кількість її підмножин подвоюється, то множина з n елементів має 2^n підмножин.

Відповідно до викладеного множина всіх підмножин даної множини позначається 2^A. Таким чином, усі розглядувані множини є елементами множини 2^U, де U — деяка фіксована універсальна множина. Підмножину S множини 2^U називатимемо ***системою множин***.

Властивості дій над множинами

1. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$
2. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$
4. $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A.$
5. *Якщо* $A \subset C$, *то* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$
7. $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup U = U.$
8. $A \cap U = A, \quad A \cup \varnothing = A.$
9. $\overline{(\overline{A})} = A.$
10. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Справді, властивості 1–3, 7–9 є безпосередніми наслідками означень 1.1. Властивість 4 є наслідком властивостей 6 і 1; властивість 5 — наслідок властивості 6. Друга з рівностей властивості 10 є наслідком першої та властивості 9.

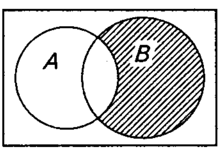
Дійсно, рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ рівносильна тому, що $\overline{\overline{(A \cap B)}} = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$, тобто $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Але за першою з рівностей властивості 10 маємо $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}$, звідки за властивістю 9 дістанемо $A \cap B$, що й потрібно було довести.

Аналогічно доводиться, що друга з рівностей властивості 6 є наслідком першої рівності та властивостей 9 і 10.

Таким чином, треба перевірити по одній із рівностей властивостей 6 і 10. Зробимо це для першої з них. Інша доводиться аналогічно, але простіше.

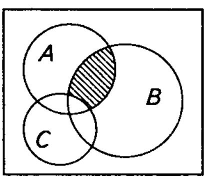
Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$; тоді $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Розглянемо обидві можливості. Якщо $x \in A$, то $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$ для довільних множин B, C, отже, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Якщо ж $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$; тоді для довільної множини A маємо $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$. Отже, в будь-якому разі $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, і тому $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Навпаки, нехай $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$; тоді $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$. Можливі два випадки: $x \in A$, і тоді $x \in A \cup (B \cap C)$ незалежно від множин B і C, або ж $x \notin A$, і тоді з умов $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$ дістанемо $x \in B$ і $x \in C$, тобто $x \in B \cap C$. Звідси $x \in A \cup (B \cap C)$ для довільної множини A. Це означає, що $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Порівнявши цей факт зі співвідношенням, добутим вище, дістанемо потрібну рівність.



$B \setminus A$

Рис. 1.1



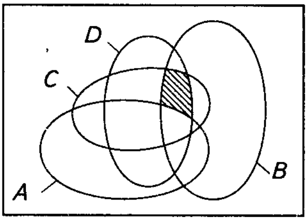
$A \cap B \cap \overline{C}$

Рис. 1.2

Дії над множинами часто ілюструють так званими *діаграмами В'єнна*. При цьому за універсальну множину U беруть точки на площині всередині квадрата, а за підмножини множини U — точки, що лежать усередині якихось кіл, овалів, трикутників, квадратів та інших ліній. Для ілюстрації множини діаграмою потрібно дотримуватися такого *правила: кожна наступна лінія, зображена на рисунку, має перетинати кожну частину універсальної множини, утворену раніше проведеними лініями.*

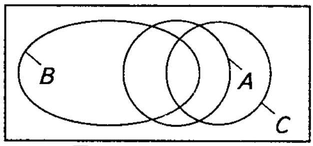
Приклади правильного зображення кіл і овалів на діаграмах, якими можна ілюструвати результати виконання дій над двома, трьома або чотирма множинами, наведено на рис. 1.1—1.3 відповідно, а неправильного зображення овалів — на рис. 11.4, 11.5 (оскільки на рис. 11.4 не можна зобразити множину $\overline{A} \cap B \cap C$, а на рис. 5 — множину $A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$).

За аналогією з означенням перерізу та об'єднання двох множин визначається переріз та об'єднання будь-якої системи множин S. $\bigcap_{A\in S}$ — множина всіх елементів, які належать кожній множині A системи S. Ця множина називається ***перерізом (або перетином) множин системи*** S. $\bigcup_{A\in S}$ — множина всіх елементів, які належать хоча б одній із множин системи S. Ця множина називається ***об'єднанням множин системи*** S.



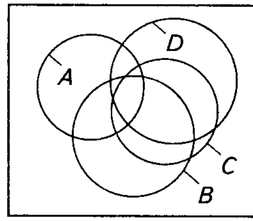
$\overline{A} \cap B \cap C \cap D$

Рис. 1.3



$\overline{A} \cap B \cap C = \varnothing$

Рис. 1.4



$A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D} = \varnothing$

Рис. 1.5

Означення 1.2. Нехай $A_1, \ldots, A_n$ — множини. ***Прямим (декартовим) добутком цих множин*** *називають множину* $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$.

Два елементи прямого добутку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ рівні між собою тільки у випадку, коли $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_n = b_n$.

Припустимо, що множина A_1 має k_1 елементів, A_2 — k_2 елементів, ..., A_n — k_n елементів. Тоді легко зрозуміти, що $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ має $k_1 k_2 \ldots k_n$ елементів.

■ **Приклад 1.4**. *Нехай* $n = 2$. Тоді $A \times B$ — множина всіх пар вигляду (a, b), де $a \in A$, $b \in B$. Зокрема, якщо A має p елементів, B — q елементів, то множина $A \times B$ може бути зображена точками перетину p паралельних прямих із q паралельними прямими, проведеними під прямим кутом до першої сім'ї прямих.

1.2 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Комбінаторика вивчає задачі вибору або розміщення елементів деякої, найчастіше скінченної, множини відповідно до визначених наперед правил.

Означення 1.3. Нехай дано множину з n елементів. ***Переставленням із n елементів*** *називатимемо спосіб присвоєння їм номерів від 1 до n*. Кількість переставлень позначимо P_n.

Теорема 1.1. $P_n = n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ — добуток усіх натуральних чисел від 1 до n).

Доведення

Будемо послідовно присвоювати елементам даної множини номери від 1 до n. Нехай A_1 — множина присвоєнь елементам множини номера 1, тоді A_1 має n елементів; A_2 — множина присвоєнь номера 2, тоді A_2 має $n - 1$ елемент, оскільки номер 2 можна надати довільному елементові, крім того, який одержав номер 1. Аналогічно міркуючи, дістанемо, що A_k — множина присвоєнь номера k — має $n - k + 1$ елементів при $k = 1; 2; ...; n$ (A_n має один елемент). Таким чином, P_n дорівнює кількості елементів множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, що й потрібно довести.

Означення 1.4. ***Переставленням із n елементів по k елементів*** *називатимемо спосіб присвоєння номерів від 1 до k деяким елементам множини, яка має n елементів*. Кількість таких переставлень позначимо A_n^k.

- *Зауваження*. Поняття, розглянуте раніше, можна було б назвати переставленням із n елементів по n елементів, тобто $A_n^n = P_n$.

Теорема 1.2. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доведення аналогічне попередньому. Треба ввести множини $A_1, A_2, \ldots, A_k$ і знайти кількість елементів у множині $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$. Тоді $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. Якщо останню рівність домножимо й поділимо на число $(n-k)! = (n-k)(n-k-1)\ldots 2 \cdot 1$, то дістанемо потрібну формулу для A_n^k. Оскільки при $k = n$ маємо

$n! = P_n = A_n^n$, зручно вважати, що $0! = 1$ (інакше теорема буде хибною при $k = n$).

Означення 1.5. ***Комбінацією з n елементів по k елементів*** *називатимемо підмножину, що має k елементів, у множині з n елементів.* Кількість таких комбінацій позначимо C_n^k.

Теорема 1.3. $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доведення

Кожне переставлення з n елементів по k елементів можна уявити як вибір деякої підмножини з k елементів у множині з n елементів і присвоєння саме цим елементам номерів від 1 до k. Оскільки перше можна зробити C_n^k способами, а друге — P_k способами, незалежно від першого, то маємо $A_n^k = C_n^k P_k$. Ураховуючи формули з попередніх двох теорем, дістанемо потрібне.

Теорема 1.4. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, де $k + 1 \leq n$.

Для доведення можна було б скористатися теоремою 1.3 (пропонуємо зробити це самостійно). Ми обійдемося без цього. В множині з $(n + 1)$ елементів виділимо який-небудь елемент a, тоді всі $(k + 1)$-елементні її підмножини (всього таких C_{n+1}^{k+1}) поділяються на два типи: $(k + 1)$-елементні множини, що не містять a (всього таких C_n^{k+1}), і множини, кожна з яких утворена з деякої k-елементної множини приєднанням до неї елемента a (всього таких C_n^k).

У комбінаториці часто застосовується метод підрахунку кількості $N(0)$ елементів деякої множини, які не мають жодної з властивостей $B_1, B_2, ..., B_n$. Метод називається *принципом включення-виключення.*

Нехай множина A має N елементів, деякі з яких характеризуються властивостями $B_1, B_2, ..., B_n$. Позначимо через $N(B_i)$ кількість елементів, які мають властивість B_i; $N(B_i, B_j)$ — кількість елементів, що мають як властивість B_i, так і властивість B_j; $N(B_i, B_j, B_k)$ — кількість елементів, що мають кожну з властивостей B_i, B_j, B_k, і т. д. Розглянемо тільки випадки $n = 1; 2; 3$.

Теорема 1.5. При $n = 1$ $N(0) = N - N(B_1)$; при $n = 2$ $N(0) = N - N(B_1) - N(B_2) + N(B_1, B_2)$; при $n = 3$ $N(0) = N - N(B_1) - N(B_2) - N(B_3) + N(B_1, B_2) + N(B_1, B_3) + N(B_2, B_3) - N(B_1, B_2, B_3)$.

Доведення розглянемо при $n = 3$, оскільки випадок $n = 1$ очевидний, а $n = 2$ — простіший. Для наочності на діаграмі В'єнна (рис. 1.6) для трьох множин позначимо через a, b, c, d, e, f, g, h кількості елементів множин, утворених при перерізі трьох множин елементів, які мають властивості B_1, B_2, B_3 відповідно. За умовою маємо: $N(0) = h$; $N = a + b + c + d + e + f + g + h$; $N(B_1) = a + b + e + d$; $N(B_2) = b + c + d + f$; $N(B_3) = e + d + f + g$; $N(B_1, B_2) = b + d$; $N(B_1, B_3) = e + d$; $N(B_2, B_3) = d + f$; $N(B_1, B_2, B_3) = d$.

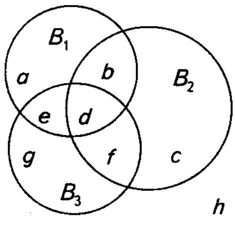


Рис. 1.6

Перевірка рівності тепер полягає у виконанні вказаних у правій частині формули теореми арифметичних дій.

■ **Приклад 1.5**. *В опуклому n-кутнику при $n \geq 4$ проведено всі діагоналі. Виявилося, що немає жодної точки, спільної для якихось трьох діагоналей. Скільки точок усередині n-кутника утворилося?*

Оскільки кожна точка утворюється лише внаслідок перетину двох діагоналей, кількість точок дорівнює кількості пар діагоналей, що перетинаються. Кожна з таких пар визначає четвірку вершин n-кутника і, навпаки, кожна четвірка вершин визначає дві діагоналі, що перетинаються. Отже, дістаючи C_n^4 четвірок, маємо саме стільки точок усередині n-кутника.

■ **Приклад 1.6**. *Скільки всього семицифрових чисел, які мають кожну з цифр 1, 2, 3 хоча б по одному разу?*

Скористаємося принципом включення-виключення. Тут властивість B_k полягає в тому, що семицифрове число не має цифри k. Тоді $N(B_1) = N(B_2) = N(B_3) = 8 \cdot 9^6$, оскільки першою може бути довільна цифра, крім 0 і k, а решта шість цифр — довільні, крім k. Аналогічно $N(B_1, B_2) = N(B_1, B_3) = N(B_2, B_3) = 7 \cdot 8^6$, $N(B_1, B_2, B_3) = 6 \cdot 7^6$. Оскільки $N(0)$ — кількість чисел, які не мають жодної властивості B_1, B_2 чи B_3, тобто $N(0)$ — кількість чисел, що мають кожну із зазначених цифр, то $N(0) = 9 \cdot 10^6 - 3 \cdot 8 \cdot 9^6 + 3 \cdot 7 \cdot 8^6 - 6 \cdot 7^6$ — шукана кількість, і $N(0) = 1632791$.

1.3 ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Розглянемо множини натуральних чисел **N**, цілих чисел **Z**, раціональних чисел **Q**, дійсних чисел **R**, комплексних **C** та їх основні властивості.

Множина натуральних чисел **N** — це множина **N** = {1; 2; 3; ...}.

Основні властивості множини натуральних чисел

1. *Кожен елемент* $n \in \mathbf{N}$ *має наступний за ним елемент* $n + 1 \in \mathbf{N}$.
2. *Два елементи з* $\mathbf{N}$ *рівні між собою тоді й лише тоді, коли рівні між собою наступні за ними елементи.*
3. *Єдиним елементом у* $\mathbf{N}$, *який не є наступним для якогось іншого елемента з* $\mathbf{N}$, *є елемент* 1.
4. *Якщо деяка підмножина* A *множини* $\mathbf{N}$ *містить* 1 *і разом із кожним своїм елементом* n *містить його наступний елемент* $n + 1$, *то* $A = \mathbf{N}$.

Легко зрозуміти, що ці властивості є визначальними для множини $\mathbf{N}$, оскільки довільна множина, яка задовольняє умови 1—4, збігається з $\mathbf{N}$.

Властивості 1 і 2 множини $\mathbf{N}$ дають змогу природно ввести *дії додавання й множення:* $n + m$ — натуральне число, добуте послідовним знаходженням m разів наступного, починаючи з числа n; mn — натуральне число, добуте послідовним додаванням m доданків, кожен з яких дорівнює n. Крім того, якщо з числа $x \in \mathbf{N}$ послідовним знаходженням наступного можна дістати y, казатимемо, що x менше від y й писатимемо $x < y$. Умова $x \le y$ або (що одне й те саме) $y \ge x$ означає, що $x < y$ або $x = y$.

Властивості зазначених дій і співвідношень

5. $x + y = y + x$.
6. $xy = yx$.
7. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
8. $(xy)\, z = x\, (yz)$.
9. $x\, (y + z) = xy + xz$.
10. $1 \cdot x = x$.
11. *Для довільних натуральних* x, y *справджується одна з умов* $x \le y$ *або* $y \le x$.
12. $x \le x$.
13. *Якщо* $x \le y$ *і* $y \le x$, *то* $x = y$.
14. *Якщо* $x \le y$ *і* $y \le z$, *то* $x \le z$.

Властивість 4 множини $\mathbf{N}$ зазвичай називають *принципом математичної індукції*, що є основою методу математичної індукції доведення низки теорем, які залежать від натурального числа n.

Нехай треба довести деяке твердження $P(n)$ в одному з таких в и п а д к і в:

а) для всіх $n \in \mathbf{N}$;

б) для всіх таких $n \in \mathbf{N}$, що $n \geq n_0$;

в) для всіх таких $n \in \mathbf{N}$, що $n_0 \leq n \leq n_1$.

Яким чином здійснити доведення?

Насамперед слід перевірити початкове значення $P(n)$, тобто переконатися в істинності $P(1)$ у випадку а) або $P(n_0)$ у випадках б) та в). Якщо дістанемо істинне твердження, то можна казати, що воно є *базою індукції.* Далі припускаємо, що твердження $P(n)$ вірне або для деякого n, або ж для всіх розглядуваних натуральних чисел, таких, що менші або дорівнюють деякому n. Цей крок зветься *припущенням індукції.*

Аналізуючи припущення індукції, ми повинні показати, як переконатися в істинності $P(n+1)$, тобто істинності твердження P для наступного за вказаним натуральним числом n — здійснити *індукційний крок.*

■ **Приклад 1.7.** *Довести, що при $\alpha > -1$ нерівність*

$$\boxed{(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha}$$

виконується при будь-якому $n \in \mathbf{N}$ (нерівність Бернуллі).

Маємо випадок а) методу математичної індукції. Твердження $P(1)$ очевидне, оскільки $1+\alpha = 1+\alpha$. Припустимо, що нерівність Бернуллі вірна при деякому $n \in \mathbf{N}$, тобто має місце твердження $P(n)$. Доведемо, що справедливе також твердження $P(n+1)$. Дійсно,

$$(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n\,(1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha) =$$
$$= 1+(n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1+(n+1)\alpha,$$

що й доводить нерівність Бернуллі.

■ **Приклад 1.8.** *Для всіх натуральних чисел $n \geq 5$ довести нерівність $2^n > n^2$.*

Маємо випадок б) методу математичної індукції, в якому $n_0 = 5$. $P(5)$ полягає в перевірці нерівності $2^5 > 5^2$. Остання нерівність вірна, отже, маємо базу індукції. Припущення індукції полягає в тому, що для деякого $n \in \mathbf{N}$ нерівність $2n > n^2$ істинна. Потрібно довести, що $2^{n+1} > (n+1)^2$, тобто здійснити індукційний крок. Маємо $2^{n+1} = 2\cdot 2^n = 2^n + 2^n > n^2 + n^2 = 2n^2$. Використано припущення індукції. Залишилося перевірити, наприклад, що $2n^2 > (n+1)^2$, тобто $n^2 > 2n+1$. Ця нерівність вірна при $n \geq 5$, отже, нерівність $2^{n+1} > (n+1)^2$ доведено.

Для натуральних чисел визначено поняття *подільності:* число $m \in \mathbf{N}$ буде дільником числа $n \in \mathbf{N}$, якщо $n = mx$ для деякого $x \in \mathbf{N}$. Кожне число n має дільники 1 і n, які називаються *тривіальними*. Число $n \in \mathbf{N}, n > 1$, яке не має інших дільників, крім тривіальних, називається *простим*. *Взаємно простими* натуральними числами будуть ті, що не мають спільних дільників більших від 1.

Множина $\mathbf{N}$ є підмножиною ***множини цілих чисел*** $\mathbf{Z} = \{0;\ \pm 1;\ \pm 2; \dots\}$, утвореної з $\mathbf{N}$ приєднанням елемента 0 і елемента $(-n)$ для кожного $n \in \mathbf{N}$. Арифметичні дії, визначені в $\mathbf{N}$, природно визначаються в $\mathbf{Z}$ і мають властивості, аналогічні властивостям 1, 2 і 5–14. До них додаються властивості, пов'язані з елементом 0:

15 $0 + x = x + 0 = x$;

16 $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$;

17 *для кожного* $x \in \mathbf{Z}$ *існує* $-x \in \mathbf{Z}$, *для якого* $x + (-x) = 0$;

18 *якщо* $x \geq 0$ *і* $y \geq 0$, *то* $xy \geq 0$ *і* $x + y \geq 0$.

Багато інших властивостей множини цілих чисел $\mathbf{Z}$ є наслідками вказаних.

Множина раціональних чисел $\mathbf{Q}$ утворена всіма виразами (дробами) вигляду $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$. При цьому рівність дробів $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ має місце тоді й лише тоді, коли $m_1 n_2 = n_1 m_2$. Визначена таким чином рівність дробів дає змогу ототожнити $\frac{m}{1}$ із цілим числом m, тобто вважати, що $\mathbf{Z}$ — підмножина $\mathbf{Q}$. Крім того, кожен елемент $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ можна замінити рівним йому нескоротним дробом, тобто таким, що m і n — взаємно прості.

Дії над дробами визначаються рівностями

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2}; \quad \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}.$$

Ці арифметичні дії мають властивості, аналогічні властивостям 5–18 множин $\mathbf{N}$ і $\mathbf{Z}$.

- *Зауваження.* В множині $\mathbf{Q}$ не визначено поняття наступного елемента так, як це було в $\mathbf{N}$ чи $\mathbf{Z}$.

Відрізняється $\mathbf{Q}$ від $\mathbf{Z}$ і такою властивістю:

19 *якщо* $x \neq 0$, *то існує* y, *для якого* $xy = 1$.

Дійсно, тут $\frac{m}{n}\frac{n}{m}=1.$

Розглянемо ще деякі поняття, пов'язані з упорядкованістю множини $\mathbf{Q}$ (властивість 11).

Означення 1.6. Нехай $A \neq \varnothing$ — підмножина $\mathbf{Q}$. *Множину A називають **обмеженою зверху**, якщо існує $M \in \mathbf{Q}$, для якого $a \le M$ для всіх $a \in A$, а число M — **верхньою межею** A. Підмножину A називають **обмеженою знизу**, якщо існує $m \in \mathbf{Q}$, для якого $m \le a$ для всіх $a \in A$, а число m — **нижньою межею** A.*

Ясно, що множина всіх верхніх меж (якщо вона непорожня) буде обмеженою знизу, оскільки кожен елемент $a \in A$ буде її нижньою межею. Проте не зовсім зрозуміло, чи має множина верхніх меж множини A найменше число, тобто чи існує найменша верхня межа множини A, яка належить множині $\mathbf{Q}$.

Приклад 1.9. *Нехай $A=\{x \mid x \in \mathbf{Q},\ x<2\}$.*

Ясно, що A обмежена зверху і 2 — найменша верхня межа A.

Приклад 1.10. *Нехай $A=\{x \mid x \in \mathbf{Q},\ x>0,\ x^2<2\}$. Довести, що найменшої верхньої межі множина A не має, хоч обмежена зверху.*

Дійсно, $x^2<2<4$, тому $(x-2)(x+2)<0$, отже, $x-2<0$, оскільки $x+2>0$; тож A — обмежена зверху, й число 2 — одна з верхніх меж A.

Припустимо, що $a \in \mathbf{Q}$, a — найменша верхня межа A. Тоді можливі варіанти: $a^2=2$; $a^2>2$ або $a^2<2$.

Якщо $a^2=2$, де $a=\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, то $m^2=2n^2$ і, отже, m^2 — парне, тому і m — парне. Нехай $m=2k$. Тоді $4k^2=2n^2$, $n^2=2k^2$. Отже, n^2 — парне й тому n — парне. Це суперечить нескоротності дробу, оскільки m і n мають спільний дільник 2.

Якщо $a^2>2$, то візьмемо $a_1=a-\frac{a^2-2}{2a}$. Ясно, що $a_1<a$, оскільки $a^2-2>0$. Крім того, $a_1^2=\left(a-\frac{a^2-2}{2a}\right)^2=a^2-2a\,\frac{a^2-2}{2a}+\left(\frac{a^2-2}{2a}\right)^2=$
$=2+\left(\frac{a^2-2}{2a}\right)^2>2$; отже, $x^2<2<a_1^2$, звідки $(x-a_1)(x+a_1)<0$ і $x<a_1$.

Це суперечить тому, що a — найменша верхня межа A. Справді, оскільки $a_1<a$ і $x<a_1$ для всіх $x \in A$, то a_1 — іще менша верхня межа множини A.

Якщо $a^2<2$, то візьмемо $x_1=a+\frac{2-a^2}{a+3}$; тоді $x_1>a$, оскільки $2-a^2>0$.

Маємо $x_1^2=\left(a+\frac{2-a^2}{a+3}\right)^2=\left(\frac{3a+2}{a+3}\right)^2$, тому нерівність $x_1^2<2$ рівносильна ланцюжку нерівностей $(3a+2)^2 < 2(a+3)^2$, $9a^2+12a+4 < 2a^2+12a+18$, $7a^2 < 14$. Оскільки остання нерівність вірна, то $x_1 \in A$, $x_1 > a$; отже, число a взагалі не буде верхньою межею A, що суперечить умові.

Цей приклад показує, що обмежена зверху підмножина множини $\mathbf{Q}$ не обов'язково має найменшу верхню межу, яка є раціональним числом.

Нехай $A \subset \mathbf{Q}$ і A — обмежена зверху множина. Тоді є найбільше ціле число x_0, для якого $x_0 \le a$ хоча б для одного $a \in A$. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ розглянемо множину чисел $\{x_0 + k \cdot 10^{-n}\}$, де $k = 0;\ 1;\ ...;\ 10^n$. Так, при $k = 0$ дістанемо число x_0, а при $k = 10^n$ — число $x_0 + 1$. Оскільки за означенням x_0 маємо $a < x_0 + 1$ для всіх $a \in A$, то знайдеться найбільше $k(n)$, для якого $x_0 + k(n)10^{-n} \le a$ хоча б для одного $a \in A$, але $x_0 + k(n)10^{-n} + 10^{-n} > a$ для всіх $a \in A$. Позначимо $r_n = x_0 + k(n)10^{-n}$. Записуючи $k(n)$ у десятковій системі числення, дістанемо $k(n) = x_n + 10x_{n-1} + ... + 10^{n-1}x_1$, де $x_1, \ldots, x_n \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ 9\}$. Звідси $r_n = x_0 + 10^{-1}x_1 + ...$ $... + 10^{-n}x_n$.

Порівняємо числа r_n і r_{n+1}. За побудовою маємо

$$\begin{cases} r_n < r_{n+1} + 10^{-n-1}, \\ r_{n+1} < r_n + 10^{-n}, \end{cases}$$

отже,

$$\begin{cases} x_0 + k(n)10^{-n} < x_0 + k(n+1)10^{-n-1} + 10^{-n-1}, \\ x_0 + k(n+1)10^{-n-1} < x_0 + k(n)10^{-n} + 10^{-n}. \end{cases}$$

Звідси легко дістати нерівність $-1 < k(n+1) - 10k(n) < 10$. Позначивши $k(n+1) - 10k(n) = x_{n+1}$, матимемо

$$x_{n+1} \in \{0;\ 1;\ \ldots;\ 9\},\ \ k(n+1) = x_{n+1} + 10k(n).$$

Отже, $r_{n+1} = r_n + 10^{-n-1}x_{n+1} = x_0 + 10^{-1}x_1 + ... + 10^{-n}x_n + 10^{-n-1}x_{n+1}$.

Таким чином, ми описали процес побудови цілого числа x_0 і послідовності цифр $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...$ за обмеженою зверху підмножиною A множини $\mathbf{Q}$.

Дійсним числом r називають вираз $r = x_0 + 0,\ x_1x_2 \ldots x_n \ldots$, де $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ знайдено за наведеним вище алгоритмом. Ціле число x_0 називають *цілою частиною дійсного числа* r, що позначається $x_0 = [r]$. Цифри $x_1, ..., x_n, ...$ — десяткові знаки дійсного числа r, а вираз $0,\ x_1x_2 \ldots x_n \ldots$ — нескінченний десятковий дріб.

На ***множині дійсних чисел*** **R** вводяться дії додавання, множення; ці числа можна також порівнювати. При цьому виконуватимуться властивості, аналогічні властивостям 5—19 множин **Z** і **Q**.

Означення 1.7. *Нехай $A \subset \mathbf{R}$. Числову множину A називають* ***обмеженою зверху (знизу)****, якщо є таке число $c \in \mathbf{R}$, що для всіх елементів $x \in A$ виконується нерівність $x \le c$ $(x \ge c)$.* Як і раніше, число c — верхня (нижня) межа множини A. *Якщо множина обмежена зверху й знизу, то її називають* ***обмеженою****. Найменша (найбільша) з усіх верхніх (нижніх) меж є* ***точною верхньою (нижньою) межею множини;*** це позначається як $\sup A$ $(\inf A)$ й читається: супремум A (інфінум A).

Сформулюємо *ознаку*, за якою можна встановити, що число c дійсно є точною верхньою (нижньою) межею множини A: *для всіх $x \in A$ виконується нерівність $x \le c$ $(x \ge c)$, причому для довільного $d < c$ $(d > c)$ знайдеться такий елемент $x \in A$, що $x > d$ $(x < d)$.*

Зазначимо нарешті, що будь-яка непорожня обмежена зверху (знизу) числова множина має точну верхню (нижню) межу. Цю властивість пропонуємо довести самостійно.

Як правило, у випадку, коли множина A не обмежена зверху (знизу), використовують позначення $\sup A = +\infty$ $(\inf A = -\infty)$. За такою домовленістю можна вважати, що будь-яка числова множина має скінченну або нескінченну точну верхню (нижню) межу.

Приклад 1.11. *Нехай $p = \sup A$, $q = \sup B$, $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Довести, що* $\sup(A + B) = p + q$.

Дійсно, якщо $x \in A + B$, то $x = a + b$, де $a \le p$, $b \le q$; отже, $a + b \le p + q$, тобто $p + q$ — верхня межа множини $A + B$. Припустимо, що $r < p + q$; тоді для чисел $p_1 = p - \frac{1}{2}(p + q - r)$ і $q_1 = q - \frac{1}{2}(p + q - r)$ маємо $p_1 < p$, $q_1 < q$, тобто p_1 і q_1 не є верхніми межами A і B відповідно. Отже, існують $a_1 \in A$ і $b_1 \in B$, для яких $a_1 > p_1$, $b_1 > q_1$. Але $a_1 + b_1 \in A + B$ і $a_1 + b_1 > p_1 + q_1 = r$; тому r не буде верхньою межею для $A + B$, тобто $p + q = \sup(A + B)$.

- *Зауваження.* Розглянутий приклад фактично дозволяє ввести дію додавання дійсних чисел у ситуації, коли ми маємо множини раціональних чисел A і B, для яких $p = \sup A$, $q = \sup B$ і $p + q$ — іще не визначене дійсне число.

Означення 1.8. ***Множина комплексних чисел*** **C** *утворена приєднанням до множини* **R** *числа i, для якого $i^2 = -1$, а також усіх чисел вигляду $a + bi$, де $a, b \in \mathbf{R}$.*

*Число a називають **дійсною**, а число b — **уявною частиною числа*** $z = a + bi$, що позначається $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$ відповідно. Числа $a_1 + b_1 i$ і $a_2 + b_2 i$ рівні між собою тільки у випадку $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. *Число $\bar{z} = a - bi$ називають **комплексно-спряженим до числа** $a + bi$.* Додавання й множення в **C** вводяться за формулами

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i.$$

Неважко перевірити, що дії з комплексними числами мають властивості, аналогічні властивостям 5—10 і 19 множин **Z** і **Q**. Так, для доведення властивості 19 візьмемо $z = a + bi$. Оскільки $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \in \mathbf{R}$, то $z \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = 1$, що й потрібно.

Віднімання й ділення комплексних чисел природно зводяться до дій додавання, множення й знаходження оберненого (властивість 19):

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2, \quad z_1 z_2 = z_1 \frac{1}{z_2},$$

де в останній рівності $z_2 \neq 0$.

- *Зауваження.* Комплексні числа не можна впорядкувати так, щоб виконувалися всі умови 11—18.

Крім стандартної форми запису комплексного числа $z = a + bi$, використовують *тригонометричну форму*, за якої a відкладається на осі абсцис, b — на осі ординат (рис. 1.7), тобто $a + bi$ зображається точкою $M(x, y)$, де $x = a$, $y = b$. При цьому вісь абсцис Ox називається *дійсною віссю*, вісь ординат Oy — *уявною*, а площина Oxy — *комплексною площиною*.

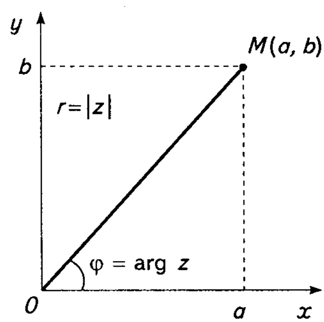


Рис. 1.7

➡ **Означення 1.9.** *Довжина відрізка OM називається **модулем числа*** $z = x + iy$, що позначається як $|z|$ і обчислюється за формулою

$$\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

***Аргументом числа** $x + iy$ називають кут $\varphi = \arg z = \angle MOx$, для якого*

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ясно, що кут $\varphi = \arg z$ визначений однозначно, якщо накласти додаткову умову $0 \le \varphi < 2\pi$. Взагалі аргумент визначений із точністю до доданка, кратного 2π, і позначається $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, де k — довільне ціле число. Аргумент числа 0 не визначений.

Якщо $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, то

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Це й буде тригонометричною формою запису комплексного числа.

Знаючи тригонометричну форму запису чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ і $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, легко обчислити їх добуток, частку або цілий степінь. Дійсно, тоді $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$. Отже, при множенні модулі комплексних чисел перемножуються, а аргументи додаються. Звідси

$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n).$$

Аналогічні міркування показують, що при діленні $\frac{z_1}{z_2}$ модуль частки є часткою модулів z_1 і z_2, а аргументом частки є різниця аргументів.

Формула піднесення комплексного числа до степеня дає змогу знайти всі комплексні числа z, для яких $z^n = x + iy$, де $x + iy$ — задане ненульове комплексне число. Дійсно, записавши $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $x + iy = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, дістанемо $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Отже, $r = \sqrt[n]{\rho}$ є арифметичним значенням кореня з додатного числа ρ, $\cos n\varphi = \cos\alpha$, $\sin n\varphi = \sin\alpha$. Звідси дістанемо $n\varphi = \alpha + 2\pi k$, де $k \in \mathbf{Z}$. Таким чином, $\varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}$. Ураховуючи неоднозначність визначення φ, числу k можемо надавати значень $0; 1; \ldots; n-1$, оскільки при значеннях $k_1 = k + n$

$$\varphi_1 = \frac{\alpha + 2\pi k + 2\pi n}{n} = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + 2\pi,$$

тобто аргумент z не змінюється, якщо до k додати число, кратне n. Остаточно:

$$z = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right),$$

де $k = 0;\ 1;\ \ldots;\ n - 1$.

1.4 ФУНКЦІЇ

➡ **Означення 1.10.** Нехай A, B — непорожні множини й задано правило f, за яким кожному елементові $a \in A$ ставиться у відповідність деякий елемент $b = f(a) \in B$; тоді f — ***функція з областю визначення A й множиною значень у множині B.*** При цьому *елемент a називають **аргументом**, а елемент b — **значенням функції**.* Множина значень функції f — підмножина множини B, що позначається $f(A)$ й визначається як множина всіх $b \in B$, для яких існує таке $a \in A$, що $b = f(a)$.

Графіком функції *f з областю визначення A й множиною значень у B називають підмножину Γ_f декартового добутку $A \times B$, утворену всіма елементами вигляду* $(a, f(a))$, де $a \in A$, $f(a) \in B$.

Аби підмножина $C \subset A \times B$ була графіком деякої функції, необхідно й достатньо, щоб множина C не мала елементів (a, b_1) і (a, b_2), де $b_1 \neq b_2$. Дійсно, графік функції Γ_f не може мати таких елементів, оскільки $b_1 = b_2 = f(a)$ за означенням функції. Навпаки, якщо C має вказану властивість, покладемо

$$A_1 = \{a \mid a \in A,\ (a, b) \in C\}.$$

Тепер можна вказати функцію f_1 з областю визначення A_1 і множиною значень у B, якщо покласти $f_1(a) = b$, де b — той елемент B, для якого $(a, b) \in C$.

➡ **Означення 1.11.** *Функцію f називають **взаємно однозначною відповідністю між множинами** A і B, якщо*:

1) *A — область визначення f, $B = f(A)$*;
2) *для різних елементів $a_1, a_2 \in A$ справджується умова* $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Множини A і B, між якими існує хоча б одна взаємно однозначна відповідність, називають *еквівалентними*.

Теорема Кантора. Нехай A — довільна непорожня множина, $B = 2^A$ — множина всіх підмножин множини A. Тоді A і B нееквівалентні.

Доведення

Припустимо, що f — взаємно однозначна відповідність між A та B з областю визначення A. Розглянемо $X = \{x \mid x \in A,\ \ x \notin f(x)\}$ — підмножину A. Оскільки $X \in B$, то існує $a \in A$, для якого $f(a) = X$. Якщо тепер $a \in X$, то $a \in f(a)$, отже, для цього елемента A не виконується умова означення X, тому $a \notin X$. Якщо ж $a \notin X$, то $a \notin f(a)$, отже, для цього елемента A виконується умова означення X, тому $a \in X$. У будь-якому разі маємо суперечність; отже, A і B нееквівалентні.

■ **Приклад 1.12.** *Нехай* $A = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ \ 0 < x < 1\}$. *Тоді* A *і* $\mathbf{N}$ *нееквівалентні.*

Припустимо, що f — взаємно однозначна відповідність між $\mathbf{N}$ та A з областю визначення $\mathbf{N}$; тоді $A = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}$. Запишемо кожен елемент A у вигляді нескінченного десяткового дробу:

$$f(1) = 0, a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\ldots;$$
$$f(2) = 0, a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(n) = 0, a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\ldots;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Тут a_{ij} — десятковий знак із номером j для числа $f(i)$.

Побудуємо нескінченний десятковий дріб $a = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, вибравши його цифри, наприклад, таким чином:

$$\alpha_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_{jj} \neq 1, \\ 2, & \text{якщо } a_{jj} = 1. \end{cases}$$

Ясно, що $0 < a < 1$ і $a \in \mathbf{R}$.

Чи може a дорівнювати одному з чисел $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$? Оскільки $\alpha_1 \neq a_{11}$, то $a \neq f(1)$; оскільки $\alpha_2 \neq a_{22}$, то $a \neq f(2)$, і взагалі, оскільки $\alpha_j \neq a_{jj}$, то $a \neq f(j)$ для довільного $j \in \mathbf{N}$. Таким чином, $a \neq f(n)$ для жодного $n \in \mathbf{N}$, що суперечить означенню f.

■ **Приклад 1.13.** *Множини* $\mathbf{Q}$ *і* $\mathbf{N}$ *еквівалентні.*

Позначимо через Q_k підмножину $\mathbf{Q}$, утворену дробами $\frac{m}{n}$, для яких $|m| + n = k$. Так, $Q_3 = \left\{\frac{-1}{2}; \frac{-2}{1}; \frac{2}{1}; \frac{1}{2}\right\}$. Очевидно, що $\mathbf{Q} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} Q_k$ і Q_k має скінченну кількість елементів. Будемо присвоювати тепер номери елементам із **Q**, починаючи з Q_1, Q_2, Q_3 і т. д., не надаючи повторно номерів тим елементам **Q**, які вже їх мають. Ясно, що кожен елемент **Q** дістане єдиний номер, який і вкаже на взаємно однозначну відповідність між **Q** і **N**.

Стосовно дійсних чисел часто використовується геометрична мова. Це пов'язано, насамперед, із тією обставиною, що, як відомо зі шкільного курсу математики, між точками прямої та множиною **R** можна встановити взаємно однозначну відповідність. Саме через це множину **R** часто називають *числовою прямою (віссю)*, а її елементи — *точками числової прямої.*

Введемо позначення й назви числових множин:

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ — *інтервал* (a, b);

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x \le b\}$ — *відрізок* $[a, b]$;

$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \le b\}$ — *півінтервал* $(a, b]$, *який містить кінець* b;

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x < b\}$ — *півінтервал* $[a, b)$, *який містить кінець* a.

Надалі інтервали, відрізки й півінтервали іноді називатимемо *числовими проміжками* або просто *проміжками.*

Числові множини $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\}$, $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \le b\}$, $(-\infty, b] = \{\overline{x} \in \mathbf{R} \mid \overline{x} \le b\}$, $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$ називатимемо *необмеженими проміжками.*

Для визначення відстані між точками числової прямої використовується функція

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \ge 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

яка називається *модулем*, або *абсолютним значенням*, *числа* x. Із погляду геометрії $|x - y|$ означає, очевидно, відстань між $x, y \in \mathbf{R}$.

Далі часто використовуються властивості модуля числа:

1 $|xy| = |x|\,|y|$;

2 $|x + y| \le |x| + |y|$.

Властивість 1 негайно випливає з означення модуля числа. Для доведення властивості 2 зазначимо, що, додавши очевидні нерівності $-|x| \le x < |x|$; $-|y| \le y \le |y|$, матимемо $-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$. Отже, справді,

$$|x + y| \le |x| + |y|, \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Застосувавши метод математичної індукції, наведені вище властивості можна поширити на будь-яку скінченну кількість дійсних чисел.

Нехай тепер f — функція з областю визначення A, з множиною значень у B, а g — функція з областю визначення C і множиною значень в A (рис. 1.8). Тоді визначена функція fg за формулою $(fg)(c) = f(g(c))$. Ця функція називається *суперпозицією функцій* g і f (або складною функцією, утвореною з g і f). Областю визначення цієї функції буде C, множиною значень — $f(g(C))$.

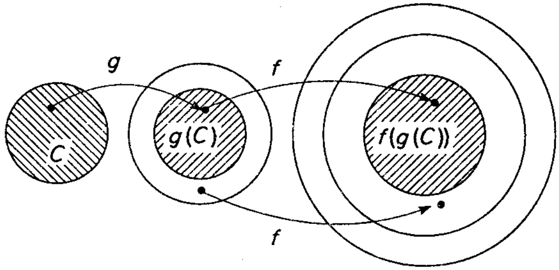


Рис. 1.8

■ **Приклад 1.14**. Якщо f — взаємно однозначна відповідність між A та B, то існує єдина функція g, яка задовольняє умови

$$f(g(b)) = b \text{ і } g(f(a)) = a$$

для всіх $a \in A$, $b \in B$. Ця функція називається *оберненою для функції* f. Так, оскільки функція $y = \cos x$ буде взаємно однозначною відповідністю між підмножинами дійсних чисел $[0; \pi]$ і $[-1; 1]$, то для оберненої функції $x = \arccos y$ справедливі рівності

$$\cos(\arccos y) = y \quad \text{і} \quad \arccos(\cos x) = x,$$

якщо $x \in [0; \pi]$, $y \in [-1; 1]$.

Глава **2**

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА Й АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНІВ

2.1 ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 2.1. ***Матриця порядку*** $m \times n$ *— це прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. Матрицю з єдиним стовпцем називають* ***вектор-стовпцем,*** *матрицю з єдиним рядком —* ***вектор-рядком,*** *а матрицю порядку* $n \times n$ *—* ***квадратною порядку n.***

Якщо треба підкреслити, як саме позначаються елементи матриці A, писатимемо $A = (a_{ij})$. Тут a_{ij} — елемент матриці, який стоїть в i-му рядку й в j-му стовпці.

У рівних між собою матрицях мають бути однакові кількості рядків і стовпців, а також рівні між собою відповідні елементи.

Приклад 2.1. *Нехай* $A = (a_{ij})$, *де* $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$. Це означає, що A — матриця порядку $m \times n$. Позначимо A^* матрицю $B = (b_{ij})$, для якої $b_{ij} = a_{ji}$, тоді A^* — матриця порядку $n \times m$, яка називається *транспонованою до A.*

Як виявляється, над матрицями можливі арифметичні дії, властивості яких близькі до властивостей арифметичних дій над числами.

Означення 2.2. ***Для множення матриці на число або числа на матрицю*** *треба помножити на це число кожен елемент матриці.* ***Для додавання матриць одного порядку*** *потрібно додати їх відповідні елементи, утворивши із сум матрицю того самого порядку. Матриці різних порядків додавати не можна.*

Інакше кажучи, якщо $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, де $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., n$, то $C = A + B$ — сума матриць A і B, якщо $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Безпосередніми наслідками наведених означень є такі співвідношення:

1) $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$;

2) $0 \cdot A = A \cdot 0 = O$;

3) $\alpha \cdot O = O \cdot \alpha = O$;

4) $\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)\,A = (A\alpha)\,\beta = A\,(\alpha\beta)$;

5) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

6) $A + B = B + A$;

7) $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$;

8) $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

9) $A + O = O + A = A$;

10) $A + (-1)\,A = O$.

Тут A, B, C — матриці одного порядку; α, β — числа; O — нульова матриця (всі її елементи дорівнюють нулю). Перевірити вказані властивості не складно.

Складніше визначається добуток матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$.

Означення 2.3. *Множення можливе тільки у випадку, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Отже, нехай A — матриця порядку $m \times n$, B — матриця порядку $n \times k$.* ***При множенні A на B*** *утворюється матриця $C = (c_{ij})$ порядку $m \times k$, кожен елемент якої обчислюється за формулою*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

або скорочено

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}b_{\alpha j}.$$

Таким чином, елемент добутку $AB = C$, який стоїть в i-му рядку та j-му стовпці, є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B.

■ **Приклад 2.2**. *Обчислити $AB - BA$ для матриць*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$AB = \begin{pmatrix} 5\cdot 4 + 2\cdot 7 & 5(-1) + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 4 + 6\cdot 7 & 1(-1) + 6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ 46 & 17 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 38 & 32 \end{pmatrix},$$

отже,

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 15 & -1 \\ 8 & -15 \end{pmatrix}.$$

Властивості добутку матриць

1. $(AB)\ C = A\ (BC)$.
2. $A\ (B + C) = AB + AC$.
3. $(A + B)\ C = AC + BC$.
4. *Для матриці* $E = \begin{pmatrix} 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$ *справедливі рівності*

   $AE = EA = A$.

   Ця матриця E називається ***одиничною***.

5. $(AB)^* = B^*A^*$, *де* $*$ *— транспонування матриці.*

Тут A, B, C — довільні матриці, для яких наведені рівності мають сенс.

Доведемо першу властивість — *асоціативність множення матриць*. Позначимо $D = AB$, $F = BC$, $G = DC$, $H = AF$. Треба довести, що $G = H$.

Оскільки множення вказаних вище матриць можливе, то A буде порядку $m \times n$, B — порядку $n \times k$, C — порядку $k \times l$. З означення множення дістанемо, що D — порядку $m \times k$, F — порядку $n \times l$ і, отже, G і H — матриці одного порядку $m \times l$.

Зафіксуємо довільні i, j і доведемо, що $g_{ij} = h_{ij}$. Матимемо

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_{i\alpha} c_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} b_{\beta\alpha} \right) c_{\alpha j};$$

$$h_{ij} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} f_{\beta j} = \sum_{\beta=1}^{n} a_{i\beta} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j} \right).$$

Позначивши $t_{\alpha\beta} = a_{i\beta} b_{\beta\alpha} c_{\alpha j}$, дістанемо

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\sum_{\beta=1}^{n} t_{\alpha\beta} \right); \quad h_{ij} = \sum_{\beta=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{k} t_{\alpha\beta} \right).$$

Кожна із зазначених сум дорівнює сумі всіх елементів деякої матриці $(t_{\alpha\beta})$, обчисленій двома різними способами. Отже, $h_{ij} = g_{ij}$, що й потрібно довести.

Інші властивості добутку матриць доводяться аналогічно, тільки простіше.

Розглянемо спеціальні квадратні матриці $E_{ij}(\alpha) = E + \alpha E_{ij}$, де E — одинична матриця (див. властивість 4), E_{ij} — матриця, в i-му рядку і j-му стовпці якої стоїть 1, а решта елементів дорівнюють 0, $i \neq j$. Такі матриці назвемо ***елементарними***.

Нехай A — довільна квадратна матриця того самого порядку, що й $E_{ij}(\alpha)$; в цьому разі визначені обидва добутки $A \cdot E_{ij}(\alpha)$ і $E_{ij}(\alpha)A$. З'ясуємо їх зміст.

Маємо $A \cdot E_{ij}(\alpha) = A(E + \alpha E_{ij}) = AE + \alpha AE_{ij} = A + \alpha AE_{ij}$. З означення 2.3 множення матриць легко зрозуміти, що AE_{ij} — матриця, j-й стовпець якої — це i-й стовпець матриці A, а решта стовпців нульові. Таким чином, $A \cdot E_{ij}(\alpha)$ — матриця, утворена з матриці A додаванням до j-го стовпця її i-го стовпця, домноженого на число α.

Аналогічно доводиться, що матриця $E_{ij}(\alpha)A$ утворюється з матриці A додаванням до i-го рядка її j-го рядка, домноженого на число α.

Зазначені перетворення матриці A називатимемо ***основними елементарними перетвореннями стовпців і рядків.***

Теорема 2.1. Нехай A — довільна квадратна матриця. Тоді основними елементарними перетвореннями рядків із неї можна дістати верхню трикутну матрицю вигляду

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix},$$

де $*$ — деякі елементи матриці.

Доведемо теорему індукцією за порядком матриці. База індукції — $n = 1$ — очевидна, оскільки матриця порядку 1 уже є трикутною.

Розглянемо елементи першого стовпця довільної матриці A. Якщо перший елемент у ньому не дорівнює нулю, то, додаючи перший рядок, помножений на деякі числа, до інших рядків (елементарні перетворення!), дістанемо матрицю

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha & * \dots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right).$$

Очевидно, що здійснення основних елементарних перетворень рядків матриці A_1 не змінює першого рядка цієї матриці. За припущенням індукції, за допомогою таких перетворень з A_1 можна дістати верхню трикутну матрицю, що й дає верхню трикутну для даної матриці A.

Коли всі елементи першого стовпця матриці A дорівнюють нулю, то індукційний крок буде аналогічним, якщо покласти $\alpha = 0$. Якщо ж у першому стовпці i-й елемент є ненульовим, але $i \neq 1$, то, додавши i-й рядок до першого (елементарне перетворення!), дістанемо ненульовий перший елемент, і доведення зводитиметься до розглянутого раніше.

- *Зауваження.* Неважко змодифікувати доведення для того, щоб показати, як із матриці A за допомогою основних елементарних перетворень лише стовпців дістати верхню трикутну матрицю (з якого елемента почати?). Ясно також, що основними елементарними перетвореннями або лише рядків, або лише стовпців із довільної квадратної матриці можна утворити нижню трикутну матрицю.

2.2 ВИЗНАЧНИК МАТРИЦІ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

➡ **Означення 2.4.** ***Визначником*** *квадратної матриці A порядку n називають числову функцію* $\det A$, *значення якої знаходять таким чином: при $n = 1$, $A = (a_{11})$ вважають*

$$\det A = a_{11},$$

при $n > 1$

$$\det A = a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} + \dots + (-1)^{k-1} a_{k1}A_{k1} + \dots + (-1)^{n-1} a_{n1}A_{n1}$$

або скорочено

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{k1} A_{k1},$$

де $a_{11}, \ldots, a_{n1}$ — елементи першого стовпця матриці A; A_{k1} — визначник матриці порядку $n-1$, утвореної з A вилученням її k-го рядка й першого стовпця.

Означення дає змогу легко обчислити визначник матриць порядку 2 або 3. Так, при $n = 2$ маємо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тому

$$A_{11} = \det\ (a_{22}) = a_{22}, \quad A_{21} = \det\ (a_{12}) = a_{12},$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

При $n = 3$ скористаємося формулою для визначника матриці порядку 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

тому

$$A_{11} = \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{31} = \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

звідки

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

- *Зауваження.* Оскільки визначники знаходять індукцією за порядком матриці, то, знаючи формулу для визначника матриці порядку $n-1$, можна дістати формулу для визначника матриці порядку n.

■ **Приклад 2.3**. *Нехай* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *— верхня трикутна матриця.*

Тоді за означенням $\det A = a_{11}A_{11}$, де A_{11} — верхня трикутна матриця, утворена з A вилученням першого рядка й першого стовпця.

Продовжуючи за означенням обчислення визначника «меншої» трикутної матриці, дістанемо $\det A = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ — добуток діагональних елементів матриці A.

Далеко не завжди визначник матриці великого порядку обчислюється так просто, як у розглянутому прикладі. Для спрощення обчислення визначників використовуються їхні властивості.

Властивості визначників

1 *Якщо i-й рядок матриці C порядку n дорівнює сумі i-го рядка матриці A та i-го рядка матриці B, а решта рядків матриці A, B, C відповідно дорівнюють один одному, то* $\det C = \det A + \det B$.

Доведемо цю властивість індукцією за n.

При $n = 1$ твердження очевидне, оскільки тоді $C = (a_{11} + b_{11})$, $A = (a_{11})$, $B = (b_{11})$.

Припустивши, що твердження правильне для довільних матриць порядку $n - 1$, дістанемо

$$\det C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} c_{k1} C_{k1} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{k-1} c_{k1} C_{k1} + (-1)^{i-1} c_{i1} C_{i1} .$$

При $k \neq i$ за умовою матимемо $c_{k1} = a_{k1} = b_{k1}$, $c_{i1} = a_{i1} + b_{i1}$, $C_{i1} = A_{i1} = B_{i1}$, а за припущенням індукції $C_{k1} = A_{k1} + B_{k1}$, оскільки i-й рядок C, який становив суму i-х рядків матриць A і B, у матриці C_{k1} залишився невилученим. Тому

$$\det C = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{k-1} c_{k1} (A_{k1} + B_{k1}) + (-1)^{i-1} (a_{i1} + b_{i1}) C_{i1} =$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (-1)^{k-1} (a_{k1} A_{k1} + b_{k1} B_{k1}) + (-1)^{i-1} (a_{i1} A_{i1} + b_{i1} B_{i1}) =$$

$$= \det A + \det B,$$

що й потрібно було довести.

2 *Якщо матриця B утворена з матриці A множенням усіх елементів її i-го рядка на число* α, *то* $\det B = \alpha \det A$.

Доведення аналогічне попередньому.

3 *Якщо квадратну матрицю B порядку n утворено з матриці A переставленням її i-го та j-го рядків, то* $\det B = - \det A$.

Доводити властивість будемо індукцією за $n \geq 2$.

При $n = 2$ матимемо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$, тому за формулою для обчислення визначника другого порядку $\det B = - \det A$. Припустивши, що твердження правильне для матриць порядку $n - 1$, дістанемо

$$\det B = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, k \neq j}}^{n} (-1)^{k-1} b_{k1} B_{k1} + (-1)^{i-1} b_{i1} B_{i1} + (-1)^{j-1} b_{j1} B_{j1} .$$

При $k \neq i$, $k \neq j$ за умовою матимемо $b_{k1} = a_{k1}$, а за припущенням індукції $B_{k1} = -A_{k1}$, оскільки B_{k1} утворено з A_{k1} переставленням двох рядків (i-й та j-й рядки B не вилучені при знаходженні B_{k1}). Крім того, $b_{i1} = a_{j1}$, $b_{j1} = a_{i1}$ за умовою. Далі для певності вважатимемо $i < j$.

Обчислимо визначники B_{i1} та B_{j1}. B_{i1} — визначник матриці, утвореної тими самими рядками матриці A, що й визначник A_{j1}: визначник B_{i1} утворюється рядками матриці A з номерами $...i-1, i+1, ..., j-1, i, j+1, ...$, а визначник A_{i1} — рядками матриці A з номерами $...i-1, i, i+1, ..., j-1, j+1, ...$ (крапками тут позначено номери рядків, спільних для B_{i1} і A_{i1}). Неважко помітити, що B_{i1} можна дістати з A_{i1}, виконавши $j-1-i$ перестановок i-го рядка матриці A. Оскільки за припущенням індукції щоразу знак визначника змінюється на протилежний, дістанемо $B_{i1} = (-1)^{j-1-i}A_{i1}$. Звідси

$$(-1)^{i-1}b_{i1}B_{i1} = (-1)^{i-1}a_{j1}(-1)^{j-i-1}A_{j1} = -(-1)^{j-1}a_{j1}A_{j1}\ .$$

Аналогічно доводиться, що $(-1)^{j-1}b_{j1}B_{j1} = -(-1)^{j-1}a_{j1}A_{j1}$.

Підставивши ці значення в початкову формулу для $\det B$, матимемо

$$\det B = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,\, k \neq j}}^{n} (-1)^{k-1}a_{k1}(-A_{k1}) - (-1)^{j-1}a_{i1}A_{i1} - (-1)^{i-1}a_{j1}A_{j1} = -\det A,$$

що й потрібно було довести.

4 *Якщо матриця A має нульовий рядок, то* $\det A = 0$.

Справді, домноживши всі елементи нульового рядка матриці A на нуль, дістанемо матрицю B, для якої $\det B = 0 \cdot \det A = 0$. Оскільки в даному випадку $A = B$, то $\det A = 0$.

5 *Якщо матриця A має два однакових рядки, то* $\det A = 0$.

Справді, переставивши два однакових рядки матриці A, дістанемо матрицю B, для якої за властивістю 3 матимемо $\det B = -\det A$. Оскільки $B = A$, то $\det A = -\det A$, звідки $\det A = 0$.

6 *Якщо матрицю B утворено з матриці A додаванням до i-го рядка її j-го рядка, помноженого на довільне число* α, *то* $\det B = \det A$.

Справді, i-й рядок матриці B є сумою двох рядків: i-го рядка матриці A та j-го, помноженого на α. За властивістю 1 дістанемо $\det B = \det A + \det C$, де в матриці C i-й рядок дорівнює j-му її рядку, помноженому на α. За властивостями 2 і 5 маємо $\det C = 0$, тому $\det B = \det A$.

7 *Нехай $A=(a_{ij})$ — квадратна матриця порядку n, тоді*

$$\det A=\sum(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$$

— алгебраїчна сума $n!$ добутків елементів матриці A, взятих із кожного рядка й стовпця рівно по одному разу, тобто підсумовування поширюється на всі переставлення

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix},\ \sigma(k)=i_k,$$

де $\operatorname{inv}\sigma$ — кількість інверсій переставлення σ, тобто кількість пар (k, m), для яких $k<m$, $\sigma(k)>\sigma(m)$.

■ **Приклад 2.4**. *При $n=2$ маємо* $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Тут підсумовування поширюється на два переставлення, які визначаються індексами елементів добутків. Оскільки $\operatorname{inv}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=0$, а $\operatorname{inv}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=1$, то перший доданок входить у суму зі знаком «+», а другий — зі знаком «–».

Цей приклад є базою індукції при доведенні властивості 7 індукцією за n.

Припустивши, що твердження справедливе для матриць порядку $n-1$, дістанемо

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{k1}A_{k1},$$

де для кожного визначника A_{k1} формула правильна. Тому $A_{k1}=$ $=\sum\limits_{s\neq k}(-1)^{\operatorname{inv}\bar\sigma}a_{1i_1}\dots a_{si_s}\dots a_{ni_n}$ — алгебраїчна сума $(n-1)!$ доданків, які є добутками елементів A_{k1}, взятих рівно по одному разу з кожного рядка й кожного стовпця,

$$\bar\sigma=\begin{pmatrix}1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n\\ i_1 & \dots & i_{k-1} & i_{k+1} & \dots & i_n\end{pmatrix}.$$

Підставивши значення A_{k1} у формулу для $\det A$ й розкривши дужки, матимемо алгебраїчну суму $(n-1)!n=n!$ добутків вигляду $a_{k1}a_{1i_1}\dots$ $\dots a_{si_s}\dots a_{ni_n}$ де $s\neq k$, отже, алгебраїчну суму $n!$ добутків елементів матриці A, взятих по одному з кожного рядка й стовпця. Залишилося визначити знак біля кожного добутку й довести, що $(-1)^{k-1}(-1)^{\operatorname{inv}\bar\sigma}=(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$, де

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & n\\ i_1 & \dots & i_{k-1} & 1 & i_{k+1} & \dots & i_n\end{pmatrix}.$$

Ясно, що кожна інверсія, утворена переставленням $\overline{\sigma}$, даватиме інверсію для σ.

Оскільки $\begin{cases} 1 < k \\ i_1 > 1 \end{cases}, \ldots, \begin{cases} k-1 < k \\ i_{k-1} > 1 \end{cases}$, маємо додатково ще $k-1$ інверсій.

Більше інверсій переставлення σ не дає, бо при $k < k + t$ маємо $1 < \sigma(k + t)$, отже, $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\overline{\sigma} + k - 1$, і формулу властивості 7 доведено.

8 *Якщо A — квадратна матриця, то* $\det A^* = \det A$.

За властивістю 7 визначників $\det A$ і $\det A^*$ є алгебраїчними сумами одних і тих самих добутків вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\ldots a_{ni_n}$, оскільки внаслідок транспонування матриці A її елементи, які стояли в різних рядках і стовпцях, стоятимуть у різних рядках і стовпцях матриці A^*. Єдине, чим могли б відрізнятися ці суми, — це знаки доданків. У суму для $\det A$ вказаний вище добуток входить зі знаком $(-1)^{\operatorname{inv}\sigma}$, а в суму для $\det A^*$ — зі знаком $(-1)^{\operatorname{inv}\hat{\sigma}}$, де $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, а $\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, тобто $\hat{\sigma}$ — відображення, обернене до σ.

Нехай (k, m) — інверсія, утворена σ, тобто $k < m$, $\sigma(k) > \sigma(m)$, звідки $(\sigma(m), \sigma(k))$ — інверсія, утворена $\hat{\sigma}$, оскільки $\sigma(m) < \sigma(k)$, $\hat{\sigma}(\sigma(m)) > \hat{\sigma}(\sigma(k))$.

Таким чином, σ взаємно однозначно відображає множину інверсій σ на множину інверсій $\hat{\sigma}$, тобто $\operatorname{inv}\sigma = \operatorname{inv}\hat{\sigma}$.

- *Зауваження.* Властивість 8 дає змогу довести властивості визначників щодо стовпців, аналогічні властивостям 1—6 стосовно рядків. Так, властивість, аналогічна властивості 1, доводитиметься таким чином. У матрицях C^*, A^* і B^* виконуються умови властивості 1, тому $\det C^* = \det A^* + \det B^*$. Звідси за властивістю 8 маємо $\det C = \det A + \det B$, що й потрібно було довести.

9 *Якщо A і B — квадратні матриці одного порядку, то*

$$\boxed{\det(AB) = \det A \det B.}$$

Ураховуючи теорему 2.1 та інтерпретацію множення елементарної матриці на A й матриці B на елементарну, переконуємося, що існують елементарні матриці $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, для яких $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r A = T_A$ — верхня трикутна, і матриці $\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_{r+s}$, для яких $B\varepsilon_{r+1} \ldots \varepsilon_{r+s} = T_B$ — верхня трикутна. Тоді $\det A \det B = \det T_A \det T_B$ за властивістю 6 визначників і її аналогом (див. попереднє зауваження).

Враховуючи означення множення матриць, дістанемо, що $T_A T_B$ — верхня трикутна матриця, діагональні елементи якої — добутки відповідних діагональних елементів T_A і T_B. Отже, det $(T_A T_B)$ — добуток діагональних елементів $T_A T_B$, що дорівнює добутку добутків діагональних елементів T_A і T_B. Таким чином,

$$\det A \det B = \det T_A \det T_B = \det (T_A T_B) =$$
$$= \det (\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_r \; A \; B \; \varepsilon_{r+1} \ldots \varepsilon_{r+s}) = \det (AB).$$

Остання рівність виконується, оскільки матрицю ліворуч утворено з AB основними елементарними перетвореннями рядків і стовпців і, отже, їх визначники рівні між собою за властивістю 6 визначників і за її аналогом для стовпців.

■ **Приклад 2.5**. *Нехай* $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$. Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -b_1 a_2 - a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{pmatrix}.$$

Використавши формулу det (AB) = det A det B, дістанемо тотожність Лагранжа

$$(a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)^2 = (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2).$$

2.3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

➡ **Означення 2.5**. ***Системою лінійних рівнянь,*** *або* ***лінійною системою,*** *називають сукупність рівностей вигляду*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — ***вектор-стовпець невідомих,*** $x_1, \ldots, x_n$ — ***невідомі координати*** x; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — ***вектор-стовпець вільних членів,*** *або* ***права***

частина системи; $A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$ — ***основна матриця системи,*** *елементи якої* a_{ij} *називають* ***коефіцієнтами біля невідомих;*** $a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ — ***вектор-стовпці основної матриці;***

$(A \mid b)$ — ***розширена матриця системи.***

Якщо $m = n$, *то систему називають* ***квадратною,*** *а якщо* $b = 0$, *то* ***однорідною.***

Ці позначення й терміни надалі будуть стандартними.

■ **Приклад 2.6.** $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ — система лінійних рівнянь, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець невідомих; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ — основна матриця; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець вільних членів.

Кожну систему лінійних рівнянь можна записати як у стандартному, так і в матричному або векторному вигляді.

Ураховуючи означення множення матриць A і x, переконуємося, що система лінійних рівнянь може бути записана як рівність $Ax = b$. Це й є *матричний запис системи.* Аналогічно, виконавши арифметичні дії $x_1a_1 + \dots + x_na_n$, побачимо, що лінійну систему можна записати як рівність $x_1a_1 + \dots + x_na_n = b$. Це й є *векторний спосіб задання системи.*

■ **Приклад 2.7.** Систему рівнянь із прикладу 2.6 можна записати ще й так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

➡ **Означення 2.6.** ***Розв'язком лінійної системи*** *називають множину всіх числових вектор-стовпців x, для яких виконується рівність* $Ax = b$.

Систему називають ***сумісною,*** *якщо множина її розв'язків непорожня, й* ***несумісною*** *— в противному разі.*

■ **Приклад 2.8**. Система з прикладу 2.6 має розв'язок $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, тому буде сумісною.

Рівняння системи називатимемо *порожнім*, якщо воно має вигляд $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i$, де b_i — число.

Очевидно, що система, яка має порожнє рівняння й $b_i \neq 0$, буде несумісною. В непорожньому рівнянні коефіцієнт принаймні біля одного невідомого не дорівнює нулю.

Зведені системи

➡ **Означення 2.7**. *Систему лінійних рівнянь називають* ***зведеною****, якщо в кожному її непорожньому рівнянні вказане одне виділене невідоме, яке входить із ненульовим коефіцієнтом лише в це рівняння.*

■ **Приклад 2.9**. Система $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$ є зведеною, оскільки x_2 входить із ненульовим коефіцієнтом лише в перше, а x_5 — тільки в друге рівняння системи, тобто x_2 і x_5 — виділені невідомі (виділеними невідомими тут можуть бути також x_3 і x_5).

Властивості зведених систем

1. *Кількість непорожніх рівнянь зведеної системи не перевищує кількості невідомих.*

Справді, кожному непорожньому рівнянню ставиться у відповідність тільки одне виділене невідоме.

2. *Зведена система сумісна тоді й лише тоді, коли в ній немає порожніх рівнянь вигляду* $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i$, де $b_i \neq 0$.

Ясно, що зазначених порожніх рівнянь у сумісній системі не повинно бути. Якщо ж їх немає, то, виразивши виділені невідомі через вільні члени й, можливо, через невідомі, які не є виділеними, дістанемо всі розв'язки системи.

3. *Сумісна зведена система має єдиний розв'язок тоді й лише тоді, коли кількість її непорожніх рівнянь дорівнює кількості невідомих.*

4. *Сумісна зведена система має безліч розв'язків тоді й лише тоді, коли кількість її непорожніх рівнянь менша від кількості невідомих.*

Справді, якщо кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, то всі невідомі є виділеними й вони виражаються через вільні члени, тобто розв'язок єдиний. Якщо ж кількість рівнянь менша від кількості невідомих, то є невиділені невідомі. Надаючи їм довільних значень і знаходячи значення виділених невідомих, дістанемо безліч розв'язків.

◆ ***Наслідок***. *Зведена система, яка має більше ніж один розв'язок, матиме безліч розв'язків.*

Це безпосередній наслідок формулювань властивостей 1, 3, 4.

Дві системи лінійних рівнянь називають ***рівносильними***, якщо множини їх розв'язків збігаються. ***Елементарними*** називають такі перетворення системи лінійних рівнянь: 1) *множення якогось рівняння на число, відмінне від нуля;* 2) *переставлення якихось двох рівнянь;* 3) *додавання одного рівняння, помноженого на число, до іншого рівняння системи.*

Лема 2.1 (Гаусса). Система, утворена з лінійної системи елементарними перетвореннями, рівносильна початковій.

Твердження про перетворення 1) і 2) очевидне. Нехай $L_1 = b_1$, $L_2 = b_2$ — якісь два рівняння початкової системи. В системі, добутій із неї перетворенням 3), рівняння $L_2 = b_2$ замінюється на $L_2 + \alpha L_1 = b_2 + \alpha b_1$. Якщо правильні рівності $L_1 = b_1$ і $L_2 = b_2$ початкової системи, то виконуються рівності $L_1 = b_1$ і $L_2 + \alpha L_1 = b_2 + \alpha b_1$. Навпаки, якщо виконуються рівності $L_1 = b_1$ і $L_2 + \alpha L_1 = b_2 + \alpha b_1$ перетвореної системи, то правильні рівності $L_1 = b_1$ і $L_2 = b_2$ початкової.

Теорема 2.2 (Гаусса—Жордана). Кожна лінійна система за допомогою елементарних перетворень може бути перетворена на зведену лінійну систему.

Справді, взявши довільне непорожнє рівняння з номером i, відмітимо в ньому деяке невідоме x_j, яке входить у це рівняння з ненульовим коефіцієнтом a_{ij}. Додамо це рівняння, помножене на число $-\dfrac{a_{kj}}{a_{ij}}$, до кожного іншого рівняння з номером $k \neq i$. За лемою Гаусса дістанемо систему, рівносильну початковій і таку, що одне з невідомих (а саме x_j) входить із ненульовим коефіцієнтом тільки у вибране рівняння з номером i, тобто є виділеним у цьому рівнянні. Продовжуючи аналогічні дії над рівняннями цієї системи, які ще не мають виділеного невідомого, зрештою матимемо зведену систему.

◆ ***Наслідок 1.*** *Якщо лінійна система однорідна й кількість невідомих більша за кількість рівнянь, то вона має безліч розв'язків.*

Ясно, що така система сумісна. Знайдемо відповідну зведену систему. Кількість невідомих залишиться більшою від кількості рівнянь, тому за властивістю 4 зведених систем дістанемо потрібне.

◆ ***Наслідок 2.*** *Якщо система квадратна й має єдиний розв'язок, то при будь-якій зміні її правої частини дістанемо систему, яка має єдиний розв'язок.*

Справді, знайдемо відповідну зведену систему за допомогою деякої послідовності елементарних перетворень. У ній кількість непорожніх рівнянь дорівнює кількості невідомих за властивістю 3 зведених систем, тому ця зведена система не має порожніх рівнянь.

Змінивши праву частину й повторивши згадану вище послідовність елементарних перетворень, матимемо нову зведену систему без порожніх рівнянь. Тому ця зведена система задовольняє умови властивості 3 й має єдиний розв'язок.

У доведенні теореми Гаусса—Жордана фактично викладено метод розв'язання довільної системи лінійних рівнянь. Він називається *методом Гаусса—Жордана* й полягає в поступовому перетворенні системи на зведену.

Арифметичні дії, вказані в методі, найкраще виконувати з розширеною матрицею системи, яка несе вичерпну інформацію про систему.

- *Зауваження.* Елементарні перетворення системи породжують е л е м е н т а р н і п е р е т в о р е н н я р о з ш и р е н о ї м а т р и ц і:

  1) множення довільного рядка матриці на число, відмінне від нуля;

  2) переставлення якихось двох рядків матриці;

  3) додавання якогось рядка, помноженого на число, до іншого рядка матриці (основне елементарне перетворення).

У теоремі Гаусса—Жордана, перекладеній на мову елементарних перетворень розширеної матриці, йдеться про те, що довільну матрицю системи лінійних рівнянь можна перетворити на таку розширену матрицю, що в кожному ненульовому рядку її основної матриці буде такий ненульовий елемент, що всі інші елементи стовпця, в якому він стоїть, дорівнюватимуть нулю.

■ **Приклад 2.10.** *Нехай маємо систему*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1\,, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4\,, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 3\,, \\ \qquad 7x_1 + 6x_3 + 9x_4 = 4\,. \end{cases}$$

Стрілками вкажемо, які рядки розширеної матриці, помножені на число, додаються до інших; у кружечки візьмемо коефіцієнти біля виділених невідомих у відповідному рівнянні:

$$\begin{array}{r} -4 \\ \\ -2 \\ -6 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & 7 & 3 \\ 7 & 0 & 6 & 9 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} -11 \\ \\ 2 \\ -12 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -10 & 11 & 0 & -6 & -15 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -5 \\ -11 & 12 & 0 & -3 & -20 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{r} \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -39 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & 8 & -6 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -39 & 40 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -39 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 47 & -46 \\ 0 & 1 & 0 & -36 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

У результаті послідовних елементарних перетворень дістали зведену систему (з одним порожнім рівнянням). Знайшовши значення виділених невідомих (x_1 — із першого, x_2 — з третього, x_3 — з другого рівнянь системи), матимемо

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 + 39x_4 \\ 35 + 36x_4 \\ -46 - 47x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

— нескінченну множину розв'язків системи.

Квадратні системи

Метод Гаусса—Жордана належить до універсальних методів розв'язання лінійних систем. Для розв'язання квадратних систем є ще один метод — формули Крамера.

Теорема 2.3 (Крамера). Нехай $Ax = b$ — квадратна система й $\det A \neq 0$. Тоді система має єдиний розв'язок $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, який можна знайти за формулами $x_i = \frac{\Delta_i}{\det A}$, де Δ_i — визначник матриці, утвореної з A заміною її i-го стовпця на стовпець вільних членів b.

Лема 2.2 (про одиничну матрицю). Нехай A — квадратна матриця й $\det A \neq 0$. Тоді елементарними перетвореннями рядків з A можна дістати одиничну матрицю.

Для доведення скористаємося тим, що основними елементарними перетвореннями з матриці A можна дістати верхню трикутну матрицю. Тоді її діагональні елементи не дорівнюють нулю, оскільки за умовою $\det A \neq 0$. Використовуючи елементарні перетворення першого типу, матимемо на діагоналі одиниці. Починаючи з останнього рядка, основними елементарними перетвореннями утворимо одиничну матрицю.

Для доведення теореми перевіримо її спочатку для випадку $A = E$. Оскільки тут $\det A = 1$ і $Ex = b$, тобто $x_i = b_i$, треба перевірити, що $\Delta_i = b_i$.

Справді,

$$\Delta_i = \det\begin{pmatrix} 1 \dots b_1 \dots 0 \\ 0 \dots b_2 \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \dots b_n \dots 1 \end{pmatrix}$$

Використовуючи основні елементарні перетворення стовпців, із Δ_i можна утворити діагональну матрицю, всі елементи якої дорівнюють 1, крім одного, котрий дорівнює b_i, отже, $\Delta_i = b_i$, що й було потрібно.

Нехай тепер A — довільна матриця. Запишемо частку $\frac{\Delta_i}{\det A}$ і прослідкуємо, як вона змінюється внаслідок елементарних перетворень розширеної матриці системи. При множенні рядка на число, відмінне від нуля, на нього буде помножений відповідний рядок визначників Δ_i і $\det A$, тому за властивістю 2 визначників їх відношення не зміниться. При переставленні двох рядків розширеної матриці переставляються відповідні рядки в Δ_i і $\det A$, тому за властивістю 3 визначників частка не зміниться. І, нарешті, при виконанні основного елементарного перетворення не змінюється ні Δ_i, ні $\det A$. Отже, частка $\dfrac{\Delta_i}{\det A}$ не змінюється при виконанні довільних елементарних перетворень рядків розширеної матриці. За лемою 2.3 такими перетвореннями з A можна дістати одиничну матрицю. Оскільки ми вже перевірили, що для одиничної матриці вказана частка дорівнює x_i, то вона дорівнювала x_i і для початкової матриці A.

Залишилося довести єдиність розв'язку.

Очевидно, що при $b = 0$ система має єдиний розв'язок $x = 0$, оскільки за довільного способу зведення A до одиничної матриці права частина системи (вектор-стовпець b) дорівнює нулю. Застосувавши наслідок 2 теореми Гаусса—Жордана, дістанемо єдиність для довільного вектор-стовпця b.

- *Зауваження.* Формули Крамера ефективно працюють для матриць невеликих ($n = 2$; 3; 4) порядків. За більших n метод Гаусса—Жордана зручніший, оскільки потребує меншої кількості обчислень, ніж за формулами Крамера. Проте перевагою останніх формул є те, що вони дають розв'язок системи в явному вигляді.

Теорема 2.4 (про існування ненульового розв'язку). Нехай A — квадратна матриця, $Ax = 0$ — однорідна квадратна система лінійних рівнянь. Тоді рівносильні такі умови:

1) $\det A = 0$;
2) система має ненульовий розв'язок.

Доведення

Якщо система має ненульовий розв'язок, але $\det A \neq 0$, то це суперечить теоремі Крамера, отже, з умови 2) випливає умова 1).

Нехай тепер $\det A = 0$. Елементарними перетвореннями рядків знайдемо відповідну зведену систему. Якщо кількість її непорожніх рівнянь менша від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків, що й потрібно. Якщо ж кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, то в основній матриці зведеної системи в кожному рядку й кожному стовпці є єдиний ненульовий елемент (коефіцієнт біля виділеного невідомого). За властивістю 7 визначників визначник такої матриці не дорівнює нулю, що суперечить умові. Отже, з умови 1) випливає умова 2).

Означення 2.8. ***Оберненою матрицею*** *до квадратної матриці A називають матрицю B, для якої $AB = BA = E$.*

Якщо квадратна система рівнянь $Ax = b$ така, що A має обернену матрицю, то після множення цієї рівності на B (матриця B ліворуч) дістанемо $B(Ax) = Bb$.

Ураховуючи асоціативність множення матриць, матимемо $B(Ax) = (BA)x = x$, тобто $x = Bb$. Отже, знаючи обернену до основної матриці квадратної системи, легко знайти її розв'язок. Виникають цілком природні запитання щодо існування оберненої матриці та її знаходження.

З означення 2.3 множення матриць випливає, що матриця, яка не є квадратною, не може мати оберненої.

Теорема 2.5. Нехай A — квадратна матриця. Тоді рівносильні такі умови:

1) A має обернену матрицю;
2) $\det A \neq 0$.

Доведення

Нехай $\det A \neq 0$. Шукатимемо матрицю X, для якої $AX = E$. Покладемо $X = (u_1 \mid u_2 \mid \dots u_n)$, де $u_1, u_2, \dots, u_n$ — вектор-стовпці матриці X. Ураховуючи означення 2.3 множення матриць, дістанемо систему рівностей $Au_1 = e_1, \dots, Au_n = e_n$, де $e_1, \dots, e_n$ — вектор-стовпці одиничної матриці E. Кожна з них — система лінійних рівнянь, яку можна розв'язати методом Гаусса—Жордана, звівши матрицю системи A до одиничної (лема про одиничну матрицю). Ясно, що після зведення стовпцями вільних членів будуть шукані стовпці $u_1, \dots, u_n$. Доведемо, що $XA = E$, тобто матриця X обернена.

Оскільки $\det A^* \neq 0$ (властивість 8 визначників), то за доведеним вище є матриця Y того самого порядку, для якої $A^*Y = E$. Звідси за властивістю 5 множення матриць $Y^*A = E$. Тоді з асоціативності множення матриць дістанемо $Y^* = Y^*E = Y^*(AX) = (Y^*A)X = EX = X$, тобто $Y^* = X$ і $XA = E$, що й потрібно. Таким чином, з умови 2) випливає умова 1).

Для доведення зворотного твердження припустимо, що A має обернену матрицю B, але $\det A = 0$. Тоді за означенням оберненої матриці й за властивістю 9 визначників дістанемо $1 = \det E = \det AB = \det A \det B = 0$, що неможливо.

- *Зауваження.* В першій частині доведення теореми фактично викладено метод відшукання матриці, оберненої до матриці з ненульовим визначником, а саме:

1) праворуч від даної матриці A з ненульовим визначником дописуємо одиничну матрицю E того самого порядку;

2) елементарними перетвореннями рядків матрицю ліворуч перетворюємо на одиничну, виконуючи одночасно аналогічні елементарні перетворення рядків матриці праворуч;

3) матриця праворуч, утворена після здійснення всіх перетворень, і буде оберненою.

Матриця, обернена до матриці A, позначається A^{-1}.

2.4 ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ

Означення 2.9. Нехай K — одна з числових множин $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ або $\mathbf{C}$. *Непорожня множина V називається **лінійним простором** над K, якщо виконуються такі умови:*

1) *визначена операція додавання елементів із V, яка за довільними елементами $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ із множини V дає змогу знайти третій елемент із V, що позначається $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$;*

2) *визначена операція множення довільного числа α з K на довільний елемент $\boldsymbol{v}$ із V, унаслідок якої можна знайти елемент $\alpha\boldsymbol{v}$ із V;*

3) *операції додавання й множення на число мають такі властивості:*

а) $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$;

б) $(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3)$;

в) *для довільних $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ із V існує єдиний $\boldsymbol{x}$ із V, для якого $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_2$;*

г) $\alpha_1(\alpha_2\boldsymbol{v}) = (\alpha_1\alpha_2)\boldsymbol{v}$;

д) $\alpha(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \alpha\boldsymbol{v}_2$;

е) $(\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v} + \alpha_2\boldsymbol{v}$;

ж) $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

- *Зауваження 1.* Елементи лінійного простору найчастіше називають *векторами* незалежно від природи цих елементів.

- *Зауваження 2.* З означення легко дістати (як саме?) такі твердження:
  1) є нульовий елемент $\mathrm{O} \in V$, для якого $\boldsymbol{v} + \mathrm{O} = \mathrm{O} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$;
  2) $\boldsymbol{v} + (-1)\boldsymbol{v} = \mathrm{O}$;
  3) $0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathrm{O}$ (0 — число, O — нульовий елемент V).

Приклад 2.11. V — лінійний простір вектор-стовпців, додавання яких і множення числа на вектор-стовпець такі, як відповідні дії з матрицями.

Це основний приклад лінійного простору, який ми назвемо *простором вектор-стовпців довжини n* і позначимо K^n.

- **Приклад 2.12.** V — лінійний простір векторів — напрямлених відрізків тривимірного простору.

- **Приклад 2.13.** V — лінійний простір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь.

Виконання умов 1)–3) означення 2.9 у прикладі 2.13 легко перевірити, записавши систему у вигляді $Ax = 0$.

Розглянемо одне з найважливіших понять, пов'язане з лінійними просторами, — поняття лінійної комбінації векторів та їх лінійної залежності.

Означення 2.10. Нехай $e_1, \ldots, e_n$ — елементи лінійного простору V, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числа з K. *Тоді вектор* $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ *називають **лінійною комбінацією** $e_1, \ldots, e_n$ з коефіцієнтами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ясно, що при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ дістанемо лінійну комбінацію, що дорівнює нулю. Називатимемо її ***тривіальною.***

Проте й нетривіальна лінійна комбінація може дорівнювати нульовому векторові. Прикладом може бути набір векторів $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, для якого при $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ дістанемо

$2e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Означення 2.11. *Якщо серед чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ хоча б одне не дорівнює нулю й $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$, то вектори $e_1, \ldots, e_n$ називають **лінійно залежними.***

*Якщо вектори $e_1, \ldots, e_n$ такі, що лише тривіальна їх комбінація дорівнює нульовому векторові, то ці вектори називають **лінійно незалежними.***

З поняттям лінійної комбінації пов'язаний іще один цікавий приклад лінійного простору.

- **Приклад 2.14.** *Нехай V — лінійний простір над K, $e_1, \ldots, e_n$ — вектори з V.* Позначимо через W множину всіх лінійних комбінацій векторів $e_1, \ldots, e_n$. Очевидно, що сума двох лінійних комбінацій $e_1, \ldots, e_n$ також буде лінійною комбінацією, отже, виконується умова 1) означення 2.9; якщо $w = \alpha e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in W$, то $\alpha w = \alpha(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = (\alpha\alpha_1)e_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n)e_n \in W$, тобто виконується умова 2). З умови 3) означення 2.9 очевидне виконання всіх властивостей, крім, можливо, в). Для її перевірки візьмемо $\boldsymbol{w}_1 = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$, $\boldsymbol{w}_2 = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{e}_n$. Тоді, поклавши $\boldsymbol{x} = (\beta_1 - \alpha_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\beta_n - \alpha_n)\boldsymbol{e}_n$, матимемо $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_2$. Єдиність $\boldsymbol{x}$ випливає з того, що таке $\boldsymbol{x}$ єдине в лінійному просторі V.

Розглянутий вище лінійний простір називатимемо ***лінійним простором, породженим векторами*** $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

➡ **Означення 2.12**. ***Базисом лінійного простору*** *V називатимемо вектори $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in V$, якщо кожен вектор із V єдиним способом може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.*

Неважко зрозуміти, що вектори базису будуть лінійно незалежними. Дійсно, якщо $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = 0$, то, врахувавши, що нульовий вектор зображується у вигляді $\boldsymbol{0} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{e}_n$ і в означенні є вимога єдиності зображення цього вектора, дістанемо $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$.

Навпаки, припустимо, що $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — такі лінійно незалежні елементи V, що для довільного $\boldsymbol{v} \in V$ система векторів $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ буде залежною; тоді $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис (систему векторів, яка має зазначену властивість, називають *максимальною лінійно незалежною системою*).

Справді, з умови залежності $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ дістанемо $\alpha\boldsymbol{v} + \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = 0$. Умова $\alpha = 0$ дає $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = 0$, де хоча б один із коефіцієнтів відмінний від нуля, що суперечить лінійній незалежності $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Тому $\alpha \neq 0$ і $\boldsymbol{v} = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1 - \ldots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n$ — шукана лінійна комбінація. Залишається довести єдиність зображення $\boldsymbol{v}$ у вигляді лінійної комбінації.

Якщо $\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{e}_n$ і $\boldsymbol{v} = \gamma_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \gamma_n\boldsymbol{e}_n$, то, віднявши ці рівності, дістанемо $0 = (\beta_1 - \gamma_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\boldsymbol{e}_n$. З умови лінійної незалежності $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ маємо $\beta_1 - \gamma_1 = \ldots = \beta_n - \gamma_n = 0$; отже, $\beta_1 = \gamma_1, \ldots, \beta_n = \gamma_n$, що й доводить єдиність. Таким чином, ми довели теорему, сформульовану нижче.

Теорема 2.6 (про базис). Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — елементи лінійного простору V. Тоді рівносильні такі умови: $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис V; $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — максимальна лінійно незалежна система векторів.

■ **Приклад 2.15**. *Нехай K^n — лінійний простір вектор-стовпців. Позначимо*

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що кожен вектор-стовпець $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ єдиним способом записується як лінійна комбінація $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, а саме: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$; отже, маємо базис, який називатимемо *стандартним базисом лінійного простору вектор-стовпців.*

Не слід думати, що кожен лінійний простір має скінченний базис. Так, якщо V — лінійний простір многочленів (перевірте самостійно виконання умов означення 2.9), то існування скінченного базису означало б, що є многочлени найбільшого степеня, адже $\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$ не може мати степінь більшу за степені многочленів $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ із даного простору, тому цей простір скінченного базису не має.

➡ **Означення 2.13.** Нехай $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — довільний базис лінійного простору V, $\boldsymbol{v} \in V$. *Тоді з коефіцієнтів лінійної комбінації* $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$ *можна утворити стовпець* $[\boldsymbol{v}]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, *який називатимемо* ***координатним стовпцем вектора*** $\boldsymbol{v}$ ***у базисі*** $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Властивості координатних стовпців

1. $[\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}]_e = [\boldsymbol{v}]_e + [\boldsymbol{w}]_e$.
2. $[\alpha\boldsymbol{v}]_e = \alpha[\boldsymbol{v}]_e$.
3. $[\boldsymbol{e}_i]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (*число* 1 *стоїть в* i*-му рядку*).
4. $[\boldsymbol{v}]_e = [\boldsymbol{w}]_e$ *тоді й лише тоді, коли* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$.

Наведені властивості є безпосередніми наслідками означень і мають цікаву інтерпретацію. Вважатимемо, що відображення φ із V у K^n задане формулою $\varphi(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}]_e$ (кожному векторові ставиться у відповідність його координатний стовпець у деякому фіксованому базисі). Властивість 4 означає, що φ — взаємно однозначна відповідність, а властивості 1 і 2 — що

$$\varphi(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{v}_k) = \alpha_1\varphi(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_k\varphi(\boldsymbol{v}_k),$$

тобто довільна лінійна комбінація векторів $v_1, \ldots, v_k$ відображається в лінійну комбінацію векторів $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ із тими самими коефіцієнтами. Властивість 3 стверджує, що вибрані базисні вектори V відображаються у вектори стандартного базису. Отже, в певному розумінні лінійний простір V, в якому вибрано деякий довільний базис $e_1, \ldots, e_n$, — те саме, що лінійний простір вектор-стовпців, у якому вибрано стандартний базис.

Розглянемо ситуацію, коли задано два базиси $e_1, \ldots, e_n$, і $f_1, \ldots, f_m$ лінійного простору V. Насамперед з'ясуємо, чи обов'язково виконується рівність $m = n$.

Припустимо, що $n < m$. Запишемо e_1 у вигляді лінійної комбінації векторів $f_1, \ldots, f_m$, тобто $e_1 = x_1 f_1 + \ldots + x_m f_m$. Цю рівність можна записати в координатному вигляді відносно базису $e_1, \ldots, e_n$, тобто $[e_1]_e = x_1[f_1]_e + \ldots + x_m[f_m]_e$. Одержану рівність розглядатимемо як лінійну систему рівнянь відносно невідомих $x_1, \ldots, x_m$. Система напевно має єдиний розв'язок, оскільки коефіцієнти згаданої лінійної комбінації визначені однозначно. Кількість рівнянь системи дорівнює довжині координатних стовпців $[f_1]_e, \ldots, [f_m]_e$, отже, кількість невідомих такої лінійної системи більша від кількості рівнянь. Це неможливо, оскільки суперечить теоремі Гаусса—Жордана й властивості 3 зведених систем, тому припущення $n < m$ хибне. Аналогічно спростовується припущення $m < n$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 2.7 (про розмірність). Якщо лінійний простір V має базис із n елементів, то кожен інший базис V також має n елементів.

➡ **Означення 2.14.** *Число n, про яке йдеться в теоремі, зазвичай називають **розмірністю лінійного простору**.*

Нехай тепер $e_1, \ldots, e_n$ і $f_1, \ldots, f_n$ — два базиси лінійного простору V. Кожен вектор другого базису запишемо як лінійну комбінацію векторів першого базису й навпаки:

$$\begin{cases} f_1 = \alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{n1}e_n, \\ f_n = \alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n \end{cases} \text{ і } \begin{cases} e_1 = \beta_{11}f_1 + \ldots + \beta_{n1}f_n, \\ e_n = \beta_{1n}f_1 + \ldots + \beta_{nn}f_n. \end{cases}$$

➡ **Означення 2.15.** *Матриці*

$$T(e, f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1} \ldots \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ і } T(f, e) = \begin{pmatrix} \beta_{11} \ldots \beta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n1} \ldots \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

*називаються **матрицями переходу** від базису $e_1, \ldots, e_n$* до базису *$f_1, \ldots, f_m$ і навпаки: від другого базису до першого.*

- *Зауваження.* Стовпці матриці $T(e, f)$ — координатні стовпці $[f_1]_e, \ldots, [f_n]_e$, а стовпці матриці $T(f, e)$ — координатні стовпці $[e_1]_f, \ldots, [e_n]_f$.

Теорема 2.8 (про матриці переходу). $T(f, e) = (T(e, f))^{-1}$.

Справді,

$$e_j = \beta_{1j}(\alpha_{11}e_1 + \ldots + \alpha_{n1}e_n) + \beta_{2j}(\alpha_{12}e_1 + \ldots + \alpha_{n2}e_n) + \ldots + \beta_{nj}(\alpha_{1n}e_1 + \ldots + \alpha_{nn}e_n) = (\beta_1\alpha_{11} + \ldots + \beta_{nj}\alpha_{1n})e_1 + \ldots + (\beta_{1j}\alpha_{n1} + \ldots + \beta_{nj}\alpha_{nn})e_n.$$

Позначивши $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\beta_{kj}$, дістанемо матрицю (γ_{ij}), яка дорівнює $T(e, f)\ T(f, e)$ за означенням добутку матриць. Але з цієї рівності випливає $e_j = \gamma_{1j}e_1 + \ldots + \gamma_{jj}e_j + \ldots + \gamma_{nj}e_n$; тому, враховуючи єдиність розкладу e_j у вигляді лінійної комбінації $e_1, \ldots, e_n$, матимемо $\gamma_{jj} = 1, \gamma_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$, тобто $T(e, f)\ T(f, e) = E$.

Аналогічно доводиться, що $T(e, f)\ T(f, e) = E$. Врахувавши, що всі матриці тут квадратні одного порядку, дістанемо те, що й потрібно довести.

■ **Приклад 2.16.** *Нехай e_1, e_2, e_3 — базис лінійного простору V, $x = e_1 + e_2 + e_3$; $f_1, f_2, f_3 \in V$* і $f_1 = 3e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - 3e_3$, $f_3 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$. Довести, що f_1, f_2, f_3 — *базис V і знайти координати x у цьому базисі.*

Доведемо, що для довільного вектора $v = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3$ рівність $v = \beta_1f_1 + \beta_2f_2 + \beta_3f_3$ можлива тільки для одного набору чисел $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

Справді, маємо

$$\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3 = \beta_1(3e_1 - e_2 + e_3) + \beta_2(e_2 - 3e_3) + \beta_3(2e_1 - e_2 + 2e_3) =$$
$$= (3\beta_1 + 2\beta_3)e_1 + (-\beta_1 + \beta_2 - \beta_3)e_2 + (\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3)e_3.$$

Оскільки коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ визначені однозначно, дістанемо

$$\begin{cases} 3\beta_1 + 2\beta_3 = \alpha_1, \\ -\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = \alpha_2, \\ \beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3 = \alpha_3. \end{cases}$$

Ця лінійна система має єдиний розв'язок для довільної правої частини, якщо $\det A \neq 0$, де A — основна матриця системи. Обчисливши, дістанемо $\det A = 1$, отже, f_1, f_2, f_3 — базис. Підставивши $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, щоб мати $x = v$, розв'яжемо конкретну систему. Тоді $x = -9f_1 + 6f_2 + 14f_3$, $\beta_1 = -9$, $\beta_2 = 6$, $\beta_3 = 14$ — шукані координати вектора x.

Теорема 2.9. Нехай $e_1, ..., e_n$ і $f_1, ..., f_n$ — базиси лінійного простору V, $x \in V$. Тоді $[x]_e = T(e, f)\ [x]_f$.

Справді, за умовою теореми

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{f}_n,$$

де $\alpha_1, ..., \alpha_n$ — елементи координатного стовпця $[\boldsymbol{x}]_e$, $\beta_1, ..., \beta_n$ — елементи координатного стовпця $[x]_f$. Підставимо в другу рівність вирази для $f_1, ..., f_m$ з означення матриці переходу $T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$. Дістанемо

$$\boldsymbol{x} = \beta_1(\alpha_{11}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{n1}\boldsymbol{e}_n) + \beta_2(\alpha_{12}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ldots +$$
$$+ \beta_n(\alpha_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{nn}\boldsymbol{e}_n).$$

Ураховуючи означення лінійного простору, матимемо

$$\boldsymbol{x} = (\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2 + \ldots + \alpha_{1n}\beta_n)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + (\alpha_{n1}\beta_1 + \ldots + \alpha_{nn}\beta_n)\boldsymbol{e}_n.$$

Оскільки x єдиним способом зображається у вигляді лінійної комбінації векторів $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n$, то

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_1 + \ldots + \alpha_{1n}\beta_n = \alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\beta_1 + \ldots + \alpha_{nn}\beta_n = \alpha_n. \end{cases}$$

Отже, з означення множення матриць ми дістали рівність $T(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})[x]_f = [x]_e$, що й потрібно.

2.5 ЛІНІЙНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Означення 2.16. Нехай V і W — лінійні простори над K, $\mathcal{A}$ — функція, визначена для кожного $\boldsymbol{v} \in V$ і така, що $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) \in W$. *Якщо виконується рівність*

$$\mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) + \alpha_2 \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2)$$

для довільних чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ і $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$, то $\mathcal{A}$ *називають* ***лінійним відображенням*** *із V у W.*

■ **Приклад 2.17.** $V = K^n$, $W = K^m$ — лінійні простори вектор-стовпців розмірностей n і m відповідно, A — фіксована матриця порядку $m \times n$ із коефіцієнтами з K. Тоді за означенням можна покласти $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$.

Рівність, указана в означенні лінійного відображення, є наслідком рівності $A(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2) = \alpha_1 A\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 A\boldsymbol{v}_2$, правильної для довільних чисел α_1, α_2, вектор-стовпців $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ і матриці A.

■ **Приклад 2.18.** $V = W$ — лінійний простір многочленів степеня, не більшого від 2, тобто $V = W = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + a_2 x^2\}$, де $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$.

За означенням $\mathscr{A}(f(x)) = x\,f'(x)$. Для перевірки того, що $\mathscr{A}$ — лінійне відображення, потрібно знати, що $x(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))' = x(\alpha_1 f'_1(x) + \alpha_2 f'_2(x))$. Остання рівність є наслідком найпростіших правил знаходження похідної.

Як бачимо, лінійні відображення можуть задаватися досить різноманітними способами. Чи є якийсь уніфікований спосіб такого завдання?

➡ **Означення 2.17.** Нехай $e_1, ..., e_n$ — базис V, $f_1, ..., f_m$ — базис W, $\mathscr{A}$ — лінійне відображення з V у W. *Тоді кожен із векторів $\mathscr{A}(e_1), \ldots, \mathscr{A}(e_n)$ є лінійною комбінацією базисних векторів $f_1, ..., f_m$.*

Нехай $[\mathscr{A}(e_1)]_f, \ldots, [\mathscr{A}(e_n)]_f$ — координатні вектор-стовпці векторів $\mathscr{A}(e_1), \ldots, \mathscr{A}(e_n)$ відповідно.

***Матрицею відображення** $\mathscr{A}$ називатимемо матрицю $[\mathscr{A}]$, стовпцями якої будуть указані вектор-стовпці.*

• *Зауваження.* Якщо відома матриця $[\mathscr{A}]$, то легко визначити, як діє відображення $\mathscr{A}$. А саме: якщо $v \in V$ — довільний вектор, $v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, то $\mathscr{A}(v) = \alpha_1 \mathscr{A}(e_1) + \ldots + \alpha_n \mathscr{A}(e_n)$ за означенням і $[\mathscr{A}(v)]_f = \alpha_1[\mathscr{A}(e_1)]_f + \ldots + \alpha_n[\mathscr{A}(e_n)]_f$ — лінійна комбінація стовпців матриці $[\mathscr{A}]$ з відповідними коефіцієнтами.

Аналогічно задається поняття лінійного оператора.

➡ **Означення 2.18.** Нехай V — лінійний простір, $\mathscr{A}$ — лінійне відображення з V у V. *Тоді $\mathscr{A}$ називають **лінійним оператором простору** V.*

Матриця лінійного оператора будується аналогічно, але, на відміну від матриці лінійного відображення, визначається за фіксованим базисом $e_1, \ldots, e_n$ простору V.

➡ **Означення 2.19.** Оскільки $\mathscr{A}(e_1), \ldots, \mathscr{A}(e_n)$ є лінійними комбінаціями $e_1, \ldots, e_n$, то визначені координатні вектор-стовпці $[\mathscr{A}(e_1)]_e, \ldots, [\mathscr{A}(e_n)]_e$ у базисі $e_1, ..., e_n$. ***Матрицею лінійного оператора** $\mathscr{A}$ буде матриця $[\mathscr{A}]_e$, стовпцями якої є вказані вектор-стовпці.*

Теорема 2.10. Якщо $[\mathscr{A}]_e$ — матриця лінійного оператора $\mathscr{A}$ простору V, $e_1, ..., e_n$ — базис V, x — довільний вектор із V, $[x]_e$ — його координатний стовпець, то

$$[\mathscr{A}(x)]_e = [\mathscr{A}]_e [x]_e.$$

Справді, нехай $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Тоді $\mathscr{A}(x) = \alpha_1 \mathscr{A}(e_1) + \ldots + \alpha_n \mathscr{A}(e_n)$. Звідси з властивостей 1 і 2 координатних стовпців дістанемо $[\mathscr{A}(x)]_e = \alpha_1[\mathscr{A}(e_1)]_e + \ldots + \alpha_n[\mathscr{A}(e_n)]_e$. Оскільки $[x]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, то за означенням добутку матриць $[\mathscr{A}]_e[x]_e$ матимемо $[\mathscr{A}]_e[x]_e = [\mathscr{A}(e_1)]_e\alpha_1 + \ldots + [\mathscr{A}(e_n)]_e\alpha_n$. Звідси, враховуючи означення множення матриці на число й числа на матрицю, дістанемо потрібне.

Ця теорема показує, що приклад 2.17 лінійного оператора (у випадку $n = m$) є основним. У певному розумінні кожен лінійний оператор, який діє в скінченновимірному просторі V, задається так, як у цьому прикладі.

Ясно, що матриця лінійного оператора змінюється при зміні базису. Але як саме?

Нехай $e_1, \ldots, e_n$ і $f_1, \ldots, f_n$ — різні базиси лінійного простору V, $\mathscr{A}$ — лінійний оператор простору V, $T(e, f)$ — матриця переходу від першого базису до другого, $x \in V$ — довільний вектор.

Ураховуючи результат теореми 2.9, матимемо $[\mathscr{A}(x)]_e = T(e, f)\,[\mathscr{A}(x)]_f$.

За теоремою 2.10 звідси дістанемо

$$[\mathscr{A}]_e[x]_e = T(e, f)\,[\mathscr{A}]_f[x]_f.$$

Проте з тієї самої теореми маємо $[x]_e = T(e, f)[x]_f$, тому

$$[\mathscr{A}]_e T(e, f)[x]_f = T(e, f)\,[\mathscr{A}]_f[x]_f,$$

звідки

$$([\mathscr{A}]_e T(e, f) - T(e, f)\,[\mathscr{A}]_f)[x]_f = 0.$$

Оскільки $[x]_f$ — довільний вектор-стовпець, то замість нього можна взяти по черзі елементи стандартного базису. За означенням множення матриці на вектор зі стандартного базису побачимо, що добутком буде відповідний стовпець даної матриці. Використавши ці міркування щодо матриці в дужках, дістанемо

$$[\mathscr{A}]_e T(e, f) - T(e, f)\,[\mathscr{A}]_f = 0.$$

За теоремою 2.8 про матриці переходу матриця $T(e, f)$ має обернену, тоді з останньої рівності

$$(T(e, f))^{-1}([\mathscr{A}]_e T(e, f)) - (T(e, f))^{-1}(T(e, f)[\mathscr{A}]_f) = 0.$$

Ураховуючи асоціативність множення матриць, дістанемо

$$\boxed{T^{-1}(e, f)\,[\mathscr{A}]_e T(e, f) = [\mathscr{A}]_f.} \qquad (2.1)$$

Ця формула пов'язує матриці $[\mathcal{A}]_e$ і $[\mathcal{A}]_f$ лінійного оператора $\mathcal{A}$ у двох різних базисах $e_1, \ldots, e_n$ і $f_1, \ldots, f_n$.

Постає природне запитання: чи не можна, вибравши базис простору V якимось спеціальним способом, досягти того, щоб матриця лінійного оператора була якомога простішою?

■ **Приклад 2.19**. *Нехай* $[\mathcal{A}]_e = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ *— матриця лінійного оператора в стандартному базисі* $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Знайти матрицю цього оператора в базисі* $f_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Для розв'язання можна було б скористатися формулою, виведеною раніше, оскільки відома матриця $T(e, f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Можна діяти й по-іншому. Оскільки $[f_1]_e = f_1$, $[f_2]_e = f_2$, то за теоремою 2.10 дістанемо

$$[\mathcal{A}(f_1)]_e = [\mathcal{A}]_e [f_1]_e = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = 2[f_1]_e,$$

тому $\mathcal{A}(f_1) = 2f_1$. Аналогічно

$$[\mathcal{A}(f_2)]_e = [\mathcal{A}]_e [f_2]_e = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3[f_2]_e,$$

тому $\mathcal{A}(f_2) = 3f_2$.

За означенням матриці оператора $\mathcal{A}$ в базисі f_1, f_2 матимемо $[\mathcal{A}]_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ясно, що такий простий вигляд матриці пояснюється тим, що f_1 і f_2 дібрані спеціальним способом: саме так, щоб вектор $\mathcal{A}(f_i)$ був кратним вектору f_i при $i = 1; 2$.

➡ **Означення 2.20**. Нехай $\mathcal{A}$ — довільний лінійний оператор простору V над K, $v \in V$ — ненульовий вектор. *Якщо є число $\lambda \in K$, для якого $\mathcal{A}(v) = \lambda v$, то v називають* ***власним вектором****, а число λ —* ***власним числом*** *$\mathcal{A}$, яке відповідає власному векторові v.*

Так, у попередньому прикладі f_1 — власний вектор $\mathcal{A}$ з власним числом $\lambda_1 = 2$, а f_2 — власний вектор $\mathcal{A}$ з власним числом $\lambda_2 = 3$.

Теорема 2.11 (про діагональну матрицю). Якщо $\mathcal{A}$ — лінійний оператор лінійного простору V, $e_1, \ldots, e_n$ — базис V, утворений власними векторами $\mathcal{A}$, то в цьому базисі $[\mathcal{A}]_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ — діагональна матриця з власними числами оператора $\mathcal{A}$ по діагоналі.

Для доведення цієї простої, але важливої теореми достатньо згадати, що за означенням власних векторів маємо $\mathcal{A}(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\dots$, $\mathcal{A}(e_n) = \lambda_n e_n$, отже, за означенням матриці лінійного оператора $[\mathcal{A}]_e$ — діагональна.

Постає запитання: як знайти власні числа й вектори лінійного оператора? Припустимо, що він заданий матрицею $[\mathcal{A}]_f$ у деякому базисі $f_1, \dots, f_m$.

Означення власного вектора з урахуванням теореми записується у вигляді

$$[\mathcal{A}]_f [v]_f = \lambda [v]_f .$$

Цю рівність можна розглядати як однорідну систему рівнянь $([\mathcal{A}]_f - \lambda E)[v]_f = 0$ із квадратною основною матрицею. Оскільки нас цікавить випадок $v \neq 0$, скористаємося теоремою 2.4 про існування ненульового розв'язку такої системи. Умова існування $[v]_f \neq 0$ рівносильна умові

$$\boxed{\det([\mathcal{A}]_f - \lambda E) = 0.} \qquad (2.2)$$

Означення 2.21. *Рівняння (2.2) називають **характеристичним рівнянням** для матриці $[\mathcal{A}]_f$, а визначник у лівій частині рівняння — **характеристичним многочленом**.*

Теорема 2.12. Власні числа λ і тільки вони є коренями характеристичного рівняння. Для кожного знайденого λ існує вектор-стовпець $[v]_f \neq 0$, який і буде координатним стовпцем власного вектора v із даним власним числом λ у базисі $f_1, \dots, f_n$.

■ **Приклад 2.20**. *Нехай* $[\mathcal{A}]_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Тоді*

$$\det([\mathcal{A}]_f - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Якщо в цьому разі $K = \mathbf{R}$ або $\mathbf{Q}$, то рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$ розв'язків не має, отже, немає власних чисел і векторів. Якщо ж $K = \mathbf{C}$, то рівняння

$\lambda^2 + 1 = 0$ має розв'язки $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Для $\lambda_1 = i$ дістанемо систему $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, тому $\alpha_2 = \alpha_1 i$, тобто $[\boldsymbol{v}_1]_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ i\alpha_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ — координатний стовпець власного вектора при $\alpha_1 \neq 0$.

Для $\lambda_2 = -i$ аналогічно знаходимо, що $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ — координатний стовпець власного вектора $\boldsymbol{v}_2$ при $\alpha_1 \neq 0$. Зауважимо також, що вектори $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_2$ утворюють базис двовимірного лінійного простору V над C. Це означає, що в базисі $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ маємо $[\mathcal{A}]_v = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. У цьому разі можна взяти $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

◆ **Наслідок.** *При виконанні умов теореми 2.11 для матриці $\mathcal{A}$ лінійного оператора $\mathcal{A}$ в довільному базисі існує така матриця T, що $T^{-1}[\mathcal{A}]T$ — діагональна матриця.*

Справді, якщо $[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}]_f$ — матриця оператора $\mathcal{A}$ в базисі $f_1, \ldots, f_n$, а в базисі $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, утвореному власними векторами $\mathcal{A}$, матриця $[\mathcal{A}]_e$ — діагональна, то можна взяти $T = T(f, \boldsymbol{e})$ і скористатися формулою (2.1). Нагадаємо, що стовпці $T(f, \boldsymbol{e})$ — це координатні стовпці $[\boldsymbol{e}_1]_f, \ldots, [\boldsymbol{e}_n]_f$.

Не слід думати, що твердження наслідку правильне для довільної матриці $[\mathcal{A}]$. Так, якщо взяти $[\mathcal{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то для жодної матриці T матриця $T^{-1}[\mathcal{A}]T$ не буде діагональною. Переконатися в цьому пропонуємо самостійно безпосередньою перевіркою того, що рівність $[\mathcal{A}]T = TD$ неможлива, якщо D — діагональна й $\det T \neq 0$.

2.6 МНОГОЧЛЕНИ Й ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

➡ **Означення 2.22.** ***Многочленом*** *однієї змінної x називають функцію вигляду*

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

де n — *невід'ємне ціле число*; a_0, a_1, ..., a_n — числа з множини K ($K = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ або $\mathbf{C}$).

Число n називають ***степенем*** *такого многочлена, якщо $a_0 \neq 0$. Числа a_0, a_1, ..., a_n називають* ***коефіцієнтами многочлена,*** *$a_0 \neq 0$ —* ***старшим коефіцієнтом.***

- *Зауваження.* Нульовому многочлену (всі коефіцієнти якого нульові) степінь не присвоюється.

Частку двох многочленів $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ називають ***дробово-раціональною функцією,*** *якщо $Q(x)$ — ненульовий многочлен.*

Якщо степінь чисельника менший від степеня знаменника, то таку дробово-раціональну функцію називають ***правильною.***

Теорема 2.13 (про ділення з остачею). Для довільного многочлена $f(x)$ і ненульового многочлена $g(x)$ існують такі многочлени $p(x)$ і $r(x)$, що

$$f(x) = g(x)\,p(x) + r(x),$$

де $r(x) = 0$ або степінь $r(x)$ менший від степеня $g(x)$ [$r(x)$ називається *остачею від ділення $f(x)$ на $g(x)$*].

Доведення

Випадок $f(x) = 0$ — тривіальний ($p(x) = 0$, $r(x) = 0$).

Якщо степінь $f(x)$ менший від степеня $g(x)$, то можна взяти $p(x) = 0$, $r(x) = f(x)$.

Випадок, коли $f(x) \neq 0$ і степінь $f(x)$ більший за степінь $g(x)$ або дорівнює йому, доведемо індукцією за степенем n многочлена $f(x)$. Якщо $n = 0$, тобто $f(x) = \alpha$ — число, тоді й $g(x) = \beta$ — число, тому можна взяти $r(x) = 0$, $p(x) = \dfrac{\alpha}{\beta}$. Це буде базою індукції.

Нехай $a_0 x^n$, $b_0 x^m$ — старші члени многочленів $f(x)$, $g(x)$ відповідно і $n \geq m$. Тоді старші члени многочленів $f(x)$ і $\dfrac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x)$ рівні між собою, тому $f_1(x) = f(x) - \dfrac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x)$ має степінь, менший від n. Якщо $f_1(x) = 0$ або степінь $f_1(x)$ менший від степеня $g(x)$, то, взявши $r(x) = f_1(x)$, дістанемо

$$f(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x) + r(x),$$

що й потрібно. Якщо ж степінь $f_1(x)$ більший за степінь $g(x)$ або дорівнює йому, то за припущенням індукції

$$f_1(x) = p_1(x)\ g(x) + r(x),$$

де $r(x) = 0$ або многочлен степеня меншого від степеня $g(x)$. Звідси

$$f(x) = f_1(x) + \frac{a_0}{b_0}\ x^{n-m} g(x) =$$

$$= p_1(x)g(x) + r(x) + \frac{a_0}{b_0}\ x^{n-m} g(x) = g(x)\left(p_1(x) + \frac{a_0}{b_0}\ x^{n-m}\right) + r(x),$$

що й потрібно.

У доведенні теореми фактично наведено **алгоритм ділення** $f(x)$ на $g(x)$.

I. Ділимо старший член $f(x)$ на старший член $g(x)$ і частку $q_1(x)$ вважаємо першим доданком $p(x)$ [див. останню рівність у доведенні, де $q_1(x) = \frac{a_0}{b_0}\ x^{n-m}$].

II. Знаходимо многочлен $f_1(x) = f(x) - g(x)q_1(x)$.

Якщо $f_1(x) = 0$ або степінь $f_1(x)$ менший від степеня $g(x)$, то процес ділення закінчено: $p(x)$ — сума знайдених раніше часток, $f_1(x)$ — остача; якщо степінь $f_1(x)$ більший від степеня $g(x)$, то переходимо до першого кроку алгоритму, замінивши $f(x)$ на $f_1(x)$ [далі знаходимо наступний доданок $p(x)$ і продовжуємо виконання дій, аж поки не дістанемо на другому кроці алгоритму нульовий многочлен або многочлен степеня, меншого від степеня $g(x)$].

◆ ***Наслідок***. *Многочлен $f(x)$ ділиться без остачі на $x - \alpha$, де α — число, тоді й лише тоді, коли $f(\alpha) = 0$.*

Справді, поділивши $f(x)$ на $x - \alpha$ з остачею, дістанемо

$$f(x) = p\,(x)(x - \alpha) + r(x).$$

Якщо $r(x) = 0$, тобто $f(x)$ ділиться без остачі на $x - \alpha$, то $f(\alpha) = p(\alpha)\cdot 0 = 0$, що й потрібно. Навпаки, якщо $f(\alpha) = 0$, тоді $r(\alpha) = 0$. З того, що степінь $r(x)$ менший від одиниці, дістанемо $r(x) = 0$ або $r(x)$ — число, яке не дорівнює нулю. Остання можливість виключається, оскільки $r(\alpha) = 0$, що й потрібно.

Означення 2.23. *Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ називають* ***взаємно простими****, якщо не існує многочлена $d(x)$ ненульового степеня, на який діляться без остачі як $f(x)$, так і $g(x)$.*

Теорема 2.14. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — ненульові взаємно прості многочлени. Тоді існують многочлени $p(x)$ і $q(x)$, для яких

$$f(x)\,p(x)+g(x)\,q(x)=1.$$

Для доведення розглянемо множину M усіх ненульових многочленів вигляду $f(x)\,p(x)+g(x)\,q(x)$, де $p(x)$, $q(x)$ — довільні многочлени.

Ясно, що M містить деякий многочлен (який визначений неоднозначно) найменшого степеня $d(x)$. Оскільки $d(x)\neq 0$, поділимо $f(x)$ на $d(x)$. За теоремою 2.13 $f(x)=d(x)\,s(x)+r(x)$.

Оскільки $d(x)\in M$, то $d(x)=p(x)\,f(x)+g(x)\,q(x)$. Звідси

$$r(x)=f(x)-d(x)\,s(x)=f(x)-(f(x)\,p(x)+g(x)\,q(x))\,s(x)=$$
$$=f(x)\,(1-p(x)\,s(x))+g(x)\,(q(x)\,s(x)).$$

З останньої рівності дістанемо: якщо $r(x)$ — ненульовий многочлен, то $r(x)\in M$. Але ж за теоремою 2.13 степінь $r(x)$ менший степеня $d(x)$, що суперечить мінімальності степеня $d(x)$; отже, припущення про те, що $r(x)\neq 0$, хибне. Таким чином, $f(x)$ ділиться на $d(x)$ без остачі.

Аналогічно доводиться, що $g(x)$ ділиться на $d(x)$ без остачі, тому $d(x)$ є спільним дільником як $f(x)$, так і $g(x)$. Оскільки за умовою теореми $d(x)$ не може мати ненульовий степінь, то $d(x)=\alpha$ — число з множини M. Тоді $f(x)\,p(x)+g(x)\,q(x)=\alpha$ і, поділивши цю рівність на α, дістанемо потрібне.

Означення 2.24. ***Незвідним многочленом*** *називають многочлен зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, який не можна записати у вигляді добутку многочленів ненульового степеня.* Так, многочлен першого степеня завжди є незвідним.

Неважко зрозуміти, що кожен многочлен ненульового степеня або сам є незвідним, або записується у вигляді добутку кількох незвідних.

Можна довести, що кожен многочлен ненульового степеня однозначно записується у вигляді добутку незвідних. Це означає, що кожен многочлен $f(x)$ можна записати як $f(x)=a_0\,p_1^{k_1}(x)\ldots p_s^{k_s}(x)$, де $p_1(x)$, ..., $p_s(x)$ — різні незвідні, які визначені однозначно з точністю до переставлення множників; k_1, ..., k_s — натуральні числа, котрі показують, скільки разів зустрічається відповідний незвідний многочлен у розкладі $f(x)$, і також визначені однозначно.

Позначимо $p_1^{k_1}(x)=f_1(x),\ldots,\ p_s^{k_s}(x)=f_s(x)$, тоді $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — попарно взаємно прості многочлени. Дійсно, припустивши, що $p_i^{k_i}(x)$ і $p_j^{k_j}(x)$ мають спільний простий дільник $p(x)$, бачимо, що в розкладі $f_i(x)$ і $f_j(x)$ на прості зустрічаються $p(x)$, що неможливо з урахуванням теореми про єдиність розкладу многочлена в добуток незвідних. Таким чином, кожен многочлен $f(x)$ ненульового степеня можна записати як $f(x)=a_0f_1(x), \ldots, f_s(x)$, де a_0 — число, $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — попарно взаємно прості степені різних незвідних многочленів.

Теорема 2.15. Нехай $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ — правильна дробово-раціональна функція. Тоді її можна зобразити у вигляді суми дробово-раціональних функцій вигляду $\dfrac{a(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — один із незвідних дільників многочлена $f(x)$; $p^k(x)$ — дільник $f(x)$; степінь $a(x)$ менший від степеня $p(x)$.

Лема 2.3. Нехай $u(x)$, $v(x)$ — взаємно прості многочлени, $w(x)$ — довільний многочлен. Тоді $\dfrac{w(x)}{u(x)\,v(x)}=\dfrac{w_1(x)}{u(x)}+\dfrac{z_1(x)}{v(x)}$ для деяких многочленів $w_1(x)$ і $z_1(x)$.

Справді, за теоремою 2.14 маємо $1=u_1(x)\,u(x)+v_1(x)\,v(x)$. Помножимо цю рівність на $w(x)$ і поділимо на $u(x)\ v(x)$. Тоді

$$\frac{w(x)}{u(x)\,v(x)}=\frac{u_1(x)\,u(x)+v_1(x)\,v(x)}{u(x)\,v(x)}\,w(x)=\frac{u_1(x)\,w(x)}{v(x)}+\frac{v_1(x)\,w(x)}{u(x)},$$

що й потрібно.

◆ ***Наслідок.*** *Якщо $f(x)=a_0f_1(x)\ldots f_s(x)$, де a_0 — число, $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — степені різних незвідних многочленів, то існують многочлени $w_1(x), \ldots, w_s(x)$, для яких* $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{w_1(x)}{f_1(x)}+\ldots+\dfrac{w_s(x)}{f_s(x)}$.

Справді, $f_1(x)$ і $a_0f_2(x) \ldots f_s(x)$ — взаємно прості многочлени, тому за лемою 2.3 знайдуться многочлени $w_1(x)$ і $z_1(x)$, для яких

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{w_1(x)}{f_1(x)}+\frac{z_1(x)}{a_0f_2(x)\ldots f_s(x)}.$$

Застосувавши лему 2.3 до другого доданка суми, матимемо

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{w_1(x)}{f_1(x)} + \frac{w_2(x)}{f_2(x)} + \ldots$$

Оскільки щоразу кількість множників у знаменнику зменшується, такий процес обірветься й ми дістанемо те, що потрібно.

Лема 2.4. Якщо $p(x)$ — незвідний многочлен, $f(x) = p^k(x)$, $w(x)$ — довільний многочлен, то

$$\frac{w(x)}{f(x)} = \frac{a_1(x)}{p(x)} + \frac{a_2(x)}{p^2(x)} + \ldots + \frac{a_k(x)}{p^k(x)} + a_0(x),$$

де $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_s(x)$ — многочлени степеня, меншого від степеня $p(x)$, або дорівнюють нулю, $a_0(x)$ — деякий многочлен.

Доведемо лему 2.4 індукцією за k. При $k = 1$, тобто при $f(x) = p(x)$, скористаємося теоремою 2.13 про ділення з остачею. Тоді $w(x) = p(x)\,u(x) + r(x)$, де степінь $r(x)$ менший від степеня $p(x)$ або $r(x) = 0$; тому $\dfrac{w(x)}{p(x)} = \dfrac{r(x)}{p(x)} + u(x)$. Отже, $a_1(x) = r(x)$, $a_0(x) = u(x)$. Для довільного $k > 1$ з останньої рівності дістанемо

$$\frac{w(x)}{p^k(x)} = \frac{r(x)}{p^k(x)} + \frac{u(x)}{p^{k-1}(x)}.$$

За припущенням індукції $\dfrac{u(x)}{p^{k-1}(x)}$ можна зобразити в потрібному вигляді. Підставивши замість цієї функції її зображення у вигляді суми $a_0(x) + \dfrac{a_1(x)}{p(x)} + \ldots + \dfrac{a_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)}$, дістанемо потрібне зображення функції $\dfrac{w(x)}{f(x)}$.

◆ ***Наслідок**. Довільну дробово-раціональну функцію $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ можна зобразити у вигляді суми многочлена $a_0(x)$ і дробово-раціональних функцій вигляду $\dfrac{a(x)}{p^k(x)}$, де $p^k(x)$ — дільник $f(x)$; $p(x)$ — незвідний многочлен; степінь $a(x)$ менший від степеня $p(x)$* або $a(x) = 0$.

Справді, розклавши $f(x)$ у добуток степенів незвідних многочленів, скористаємося наслідком леми 2.3. До кожного з доданків застосуємо лему 2.4, дістаючи потрібне зображення.

Для доведення теореми 2.15 треба показати, яким чином із того, що $\frac{g(x)}{f(x)}$ — правильна дробово-раціональна функція, дістати, що многочлен $a_0(x)$, про який ідеться в попередньому наслідку, є нульовим.

Справді, звівши до спільного знаменника суму всіх доданків вигляду $\frac{a(x)}{p^k(x)}$, дістанемо правильну дробово-раціональну функцію, знаменник якої дорівнює $f(x)$, звідки

$$\frac{g(x)}{f(x)} = a_0(x) + \frac{g_1(x)}{f(x)}.$$

Тому $g(x) = a_0(x)\, f(x) + g_1(x)$. Якщо $a_0(x) \neq 0$, то степінь $a_0(x)\, f(x)$ більший від степеня $g(x) - g_1(x)$, що суперечить останній рівності, отже, $a_0(x) = 0$, що й потрібно.

Основною теоремою алгебри часто називають таке твердження.

Теорема 2.16. Нехай $f(x)$ — многочлен ненульового степеня з комплексними коефіцієнтами. Тоді існує комплексне число α, для якого $f(\alpha) = 0$.

Приймемо цю теорему без доведення.

Врахувавши наслідок теореми про ділення з остачею, відразу дістанемо, що незвідні многочлени з комплексними коефіцієнтами — тільки лінійні функції.

Теорема 2.17 (про незвідні многочлени з дійсними коефіцієнтами). Якщо $p(x)$ — незвідний многочлен у множині многочленів із дійсними коефіцієнтами, то $p(x)$ — або лінійна функція, або квадратична з від'ємним дискримінантом.

Доведення

Припустимо, що $f(x)$ — незвідний многочлен степеня, більшого від двох у множині многочленів із дійсними коефіцієнтами, α — комплексний корінь рівняння $f(x) = 0$. За основною теоремою алгебри таке число α існує і воно не дійсне. В противному разі многочлен $f(x)$ ділився би на $x - \alpha$, що суперечить його незвідності. Нехай $\overline{\alpha}$ — комплексно-спряжене до α, тоді $\overline{\alpha} \neq \alpha$.

З умови $f(\alpha) = 0$, враховуючи властивості комплексно-спряжених чисел і те, що коефіцієнти $f(x)$ дійсні, дістанемо $f(\overline{\alpha}) = 0$. За наслідком теореми 2.13 многочлен $f(x)$ ділиться на $x - \alpha$ і $x - \overline{\alpha}$ без остачі, тому він ділиться й на $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}$.

Останній многочлен має дійсні коефіцієнти, тому $f(x)$ не може бути незвідним. Таким чином, степінь $f(x)$ не може бути більшим від двох, що й потрібно.

◆ ***Наслідок***. Нехай $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ — дійсна правильна дробово-раціональна функція. *Тоді її можна зобразити у вигляді суми доданків вигляду* $\dfrac{A}{(x-\alpha)^k}$ *і* $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^m}$, *де* A, B, C, α, β, γ — *деякі дійсні числа;* $\beta^2 - 4\gamma < 0$; k, m — *такі натуральні, що* $(x-\alpha)^k$ і $(x^2 + \beta x + \gamma)^m$ — *дільники* $f(x)$.

Справді, за доведеною теоремою незвідними дільниками многочлена $f(x)$ будуть лише многочлени вигляду $x - \alpha$ і $x^2 + \beta x + \gamma$, де $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Скориставшися теоремою 2.15, дістанемо потрібне зображення.

2.7 ЛІНІЙНІ НЕРІВНОСТІ ТА ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Обмежимось однією з багатьох задач лінійного програмування й вкажемо один із класичних способів її розв'язання.

➡ **Означення 2.25**. Нехай задана система нерівностей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0, \end{cases}$$

де $A = (a_{ij})$ — деяка матриця з дійсними елементами; $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець вільних членів; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-стовпець невідомих. *Цю систему називатимемо* ***системою обмежень задачі лінійного програмування. Основною задачею лінійного програмування*** *назвемо задачу відшукання вектор-стовпця x із невід'ємними координатами $x_1, \ldots, x_n$, для яких величина $L = c_1x_1 + \ldots + c_n x_n + d$ була б найменшою для всіх вектор-стовпців x, що є розв'язками системи обмежень.*

Розглянемо цю задачу за додаткових обмежень на коефіцієнти $c_1, \ldots, c_n$ величини L, яка називається *цільовою функцією*: вважатимемо, що $c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0$.

Зупинимося на **алгоритмі симплекс-методу** розв'язання такої задачі.

I. Перехід до системи лінійних рівнянь.

Вводимо додаткові змінні $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ відповідно до нерівностей системи обмежень:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n+m} = a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m. \end{cases} \tag{2.3}$$

- *Зауваження 1.* Так введені невідомі задовольняють умову $x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} \geq 0$.
- *Зауваження 2.* Цей крок можна здійснити навіть тоді, коли в системі обмежень є нерівності типу $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta \leq 0$. Достатньо домножити цю нерівність на (–1) і ввести відповідне позначення для невід'ємної величини.
- *Зауваження 3.* Після виконання п. I алгоритму задачу переформулюємо таким чином: у множині невід'ємних розв'язків $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ системи рівнянь (2.3) знайти розв'язки, для яких цільова функція $L = c_1x_1 + \ldots + c_n x_n + d$ буде найменшою.

II. Пошук припустимого елемента:

1) вибираємо довільний від'ємний елемент b_i у стовпці вільних членів;

2) у рядку основної матриці з вибраним елементом b_i знаходимо додатні елементи a_{ij};

3) для кожного з них обчислюємо частку від ділення відповідного коефіцієнта цільової функції c_j на a_{ij};

4) називаємо припустимим той елемент a_{ij}, для якого вказана частка найменша.

- *Зауваження 4.* Крок 1) цього пункту алгоритму можна виконати не завжди.

Лема 2.5. Якщо всі елементи стовпця вільних членів b_i невід'ємні, то задача лінійного програмування має розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \ L_{\min} = d.$$

Справді, якщо покласти $x_1 = \ldots = x_n = 0$, дістанемо $x_{n+1} = b_1, \ldots, \ldots, x_{n+m} = b_m$, тобто значення всіх невідомих невід'ємні. Оскільки $c_1 \geq 0, \ldots, c_n \geq 0$ і $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, то завжди $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \geq 0$, отже, $L \geq d$. Це означає, що меншим, ніж d, значення L бути не може. При вказаних значеннях $x_1 = \ldots = x_n = 0$ маємо $L = d$ — найменше значення, отже, задачу розв'язано.

- *Зауваження 5.* Крок 2) цього пункту алгоритму можна здійснити не завжди.

Лема 2.6. Якщо $b_i < 0$ і всі елементи i-го рядка основної матриці недодатні, то задача лінійного програмування розв'язку не має.

Справді, i-й рядок відповідає обмеженню $x_{n+i} = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n + b_i$. Оскільки $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ за умовою задачі, $a_{i1} \leq 0, \ldots, a_{in} \leq 0$ за припущенням леми, то $a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \leq 0$. Але $b_i < 0$, тому $x_{n+i} < 0$, що суперечить умові задачі.

- *Зауваження 6.* Таким чином, якщо п. II алгоритму виконати не вдається, ми або знаходимо один із розв'язків, або переконуємося в тому, що задача розв'язків не має. Виконавши всі кроки 1) і 4), дістанемо, що коефіцієнт a_{ij} біля x_j в i-му рівнянні системи (2.3) буде припустимим.
- *Зауваження 7.* Буває, що припустимий елемент визначається неоднозначно, оскільки вибір на кроках 1) і 4) не обов'язково однозначний. У цьому разі вибираємо довільний припустимий елемент.

III. Елементарні перетворення симплекс-методу:

1) знаходимо невідоме x_j, виразивши його з i-го рівняння системи (2.3);

2) підставляємо значення x_j в інші рівняння системи (2.3), а також у формулу цільової функції;

3) записуємо нову задачу лінійного програмування, до якої застосовуємо п. II алгоритму.

- *Зауваження 8.* Виконавши крок 1) цього пункту алгоритму, з рівняння $x_{n+i} = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n + b_i$ дістанемо рівність

$$x_j = -\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \ldots - \frac{a_{i\,j-1}}{a_{ij}}x_{j-1} + \frac{x_{n+i}}{a_{ij}} - \frac{a_{i\,j+1}}{a_{ij}}x_{j+1} - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n - \frac{b_i}{a_{ij}},$$

якою замінимо попередню. При цьому x_j замінюється на x_{n+i} і навпаки; замість припустимого елемента a_{ij} ставиться $\frac{1}{a_{ij}}$ — коефіцієнт біля x_{n+i}; інші елементи рядка припустимого елемента діляться на $(-a_{ij})$.

- *Зауваження 9.* Виконавши крок 2) цього пункту алгоритму, дістанемо нову цільову функцію

$$L = c_1x_1 + \ldots + c_{j-1}x_{j-1} + c_j\left(-\frac{a_{i1}}{a_{ij}}x_1 - \ldots - \frac{a_{i\,j-1}}{a_{ij}}x_{j-1} + \frac{x_{n+i}}{a_{ij}} - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - \frac{a_{in}}{a_{ij}}x_n - \frac{b_i}{a_{ij}}\right) + c_{j+1}x_{j+1} + \ldots + c_nx_n + d =$$

$$= \frac{c_1a_{ij} - c_j\,a_{i1}}{a_{ij}}x_1 + \ldots + \frac{c_{j-1}a_{ij} - c_j\,a_{i\,j-1}}{a_{ij}}x_{j-1} + \frac{c_j}{a_{ji}}x_{n+j} +$$

$$+ \frac{c_{j+1}a_{ij} - c_j\,a_{i\,j+1}}{a_{ij}}x_{j+1} + \ldots + \frac{c_n\,a_{ij} - c_j\,a_{in}}{a_{ij}}x_n + \frac{d\,a_{ij} - c_j\,b_i}{a_{ij}},$$

коефіцієнти якої невід'ємні, оскільки $c_ka_{ij} - c_j\,a_{ik} \ge 0$ при $k \ne j$.

Справді, якщо $a_{ik} \le 0$, то твердження очевидне, оскільки c_j, $c_k \ge 0$ за умовою, $a_{ij} > 0$ як припустимий елемент. Якщо ж $a_{ik} > 0$, то вказана нерівність рівносильна (після ділення на $a_{ij}\,a_{ik} > 0$) нерівності $\frac{c_k}{a_{ik}} \ge \frac{c_j}{a_{ij}}$.

Ця нерівність виконується за змістом кроку 4) п. II алгоритму.

- *Зауваження 10.* При виконанні п. III алгоритму найменше значення L може лише збільшитися.

Справді, вільний член нової цільової функції дорівнює $d - b_i\,\frac{c_j}{a_{ij}}$. Оскільки $b_i < 0$, то $d - b_i\,\frac{c_j}{a_{ij}} \ge d$.

- *Зауваження 11.* Крок 3) п. III алгоритму має передбачати, що внаслідок послідовності виконаних достатньо багато разів пп. II і III дістанемо задачу, до якої п. II застосувати неможливо. Тобто або задачу буде розв'язано, або буде встановлено, що вона не має розв'язку.

■ **Приклад 2.21**. *Серед розв'язків системи нерівностей*

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 2, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 9 \end{cases}$$

знайти невід'ємні x_1, x_2, x_3, для яких величина $L = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ буде найменшою.

Відповідно до п. I алгоритму введемо додаткові змінні (з урахуванням зауважень 1 і 2):

$$\begin{cases} x_4 = 3x_1 + x_2 - x_3 - 2, \\ x_5 = -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5, \\ x_6 = x_1 + x_2 + 2x_3 - 9. \end{cases}$$

Для зручності задачу можна записати в матричному вигляді, утворюючи з коефіцієнтів цільової функції L і додаткових змінних рядки матриці:

L	2	4	3	0
x_4	3	1	–1	–2
x_5	–5	2	3	5
x_6	1	1	2	–9
	x_4	x_5	x_6	

Відповідно до п. II алгоритму виберемо від'ємний елемент, наприклад, –2 у стовпці вільних членів. У рядку вибраного елемента знаходимо додатні числа 3 і 1. Обчислимо частки від ділення відповідних коефіцієнтів цільової функції на знайдені числа. З двох таких часток 2/3 і 4/1 меншою буде перша, отже, припустимим буде елемент 3, який є коефіцієнтом біля x_1 у формулі $x_4 = 3x_1 + x_2 - x_3 - 2$.

Відповідно до п. III алгоритму з останньої рівності знаходимо $x_1 = \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}$. Підставивши це значення у формули для L, x_5 і x_6, дістанемо

$$L = 2\left(\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}\right) + 4x_2 + 3x_3 = \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{11}{3}x_3 + \frac{4}{3};$$

$$x_5 = -5\left(\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}\right) + 2x_2 + 3x_3 + 5 = -\frac{5}{3}x_4 + \frac{11}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{3};$$

$$x_6 = \left(\frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}\right) + x_2 + 2x_3 - 9 = \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 - \frac{25}{3}.$$

Запишемо нову задачу в матричному вигляді:

L	$2/3$	$1/3$	$11/3$	$4/3$
x_1	$1/3$	$-1/3$	$1/3$	$2/3$
x_5	$-5/3$	$11/3$	$4/3$	$5/3$
x_6	$1/3$	$2/3$	$7/3$	$-25/3$
	x_4	x_2	x_3	

До неї можна застосувати п. II алгоритму, оскільки стовпець вільних членів містить від'ємний елемент. Тепер припустимим елементом є коефіцієнт біля x_3 у формулі для x_6. Знайдемо з неї $x_3 = -\frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_6 + \frac{25}{7}$ і, підставивши це значення у формули для L, x_1 і x_5, матимемо нову задачу:

$$L = \frac{1}{7}x_4 + \frac{16}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_6 + \frac{101}{7};$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_6 + \frac{13}{7}, \\ x_5 = -\frac{13}{7}x_4 + \frac{23}{7}x_2 + \frac{4}{7}x_6 + \frac{45}{7}, \\ x_3 = -\frac{1}{7}x_4 - \frac{2}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_6 + \frac{25}{7}. \end{cases}$$

У цій задачі знайти припустимий елемент неможливо, оскільки стовпець вільних членів не містить від'ємних членів. Отже, потрібно використати лему 2.5, за якою $x_4 = x_2 = x_6 = 0$.

Підставивши ці значення у формули для L, x_1, x_5, x_3, дістанемо $L_{\min} = \frac{101}{7}$, $x_1 = \frac{13}{7}$, $x_5 = \frac{45}{7}$, $x_3 = \frac{25}{7}$.

- *Зауваження.* Підстановка значень $x_1 = \frac{13}{7}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{25}{7}$ у початкову формулу для L дає $L = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = \frac{101}{7}$. Факт збігу цього значення зі знайденим раніше є непрямим свідченням того, що обчислення виконано вірно.

Глава 3 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

3.1 СИСТЕМИ КООРДИНАТ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ НА ПЛОЩИНІ Й У ПРОСТОРІ

3.1.1. Прямокутні координати на площині

Розглянемо довільну пряму. Виберемо на ній точку O — початок відліку. Тоді на прямій відносно точки O можна задати два взаємно протилежних напрями — додатний і від'ємний. Додатний напрям на рисунку позначають стрілкою. Візьмемо на цій прямій масштабну одиницю — відрізок, довжина якого береться за одиницю.

➡ **Означення 3.1**. *Пряму, на якій вибрано напрям, називають* ***віссю****. Пряму, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям та масштабну одиницю, називають* ***координатною віссю****.* ***Координатою точки*** *на осі називають відстань від цієї точки до початку координат, що береться зі знаком «плюс», якщо точка лежить на додатній півосі, й береться зі знаком «мінус», якщо вона лежить на від'ємній півосі.*

Розташування точки на осі повністю визначається її координатою. Кожному дійсному числу можна поставити у відповідність точку на координатній осі, й така відповідність є взаємно однозначною.

Положення точки на площині визначається двома координатами. Побудуємо на площині дві взаємно перпендикулярні координатні осі Ox і Oy так, щоб точка їх перетину O була для кожної з них початком відліку.

➡ **Означення 3.2**. *Осі Ox і Oy називають* ***осями координат****, а точку O —* ***початком координат****.* Для вимірювання відрізків на осях координат вибирають деяку одиницю масштабу. На координатних осях задають додатний напрям так, щоб додатний промінь Ox після повороту на 90° проти годинникової стрілки збігся з додатним променем Oy. *Осі координат Ox і Oy (з визначеними додатними напрямами та одиницею масштабу) утворюють* ***прямокутну систему координат на площині****.*

Нехай точка M — довільна точка площини. Опустимо з неї перпендикуляри на координатні осі. Нехай M_x і M_y — точки їх перетину з осями Ox і Oy. Позначимо через x координату точки M_x, а через y — координату точки M_y (рис. 3.1).

➡ **Означення 3.3**. *Числа x та y називають* ***прямокутними координатами точки*** M, *координату x точки M_x —* ***абсцисою точки*** M, *а координату y точки M_y —* ***ординатою точки*** M. *Вісь Ox називають* ***віссю абсцис****, вісь Oy —* ***віссю ординат****.* Записується це так: $M(x, y)$.

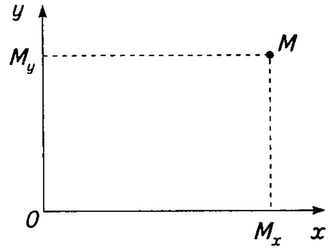


Рис. 3.1

Положення будь-якої точки на площині однозначно визначається її координатами й навпаки: у вибраній системі координат кожній точці площини відповідає цілком певна пара чисел — її координати x та y — і, навпаки, будь-якій парі чисел x та y відповідає певна точка площини, координатами якої є дані числа.

3.1.2. Полярна система координат на площині

Положення точки на площині можна визначити іншим способом. Розглянемо полярну систему координат.

Полярна система координат на площині визначається точкою O, яку називають *полюсом*, променем Ox (півпрямою, що виходить із точки O), який звуть *полярною віссю*, та *одиницею масштабу* (рис. 3.2). Додатними поворотами в площині навколо O вважатимемо повороти в напрямі проти годинникової стрілки. Положення довільної точки M площини в полярній системі координат цілком визначається відстанню $\rho = |OM|$ точки M від полюса й кутом $\varphi = \angle xOM$, тобто кутом, відліченим від полярної осі до променя OM у зазначеному напрямі.

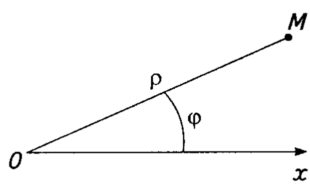


Рис. 3.2

➡ **Означення 3.4**. *Числа ρ і φ називають* ***полярними координатами точки*** M *(відносно заданої системи): ρ —* ***полярним радіусом****, а φ —* ***полярним кутом****. Позначають це так $M(\rho, \varphi)$.*

Між координатами точки в полярній системі та її координатами в прямокутній системі є простий зв'язок.

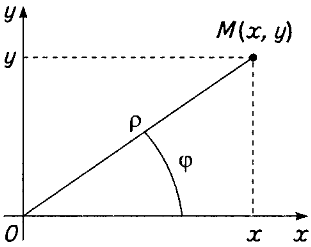


Рис. 3.3

Виведемо формули перетворення координат, коли полюс полярної системи збігається з початком прямокутної системи координат, полярна вісь — з додатною піввіссю абсцис (рис. 3.3), а масштабна одиниця однакова в обох системах; кут між полярною віссю та віссю ординат дорівнює $\pi/2$.

Нехай x та y — декартові координати точки M, а ρ і φ — її полярні координати (див. рис. 3.3).

При будь-якому положенні точки M на площині маємо

$$\boxed{x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.}$$

Ці формули дають змогу при відомих полярних координатах точки знайти прямокутні координати цієї точки. З них можна дістати й обернені формули, які виражають полярні координати через прямокутні, а саме:

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2};}$$

$$\boxed{\sin \varphi = \frac{y}{\rho}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho}.}$$

3.1.3 Перетворення прямокутних координат

1. На площині задано дві прямокутні системи координат, масштаби яких збігаються з їх початками O і O', причому (a, b) — координати точки O' відносно системи координат xOy і відповідні їхні осі Ox і Ox', Oy і Oy' мають однакові напрями. Знаючи координати точки M в обох системах xOy і $x'O'y'$, дістанемо формули перетворення координат, які дають змогу за відомими координатами довільної точки в одній системі знайти координати тієї самої точки в іншій системі.

Так, нехай відносно старої системи координат xOy точки O' і M мають координати $O'(a, b)$ і $M(x, y)$ відповідно, і точка M відносно нової системи координат $x'O'y'$ — $M(x', y')$. Тоді (рис. 3.4)

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + a, \\ y &= y' + b \end{aligned}}$$

або

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - a, \\ y' &= y - b, \end{aligned}}$$

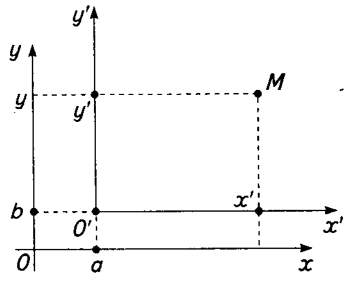


Рис. 3.4

тобто дістали нові координати (x', y') точки M зі старих (x, y) *при паралельному перенесенні осей* на величину a в напрямі осі Ox і на величину b в напрямі осі Oy.

2. Нехай початки координат обох систем і масштаби збігаються. Виведемо формули *перетворення прямокутних координат при повороті осей.* Нову систему координат $x'Oy'$ утворено повертанням старої системи xOy на кут α (рис. 3.5).

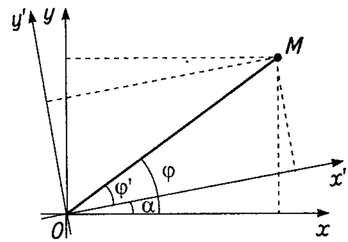


Рис. 3.5

Нехай довільна точка M задана координатами (x, y) в старій і координатами (x', y') в новій системі координат. Нехай (ρ, φ) та (ρ', φ') — полярні координати точки M відносно систем xOy і $x'Oy'$ відповідно. Тоді маємо:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi$$

і

$$x' = \rho \cos \varphi', \quad y' = \rho \sin \varphi'.$$

Але оскільки $\varphi = \alpha + \varphi'$, то

$$x = \rho \cos \varphi = \rho \cos(\alpha + \varphi') =$$
$$= \rho\,(\cos \alpha \cos \varphi' - \sin \alpha \sin \varphi') = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha;$$
$$y = \rho \sin \varphi = \rho \sin(\alpha + \varphi') =$$
$$= \rho \sin \alpha \cos \varphi' + \rho \cos \alpha \sin \varphi' = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha.$$

Формули

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned}}$$

виражають старі координати (x, y) точки M через нові координати (x', y') при повороті осей на кут α. І, навпаки, формули

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}}$$

виражають нові координати (x', y') точки M через старі.

3. Нехай систему $x'Oy'$ утворено паралельним зсувом системи xOy, тобто із системи xOy отримано систему $x''O'y''$ паралельним перенесенням початку O в точку $O'(a, b)$ і наступним поворотом нової системи $x''O'y''$ на кут α (рис. 3.6). Тоді згідно з раніше виведеними формулами можна записати:

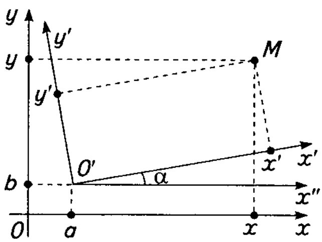


Рис. 3.6

$$\begin{aligned} x &= x'' + a, \\ y &= y'' + b \end{aligned} \qquad (3.1)$$

і

$$\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y'' &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Підставивши формули (3.2) в (3.1), матимемо

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b. \end{aligned}$$

Формули (3.2а) виражають старі координати (x, y) точки M через нові (x', y'). З (3.2а) дістанемо формули

$$\begin{aligned} x' &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha, \end{aligned} \qquad (3.2а)$$

які виражають нові координати (x', y') точки M через її старі координати (x, y). Викладене дає змогу сформулювати теорему.

Теорема 3.1. Нехай (x, y) — координати точки M у деякій прямокутній системі координат і (x', y') — її координати в іншій прямокутній системі координат, яку утворено з першої перенесенням початку координат $O(0; 0)$ у точку $O_1(a, b)$ із наступним поворотом осей на кут α. Тоді справджуються формули

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b; \\ x' &= (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha. \end{aligned}$$

3.1.4. Прямокутні координати в просторі

Три взаємно перпендикулярні координатні осі Ox, Oy і Oz, які мають спільний початок — точку O, утворюють прямокутну систему координат у просторі.

Означення 3.5. *Точку O називають **початком координат**, осі Ox, Oy і Oz — **осями координат** (вісь Ox — **віссю абсцис**, вісь Oy — **віссю ординат**, вісь Oz — **віссю аплікат**), а площини xOy, yOz, zOx — **координатними площинами**.*

Для довільної точки M простору можна знайти її проекції M_x, M_y, M_z на координатні осі (M_x — на вісь Ox, M_y — на вісь Oy, M_z — на вісь Oz). *Числа x, y та z, якими вимірюються відрізки OM_x, OM_y, OM_z у вибраному масштабі, називають **прямокутними координатами точки M у просторі**; при цьому x називають **абсцисою** точки M, y — **ординатою** точки M, z — **її аплікатою**.* Це записується так $M(x, y, z)$.

Таким чином, у вибраній системі координат кожній точці M простору відповідає єдина впорядкована трійка чисел (x, y, z) — її прямокутні координати, й така відповідність є однозначною.

3.1.5. Поняття вектора

Вектором** називають упорядковану пару точок (M, N), перша з яких — **початок вектора**, а друга — **його кінець**.* Вектор із початком M і кінцем N позначають $\overline{MN}$ і зображують відрізком, на якому стрілкою вказують напрям від M до N. Якщо ж неістотно, які саме початок і кінець вектора, його позначають однією літерою, наприклад, $\bar{a}$ або $\bar{b}$. Відстань між M і N називають ***довжиною вектора $\overline{MN}$ і позначають $|\overline{MN}|$.

Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називатимемо ***рівними між собою*** в одному з таких двох випадків:

а) початки й кінці обох векторів лежать на одній прямій, а їхні довжини та напрями збігаються;

б) $\bar{a} = \overline{MN}, \bar{b} = \overline{PQ}$, а точки M, N, Q, P — послідовні вершини паралелограма.

Аналогічно визначають протилежні вектори. Зокрема, якщо $\bar{a} = \overline{MN}, \bar{b} = \overline{PQ}$, а точки M, N, P, Q — послідовні вершини паралелограма, то вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — ***протилежні.***

Припускається також випадок, коли початок і кінець вектора збігаються. Такий вектор називають ***нульовим*** і позначають $\overline{0}$; він дорівнюватиме довільному іншому нульовому векторові. Можна вважати, що нульовий вектор має довільний, наперед вибраний напрям.

Отже, вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ рівні між собою тільки у випадку, коли один із них можна дістати з іншого паралельним перенесенням. Таке означення рівності векторів дає змогу для довільного вектора $\overline{MN}$ і довільної точки простору P знайти єдиний вектор $\overline{PQ}$, який дорівнює $\overline{MN}$.

За вектором $\overline{MN}$ і системою координат із початком O можна знайти єдиний вектор $\overline{OP}$, для якого $\overline{OP} = \overline{MN}$. Звідси дістаємо природну взаємно однозначну відповідність між точками простору й векторами.

Оскільки раніше було визначено координати довільної точки простору, цим самим визначено й координати довільного вектора, а саме: *координатами вектора $\overline{MN}$ будуть координати тієї точки P, для якої $\overline{MN} = \overline{OP}$, якщо O — початок координат.* Координати вектора $\overline{OP}$ позначатимемо аналогічно координатам точки P, оскільки з контексту завжди ясно: йдеться про точку або про вектор.

■ **Приклад 3.1.** Нехай $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ — *вектори, напрям яких збігається з напрямом координатних осей.* Тоді $\overline{OA}$ $(x;\ 0;\ 0)$, $\overline{OB}$ $(0;\ y;\ 0)$, $\overline{OC}$ $(0;\ 0;\ z)$, оскільки $A(x;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ y;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ z)$, $O(0;\ 0;\ 0)$ — координати відповідних точок.

Постає природне запитання: як пов'язані координати вектора та координати його початку й кінця?

Теорема 3.2. Нехай $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $N(x_2,\ y_2,\ z_2)$ — відповідно початок і кінець вектора $\overline{MN}$. Тоді $\overline{MN}(x_2 - x_1,\ \ y_2 - y_1,\ \ z_2 - z_1)$.

Доведемо, наприклад, що абсциса вектора $\overline{MN}$ дорівнює $x_2 - x_1$. Справді, нехай A і B — проекції на вісь абсцис точок M і N відповідно. За означенням координат точок M і N маємо $A(x_1;\ 0;\ 0)$, $B(x_2;\ 0;\ 0)$. Нехай $\overline{OP} = \overline{MN}$, тобто $P(x_3,\ y_3,\ z_3)$ — точка, абсциса x_3 якої за означенням координати вектора дорівнює абсцисі вектора $\overline{MN}$. Позначимо через $C\,(x_3;\ 0;\ 0)$ проекцію точки P на вісь абсцис. Ясно, що проекції $A,\ B,\ C$ точок $M,\ N,\ P$ на вісь абсцис не змінюються при повертанні паралелограма $OPNM$ нав-

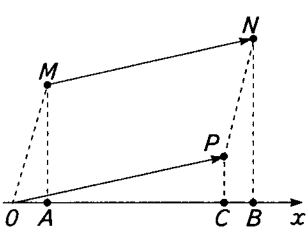


Рис. 3.7

коло цієї осі. Тому можна вважати, що вказаний паралелограм і вісь абсцис розташовані в одній площині (рис. 3.7). Тоді $OA = CB = x$, як проекції рівних між собою й паралельних відрізків $x_3 = OC = OB - CB = x_2 - x_1$, що й потрібно.

Аналогічно знаходять ординату й аплікату вектора $\overline{MN}$.

Означення 3.6. ***Кутом між двома векторами*** *$\overline{OA}$ і $\overline{OB}$ називають кут AOB, який не більший від розгорнутого. Якщо ж початки векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ не збігаються, то кутом між ними називають кут між $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, де $\overline{OA} = \overline{a}, \overline{OB} = \overline{b}$.*

Визначимо тепер проекцію $np_b\,\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$. Нехай A і B — проекції початку й кінця вектора $\overline{a}$ на пряму, на якій розташований вектор $\overline{b}$.

Означення 3.7. ***Проекцією вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$*** *називають*

$$np_b\ \overline{a} = \begin{cases} |AB|, & \text{якщо } \overline{AB} \text{ має напрям вектора } \overline{b}; \\ -|AB|, & \text{якщо } \overline{AB} \text{ має напрям вектора } \overline{a}, \\ & \text{протилежний напряму вектора } \overline{b}. \end{cases}$$

Теорема 3.3. $np_b\,\overline{a} = |a|\cos\varphi$, де φ — кут між $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Справді, нехай $\overline{a} = \overline{OA}, \overline{b} = \overline{OB}$; C — проекція точки A на пряму OB. Тоді за означенням маємо

$$np_{\overline{b}}\overline{a} = \begin{cases} |OC|, & \text{якщо кут } \varphi \text{ гострий,} \\ -|OC|, & \text{якщо кут } \varphi \text{ тупий.} \end{cases}$$

Оскільки $|OC| = |\overline{a}|\cos\varphi$, то

$$|OC| = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\varphi, & \text{якщо кут } \varphi \text{ гострий,} \\ -|\overline{a}|\cos\varphi, & \text{якщо кут } \varphi \text{ тупий.} \end{cases}$$

У будь-якому разі $np_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$.

3.1.6. Дії над векторами та їх властивості

Означення 3.8. Нехай $\overline{MN}$ і $\overline{NK}$ — дані вектори. *Тоді їх* ***сумою*** *$\overline{MN} + \overline{NK}$ називатимемо вектор $\overline{MK}$.* Якщо $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — *довільні вектори, то їх сумою називають вектор $\overline{MN} + \overline{NK}$,* де $\overline{MN} = \overline{a}, \overline{NK} = \overline{b}$.

Теорема 3.4. Якщо $\bar{a}\,(x_1, y_1, z_1), \bar{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ і $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, то

$$\bar{c}(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Доведемо, що $x_1 + x_2$ — абсциса вектора $\bar{c}$. Справді, нехай $\bar{a} = \overline{OM}$, $\bar{b} = \overline{MN}$, тоді $\bar{c} = \overline{ON}$. Позначимо через A і B проекції на вісь абсцис точок M і N відповідно. Тоді $A(x_1; 0; 0)$, $B(x_3; 0; 0)$, де x_3 — абсциса вектора $\bar{c}$ за означенням координат векторів $\overline{OM}$ і $\overline{ON}$. Оскільки x_3 — абсциса точки N, x_1 — абсциса точки M, то за теоремою 3.2 абсциса $\overline{MN}$ дорівнює $x_3 - x_1$. Тому за умовою теореми 3.4 дістанемо $x_2 = x_3 - x_1$, звідки $x_3 = x_1 + x_2$, що й потрібно.

Теорема 3.5. Для довільних векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ маємо

$$np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = np_{\bar{a}}\,\bar{b} + np_{\bar{a}}\,\bar{c}.$$

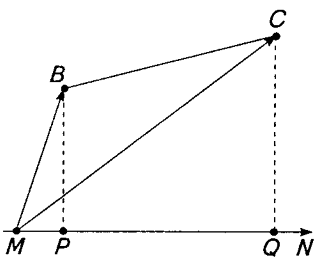


Рис. 3.8

Нехай $\bar{a} = \overline{MN}$, $\bar{b} = \overline{MB}$, $\bar{c} = \overline{BC}$. Тоді $\bar{b} + \bar{c} = \overline{MC}$. Позначимо через P і Q проекції на пряму MN точок B і C відповідно. Розглянемо випадок, коли трикутник MBC і пряма MN розташовані в одній площині (рис. 3.8). Тоді

$$np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c}) = np_{\bar{a}}\overline{MC} = |MQ| = |MP| + |PQ| =$$
$$= np_{\bar{a}}\overline{MB} + np_{\bar{a}}\overline{BC} = np_{\bar{a}}\bar{b} + np_{\bar{a}}\bar{c},$$

що й потрібно. Якщо повертати точки B, C навколо прямої MN, то їх проекції на MN не зміняться, отже, доведене співвідношення не порушиться.

Означення 3.9. Нехай $\alpha \in \mathbf{R}, \bar{a}$ — вектор. Тоді ***добутком числа*** α ***на вектор*** $\bar{a}$ *буде вектор* $\bar{b}$, *напрям якого збігається з напрямом* $\bar{a}$ *при* $\alpha > 0$ *і змінюється на протилежний при* $\alpha < 0$, *а довжина* $\bar{b}$ *дорівнює довжині* $\bar{a}$, *помноженій на* $|\alpha|$, *тобто* $|\bar{b}| = |\alpha|\,|\bar{a}|$.

Теорема 3.6. Нехай $\bar{a}(x, y, z)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\bar{b} = \alpha\bar{a}$. Тоді $\bar{b}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

Доведемо, наприклад, що αx — абсциса вектора $\bar{b}$. Справді, нехай $\bar{a} = \overline{OM}, \bar{b} = \overline{ON}$, A, B — проекції на вісь абсцис точок M і N відповідно. Тоді $A(x; 0; 0)$, $B(x_1; 0; 0)$, де x_1 — абсциса вектора $\overline{ON}$ за означенням координат векторів $\overline{OM}, \overline{ON}$. Оскільки $\overline{ON} = \alpha\,\overline{OM}$, то $x_1 = \alpha x$, що й потрібно.

Таким чином, на множині векторів введено дії додавання векторів і множення довільного дійсного числа на вектор. У теоремах 3.4 і

3.6 фактично доводиться, що ці дії такі, як у лінійному просторі тривимірних вектор-рядків. Отже, множина векторів простору утворює тривимірний лінійний простір над **R** (див. гл. 2). Цей простір має *стандартний базис*

$$\boxed{\bar{i}(1;0;0),\ \bar{j}(0;1;0),\ \bar{k}(0;0;1),}$$

і кожен вектор $\bar{a}$ однозначно зображується у вигляді лінійної комбінації

$$\boxed{\bar{a} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k},}$$

де числа x, y, z саме й будуть координатами $\bar{a}$.

Крім додавання векторів і множення числа на вектор, в утвореному лінійному просторі можна ввести скалярний добуток довільних векторів.

Означення 3.10. *Якщо $\bar{a}, \bar{b}$ — вектори, то їх* ***скалярним добутком*** *називають число $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos\varphi$, де φ — кут між $\bar{a}$ і $\bar{b}$.*

Властивості скалярного добутку

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (np_{\bar{a}}\bar{b})\,|\bar{a}|$.

2. $(\bar{a}, \bar{b}) = (np_{\bar{b}}\bar{a})\,|\bar{b}|$.

Ці властивості є безпосередніми наслідками означення скалярного добутку й теореми 3.3.

3. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$.

Це безпосередній наслідок означення 3.10.

4. $\bar{a} = |\bar{a}|^2$.

Справді, в цьому разі $\cos\varphi = 1$.

5. $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ *тоді й лише тоді, коли $\bar{a}$ і $\bar{b}$ перпендикулярні.*

Справді, якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = 0$ і $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$. Навпаки, якщо $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$, то або $\cos\varphi = 0$, або $|\bar{a}|\,|\bar{b}| = 0$. У першому випадку $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, що й потрібно. В другому — один із векторів $\bar{a}$ чи $\bar{b}$ є нульовим, отже, його напрям можна вибрати довільним, вважаючи, наприклад, що $\bar{a} \perp \bar{b}$.

6. $\alpha\,(\bar{a}, \bar{b}) = (\alpha\,\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \alpha\bar{b})$, *де* $\alpha \in \mathbf{R}$.

Доведемо, наприклад, першу рівність. Маємо $(\alpha\bar{a})\bar{b} = |\alpha\bar{a}|\,np_{\alpha\bar{a}}\bar{b}$. Якщо $\alpha > 0$, то $|\alpha\bar{a}| = \alpha\,|\bar{a}|$ і $np_{\alpha\bar{a}}\bar{b} = np_{\bar{a}}\bar{b}$, оскільки $\alpha\bar{a}$ і $\bar{a}$ однаково напрямлені, тому $(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = \alpha|\bar{a}|\,np_{\bar{a}}\bar{b} = \alpha\,(\bar{a}, \bar{b})$, що й потрібно.

Якщо ж $\alpha < 0$, то $|\alpha\bar{a}| = -\alpha|\bar{a}|$ і $np_{\alpha\bar{b}}\bar{b} = -np_{\bar{a}}\bar{b}$, оскільки $\alpha\bar{a}$ і $\bar{a}$ мають протилежні напрями, тому

$$(\alpha\bar{a}, \bar{b}) = -\alpha|\bar{a}|(-np_{\bar{a}}\bar{b}) = \alpha|\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b} = (\alpha\bar{a}, \bar{b}).$$

7 *Для базисних векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ мають місце рівності*

$$(\bar{i}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{j}) = (\bar{k}, \bar{k}) = 1,$$

$$(\bar{i}, \bar{j}) = (\bar{i}, \bar{k}) = (\bar{j}, \bar{i}) = (\bar{j}, \bar{k}) = (\bar{k}, \bar{i}) = (\bar{k}, \bar{j}) = 0.$$

Ці рівності є наслідками властивостей 3, 4 і означення векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

8 $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$.

Справді, $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}|np_{\bar{a}}(\bar{b} + \bar{c})$. Тоді за теоремою 3.5 дістанемо

$$(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = |\bar{a}|(np_{\bar{a}}\bar{b} + np_{\bar{a}}\bar{c}) = |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{b} + |\bar{a}|np_{\bar{a}}\bar{c} = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c}).$$

9 *Якщо $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $b = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$, то*

$$\boxed{(\bar{a}, \bar{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.}$$

Справді, $(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}(x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k})$. Тоді за властивостями 8, 6 і 3 матимемо

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, x_2\bar{i}) + (\bar{a}, y_2\bar{j}) + (\bar{a}, z_2\bar{k}) =$$
$$= x_2(\bar{a}, \bar{i}) + y_2(\bar{a}, \bar{j}) + z_2(\bar{a}, \bar{k}) = x_2(\bar{i}, \bar{a}) + y_2(\bar{j}, \bar{a}) + z_2(\bar{k}, \bar{a}).$$

Проте за властивостями 8, 6 і 7

$$(\bar{i}, \bar{a}) = (\bar{i}, x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) = (\bar{i}, x_1\bar{j}) + (\bar{i}, y_1\bar{j}) + (\bar{i}, z_1\bar{k}) =$$
$$= x_1(\bar{i}, \bar{i}) + y_1(\bar{i}, \bar{j}) + z_1(\bar{i}, \bar{k}) = x_1.$$

Аналогічно $(\bar{j}, \bar{a}) = y_1$, $(\bar{k}, \bar{a}) = z_1$, звідки

$$(\bar{a}, \bar{b}) = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1,$$

що й потрібно.

10 *Якщо $\bar{a}$, $\bar{b}$ — ненульові вектори, φ — кут між ними, то* $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$.

Це безпосередній наслідок означення 3.10.

- *Зауваження.* Враховуючи властивість 9 і формули для довжини вектора, цю властивість можна записати в координатному вигляді: якщо $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Визначимо векторний добуток векторів $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Означення 3.11. Нехай $\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$, $\bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$. Тоді ***векторним добутком*** *називатимемо вектор*

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (y_1z_2 - y_2z_1)\bar{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\bar{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{k}.$$

Властивості векторного добутку

1. $\boxed{[\bar{a}, \bar{b}] = \det\begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}},$

якщо при обчисленні визначника діяти з векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ так, як з числами.

Ця властивість є наслідком формули обчислення визначника третього порядку.

2. $[\bar{a}, \bar{a}] = 0.$
3. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}].$
4. $[\alpha\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \alpha\bar{b}] = \alpha\,[\bar{a}, \bar{b}].$
5. $[\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{a}, \bar{c}].$

Ці властивості є безпосередніми наслідками властивостей 4, 3, 2, 1 визначників.

6. $\bar{a} \perp [\bar{a}, \bar{b}], \bar{b} \perp [\bar{a}, \bar{b}].$

Справді, за властивістю 9 скалярного добутку

$$(\bar{a}, [\bar{a}, \bar{b}]) = x_1(y_1z_2 - y_2z_1) + y_1(x_2z_1 - x_1z_2) + z_1(x_1y_2 - x_2y_1) = 0,$$

тому з властивості 5 скалярного добутку дістанемо $\bar{a} \perp [\bar{a}, \bar{b}]$, що й потрібно. Друга умова доводиться аналогічно.

7. $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin\varphi$, *де* φ — *кут між векторами* $\bar{a}$ *і* $\bar{b}$.

Справді, оскільки $\sin\varphi \geq 0$, то ця рівність рівносильна рівності $|[\bar{a}, \bar{b}]|^2 = |\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 \sin^2\varphi$, але

$$|\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 \sin^2\varphi = |\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 - |\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 \cos^2\varphi = |\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$$

за означенням скалярного добутку. Тому потрібно перевірити рівність $|[\bar{a}, \bar{b}]|^2 = |\bar{a}|^2\,|\bar{b}|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$, тобто

$$(y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (x_2z_1 - x_1z_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 =$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2.$$

Останню рівність легко перевірити, розкривши дужки.

◆ **Наслідок**. *Довжина векторного добутку $[\bar{a}, \bar{b}]$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах.*

8 $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$ *тоді й лише тоді, коли* $\bar{a} \,||\, \bar{b}$.

Справді, якщо $\bar{a} \,||\, \bar{b}$, то $\sin\varphi = 0$, і за попередньою властивістю $|[\bar{a}, \bar{b}]| = 0$, що й потрібно. Якщо ж $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$, то або $\sin\varphi = 0$, або $|\bar{a}|\,|\bar{b}| = 0$. У першому випадку $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, тобто напрями $\bar{a}$ і $\bar{b}$ або збігаються, або є протилежними.

У другому випадку один із векторів $\bar{a}$ чи $\bar{b}$ є нульовим, отже, його напрям можна вибрати довільним, вважаючи, наприклад, що $\bar{a} \,||\, \bar{b}$.

9 *Для базисних векторів* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ *мають місце рівності* $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$, $[\bar{j}, \bar{i}] = -\bar{k}$, $[\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}$, $[\bar{k}, \bar{j}] = -\bar{i}$, $[\bar{k}, \bar{i}] = \bar{j}$, $[\bar{i}, \bar{k}] = -\bar{j}$.

Ця властивість є наслідком означення, якщо врахувати, що $\bar{i}(1;\, 0;\, 0)$, $\bar{j}(0;\, 1;\, 0)$, $\bar{k}(0;\, 0;\, 1)$.

10 *Систему координат* $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ *можна так повернути в просторі, щоб кути між векторами* $\bar{i}$ *та* $\bar{a}$; $\bar{j}$ *та* $\bar{b}$, $\bar{k}$ *та* $[\bar{a}, \bar{b}]$ *були гострими.*

Справді, сумістимо вектор $[\bar{a}, \bar{b}]$ із вектором $\alpha\bar{k}$, де $\alpha > 0$. Враховуючи властивість 6, робимо висновок про те, що $\bar{a}$ і $\bar{b}$ розташовані в площині, перпендикулярній до $\bar{k}$, отже, $\bar{j}$ можна сумістити з вектором $\bar{b} = \beta\,\bar{j}$, де $\beta > 0$. Тоді $\bar{a} = \gamma\,\bar{i} + \delta\,\bar{j}$, оскільки $\bar{i}, \bar{j}$ — базис лінійного простору векторів, перпендикулярних до $\bar{k}$. Залишається довести, що кут між $\bar{i}$ та $\bar{a}$ буде гострим. За властивостями 4, 5 і 9 векторного добутку

$$\alpha\bar{k} = [\bar{a}, \bar{b}] = [\gamma\bar{i} + \delta\bar{j}, \beta\bar{j}] = \beta\gamma\,[\bar{i}, \bar{j}] + \delta\beta\,[\bar{j}, \bar{j}] = \beta\gamma\bar{k},$$

тому $\alpha = \beta\gamma$. Оскільки $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ за умовою, то $\gamma > 0$. Але тоді за властивістю 10 скалярного добутку

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{i})}{|\bar{a}|\,|\bar{i}|} = \frac{((\gamma\bar{i} + \delta\bar{j}), \bar{i})}{|\bar{a}|} = \frac{\gamma|\bar{i}|^2}{|\bar{a}|} > 0,$$

отже, φ — гострий кут.

11 *Властивості 6, 7 і 10 однозначно задають векторний добуток векторів.*

Справді, властивість 7 задає довжину вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$, а властивість 6 визначає напрям $[\bar{a}, \bar{b}]$ із точністю «до навпаки» — напрям $[\bar{a}, \bar{b}]$ збігається з одним із двох можливих. Властивість 10 дає змогу з цих двох напрямів вибрати один.

- *Зауваження.* Властивість 10 фактично стверджує, що орієнтація трійки векторів $\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$ збігається з орієнтацією базисної трійки векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 3.9).

Зображену на рисунку трійку $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ прийнято називати *правою.* Якщо змінити напрям одного з векторів на протилежний, то дістанемо *ліву трійку.*

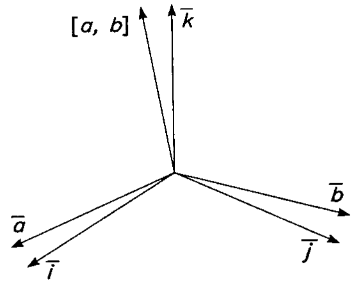


Рис. 3.9

➡ **Означення 3.12.** ***Мішаний добуток трьох векторів*** $\bar{a}, \bar{b}$ *і* $\bar{c}$ *— це скалярний добуток векторного добутку двох перших векторів на третій, тобто*

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}).$$

Властивості мішаного добутку

1 *Якщо* $\bar{a}(x_1, y_1, z_1), \bar{b}(x_2, y_2, z_2), \bar{c}(x_3, y_3, z_3)$, *то*

$$\boxed{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.}$$

Справді, за означенням векторного й властивістю 9 скалярного добутків дістанемо

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (y_1 z_2 - y_2 z_1) x_3 + (x_2 z_1 - x_1 z_2) y_3 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3.$$

Звідси, враховуючи формулу для обчислення визначника третього порядку, матимемо потрібне.

2 $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}).$

Ця властивість є наслідком попередньої та властивості 2 визначників.

3 $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$ *тоді й лише тоді, коли вектори* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *компланарні, тобто лежать в одній площині.*

Справді, якщо $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ розташовані в одній площині, то $\bar{c} \perp [\bar{a}, \bar{b}]$ за властивістю 6 векторного добутку. Звідси за властивістю 5 скалярного добутку $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = 0$. Навпаки, якщо $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = 0$, то $\bar{c} \perp [\bar{a}, \bar{b}]$ за властивістю 5 скалярного добутку. Отже, якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ розмістити в одній площині, то $[\bar{a}, \bar{b}]$ буде перпендикуляром до неї і тому вектор $\bar{c}$ можна розташувати в цій площині.

3.1.7. Проекція вектора на вісь як скалярний добуток вектора на орт осі

Розглянемо вектор $\bar{a}$ і вісь проекцій, напрям якої визначатимемо її ортом $\bar{e}$. Скористаємося формулою

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|\, np_{\bar{a}}\bar{b},$$

враховуючи при цьому, що $|\bar{e}| = 1$,

$$(\bar{a}, \bar{e}) = np_{\bar{e}}\bar{a}$$

або ж в інших позначеннях

$$a_e = (\bar{a}, \bar{e}), \tag{3.3}$$

тобто проекція вектора на вісь дорівнює скалярному добуткові вектора на орт осі проекцій.

Нехай вектор $\bar{a}$ і орт $\bar{e}$ задані своїми проекціями на осі прямокутної системи координат $Oxyz$, тобто $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, де α, β і γ — напрямні кути орта осі проекцій (маємо: $e_x = |\bar{e}|\cos\alpha = \cos\alpha$). Тоді формула (3.2а) набере вигляду

$$\boxed{a_e = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma.} \tag{3.4}$$

Формули (3.2а) і (3.3) дають змогу обчислити *проекцію будь-якого вектора $\bar{a}$ на вісь*, яка займає довільне положення в просторі.

Скористаємося формулою (3.2а) й складемо проекції вектора на осі координат x, y, z:

$$a_x = (\bar{a}, \bar{i}),\ a_y = (\bar{a}, \bar{j}),\ a_z = \overline{(a}, \bar{k}). \tag{3.5}$$

Ці вирази для проекцій вектора на осі координат дають змогу надати інший вигляд формулі розкладу вектора за координатними ортами:

$$\bar{a} = (\bar{a}, \bar{i})\bar{i} + (\bar{a}, \bar{j})\bar{j} + (\bar{a}, \bar{k})\bar{k}. \tag{3.6}$$

3.1.8. Зміна проекцій вектора при перетворенні координат

Нехай вектор $\bar{a}$ заданий своїми проекціями a_x, a_y, a_z у прямокутній системі координат $Oxyz$. Здійснимо перетворення координат і визначимо проекції того самого вектора $\bar{a}$ в новій прямокутній системі координат $Ox'y'z'$.

Насамперед зазначимо: якщо перетворення координат полягає лише в паралельному перенесенні, то проекції вектора залишаться без змін, тобто проекції вектора в новій системі дорівнюватимуть відповідним проекціям вектора в старій системі. Тому викликає інтерес лише випадок повороту осей координат.

Нехай нова система прямокутних координат $Ox'y'z'$ визначається ортами $\bar{i}'$, $\bar{j}'$ і $\bar{k}'$, напрям яких відносно старих осей визначатимемо за таблицею косинусів:

Вісь	x'	y'	z'
x	α_{11}	α_{12}	α_{13}
y	α_{21}	α_{22}	α_{23}
z	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Тут α_{mn} — косинуси кутів між відповідними осями, наприклад, $\alpha_{23} = \cos(\widehat{yz'})$, $\alpha_{32} = \cos(\widehat{zy'})$ і т. д.

Із дев'яти величин, що утворюють цю таблицю, незалежних лише три, оскільки вони підпорядковані шести умовам (умовам $\bar{i}^2 = \bar{j}^2 = \bar{k}^2 = 1$ та умовам перпендикулярності $(\bar{i}, \bar{j}) = 0$, $(\bar{j}, \bar{k}) = 0$, $(\bar{k}, \bar{i}) = 0$):

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \\
\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \\
\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1; \\
\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0, \\
\alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0, \\
\alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Згідно з формулами (3.5) маємо

$$a_{x'} = (\bar{a}, \bar{i}'), \quad a_{y'} = (\bar{a}, \bar{j}'), \quad a_{z'} = (\bar{a}, \bar{k}') \tag{3.8}$$

або в силу виразу (3.4)

$$\begin{aligned}
a_{x'} &= \alpha_{11}a_x + \alpha_{21}a_y + \alpha_{31}a_z, \\
a_{y'} &= \alpha_{12}a_x + \alpha_{22}a_y + \alpha_{32}a_z, \\
a_{z'} &= \alpha_{13}a_x + \alpha_{23}a_y + \alpha_{33}a_z.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Формули (3.8) або (3.9) розв'язують поставлену задачу.

Природно, що, скориставшися тією самою таблицею, легко дістати формули зворотного переходу:

$$\begin{aligned} a_x &= \alpha_{11}a_{x'} + \alpha_{12}a_{y'} + \alpha_{13}a_{z'}, \\ a_y &= \alpha_{21}a_{x'} + \alpha_{22}a_{y'} + \alpha_{23}a_{z'}, \\ a_z &= \alpha_{31}a_{x'} + \alpha_{32}a_{y'} + \alpha_{33}a_{z'}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Якщо розглядати перетворення на площині, то, позначивши кут $\widehat{xx'}$ через α, дістанемо

$$\begin{gathered} \alpha_{11} = \cos\alpha, \;\; \alpha_{12} = -\sin\alpha, \;\; \alpha_{13} = 0, \\ \alpha_{21} = \sin\alpha, \;\; \alpha_{22} = \cos\alpha, \;\; \alpha_{23} = 0, \\ \alpha_{31} = 0, \;\; \alpha_{32} = 0, \;\; \alpha_{33} = 1, \end{gathered}$$

і формули (3.10) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} a_x &= a_{x'}\cos\alpha - a_{y'}\sin\alpha, \\ a_y &= a_{x'}\sin\alpha + a_{y'}\cos\alpha. \end{aligned}$$

3.2 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

3.2.1. Канонічне рівняння прямої

Нехай дано яку-небудь пряму L і ненульовий вектор $\bar{e}$, що лежить на даній прямій або паралельний їй (рис. 3.10).

Вектор $\bar{e}$ називається *напрямним вектором* даної прямої. Виведемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має даний напрямний вектор $\bar{e} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ або $\bar{e} = (a, b, c)$.

Нехай $M(x_1, y_1, z_1)$ — довільна точка. Ця точка лежить на прямій L тоді й лише тоді, коли вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ колінеарний напрямному векторові $\bar{e} = (a, b, c)$, тобто, коли координати вектора $\overline{M_1M}$ пропорційні координатам вектора $\bar{e}$:

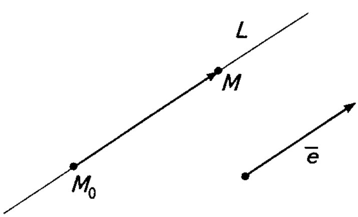


Рис. 3.10

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.} \tag{3.11}$$

Рівняння (3.11) і є шуканим. Його називають ***канонічним рівнянням прямої.***

3.2.2. Параметричне рівняння прямої

Нехай пряму L задано в просторі точкою M_0 і напрямним вектором $\bar{e}$. Позначимо через M довільну точку прямої, а через $\bar{r}_0$ і $\bar{r}$ — радіуси-вектори її точок M_0 і M відповідно. Вектори $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ і $\bar{e}$ колінеарні при будь-якому положенні точки M на прямій L. Запишемо умову їх колінеарності у векторній формі:

$$\boxed{\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{e}.} \tag{3.12}$$

Рівняння (3.12) — це ***векторне рівняння прямої у просторі.*** Позначимо координати точок M_0 і M відносно прямокутної системи координат у просторі через (x_0, y_0, z_0) і (x, y, z) відповідно, а координати напрямного вектора — через (a, b, c), тобто $\bar{e} = (a, b, c)$. Числа a, b, c називаються *напрямними коефіцієнтами прямої.* Якщо вектор $\bar{e}$ є ортом, то $a = \cos\alpha$, $b = \cos\beta$, $c = \cos\gamma$, де α, β, γ — кути, які пряма (3.12) утворює з координатними осями.

Лінійне векторне рівняння виду (3.12) еквівалентне трьом рівнянням, вираженим у координатах векторів, що входять до його складу:

$$x - x_0 = at,\ \ y - y_0 = bt,\ \ z - z_0 = ct,$$

або

$$\boxed{x = x_0 + at,\ \ y = y_0 + bt,\ \ z = z_0 + ct}$$

і звуться ***параметричними рівняннями прямої в просторі.***

3.2.3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай пряму L задано в просторі двома її точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді вектор $\overline{M_1M_2}$ — напрямний вектор $\bar{e}$ заданої прямої. Отже, його координати можна визначити за такими формулами: $a = x_2 - x_1$,

$b = y_2 - y_1$, $c = z_2 - z_1$ і, підставивши замість a, b, c їхні вирази в рівняння (3.11), дістанемо

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \tag{3.13}$$

— ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.***

3.2.4. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності й паралельності двох прямих

Нехай дві прямі задано в просторі їх канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1} \tag{3.14}$$

і

$$\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}. \tag{3.15}$$

➡ **Означення 3.13**. ***Кутом між двома прямими в просторі*** *називатимемо кут, утворений двома прямими простору, що проходять через одну точку й відповідно паралельні даним прямим.*

Зазначимо, що один із двох кутів між прямими (3.14) і (3.15) дорівнює куту φ між напрямними векторами $\bar{e}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ і $\bar{e}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, а інший кут $\pi - \varphi$. Справджується така теорема.

Теорема 3.7. Коли дві прямі в просторі задані канонічними рівняннями (3.14) і (3.15), то кут φ між ними визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{3.16}$$

Доведення

Кут між прямими (3.14) і (3.15) дорівнює куту між їх напрямними векторами $\bar{e}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ і $\bar{e}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. На підставі формули скалярного добутку векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ дістанемо

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}{|\bar{e}_1|\,|\bar{e}_2|}.$$

Виразивши скалярний добуток і довжини векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ через координати цих векторів, матимемо формулу (3.16), що й доводить теорему.

Умова паралельності прямих: *прямі (3.14) і (3.15) паралельні тоді й лише тоді, коли їх напрямні вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ колінеарні:*

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.} \tag{3.17}$$

Умова перпендикулярності двох прямих: *якщо прямі (3.14) і (3.15) перпендикулярні, то кут між прямими векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ прямий і відповідно $(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$ або в координатах:*

$$\boxed{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.} \tag{3.18}$$

Умова (3.18) буде також і достатньою умовою перпендикулярності двох прямих.

3.2.5. Відстань від точки до прямої

Нехай задано таке рівняння прямої L: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ і точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

➡ **Означення 3.14**. *Довжину перпендикуляра, опущеного з точки M_1 до прямої L, називають **відстанню від точки до прямої*** (рис. 3.11).

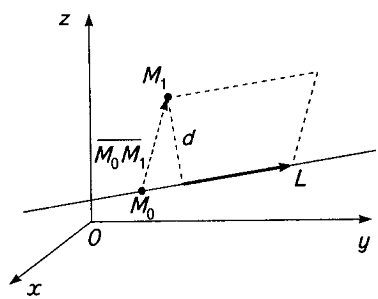


Рис. 3.11

Визначимо відстань між точкою M_1 і прямою L. Шукана відстань d є висотою паралелограма, побудованого на векторах $\bar{e} = (a, b, c)$ і $\overline{M_0 M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Нехай $\bar{p} = [\overline{M_0 M_1}\ \bar{e}]$. Оскільки $|\bar{p}|$ дорівнює площі паралелограма, то $d = \dfrac{|\bar{p}|}{|\bar{e}|}$, тобто

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

3.2.6. Відстань між двома мимобіжними прямими

Нехай задано дві прямі

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},$$
$$\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}. \tag{3.19}$$

Із рівнянь цих прямих маємо: $\bar{e}=(a_1, b_1, c_1)$, $\bar{e}'=(a_2, b_2, c_2)$ — напрямні вектори й $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — фіксовані точки цих прямих.

➡ **Означення 3.15**. *Довжину відрізка спільного перпендикуляра до двох мимобіжних прямих, кінці якого лежать на цих прямих, називають* ***відстанню між двома мимобіжними прямими***.

Визначимо відстань між прямими (3.19). Для цього перенесемо початки векторів $\bar{e}$ і $\bar{e}'$ у точку M_1 і на векторах $\bar{e}$, $\bar{e}'$ $\overline{M_1M_2}$ побудуємо паралелепіпед. Очевидно, відстань між даними прямими дорівнюватиме відстані між площинами граней паралелепіпеда, яким належать прямі, й може бути обчислена як висота h цього паралелепіпеда. Отже, $h=\dfrac{|\overline{M_1M_2}, \bar{e}, \bar{e}'|}{|[\bar{e}, \bar{e}']|}$ або, перейшовши до координат, дістанемо

$$h=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b'_2 & c'_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c'_2 & a'_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

3.2.7. Площина в просторі. Загальне рівняння площини

Нехай задано деяку площину P, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, і перпендикулярний до неї вектор $\bar{n}=(a, b, c)$ (рис. 3.12). Вектор $\bar{n}$ називається *нормальним вектором* площини P. Щоб написати рівняння площини, візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ на площині й побудуємо вектор $\overline{M_0M}$. Тоді, в силу перпендикулярності вектора $\overline{n}$ до площини P, дістанемо $\overline{M_0M} \perp \overline{n}$. Виразимо умову взаємної перпендикулярності цих векторів через їх скалярний добуток $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$. Оскільки $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \overline{n} = (a, b, c)$, то $(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0$,

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.}$$

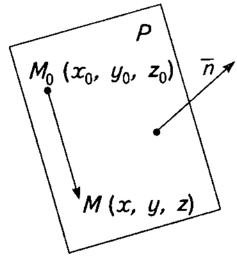


Рис. 3.12

Це й є ***рівняння площини, яка проходить через задану точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{n}$***. Перетворимо це рівняння до вигляду

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0.$$

Позначивши $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, дістанемо ***загальне рівняння площини в просторі***:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.}$$

Звідси випливає, що площина в просторі описується рівнянням першого степеня відносно змінних x, y, z.

Справедливе й обернене твердження: будь-якому рівнянню першого степеня відносно змінних x, y, z відповідає площина (і лише площина) в просторі.

Справді, рівняння $ax + by + cz + d = 0$ з довільними коефіцієнтами, що не дорівнюють нулю одночасно, еквівалентне рівнянню

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,}$$

де (x_0, y_0, z_0) — будь-який розв'язок першого рівняння. Відповідно ці два рівняння описують один і той самий геометричний образ. Але друге рівняння можна розглядати як умову взаємної перпендикулярності двох векторів: $\overline{n} = (a, b, c)$ і $\overline{m} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. За цієї умови вектор $\overline{m} \neq 0$ визначає площину $Q \perp \overline{n}$, що проходить через точку M_0. Відповідно рівняння $ax + by + cz + d = 0$ описує ту саму площину Q.

3.2.8. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Нехай задано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не лежать на одній прямій. Складемо рівняння площини, що проходить через ці точки. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка шуканої площини

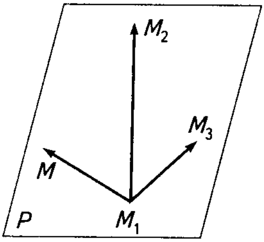


Рис. 3.13

(рис. 3.13). Виберемо як основну будь-яку із заданих точок, наприклад M_1, і побудуємо вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$. Оскільки точка M належить площині, ці вектори компланарні. Запишемо умову їх компланарності:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Це й є ***рівняння площини, яка проходить через три задані точки***. Обчисливши визначник, дістанемо це рівняння в загальному вигляді.

3.2.9. Кут між двома площинами. Умови перпендикулярності й паралельності двох площин

Зведемо вектори $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$, перпендикулярні до даних площин, до спільного початку P (рис. 3.14). Кут між $\overline{n}_1$ і $\overline{n}_2$ дорівнює куту між площинами P_1 і P_2, який утворюється при перетинанні останніх із площиною N, перпендикулярною до лінії перетину площин P_1 і P_2. Таким чином, кут між площинами дорівнює куту між їх нормальними векторами. Цей кут можна обчислити за допомогою скалярного добутку векторів $\overline{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ і $\overline{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$:

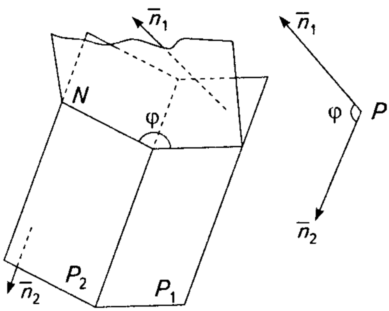


Рис. 3.14

$$\varphi = \arccos \frac{\overline{n}_1\,\overline{n}_2}{|\overline{n}_1|\,|\overline{n}_2|};$$

$$\boxed{\varphi = \arccos \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.}$$

Звідси випливає ***умова перпендикулярності двох площин***:

$$\boxed{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.}$$

Умова паралельності двох площин випливає з умови паралельності (лінійної залежності) їх нормальних векторів. Оскільки нормальні вектори лінійно залежні, їхні відповідні координати пропорційні, тобто

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.}$$

3.2.10. Нормальне рівняння площини

Нехай у системі координат $Oxyz$ задано деяку площину R, що не проходить через початок координат (рис. 3.15). Опустимо на площину R перпендикуляр OP із початку координат, p — довжина перпендикуляра OP. У цьому разі за нормальний до площини R вектор можна взяти $\bar{n} = p\bar{n}^0$, де $\bar{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — орт вектора $\bar{n}$. Виберемо в площині R довільну точку $M(x, y, z)$ і проведемо радіус-вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$ цієї точки. Щоб скласти нормальне рівняння площини, скористаємося формулою проекції вектора на довільну вісь, у даному випадку — на нормаль. Зазначимо, що точка M площини R проектується на нормаль у точку P. Тоді

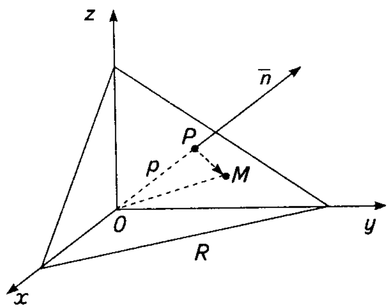


Рис. 3.15

$$np_{\bar{n}}\overline{OM} = np_{\bar{n}^0}\overline{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p.$$

Відповідно рівняння

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0} \qquad (3.20)$$

описує площину R. Це рівняння називають ***нормальним рівнянням площини***. Щоб звести загальне рівняння площини

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (3.21)$$

до нормального вигляду, домножимо обидві його частини на деякий множник μ:

$$\mu(ax + by + cz + d) = 0. \qquad (3.22)$$

Вибираємо множник μ такий, щоб рівняння (3.22) мало вигляд (3.9). Тоді повинні виконуватися рівності $\mu a = \cos\alpha$, $\mu b = \cos\beta$, $\mu c = \cos\gamma$, $\mu d = -p$.

Підносимо перші три рівності до квадрата й, додаючи їх, знаходимо $\mu^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$. Звідси

$$\boxed{\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Оскільки $\mu d = -p$, $p > 0$ (довжина відрізка нормалі), то $\mu d < 0$. Тому μ має знак, протилежний знаку d.

Множник μ, що зводить рівняння (3.21) до нормального вигляду (3.20), називається *нормувальним*.

3.2.11. Відхилення точки від площини. Відстань від точки до площини

Означення 3.16. ***Відхиленням*** δ ***точки*** $M^*(x^*, y^*, z^*)$ ***від площини*** R *називатимемо величину напрямного відрізка* $\overline{MM^*}$ *нормалі* $\overline{n}^*$ *до площини, проведеної через точку* M^* *(рис. 3.16) і напрямленої так, як і нормаль* $\overline{n}$*, проведена з початку координат.*

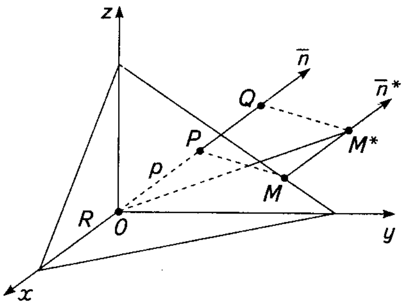


Рис. 3.16

Величини напрямних відрізків на осях $\overline{n}$, $\overline{n}^*$ пов'язані рівностями

$$OQ = OP + PQ =$$

$$= OP + MM^* = p + \delta.$$

Звідси $\delta = OQ - p$. Проте

$$OQ = np_{\overline{n}}\overline{r}^* = x^*\cos\alpha +$$

$$+ y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma.$$

Відповідно

$$\delta = x^*\cos\alpha + y^*\cos\beta + z^*\cos\gamma - p.$$

Таким чином, для обчислення відхилення точки M^* від площини R достатньо в ліву частину нормального рівняння цієї площини підставити координати точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$. Очевидно, що $\delta > 0$, якщо точка M^* і початок координат розташовані по різні боки від площини $R(OQ > p)$, і $\delta < 0$ — в противному разі $(OQ < p)$.

Відстань від точки M^* до площини R

$$d = |\delta| = |x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p|.$$

3.2.12. Пряма в просторі. Загальні рівняння прямої

Будь-яку пряму L у просторі можна розглядати як лінію перетину двох непаралельних площин (рис. 3.17). При цьому рівняння площин P_1 і P_2, що розглядаються як система, описують цю лінію й називаються ***загальними рівняннями прямої в просторі***:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.23)$$

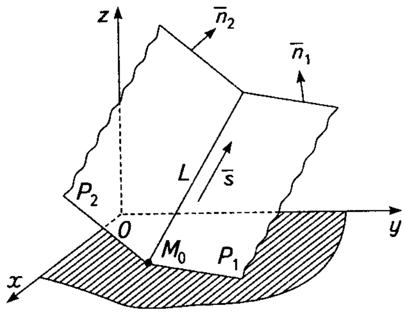


Рис. 3.17

Напрямний вектор $\bar{s}$ цієї прямої ортогональний до кожного з нормальних векторів $\bar{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ і $\bar{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Отже, можна вважати, що

$$\bar{s} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2].$$

3.2.13. Кут між двома прямими в просторі. Умови перпендикулярності й паралельності двох прямих

Кут між двома прямими L_1 і L_2 у просторі визначається як кут між напрямними векторами $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ (рис. 3.18). Згідно з формулою скалярного добутку векторів $\bar{s}_1 = (k_1, l_1, m_1)$ і $\bar{s}_2 = (k_2, l_2, m_2)$ дістанемо

$$\varphi = \arccos \frac{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2}{|\bar{s}_1|\,|\bar{s}_2|}.$$

Звідси при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ випливає умова ортогональності векторів $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$, а відповідно й ***умова перпендикулярності прямих*** L_1 і L_2:

$$\boxed{k_1k_2 + l_1l_2 + m_1m_2 = 0.}$$

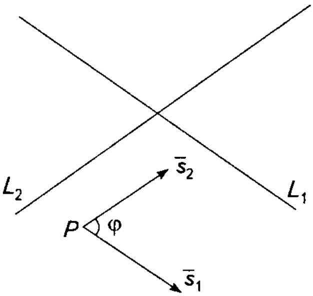


Рис. 3.18

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, тобто $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$, то напрямні вектори $\bar{s}_1$ і $\bar{s}_2$ цих прямих колінеарні. А тому ***умову паралельності прямих*** можна записати у вигляді пропорційності одноіменних координат відповідних напрямних векторів:

$$\boxed{\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}.}$$

3.2.14. Кут між прямою й площиною

Розглянемо взаємне розташування в просторі площини P та прямої L, що перетинає її в деякій точці M (рис. 3.19).

Із рівнянь площини й прямої маємо $\bar{n} = (a, b, c)$ — нормальний вектор площини P і $\bar{s} = (k, l, m)$ — напрямний вектор прямої L. Перенесемо ці вектори в точку M перетину прямої та площини й спроектуємо пряму на площину.

➡ **Означення 3.17**. ***Кутом між прямою*** L ***і площиною*** P *називатимемо кут* φ *між прямою та її проекцією на цю площину.* Вводимо додатковий кут $\frac{\pi}{2} - \varphi$ між векторами $\bar{n}$ і $\bar{s}$.

Скориставшися скалярним добутком цих векторів, можна знайти додатковий кут $\frac{\pi}{2} - \varphi$, а від нього перейти до основного кута φ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\bar{n}\,\bar{s}}{|\bar{n}|\,|\bar{s}|};$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{ak + bl + cm}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}}.}$$

Умова паралельності прямої L і площини P рівносильна умові $\vec{c} \perp \vec{n}$, а тому її можна записати так:

$$\boxed{ak + bl + cm = 0.}$$

Умова взаємної перпендикулярності прямої L і площини P рівносильна умові $\bar{s} \,||\, \bar{n}$, тому запишемо її в такому вигляді:

$$\boxed{\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m}.}$$

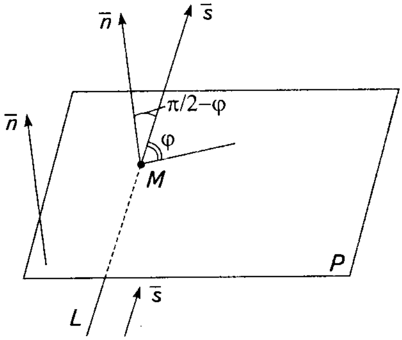


Рис. 3.19

3.3 РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

3.3.1. Загальне рівняння прямої

Нехай на площині задано пряму L. Виберемо прямокутну систему координат xOy. Складемо рівняння прямої відносно прямокутної системи координат. Візьмемо на прямій L точку $M_0(x_0, y_0)$, а на площині — вектор $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярний до L. Через кожну точку площини проходить одна й тільки одна пряма, перпендикулярна до заданого вектора. Позначимо довільну точку прямої L через $M(x, y)$. Вектори $\overline{M_0M}$ та $\bar{n}$ взаємно перпендикулярні, отже, скалярний добуток їх дорівнює нулю: $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$ або в координатах

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Це й є рівняння прямої L. Воно лінійне.

Нехай тепер є довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.24}$$

і $M_0(x_0, y_0)$ — одна з точок заданої ним лінії. Підставивши її координати в рівняння (3.24), дістанемо тотожність: $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Коли віднімемо цю тотожність почленно від рівняння (3.24), матимемо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

яке задає ту саму лінію, що й рівняння (3.24). Рівняння (3.24) називається ***загальним рівнянням прямої на площині***.

3.3.2. Параметричні й канонічні рівняння прямої. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай пряму L на площині задано паралельним до неї вектором $\bar{e} = (a, b)$ і точкою $M_0(x_0, y_0)$. Точка M_0 і вектор $\bar{e}$ цілком визначають пряму, адже через точку M_0 можна провести одну й лише одну пряму, паралельну векторові $\bar{e}$ (рис. 3.20). Вектор $\bar{e}$ має однаковий напрям із прямою й тому називається її *напрямним вектором*. Позначимо радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0)$ прямої L через $\bar{r}_0$, а радіус-вектор довільної її точки $M(x, y)$ через $\bar{r}$. Вектори $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$ і $\bar{e}$ колінеарні:

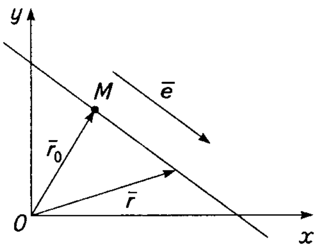


Рис. 3.20

$$\boxed{\bar{r} - \bar{r}_0 = t\,\bar{e}.} \qquad (3.25)$$

Отже, їх координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.} \qquad (3.26)$$

Звідси згідно з рівнянням (3.25)

$$\boxed{x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt.} \qquad (3.27)$$

Рівняння (2.35) — ***векторне рівняння прямої*** L, заданої точкою й напрямним вектором $\bar{e}$. Рівняння (3.26) зветься ***канонічним рівнянням прямої***, а (3.27) — її ***параметричним рівнянням***; t — змінний параметр прямої. Коли точка M рухається по прямій L, то t змінюється за абсолютним значенням і знаком. Знак t залежить від того, однаковий чи протилежний напрям мають вектори $\overline{M_0M}$ і $\bar{e}$. Абсолютне значення $\bar{e}$ пропорційне відстані від точки M до точки M_0. В окремому випадку, коли вектор $\bar{e}$ — орт, $|t|$ дорівнює відстані між точками M_0 і M. Дійсно, якщо $|\bar{e}| = 1$, то $|\bar{r} - \bar{r}_0| = |t|$. Крім того, в цьому разі $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, де φ — кут між вектором $\bar{e}$ та віссю Ox.

Досить часто пряма на площині задається двома своїми точками. Запишемо її рівняння в цьому випадку. Нехай $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ —

дві точки прямої L. Очевидно, що двома точками прямої визначається її напрямний вектор, який лежить на прямій L: $\bar{e} = \overline{M_1M_2}$, і тому координати вектора $\bar{e}$ обчислюються за формулами $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$. Підставивши значення a і b у рівняння (3.26), дістанемо

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \tag{3.28}$$

— ***рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.***

3.3.3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряму задано точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутом φ, який вона утворює з додатним напрямом осі Ox (рис. 3.21). Введемо позначення: $\operatorname{tg}\varphi = k$. Тангенс кута φ нахилу прямої L до осі Ox називають ***кутовим коефіцієнтом прямої.***

Рівняння прямої, заданої точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутовим коефіцієнтом k, дістанемо з рівняння (3.26). Справді, якщо напрямний вектор $\bar{e}$ — орт, то $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, де φ — кут між вектором $\bar{e}$, а отже, і прямою L та додатним напрямом осі Ox. Тому $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi = k$. Таким чином, на підставі (3.26) маємо

$$\boxed{y - y_0 = k\,(x - x_0)} \tag{3.29}$$

— ***рівняння в'язки прямих.***

Рівняння (3.29) можна вивести безпосередньо з рис. 3.21. Позначимо через $M(x, y)$ довільну точку прямої L. Із трикутника M_0MN (рис. 3.21) знайдемо $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg}\varphi$, звідки, беручи до уваги, що $\operatorname{tg}\varphi = k$, дістанемо рівняння (3.29).

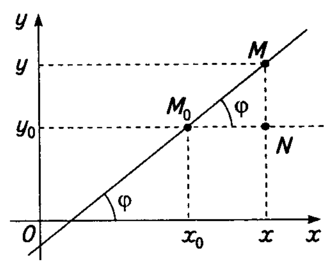


Рис. 3.21

Часто пряму на площині задають кутом φ і відрізком b, який вона відтинає на осі Oy. Очевидно, що такий спосіб задання прямої зводиться до попереднього. Справді, в цьому разі точка $M_0(0, b)$ є точкою перетину прямої L із віссю Oy. Підставивши координати точки M_0 у рівняння (3.29), дістанемо $y - b = kx$ або остаточно

$$\boxed{y = kx + b.} \tag{3.30}$$

Рівняння (3.30) називається ***рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.***

3.3.4. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Кут між двома прямими визначається кутом між їх напрямними векторами. Позначимо напрямні вектори двох прямих через $\bar{e}_1 = (a_1, b_1)$ та $\bar{e}_2 = (a_2, b_2)$, а кут між прямими — через θ. Отже, матимемо

$$\cos\theta = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_2)}{|\bar{e}_1|\,|\bar{e}_2|},$$

або

$$\boxed{\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.} \tag{3.31}$$

Знак «+» або «–» у формулі (3.31) дає змогу зазначити кожний із суміжних кутів, утворених перетином прямих.

Теорема 3.8. Кут θ між двома прямими, не паралельними осі Oy, можна визначити за формулою

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}, \tag{3.32}$$

де k_1 і k_2 — кутові коефіцієнти цих прямих.

Доведення

Нехай задано дві прямі, не паралельні осі Oy. Точку перетину цих прямих позначимо через M, точки перетину їх із віссю Ox — через L і N, а кути нахилу до осі Ox — через φ_1 і φ_2 (рис. 3.22). З ΔLMN дістанемо: $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$, отже,

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2};$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \theta) \doteq -\operatorname{tg}\theta.$$

Крім того, $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1, \operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$. Звідси маємо формулу (3.32), яка й доводить теорему.

З формули (3.32) дістанемо необхідну й достатню ***умову паралельності двох прямих***: *якщо кутові коефіцієнти двох прямих рівні між собою,*

$$\boxed{k_1 = k_2,}$$

то прямі паралельні, й навпаки.

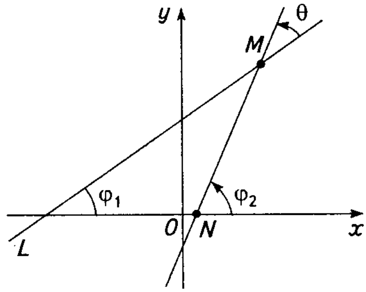


Рис. 3.22

Справді, коли $k_1 = k_2$, то $\theta = 0$. Рівність між собою кутових коефіцієнтів двох паралельних прямих випливає із самого означення поняття кутового коефіцієнта.

Умову перпендикулярності двох прямих дістанемо з формули (3.32). Справді, коли $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $1 + k_1 k_2 = 0$, і навпаки. Отже, необхідною й достатньою ***умовою перпендикулярності двох прямих*** є: $1 + k_1 k_2 = 0$, або

$$\boxed{k_1 k_2 = -1.}$$

Якщо дві прямі, між якими треба визначити кут, задані загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то зручно користуватися формулою

$$\boxed{\cos\theta = \pm \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},} \tag{3.33}$$

оскільки кут θ між двома прямими дорівнює куту між векторами їх нормалей $\overline{n}_1 = (A_1, B_1)$ та $\overline{n}_2 = (A_2, B_2)$. ***Умову перпендикулярності двох прямих, заданих загальними рівняннями***, дістанемо з формули (3.33):

$$\boxed{A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.}$$

Умова паралельності двох прямих

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.}$$

3.3.5. Нормальне рівняння прямої

Нехай задано пряму L. Через початок прямокутної системи координат проведемо нормаль до неї й позначимо кут нахилу нормалі до осі Ox через α, точку її перетину з прямою L — через P, а довжину відрізка OP — через p. Напрям нормалі від O до P вважатимемо додатним. Величини α і p цілком визначають положення прямої L на площині. Позначимо через M довільну точку прямої L і спроектуємо радіус-вектор точки M на нормаль. Орт нормалі позначимо через $\bar{n}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Тоді $np_{\bar{n}}\bar{r} = (\bar{r}, (\bar{r}, \bar{n}_0))$. З іншого боку, маємо $np_{\bar{n}}\bar{r} = p$ (рис. 3.23). Отже, $(\bar{r}, \bar{n}_0) = p$. Виразивши скалярний добуток двох векторів $(\bar{r}, \bar{n}_0)$ через їх координати, дістанемо

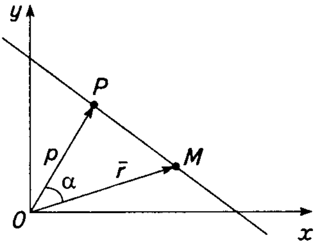


Рис. 3.23

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.}$$

Це ***нормальне рівняння прямої***.

Покажемо, як звести загальне рівняння прямої до нормального вигляду.

Нехай $Ax + By + C = 0$ — загальне рівняння деякої прямої, а $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ — її нормальне рівняння. Оскільки ці рівняння визначають одну й ту саму пряму, то коефіцієнти цих рівнянь пропорційні. Це означає, що, помноживши всі члени рівняння $Ax + By + C = 0$ на деякий множник μ, дістанемо рівняння $\mu Ax + \mu By + \mu C = 0$, яке збігається з рівнянням $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, тобто матимемо: $\mu A = \cos\alpha$, $\mu B = \sin\alpha$, $\mu C = -p$. Щоб знайти множник μ, піднесемо перші два з них до квадрата й додамо:

$$\mu^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \qquad (3.34)$$

звідки

$$\boxed{\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \qquad (3.35)$$

Число μ, після множення на яке загальне рівняння прямої набуває нормального вигляду, називають *нормувальним множником цього рівняння*. Визначається він за формулою (3.35) не повністю, оскільки залишається невідомим його знак. Для визначення знака нормувального множника використовується рівність $\mu C = -p$. Згідно з нею μC є числом від'ємним, тобто знак нормувального множника протилежний знаку вільного члена C рівняння. Якщо ж $C = 0$, то знак нормувального множника можна вибрати за бажанням.

3.3.6. Відстань від точки до прямої

Нехай на площині задано пряму L і точку M, що не лежить на цій прямій. Позначимо відстань від точки M до прямої L через d.

Нехай задано загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0 \tag{3.36}$$

і точку $M_1(x_1, y_1)$. Знайдемо відстань d від точки M_1 до прямої (3.36). Візьмемо на цій прямій точку $M_0(x_0, y_0)$. Тоді відстань від точки M_1 до прямої дорівнює проекції вектора $\overline{M_0M_1}$ на вектор нормалі $\bar{n} = (A, B)$ (рис. 3.24). Тому

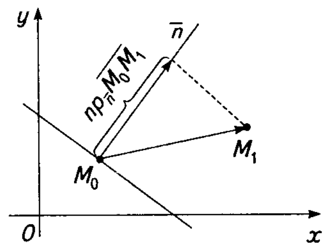


Рис. 3.24

$$d = |np_{\bar{n}}\overline{M_0M_1}| = \frac{|(\bar{n}, \overline{M_0M_1})|}{|\bar{n}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Оскільки $-Ax_0 - By_0 = C$, то остаточно маємо

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.37}$$

Означення 3.18. ***Відхиленням точки*** M ***від прямої*** L *називається додатне число $\delta = d$, якщо точка M_0 і початок координат розташовані по різні боки від прямої, і від'ємне число $\delta = -d$, якщо вони розташовані по один бік від неї.*

Теорема 3.9. Щоб визначити відстань від точки до прямої, заданої нормальним рівнянням, достатньо підставити в ліву частину цього рівняння замість x і y координати точки й знайти модуль цього числа.

Доведення

Нехай пряму L задано нормальним рівнянням

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \tag{3.38}$$

а точка M_0 має координати (x_0, y_0). Орт нормалі $\bar{n}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Спроектуємо радіус-вектор $\bar{r}_0$ точки M_0 на нормаль:

$$np_{\bar{n}_0}\bar{r}_0 = (\bar{r}_0, \bar{n}_0) = x_0 \cos\alpha + y\sin\alpha. \tag{3.39}$$

З іншого боку, незалежно від положення точки M_0 відносно прямої

$$np_{\bar{n}_0}\bar{r}_0 = p + \delta. \tag{3.40}$$

Справді, в обох випадках $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$, де Q — проекція точки M_0 на нормаль; $|\overline{OP}| = p$. Проте для випадку, коли точка M має положення M_0 (див. рис. 3.24), напрям векторів $\overline{OQ}$ і $\overline{PQ}$ збігається з напрямом $\bar{n}_0$, отже, вектори $\overline{OQ}$ і $\overline{PQ}$ на осі проектування виражаються додатними числами $(\bar{r}_0, \bar{n}_0)$ і δ, а для положення M_0' напрям векторів $\overline{OQ'}$ $\overline{PQ'}$ протилежний напряму $\bar{n}_0$, отже, $(\bar{r}_0', \bar{n}_0)$ і δ від'ємні. Порівнявши (3.38) і (3.40), дістанемо $x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha = p + \delta$, звідки

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p.$$

Відстань від точки до прямої $d = |\delta|$. Отже,

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p|,$$

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}};$$

$$\boxed{d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.}$$

Теорему доведено.

3.4 КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Означення 3.19. *Лінії, рівняння яких у прямокутній системі координат є рівняннями другого степеня, називають* ***лініями другого порядку.***

Розглянемо три види ліній: еліпс, гіперболу й параболу. Ознайомимося з найважливішими геометричними властивостями цих ліній.

3.4.1. Еліпс

Означення 3.20. ***Еліпсом*** *називають геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок цієї самої площини, що звуться фокусами, є величиною сталою й більшою за відстань між фокусами.*

Нехай F_1 і F_2 — фокуси еліпса, а M — його довільна точка. Відрізки F_1M і F_2M (як і довжини цих відрізків) називаються *фокальними радіусами точки* M. Сталу суму фокальних радіусів точки еліпса прийнято позначати через $2a$. Отже, для будь-якої точки M еліпса $F_1M + F_2M = 2a$. Відстань F_1F_2 між фокусами позначають через $2c$. Оскільки $F_1M + F_2M > F_1F_2$, то $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Введемо на площині прямокутну систему координат (рис. 3.25). За вісь Ox візьмемо пряму, що проходить через фокуси F_1 та F_2 з додатним напрямом від F_1 до F_2, а вісь Oy проведемо через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до осі Ox. Тоді координати фокусів еліпса відносно цієї системи будуть: $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Координати точки M позначимо через $(x,\ y)$. Застосувавши формулу для обчислення відстані між двома точками $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, дістанемо

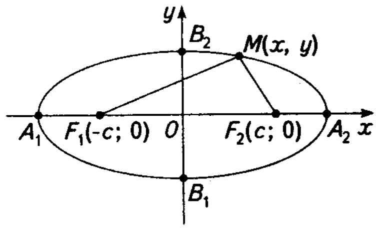


Рис. 3.25

$$F_1M = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Підставивши ці значення F_1M і F_2M в умову $F_1M + F_2M = 2a$, матимемо

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.41}$$

Це й є рівняння розглядуваного еліпса в системі координат. Але для практичного застосування рівняння (3.41) не дуже зручне, тому рівняння еліпса зводять до простішого вигляду.

В рівнянні (3.41) перенесемо другий радикал у праву частину, після чого піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

або

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{3.42}$$

Піднесемо до квадрата обидві частини останньої рівності. Тоді матимемо

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

звідки

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Нехай $a^2 - c^2 = b^2$ $(c < a)$, тоді дістанемо $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{3.43}$$

Доведемо, що рівняння (3.43) є рівнянням даного еліпса.

Справді, координати x і y кожної точки еліпса задовольняють рівняння (3.43). Доведемо тепер, що кожна точка (x, y), координати якої задовольняють рівняння (3.43), є точкою еліпса, тобто покажемо, що рівняння (3.41), яке випливає безпосередньо з означення еліпса, й рівняння (3.43) — еквівалентні. Це твердження не є очевидним, оскільки рівняння (3.43) ми дістали з (3.41) за допомогою двократного піднесення до квадрата, а така операція, як відомо, може порушувати еквівалентність рівнянь.

Отже, припустимо, що координати точки $M(x, y)$ задовольняють рівняння (3.43). Нехай r_1 і r_2 — відстані від точки $M(x, y)$ до точок $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$, де $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тоді $r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$.

З рівняння (3.43) маємо

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2). \tag{3.44}$$

Використавши це співвідношення, а також рівність $c^2 = a^2 - b^2$, дістанемо

$$r_1 = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2}. \tag{3.45}$$

Аналогічно

$$r_2 = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2}. \tag{3.46}$$

Зазначимо, що згідно з рівнянням (3.43) маємо $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, тобто $|x| \le a$. Крім того, $c < a$ й тому $\left|\frac{c}{a} - x\right| \le c < a$, а це означає, що $a + \frac{c}{a}x$ і

$a - \frac{c}{a}x$ — додатні числа. Оскільки r_1 і r_2 за своїм геометричним змістом також додатні, то з (3.45) і (3.46) матимемо $r_1 = a + \frac{c}{a}x$, $r_2 = a - \frac{c}{a}x$. Отже, $r_1 + r_2 = 2a$, тобто точка (x, y) належить еліпсу.

Доведене твердження можна сформулювати ще й так. Геометричним образом рівняння $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ є еліпс, сума фокальних радіусів якого дорівнює $2a$, а фокусами є точки $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$ та $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$.

Очевидно, що коло — вироджений випадок еліпса ($a = b$, $F_1 = F_2$).

Отже, ми довели, що *фокальні радіуси, проведені в точку еліпса з абсцисою x,*

$$\boxed{r_1 = a + \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a - \frac{c}{a}x.} \tag{3.47}$$

Рівняння (3.43) називають ***канонічним рівнянням еліпса.***

Дослідимо форму еліпса за допомогою рівняння (3.43). Знайдемо координати точок перетину еліпса з осями координат. Нехай $y = 0$, $x^2 = a^2$, $x = \pm a$. Отже, еліпс перетинає вісь Ox у точках $A_1(-a; 0)$ і $A_2(a; 0)$. *Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називають **великою віссю еліпса**.* Вісь Oy еліпс перетинає в точках $B_1(0; -b)$ і $B_2(0; b)$. *Відрізок $B_1B_2 = 2b$ називають **малою віссю еліпса**, точки A_1, A_2, B_1, B_2 — **вершинами еліпса**.*

Якщо (x, y) — точка еліпса, то з рівняння (3.43) випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} \le 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \le 1. \tag{3.48}$$

Сума невід'ємних чисел $\frac{x^2}{a^2}$ і $\frac{y^2}{b^2}$ дорівнює 1, тому кожне з них не перевищує одиниці. Нерівності (3.48) рівносильні нерівностям $|x| \le a$, $|y| \le b$.

Звідси випливає, що еліпс лежить усередині прямокутника, дві сторони якого проходять через точки A_1 і A_2 паралельно малій осі, а дві інші — через точки B_1 і B_2 (див. рис. 3.25).

Якщо точка (x, y) задовольняє рівняння (3.43), то точки $(x; -y)$, $(-x; y)$ теж задовольняють рівняння (3.43). Це означає, що еліпс симетричний відносно осей координат.

*Осі симетрії еліпса називають його **осями**, а точку перетину осей — **центром еліпса**.*

➡ **Означення 3.21**. ***Ексцентриситетом** ε **еліпса** називають відношення відстані між фокусами цього еліпса до довжини його більшої осі:*

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.} \tag{3.49}$$

Оскільки $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$, тобто ексцентриситет кожного еліпса менший від одиниці.

Зазначимо, що $c^2 = a^2 - b^2$, а тому

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

звідси

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.}$$

Отже, ексцентриситет визначається відношенням осей еліпса, а відношення осей — ексцентриситетом. Таким чином, *ексцентриситет характеризує форму еліпса*. Чим ближчий ексцентриситет до нуля, тим ближче відношення $\frac{b}{a}$ до одиниці, тобто еліпс ближчий до кола; чим більший ексцентриситет (число b досить мале порівняно з a), тим більше еліпс витягнутий уздовж великої осі. У випадку кола $b = a$ і $\varepsilon = 0$.

Фокальні радіуси (3.47), ураховуючи (3.49), виразимо формулами

$$\boxed{\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x. \end{aligned}}$$

3.4.2. Гіпербола

➡ **Означення 3.22**. ***Гіперболою** називають геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней від двох фіксованих точок цієї самої площини, що звуться фокусами, є величиною сталою й меншою, ніж відстань між фокусами.*

Позначимо фокуси гіперболи через F_1 і F_2, а відстань між ними — через $2c$. Введемо на площині прямокутну систему координат. За вісь Ox візьмемо пряму, що проходить крізь фокуси F_1 та F_2 з додатним напрямом від F_1 до F_2, а вісь Oy проведемо через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до осі Ox. Тоді координати фокусів гіперболи відносно цієї системи будуть $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$. Позначимо через $M(x,\ y)$ довільну точку гіперболи (рис. 3.26) і назвемо відрізки F_1M і F_2M ***фокальними радіусами цієї точки***. Модуль різниці відстаней між фокусами позначимо через $2a$.

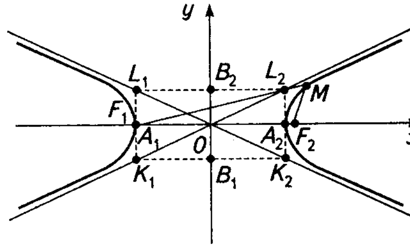


Рис. 3.26

Оскільки різниця $F_1M - F_2M$ менша за F_1F_2, то $a < c$. Відстані від точки M до F_1 та F_2 відповідно становлять

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

За означенням точка M лежить на гіперболі тоді й лише тоді, коли $|MF_1 - MF_2| = 2a$, тобто $MF_1 - MF_2 = \pm 2a$. Отже,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{3.50}$$

Це й є рівняння гіперболи. Спростимо його. Запишемо рівняння (3.50) так:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a.$$

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{y^2 + (x-c)^2} + 4a^2$$

або

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.51}$$

Піднісши до квадрата обидві частини цієї рівності, матимемо

$$c^2x^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2,$$

звідки

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \tag{3.52}$$

Оскільки $c > 0$, то величина $c^2 - a^2$ додатна. Нехай $c^2 - a^2 = b^2$. Тоді рівняння (3.52) набуває вигляду

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$$

або

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{3.53}$$

Отже, кожна точка (x, y) гіперболи задовольняє рівняння (3.53). Доведемо, що й навпаки — кожна точка, яка задовольняє рівняння (3.53), належить гіперболі. Якщо рівняння (3.53) задовольняє (x, y), то

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2), \tag{3.54}$$

звідки

$$MF_1 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2. \tag{3.55}$$

Аналогічно

$$MF_2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2. \tag{3.56}$$

З рівності (3.54) випливає, що $x^2 \geq a^2$, тобто $|x| \geq a$. Крім того, $c > a$, тому $\frac{c}{a} > 1$. Нехай точка (x, y) перебуває в правій півплощині, тобто $x \geq a$. Тоді $\frac{c}{a}x + a > 0$ і $\frac{c}{a}x - a > 0$. З рівнянь (3.55) та (3.56) матимемо

$$\begin{aligned} MF_1 &= c_1 = \frac{c}{a}x + a, \\ MF_2 &= c_2 = \frac{c}{a}x - a. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Якщо точка (x, y) розташована в лівій півплощині, тобто $\frac{c}{a}x + a < 0$ і $\frac{c}{a}x - a < 0$, то

$$\begin{aligned} MF_1 &= r_1 = -\left(\frac{c}{a}x + a\right), \\ MF_2 &= r_2 = -\left(\frac{c}{a}x - a\right). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Із рівностей (3.57) і (3.58) випливає, що точка (x, y), яка задовольняє рівняння (3.53), лежить на гіперболі. Справді, з (3.56) і (3.57) дістанемо, що $r_1 - r_2 = 2a$ або $r_2 - r_1 = 2a$. Отже, рівняння (3.53) є рівнянням гіперболи.

Дослідимо форму гіперболи за допомогою рівняння (3.53). Оскільки це рівняння не змінюється при зміні x на $-x$ і y на $-y$, то гіпербола симетрична відносно осей Ox і Oy. Тому достатньо розглянути лише ту частину гіперболи, яка лежить у першому квадранті.

Нехай $x > 0$ і $y > 0$. Тоді з рівняння (3.53) дістанемо

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad (3.59)$$

звідки $x \geq a$; при $x = a$ матимемо $y = 0$. З рівняння (3.59) випливає, що при необмеженому зростанні x від a до $+\infty$ значення y збільшується. Отже, гіпербола — необмежена крива.

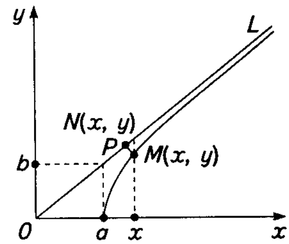


Рис. 3.27

Розглянемо пряму L, рівняння якої $y = \frac{b}{a}x$. Нехай $M(x, y)$ — точка гіперболи, а $N(x, y)$ — точка прямої L (рис. 3.27). Оскільки $y = \frac{b}{a}x$, то

$$MN = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \qquad (3.60)$$

Рівність (3.60) показує, що точка N лежить вище від точки M, оскільки $y - y > 0$. Нехай $x \to +\infty$; тоді знаменник у правій частині рівності (3.60) необмежено зростає, й тому $MN \to 0$. Позначимо через P основу перпендикуляра, опущеного з точки M на пряму L. Оскільки $MP < MN$, то $MP \to 0$. Точка M необмежено наближається до прямої L.

Означення 3.23. *Якщо k — деяка необмежена крива, і точка M, переміщуючись по цій кривій у нескінченність, необмежено наближається до прямої L, то пряму L називають* ***асимптотою кривої*** *k.*

Отже, пряма L, яка проходить через точку (a, b) і має рівняння $y = \frac{b}{a}x$, є асимптотою тієї вітки гіперболи (3.53), яка розташована в першому квадранті.

Всю гіперболу дістанемо за допомогою симетричних відображень відносно осей Ox і Oy. Гіпербола має дві асимптоти, що є діагоналями прямокутника $K_1L_1L_2K_2$, сторони якого дорівнюють $2a$ і $2b$ (див. рис. 3.26). *Точки A_1 і A_2 називають* ***вершинами гіперболи,*** а *відрізки A_1A_2 і B_1B_2 —* ***осями гіперболи.***

Означення 3.24. ***Ексцентриситетом*** ε ***гіперболи*** *називають відношення відстані між фокусами цієї гіперболи до відстані між її вершинами:*

$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}.}$$

Оскільки для гіперболи $c > a$, то $\varepsilon > 1$, тобто ексцентриситет кожної гіперболи більший за одиницю.

Враховуючи, що $c^2 = a^2 + b^2$, дістаємо

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

звідки

$$\boxed{\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.}$$

Отже, ексцентриситет визначається відношенням b/a, а відношення b/a, своєю чергою, визначається ексцентриситетом. Таким чином, *ексцентриситет гіперболи характеризує форму її основного прямокутника, а отже, й форму самої гіперболи.* Чим менший ексцентриситет, тобто, чим ближчий він до одиниці, тим менше $\varepsilon^2 - 1$, а з ним і відношення b/a; тобто, чим менший ексцентриситет гіперболи, тим більше витягнутий основний прямокутник (у напрямі осі, що з'єднує вершини). У випадку рівносторонньої гіперболи $a = b$ і $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Нарешті, *фокальні радіуси* (3.57) і (3.58), ураховуючи, що $c/a = \varepsilon$, для точок правої і лівої віток виразимо відповідно так:

$$\boxed{r_1 = -(\varepsilon x + a), \quad r_2 = -(\varepsilon x - a).}$$

3.4.3. Парабола

➡ **Означення 3.25.** ***Параболою*** *називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки F площини, яка зветься фокусом, і даної прямої d, що зветься директрисою.*

Нехай відстань від даної точки F до даної прямої d дорівнює p (рис. 3.28). Візьмемо таку систему координат, щоб вісь Ox проходила через фокус F і була перпендикулярною до директриси d, а вісь Oy поділяла б навпіл відрізок осі Ox між директрисою та фокусом. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка шуканого геометричного місця точок площини. Тоді відстань від точки $M(x, y)$ до директриси дорівнює $x + \frac{p}{2}$, а відстань від точки $M(x, y)$ до фокуса

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

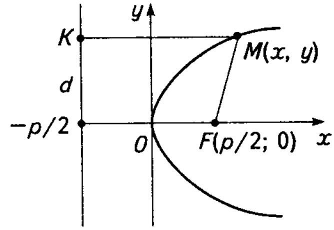


Рис. 3.28

За означенням для точок параболи виконується рівність

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2},$$

звідки після піднесення до квадрата дістаємо $y^2 = 2px$.

Отже, якщо $M(x, y)$ — точка параболи, то в розглядуваній системі координат $y^2 = 2px$. Справедливе й обернене твердження: точка, координати (x, y) якої задовольняють рівність $y^2 = 2px$, лежить на деякій параболі. Дійсно, рівність $y^2 = 2px$ можна записати у вигляді

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

звідки, беручи до уваги, що $x > 0$ і $x + \frac{p}{2} > 0$, маємо

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

З цієї умови випливає, що точка $M(x, y)$ рівновіддалена від прямої d і від точки $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, тобто $M(x, y)$ лежить на параболі.

Отже, в розглядуваній системі координат рівняння параболи має вигляд

$$\boxed{y^2 = 2px.} \tag{3.61}$$

Дослідимо форму параболи. Оскільки (3.61) не змінюється при заміні y на $-y$, то парабола симетрична відносно осі Ox. З рівняння (3.61) випливає, що $x > 0$, отже, лівіше від осі Oy немає жодної точки параболи. Оскільки *парабола симетрична відносно осі* Ox, то достатньо розглянути її у верхній півплощині.

При додатному y маємо $y = \sqrt{2px}$. Звідси випливає, що в разі необмеженого зростання абсциси x ордината y також необмежено зростає. *Точку* $O(0; 0)$, *в якій парабола перетинає вісь Ox, називають* ***вершиною параболи****, а вісь симетрії параболи —* ***віссю параболи****.*

Парабола, рівняння якої $y^2 = -2px$, $p > 0$, розташована ліворуч від осі ординат. Її вершина лежить у початку координат, а віссю симетрії є вісь Ox (рис. 3.29). Парабола, рівняння якої $x^2 = 2py$, $p > 0$, розташована вище від осі абсцис. Її вершина лежить у початку координат, а віссю симетрії є вісь Oy (рис. 3.30). Парабола, рівняння якої $x^2 = -2py$,

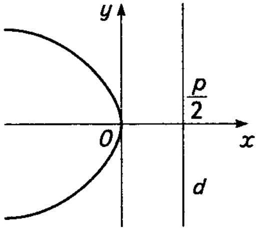


Рис. 3.29

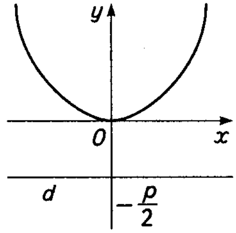


Рис. 3.30

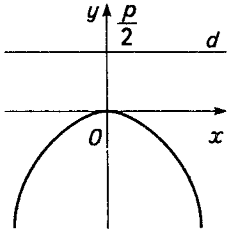


Рис. 3.31

$p > 0$, розташована нижче від осі абсцис. Її вершина лежить у початку координат, а віссю симетрії є вісь Oy (рис. 3.31).

3.4.4. Перетворення загального рівняння лінії другого порядку

Означення 3.26. ***Кривою другого порядку*** *називають геометричне місце точок площини, координати якої задовольняють рівняння вигляду*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0, \qquad (3.62)$$

в якому хоча б один із коефіцієнтів a_{11}, a_{12}, a_{22} *не дорівнює нулю* (a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a *— дійсні числа*).

Очевидно, це означення інваріантне відносно вибору системи координат, оскільки координати точки в довільній системі координат виражаються лінійно через її координати в системі xOy, отже, рівняння в будь-якій іншій системі координат матимуть вигляд (3.62).

З'ясуємо, який вигляд має геометрично крива другого порядку. Віднесемо криву до нової системи $x'Oy'$, пов'язаної з системою xOy формулами

$$x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha,\quad y = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Рівняння кривої в разі збереження формули (3.62) матиме коефіцієнт при $x'y'$

$$2a'_{12} = 2a_{11}\cos\alpha\sin\alpha - 2a_{22}\sin\alpha\cos\alpha + 2a_{12}(\cos^2\alpha -$$
$$- \sin^2\alpha) = (a_{11} - a_{22})\sin 2\alpha + 2a_{11}\cos 2\alpha.$$

Очевидно, завжди можна вибрати кут α так, щоб цей коефіцієнт дорівнював нулю. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що у вихідному рівнянні (3.62) $a_{12} = 0$, тобто

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a = 0.$$

Надалі розглядатимемо два випадки:

1) *обидва коефіцієнти a_{11} і a_{22} не дорівнюють нулю;*

2) *один із коефіцієнтів a_{11} або a_{22} дорівнює нулю. (Не обмежуючи загальності, вважаємо $a_{11} = 0$.)*

1) Здійснивши деякі перетворення в рівнянні, дістанемо

$$a_{11}x^2 + 2a_1 x + a_{22}y^2 + 2a_2 y + a = 0;$$

$$a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_1}{a_{11}}x + \left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_{11}}\right)^2\right) +$$

$$+a_{22}\left(y^2 + 2\frac{a_2}{a_{22}}y + \left(\frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 - \left(\frac{a_2}{a_{22}}\right)^2\right) + a = 0,$$

тобто

$$a_{11}\left(x + \frac{a_1}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_2}{a_{22}}\right)^2 + a - \frac{a_1^2}{a_{11}} - \frac{a_2^2}{a_{22}} = 0.$$

Перейдемо до нової системи координат $x'Oy'$:

$$x' = x + \frac{a_1}{a_{11}}, \quad y' = y + \frac{a_2}{a_{22}};$$

поклавши $c = a - \dfrac{a_1^2}{a_{11}} - \dfrac{a_2^2}{a_{22}}$, зведемо рівняння (3.62) до вигляду

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + c = 0 \tag{3.63}$$

й розрізнятимемо такі випадки:

а) *якщо $c \neq 0$ і знаки a_{11}, a_{22} однакові й протилежні знаку c, то крива буде еліпсом;*

б) *якщо $c \neq 0$, знаки a_{11}, a_{22} протилежні, то крива буде гіперболою;*

в) *якщо $c \neq 0$, знаки a_{11}, a_{22} і c однакові, то рівняння не задовольняє жодна дійсна точка; крива називається уявною;*

г) *якщо $c = 0$, знаки a_{11} і a_{22} різні, то крива розпадається на пару прямих, оскільки рівняння (3.63) можна записати у формі*

$$\left(x' - \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\, y'\right)\left(x' + \sqrt{-\frac{a_{22}}{a_{11}}}\, y'\right) = 0;$$

д) *якщо $c = 0$, знаки a_{11} і a_{22} однакові, то рівняння можна записати у формі*

$$\left(x' - i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\, y'\right)\left(x' + i\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}\, y'\right) = 0.$$

Крива розпадається на пару уявних прямих, які перетинаються в дійсній точці (0; 0).

(2) Перейдемо до нової системи координат $x'Oy'$:

$$x' = x, \;\; y' = y + \frac{a_2}{a_{22}};$$

рівняння кривої зведемо до вигляду

$$2a_1x' + a_{22}y'^2 + c = 0. \qquad (3.64)$$

Надалі розрізнятимемо декілька випадків:

а) *якщо $a_1 \neq 0$, то крива — парабола, оскільки переходом до нових координат* $x'' = x' + \dfrac{c}{2a_1}$, $y'' = y'$ рівняння (3.64) зводиться до вигляду $2a_1x'' + a_{22}y'^2 = 0$;

б) *якщо $a_1 = 0$, a_{22} і c мають протилежні знаки, то крива розпадається на пару паралельних прямих*

$$y \pm \sqrt{-\frac{c}{a_{22}}} = 0;$$

в) *якщо $a_1 = 0$, a_{22} і c мають однакові знаки, то крива розпадається на пару уявних прямих, які не перетинаються,*

$$y \pm i\sqrt{\frac{c}{a_{22}}} = 0;$$

г) *якщо $a_1 = 0$, $c = 0$, то крива — це пара прямих, які збігаються.*

Таким чином, крива (3.62) являє собою або еліпс, гіперболу чи параболу, або пару прямих (можливо, збіжних).

Глава **4** **ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ Й РЯДИ**

4.1 ЗБІЖНІ ПОСЛІДОВНОСТІ. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ Й НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ

Поняття *границі функції* — одне з найважливіших у вищій математиці.

Викладення теорії границь почнемо з розгляду границі функції натурального аргументу — послідовності. Це дасть змогу в наступній главі визначити складніші форми операції граничного переходу.

Означення 4.1. Нехай кожному натуральному числу $n \in \mathbf{N}$ поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n. *Тоді кажуть, що задано послідовність чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, *або коротко — послідовність* $\{x_n\}$.

Отже, ***послідовністю*** *називають функцію* $f(n) = x_n$, $n \in \mathbf{N}$, *визначену на множині натуральних чисел. Числа* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *є **членами (елементами) послідовності**,* x_n — ***загальним її членом (елементом)**, а* n — ***номером члена***.

Означення 4.2. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називають **збіжною**, якщо для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *можна знайти такий номер* $N = N(\varepsilon)$, *що при всіх* $n > N$ *виконується нерівність*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Число a *при цьому зветься **границею послідовності*** $\{x_n\}$.

Збіжність послідовності $\{x_n\}$ до числа a позначається так:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ або } x_n \to a,\ n \to \infty.$$

Довільний інтервал вигляду $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається *ε-околом точки a*. Якщо число a — границя послідовності $\{x_n\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$ усі члени послідовності потраплять в ε-окіл точки a, адже при вказаних n згідно з формулою (4.1) виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ не збігається, то кажуть, що вона є *розбіжною.*

Теорема 4.1. Збіжна послідовність має тільки одну границю.

Доведення

Припустимо протилежне: нехай збіжна послідовність $\{x_n\}$ має принаймні дві різні границі a і b. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що, по-перше, $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|x_n - b| < \varepsilon$ при всіх $n > N_2$.

Покладемо $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$. Тоді при всіх $n > \max\{N_1, N_2\}$ одночасно виконуються нерівності

$$|x_n - a| < \frac{|a-b|}{2}, \quad |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2},$$

звідки випливає, що

$$|a-b| = |(x_n - b) + (a - x_n)| \le |x_n - b| + |x_n - a| <$$
$$< \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} = |a-b|,$$

тобто $|a-b| < |a-b|$.

Ця суперечність доводить теорему.

Серед збіжних послідовностей виділимо один важливий клас.

Означення 4.3. *Збіжну до нуля послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно малою.***

Роль, яку відіграють нескінченно малі в теорії границь, висвітлює така теорема.

Теорема 4.2. Аби послідовність $\{x_n\}$ збігалася до числа a, необхідно й достатньо, щоб послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ була нескінченно малою.

Доведення

Необхідність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді згідно з означенням 4.2 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - a| = |(x_n - a) - 0| < \varepsilon.$$

А це й доводить, що $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ — нескінченно мала.

Достатність. Нехай $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ — нескінченно мала. Згідно з означенням 4.3 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, або $|(x_n - a) - 0| = |x_n - a| < \varepsilon$. Отже, за означенням 4.2 маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Докладно вивчимо властивості нескінченно малих.

Лема 4.1. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих є нескінченно малою.

Доведення

Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — нескінченно мала. Задамо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі, то знайдуться такі номери N_1 і N_2, що, по-перше, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n > N_2$.

Покладемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при всіх $n > N$ наведені вище нерівності виконуються одночасно, а тому

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це й означає, що $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — нескінченно мала.

◆ ***Наслідок.*** *Алгебраїчна сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.*

Лема 4.2. Добуток двох (або будь-якого скінченного числа) нескінченно малих є нескінченно малою.

Міркуючи аналогічно до попереднього, пропонуємо читачеві довести цю лему самостійно.

➡ **Означення 4.4**. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **обмеженою,** якщо існує таке число $K > 0$, що при всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $|x_n| \le K$. У противному разі послідовність називають **необмеженою**.*

Лема 4.3. Добуток нескінченно малої на обмежену — нескінченно мала.

Доведення

Нехай $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала, а $\{x_n\}$ — обмежена послідовність. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n x_n\}$ — нескінченно мала. Оскільки $\{x_n\}$ обмежена, то існує таке число $K > 0$, що при всіх $n \in \mathrm{N} |x_n| \le K$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{K}$ при всіх $n > N$. Але тоді при таких n

$$|\alpha_n x_n| = |\alpha_n| \, |x_n| < K \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Це й означає, що $\{\alpha_n x_n\}$ — нескінченно мала.

◆ ***Наслідок**. Добуток нескінченно малої на стале число — нескінченно мала.*

Іноді зручно використовувати поняття нескінченно великої послідовності.

➡ **Означення 4.5**. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **нескінченно великою**, якщо для будь-якого числа $E > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n| > E$.*

Позначення: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ або $x_n \to \infty, n \to \infty$.

Якщо ж, починаючи з деякого номера N, члени послідовності $\{x_n\}$ набувають тільки додатних (від'ємних) значень, то писатимемо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$) або $x_n \to +\infty, n \to \infty$ ($x_n \to -\infty, n \to \infty$).

Визначимо зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими.

Теорема 4.3. Аби $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n \ne 0$) була нескінченно малою, необхідно й достатньо, щоб $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ була нескінченно великою.

Доведення

Необхідність. Нехай $\{\alpha_n\}$ — нескіченно мала. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер N, щоб при всіх $n > N$ виконувалася нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Покладемо $\dfrac{1}{\varepsilon} = E$. Тоді при вказаних вище n виконується нерівність

$$\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E,$$

звідки й випливає, що $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — нескінченно велика.

Достатність. Нехай $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — нескінченно велика. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тоді для послідовності $\{\alpha_n\}$ при вказаних вище n маємо $|\alpha_n| < \varepsilon$, тобто $\alpha_n \to 0, n \to \infty$, і $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала.

4.2 ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗБІЖНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Теорема 4.4. Збіжна послідовність є обмеженою.

Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Поклавши в означенні 4.2 $\varepsilon = 1$, знайдемо такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|x_n - a| < 1$. Звідси при вказаних n

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Покладемо $K = \max\{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, ..., |x_N|\}$. Тоді очевидно, що $|x_n| < K$ при всіх $n \in \mathrm{N}$, тобто збіжна послідовність $\{x_n\}$ дійсно є обмеженою.

На практиці при визначенні границь числових послідовностей часто використовують таку теорему про арифметичні дії над границями.

Теорема 4.5. Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді збіжними є й послідовності $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{cx_n\}$ (c — стала), $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ (остання при $y_n \ne 0, n \in \mathrm{N}, b \ne 0$), причому:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = ca;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}.$

Доведення

1) Оскільки a і b — границі послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, то за теоремою 4.2 маємо

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі.

Додаючи ці рівності, дістанемо

$$x_n \pm y_n = a \pm b + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

За лемою 4.1 послідовність $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — нескінченно мала, а тому за теоремою 4.2 послідовність $\{x_n \pm y_n\}$ збігається до $a \pm b$, так що існує $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2) Як і в попередньому пункті, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$. Далі маємо

$$x_n y_n = ab + \alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n.$$

За лемами 4.1–4.3 та їх наслідками $\{\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n\}$ — нескінченно мала, а тому за теоремою 4.2 послідовність $\{x_n y_n\}$ збігається до ab, так що існує

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$$

3) ***Наслідок***. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і c — стала, то збіжною є й послідовність $\{cx_n\}$, причому

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = ca,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак границі.

4) Як і раніше, $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі.

Розглянемо різницю:

$$\gamma_n = \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{(b + \beta_n)\, b}.$$

За лемами 4.1–4.3 та їх наслідками $\left\{\dfrac{\alpha_n b - \beta_n a}{b}\right\}$ — нескінченно мала. Доведемо, що послідовність $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{b+\beta_n}\right\}$ є обмеженою. Дійсно, оскільки $\{\beta_n\}$ — нескінченно мала, то, поклавши $\varepsilon = \dfrac{|b|}{2}$ (адже $b \neq 0$), можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|\beta_n| < \dfrac{|b|}{2}$. Але тоді при вказаних n

$$|b| = |(b-\beta_n) - \beta_n| \le |b+\beta_n| + |\beta_n| < |b+\beta_n| + \frac{|b|}{2},$$

так що $|b+\beta_n| > \dfrac{|b|}{2}$, і при всіх $n > N$

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| = \left|\frac{1}{b+\beta_n}\right| < \frac{2}{|b|}.$$

Покладемо $K = \max\left\{\dfrac{2}{|b|}, \dfrac{1}{y_1}, \dfrac{1}{y_2}, \ldots, \dfrac{1}{y_N}\right\}$ (адже $y_n \neq 0,\ n \in \mathbf{N}$).

Тоді очевидно, що

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| = \left|\frac{1}{b+\beta_n}\right| \le K$$

при всіх $n \in \mathbf{N}$, тобто послідовність $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{b+\beta_n}\right\}$ дійсно є обмеженою.

Остаточно за лемою 4.3 різниця γ_n — нескінченно мала, а тому за теоремою 4.2 послідовність $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ збігається до $\dfrac{a}{b}$, так що існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Теорема 4.6 (про три послідовності). Нехай задано послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, при цьому для всіх $n \in \mathbf{N}$ виконуються нерівності $x_n \le y_n \le z_n$. Тоді, якщо послідовності $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ збіжні до однієї і тієї самої границі, то й послідовність $\{y_n\}$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$; $|z_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_2$.

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконуються одночасно обидві нерівності й, зокрема, при вказаних n

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon.$$

Але тоді за умовами теореми справедливі нерівності

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

при всіх $n > N$, тобто

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

при всіх $n > N$, а отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

що й потрібно довести.

Теорема 4.7 (про перехід до границі в нерівностях). Нехай задано збіжні послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$; при цьому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності $x_n \le y_n$. Тоді й

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Припустимо протилежне: $a > b$. Покладемо $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$; тоді можна знайти такі номери N_1 і N_2, що $|x_n - a| < \dfrac{a-b}{2}$ при всіх $n > N_1$; $|y_n - b| < \dfrac{a-b}{2}$ при всіх $n > N_2$.

Нехай $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконуються обидві нерівності й, зокрема, при вказаних n

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$y_n > b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, при $n > N$ маємо $y_n < \frac{a+b}{2} < x_n$, тобто $y_n < x_n$. Ця суперечність доводить теорему.

• *Зауваження.* Якщо для членів збіжних послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ при всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується строга нерівність $x_n < y_n$, то після переходу до границі строга нерівність, взагалі кажучи, не зберігається. Так само, як вище, лише

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Наприклад, $x_n = -\frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$. При всіх $n \in \mathbf{N}$, очевидно, $x_n < y_n$, але $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

■ **Приклад 4.1.** *Довести, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$.

Нехай спочатку $a > 1$. Згідно з теоремою 4.2 достатньо переконатися в тому, що послідовність $\{\alpha_n\} = \{\sqrt[n]{a} - 1\}$ — нескінченно мала. Маємо $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$ або $a = (1 + \alpha_n)^n$. Ясно, що $\alpha_n > 0$ при $n \in \mathbf{N}$.

За нерівністю Бернуллі (див. п. 1.3)

$$(1 + \alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n,$$

а тому $a > 1 + n\alpha_n$ або $0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}$.

З теореми 4.6 про три послідовності, враховуючи, що ліворуч і праворуч в останніх нерівностях стоять нескінченно малі, дістаємо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ і остаточно при $a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Якщо ж $0 < a < 1$, то $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, і оскільки $\frac{1}{a} > 1$, враховуючи теорему 4.5, маємо за попереднім також

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

4.3 МОНОТОННІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ЧИСЛО *e*

У багатьох теоретичних і практичних випадках основні теореми про границі не завжди діють. Для деякої конкретної послідовності буває зовсім не просто визначити, чи має вона границю, й знайти її значення. На запитання, чи збігається та чи інша послідовність, вичерпну відповідь можна дати, вказавши лише необхідні й достатні умови збіжності цієї послідовності. Про це в загальному випадку докладно йтиметься в п. 4.5.

Однак є деякі важливі типи послідовностей, для яких досить просто повністю розв'язується питання збіжності.

Означення 4.6. *Послідовність $\{x_n\}$ називають* ***зростаючою (спадною)****, якщо для будь-якого $n \in \mathbf{N}$*

$$x_{n+1} > x_n \ (x_{n+1} < x_n).$$

Означення 4.7. *Послідовність $\{x_n\}$ називають* ***неспадною (незростаючою)****, якщо для будь-якого $n \in \mathbf{N}$*

$$x_{n+1} \geq x_n \ (x_{n+1} \leq x_n).$$

Неспадні й незростаючі послідовності звуться ***монотонними****, а зростаючі й спадні —* ***строго монотонними****.*

Означення 4.8. *Послідовність $\{x_n\}$ називають* ***обмеженою зверху (знизу)****, якщо існує таке число $M(m)$, що для будь-якого $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність*

$$x_n \leq M \ (x_n \geq m).$$

Теорема 4.8 (Вейєрштрасса). Обмежена зверху (знизу) неспадна (незростаюча) послідовність є збіжною.

Доведення

Нехай заради конкретності послідовність $\{x_n\}$ неспадна й обмежена зверху. Тоді множина чисел x_n, $n \in \mathbf{N}$ обмежена зверху й, отже (див. п. 1.3), має точну верхню межу $\beta = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} x_n$. Доведемо, що $\{x_n\}$ збігається саме до числа β. Оскільки β — точна верхня межа, то $x_n \leq \beta$ при всіх $n \in \mathbf{N}$, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ у множині чисел x_n можна знайти хоча б одне число x_N таке, що

$$\beta - \varepsilon < x_N \leq \beta.$$

Унаслідок монотонності послідовності $\{x_n\}$ при всіх $n > N$

$$\beta - \varepsilon < x_n \le \beta,$$

звідки $|x_n - \beta| < \varepsilon$ при всіх $n > N$ і, отже, послідовність $\{x_n\}$ збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

Випадок незростаючої обмеженої знизу послідовності розглядається аналогічно; при цьому, звичайно ж,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} x_n = \alpha.$$

◆ ***Наслідок.*** *Монотонна послідовність $\{x_n\}$ збігається тоді й лише тоді, коли вона є обмеженою.*

Достатність умов безпосередньо випливає з теореми Вейєрштрасса, а необхідність — із теореми 4.4.

Теорема 4.9 (про вкладені відрізки). Нехай задано послідовність відрізків $[a_1, b_1]$ $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... таких, що кожний наступний міститься в попередньому, тобто

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],\ n \in \mathbf{N}.$$

Тоді, якщо $b_n - a_n \to 0, n \to \infty$, то існує єдина точка, яка належить усім відрізкам цієї послідовності.

Доведення

З умови $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],\ n \in \mathbf{N}$ випливає, що $a_n \le a_{n+1} \le \le b_{n+1} \le b_n$ при всіх $n \in \mathbf{N}$, тобто послідовність $\{a_n\}$ неспадна, а послідовність $\{b_n\}$ незростаюча.

Далі з нерівностей $a_1 \le a_n < b_n$, $a_n < b_n \le b_1$ ясно, що послідовність $\{a_n\}$ обмежена зверху, а послідовність $\{b_n\}$ — знизу.

За теоремою Вейєрштрасса існують $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c_2$. Оскільки $b_n - a_n \to 0, n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c_2 - c_1 = 0,$$

тобто $c_1 = c_2$. Отже, послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ мають спільну границю. Позначимо її через c.

Оскільки послідовності $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ монотонні, то при будь-яких $n \in \mathbf{N}$ виконуються нерівності $a_n \le c \le b_n$, тобто точка c дійсно належить усім відрізкам $[a_n, b_n]$. Вона, очевидно, єдина. Справді, якби була ще одна точка d, яка належала б усім відрізкам, то й увесь відрізок із кінцями c і d належав би всім відрізкам, але тоді при будь-яких $n \in \mathbf{N}$ виконувалися б нерівності $|b_n - a_n| \ge |d - c| > 0$, що неможливо, оскільки $b_n - a_n \to 0,\ n \to \infty$.

■ **Приклад 4.2**. *Довести, що*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |q|<1, \\ 1, & \text{якщо } q=1, \\ \text{не існує}, & \text{якщо } q=-1, \\ +\infty, & \text{якщо } q>1, \\ \text{не існує}, & \text{якщо } q<-1. \end{cases}$$

Дослідимо послідовність $\{q^n\}$ при $q > 0$ (випадок $q < 0$ пропонуємо розглянути самостійно).

Якщо $0 < q < 1$, то при будь-яких $n \in \mathbf{N}$ ця послідовність задовольняє умову $q^{n+1} < q^n$, тобто є спадною. Крім того, вона обмежена знизу, оскільки $q^n > 0$ при будь-яких $n \in \mathbf{N}$. Отже, послідовність задовольняє умови теореми Вейєрштрасса й має границю $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = a$. Але

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} (q\,q^{n-1}) = q \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = qa.$$

З того, що $a = qa$, випливає $a(1-q) = 0$. Оскільки $1 - q \neq 0$, то $a = 0$. А це й означає, що

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ якщо } 0 < q < 1.$$

Випадок $q = 1$ очевидний.

Для $q > 1$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = +\infty.$$

Розглянемо дуже важливу послідовність $\{x_n\}$ із загальним членом

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbf{N}$$

і переконаємося в її збіжності. Для цього введемо допоміжну послідовність $\{y_n\}$ із загальним членом

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Оскільки $y_n > 1$ при будь-якому $n \in \mathbf{N}$, то послідовність $\{y_n\}$ обмежена знизу. З іншого боку,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}} \, \frac{n+2}{n+1}.$$

За нерівністю Бернуллі (див. п. 1.3)

$$\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n^2+2n},$$

а тому

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} < \frac{1}{1+\dfrac{n+1}{n^2+2n}} \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+4n^2+4n}{n^3+4n^2+4n+1} < 1,$$

тобто $y_{n+1} < y_n$ при будь-яких $n \in \mathbf{N}$, і послідовність $\{y_n\}$ спадна.

Таким чином, за теоремою Вейєрштрасса допоміжна послідовність $\{y_n\}$ збігається до деякого числа, яке Л. Ейлер позначив літерою e.

Далі маємо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = e.$$

Отже, остаточно

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Зазначимо, що число e відіграє надзвичайно важливу роль у вищій математиці. Зокрема, розглядаються логарифми з основою e, які називаються *натуральними* й позначаються $\ln x$.

Число e — ірраціональне. Наведемо його значення з першими сімома точними десятковими знаками: $e \approx 2{,}7182818$. Як обчислити число e з будь-якою наперед заданою точністю, буде показано в п. 7.3.

4.4 ПІДПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЇХНІ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 4.9. Нехай $\{x_n\}$ — деяка числова послідовність, а $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ — зростаюча послідовність натуральних чисел. *Тоді послідовність* $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots\}$ *називають* ***підпослідовністю послідовності*** $\{x_n\}$.

Лема 4.4. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається, то будь-яка її підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ також збігається й має ту саму границю, що й $\{x_n\}$.

Доведення

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\varepsilon > 0$ — будь-яке число. Тоді згідно з означенням границі послідовності можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Оскільки $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то для вказаного вище $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер M, що при всіх $k > M$ виконуватиметься нерівність $n_k > N$. Звідси випливає, що

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

при всіх $k > M$, тобто

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

- *Зауваження.* Лема 4.4, очевидно, виконується й у випадках $a = \infty$, $a = \pm\infty$. Наприклад, якщо $a = +\infty$, то за означенням 4.5 для будь-якого $E > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $x_n > E$, і оскільки $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то для вказаного вище $E > 0$ можна знайти такий номер M, що при всіх $k > M$ виконуватиметься нерівність $n_k > N$, а отже, $x_{n_k} > E$.

  Останнє, як відомо, і означає, що

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

Наступна лема дає відповідь на питання: з яких послідовностей можна вибрати збіжну підпослідовність.

Лема 4.5 (Больцано—Вейєрштрасса). З будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}$ можна вибрати збіжну підпослідовність.

Доведення

Оскільки $\{x_n\}$ — обмежена послідовність, то згідно з означенням 4.4 існує таке число $K > 0$, що при всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність $|x_n| \le K$, тобто всі члени послідовності належать відрізку $[-K, K]$, який для зручності позначимо через $[a, b]$.

Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл. Тоді хоча б одна з його половин міститиме нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$. Позначимо її через $[a_1, b_1]$. Якщо обидві половини $[a, b]$ містять нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$, то через $[a_1, b_1]$ можна позначити будь-яку з них. Аналогічно з відрізка $[a_1, b_1]$ виберемо ту його половину $[a_2, b_2]$, яка містить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$. Повторюючи цей процес поділу відрізків, дістанемо послідовність укладених відрізків

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

причому довжина відрізка $[a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

За теоремою 4.9 про вкладені відрізки існує єдина точка c, яка належить усім відрізкам цієї послідовності, причому, як встановлено при доведенні теореми 4.9, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Побудуємо шукану збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ у такий спосіб: за x_{n_1} візьмемо будь-який з елементів послідовності $\{x_n\}$, що належить відрізку $[a_1, b_1]$; за x_{n_2} — будь-який з елементів послідовності $\{x_n\}$, що належить відрізку $[a_2, b_2]$, в якого $n_2 > n_1$. Такий член, звичайно ж, знайдеться, оскільки відрізок $[a_2, b_2]$ містить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$. Повторюючи цей процес, на k-му кроці за x_{n_k} візьмемо будь-який з елементів послідовності $\{x_n\}$, що належить відрізку $[a_k, b_k]$, в якого $n_k > n_{k-1}$. Можливість такого вибору обумовлюється саме тим, що кожний із відрізків $[a_k, b_k]$ містить нескінченне число членів послідовності $\{x_n\}$, тобто члени x_n з як завгодно великими номерами. Нескінченно продовжуючи вказаний процес, дістанемо підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ таку, що $a_k \le x_{n_k} \le b_k$, $k \in \mathbb{N}$. Але, як зазначалося вище, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$.

За теоремою 4.6 підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ є збіжною й $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$.

◆ ***Наслідок.*** *Із будь-якої послідовності $\{x_n\}$ можна вибрати збіжну підпослідовність або підпослідовність, яка прямує до нескінченності.*

Тут новим є лише той випадок, коли послідовність $\{x_n\}$ необмежена. Враховуючи заперечення означення 4.4 обмеженої послідовності, в цьому разі для будь-якого натурального числа k можна знайти такий номер n_k, що $|x_{n_k}| > k$. Але тоді для будь-якого $E > 0$ можна знайти такий номер M, що при всіх $k > M$ виконуватиметься нерівність $|x_{n_k}| > k > E$, тобто згідно з означенням 4.5 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.

4.5 КРИТЕРІЙ КОШІ

Означення 4.2 збіжності послідовності $\{x_n\}$ тісно пов'язане з границею a цієї послідовності, що, як правило, невідома. При цьому відповісти на питання про збіжність неможливо, не знаючи границі послідовності.

Проте є ознака збіжності послідовності, яка спирається не на знання границі послідовності, а лише на властивості її членів. Ця ознака називається ***критерієм Коші***.

➡ **Означення 4.10**. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **фундаментальною**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$, $m > N$ виконуватиметься нерівність*

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $m > n$. Тоді $m = n + p$, де p — ціле додатне число. А тому означення 4.10 можна подати в дещо зміненій формі.

➡ **Означення 4.11**. *Послідовність $\{x_n\}$ називають **фундаментальною**, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ і будь-якому $p \in \mathbf{N}$ виконуватиметься нерівність*

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Теорема 4.10. Якщо послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна, тоді вона є обмеженою.

Доведення

Поклавши в означенні 4.10 $\varepsilon = 1$, знайдемо такий номер N, що при всіх $n > N$, $m > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - x_m| < 1.$$

Візьмемо $m = N + 1$. Тоді з останньої нерівності випливає, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - x_{N+1}| < \varepsilon.$$

Отже, при вказаних n

$$|x_n| = |(x_n - x_{N+1}) + x_{N+1}| \le |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| \le 1 + |x_{N+1}|.$$

Нехай

$$K = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, 1+|x_{N+1}|\}.$$

Тоді, очевидно, що $|x_n| < K$ при всіх $n \in \mathbf{N}$, тобто фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ дійсно є обмеженою.

Теорема 4.11. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, то вона фундаментальна.

Доведення

Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається, причому $x_n \to a$, $n \to \infty$. Тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді при всіх $n > N$, $m > N$

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

що й доводить фундаментальність послідовності $\{x_n\}$.

Теорема 4.12 (критерій Коші). Аби послідовність $\{x_n\}$ збігалася, необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Доведення

Необхідність випливає з теореми 4.11.

Достатність. Нехай $\{x_n\}$ — фундаментальна послідовність. Доведемо, що вона є збіжною.

За теоремою 4.10 послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою, а тому згідно з лемою Больцано—Вейєрштрасса з неї можна вибрати збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\}$. Припустимо, що $x_{n_k} \to a$, $k \to \infty$. Доведемо, що й $x_n \to a$, $n \to \infty$.

Нехай задано число $\varepsilon > 0$. Унаслідок фундаментальності послідовності $\{x_n\}$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$, $m > N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Оскільки підпослідовність $\{x_{n_k}\}$ — збіжна до числа a, то для вказаного $\varepsilon > 0$ існує такий номер M, що при всіх $k > M$ виконується нерівність

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.3}$$

причому M вибирається таким, щоб $n_M > N$.

Покладемо в нерівності (4.2) $m = n_k$. Тоді

$$|x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4}$$

при всіх $n > N$. Але в такому разі з нерівностей (4.3)–(4.4) при всіх $n > N$

$$|x_n - a| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le$$
$$\le |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

що й доводить збіжність послідовності $\{x_n\}$.

■ **Приклад 4.3**. *Довести, що послідовність*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

розбігається.

Згідно з критерієм Коші достатньо довести, що ця послідовність не є фундаментальною.

Оцінимо різницю

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} \ge \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} + \ldots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

при будь-яких $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$. Зокрема, при $p = n$

$$|x_{2n} - x_n| \ge 1/2, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Отже, справджується твердження, протилежне означенню 4.11 фундаментальності послідовності $\{x_n\}$. Дійсно, покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тоді для будь-якого натурального N знайдуться такі $n > N$ і $p \in \mathbf{N}$, що $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon$. Для цього достатньо взяти довільне $n > N$ і покласти $p = 2n$.

Ураховуючи, що послідовність $\{x_n\}$, очевидно, є зростаючою, маємо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

4.6 ЧИСЛОВІ РЯДИ

4.6.1. Основні поняття

Поряд із числовими послідовностями в різних розділах вищої математики та її застосуваннях широко використовуються числові ряди, які є узагальненням суми чисел

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

на випадок нескінченного числа доданків.

Отже, нехай $\{a_n\}$ — довільна числова послідовність. Вираз $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, що позначається як $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, називають ***числовим рядом.***

Числа $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ звуться ***членами ряду***, a_n — його ***n-м (загальним) членом.***

Суму S_n перших n членів ряду називають його ***частковою сумою***:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Аби підкреслити номер S_n, її часто називають ***n-ю частковою сумою.*** Отже, з кожним рядом можна пов'язати послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум.

Означення 4.12. *Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають* ***збіжним,*** *якщо послідовність $\{S_n\}$ його часткових сум збігається. Границю S послідовності часткових сум називають* ***сумою ряду***. *Це записується так: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо ж послідовність $\{S_n\}$ розбіжна, то й ряд називають* ***розбіжним.***

■ **Приклад 4.4.** *Дослідити, при яких q збігається ряд $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$*

Такий ряд зветься *нескінченною геометричною прогресією* і, як відомо зі шкільного курсу, якщо $q \neq 1$, то

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

а тому, враховуючи приклад 4.2, при $|q| < 1$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q};$$

так що при таких q ряд збігається і його сума дорівнює $\frac{1}{1-q}$.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, тобто ряд розбігається. При $q = 1$ ряд набуває вигляду $1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ У цьому разі $S_n = n$ і $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$, тобто ряд розбігається. При $q = -1$ ряд набуває вигляду $1 - 1 + 1 \ldots +(-1)^{n+1} + \ldots$ При цьому

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ 1, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Отже, границя послідовності $\{S_n\}$ не існує і ряд розбігається. Остаточно ряд збігається лише у випадку $|q| < 1$, і його сума дорівнює $\dfrac{1}{1-q}$.

Установлений у п. 4.5 критерій Коші збіжності послідовності дає змогу сформулювати необхідні й достатні умови збіжності ряду.

Теорема 4.13 (критерій Коші). Аби ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігався, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існував такий номер N, щоб при всіх $n > N$ і будь-якому $p \in \mathbb{N}$ виконувалася нерівність $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$

Для доведення достатньо скористатися для послідовності часткових сум $\{S_n\}$ теоремою 4.12 і означенням 4.11, зазначивши, що

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

- **Наслідок 1.** *Збіжність або розбіжність ряду не зміниться, якщо в ньому замінити скінченне число членів.*

Для доведення достатньо, очевидно, вважати в критерії Коші номер N більшим від найбільшого з номерів змінених членів ряду.

- **Наслідок 2.** Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то його n-й член прямує до нуля при* $n \to \infty$, *тобто* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0.$

Для доведення достатньо покласти в критерії Коші $p = 1$. Дістанемо, що при всіх $n > N$ справджується нерівність $|a_{n+1}| < \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0.$

Зазначимо, що умова $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ лише необхідна, але не достатня умова збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Дійсно, розглянемо так званий гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Для цього ряду $a_n=\frac{1}{n}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Проте, як показано наприкінці п. 4.5, послідовність часткових сум $S_n\to+\infty, n\to\infty$, тобто гармонічний ряд розбігається.

➡ **Означення 4.13**. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *називають* ***абсолютно збіжним,*** *якщо збігається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Зазначимо, що завжди виконується нерівність

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|\le\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|,\ \ n>N,\ \ p\in\mathbf{N}.$$

Отже, якщо ряд абсолютно збігається, то він і поготів збігається.

➡ **Означення 4.14**. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *називають* ***умовно збіжним,*** *якщо він збігається, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *розбігається.*

Про властивості абсолютно й умовно збіжних рядів ітиметься в п. 4.6.5 після докладного розгляду питань щодо дослідження збіжності рядів із додатними членами.

4.6.2. Ознаки порівнянь

Отже, нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ складений із додатних членів. Його часткові суми утворюють, очевидно, зростаючу послідовність, а тому до них можна застосувати теорему 4.8. У результаті дістанемо важливий критерій збіжності рядів із додатними членами.

Теорема 4.14. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, складений із додатних членів, збігається тоді й лише тоді, коли послідовність його часткових сум обмежена зверху.

Теорема 4.15 (порівнянь). Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два ряди з додатними членами. Тоді:

1) якщо $a_n \le b_n$, $n \in \mathbf{N}$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

2) якщо $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, то обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно.

Доведення

1) Нехай $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ — n-ні часткові суми рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Тоді з умови $a_n \le b_n, n \in \mathbf{N}$ випливає, що $A_n \le B_n, n \in \mathbf{N}$. Для доведення першого твердження зауважимо, що в разі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ за теоремою 4.13 послідовність $\{B_n\}$ обмежена зверху. Отже,

$$A_n \le B_n \le B,\ n \in \mathbf{N}.$$

Але ж тоді й послідовність $\{A_n\}$ також обмежена зверху, і за тією самою теоремою 4.13 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Друге твердження найпростіше довести від супротивного: нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається. Але ж тоді, згідно з попереднім, має збігатися й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Проте за умовою теореми він розбіжний. Суперечність доводить друге твердження.

2) Оскільки $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, то згідно з означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \varepsilon$$

або, зокрема, $\frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$, тобто $a_n < (c + \varepsilon) b_n$.

Із наслідку 1 теореми 4.13 випливає, що скінченне число членів не впливає на збіжність або розбіжність ряду. Отже, вважатимемо, що остання нерівність виконується при всіх $n \in \mathbf{N}$. Оскільки ж ряд із загальним членом $(c + \varepsilon)b_n$ збігається, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то з цієї нерівності за першою частиною теореми збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Твердження про розбіжність рядів доводиться від супротивного так, як це зроблено в першій частині теореми.

На практиці часто доводиться мати справу з рядами, члени яких утворюють монотонну послідовність. Для таких рядів справджується така необхідна й достатня ознака збіжності.

Теорема 4.16. Нехай $a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots \ge 0$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається тоді й лише тоді, коли збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots$

Доведення

Випишемо очевидні нерівності

$$a_2 \le a_2 \le a_1,$$

$$2a_4 \le a_3 + a_4 \le 2a_2,$$

$$4a_8 \le a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \le 4a_4,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^n a_{2^{n+1}} \le a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} \le 2^n a_{2^n}.$$

Нехай $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ — часткові суми розглядуваних рядів, тобто

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ B_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}.$$

Додаючи вказані вище нерівності, дістанемо

$$\frac{1}{2}(B_n - a_1) \le A_{2^{n+1}} - a_1 \le B_n.$$

Оскільки послідовності $\{A_n\}$ і $\{B_n\}$ неспадні, то з останньої нерівності легко побачити, що вони або одночасно обмежені, або необмежені зверху. За теоремою 4.13 розглядувані ряди дійсно є збіжними або розбіжними одночасно.

◆ ***Наслідок.*** *Узагальнений гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *збіжний при* $\alpha > 1$ *і розбіжний при* $\alpha \le 1$.

Дійсно, при $\alpha \le 0$ розбіжність ряду очевидна, оскільки $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}} \ge 1$ і не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Нехай $\alpha > 0$. Тоді за теоремою 4.16 узагальнений гармонічний ряд збіжний або розбіжний одночасно з рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k,$$

який згідно з прикладом 4.4 є збіжним лише за умови $q = 2^{1-\alpha} < 1$, тобто $\alpha > 1$.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ дійсно збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \le 1$.

Важливість цього наслідку полягає в тому, що узагальнений гармонічний ряд часто є еталоном для порівняння рядів під час дослідження їх на збіжність.

4.6.3. Ознаки Коші й Д'Аламбера

Розглядатимемо далі ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, складені з додатних членів.

Теорема 4.17 (ознака Д'Аламбера). Нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \tag{4.5}$$

Тоді при $l < 1$ ряд збігається, а при $l > 1$ — розбігається.

Доведення

Рівність (4.5) означає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon \tag{4.6}$$

або, зокрема,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon.$$

Нехай $l < 1$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб число $q = l + \varepsilon$ було меншим за 1, тобто $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ при всіх $n > N$.

Оскільки скінченне число членів не впливає на збіжність або розбіжність ряду (наслідок теореми 4.13), то вважатимемо, що $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ при всіх $n \in \mathbf{N}$.

Унаслідок співвідношення

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}$$

маємо $a_n < a_1 q^n$, $n \in \mathbf{N}$. Але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^n$ збіжний як нескінченна геометрична прогресія зі знаменником q: $0 < q < 1$. За теоремою порівняння 4.15 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ також збіжний.

Нехай $l > 1$. Із нерівності (4.6) випливає, зокрема, що $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ при всіх $n > N$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб число $l - \varepsilon$ було більшим за 1, тобто $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ або $a_{n+1} > a_n$ при всіх $n > N$. Останнє означає, що, починаючи з номера $N + 1$ члени ряду зростають. У цьому разі не виконується необхідна умова збіжності й ряд розбігається.

Теорема 4.18 (ознака Коші). Нехай існує границя

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = l. \tag{4.7}$$

Тоді при $l < 1$ ряд збігається, а при $l > 1$ — розбігається.

Доведення

Рівність (4.7) означає, що для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер N, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon$ або, зокрема,

$$\sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon. \qquad (4.8)$$

Нехай $l < 1$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб число $q = l + \varepsilon$ було меншим за 1, тобто $\sqrt[n]{a_n} < q$ або $a_n < q^n$ при всіх $n > N$.

Міркування, аналогічні викладеним під час доведення попередньої теореми, дають підстави вважати, що нерівність $a_n < q^n$ виконується при всіх $n \in \mathbf{N}$. Але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ збіжний як нескінченна геометрична прогресія зі знаменником q: $0 < q < 1$. За теоремою порівняння 4.15 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ також збіжний.

Нехай $l > 1$. Із нерівності (4.8) випливає, зокрема, що при всіх $n > N$ маємо $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}$. Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб число $l - \varepsilon$ було більшим за 1, тобто $\sqrt[n]{a_n} > 1$ або $a_n > 1$ при всіх $n > N$.

Останнє означає, що порушується необхідна умова збіжності й ряд розбігається.

- *Зауваження.* При застосуванні ознак Д'Аламбера й Коші може статися, що $q = 1$. У таких випадках ці ознаки не діють і нічого певного за їх допомогою про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сказати не можна.

4.6.4. Ряд Лейбніца

Означення 4.15. *Ряд вигляду*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

де $a_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, *називають* ***рядом Лейбніца.***

Теорема 4.19. Нехай $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ при всіх $n \in \mathbf{N}$ і $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Тоді ряд Лейбніца збігається.

Доведення

Нехай $\{S_n\}$ — послідовність часткових сум даного ряду. Спочатку розглянемо часткові суми з парними номерами.

З одного боку,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n};$$

отже, послідовність $\{S_n\}$ обмежена зверху,

$$S_{2n} \le a_1, \ \ n \in \mathbf{N}.$$

З іншого боку,

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

так що послідовність $\{S_{2n}\}$ неспадна.

За теоремою 4.8 послідовність $\{S_{2n}\}$ збігається. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$. Дійсно,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S.$$

Отже, послідовності часткових сум даного ряду з парними й непарними номерами збіжні до однієї й тієї самої границі. Остаточно доходимо висновку, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тобто ряд Лейбніца дійсно збігається.

◆ ***Наслідок.*** *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \ldots$ *збігається при* $\alpha > 0$.

Зазначимо, що при $\alpha > 1$ даний ряд збігається абсолютно, оскільки, як показано в п. 4.6.2, при $\alpha > 1$ узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ збіжний.

При $0 < \alpha \le 1$ даний ряд збігається лише умовно, оскільки, по-перше, для нього виконується теорема 4.19, а по-друге, при таких α узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ розбігається.

4.6.5. Дії над рядами

➡ **Означення 4.16.** ***Сумою двох рядів*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *називається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Добутком ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *на число c називається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c a_n$.

Добутком двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***називається ряд*** $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, де

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1, \ \ n \in \mathbf{N}.$$

Теорема 4.20. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то збігається також їх сума, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, то збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = cA.$$

Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, причому хоча б один із цих рядів збігається абсолютно, то збігається й добуток рядів $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB.$$

Доведення

Нехай часткові суми відповідних рядів $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Тоді $A_n + B_n$ — часткові суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Оскільки ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні, то існують границі $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n \to \infty} B_n = B$, а тому за теоремою 4.5 існує

$$\lim_{n \to \infty} (A_n + B_n) = A + B,$$

що й доводить перше твердження теореми.

Друге й частково третє твердження доводяться аналогічними міркуваннями.

Правила дій над рядами не завжди збігаються з правилами дій над скінченними сумами. Зокрема, в останніх можна довільно змінювати порядок доданків, від чого їх сума не змінюється. Для рядів це правило, взагалі кажучи, хибне.

Теорема 4.21. Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ із невід'ємними членами збігається й $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Тоді й будь-який новий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, який дістаємо при переставленні його членів, також збігається й має ту саму суму S.

Доведення

Дійсно, нехай $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ і $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a'_k$ — часткові суми даного й нового рядів. Члени часткової суми S'_n розташовуються в ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ під номерами $k_1, k_2, ..., k_n$. Покладемо $N = \max(k_1, k_2, ..., k_n)$ і введемо до розгляду N-ну часткову суму S_N вихідного ряду.

Ясно, що $S'_n \le S_N \le S$. Оскільки n — довільне, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ за теоремою 4.8 збігається й має суму $S' \le S$. Наведені міркування можна викласти ще раз, помінявши ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ ролями. Матимемо $S \le S'$. Отже, $S = S'$.

Теорема 4.22. Будь-яке переставлення членів абсолютно збіжного ряду не порушує його збіжності; при цьому сума нового ряду залишається тією самою.

Доведення

Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно збіжний і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Покладемо при всіх $n \in \mathbf{N}$

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n, & \text{якщо } a_n \ge 0, \\ 0, & \text{якщо } a_n < 0; \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n, & \text{якщо } a_n \le 0, \\ 0, & \text{якщо } a_n > 0. \end{cases}$$

Величини a_n^+ і a_n^- невід'ємні, $a_n = a_n^+ - a_n^-$ і $a_n^+ \le |a_n|$, $a_n^- \le |a_n|$.

Згідно з останніми нерівностями можна зробити висновок, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, складені з невід'ємних членів, є збіжними (див. теорему 4.15).

Нехай ряд, утворений у результаті переставлень членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}$.

Покладемо

$$\overline{a_n^+} = \begin{cases} \overline{a}_n, & \text{якщо } \overline{a}_n \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } \overline{a}_n < 0; \end{cases}$$

$$\overline{a_n^-} = \begin{cases} -\overline{a}_n, & \text{якщо } \overline{a}_n \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } \overline{a}_n > 0; \end{cases}$$

отже, $\overline{a_n} = \overline{a_n^+} - \overline{a_n^-}$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n^+} - \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n^-} = \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{a_n^+} - \overline{a_n^-}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n}.$$

У цьому ланцюжку перша й остання рівності випливають із зображення членів a_n і $\overline{a_n}$, друга й четверта — з теореми 4.20, третя — з теореми 4.21. Теорему доведено.

Для умовно збіжного ряду така властивість уже не справджується. Г. Ріман довів теорему, формулювання якої подано нижче.

Теорема 4.23 (Рімана). Якщо ряд збігається умовно, то можна так переставити його члени, щоб заново утворений ряд мав будь-яку наперед задану суму або навіть став розбіжним.

Глава 5 ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

5.1 ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

5.1.1. Означення границі функції

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на деякій підмножині X множини дійсних чисел $\mathbf{R}$ і x_0 — гранична точка множини X. Нагадаємо, що в будь-якому ε-околі $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ граничної точки x_0 міститься нескінченна кількість точок множини X, проте сама точка x_0 може й не належати X.

Означення 5.1 (Гейне). *Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbf{N})$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ є збіжною до A.*

Якщо число A — границя функції в точці x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Нехай функція $f(x)$ має границю, тоді вона, очевидно, єдина. Це випливає з того, що збіжна послідовність $\{f(x_n)\}$ може мати лише одну границю (див. п. 4.1).

Означення 5.2 (Коші). *Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Теорема 5.1. Означення границі функції в точці за Гейне й за Коші еквівалентні.

Доведення

Нехай число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Коші й $\{x_n\}$ — довільна послідовність, збіжна до x_0, $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbf{N})$. Тоді при будь-якому $\delta > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n >$ $> N$ справджуватиметься нерівність $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Крім того, при будь-якому $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta, x \in X$. Покладемо $\delta = \delta(\varepsilon)$ в нерівності $0 < |x_n - x_0| < \delta$; тоді при $n > N = N(\varepsilon)$ маємо $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Таким чином, число A є границею функції при $x \to x_0$ за Гейне.

Навпаки, нехай число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Гейне. Припустимо, проте, що це число не є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Коші. Тобто є таке $\varepsilon > 0$, що при будь-якому $\delta > 0$ знайдеться така точка $x \in X$, для якої $0 < |x - x_0| < \delta$, але $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

Покладемо $\delta = \delta_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ і для кожного з указаних $\delta_n > 0$ знайдемо точку $x_n \in X$ таку, що $0 < |x_n - x_0| < \delta_n$, але $|f(x_n) -$ $- A| \geq \varepsilon$. В силу вибору δ_n послідовність $\{x_n\}$, очевидно, є збіжною до x_0, але послідовність $\{f(x_n)\}$ — не збіжна до числа A. А це суперечить тому, що число A є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ за Гейне.

Еквівалентність обох означень повністю доведено.

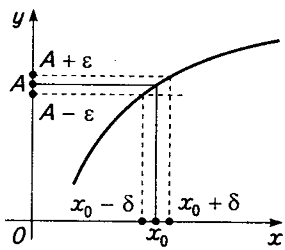


Рис. 5.1

Відзначимо геометричний зміст означення 5.2, скориставшися графіком функції $y = f(x)$ (рис. 5.1). Хоч би який малий ε-окіл точки A взяти, має існувати такий δ-окіл точки x_0, що коли x змінюється між $x_0 - \delta$ і $x_0 + \delta$, графік функції $y = f(x)$ розташовується в смузі завширшки 2ε між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$. Наголосимо, що в точці x_0 функція $f(x)$ може набувати значення, яке не дорівнює A, або навіть бути невизначеною. Тому в означенні 5.2 йдеться саме про нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$.

Необхідні й достатні умови існування границі функції подамо у вигляді теореми.

Теорема 5.2 (критерій Коші). Аби існувала границя функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно й достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлося таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x', x'' \in X$, які задовольняють нерівності

$$0 < |x' - x_0| < \delta, \quad 0 < |x'' - x_0| < \delta,$$

виконувалася нерівність

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доведення

Необхідність. Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Тоді згідно з означенням 5.2 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що при x', $x'' \in X$ і таких, що $0 < |x' - x_0| < \delta$ і $0 < |x'' - x_0| < \delta$, виконуватимуться нерівності $|f(x') - A| < \varepsilon/2$ і $|f(x'') - A| < \varepsilon/2$. Але ж тоді для вказаних x', x'' матимемо $|f(x') - f(x'')| = |[f(x') - A] - [f(x'') - A]| \leq$ $\leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Достатність. Нехай для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдено таке число $\delta > 0$, що при всіх x', $x'' \in X$, які задовольняють нерівності $0 < |x' - x_0| < \delta$, $0 < |x'' - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x') -$ $- f(x'')| < \varepsilon$.

Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\} \subset X$, $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathbf{N})$, збіжну до x_0. Доведемо, що $\{f(x_n)\}$ — фундаментальна послідовність (див. п. 4.5). Оскільки $x_n \to x_0$, то знайдеться такий номер N, що при всіх n, $m > N$ справджуватимуться нерівності $0 < |x_n - x_0| < \delta$, $0 < |x_m - x_0| < \delta$. При вказаному δ, поклавши $x' = x_n$, $x'' = x_m$, дістанемо

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

при n, $m \in \mathbf{N}$, тобто послідовність $\{f(x_n)\}$ — дійсно фундаментальна, а отже, і збіжна до деякого числа A.

Залишається переконатися в тому, що число A не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}$. Припустимо супротивне: нехай є дві різні послідовності $\{x'_n\} \subset X$, $x'_n \neq x_0$ $(n \in \mathbf{N})$; $\{x''_n\} \subset X$, $x''_n \neq x_0$ $(n \in \mathbf{N})$, збіжні до x_0, але такі, що $f(x'_n) \to A$, а $f(x''_m) \to B$, причому $A \neq B$. Складемо нову послідовність

$$\{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots\},$$

яка, очевидно, також збігається до x_0. Проте відповідна послідовність значень функції

$$\{f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots, f(x'_n), f(x''_n), \ldots\}$$

розбіжна, що суперечить попередньому.

Суперечність доводить, що для будь-яких послідовностей $\{f(x_n)\}$ існує спільна границя. Отже, згідно з означенням за Гейне функція $f(x)$ при $x \to x_0$ дійсно має границю.

5.1.2. Односторонні границі

При дослідженні функції корисні поняття односторонніх границь.

Означення 5.3 (Гейне). *Число A називають **правою (лівою) границею функції** $f(x)$ у точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, $x_n > x_0$ $(x_n < x_0)$ $(n \in \mathrm{N})$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до A.* Це позначають відповідно так:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \quad \left(\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \right)$$

або

$$f(x_0 + 0) = A \quad (f(x_0 - 0) = A).$$

В окремому випадку, коли $x_0 = 0$, пишуть $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to -0} \times \right.$ $\left. \times f(x) = A \right)$.

Означення 5.4 (Коші). *Число A називають **правою (лівою) границею функції** $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta$ $(0 < x_0 - x < \delta)$, виконуватиметься нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Означення 5.3 і 5.4, звичайно ж, еквівалентні.

Зв'язок між односторонніми границями та границею функції в точці встановлює наступна теорема.

Теорема 5.3. Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й лише тоді, коли існують їх права й ліва границі в цій точці, які збігаються між собою; при цьому

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Доведення

Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 границю, що дорівнює A, то згідно з означенням 5.2 це саме число A буде, очевидно, як правою, так і лівою границями функції $f(x)$ у точці x_0.

Навпаки, нехай $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$. Згідно з означенням 5.4 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдуться такі числа $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < x - x_0 < \delta_1$ або $0 < x_0 - x < \delta_2$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Поклавши $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, дістанемо, що при всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, справджується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. А це згідно з означенням 5.2 і показує, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Теорему доведено повністю.

5.1.3. Границя функції на нескінченності й нескінченні границі

Нехай функцію $f(x)$ визначено при $x > x_0$ $(x < x_0)$.

Означення 5.5. *Число A називають **границею функції** $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\Delta > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $x > x_0$, $x > \Delta$ $(x < x_0, x < -\Delta)$, виконується нерівність*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це позначають відповідно так:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = A)$$

або

$$f(x) \to A, \;\; x \to +\infty \quad (f(x) \to A, \;\; x \to -\infty).$$

Якщо існують границі функції $f(x)$ як при $x \to +\infty$, так і при $x \to -\infty$, причому $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, то застосовують позначення

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \;\text{ або }\; f(x) \to A, \;\; x \to \infty.$$

Вище малося на увазі, що A — певне число. Іноді зручно розглядати нескінченні границі функції.

Означення 5.6. *Кажуть, що функція $f(x)$ має своєю границею $+\infty(-\infty)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого $E > 0$ можна знайти таке число $\delta > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

справджується нерівність

$$f(x) > E \quad (f(x) < -E).$$

Це позначають відповідно так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty)$$

або

$$f(x) \to +\infty,\ x \to x_0 \ (f(x) \to -\infty,\ x \to x_0).$$

Означення 5.7. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$, *то кажуть, що функція* $f(x)$ *має своєю границею* ∞ *при* $x \to x_0$ *(або в точці* x_0*).*

Це позначають так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ \text{ або } f(x) \to \infty,\ x \to x_0.$$

Аналогічно тому, як це зроблено в п. 5.1.2, нескладно визначити також односторонні нескінченні границі

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty.$$

5.2 ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦЬ

Розглянемо основні теореми про властивості границь функцій.

Теорема 5.4. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\, g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $B \neq 0$) також мають границі в точці x_0, причому:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) g(x) = A\, B$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Доведення

Нехай $\{x_n\} \subset X, x_n = x_0$ $(x \in \mathrm{N})$ — довільна послідовність, збіжна до x_0. За означенням 5.1 збіжними є послідовності $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$, причому їхні границі — відповідно A і B. Але тоді за теоремою 4.5 послідовності $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{f(x_n)g(x_n)\}$, $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ (при $B \neq 0$) мають границі, що дорівнюють відповідно $A \pm B$, AB, $\dfrac{A}{B}$.

Згідно з означенням 5.1

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B; \quad \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = AB; \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

◆ ***Наслідок 1.*** *Для довільного числа C*

$$\lim_{x \to x_0} [C\, f(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

◆ ***Наслідок 2.*** *Для довільного $m \in \mathrm{N}$*

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^m = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^m.$$

Теорема 5.5. Нехай $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ — функції, визначені на множині X; при цьому при всіх $x \in X$ виконуються нерівності

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Тоді, якщо існують границі

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A,$$

то існує й границя функції $g(x)$ у точці x_0, причому

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

Доведення

Нехай $\{x_n\} \subset X$, $x_n \neq x_0$ $(n \in \mathrm{N})$ — довільна послідовність, збіжна до x_0. За означенням 5.1 збіжними є послідовності $\{f(x_n)\}$, $\{h(x_n)\}$, причому їхні границі збігаються й дорівнюють A. Але тоді за теоремою 4.6, з урахуванням того, що

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n),$$

послідовність $\{g(x_n)\}$ також має границю, яка дорівнює A. Згідно з означенням 5.1

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

- *Зауваження.* Теореми 5.4 і 5.5 повністю зберігаються у випадку односторонніх границь і границь функції на нескінченності.

Теорема 5.6. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — функції, визначені на множині X; при цьому при всіх $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \le g(x)$. Тоді, якщо існують границі

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

то $A \le B$.

Цю нескладну теорему пропонуємо довести самостійно методом, аналогічним тому, який використано при доведенні теорем 5.4 і 5.5.

Теорема 5.7. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ — складна функція, де $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$; при цьому існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ ($\varphi(x) \ne A$ при $x \ne x_0$) і $\lim\limits_{u \to A} f(u) = B$. Тоді в точці x_0 існує границя складної функції $f[\varphi(x)]$, причому

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = B.$$

Доведення

Нехай $\{x_n\} \subset X, x_n \ne x_0$ ($x \in \mathbf{N}$) — довільна послідовність, збіжна до x_0. Тоді згідно з означенням 5.1 послідовність $\{u_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ — збіжна до числа A й така, що $u_n \ne A$ ($n \in \mathbf{N}$). Але тоді, на підставі існування $\lim\limits_{u \to A} f(u) = B$ і знову посилаючися на означення 5.1, маємо, що послідовність $\{f(u_n)\} = \{f(\varphi(x_n))\}$ збіжна до числа B. Згідно з означенням 5.1

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to A} f(u) = B,$$

що й треба довести.

Ця теорема дає змогу ефективно обчислювати границі, переходячи від змінної x до нової змінної $u = \varphi(x)$.

5.3 ПЕРША Й ДРУГА ВАЖЛИВІ ГРАНИЦІ

Здебільшого границі функцій можна обчислювати за допомогою так званих важливих границь.

5.3.1. Перша важлива границя

Доведемо, що

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Зазначимо спочатку, що функція $\frac{\sin x}{x}$ визначена при всіх $x \neq 0$. Припустимо, що $x \in (0; \pi/2)$. Доведемо, що при таких x виконуються нерівності $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Розглянемо коло одиничного радіуса з центром у точці O (рис. 5.2) і побудуємо рівні між собою кути AOB і BOC із радіанною мірою x. Нехай EA і EC — дотичні до цього кола. Очевидно, що хорда AC, яка стягує дугу кола AC, менша від цієї дуги, котра, своєю чергою, менша за довжину ламаної $EA + EC$. Але ж $AC = 2 \sin x$, $EA + EC = 2 \operatorname{tg} x$, а довжина дуги $AC - 2x$, тобто $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Беручи до уваги, що при $x \in (0; \pi/2)$ $\sin x > 0$ і $\operatorname{tg} x > 0$, маємо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

звідки

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

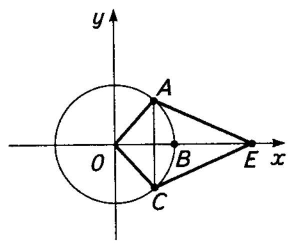


Рис. 5.2

Оскільки $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}$ $\left(\text{тут використано, що } \sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}\right)$, то при $x \in (0; \pi/2)$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Зазначимо, що обидві частини цієї нерівності не змінюються, якщо замінити x на $-x$. Тому вона виконується не лише при $x \in (0; \pi/2)$, а й при $x \in (-\pi/2; 0)$, тобто при всіх $x \in (-\pi/2; \pi/2)$, $x \neq 0$.

За теоремою 5.5 можна зробити висновок, що

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

тобто

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5.3.2. Друга важлива границя

Доведемо, що

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Нагадаємо (див. п. 4.3), що

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $x\to+\infty$. Позначимо через n цілу частину числа $x>1$; тоді $n\le x<n+1$ і $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}$, а отже,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Зауважимо, що $n\to\infty$, якщо $x\to+\infty$, а тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

За теоремою 5.5

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Розглянемо далі випадок, коли $x\to-\infty$. Вважаючи $x<-1$, введемо нову змінну $u=-(x+1)$. Маємо $x=-(u+1)$ і $u\to+\infty$ при $x\to-\infty$. Звідси за теоремою 5.7

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u+1}\right)^{-u-1} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{u}{u+1}\right)^{-u-1} =$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{u+1}{u} \right)^{u+1} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u+1} \right)^{u+1} =$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{u} \left(1 + \frac{1}{u} \right) = e \cdot 1 = e.$$

Поєднуючи обидва випадки, дістанемо остаточно

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = e.$$

- *Зауваження.* Інша форма запису другої важливої границі має вигляд

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

Дійсно, замінимо змінну, поклавши $t = \dfrac{1}{x}$. Ясно, що $t \to 0$ при $x \to \infty$, звідки за теоремою 5.7

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = \lim_{t \to 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

5.4 НЕСКІНЧЕННО МАЛІ Й НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ФУНКЦІЇ. ЇХ ПОРІВНЯННЯ

Означення 5.8. ***Функцію $f(x)$ називають нескінченно малою при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Нескінченно малу в точці функцію коротко часто називають просто *нескінченно малою.*

Означення 5.9. ***Функцію $f(x)$ називають нескінченно великою при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Нескінченно велику в точці функцію коротко часто називають просто *нескінченно великою.*

Властивості нескінченно малих і нескінченно великих подамо у наступних теоремах.

Теорема 5.8. Аби функція $f(x)$ мала в точці x_0 границею число A, необхідно й достатньо, щоб в околі точки x_0 виконувалося співвідношення

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — нескінченно мала в точці x_0.

Теорема 5.9. Сума (різниця) й добуток нескінченно малих є нескінченно малими.

Теорема 5.10. Добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію — нескінченно мала.

Теорема 5.11. Якщо $\alpha(x)$ — нескінченно мала в точці x_0 і $\alpha(x) \neq 0$ в околі точки x_0, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ нескінченно велика в цій точці.

Якщо $f(x)$ — нескінченно велика в точці x_0, то функція $\dfrac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

Твердження теорем 5.8–5.11, як відомо, справджуються для будь-яких послідовностей (див. п. 4.1). Повторюючи процедуру доведення, аналогічну тій, яку викладено щодо теорем 5.4–5.6, легко довести справедливість усіх наведених вище теорем. Пропонуємо зробити це самостійно.

Зазначимо нарешті, що означення 5.8, 5.9 справедливі, звичайно ж, і для випадків $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$.

При дослідженні функцій часто доводиться мати справу не з однією, а з кількома нескінченно малими функціями в даній точці. Для їх порівняння вивчають частку цих функцій. Детально зупинимося на правилах порівняння нескінченно малих.

➡ **Означення 5.10.** Нехай функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0. Тоді:

1) *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ $(A \in \mathbf{R})$, *то* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ ***називають нескінченно малими одного порядку*** *при* $x \to x_0$;

2) *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, *то* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *називають* ***еквівалентними нескінченно малими*** *при* $x \to x_0$;

3) *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, *то* $\alpha(x)$ *називають* ***нескінченно малою вищого порядку*** *порівняно з* $\beta(x)$ *при* $x \to x_0$.

Аналогічні правила порівняння мають місце для випадків $x \to x_0 \pm 0, x \to \pm\infty, x \to \infty$.

При порівнянні нескінченно малих використовуються символи o («o мале») і O («O велике»).

У першому випадку означення 5.10 записують так: $\alpha(x) = O(\beta(x))$, $x \to x_0$ (читається: $\alpha(x)$ є «O велике» від $\beta(x)$ при $x \to x_0$).

Для третього випадку використовується запис: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$ (читається: $\alpha(x)$ є «o мале» від $\beta(x)$ при $x \to x_0$).

У другому випадку еквівалентність нескінченно малих коротко позначається так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

Означення 5.11. Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі в точці x_0 і k — деяке натуральне число. Тоді, *якщо* $\alpha(x)$ *і* $\beta^k(x)$ — *нескінченно малі одного порядку, тобто*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \quad (A \in \mathbf{R}),$$

то $\alpha(x)$ *називають* ***нескінченно малою k-го порядку*** *відносно* $\beta(x)$.

Для нескінченно великих функцій діють аналогічні правила порівняння.

Теорема 5.12. Нескінченно малі в точці x_0 функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні при $x \to x_0$ тоді й лише тоді, коли їх різниця $\alpha(x) - \beta(x)$ є нескінченно малою вищого порядку порівняно з $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

Доведення

Необхідність. Нехай $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\right) = 1 - \lim_{x \to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 = 0,$$

а це й доводить, що

$$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x));$$

$$\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x)),\ \ x\to x_0.$$

Достатність. Нехай, навпаки,

$$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x));$$

$$\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x)),\ \ x\to x_0.$$

Із другого співвідношення

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=0,$$

звідки

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Отже, $\alpha(x)\sim\beta(x), x\to x_0$.

При визначенні границі частки двох нескінченно малих (великих) у багатьох випадках корисна наступна теорема.

Теорема 5.13. Якщо $\alpha(x)\sim\alpha_1(x), \beta(x)\sim\beta_1(x), x\to x_0$ і існує $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, то існує й $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Доведення

Оскільки $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ і $\beta(x)\sim\beta_1(x), x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}=1,\ \ \lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}=1.$$

Далі маємо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\lim_{x\to x_0}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)},$$

що й потрібно довести.

5.5 ПОНЯТТЯ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ

5.5.1. Означення неперервності функції

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на деякій підмножині X множини дійсних чисел $\mathbf{R}$ і x_0 — гранична точка множини X. Вважаємо, що x_0 обов'язково належить X.

Означення 5.12. *Функцію $f(x)$ називають* ***неперервною в точці*** *x_0, якщо*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Саму точку $x_0 \in X$ при цьому називають ***точкою неперервності функції*** *$f(x)$.*

Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то умову неперервності можна подати так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

тобто для неперервної функції знаки функції і границі можна переставляти місцями.

Беручи до уваги означення 5.1, 5.2, наведемо означення неперервності функції в точці за Гейне і Коші.

Означення 5.13 (Гейне). *Функцію $f(x)$ називають* ***неперервною в точці*** *x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$ $(n \in \mathbf{N})$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до $f(x_0)$.*

Означення 5.14 (Коші). *Функцію $f(x)$ називають* ***неперервною в точці*** *x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Еквівалентність означень 5.13, 5.14 негайно випливає з теореми 5.1.

При дослідженні функцій на неперервність зручно користуватися й дещо іншою формою означення 5.14. Розглянемо значення функції $y = f(x)$ у точці x_0 і, надавши аргументу деякого приросту Δx, перейдемо до точки $x_0 + \Delta x \in X$. Функція $f(x)$ матиме при цьому приріст

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 5.15. *Функцію $f(x)$ називають неперервною в точці x_0, якщо її приріст у цій точці — нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто* $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} \Delta y = 0$.

Саме це означення найчастіше застосовується на практиці.

В означенні 5.12 неперервності функції в точці границю функції $f(x)$ у точці x_0 можна замінити однією з односторонніх границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \left(\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \right)$. При цьому дістанемо нові означення щодо неперервності функції $f(x)$ у точці x_0 відповідно справа або зліва.

Означення 5.16. *Функцію $f(x)$ називають* ***неперервною в точці*** x_0 *справа (зліва), якщо*

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Отже, якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 справа (зліва), то для неї виконується співвідношення

$$f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

З теореми 5.3 випливає, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й лише тоді, коли вона в цій точці неперервна справа й зліва.

Зауважимо, що існування й рівність між собою односторонніх границь функції $f(x)$ у точці x_0 ще не дають підстав для твердження про неперервність функції в цій точці. Дійсно, нехай

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Ясно, що при $x_0 = 0$

$$f(-0) = f(+0) = 0,$$

але, оскільки $f(0) = 1$, то функція в точці $x_0 = 0$ не є неперервною.

5.5.2. Класифікація розривів функції

Розглянемо точки, в яких функція $y = f(x)$ не є неперервною.

Означення 5.17. *Точку $x_0 \in X$, яка не є точкою неперервності функції $f(x)$, називають* ***точкою розриву функції*** $f(x)$.

➡ **Означення 5.18.** *Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають* ***точкою розриву першого роду,*** *якщо в ній існують односторонні границі. При цьому у випадку $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ кажуть про точку усувного розриву.*

Саме точка $x_0=0$ є точкою усувного розриву функції $f(x)$, яку розглянуто в п. 5.5.1.

➡ **Означення 5.19.** *Точку розриву x_0 функції $f(x)$ називають* ***точкою розриву другого роду,*** *якщо в ній не існує принаймні одна з односторонніх границь (зокрема нескінченна).* Так, для функції

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$x_0=0$ є точкою розриву другого роду, оскільки, очевидно, її права границя в цій точці не існує.

Зауважимо, що у випадках, аналогічних останньому прикладу, значення функції в точці x_0 іноді не розглядається. Наприклад, можна стверджувати, що точка $x_0=0$ є точкою розриву другого роду для функції $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\ne 0.$

Взагалі, кажучи про неперервні функції на всій множині X, мають на увазі, що функція неперервна в кожній точці $x\in X$.

5.6 ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо основні властивості неперервних функцій, які випливають з означення неперервності й відповідних властивостей границі функції.

Теорема 5.14. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0. Тоді функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\,g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0)\ne 0$) також неперервні в цій точці.

Доведення одразу випливає з означення 5.13 і теореми 5.4.

Теорема 5.15. Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0. Тоді існує такий δ-окіл $|x - x_0| < \delta$ цієї точки, в якому функція $f(x)$ обмежена.

Доведення

Внаслідок неперервності функції $f(x)$ у точці x_0 для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, що нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ виконуватиметься при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, або, що одне й те саме,

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

при всіх $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$. Це й доводить обмеженість функції $f(x)$ у вказаному δ-околі точки x_0.

Теорема 5.16. Нехай функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і $f(x_0) \neq 0$; тоді існує такий δ-окіл $|x - x_0| < \delta$ цієї точки, в якому функція $f(x)$ зберігає знак.

Доведення

Припустимо для конкретності, що $f(x_0) > 0$. Покладемо $\varepsilon = f(x_0)$. Міркуючи так само, як при доведенні попередньої теореми, дістанемо, що при всіх $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ виконуються нерівності

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

або

$$0 < f(x) - f(x_0) < f(x_0),$$

тобто $f(x_0) > 0$ при всіх $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$.

Випадок $f(x_0) < 0$ розглядається аналогічно.

Теорема 5.17. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ — складна функція, де $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$; при цьому функція $\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а $f(u)$ — в точці $u_0 = \varphi(x_0)$. Тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

Доведення

Розглянемо довільну послідовність $\{x_n\} \subset X$ $(n \in \mathbf{N})$, збіжну до точки x_0. Унаслідок неперервності функції $\varphi(x)$ послідовність $\{u_n\} = \{\varphi(x_n)\}$ $(n \in \mathbf{N})$ збіжна до точки $u_0 = \varphi(x_0)$. Оскільки ж функція $f(u)$, своєю чергою, неперервна в точці u_0, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(u_0)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f[\varphi(x_n)] = f[\varphi(x_0)]$.

Отже,

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)],$$

а це й означає, що функція $f[\varphi(x)]$ неперервна в точці x_0.

• *Зауваження.* Останнє співвідношення у випадку, якщо x_0 — гранична точка множини X, можна подати так:

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)].$$

Звідси випливає, що знак границі lim і знак функції f, якщо функція $f(x)$ неперервна, можна міняти місцями.

Це зауваження часто дає змогу ефективно обчислювати границі функцій.

5.7 ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ

Розглянемо кілька надзвичайно важливих властивостей функції, неперервної на деякому відрізку $[a, b]$. При цьому, як і завжди, розумітимемо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, якщо вона неперервна в усіх точках інтервалу (a, b), а в самих точках a і b — відповідно справа й зліва.

Теорема 5.18 (перша теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді вона є обмеженою на цьому відрізку.

Доведення

Як відомо, функція $f(x)$ називається *обмеженою* на відрізку $[a, b]$, якщо існує таке число $K > 0$, що при всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність $|f(x)| \le K$.

Припустимо супротивне: нехай неперервна функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a, b]$. Тоді для будь-якого $K > 0$ знайдеться така точка $x \in [a, b]$, що $|f(x)| > K$. Нехай $K_n = n$ $(n \in \mathbf{N})$, а x_n — відповідні точки послідовності $\{x_n\} \subset [a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$, в яких $|f(x_n)| > K_n$.

Унаслідок обмеженості послідовності $\{x_n\}$ з неї за лемою Больцано—Вейєрштрасса (див. п. 4.4) можна виділити збіжну підпослідовність $\{x_{n_k}\} \subset [a, b]$. Нехай $x_{n_k} \to x_0, k \to \infty$. Очевидно, що точка $x_0 \in [a, b]$, а тому з неперервності функції $f(x)$ у точці x_0 маємо $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, $k \to \infty$. Останнє неможливе, оскільки послідовність $\{f(x_{n_k})\}$ необмежена. Ця суперечність доводить теорему.

- *Зауваження.* Неперервна на інтервалі (a, b) функція вже не обов'язково є обмеженою на ньому. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ неперервна на інтервалі (0; 1), проте, очевидно, не обмежена на інтервалі (0; 1).

Теорема 5.19 (друга теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді вона досягає своїх найбільшого й найменшого значень в деяких точках цього відрізка, тобто існують точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, для яких

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_1), \quad \min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2).$$

Доведення

За першою теоремою Вейєрштрасса неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ є обмеженою на цьому відрізку. Отже, обмеженою є числова множина $\{f(x)\}$ значень цієї функції. Але ж тоді існуватимуть (див. п. 1.3) точні верхня M і нижня m межі числової множини $\{f(x)\}$, які називаються відповідно *точними верхньою й нижньою межами функції* $f(x)$ та $[a, b]$ і позначаються

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M, \quad \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m.$$

Теорему буде доведено, якщо вказати точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такі, що $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$. Для конкретності переконаємося в існуванні точки x_1. Припустимо супротивне: нехай у жодній точці відрізка $[a, b]$ функція $f(x)$ не набуває значення, що дорівнює M. Тоді при всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність $f(x) < M$. Розглянемо допоміжну неперервну на відрізку $[a, b]$ за теоремою 5.14 функцію

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

яка при всіх $x \in [a, b]$ додатна.

Внаслідок першої теореми Вейєрштрасса функція $F(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$, тобто існує таке додатне число M_1, що при всіх $x \in [a, b]$ $F(x) \le M_1$, або $\dfrac{1}{M - f(x)} \le M_1$, звідки $f(x) \le M - \dfrac{1}{M_1}$.

Останнє неможливе, оскільки суперечить тому, що M — точна верхня межа (найменша з верхніх меж) функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Ця суперечність доводить існування шуканої точки x_1. Так само можна переконатися в існуванні точки $x_2 \in [a, b]$, для якої $f(x_2) = m$.

- *Зауваження.* На неперервні на інтервалі (a, b) функції $f(x)$ друга теорема Вейєрштрасса, взагалі кажучи, вже не поширюється. Наприклад, функція $f(x) = x$ неперервна на інтервалі $(0; 1)$, проте не досягає на цьому інтервалі своїх точної верхньої $M = 1$ і точної нижньої $m = 0$ меж. У цій теоремі істотно, що $[a, b]$ — обмежена множина. Наприклад, функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$, як це буде доведено в наступному параграфі, неперервна на $\mathbf{R}$ (необмеженій множині), проте не досягає на $\mathbf{R}$ своєї точної верхньої межі $M = \pi / 2$ і точної нижньої межі $m = -\pi / 2$.

Означення 5.20. ***Коливанням*** *ω обмеженої на множині X функції $f(x)$ називають число*

$$\omega = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x).$$

Зокрема, для неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$, як це випливає з теореми 5.19,

$$\omega = \max_{x \in [a, b]} f(x) - \min_{x \in [a, b]} f(x).$$

Теорема 5.20 (перша теорема Больцано—Коші). Нехай функкія $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, причому $f(a) f(b) < 0$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = 0$.

Доведення

Нехай згідно з умовами теореми $f(a) f(b) < 0$. Це означає, що функція $f(x)$ набуває на кінцях відрізка $[a, b]$ значень різних знаків. Припустимо заради конкретності, що $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл. Якщо після цього з'ясується, що $f\left(\dfrac{a + b}{2}\right) = 0$, то теорему доведено. Якщо ж $f\left(\dfrac{a + b}{2}\right) \ne 0$, то виберемо з двох знайдених відрізків той, на кінцях якого $f(x)$ набуває значень різних знаків. Позначимо його $[a_1, b_1]$, так що $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

Здійснимо аналогічну процедуру поділу відрізка $[a_1, b_1]$. Повторюючи цей процес поділу відрізків, можна за скінченне число кроків k одержати, що або значення функції $f(x)$ усередині відрізка $[a_k, b_k]$ дійсно дорівнює нулю й тоді доведення теореми закінчиться, або дістати послідовність укладених відрізків

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

причому $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n} \to 0, n \to \infty$ і $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.

За теоремою 4.9 про вкладені відрізки існує точка $c \in [a, b]$, спільна для всіх відрізків і така, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} = c$. Із нерівності $f(a_n) < 0$, враховуючи неперервність функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, маємо $f(c) \le 0$, а з нерівності $f(b_n) > 0$ — відповідно $f(c) \ge 0$. Отже, $f(c) = 0$ і, очевидно, що $c \in (a, b)$.

Ця теорема має дуже простий геометричний зміст: якщо функція на кінцях відрізка $[a, b]$ набуває значень різних знаків, то її графік обов'язково перетне вісь Ox в якійсь точці інтервалу (a, b).

Теорема 5.21 (друга теорема Больцано—Коші). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, причому $f(a) \ne f(b)$, а C — деяке число, що лежить між $f(a)$ і $f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f(c) = C$.

Доведення

Покладемо $f(a) = A$, $f(b) = B$ і припустимо заради конкретності, що $A < B$, так що $A < C < B$. Розглянемо допоміжну неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $F(x) = f(x) - C$. Ясно, що

$$F(a) = f(a) - C = A - C < 0, \quad F(b) = f(b) - C = B - C > 0,$$

унаслідок чого $F(a)\ F(b) < 0$.

За першою теоремою Больцано—Коші існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $F(c) = 0$, тобто $f(c) - C = 0$, звідки $f(c) = C$, що й потрібно довести.

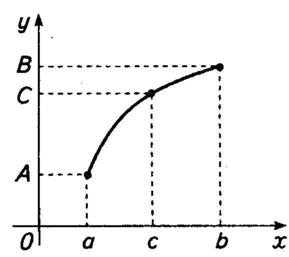


Рис. 5.3

Геометричний зміст доведеної теореми полягає в тому, що при виконанні відповідних умов пряма $y = C$ перетинає графік функції $y = f(x)$ принаймні в одній точці (рис. 5.3).

◆ **Наслідок.** *Множиною значень відмінної від тотожно сталої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, є відрізок $[m, M]$, де $M = \max\limits_{x \in [a, b]} f(x), m = \min\limits_{x \in [a, b]} f(x)$.*

Дійсно, за другою теоремою Вейєрштрасса існують точки x_1, $x_2 \in [a, b]$, для яких $f(x_1) = M, f(x_2) = m$ $(m < M)$.

За другою теоремою Больцано—Коші кожне число C таке, що $m < C < M$, є значенням неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ у деякій точці $c \in (a, b)$. Отже, саме відрізок $[m, M]$ — множина значень відмінної від тотожно сталої неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$.

➡ **Означення 5.21.** *Функцію $f(x)$ називають* ***рівномірно неперервною на множині*** *X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x', $x'' \in X$, які задовольняють нерівність $|x' - x''| < \delta$, виконується нерівність*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Очевидно, що при цьому має місце неперервність функції $f(x)$ у довільній точці $x_0 \in X$. Справді, поклавши в нерівностях, які фігурують в означенні 5.21, $x' = x$, $x'' = x_0$, дістанемо означення неперервності функції в точці x_0 за Коші. Таким чином, із рівномірної неперервності функції $f(x)$ на множині X випливає її неперервність на цій множині.

З іншого боку, не всяка неперервна на множині X функція є на ній рівномірно неперервною. Покажемо це на прикладі.

■ **Приклад 5.1.** Розглянемо на множині $X = (0; 1)$ функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$, яка неперервна на цій множині. Нехай $x' = x_n' = \dfrac{1}{2n}, x'' = x_n'' = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, так що $x', x'' \in (0; 1)$. Тоді

$$|f(x') - f(x'')| = n.$$

Покладемо $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Для цього $\varepsilon > 0$ не знайдеться числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такого, щоб із нерівності $|x' - x''| < \delta$ випливала б нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Дійсно, $|x' - x''| = \dfrac{1}{2n}$, а тому, хоч би яким було число $\delta > 0$, при $n > \dfrac{1}{2\delta}$ маємо $|x' - x''| < \delta$, проте $|f(x') - f(x'')| = n > \varepsilon$. Отже, функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не є рівномірно неперервною на інтервалі $(0; 1)$.

Випадки, в яких із неперервності функції $f(x)$ випливає її рівномірна неперервність, установимо в наступній теоремі.

Теорема 5.22 (Кантора). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона також рівномірно неперервна на ньому.

Доведення

Припустимо супротивне: нехай функція $f(x)$ не є рівномірно неперервною на відрізку $[a, b]$. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ і будь-якого $\delta > 0$ знайдуться такі точки $x', x'' \in [a, b]$, що $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$, хоча $|x' - x''| < \delta$.

Покладемо $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ і для кожного з указаних $\delta_n > 0$ знайдемо пару точок $x'_n, x''_n \in [a, b]$ таких, що $|x'_n - x''_n| < \delta_n$; проте

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

З обмеженої послідовності $\{x'_n\}$ за лемою Больцано—Вейєрштрасса можна виділити підпослідовність $\{x'_{n_k}\}$, збіжну до деякої точки $x_0 \in [a, b]$. Очевидно, що і $x''_{n_k} \to x_0$, $k \to \infty$, оскільки $|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \delta_{n_k}$, а $\delta_{n_k} \to 0$, $k \to \infty$.

Таким чином, побудовано дві послідовності $\{x'_{n_k}\}$ і $\{x''_{n_k}\}$, збіжні до $x_0 \in [a, b]$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то послідовності $\{f(x'_{n_k})\}$ і $\{f(x''_{n_k})\}$ мають збігатися до однієї й тієї самої границі $f(x_0)$. Проте це неможливо внаслідок того, що $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon$. Суперечність доводить теорему.

◆ ***Наслідок.*** Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Тоді *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *є* $\delta > 0$ *таке, що коли відрізок* $[a, b]$ *довільно розбити на скінченне число відрізків із довжинами, меншими за* δ, *то на кожному з них коливання* ω *функції* $f(x)$ *буде менше від* ε.

Доведення

За теоремою Кантора функція $f(x)$ рівномірно неперервна на відрізку $[a, b]$. А тому для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що при всіх $x', x'' \in [a, b]$, які задовольняють нерівність $|x' - x''| < \delta$, виконується нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ довільно на скінченне число відрізків із довжинами, меншими від δ. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на кожному з таких відрізків за другою теоремою Вейєрштрасса знайдуться точки x', x'' такі, що $f(x') = m$,

$f(x'') = M$, де m і M — точні нижня й верхня межі функції $f(x)$ на даному відрізку розбиття. Враховуючи, що $|x' - x''| < \delta$, маємо $|f(x') - f(x'')| = M - m < \varepsilon$. Отже, коливання $\omega = M - m$ функції $f(x)$ на кожному з відрізків розбиття менше ε.

Застосуємо вивчені властивості неперервних функцій для встановлення умов існування й неперервності оберненої функції.

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна й строго монотонна на відрізку $[a, b]$. Припустимо заради конкретності, що вона є зростаючою. Позначимо $f(a) = m, f(b) = M$. З теореми 5.21 випливає, що для будь-якого $y \in [m, M]$ є таке число x, що $f(x) = y$. Оскільки $f(x)$ монотонно зростає, то таке число x єдине. Звичайно ж, x залежить від y, тобто $x = g(y)$. Функція $x = g(y)$, як відомо, є оберненою до функції $y = f(x)$.

Таким чином, для неперервної строго монотонної на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ на відрізку $[m, M]$ завжди існує функція $x = g(y)$ (тут і далі m і M — відповідно найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$).

Теорема 5.23. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна й строго монотонна на відрізку $[a, b]$. Тоді обернена функція $x = g(y)$ також неперервна й строго монотонна на відрізку $[m, M]$.

Доведення

Нехай заради конкретності функція $y = f(x)$ зростаюча на відрізку $[a, b]$. Доведемо, що функція $x = g(y)$ також зростаюча на відрізку $[m, M]$. Припустимо супротивне: нехай для точок $y_1, y_2 \in [m, M]$ і таких, що $y_1 < y_2$, справджується нерівність $g(y_1) \geq \geq g(y_2)$, або $x_1 \geq x_2$. Але ж тоді, оскільки функція $f(x)$ зростаюча на відрізку $[a, b]$, маємо $f(x_1) \geq f(x_2)$, тобто $y_1 \geq y_2$. Суперечність доводить, що функція $x = g(y)$ зростаюча на відрізку $[m, M]$.

Доведемо, використовуючи означення Коші, що функція $x = g(y)$ неперервна на відрізку $[m, M]$. Нехай y_0 — довільна точка з відрізка $[m, M]$, а $x_0 = g(y_0)$. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$ таке, щоб точки $x_0 - \varepsilon$ і $x_0 + \varepsilon$ належали відрізку $[a, b]$. Нехай $f(x_0 - \varepsilon) = y_1$, $f(x_0 + \varepsilon) = y_2$. Позначимо $y_0 - y_1 = \delta_1, y_2 - y_0 = \delta_2$, звідки $y_1 = y_0 - \delta_1, y_2 = y_0 + \delta_2$, де $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. Покладемо $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тоді для довільних $y \in [m, M]$, які задовольняють нерівність $|y - y_0| < \delta$, виконується нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$, або $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

Отже, функція $x = g(y)$ справді неперервна на відрізку $[m, M]$.

- *Зауваження.* Теорема 5.23 повністю зберігається у випадку, якщо функція $f(x)$ визначена на необмеженому інтервалі й тоді, коли інтервал значень функції $f(x)$ також, можливо, необмежений.

5.8 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Як відомо зі шкільного курсу математики, ***основними елементарними функціями*** є:

1) стала $f(x) = C$, $x \in \mathbf{R}$;

2) степенева $f(x) = x^n$, $x \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, або $f(x) = x^{1/n}$, $x \geq 0$ (n — парне) і $x \in \mathbf{R}$ (n — непарне), або в загальному вигляді $f(x) = x^{\alpha}, x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$;

3) показникова $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$;

4) логарифмічна $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;

5) тригонометричні $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$; $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi)$ $(n \in \mathbf{Z})$; $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in (n\pi; \pi + n\pi)$ $(n \in \mathbf{Z})$;

6) обернені тригонометричні $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1; 1]$; $f(x) = \arccos x$, $x \in [-1; 1]$; $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbf{R}$; $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbf{R}$.

Послідовно встановимо неперервність цих функцій у відповідних областях їх визначення.

(1) Нехай $x_0 \in \mathbf{R}$. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ покладемо $\delta = \varepsilon$. Тоді при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, очевидно, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, так що стала функція неперервна на $\mathbf{R}$.

(2) Неперервність степеневої функції $f(x) = x^n$ при всіх $x \in \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ негайно випливає з того, що $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n разів) і теореми 5.14.

Згідно з останнім зауваженням п. 5.7 при $n = 2k$ $(k \in \mathbf{N})$ на $[0; +\infty)$ існує функція, обернена до функції $f(x) = x^{2k}$, яка є неперервною й зростаючою на $[0; +\infty)$. Як правило, її позначають так: $y = x^{\frac{1}{2k}} = \sqrt[2k]{x}$.

Так само, згідно з останнім зауваженням п. 5.7, при $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{N})$ на $\mathbf{R}$ існує функція, обернена до функції $f(x) = x^{2k+1}$, яка є неперервною й зростаючою на **R**. Зазвичай її позначають так: $y = x^{\frac{1}{2k+1}} = \sqrt[2k+1]{x}.$

Загальний випадок степеневої функції розглядається наприкінці четвертого пункту.

Зауважимо, що з пп. 1, 2 і теореми 5.14 негайно випливає, що будь-який многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$, є неперервною на **R** функцією. Згідно з цією теоремою будь-яка дробово-раціональна функція (див. п. 2.6) $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, як відношення двох многочленів, є неперервною в своїй області визначення.

(3) Нагадаємо, що (див. п. 4.2)

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \tag{5.1}$$

і доведемо, що

$$\lim_{x \to 0} a^x = a^0 = 1,$$

тобто переконаємося в неперервності функції $f(x) = a^x$ у точці $x_0 = 0$.

Припустимо спочатку, що $a > 1$ і $x > 0$. Позначимо через n цілу частину числа $\frac{1}{x}$; тоді $n \le \frac{1}{x}$ і $x \le \frac{1}{n}$, а отже, $0 < a^x - 1 < a^{1/n} - 1$.

Зауважимо, що $n \to \infty$, якщо $x \to +0$, а тому згідно з формулою (5.1) і теоремою 5.5 маємо $\lim\limits_{x \to +0} (a^x - 1) = 0$, тобто $\lim\limits_{x \to +0} a^x = 1$. У разі, якщо $x \to -0$, дістанемо

$$\lim_{x \to -0} a^x = \lim_{x \to -0} \frac{1}{a^{-x}} = 1,$$

оскільки за попереднім $\lim\limits_{x \to -0} a^{-x} = 1$ (тут $-x > 0$).

Поєднавши обидва випадки, остаточно матимемо $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$. Якщо $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to 0} a^x = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 0$, оскільки за попереднім

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = 0$ (тут $\dfrac{1}{a} > 1$).

Для доведення неперервності функції $f(x) = a^x$ у довільній точці $x_0 \in \mathbf{R}$ зазначимо, що $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = \lim\limits_{x \to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim\limits_{x \to x_0} a^{x - x_0} =$ $= a^{x_0} \cdot 1 = a^{x_0}$ (тут ураховано, що $x - x_0 \to 0$ при $x \to x_0$).

(4) Згідно з останнім зауваженням п. 5.7 на інтервалі $(0; +\infty)$ існує функція, обернена до показникової $f(x) = a^x$, яка є неперервною на інтервалі $(0; +\infty)$ і строго монотонною (у випадку $a > 1$ — зростаючою, а у випадку $0 < a < 1$ — спадною). Її, як відомо, позначають $y = \log_a x$.

Таким чином, логарифмічна функція неперервна на інтервалі $(0; +\infty)$.

Доповнимо п. 2 цього параграфа, розглянувши загальний випадок степеневої функції $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Подаючи x^α у вигляді $e^{\alpha \ln x}$ і беручи до уваги неперервність логарифмічної функції при $x > 0$, показникової функції і теорему 5.17 про неперервність складної функції, дістанемо, що функція $f(x) = x^\alpha$ неперервна при $x > 0$.

(5) Функція $f(x) = \sin x$ неперервна на $\mathbf{R}$. Дійсно, для довільної точки $x_0 \in \mathbf{R}$ маємо

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \cos \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}\right| \le 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \le$$
$$\le 2 \left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0| < \varepsilon$$

при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, якщо покласти $\delta = \varepsilon$.

Функція $f(x) = \cos x$ неперервна на $\mathbf{R}$. Дійсно, як і в попередньому випадку, для довільної точки $x_0 \in \mathbf{R}$ маємо

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2}\right| \le 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \le$$
$$\le |x - x_0| < \varepsilon$$

при всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, якщо покласти $\delta = \varepsilon$.

Зауважимо, що в обох випадках використана нерівність $|\sin x| \le |x|$ справедлива при довільному $x \in \mathbf{R}$.

Із неперервності функцій $\sin x$ і $\cos x$ на $\mathbf{R}$ і з рівностей

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbf{Z});$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq n\pi \quad (n \in \mathbf{Z}),$$

використовуючи теорему 5.14, встановлюємо неперервність функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ у всіх точках їх областей визначення.

6 Функція $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ є неперервною, зростаючою й має областю значень відрізок $[-1; 1]$.

Згідно з теоремою 5.23 на відрізку $[-1; 1]$ існує функція, обернена до $f(x) = \sin x$, яка є неперервною й зростаючою на відрізку $[-1; 1]$. Її, як відомо, позначають $y = \arcsin x$.

Функція $f(x) = \cos x$ на відрізку $[0; \pi]$ неперервна, спадна й має областю значень відрізок $[-1; 1]$.

Згідно з теоремою 5.23 на відрізку $[-1; 1]$ існує функція, обернена до $f(x) = \cos x$, яка є неперервною й спадною на відрізку $[-1; 1]$. Її, як відомо, позначають $y = \operatorname{acrccos} x$.

Функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ неперервна, зростаюча й областю значень має всю множину $\mathbf{R}$.

Згідно із зауваженням до теореми 5.23 на $\mathbf{R}$ існує функція, обернена до $f(x) = \operatorname{tg} x$, яка є неперервною й зростаючою на $\mathbf{R}$. Її, як відомо, позначають $y = \operatorname{arctg} x$.

Функція $f(x) = \operatorname{ctg} x$ на інтервалі $(0; \pi)$ неперервна, спадна й областю значень має всю множину $\mathbf{R}$.

Згідно із зауваженням до теореми 5.23 на $\mathbf{R}$ існує функція, обернена до $f(x) = \operatorname{ctg} x$, яка є неперервною й спадною на $\mathbf{R}$. Її, як відомо, позначають $y = \operatorname{arcctg} x$.

Розглянемо, нарешті, так звані *гіперболічні функції*:

- косинус гіперболічний

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R};$$

- синус гіперболічний

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R};$$

- тангенс гіперболічний

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ясно, що гіперболічні функції неперервні на **R**.

Для гіперболічних функцій справедливі, зокрема, співвідношення:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y,$$

які радимо перевірити самостійно.

Нагадаємо, що *елементарними* називають функції, які можна дістати з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій і суперпозицій основних елементарних функцій.

Згідно з теоремами 5.14 і 5.17 усі елементарні функції неперервні в областях їх визначення.

На підставі неперервності показникової і логарифмічної функцій і другої важливої границі $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, встановленої в п. 5.3, доведемо кілька важливих рівностей. Їх можна розглядати як продовження списку важливих границь і успішно використовувати, зокрема, при обчисленні похідних від елементарних функцій.

Отже, виконуються такі рівності:

1) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a (1 + x)}{x} = \log_a e,}$ $a > 0, \ a \neq 1.$ (5.2)

Зокрема, при $a = e$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln (1 + x)}{x} = 1;$

2) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a,}$ $a > 0.$ (5.3)

Зокрема, при $a = e$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1;$

3) $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,}$ $\alpha \in \mathbf{R}.$ (5.4)

Послідовно доведемо ці співвідношення.

(1) Оскільки $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{1/x}$ і логарифмічна функція неперервна в точці e, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\log_a(1+x)^{1/x}\right] = \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right] = \log_a e.$$

(2) Нехай $a \neq 1$. Покладемо $y = a^x - 1$, тоді $a^x = 1 + y$, $x = \log_a(1+y)$, причому внаслідок неперервності показникової функції $y \to 0$ при $x \to 0$. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

(3) Нехай $\alpha \neq 0$. Врахуємо, що

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)}\,\frac{\alpha\ln(1+x)}{x},$$

і покладемо $y = \alpha\ln(1+x)$. Унаслідок неперервності логарифмічної функції $y \to 0$ при $x \to 0$. Отже, з урахуванням попередніх границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{\alpha\ln(1+x)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x} = \alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \alpha.$$

Остаточно за теоремою 5.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Глава 6 **ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ**

6.1 ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо, нескінченному). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Функція в точці x_0 дістане відповідний приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

➡ **Означення 6.1**. ***Похідною функції*** *$y = f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідну позначають ще й так: $f'(x_0), y'(x_0), \dfrac{df(x_0)}{dx}, \dfrac{dy}{dx}, Dy, Df(x_0)$.

Надалі здебільшого віддаватимемо перевагу першому позначенню, котре ввів Ж. Лагранж.

Отже, за означенням

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.} \tag{6.1}$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{6.2}$$

називають ***диференціальним відношенням***.

У випадку, коли границя відношення (6.2) при $\Delta x \to 0$ не існує, вважатимемо, що функція в точці x_0 не має похідної.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначатимемо y' або $f'(x)$.

Отже, якщо x_0 — фіксована точка проміжку X, то похідна $f'(x_0)$ у разі її існування — деяке число. Якщо ж похідна існує в кожній точці $x \in X$, то $f'(x)$ — уже функція від x.

- *Зауваження 1.* Якщо проміжок X замкнений, наприклад, $X = [a, b]$ і $x_0 = a$, то у формулі (6.1) границя правостороння:
$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$
Аналогічно, якщо $x_0 = b$, то
$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$
(границя лівостороння).

- *Зауваження 2.* Зрозуміло, що границя (6.1) існує не для будь-якої функції і не для кожної точки x_0. Наприклад, для функції $y = |x|$ у точці $x_0 = 0$ границя (6.1) не існує, оскільки диференціальне відношення (6.2)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

- *Зауваження 3.* Якщо існують границі
$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ і } \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$
то їх називають відповідно *лівою* та *правою похідними функції* $f(x)$ *у точці* x_0 і позначають $f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0)$. Це так звані *односторонні похідні.* Наприклад, ці похідні в точці $x_0 = 0$ має функція $f(x) = |x|$, причому $f'_-(0) = -1$ і $f'_+(0) = 1$.

Якщо існують ліва та права похідні й $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то, очевидно, існує похідна $f'(x_0)$, причому $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Оскільки для функції $f(x) = |x|$ є $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, то $f'(0)$ не існує.

- *Зауваження 4.* Якщо для деякого значення x справджується одна з умов
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$
то кажуть, що в точці x_0 функція має *нескінченну похідну* певного знака.

Аналогічно визначається поняття *односторонніх нескінченних похідних.* Наприклад, функція $f(x) = x^{1/3}$ у точці $x_0 = 0$ має нескінченну похідну, що дорівнює $+\infty$. Дійсно,
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = +\infty.$$

У подальшому, якщо не обумовлюється окремо, під виразом «функція має похідну» розумітимемо лише наявність скінченної похідної.

➡ **Означення 6.2.** *Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають **диференційовною в точці** x_0. Функцію, диференційовну в кожній точці $x \in X$, називають **диференційовною на проміжку** X.*

*Операцію відшукання похідної називають **диференціюванням**.*

Теорема 6.1 (про зв'язок між поняттями диференційовності та неперервності). Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Доведення

Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то існує границя

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Запишемо тотожність

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta x$$

і перейдемо в ній до границі, якщо $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0)\, 0 = 0.$$

А це й означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0.

Підкреслимо, що функція $f(x)$, неперервна в точці x_0, не обов'язково є диференційовною в цій точці. Так, наприклад, функція $y = |x|$, про яку йшлося вище, очевидно, є неперервною в точці $x_0 = 0$, проте похідної в цій точці немає.

Відомі приклади функцій, які неперервні на всьому проміжку X, проте в жодній точці X не мають похідної.

6.2 ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

До поняття похідної приводять різноманітні задачі геометрії, механіки, хімії, економіки, біології та інших наук. Розглянемо деякі з них.

6.2.1. Задача про дотичну до кривої

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто існує похідна $f'(x_0)$. Рівняння січної M_0M, яка проходить через точки $M_0(x_0, f(x_0))$ і $M(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ графіка функції $y = f(x)$ (рис. 6.1), має вигляд

$$Y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}(X - x_0),$$

де X і Y — змінні координати точки січної. Кутовий коефіцієнт січної $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ прямує до $f'(x_0)$. Тому граничне положення січної визначається рівнянням

$$\boxed{Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0).}$$

Пряма, яка задається цим рівнянням, називається ***дотичною до графіка функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x_0. Кутовий коефіцієнт дотичної $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

Остання формула розкриває геометричний зміст похідної: похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці $(x_0, f(x_0))$.

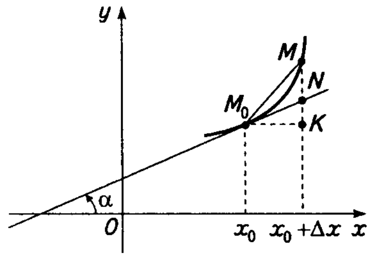


Рис. 6.1

Геометричне тлумачення похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції поширюється й на випадок нескінченної похідної. В цьому разі дотична паралельна осі Oy.

6.2.2. Задача про миттєву швидкість

Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла, що розпочинається в момент часу $t = 0$. Вважатимемо, що шлях, подоланий тілом за час t, дорівнює $S = S(t)$. Функція $S(t)$ називається *законом руху тіла.*

Шлях ΔS, який подолає тіло за інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$, визначається так:

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0).$$

Середньою швидкістю руху v_c за інтервал часу Δt називається відношення

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко впізнати диференціальне відношення.

Миттєвою швидкістю руху $v(t_0)$ у момент t_0 називається границя цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Отже, *похідна від шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості прямолінійного руху тіла.*

6.2.3. Задача про швидкість хімічної реакції

Нехай у момент часу $t = 0$ розпочинається деяка хімічна реакція. Позначимо через $P(t)$ кількість речовини, що вступила в реакцію до моменту часу t. Кількість речовини, що вступить у реакцію за інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$, становить $\Delta P = P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)$.

Середньою швидкістю v_c хімічної реакції за час Δt називається відношення

$$v_c = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко впізнати диференціальне відношення.

Швидкість хімічної реакції $v(t_0)$ у момент часу t_0 — це границя цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t_0 + \Delta t) - P(t_0)}{\Delta t} = P'(t_0).$$

Отже, *похідна від кількості речовини за часом дорівнює швидкості хімічної реакції.*

6.2.4. Задачі про витрати виробництва й виручку

Нехай $K = K(x)$ — витрати виробництва однорідної продукції — деяка функція кількості продукції x. Зазначимо, що кількості продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва продукції $K(x + \Delta x)$. Отже, диференціальне відношення, що характеризує *середній приріст витрат виробництва*, має вигляд

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Воно характеризує приріст витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

Границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$$

називається ***граничними витратами виробництва.***

Нехай $U(x)$ — виручка від продажу x одиниць товару. Міркування, аналогічні попереднім, приводять до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U'(x),$$

яка називається ***граничною виручкою.***

6.2.5. Задача про швидкість зростання популяції

Нехай N — чисельність деякої популяції на заданій території, що залежить від народжуваності й смертності в популяції і змінюється з часом, тобто N — функція часу: $N = N(t)$. Якщо народжуваність перевищує смертність, то $N(t)$ зростає зі збільшенням t. За інтервал часу $[t_0, t_0 + \Delta t]$ приріст чисельності популяції ΔN визначається як $\Delta N = N(t_0 + \Delta t) - N(t_0)$. Відношення $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ дорівнює *середній швидкості зростання популяції за час* Δt, а границя цього відношення $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = N'(t)$ — ***швидкість зростання популяції за час*** Δt.

Отже, *швидкість зростання популяції є похідною від її чисельності за часом.*

6.3 ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

6.3.1. Диференціювання суми, добутку й частки

Теорема 6.2. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x, то функції $u(x) \pm v(x)$, $u(x)\,v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (в останньому випадку вважається, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці й справджуються відповідно такі формули:

а) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

б) $(u\,v)' = u'v + uv'$;

в) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Доведення

а) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції u і v матимуть прирости Δu і Δv відповідно, а функція $y = u \pm v$ — приріст $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$. Отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) + v'(x),$$

тобто функції $u(x) \pm v(x)$ дійсно диференційовні в точці x і справджується формула а).

б) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції u і v матимуть прирости Δu і Δv відповідно, а функція $y = u\,v$ — приріст

$$\Delta y = u(x + \Delta x)\,v(x + \Delta x) - u(x)\,v(x) = [u(x + \Delta x) - u(x)]\,v(x + \Delta x) + \\ + u(x)\,[v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u\,v(x + \Delta x) + u(x)\,\Delta v.$$

Отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta v}\,v(x + \Delta x) + u(x)\,\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Зазначимо, що функція $v(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційовна в цій точці, а тому $v(x + \Delta x) \to v(x)$ при $\Delta x \to 0$. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в останній рівності, дістанемо $y' = u'v + uv'$, тобто функція uv дійсно диференційовна в точці x і справджується формула б).

(в) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції u і v матимуть прирости Δu і Δv відповідно, а функція $y = \dfrac{u}{v}$ — приріст

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}.$$

Отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x+\Delta x)}{v(x)\,v(x+\Delta x)\,\Delta x} =$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]\,v(x) - u(x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x)\,v(x+\Delta x)\,\Delta x} =$$

$$= \frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\,v(x+\Delta x)}.$$

Зазначимо, що функція $v(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційовна в цій точці, а тому $v(x+\Delta x) \to v(x)$ при $\Delta x \to 0$. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в останній рівності, дістанемо $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, тобто функція $\dfrac{u}{v}$ дійсно диференційовна в точці x і справджується формула (в).

◆ ***Наслідок***. Покладемо у формулі (б) $v(x) = c$. Тоді $v'(x) = 0$ і $(cu)' = cu'$, тобто *сталий співмножник можна виносити за знак похідної.*

6.3.2. Диференціювання складної функції

Теорема 6.3. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ — складна функція, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(u)$ в точці $u = \varphi(x)$ має похідну (по u) $y'_u = f'_u(u)$, а внутрішня функція $u = \varphi(x)$ у точці x — похідну (по x) $u'_x = \varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ диференційовна в точці x, причому її похідна обчислюється за формулою

$$f'_x[\varphi(x)] = f'_u(u)\,\varphi'(x)$$

або коротко

$$y'_x = y'_u\,u'_x \quad \text{чи} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}.$$

Доведення

Надамо x деякого приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція $u = \varphi(x)$ дістане приріст Δu, а функція $y = f(u)$ — приріст Δy.

За умови $\Delta u \neq 0$ маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

що й потрібно довести.

При доведенні враховано, що функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційовна в цій точці й, отже, $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

- *Зауваження.* Припущення, що досить малому $\Delta x \neq 0$ відповідає $\Delta u \neq 0$, звичайно ж, істотне. При $\Delta u = 0$, що буває дуже рідко, формулу диференціювання складної функції неважко вивести дещо іншим способом.

◆ ***Наслідок*** (диференціювання оберненої функції). Нехай функція $x = g(y)$ обернена відносно функції $y = f(x)$, причому функції $f(x)$ і $g(y)$ мають похідні в точках x і $y = f(x)$ відповідно. Встановимо зв'язок між похідними $y'_x = f'(x) \neq 0$ і $x'_y = g'(y)$.

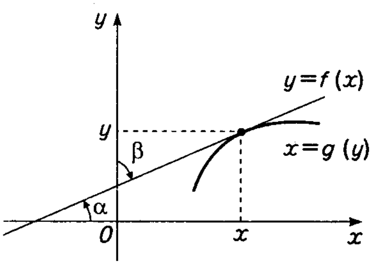


Рис. 6.2

Оскільки $x = g\,[f(x)]$ при всіх x, то за правилом диференціювання складної функції похідні від обох частин цієї рівності $1 = g'(y)\,f'(x)$, звідки $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ або коротко $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ чи $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{dy\,/\,dx}$.

Останні формули мають простий геометричний зміст. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці (x, y) є $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, а кутовий коефіцієнт до графіка функції $x = g(y)$ в точці (y, x) — $g'(y) = \operatorname{tg} \beta$ (рис. 6.2). Очевидно, що $\alpha + \beta = \pi / 2$, а тому $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$ або $f'(x)\,g'(y) = 1$.

6.4 ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

У попередньому параграфі розглянуто правила обчислення похідних для функцій однієї змінної. Вони дають змогу знаходити похідні будь-яких елементарних функцій, якщо відомі похідні основних елементарних функцій.

Доведемо, що всі основні елементарні функції (за винятком $\arcsin x$ і $\arccos x$) диференційовні на своїх областях визначення, причому справджуються формули, які запишемо в так звану **таблицю похідних**.

1) $(C)' = 0.$

2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}.$

3) $(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x.$

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

5) $(\sin x)' = \cos x.$

6) $(\cos x)' = -\sin x.$

7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}.$

12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}.$

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

Доведення

① Нехай на деякому проміжку X задано сталу функцію $y = C$. Тоді для довільних точок $x \in X$ і $x + \Delta x \in X$ $(\Delta x \neq 0)$ маємо $y = f(x) = C$ і $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = C$. Отже, $\Delta y = 0$, а тому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ і $y' = 0$.

Для скорочення доведення подальших формул подамо їх у конспективному вигляді.

②
$$y = x^{\alpha};\ \ y + \Delta y = (x + \Delta x)^{\alpha};\ \ \Delta y = (x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha - 1}\,\frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha - 1};$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

[ураховано формулу (5.4)].

③
$$y = a^{x};\ \ y + \Delta y = a^{x + \Delta x};\ \ \Delta y = a^{x + \Delta x} - a^{x};$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^{x}}{\Delta x} = a^{x}\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^{x} \ln a;\ \ (a^{x})' = a^{x} \ln a$$

[ураховано формулу (5.3)]. Зокрема, при $a = e$ дістанемо $(e^{x})' = e^{x}$.

④
$$y = \log_a x;\ \ y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\,\frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x \ln a};$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

[ураховано формулу (5.2)]. Зокрема, при $a = e$ дістанемо $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

(5)

$$y = \sin x;$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x);$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \cdot \cos x = \cos x;$$
$$(\sin x)' = \cos x$$

[ураховано першу важливу границю (див. п. 5.3.1) і неперервність функції $\cos x$].

(6) Для знаходження похідної функції $y = \cos x$ подамо її у вигляді $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ і розглянемо як складну функцію: $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$. Тоді $y'_u = \cos u$ і $u'_x = -1$. Отже,

$$y'_x = \cos u\,(-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x,$$

так що $(\cos x)' = -\sin x$.

(7) За правилом диференціювання частки маємо

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(8) Аналогічно доводиться, що $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

(9) Функція $y = \arcsin x$ ($|x| < 1$) є оберненою до функції $x = \sin y\,(|y| < \pi/2)$, причому похідна $x'_y = (\sin y)' = \cos y$ при $|y| < \pi/2$ не дорівнює нулю. А тому за правилом диференціювання оберненої функції

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (|x| < 1).$$

(Перед коренем взято знак «+», оскільки $\cos y > 0$ при $|y| < \pi/2$). Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

(10) Аналогічно доводиться, що

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; (|x| < 1).$$

(11) Функція $y = \operatorname{arctg} x$ ($x \in \mathbf{R}$) є оберненою до функції $x = \operatorname{tg} y$ ($|y| < \pi/2$), причому похідна $x'_y = (\operatorname{tg} y)' = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ при $|y| < \pi/2$ не дорівнює нулю. А тому за правилом диференціювання оберненої функції

$$y'_x = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

(12) Аналогічно доводиться, що

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(13) На підставі того, що $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, згідно з правилом диференціювання маємо

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

так що $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

(14) Аналогічно доводиться, що $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

Наведемо формулу диференціювання показниково-степеневої функції $y = [u(x)]^{v(x)}$, де $u = u(x) > 0$ і $v = v(x)$ — диференційовні функції.

За правилом диференціювання складної функції маємо

$$(u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right),$$

так що $(u^v)' = u^v\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right)$.

Наголосимо ще раз, що таблиця похідних разом із правилами диференціювання становлять основу диференціального числення. Користуючися ними, можна знаходити похідні від функцій, які утворені за допомогою арифметичних операцій та суперпозицій над основними елементарними функціями, тобто від будь-яких елементарних функцій перейти знову до елементарних. Отже, операція диференціювання не виводить із класу елементарних функцій.

6.5 ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну на проміжку X. Якщо в точці $x_0 \in X$ похідна $f'(x)$, своєю чергою, диференційовна, то її похідну називають ***похідною другого порядку** або **другою похідною функції*** $y = f(x)$ у точці $x_0 \in X$ і позначають у такі способи: $f''(x_0), y''(x_0), \dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}, \dfrac{d^2 y}{dx}, D^2y, D^2y(x_0)$.

Означення 6.3. Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку X похідні $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$. *Якщо в точці $x_0 \in X$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то її називають **похідною n-го порядку** функції $f(x)$ у точці x_0 і позначають у такі способи:* $f^{(n)}(x_0), y^{(n)}(x_0), \dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}, \dfrac{d^n y}{dx^n}$, $D^n y, D^n f(x_0)$.

Отже, якщо функція $y = f(x)$ має в точці x похідні до n-го порядку включно, то $f^{(n)}(x) = (f^{n-1}(x))'$.

Означення 6.4. *Функцію $y = f(x)$, яка має на деякому проміжку X похідні до n-го порядку включно, називають **n разів диференційовною на** X. Функцію, яка має на X похідні всіх порядків, називають **нескінченно диференційовною на** X.*

З означення 6.3 безпосередньо випливає, що

$$[c_1 u(x) + c_2 v(x)]^{(n)} = c_1 u^{(n)}(x) + c_2 v^{(n)}(x),$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі, а $u(x)$ і $v(x)$ — n разів диференційовні функції.

У загальному випадку для обчислення похідної вищого порядку потрібно спочатку знайти похідні всіх нижчих порядків. У окремих випадках вдається встановити загальний вираз для похідної n-го порядку.

■ **Приклад 6.1.** *Знайти похідну n-го порядку функції* $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $x > 0$.

Маємо послідовно

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ \ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots,$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Зокрема, при $\alpha = -1$ дістанемо $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$, а при $\alpha = -\frac{1}{2}$ відповідно $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2x)^n\sqrt{x}}$, де через $(n)!!$ позначено добуток натуральних чисел, які не перевищують n і мають із n однакову парність (наприклад, $7!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, $10!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10$).

Для виразу $y = (a+bx)^\alpha$ $(a, b \in \mathbf{R})$ справджується формула: $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)b^n(a+bx)^{\alpha-n}$. Зокрема, при $\alpha = -1$ маємо

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\, n!\, b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

а при $\alpha = -\frac{1}{2}$ відповідно

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!\, b^n}{2^n\,(a+bx)^n\sqrt{a+bx}}.$$

■ **Приклад 6.2.** *Знайти похідну n-го порядку функції* $y = \ln x$.

Враховуючи, що $y^{(n)} = (y')^{n-1}$, матимемо

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

■ **Приклад 6.3.** *Знайти похідну n-го порядку функції* $y = a^x$.

Маємо послідовно

$$y' = a^x \ln a,\ \ y'' = a^x(\ln a)^2, \ldots,\ \ y^{(n)} = a^x(\ln a)^n.$$

Зокрема, якщо $y = e^x$, то $y^{(n)} = e^x$.

■ **Приклад 6.4.** *Знайти похідну n-го порядку функції* $y = \sin x$.

Маємо послідовно

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ \ y'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\,\frac{\pi}{2}\right).$$

У загальному випадку

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Цілком аналогічно

$$(\cos\ x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Зупинимося на знаходженні *похідної n-порядку для функції* $y = u(x)v(x)$ у припущенні, що $u(x)$ і $v(x)$ нескінченно диференційовні в точці x. Справджується так звана формула Лейбніца

$$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)} v^{(n-k)},$$

де $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k\,!}$ — біноміальні коефіцієнти, причому похідні нульового порядку збігаються з функціями, тобто $u^{(0)}(x) = u(x) = u$ і $v^{(0)}(x) = v(x) = v$.

Для доведення формули Лейбніца використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ ця формула набуває вигляду $(u\,v)' = u'v + uv'$, що повністю збігається з формулою диференціювання добутку двох функцій. Нехай вона справджується при деякому n. Доведемо, що формула залишається правильною й при $n + 1$.

Безпосередньо маємо

$$(u\,v)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (u^{(k)} v^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k)} v^{(n+1-k)}.$$

Замінимо в першій сумі k на $k - 1$. Дістанемо

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(k+1)} v^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}\, u^{(k)} v^{(n+1-k)}.$$

Звідси

$$(u\,v)^{(n+1)} = u^{(n+1)}\, v + u\,v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) u^{(k)} v^{(n+1-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k\, u^{(k)} v^{(n+1-k)},$$

оскільки $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ при $1 \le k \le n$ і $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$.

Формулу Лейбніца зручно застосувати, зокрема, в тих випадках, коли один із співмножників — многочлен.

■ **Приклад 6.5.** *Знайти похідну* $y^{(10)}$, якщо $y = x^2e^{5x}$.

Задана функція є добутком двох функцій: $u = x^2$ і $v = e^{5x}$. Ураховуючи, що $u^{(n)} = 0$ при $n \geq 3$, а $v^{(n)} = 5^n e^{5x}$ при $n \geq 1$, за формулою Лейбніца дістанемо

$$(x^2e^{5x})^{(n)} = 5^9e^{5x}(5x^2 + 20x + 18).$$

6.6 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Згідно з теоремою 5.8 для всіх значень із досить малого околу точки x маємо рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

де $o(\Delta x)$ — нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx.

- *Зауваження.* Якщо, навпаки, в точці x для приросту функції виконується рівність

  $$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

  де A — стала, то функція $f(x)$ диференційовна в точці x і $A = f'(x)$.

  Дійсно, з останньої формули

  $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0;$$

  $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

➡ **Означення 6.5.** ***Диференціалом функції*** *$y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці:*

$$\boxed{dy = df(x) = f'(x)\Delta x.}$$

Диференціалом незалежної змінної x вважатимемо його приріст Δx, тобто $dx = \Delta x$. Отже, $dy = f'(x)dx$.

- *Зауваження.* З останньої формули випливає, що $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Саме тому похідну часто позначають $\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{df}{dx}$ і розуміють її як відношення двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

  Оскільки $dx = \Delta x = x - x_0$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x),$$

і при досить малих Δx справджується формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

якою часто користуються при наближених обчисленнях.

Для з'ясування геометричного змісту диференціала знову звернемося до рис. 6.1. Із трикутника M_0NK

$$NK = M_0K \cdot \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)\,\Delta x = dy.$$

Таким чином, диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0.

Із правил диференціювання випливають *правила обчислень диференціалів функцій:*

а) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

б) $d(u\,v) = v\,du \pm u\,dv$;

в) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v(x) \neq 0)$.

Для ілюстрації доведемо останнє правило.

Нехай $y = u/v$ $(v(x) \neq 0)$. Тоді

$$dy = d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2}\,dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Виведемо формулу для диференціала складної функції: $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(u)$ і $u = \varphi(x)$ — диференційовні функції своїх аргументів. Таким чином, вимоги теореми 6.3 виконані.

З одного боку, $dy = f'(u)du$, де u — незалежна змінна, а з іншого — в силу вищезгаданої теореми

$$dy = f'_x\,[\varphi(x)]\,dx = f'_u(u)\varphi'(x)dx = f'(u)du,$$

де $u = \varphi(x)$.

Отже, *зовнішній вигляд диференціала функції $f(u)$ зберігається й у випадку, коли u є функцією незалежної змінної.*

Цю важливу властивість диференціала називають *інваріантністю його форми.* Її зручно використовувати для обчислення похідної функції, заданої параметрично.

Коротко зупинимося на такому способі задання функції $y = f(x)$ за допомогою двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$. Тоді, очевидно, y є деякою функцією від x: $y = \psi\,[\Phi(x)] = f(x)$. Таким чином, пара функцій $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначають деяку функцію $y = f(x)$, задану параметрично. Допоміжна змінна t при цьому називається *параметром.*

Припустимо, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ диференційовні в кожній точці t проміжку T, причому $\psi'(t) \neq 0$ при всіх $t \in T$. Ураховуючи, що $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$, а $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, матимемо похідну від функції, заданої параметрично, у вигляді

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

6.7 ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна n разів на деякому проміжку X. Тоді в кожній точці $x \in X$ існує, зокрема, її диференціал $dy = f'(x)dx$, який надалі називатимемо також *диференціалом першого порядку функції* $f(x)$. Оскільки приріст аргументу dx — величина стала, то dy є функцією однієї змінної x. Диференціал цієї функції називатимемо *диференціалом другого порядку функції* $f(x)$ і позначатимемо d^2y або $d^2f(x)$. Отже, за означенням $d^2y = d(dy)$.

Далі маємо

$$d^2y = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = f''(x)\,dx^2.$$

І нарешті, якщо для функції $y = f(x)$ означено диференціал $(n-1)$-го порядку $d^{n-1}y$, то ***диференціалом n-го порядку d^n y функції*** $y = f(x)$ називатимемо диференціал першого порядку від диференціала $(n-1)$-го порядку, тобто

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

За індукцією ясно, що

$$d^ny = d(f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

З останньої формули випливає, що при довільному n

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

тобто похідну n-го порядку функції $y = f(x)$ можна подати як відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала аргументу.

Використовуючи означення диференціала n-го порядку, легко довести, що

$$d^n[c_1 u(x) + c_2 v(x)] = c_1 d^n u(x) + c_2 d^n v(x),$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k\, u d^{n-k} v,$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі, $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — n разів диференційовні функції, причому $d^0 u = u$ і $d^0 v = v$.

- *Зауваження.* Диференціали n-го порядку $(n \geq 2)$ вже не мають властивості інваріантності форми. Дійсно, вже при $n = 2$, з одного боку, якщо u — незалежна змінна, маємо $d^2 y = f''(u)du^2$; з іншого — для складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$

$$d^2 y = d(f'(u)du) = d(f'(u)du + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2 u,$$

де $d^2 u = \varphi''(x)dx^2$.

Оперуючи диференціалами, зручно обчислювати похідні вищих порядків від функції $y = f(x)$, заданої параметрично за допомогою двох функцій: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Заради конкретності зупинимося на випадку знаходження другої похідної $y'' = f''(x)$, вважаючи функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ двічі диференційовними і $\varphi'(t) \neq 0$.

Маємо послідовно $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$ і

$$d^2 x = \varphi''(t)dt^2 + \varphi'(t)d^2 t,$$

$$d^2 y = \psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2 t.$$

Але оскільки x — незалежна змінна, то $d^2 x = 0$ і тому

$$d^2 t = -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt^2.$$

Отже, остаточно

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2 t}{(\varphi'(t))^2 dt^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 - \psi'(t)\dfrac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt^2}{(\varphi'(t))^2 dt^2} =$$

$$= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Глава **7** ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Глава 7. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

7.1 ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ

Дослідження функцій за допомогою похідних ґрунтуються на деяких основних теоремах диференціального числення.

Теорема 7.1 (Ролля). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) і $f(a) = f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Доведення

За другою теоремою Вейєрштрасса неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває на ньому найбільшого значення M і найменшого значення m.

Якщо $m = M$, то $f(x)$ — стала для всіх $x \in [a, b]$ і за точку $c \in (a, b)$ можна взяти будь-яку точку інтервалу (a, b).

Якщо $m < M$, то принаймні одне із значень m або M досягається у внутрішній точці c відрізка $[a, b]$, тобто в точці, яка належить інтервалу (a, b). Нехай, наприклад, у точці c функція $f(x)$ набуває найменшого значення. Доведемо, що $f'(c) = 0$. Дійсно, для всіх досить малих $\Delta x \neq 0$ точка $c + \Delta x \in (a, b)$, причому

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \geq 0.$$

Тому при $\Delta x > 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0 \quad \text{i} \quad f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0,$$

а при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{i} \quad f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \leq 0.$$

Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці c, то $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$. Теорему доведено.

Геометрично теорема Ролля означає, що серед усіх дотичних до графіка функції $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна осі Ox.

У точці c функція $f(x)$ набуває найменшого значення (рис. 7.1).

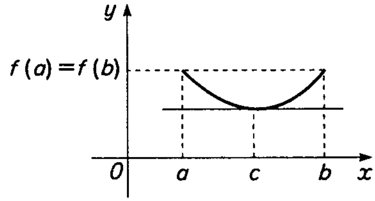


Рис. 7.1

Теорема 7.2 (Лагранжа). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна на інтервалі (a, b). Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Доведення

Розглянемо на відрізку $[a, b]$ допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Очевидно, функція $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля: вона неперервна на відрізку $[a, b]$ як різниця двох неперервних на $[a, b]$ функцій $f(x)$ і $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, диференційовна на інтервалі (a, b), причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ і $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Звідси $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, що й потрібно було довести.

Геометрично теорема Лагранжа означає, що серед усіх дотичних до графіка функцій $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна січній AB, яка сполучає точки $A(a, f(a))$ і $B(b, f(b))$. Справді (рис. 7.2),

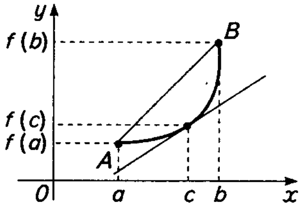


Рис. 7.2

відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є кутовим коефіцієнтом січної AB, а $f'(c)$ — кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка, проведеної в точці $(c, f(c))$. Ці коефіцієнти рівні між собою, отже, дотична й січна AB дійсно паралельні.

- *Зауваження 1.* Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо $f(a)=f(b)$.

- *Зауваження 2.* Рівність $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, $c\in(a,b)$ називається *формулою Лагранжа.* Її можна записати й дещо інакше. Очевидно, що $c=a+\Theta(b-a)$, де $0<\Theta<1$. Отже, $f(b)-f(a)=f'(a+\Theta(b-a))(b-a)$, де $0<\Theta<1$.

Поклавши $a=x$, $b=x+\Delta x$, матимемо також

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\Theta\Delta x)\Delta x,$$

де $0<\Theta<1$.

◆ ***Наслідок.*** Нехай функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x)=0$ при будь-якому $x\in X$. *Тоді $f(x)$ на X — стала.* Дійсно, нехай x_0 — фіксована точка X, а x — його довільна точка. За теоремою Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$, де c — деяка точка, яка лежить між x_0 і x. Оскільки $f'(x)=0$ при будь-якому $x\in X$, то $f'(c)=0$, а тому $f(x)=f(x_0)=C$ при всіх $x\in X$.

Теорема 7.3 (Коші). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовні на інтервалі (a, b), причому $g'(x)\neq 0$ в усіх точках $x\in(a,b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c\in(a,b)$ така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доведення

Спочатку зауважимо, що $g(b)-g(a)\neq 0$, оскільки у противному разі ($g(b)=g(a)$) за теоремою Ролля для функції $g(x)$ знайдеться принаймні одна точка $c\in(a,b)$ така, що $g'(c)=0$. А це суперечить тому, що $g'(c)\neq 0$ в усіх точках інтервалу (a, b).

Далі розглянемо на відрізку $[a, b]$ допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Очевидно, функція $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля: вона неперервна на відрізку $[a, b]$ як різниця двох неперервних на $[a, b]$ функцій $f(x)$ і $f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$, диференційовна на інтервалі (a, b), причому

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

і $F(a) = F(b) = 0$.

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

Звідси, оскільки $g'(c) \neq 0$, дістанемо формулу Коші

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad c \in (a, b),$$

що й потрібно довести.

- *Зауваження.* Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші, якщо $g(x) = x$.

7.2 ПРАВИЛА ЛОПІТАЛЯ

При дослідженні функцій часто необхідно знаходити границі дробу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, чисельник і знаменник якого при $x \to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають *розкриттям невизначеностей.* Найбільш простими й ефективними методами розкриття невизначеностей є правила Лопіталя.

Теорема 7.4 (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a, b); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$ і $g'(x)\neq 0$ на (a, b). Тоді, якщо існує границя (скінченна або нескінченна)

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

то границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$

Доведення

Обмежимося лише випадком $K\in\mathbf{R}$. Нехай $x\in(a,b)$. Довизначимо функції $f(x)$ і $g(x)$ у точці a, поклавши $f(a)=g(a)=0$. Тоді вони, очевидно, стануть неперервними на відрізку $[a,x]$ і задовольнятимуть на ньому всі вимоги теореми 7.3 (Коші). А тому знайдеться така точка $c\in(a,x)$, що

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Якщо $x\to a+0$, то й $c\to a+0$. Переходячи до границі в останній рівності, маємо

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

що й потрібно довести.

- *Зауваження 1.* Теорему 7.4 доведено для правих границь. Вона залишається правильною й для лівих і до границь взагалі.
- *Зауваження 2.* Твердження теореми 7.4 залишається в силі, якщо $a=\infty$ ($\pm\infty$). Дійсно, візьмемо, наприклад, $a=\infty$. Покладемо $t=\frac{1}{x}$ і нехай $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

При розкритті невизначеностей іншого типу діє теорема, яку наводимо без доведення.

Теорема 7.5 (друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні на інтервалі (a,b); $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$ і $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ на (a,b). Тоді, якщо існує границя (нескінченна або скінченна) $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$, то границя $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$

Зауваження до теореми 7.4 залишаються в силі й для теореми 7.5.

Трапляється, що для похідних $f'(x)$ і $g'(x)$ справджуються умови однієї з теорем. Тоді правила Лопіталя можна застосовувати повторно:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Взагалі, якщо справджуються відповідні умови, то цю процедуру можна повторювати кілька разів.

Теореми 7.4 і 7.5 застосовні до випадків, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ одночасно прямують до нуля або до нескінченності. Відповідно знаходження $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ називають *розкриттям невизначеностей типу* $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

За допомогою тотожних перетворень до основних випадків $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ можна звести й невизначеності інших типів: $0 \cdot \infty; \infty - \infty; 0^{\circ}, \infty^{\circ}, 1^{\infty}$.

Невизначеність $0 \cdot \infty$, тобто добуток $f(x)\, g(x)$, де $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$, зводиться до вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ за формулами

$$f(x)g(x) = f(x) : \frac{1}{g(x)} \quad \text{або} \quad f(x)g(x) = g(x) : \frac{1}{f(x)}.$$

Невизначеність $\infty - \infty$ зводиться до вигляду $\dfrac{0}{0}$ за допомогою перетворення

$$f(x) - g(x) = \left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] : \frac{1}{f(x)g(x)}.$$

Невизначеності 0°, 1^{∞}, ∞° мають місце при розгляді функцій $[f(x)]^{g(x)}$, якщо функція $f(x)$ прямує відповідно до 0, 1 і $+\infty$, а $g(x)$ — відповідно до 0, 1 і 0, коли $x \to a$. Як правило, використовується рівність

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

і процедура зводиться до розкриття невизначеності вигляду $0 \cdot \infty$ у показнику степеня.

7.3 ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо одну з найважливіших формул диференціального числення, яка широко застосовується при дослідженні функцій і наближених обчисленнях.

Припустимо, що функція $y = f(x)$ диференційовна $(n + 1)$ разів у деякому околі, що містить точку x_0. Доберемо многочлен

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n$$

степеня n такий, що його значення й значення його похідних до n-го порядку включно в точці x_0 збігаються зі значенням функції та її відповідних похідних у цій точці, тобто $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0)$, $P_n''(x_0) = f''(x_0), \ldots, P_n^n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Для цього спочатку продиференціюємо вказаний многочлен n разів. Дістанемо

$$P_n'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1};$$
$$P_n''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1A_n.$$

Підставивши в ці рівності значення $x = x_0$, матимемо

$$P_n(x_0) = A_0, \ P_n'(x_0) = A_1, \ P_n''(x_0) = 2A_2, \ldots,$$
$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 \cdot A_n.$$

Скорочено

$$A_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k\,!}, \quad k = 0; 1; 2; \ldots; n$$

або

$$A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}, \quad k = 0; 1; 2; \ldots; n.$$

Тоді шуканий многочлен набуває вигляду

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x - x_0)^k.$$

Це так званий *многочлен Тейлора* для функції $f(x)$.

Позначимо через $R_n(x)$ різницю між заданою функцією $f(x)$ та її многочленом Тейлора $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$. Тоді $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ або

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x).$$

Цю формулу називають ***формулою Тейлора функції*** $f(x)$, а $R_n(x)$ — *залишковим членом формули Тейлора.*

Оцінимо значення залишкового члена, подавши його у формі

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} r(x),$$

де $r(x)$ — деяка шукана функція.

Формула Тейлора запишеться у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} r(x).$$

При фіксованому x, що належить околу точки x_0 (заради конкретності $x > x_0$), позначимо через t змінну величину: $x_0 \le t \le x$. Розглянемо на відрізку $[x_0, x]$ допоміжну функцію цієї змінної

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x - t}{1!} f'(t) - \frac{(x - t)^2}{2!} f''(t) - \ldots -$$
$$- \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!} r(x).$$

Очевидно, функція $F(t)$ на відрізку $[x_0, x]$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля 7.1. Вона неперервна на відрізку $[x_0, x]$ і диференційовна на інтервалі (x_0, x), причому, як легко переконатися, $F'(t) = -\frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x - t)^n}{n!} r(x)$ і $F(x_0) = F(x) = 0$. Отже, за теоремою Ролля існує така точка $c \in (x_0, x)$, що $F'(c) = 0$, тобто

$$- \frac{(x - c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + \frac{(x - c)^n}{n!} r(x) = 0,$$

звідки $r(x) = f^{(n+1)}(c)$.

Таким чином, функцію $r(x)$ визначено, а тому

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Цей вираз для $R_n(x)$ називається *залишковим членом у формі Лагранжа*. Оскільки $c = x_0 + \Theta(x - x_0)$, де $0 < \Theta < 1$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Саме цю форму залишкового члена використовують найчастіше.

Якщо $f^{(n+1)}(x)$ обмежена в деякому околі, що містить точку x_0, то, очевидно, залишковий член $R_n(x)$ при $x \to x_0$ — нескінченно мала вищого порядку порівняно з $(x - x_0)^n$, тобто

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n), \; x \to x_0.$$

Такий запис залишкового члена формули Тейлора називають *зображенням залишкового члена у формі Пеано.*

При $x_0 = 0$ формула Тейлора набуває вигляду

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1!)}x^{n+1},$$

де $0 < \Theta < 1$, і називається *формулою Маклорена.* Її можна записати в дещо іншій формі:

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \; x \to 0.$$

Використовуючи результати прикладів 6.1—6.4, визначимо формули Маклорена для конкретних найважливіших функцій.

■ **Приклад 7.1.** *Функція* $f(x) = e^x$.

Для цієї функції $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(\Theta x) = e^{\Theta x}$ $(0 < \Theta < 1)$, і формула Маклорена має вигляд

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}} \quad (0 < \Theta < 1)$$

або в дещо іншій формі

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + o(x^n), \; x \to 0.$$

На підставі означень гіперболічних функцій легко дістати такі формули:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

■ **Приклад 7.2.** *Функція* $f(x) = \sin x$.

Для цієї функції

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2},$$

$$f^{(n+1)}(\Theta x) = \sin\left(\Theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \quad (0 < \Theta < 1),$$

і формула Маклорена має вигляд

$$\boxed{\begin{aligned}\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \sin\frac{n\pi}{2}\frac{x^n}{x!} + \\ + \sin\left(\Theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}}$$

Але

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо } n = 2k+1. \end{cases}$$

Тому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} +$$

$$+ \sin\left(\Theta x + \frac{(2k+3)\pi}{2}\right)\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \quad (0 < \Theta < 1)$$

або в дещо іншій формі

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}), \quad x \to 0.$$

Цілком аналогічно

$$\boxed{\begin{aligned}\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \\ + \cos(\Theta x + (k+1)\pi)\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\end{aligned}} \quad (0 < \Theta < 1)$$

або в дещо іншій формі

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1}), \quad x \to 0.$$

■ **Приклад 7.3**. *Функція* $f(x) = (1+x)^{\alpha}$.

Для цієї функції

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1),$$

$$f^{(n+1)}(\Theta x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\Theta x)^{\alpha-n-1} \quad (0<\Theta<1),$$

і формула Маклорена має вигляд

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\Theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}} \quad (0<\Theta<1)$$

або в дещо іншій формі

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

При $\alpha = -1$ маємо, зокрема,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0,$$

а замінивши x на $-x$, відповідно

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Якщо ж $\alpha = n\ (n \in \mathbf{N})$, то $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(\Theta x) = 0$ і $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, тобто виконується звичайна формула бінома Ньютона.

■ **Приклад 7.4**. *Функція* $f(x) = \ln(1+x)$.

Для цієї функції

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$f^{(n+1)}(\Theta x) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+\Theta x)^{n+1}} \quad (0<\Theta<1),$$

і формула Маклорена має вигляд

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\Theta x)^{n+1}}} \quad (0 < \Theta < 1)$$

або в дещо іншій формі

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Замінивши x на $-x$, дістанемо

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Покажемо застосування формули Маклорена при наближених обчисленнях. Відкинувши в ній залишковий член, матимемо

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Ця формула фактично наближено замінює функцію $f(x)$ многочленом. Для з'ясування точності такого наближення потрібно вказати межі похибки залишкового члена. Наприклад, для функції $f(x) = e^x$ дістанемо наближену формулу $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$. Враховуючи, що $R_n(x) = e^{\Theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ $(0 < \Theta < 1)$, при $|x| \le 1$ маємо

$$|R_n(x)| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Якщо, зокрема, $x = 1$, то $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Візьмемо, наприклад, $n = 6$. Після відповідних обчислень дістанемо $e \approx 2{,}718$, причому похибка не перевищує $\frac{3}{7!}$, що значно менше за 0,001.

За допомогою формули Тейлора можна істотно спростити обчислення багатьох складних границь, які при грубих обчисленнях призводять до тих чи інших невизначеностей.

Нехай слід знайти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ у припущенні, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ і $g(x) \neq 0$ в околі точки x_0. Розкладемо функції $f(x)$ і $g(x)$

за формулою Тейлора, обмежившися першими, відмінними від нуля членами таких розкладів:

$$f(x) = \alpha(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n);$$
$$g(x) = \beta(x - x_0)^n + o((x - x_0)^m),\ x \to x_0.$$

Тоді, очевидно,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^{n-m} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta}, & \text{якщо } n = m, \\ 0, & \text{якщо } n > m, \\ \infty, & \text{якщо } n < m. \end{cases}$$

■ **Приклад 7.5.** *Обчислити границю* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Урахуємо, що

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3);$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),\ x \to 0.$$

Тоді

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)}{\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} = 2.$$

7.4 ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

7.4.1. Умови монотонності функції

Означення 7.1. *Функцію $f(x)$ називають* ***зростаючою (спадною)*** *на деякому проміжку X, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність* $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 7.6 (достатні умови монотонності). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на X, то функція $f(x)$ зростаюча (спадна) на цьому проміжку.

Доведення

Нехай заради конкретності $f'(x) > 0$ на проміжку X і x_1, x_2 — будь-які точки з X, причому $x_1 < x_2$. За формулою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, де $c \in (x_1, x_2)$.

Оскільки $f'(c) > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ або $f(x_1) < f(x_2)$, тобто функція $f(x)$ зростає на проміжку X.

Випадок, коли $f'(x) < 0$ на X, досліджується аналогічно.

7.4.2. Умови локального екстремуму

Означення 7.2. *Точку x_0 називають* ***точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції*** $f(x)$, *якщо при всіх $x \neq x_0$ із деякого δ-околу точки x_0 виконується нерівність*

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Аналогічно, *якщо в деякому δ-околі точки x_0 виконується нерівність*

$$f(x) \geq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)),$$

то точку x_0 називають ***точкою локального мінімуму (максимуму)***. Часто для скорочення слово *локальний* не вживають.

Точки мінімуму й максимуму функції називають ***точками екстремуму***, *а значення функції в цих точках —* ***її екстремумами***.

Теорема 7.7 (необхідні умови екстремуму). Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційовна, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення

Нехай заради конкретності x_0 — точка максимуму. Тоді при досить малих Δx ($|\Delta x| < \delta$) маємо $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$ і $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, а отже,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Оскільки ж функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0.$$

Випадок, коли x_0 — точка мінімуму, досліджується аналогічно.

Теорема 7.7 має простий геометричний зміст: дотична до графіка диференційовної функції у відповідній точці паралельна осі Ox.

- *Зауваження 1.* Якщо $f'(x_0)=0$, то звідси ще не випливає, що x_0 — точка екстремуму. Наприклад, для функції $f(x) = x^3$ похідна $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$. Проте $x_0 = 0$, очевидно, не є точкою екстремуму.
- *Зауваження 2.* Точка x_0, в якій функція $f(x)$ недиференційовна, також може бути точкою екстремуму. Наприклад, функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$, але ця точка є для неї точкою строгого мінімуму.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними*. Стаціонарні точки, а також точки, де функція визначена, але її похідна не існує, називають *критичними*. Саме серед них слід шукати точки екстремуму.

Теорема 7.8 (достатні умови строгого екстремуму першого типу). Нехай функція $f(x)$ неперервна в деякому δ-околі точки x_0: $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, диференційовна в ньому, крім, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) при $x_0-\delta<x<x_0$ і $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) при $x_0<x<x_0+\delta$, то точка x_0 є точкою строгого мінімуму (максимуму).

Коротко цю теорему формулюють так: якщо в точці x_0 похідна змінює знак із мінуса на плюс (із плюса на мінус), то x_0 — точка строгого мінімуму (максимуму).

Доведення

Нехай заради конкретності $f'(x)<0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ і $f'(x)>0$ при $x_0<x<x_0+\delta$.

Спочатку розглянемо $x\in(x_0-\delta, x_0)$. Застосуємо формулу Лагранжа до функції $f(x)$ на відрізку $[x, x_0]$. Маємо

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),$$

де $c\in(x_0-\delta, x_0)$. Оскільки $f'(c)<0$ і $x-x_0<0$, то $f(x)-f(x_0)>0$ або $f(x)>f(x_0)$ при $x_0-\delta<x<x_0$.

Якщо ж $x\in(x_0, x_0+\delta)$, то, застосувавши формулу Лагранжа до функції $f(x)$ на відрізку $[x_0, x]$, дістанемо

$$f(x)-f(x_0)=f'(d)(x-x_0),$$

де $d\in(x_0, x_0+\delta)$. Оскільки $f'(d)>0$ і $x-x_0>0$, то $f(x)-f(x_0)>0$ або $f(x)>f(x_0)$ при $x_0<x<x_0+\delta$.

Таким чином, для будь-якого $x\neq x_0$ з δ-околу точки x_0 маємо $f(x)>f(x_0)$, а це й означає, що точка x_0 є точкою строгого мінімуму.

Випадок зміни знака похідної з плюса на мінус досліджується аналогічно.

- *Зауваження.* Якщо $f'(x)$ має однакові знаки на інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 не є точкою строгого екстремуму.

Теорема 7.9 (достатні умови строгого екстремуму другого типу). Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 похідні до $(n+1)$-го порядку включно, причому $f^{(n+1)}(x)$ неперервна в точці x_0. Тоді, якщо

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0, \text{ а } f^{(n+1)}(x_0) \neq 0,$$

то при парному $n + 1$ точка x_0 є точкою строгого екстремуму, причому, якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ — точкою мінімуму, а якщо $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ — точкою максимуму. При непарному $n + 1$ точка x_0 не є точкою строгого екстремуму.

Доведення

Оскільки $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, то формула Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де $0 < \Theta < 1$ або

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Похідна $f^{(n+1)}(x)$ неперервна в точці x_0, отже, існує такий δ-окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в якому ця похідна зберігає знак (див. п. 5.6). Вважаючи, що $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, маємо $(x - x_0)^{n+1} > 0$ при парному $n + 1$. Якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то і $f^{(n+1)}(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, а тому $f(x) - f(x_0) > 0$ або $f(x) > f(x_0)$ при всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, а це й означає, що точка x_0 є точкою строгого мінімуму.

Випадок, якщо $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, досліджується аналогічно.

При непарному $n + 1$ вираз $(x - x_0)^{n+1}$ змінює знак на інтервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ і $(x_0, x_0 + \delta)$. При цьому на цих інтервалах змінює знак і різниця $f(x) - f(x_0)$. Отже, точка x_0 не є точкою строгого екстремуму. Теорему доведено.

Найчастіше теорема 7.9 використовується при $n = 1$: якщо $f'(x_0) = 0$ (точка x_0 — стаціонарна), а $f''(x_0) \neq 0$, то в точці x_0 буде строгий мінімум при $f''(x_0) > 0$ і строгий максимум при $f''(x_0) < 0$.

7.4.3. Відшукання найменшого й найбільшого значень функції

Зупинимося на питанні про відшукання найменшого й найбільшого значень функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$. За другою теоремою Вейєрштрасса (див. п. 5.7) така функція обов'язково набере цих значень у деяких точках відрізка $[a, b]$. Це можуть бути як внутрішні точки відрізка, так і його кінці.

Отже, для відшукання найменшого (найбільшого) значення неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$ потрібно знайти її локальні екстремуми на інтервалі (a, b) і порівняти їх зі значеннями $f(a)$, $f(b)$. Найменше (найбільше) з цих значень і буде найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Може статися, що функція $f(x)$ на (a, b) зовсім не матиме точок екстремуму. В цьому разі її найменше (найбільше) значення буде серед значень $f(a)$ і $f(b)$.

У практичній роботі слід мати на увазі, що оскільки найменше (найбільше) значення досягається в критичних точках або на кінцях відрізка, то не потрібно перевіряти достатні умови наявності екстремуму функції в критичних точках. Достатньо лише відшукати значення функції в усіх критичних точках і порівняти їх зі значеннями $f(a)$, $f(b)$. Найменше (найбільше) з них і буде найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

■ **Приклад 7.6.** *Із пункту A, який розташований на прямолінійній ділянці залізниці, в пункт B, що віддалений від цієї ділянки на відстань l, потрібно перевозити вантажі. Вартості перевезення одиниці вантажу на одиницю відстані залізницею і автошляхами дорівнюють відповідно m і n (m < n). До якої точки M ділянки залізниці слід прокласти дорогу, щоб транспортування вантажу з пункту A до пункту B було найекономічнішим?*

Нехай $AB = s$, $BC = l$, а $CM = x$. Тоді $CA = \sqrt{s^2 - l^2}$, $MA = \sqrt{s^2 - l^2} - x$ і $BM = \sqrt{l^2 + x^2}$ (рис. 7.3, a). Вартість перевезення k одиниць вантажу дорогою BM становитиме $kn\sqrt{l^2 + x^2}$, залізницею MA — відповідно $km(\sqrt{s^2 - l^2} - x)$. Загальна вартість $Q(x)$ транспортування вантажу

$$Q(x) = kn\sqrt{l^2 + x^2} + km(\sqrt{s^2 - l^2} - x).$$

Знайдемо найменше значення цієї функції при $x \in (0; \sqrt{s^2 - l^2})$.

Взявши похідну

$$Q'(x) = \frac{knx}{\sqrt{l^2 + x^2}} - km = \frac{k(nx - m\sqrt{l^2 + x^2})}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

і прирівнявши її до нуля, дістанемо рівняння $nx - m\sqrt{l^2 + x^2} = 0$, розв'язок якого визначає єдину критичну точку $x_0 = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$. Легко перевірити, що похідна в цій точці змінює знак з мінуса на плюс. Отже, якщо

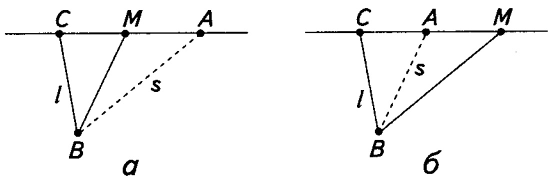


Рис. 7.3

$\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} < \sqrt{s^2 - e^2}$, тобто $CM < CA$, то при $x = x_0 = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ вартість транспортування вантажу з пункту A в пункт B найменша. Якщо ж $\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} \geq \sqrt{s^2 - l^2}$, тобто $CM \geq CA$ (рис. 7.3, *б*), то, очевидно, дорогу слід прокласти вздовж прямої BA.

7.4.4. Умови опуклості й угнутості

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в деякому околі точки. Тоді (див. п. 4.3)

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0)$$

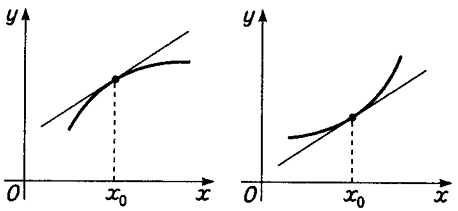
— рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці x_0.

Означення 7.3. *Графік функції $y = f(x)$ називають **опуклим (угнутим)** у точці x_0, якщо існує такий δ-окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ цієї точки, що при всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$ графік функції $f(x)$ розташований нижче (вище) від дотичної до графіка в точці $(x_0, f(x_0))$ (рис. 7.4), так що при вказаних x виконується нерівність*

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$(f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Означення 7.4. Нехай функція $f'(x)$ неперервна в деякому околі точки x_0. *Точку x_0 називають* ***точкою перегину графіка функції*** *$y = f(x)$, якщо існує такий її δ-окіл, по різні боки якого маємо опуклий та угнутий графіки функції* (рис. 7.5).



а *б*

Рис. 7.4

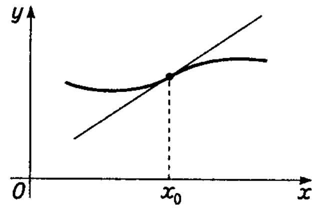


Рис. 7.5

Теорема 7.10 (достатні умови опуклості й угнутості). Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 неперервну другу похідну $f''(x)$. Тоді, якщо $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то графік функції є вгнутим (опуклим) у точці x_0.

Доведення

Нехай заради конкретності $f''(x_0) > 0$. Формула Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 при $n = 1$ має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

де точка c лежить між x і x_0, або

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Похідна $f''(x)$ неперервна в точці x_0, отже, існує такий δ-окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в якому ця похідна зберігає знак $f''(x_0)$. У нашому випадку $f''(c) > 0$, а тому

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

тобто графік функції $y = f(x)$ угнутий в точці x_0.

Випадок $f''(x_0) < 0$ досліджується аналогічно.

Теорема 7.11 (достатні умови точки перегину). Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 неперервну третю похідну $f'''(x)$, причому $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$. Тоді точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Доведення

Формула Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 при $n = 2$ має вигляд

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3,$$

де точка c лежить між x і x_0, або

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = \frac{f'''(c)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Похідна $f'''(x)$ неперервна в точці x_0, отже, існує такий δ-окіл цієї точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в якому ця похідна зберігає знак $f'''(x_0)$. А тому й $f'''(c)$ має той самий знак, що і $f'''(x_0)$, а різниця $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$ разом із $(x - x_0)^3$ змінює знак при переході через точку x_0. Це й означає, що x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

Сформулюємо без доведення загальну теорему.

Теорема 7.12. Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 похідні до $(n + 1)$-го порядку включно, причому $f^{(n+1)}(x)$ неперервна в точці x_0. Тоді, якщо $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, то при парному $n + 1$ графік функції вгнутий (опуклий) у точці x_0, якщо $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ $(f^{(n+1)}(x_0) < 0)$. При непарному $n + 1$ точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$.

7.4.5. Асимптоти. Дослідження графіка функції в цілому

При вивченні поведінки функції, якщо $x \to +\infty(-\infty)$ або поблизу точок розриву другого роду, часто трапляється, що графік функції як завгодно наближається до тієї чи іншої прямої. Ці прямі називають ***асимптотами***.

Означення 7.5. *Пряму $x = a$ називають **вертикальною асимптотою графіка функції** $y = f(x)$*, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ нескінченна. Наприклад, пряма $x = 3$ — вертикальна асимптота графіка функції $y = \dfrac{1}{x-3}$, оскільки

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty, \ \lim_{x \to 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty.$$

➡ **Означення 7.6.** *Пряму* $y = kx + b$ *називають* ***похилою асимптотою*** *графіка функції* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, якщо

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \quad (\lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx - b] = 0).$$

Теорема 7.13. Аби пряма $Y = kx + b$ була похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, необхідно й достатньо, щоб існували границі

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$$

$$(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b).$$

Доведення

Необхідність. Заради конкретності розглядатимемо випадок, коли $x \to +\infty$. Нехай $Y = kx + b$ — похила асимптота графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Оскільки

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x}; \quad f(x) - kx = [f(x) - kx - b] + b,$$

то в силу означення 7.6

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \ \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Достатність. Нехай існують границі, вказані в теоремі. Тоді з другої границі випливає, що $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$, а тому пряма $Y = kx + b$ дійсно є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

При дослідженні графіка функції в цілому рекомендується, наприклад, схема, за якою слід знайти:

1) область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;

2) асимптоти графіка функції;

3) точки локального екстремуму функції;

4) проміжки монотонності функції;

5) точки перегину, проміжки опуклості й угнутості.

Ураховуючи результати дослідження, побудувати графік функції.

Порядок дослідження доцільно визначати згідно з особливостями функції. При розв'язанні конкретної задачі окремі пункти можна дещо розширити, а деякі можуть виявитися зайвими.

Глава 8 **НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ**

8.1 ПЕРВІСНА ФУНКЦІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Основна задача диференціального числення полягає в знаходженні похідної від заданої функції. Різноманітні питання вищої математики та її застосувань у фізиці, хімії, біології, техніці приводять до оберненої задачі: відшукання функції за її похідною. З математичного погляду для заданої функції $f(x)$ слід знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б $f(x)$.

➡ **Означення 8.1**. *Функцію $F(x)$, визначену на проміжку $X = (a, b)$ (можливо, нескінченному), називають* ***первісною функції*** *$f(x)$ на цьому проміжку, якщо для кожного $x \in X$ похідна $F'(x)$ існує й справджується рівність $F'(x) = f(x)$.*

Операцію відшукання первісної для заданої функції називають ***інтегруванням***. (Нагадаємо, що операцію відшукання похідної називають *диференціюванням*.) Таким чином, операція інтегрування є оберненою до диференціювання. Способи інтегрування функцій вивчаються в розділі вищої математики — інтегральному численні. Наприклад, функція $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ — первісна функції $f(x) = x^3$ на множині $\mathbf{R}$, оскільки $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3$ для всіх $x \in \mathbf{R}$; функція $F(x) = -\sin 2x$ — первісна функції $f(x) = \cos^2 x$ на множині $\mathbf{R}$, оскільки $(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ для всіх $x \in \mathbf{R}$.

Основні властивості первісної

1 *Якщо $F(x)$ — первісна деякої функції на проміжку X, то $F(x)$ — неперервна на X функція.*

Справді, функція $F(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, а тому й є неперервною в кожній точці $x \in X$.

2 *Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то функція $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільна стала, також є первісною функції $f(x)$ на X.*

Справді,

$$\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Із цієї властивості випливає, що операція інтегрування не є однозначною. Наступна теорема визначає, що являє собою набір усіх первісних заданої функції.

Теорема 8.1. Якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на проміжку X, то іншу довільну первісну $\Phi(x)$ функції $f(x)$ на X можна подати у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільна стала.

Доведення

За означенням первісної $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$. Знайдемо похідну функції $\Phi(x) - F(x)$:

$$[\Phi(x) - f(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

для всіх $x \in X$. Із наслідку теореми Лагранжа (7.2) ця функція є сталою на проміжку X, тобто $\Phi(x) - F(x) = C$. Таким чином, $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільна стала, що й потрібно було довести.

З теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функції $f(x)$, а C — довільна стала, повністю вичерпує весь набір первісних функції $f(x)$.

■ **Приклад 8.1.** *Функція* $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ *не має первісної на проміжку* $(-1;\ 1)$.

Справді, на проміжку $(-1; 0)$ будь-яка первісна функції $f(x)$ дорівнює $-x + C_1$, а на проміжку $(0; 1)$ — $x + C_2$. Легко побачити, що вибором довільних сталих C_1 і C_2 ніколи не можна дістати функцію, диференційовну в точці $x = 0$. Таким чином, на інтервалі $(-1; 1)$ функція $f(x)$ дійсно не має первісної.

Цей приклад показує, що навіть доволі прості функції можуть не мати первісної. У п. 9.2 буде доведено, що будь-яка неперервна на деякому проміжку функція має на ньому первісну.

8.2 НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Означення 8.2. ***Невизначеним інтегралом функції*** $f(x)$ ***називають*** *множину всіх її первісних.* Позначення невизначеного інтеграла: $\int f(x)dx$.

Отже, маємо $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ — будь-яка первісна функції $f(x)$, а C — довільна стала.

Знак $\int$ називають ***знаком невизначеного інтеграла***, функцію $f(x)$ — ***підінтегральною функцією***, вираз $f(x)dx$ — ***підінтегральним виразом.***

Найважливіші властивості невизначеного інтеграла

1 *Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції; диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто* $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Справді,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

2 *Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої, тобто* $\int dF(x) = F(x) + C$.

Справді, оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

3 *Сталий множник можна виносити з-під знака інтеграла, тобто якщо* $k = \text{const} \neq 0$, *то* $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Справді, нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Тоді $kF(x)$ буде первісною функції $k\,f(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = k\,f(x)$. Звідси випливає, що

$$k\int f(x)dx = k\,[F(x) + C] = kF(x) + C_1 = \int k\,f(x)dx,$$

де $C_1 = kC$.

4 *Невизначений інтеграл алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів кожної з цих функцій окремо, тобто*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Справді, нехай $F(x)$ і $G(x)$ — первісні функцій $f(x)$ і $g(x)$ відповідно: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тоді функції $F(x) \pm G(x)$ є первісними функцій $f(x) \pm g(x)$. Отже,

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x) + C_1] \pm [G(x) + C_2] = [F(x) \pm G(x)] +$$

$$+ [C_1 \pm C_2] = [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)]dx.$$

8.3 ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

З означення невизначеного інтеграла випливають такі формули, які надалі називатимемо ***табличними інтегралами***.

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C.$

12. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C.$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

15. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C.$

- *Зауваження.* Всі наведені формули справджуються на тих проміжках, де визначено відповідні функції. Наприклад, формула (2) справедлива для довільного проміжку, що не містить точку $x = 0$; формула (8) справедлива на кожному з інтервалів вигляду $(k\pi, (k+1)\pi)$, де $k \in \mathbf{Z}$, тощо.

Метод безпосереднього інтегрування базується саме на застосуванні табличних інтегралів і основних властивостей невизначеного інтеграла.

■ **Приклад 8.2.** *Обчислити* $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

Зауважимо спочатку, що $\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}$. Звідси на підставі властивостей 3, 4 й табличного інтеграла (1) маємо

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx + 2\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} + C.$$

■ **Приклад 8.3.** *Обчислити* $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

Ураховуючи, що $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, на підставі властивості 4 й табличних інтегралів (1) і (9) маємо

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

■ **Приклад 8.4**. *Обчислити* $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$.

Зауважимо, що $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$. Звідси на підставі властивості 4 й табличних інтегралів (1) і (8) маємо

$$\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

■ **Приклад 8.5**. *Обчислити* $\int (2^x + 5^x)^2 dx$.

Ураховуючи, що

$$(2^x + 5^x)^2 = 2^{2x} + 2\cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x} = 4^x + 2\cdot 10^x + 25^x,$$

на підставі властивостей 3, 4 й табличного інтеграла (3) маємо

$$\int (2^x + 5^x)^2 dx = \int 4^x dx + 2\int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2\,\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C.$$

Як бачимо, мистецтво інтегрування полягає в умінні за допомогою властивостей невизначеного інтеграла перетворити підінтегральний вираз на «табличний». Потрібно домогтися, щоб він став таким, як в одному з табличних інтегралів, або спочатку хоча б спростився. Для цього застосовують різні методи інтегрування.

8.4 МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає змогу звести відшукання даного інтеграла до знаходження табличного інтеграла. Цей спосіб називають ***методом заміни змінної***, або ***методом підстановки***. Він базується на такій теоремі.

Теорема 8.2. Нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена й диференційовна на проміжку T, а проміжок X — множина її значень. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X і має на ньому первісну $F(x)$. Тоді на проміжку T складна функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, тобто

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (8.1)$$

Доведення

Згідно з правилом диференціювання складної функції, враховуючи, що $F'(x)=f(x)$, дістанемо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in T.$$

Отже, функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ дійсно має на проміжку T однією зі своїх первісних функцію $F(\varphi(t))$, тобто виконується співвідношення (8.1).

Оскільки

$$F(\varphi(t)) + C = (F(x)+C)\,\big|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx\,\big|_{x=\varphi(t)},$$

то рівність (8.1) можна подати у вигляді

$$\int f(x)dx\,\big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{8.2}$$

Рівність (8.2) називають *формулою заміни змінної в невизначеному інтегралі.*

- *Зауваження.* У випадку лінійної підстановки за умови, що $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, маємо

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \tag{8.3}$$

Справді, поклавши $x = \frac{t}{a}$ (тоді $dx = \frac{1}{a}dt$), згідно з формулою (8.2) дістанемо

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

■ **Приклад 8.6**. *Обчислити* $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, $a \neq 0$.

Ураховуючи формулу (8.3), маємо

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

■ **Приклад 8.7**. *Обчислити* $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$, $a \neq 0$.

Ураховуючи формулу (8.3), маємо

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

■ **Приклад 8.8.** *Обчислити* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $a \neq 0$.

Ураховуючи формулу (8.3), маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} = \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1} \right| + C =$$

$$= \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C_1.$$

Цілком аналогічно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ a \neq 0.$$

Поширений також спосіб тотожного перетворення підінтегрального виразу з виділенням диференціала нової змінної інтегрування.

■ **Приклад 8.9.** *Обчислити* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$, $a \neq 0$.

Маємо

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \frac{1}{2} \int \frac{d\,(a^2 \pm x^2)}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \frac{1}{2} \int (a^2 \pm x^2)^{-1/2} d(a^2 \pm x^2) =$$

$$= \pm \frac{1}{2} 2\,(a^2 \pm x^2)^{1/2} + C = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$$

Є ще один нескладний, але досить ефективний прийом обчислення інтегралів, який базується на очевидній формулі

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C. \tag{8.4}$$

■ **Приклад 8.10.** *Обчислити* $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

Оскільки $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ і $(\sin x)' = \cos x$, за формулою (8.4) дістанемо

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{(\sin x)'\,dx}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$$

■ **Приклад 8.11.** *Обчислити* $\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4}$.

Зауважимо, що $(x^2 + 4)' = 2x$, а тому за формулою (8.4)

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 4)'\,dx}{x^2 + 4} = \ln (x^2 + 4) + C.$$

Розглянемо ще кілька прикладів, пов'язаних із підстановками різних типів. Для скорочення розв'язання прикладів надалі наводиться в конспективному вигляді: після умови вказано підстановку та наведено інші необхідні викладки.

■ **Приклад 8.12.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t\,dt}{1+t} =$

$$= 2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} = 2t - 2\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

■ **Приклад 8.13.** $\int \frac{dx}{1+e^{3x}} = \left| \begin{matrix} e^{3x} = t,\ x = \dfrac{\ln t}{3} \\ dx = \dfrac{dt}{3t} \end{matrix} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t(t+1)} =$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{1}{3}\ln|t+1| + C =$$

$$= x - \frac{1}{3}\ln(1+e^{3x}) + C.$$

■ **Приклад 8.14.** $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t, & |x| \le a \\ dx = a\cos t\,dt, & |t| \le \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$

$$= \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\,dt = a^2 \int \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

■ **Приклад 8.15.** $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \left| \begin{matrix} x = a\,\mathrm{tg}\,t, & |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ dx = \dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}, & t \in \mathbf{R} \end{matrix} \right| =$

$$= \int a\frac{dt}{\cos^2 t} \Big/ (a^2\,\mathrm{tg}^2\, t + a^2)^{3/2} = \frac{1}{a^2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right) + C = \frac{1}{a^2}\frac{x}{|a|\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

8.5 МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ

До досить ефективних методів інтегрування належить метод інтегрування частинами. Він базується на такій теореми.

Теорема 8.3. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені й диференційовні на проміжку X і, крім того, на цьому проміжку існує первісна функції $v(x)u'(x)$. Тоді на проміжку X існує також первісна функції $u(x)v'(x)$, причому справджується формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{8.5}$$

Доведення

Функція $u(x)v(x)$ є, очевидно, однією з первісних функції $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ на проміжку X, а тому

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x) + C.$$

З урахуванням припущення про існування первісної функції $v(x)u'(x)$ і властивостей 3, 4 невизначеного інтеграла матимемо потрібну формулу (8.5).

Оскільки $u'(x)dx = du, v'(x)dx = dv,$ то формулу (8.5) можна звести до вигляду

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du. \tag{8.6}$$

Рівність (8.6) називають *формулою інтегрування частинами*, а інтегрування з її використанням — *інтегруванням частинами*. Відшукання даного інтеграла при цьому зводиться до знаходження іншого. Головний зміст формули (8.6) полягає в тому, щоб у результаті її застосування цей новий інший інтеграл виявився або табличним, або став хоча б простішим, ніж даний.

На практиці для застосування формули (8.6) підінтегральний вираз розбивають на два множники. Один із них позначають через u, а інший — через dv. Потім диференціюванням знаходять du, а інтегруванням — функцію v. Звичайно, при аналізі підінтегрального виразу за u слід брати таку частину підінтегральної функції, яка при диференціюванні не дуже ускладнюється, а за dv — таку частину підінтегрального виразу, що легко інтегрується. Зауважимо нарешті, що при знаходженні функції v довільну сталу краще не вводити.

Надалі розв'язання прикладів наводяться в конспективному вигляді: після умови вказано вирази *u*, *dv* і *du*, *v*.

■ **Приклад 8.16.** $\int \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{matrix}\right| = x\ln x - \int dx =$

$= x\ln x - x + C.$

■ **Приклад 8.17.** $\int x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = \cos x\,dx \\ du = dx, & v = \sin x \end{matrix}\right| =$

$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$

■ **Приклад 8.18.** $\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = x \end{matrix}\right| =$

$= x\operatorname{arctg} x - \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx =$

$= x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

■ **Приклад 8.19.** $I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \left|\begin{matrix} u = \sqrt{x^2 \pm a^2}, & dv = dx \\ du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, & v = x \end{matrix}\right| =$

$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \dfrac{(x^2 \pm a^2) \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx =$

$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \pm a^2\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$

Звідси $2I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. Беручи до уваги результат прикладу 8.8, дістанемо

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

Іноді метод інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

■ **Приклад 8.20.** $\int x^2e^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, & dv = e^x\,dx \\ du = 2x\,dx, & v = e^x \end{matrix}\right| =$

$= x^2e^x - 2\int xe^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^x\,dx \\ du = dx, & v = e^x \end{matrix}\right| = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx =$

$= e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

■ **Приклад 8.21.** $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, & dv = \cos bx\,dx \\ du = ae^{ax}dx, & v = \dfrac{\sin bx}{b} \end{matrix} \right| =$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \left| \begin{matrix} u = e^{ax}, & dv = \sin bx\,dx \\ du = ae^{ax}dx, & v = -\dfrac{\cos bx}{b} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{b^2}e^{ax} - \frac{a^2}{b^2}I.$$

Звідси $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx = \dfrac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax} + C.$

Зауважимо, що загальні методи інтегрування застосовуються не шаблонно. Вони не вказують абсолютно точного шляху обчислення інтеграла. Як бачимо, часто необхідні попередні алгебраїчні перетворення підінтегральної функції. В принципі до кожного інтеграла потрібен окремий підхід, необхідні певні навички в інтегруванні.

Проте є досить широкі класи функцій, для яких використовуються стандартні прийоми їх перетворень і зведення до табличних інтегралів або для подальшого застосування загальних методів інтегрування. Розглянемо деякі типи таких функцій.

8.6 ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ТА ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ ІЗ КВАДРАТНИМ ТРИЧЛЕНОМ У ЗНАМЕННИКУ

1. Нехай треба знайти $\int R(x)dx$, де $R(x) = \dfrac{P(x)}{ax^2+bx+c}$, причому $P(x)$ — многочлен n-го степеня ($a \neq 0$), тобто

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{ax^2+bx+c}.$$

Здійснивши ділення многочленів з остачею, дістанемо

$$R(x) = Q(x) + \frac{px+q}{ax^2+bx+c},$$

де $Q(x)$ — многочлен, що має степінь меншу, ніж степінь многочлена $P(x)$.

Інтегрування $Q(x)$ не викликає труднощів. Отже, залишається знайти

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Знаходження будь-якого інтеграла такого вигляду зводиться до відшукання одного чи двох з указаних нижче стандартних інтегралів:

$$\int \frac{dx}{x \pm a};\ \int \frac{dx}{x^2+a^2};\ \int \frac{dx}{(x \pm a)^2};\ \int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2}$$

(див. приклади 8.6, 8.7). Для цього в знаменнику підінтегральної функції слід виділити повний квадрат і здійснити очевидну заміну змінної.

■ **Приклад 8.22.** $\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$

$= \int \frac{dt}{t^2+6} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{6}} + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$

■ **Приклад 8.23.** $\int \frac{dx}{x^2+4x-10} = \int \frac{dx}{(x+2)^2-14} = \begin{vmatrix} x+2=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$

$= \int \frac{dt}{t^2-14} = \frac{1}{2\sqrt{14}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{14}}{t+\sqrt{14}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{14}} \ln\left|\frac{x+2-\sqrt{14}}{x+2+\sqrt{14}}\right| + C.$

■ **Приклад 8.24.** $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{3}{2} \int \frac{(x^2-2x+5)'dx}{x^2-2x+5} +$

$+ \int \frac{dx}{(x-1)^2+4} = \frac{3}{2} \ln(x^2-2x+5) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$

2. До найпростіших ірраціональних дробів із квадратним тричленом у знаменнику належать дроби вигляду $\frac{q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ $(a \neq 0)$.

Зауважимо, що їх інтегрування виконується також, як правило, після виділення повного квадрата в знаменнику й зведення таких інтегралів до стандартних: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ (див. приклад 8.8).

■ **Приклад 8.25.** $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C = \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

■ **Приклад 8.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-2}} = \begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2-2}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right| + C.$$

До розглянутих вище типів інтегралів зводяться також загальніші інтеграли: $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \quad (a \neq 0,\ \ p \neq 0).$

Окремий випадок такого інтеграла розглянуто в прикладі 8.9.

■ **Приклад 8.27.** $\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{(x^2+2x+3)'}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx -$

$$-5\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = 3\sqrt{x^2+2x-3} - 5\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$$

8.7 ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Дробово-раціональні функції $R(x)$ докладно досліджено в гл. 2. Як відомо, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени степенів m і n відповідно. Якщо $m > n$, то, здійснивши ділення, дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

Тут $T(x)$ — ціла частина — многочлен, а $P(x)$ — многочлен степеня, меншого за степінь многочлена $Q(x)$, тобто $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильна дробово-раціональна функція.

Інтегрування многочлена $T(x)$ не викликає труднощів. Тому задача інтегрування дробово-раціональних функцій фактично зводиться до інтегрування правильних дробово-раціональних функцій, навчившись інтегрувати які можна легко проінтегрувати й довільні дробово-раціональні функції.

Своєю чергою, інтегрування правильних дробово-раціональних функцій базується на їх розкладанні на суму простих дробово-раціональних функцій. Поділимо їх на чотири типи:

1) $\dfrac{A}{x-a}$;

2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$,

де A, M, N, a, p, q — дійсні числа, $p^2-4q<0$, тобто тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів; $k=2;\ 3;\ \ldots$

Покажемо, що кожний із чотирьох типів простих дробово-раціональних функцій легко інтегрується.

Справді, для першого й другого типів маємо

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C,\ \ k>1.$$

Інтеграли третього типу проаналізовано в п. 1 (п. 8.6). Діючи за наведеними там правилами, дістанемо

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'}{x^2+px+q}\,dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Розглянемо, нарешті, інтегрування функцій четвертого типу. Зауважимо, що

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^k} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} =$$

$$= -\frac{M}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^k}.$$

Для обчислення останнього інтеграла здійснимо підстановку $x + \frac{p}{2} = t$ і покладемо $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$. Матимемо

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} \quad (k \ge 1).$$

Використавши формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \left| \begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{(t^2+a^2)^k}, & dv = dt \\ du = \dfrac{2kt\,dt}{(t^2+a^2)^{k+1}}, & v = t \end{array} \right| = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} +$$

$$+ 2k\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+a^2)^k} + 2k\int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^{k+1}}dt =$$

$$= 2kI_k - 2ka^2 I_{k+1} + \frac{t}{(t^2+a^2)^k}.$$

Звідси

$$I_{k+1} = \frac{t}{2ka^2(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2} I_k \quad (k \ge 1). \tag{8.7}$$

Ураховуючи, що

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,$$

за формулою (8.7) можна визначити I_2. Знаючи I_2, можна знайти I_3 і т. д.

Аналізуючи результати цього параграфа, доходимо висновку, що інтеграли від дробово-раціональних функцій виражаються через дробово-раціональні функції, логарифми й арктангенси.

■ **Приклад 8.28**. *Обчислити* $\int \frac{x^2+1}{x^2-x^2}dx.$

Ураховуючи, що $\frac{x^2+1}{x^3-x^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$, маємо

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}\,dx = -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + C.$$

■ **Приклад 8.29**. *Обчислити* $\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Ураховуючи, що $\frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{5x}{(x^2+1)^2}$, маємо

$$\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{5x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} +$$

$$+\int \frac{dx}{x^2+1} - 5\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + \frac{5}{4(x^2+1)} + C.$$

■ **Приклад 8.30**. *Обчислити* $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx.$

З урахуванням формули (8.7) дістанемо

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+2x+3)} - 2\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right]\right\} + C = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

8.8 ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

8.8.1. Метод раціоналізації

Познайомимося спочатку з поняттям раціональної функції $R(u, v)$ від двох змінних u і v. Цю функцію можна дістати з цих змінних і деяких сталих їх додаванням, відніманням, множенням і діленням. Такою є, наприклад, функція

$$R(u, v) = \frac{5u^3v^2 + 3u^2v}{2u^2 + v^3}.$$

Нехай змінні u і v, своєю чергою, є функціями змінної x: $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Тоді складна функція $R[\varphi(x), \psi(x)]$ називається ***раціональною функцією*** від φ і ψ.

Розглянемо інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що вдалі підстановки дають змогу звести їх до інтегралів від раціональних дробів. Щодо зазначених підстановок кажуть, що вони раціоналізують дані інтеграли.

1. Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt[n]{x})\, dx$, де R — раціональна функція від x і $\sqrt[n]{x}, n \in \mathrm{N}$, раціоналізуються підстановкою $t = \sqrt[n]{x}$. Якщо ж у підінтегральну функцію входять радикали з різними показниками, то слід застосувати аналогічну заміну змінної, причому n має дорівнювати спільному кратному всіх цих показників.

■ **Приклад 8.31**. *Обчислити* $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx.$

Підінтегральна функція є, очевидно, раціональною функцією від x і $\sqrt[4]{x}$. Тут $R(u,v) = \frac{1+v}{u+v^2}$, де $u = x$, $v = \sqrt[4]{x}$. Маємо

$$\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = t,\ x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{(1+t)4t^3}{t^4+t^2}\, dt =$$

$$= 4\int \left(1 + \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = 4\left(\int dt + \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\operatorname{arctg} t + C = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(\sqrt{x}+1) -$$

$$- 4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C.$$

■ **Приклад 8.32**. *Обчислити* $\int \frac{dx}{(1+{}^3\sqrt{x})\sqrt{x}}.$

У підінтегральну функцію входять радикали з показниками 2 і 3. Їх найменше спільне кратне дорівнює 6. Маємо

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t,\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} =$$

$$= 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6({}^3\sqrt{x} - \operatorname{arctg} {}^3\sqrt{x}) + C.$$

Зауважимо, що $\int \frac{t^2 dt}{1+t^2}$ обчислено в прикладі 8.3.

2. Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де R — раціональна функція від x і $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+x}}$, $n \in \mathbf{N}$, раціоналізується підстановкою $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

■ **Приклад 8.33**. *Обчислити* $\int \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}\dfrac{dx}{(2-x)^2}$.

Маємо

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\frac{dx}{(2-x)^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}} = t, \quad \dfrac{2-x}{2+x} = t^3 \\ 2-x = \dfrac{4t^3}{1+t^3},\ dx = \dfrac{12t^3}{(1+t^3)^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{(1+t^3)^2\, t \cdot 12\, t^2}{16t^6\,(1+t^3)^2}dt = -\frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{8t^2} + C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^2} + C.$$

■ **Приклад 8.34**. *Обчислити* $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Перетворимо підінтегральну функцію до вигляду

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}} = \frac{\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\,(x+2)\,\sqrt[4]{x+2}} = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}\;\frac{1}{(x-1)(x+2)}.$$

Це, очевидно, раціональна функція від x і $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$. Маємо

$$\int \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}\frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}} = t, \quad \dfrac{x+2}{x-1} = t^4, \\ x-1 = \dfrac{3}{t^4-1},\ x+2 = \dfrac{3t^4}{t^4-1}, \\ dx = -\dfrac{12t^3dt}{(t^4-1)^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4-1)\,(t^4-1)\,12t^3}{t\cdot 3\cdot 3t^4\,(t^4-1)^2}dt = -\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{4}{3t} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + C.$$

8.8.2. Підстановка Ейлера

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx,$$

де R — раціональна функція від x і $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ $(a \neq 0)$. Виявляється, що їх завжди можна раціоналізувати. Скористаємося для цього так званими підстановками Ейлера.

1. Проаналізуємо випадок, коли квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має комплексні корені. В цьому разі його знак збігається зі знаком a і оскільки $ax^2 + bx + c > 0$, то $a > 0$. Доцільно покласти $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - x\sqrt{a}$ (***перша підстановка Ейлера***). Неважко переконатися, що підінтегральний вираз $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ матиме вигляд

$$R\left(\frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}, \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2t\sqrt{a} + b}\right) 2\,\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(2t\sqrt{a} + b)^2}\,dt,$$

тобто під знаком інтеграла стоятиме раціональний дріб.

■ **Приклад 8.35.** *Обчислити* $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

Зазначимо, що квадратний тричлен $x^2 + 2x + 2$ має комплексні корені й $a = 1$. Дістаємо

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x, \quad 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \dfrac{t^2 + 4t + 4}{2(t + 1)} \\ dx = \dfrac{t^2 + 2t + 2}{2(1 + t)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2(t + 1)(t^2 + 2t + 2)\,dt}{(t^2 + 4t + 4)\,2(1 + t)^2} = \int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t + 1)(t + 2)^2}\,(t + 2)^2 dt = \int \frac{dt}{t + 1} -$$

$$-2\int \frac{dt}{(t + 2)^2} = \ln|t + 1| + \frac{2}{t + 2} + C = \ln|x + 1 +$$

$$+ \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + \frac{2}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}} + C.$$

2. Проаналізуємо випадок, коли квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має різні дійсні корені x_1 і x_2 (при $x_1 = x_2$ дістаємо $\sqrt{ax^2 + bx + c} = |x - x_1|\sqrt{a}$, а отже, під знаком інтеграла стоїть раціональна функція від x). Доцільно покласти $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ (***друга підстановка Ейлера***). Неважко переконатися, що підінтегральний вираз $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ у цьому випадку матиме вигляд

$$R\left(\frac{x_1t^2 - ax_2}{t^2 - a}, \frac{a(x_1 - x_2)t}{t^2 - a}\right)\frac{2a(x_1 - x_2)t\,dt}{(t^2 - a)^2},$$

тобто під знаком інтеграла стоятиме раціональний дріб.

■ **Приклад 8.36.** *Обчислити* $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}}$.

Зазначимо, що квадратний тричлен $7x - 10 - x^2$ має дійсні корені $x_1 = 2$ і $x_2 = 5$. Маємо

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{7x - 10 - x^2} = t(x - 2),\ x = \dfrac{5 + 2t^2}{1 + t^2}, \\ (x - 2)t = \dfrac{3t}{1 + t^2},\ dx = -\dfrac{6t}{(1 + t^2)^2}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2}{9}\int \frac{5 + 2t^2}{t^2}dt = -\frac{2}{9}\left(5\int \frac{dt}{t^2} + 2\int dt\right) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t} + 2t\right) + C =$$

$$= \frac{4x^2 - 18x - 20}{9(x - 2)\sqrt{7x - 10 - x^2}} + C.$$

На закінчення зазначимо, що обчислення інтегралів за допомогою підстановок Ейлера, як правило, досить трудомістке.

8.8.3. Інтегрування біноміальних диференціалів

Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int x^m(a + bx^n)^p\,dx,$$

де $m, n, p \in \mathbf{Q}$; $a, b \in \mathbf{R}$. Підінтегральний вираз називають ***біноміальним диференціалом***.

П. Л. Чебишов довів, що інтеграл від біноміального диференціала виражається через елементарні функції лише в трьох випадках.

(1) Якщо $p \in \mathbf{Z}$, то функція $x^m (a + bx^n)^p$ раціонально залежить від $\sqrt[k]{x}$, де k — найменше спільне кратне знаменників раціональних чисел m і n. Саме тому підстановка $t = \sqrt[k]{x}$ раціоналізує даний інтеграл.

■ **Приклад 8.37.** *Обчислити* $\int \sqrt[3]{x}\,(8 + \sqrt{x})^{-1}\,dx$.

У нашому випадку $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{2}$, $p = -1$, отже, $k = 6$. Маємо

$$\int \sqrt[3]{x}\,(8 + \sqrt{x})^{-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t,\ x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = 6\int \frac{t^7}{t^3 + 8}\,dt =$$

$$= 6\int \left(t^4 - 8t + \frac{64t}{t^3 + 8}\,dt \right) = \frac{6}{5}t^5 - 24t^2 - 64 \ln |t + 2| +$$

$$+ 32 \ln (t^2 - 2t + 4) + 64\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t - 1}{\sqrt{3}} + C,$$

де $t = {}^6\sqrt{x}$.

(2) Якщо $\frac{m + 1}{n} \in \mathbf{Z}$, то, поклавши $t = x^n$, маємо

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^k (a + bt)^p\,dt,$$

де $k = \frac{m + 1}{n} - 1$ — ціле число. Останній інтеграл, очевидно, раціоналізується підстановкою $n = \sqrt[s]{a + bt}$, де s — знаменник раціонального числа p. Таким чином, у цьому випадку діє підстановка $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$.

■ **Приклад 8.38.** *Обчислити* $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

У нашому випадку $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$, так що $\frac{m + 1}{n} = 1$. Маємо

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1 + x^{\frac{1}{3}}} = t,\ x^{\frac{1}{3}} = t^2 - 1, \\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx = 2t\,dt \end{array} \right| \doteq$$

$$= 6\int t^2 dt = 2t^3 + C = 2\,(1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + C.$$

③ Якщо $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$, то інтеграл раціоналізується підстановкою $t=\sqrt[s]{\frac{a}{x^n}+b}$, де s — знаменник раціонального числа p.

■ **Приклад 8.39.** *Обчислити* $\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

У нашому випадку $m=-11$, $n=4$, $p=-\frac{1}{2}$, так що $\frac{m+1}{n}+p=-4$. Маємо

$$\int\frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}=t, & dx=-\frac{t}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}dt,\\ x=(t^2-1)^{-\frac{1}{4}} & \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}}dt=-\frac{1}{2}\int(t^2-1)^2dt=$$

$$=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C=\frac{\sqrt{(1+x^4)^5}}{10x^{10}}+\frac{\sqrt{(1+x^4)^3}}{3x^6}-\frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}+C.$$

8.9 ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1. Розглянемо інтеграли вигляду

$$\int\sin mx\cos nx\,dx,\quad\int\sin mx\sin nx\,dx,\quad\int\cos mx\cos nx\,dx\quad(m\neq n).$$

Їх легко обчислити з використанням тригонометричних формул

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

і зведенням до інтегралів вигляду $\int \sin kx\, dx$ і $\int \cos kx\, dx$.

■ **Приклад 8.40**. *Обчислити* $\int \cos 5x \cos 7x\, dx$.

Оскільки $\cos 5x\cos 7x=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 12x)$, то

$$\int \cos 5x\cos 7x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 12x)\,dx=\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 12x}{24}+C.$$

■ **Приклад 8.41**. *Обчислити* $\int \sin 3x \sin 4x \sin 5x\, dx$.

Оскільки

$$\sin 3x\sin 4x\sin 5x=\frac{1}{2}\sin 3x(\cos x-\cos 9x)=\frac{1}{4}\sin 3x\cos x-$$
$$-\frac{1}{2}\sin 3x\cos 9x=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x)-\frac{1}{4}(-\sin 6x+\sin 12x),$$

то

$$\int \sin 3x\sin 4x\sin 5x\,dx=\frac{1}{4}\int(\sin 2x+\sin 4x+\sin 6x-\sin 12x)\,dx=$$
$$=-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{24}\cos 6x+\frac{1}{48}\cos 12x+C.$$

2. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$, де $m, n\in\mathbf{N}$, легко обчислюються, якщо m і n парні, з використанням тригонометричних формул

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}.$$

Якщо ж хоча б один із показників m і n непарний (наприклад, $n=2k+1$), то, враховуючи, що $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, матимемо

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int \sin^m x\cos^{2k} x\cos x\,dx=$$
$$=\int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k\cos x\,dx.$$

Отже, такі інтеграли легко обчислити за допомогою підстановки $t=\sin x$.

■ **Приклад 8.42**. *Обчислити* $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$.

У нашому випадку $m=4$, $n=2$. Перетворимо підінтегральну функцію до вигляду

$$\sin^4 x\cos^2 x=(\sin x\cos x)^2\sin^2 x=\frac{1}{8}\sin^2 2x\,(1-\cos 2x)=$$
$$=\frac{1-\cos 4x}{16}-\frac{\sin^2 2x\cos 2x}{8}.$$

Маємо

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \ \cos 2x\,dx.$$

Для обчислення другого інтеграла зазначимо, що тут $m = 2$, а отже, діє підстановка $t = \sin 2x$. Маємо

$$\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin 2x = t, \\ 2\cos 2x\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{6}t^3 + C = \frac{1}{6}\sin^3 2x + C.$$

Остаточно

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

3. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, де R — раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, раціоналізуються підстановкою $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. Справді,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Отже,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int r(t)\,dt,$$

де r — раціональна функція від t.

■ **Приклад 8.43.**

$$\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{4(1-t^2)-6t-5(1+t^2)} = -2\int \frac{dt}{9t^2+6t+1} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{(3t+1)^2} = \frac{2}{3(3t+1)} + C = \frac{2}{3\left(3\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1\right)} + C.$$

Підстановка $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, -\pi < x < \pi$, хоча й є універсальною, проте, як правило, призводить до технічно складних викладок. А тому розглянемо кілька окремих випадків простішої раціоналізації інтегралів, розглянутих вище.

4 Нехай підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ має одну з таких властивостей:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Для обчислення інтеграла $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ зручно використовувати відповідно такі підстановки: 1) $t = \cos x$; 2) $t = \sin x$; 3) $t = \operatorname{tg} x$.

■ **Приклад 8.44**. *Обчислити* $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx.$

У нашому випадку $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ і діє підстановка $t = \cos x$. Маємо

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^4}dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\cos x -$$

$$-\frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

■ **Приклад 8.45**. *Обчислити* $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$

У нашому випадку $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ і діє підстановка $t = \operatorname{tg} x$. Після відповідних перетворень підінтегрального виразу матимемо

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x} = \int \frac{\dfrac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x\cos^2 x} = \int \frac{1+t^2}{t}dt = \ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$$

8.10 ПОНЯТТЯ ПРО ІНТЕГРАЛИ, «ЩО НЕ БЕРУТЬСЯ»

Із диференціального числення відомо, що похідна будь-якої елементарної функції є елементарною функцією. Отже, операція диференціювання не виводить нас до класу елементарних функцій.

Зовсім інша ситуація спостерігається для операції інтегрування. В п. 8.1 зазначалося, що довільна неперервна функція має первісну. Всі елементарні функції неперервні в своїх областях визначення. Отже, всі вони інтегровні. Проте виявляється, що інтеграли від елементарних функцій, хоча й існують, але часто вже не є елементарними функціями. Ці інтеграли називають такими, «що не беруться». Їх приклади:

1) $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ — інтегральний синус;

2) $\int e^{-x^2}\,dx$ — інтеграл Пуассона;

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$ — інтегральний логарифм тощо.

Кожний із таких інтегралів являє собою неелементарну функцію. Ці функції належать до так званих вищих трансцендентних функцій, мають важливе значення в різних галузях математики й широко застосовуються.

Глава 9

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

9.1 ІНТЕГРАЛЬНІ СУМИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення 9.1. *Множину $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ називають* ***подрібненням замкненого проміжку*** $[a, b]$; $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ — ***проміжки подрібнення;*** *максимальна довжина проміжків подрібнення* $[x_i, x_{i+1}]$ *зветься* ***рангом подрібнення*** *T і позначається через $\lambda(T)$.*

Послідовність подрібнень T_m проміжку $[a, b]$ називають ***нормальною,*** *якщо відповідна послідовність рангів $\lambda(T_m)$ прямує до нуля:* $\lim\limits_{m \to \infty} \lambda(T_m) = 0$.

Приклад 9.1. $T = \{1 < 1{,}2 < 1{,}4 < 1{,}7 < 2\}$ — подрібнення проміжку $[1; 2]$ на чотири частини; його ранг $\lambda(T) = 0{,}3$.

Приклад 9.2. $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, де $x_1 = x_0 + \dfrac{b-a}{n}$, $x_2 = x_1 + \dfrac{b-a}{n}, \ldots, x_n = x_{n-1} + \dfrac{b-a}{n}$, тобто T_n — подрібнення проміжку $[a, b]$ на n однакових за довжиною проміжків; $\lambda(T_n) = \dfrac{b-a}{n}$; T_n — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$.

Приклад 9.3. $T_n = \{1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\}$, де $x_0, x_1, \ldots, x_n$ утворюють геометричну прогресію зі знаменником $q = \sqrt[n]{2}$; проміжок $[x_{n-1}, x_n]$ найдовший; $\lambda(T_n) = 2 - 2^{\frac{n-1}{n}}$; оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda(T_n) = 0$, то послідовність подрібнень T_n нормальна.

Перейдемо до розгляду понять, тісно пов'язаних із поняттям визначеного інтеграла, — *інтегральних сум (сум Дарбу).*

Означення 9.2. Нехай функція $f(x)$ визначена й обмежена на проміжку $[a, b]$; $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — подрібнення $[a, b]$ на проміжки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0; 1; \ldots; n-1$; m_k — інфінум, а M_k — супремум множини значень функції $f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$. *Суму*

$$S_T = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

*називають **нижньою**, а*

$$S^T = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

*— **верхньою інтегральними сумами**, пов'язаними з подрібненням T проміжку $[a, b]$.*

■ **Приклад 9.4**. Поняття верхньої (*б*) та нижньої (*а*) інтегральних сум геометрично ілюструє рис. 9.1. В обох випадках це площі фігур, складених із прямокутників.

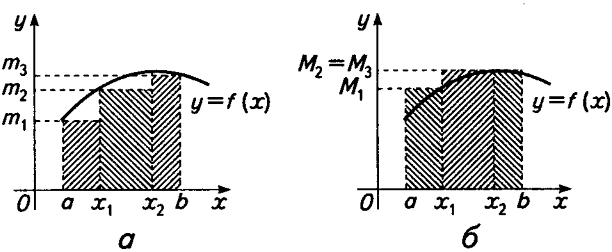


Рис. 9.1

Властивості верхніх і нижніх інтегральних сум

1 $S_T \le S^T$ *для кожного* T.

Наслідок того, що $m_i \le M_i$.

2 *Якщо* T_1 і T_2 *— подрібнення проміжку* $[a, b]$ і $T_1 \subset T_2$ (*подрібнення* T_2 *щільніше від* T_1), *то* $S_{T_1} \le S_{T_2}$, $S^{T_1} \ge S^{T_2}$.

Цю властивість можна формулювати таким чином: при ущільненні подрібнення нижня інтегральна сума може тільки збільшитись, а верхня — лише зменшитись.

Доведемо цю властивість для верхніх інтегральних сум. Спочатку розглянемо випадок, коли T_2 містить усі точки T_1, а також одну нову точку $\bar{x}_i$, яка лежить між точками x_{i-1} та x_i подрібнення T_1. Якщо в сумі S^{T_1} доданок $M_i(x_i - x_{i-1})$ замінити сумою $\overline{M}_i(\bar{x}_i - x_{i-1}) + \overline{\overline{M}}_i(x_i - \bar{x}_i)$, то дістанемо S^{T_2}. Оскільки $\overline{M}_i \le M_i$ і $\overline{\overline{M}}_i \le M_i$, то

$$\overline{M}_i(\bar{x}_i - x_{i-1}) + \overline{\overline{M}}_i(x_i - \bar{x}_i) \le M_i(\bar{x}_i - x_{i-1}) + M_i(x_i - \bar{x}_i) =$$
$$= M_i(x_i - x_{i-1}),$$

а тому $S^{T_2} \le S^{T_1}$. Якщо T_2 містить k нових порівняно з T_1 точок, то їх можна приєднувати по одній, щоразу застосовуючи доведену нерівність.

Для нижніх інтегральних сум властивість 2 можна довести цілком аналогічно.

3 *Для будь-яких подрібнень T_1 і T_2 проміжку $[a, b]$ виконується нерівність $S_{T_1} \le S^{T_2}$.*

Справді, нехай $T = T_1 \cup T_2$. Тоді T — ущільнення як T_1, так і T_2, а тому $S_{T_1} \le S_T$ і $S^T \le S^{T_2}$ (за властивістю 2). Крім того, $S_T \le S^T$ (властивість 1). Отже, $S_{T_1} \le S_T \le S^T \le S^{T_2}$.

4 *Множини всіх верхніх і нижніх інтегральних сум обмежені.*

Справді, нехай $T_0 = \{a, b\}$, а T — будь-яке подрібнення проміжку $[a, b]$. Тоді $S^T \le S^{T_0}, S_T \ge S_{T_0}$ (за властивістю 2), і $S^T \ge S_{T_0}, S_T \le S^{T_0}$ (за властивістю 3). Тому $S_{T_0} \le S^T \le S^{T_0}$ і $S_{T_0} \le S_T \le S^{T_0}$.

5 *Нехай T — довільне подрібнення проміжку $[a, b]$, T_n — нормальна послідовність подрібнень цього самого проміжку, а ε — довільне додатне число. Тоді для всіх досить великих n справджуються нерівності $S^{T_n} < S^T + \varepsilon$, $S_{T_n} > S_T - \varepsilon$.*

Доведемо першу нерівність (доведення другої цілком подібне) спочатку для випадку, коли $f(x) > 0$ на проміжку $[a, b]$. Нехай $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$, λ_n — ранг T_n, $\varepsilon > 0$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, то для досить великих n справджується нерівність $\lambda_n < \dfrac{\varepsilon}{k+1} M$, де M — точна верхня межа $f(x)$ на проміжку $[a, b]$. Далі розглядатимемо лише такі значення n. Запишемо $S^{T_n} = S_I^{T_n} + S_{II}^{T_n}$, де до суми $S_I^{T_n}$ віднесемо всі ті доданки S^{T_n}, які відповідають відрізкам розбиття T_n, що містяться всередині одного з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$. Очевидно, що $S_I^{T_n} < S^T$ (урахувати, що $f(x) > 0$). Оскільки доданки $S_{II}^{T_n}$ відповідають тим відрізкам T_n, які містять одну з точок розбиття T, загальна кількість їх не перевищує $k + 1$. Тому $S_{II}^{T_n} \le M(k+1)\lambda_n < M(k+1)\dfrac{\varepsilon}{(k+1)M} = \varepsilon$. Звідси $S^{T_n} = S_I^{T_n} + S_{II}^{T_n} < S^T + \varepsilon$, що й потрібно.

Якщо $f(x)$ не обов'язково додатна, то розглянемо функцію $g(x) = f(x) + K$, де K настільки велике, що $g(x) > 0$. Таке K існує, оскільки $f(x)$ обмежена. Тепер маємо, що різниця верхніх інтегральних сум для функцій $g(x)$ і $f(x)$ дорівнює $K(b - a)$ і не залежить від подрібнення. Оскільки нерівність $S^{T_n} < S^T + \varepsilon$ для функції $g(x)$ виконується при всіх досить великих n, то при тих самих n, віднімаючи зліва й справа $K(b - a)$, дістанемо нерівність для функції $f(x)$.

6 *Якщо T_n — нормальна послідовність подрібнень відрізка $[a, b]$, то послідовності S^{T_n} і S_{T_n} мають границі.*

Нехай τ_n — нова послідовність подрібнень, яка з початковою послідовністю T_n пов'язана таким чином: $\tau_1 = T_1$; $\tau_n = \tau_{n-1} \cup T_n$ при всіх $n > 1$. Тоді $\tau_1 \subset \tau_2 \subset \tau_3 \subset \ldots$, а тому S^{τ_n} — монотонно спадна (властивість 2) й обмежена (властивість 4) послідовність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S^{\tau_n} = S$. Доведемо, що також $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = S$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Для всіх досить великих n (наприклад $n \ge n_0$) справджуються нерівності $S - \dfrac{\varepsilon}{2} < S^{\tau_n} < S + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

За властивістю 5 для всіх досить великих n справджуються нерівності $S^{T_n} < S^{\tau_{n_0}} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Крім того, $S^{\tau_n} \le S^{T_n}$ для всіх n (властивість 2). Тому для всіх досить великих n маємо

$$S - \varepsilon < S - \frac{\varepsilon}{2} < S^{\tau_n} \le S^{T_n} < S^{\tau_{n_0}} + \frac{\varepsilon}{2} < S + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = S + \varepsilon,$$

тобто $S - \varepsilon < S^{T_n} < S + \varepsilon$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = S$.

Для нижніх інтегральних сум доведення аналогічне.

7 *Кожна з границь $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} < S_{T_n}$ не залежить від вибору нормальної послідовності T_n подрібнень проміжку $[a, b]$.*

Справді, нехай T_n і τ_n — довільні нормальні послідовності подрібнень проміжку $[a, b]$. Позначимо $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = A$, а $\lim\limits_{n\to\infty} S^{\tau_n} = B$ (ці границі існують за властивістю 6).

Розглянемо нормальну послідовність подрібнень $T_1, \tau_1, T_2, \tau_2, \ldots, T_n, \tau_n, \ldots$ Послідовності S^{T_n} і S^{τ_n} є підпослідовностями збіжної (за властивістю 6) послідовності $S^{T_1}, S^{\tau_1}, S^{T_2}, S^{\tau_2}, \ldots, S^{T_n}, S^{\tau_n}, \ldots$ Тому $A = B$.

Для нижніх інтегральних сум доведення таке саме.

8 *Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке подрібнення T проміжку $[a, b]$, що $S^T - S_T < \varepsilon$, то для кожної нормальної послідовності подрібнень T_n цього проміжку справджується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{T_n}$.*

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{T_n} = B$. Із властивості 3 інтегральних сум випливає, що $A \ge B$. Нехай $\tau_n = T_n \cup T$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S^{\tau_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{T_n} = B$ (властивість 7). Взявши до уваги властивості 1 і

2, дістаємо: $S_T \le S_{\tau_n} \le S^{\tau_n} \le S^T$. Отже, $S^{\tau_n} - S_{\tau_n} < \varepsilon$ для всіх n, а тому $A - B = \lim\limits_{n\to\infty}(S^{\tau_n} - S_{\tau_n}) \le \varepsilon$. Оскільки ε — довільне додатне число, звідси випливає, що $A = B$.

9.2 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

➡ **Означення 9.3**. Нехай $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — подрібнення проміжку $[a, b]$, $f(x)$ — визначена на $[a, b]$ функція, $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2], \ldots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]$ — довільні точки проміжків подрібнення T. *Суму*

$$\sigma(T) = f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})$$

*називають **інтегральною сумою функції** $f(x)$ для подрібнення T.* Зрозуміло, що вона залежить від вибору точок c_i $(i = 1; 2; \ldots; n)$.

■ **Приклад 9.5**. На рис. 9.2 інтегральна сума — площа заштрихованої фігури, складеної з прямокутників.

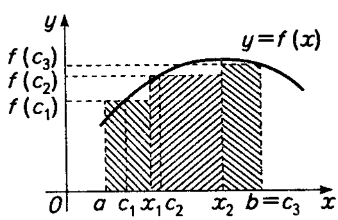


Рис. 9.2

➡ **Означення 9.4**. Нехай T_n — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$, $f(x)$ — визначена на $[a, b]$ функція, $\sigma(T_n)$ — послідовність інтегральних сум. *Якщо існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(T_n)$, *яка не залежить ні від вибору нормальної послідовності T_n, ні від вибору внутрішніх точок при утворенні інтегральних сум $\sigma(T_n)$, то її називають **визначеним інтегралом функції** $f(x)$ **на проміжку** $[a, b]$ і позначають так:* $\int\limits_a^b f(x)dx$ (інтеграл від a до b еф від ікс де ікс).

Теорема 9.1 (ознака існування визначеного інтеграла). Якщо $f(x)$ — визначена й обмежена на проміжку $[a, b]$ функція і для довільного $\varepsilon > 0$ є таке подрібнення T цього проміжку, що $S^T - S_T < \varepsilon$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Справді, нехай T_n — довільна нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a, b]$, $\sigma(T_n)$ — довільна послідовність інтегральних сум. Існування $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(T_n)$ є наслідком нерівностей $S_{T_n} \le \sigma(T_n) \le S^{T_n}$, властивості 8 верхніх і нижніх інтегральних сум і теореми 4.6 про границю проміжної послідовності. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_{T_n}$ не залежать від вибору нормальної послідовності T_n (властивість 7), то від нього не залежить також $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(T_n)$.

◆ ***Наслідок***. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.*

Справді, нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ функція рівномірно неперервна на ньому, то існує таке подрібнення T проміжку $[a, b]$, що на кожному його проміжку коливання функції $f(x)$ (різниця між найбільшим і найменшим значеннями) менше від $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Тому

$$S^T - S_T = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + \ldots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a}(x_1 - x_0) + \ldots + \frac{\varepsilon}{b-a}(x_n - x_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

• *Зауваження*. Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке подрібнення T проміжку $[a, b]$, що $S^T - S_T < \varepsilon$. Це випливає з того, що $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} S^{T_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{T_n}$ для нормальної послідовності подрібнень T_n, а тому $\lim\limits_{n\to\infty}(S^{T_n} - S_{T_n}) = 0$.

■ **Приклад 9.6**. $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x}$ існує, бо функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ неперервна на проміжку $[1; 2]$. Щоб обчислити цей інтеграл, візьмемо нормальну послідовність подрібнень $T_n = \{1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\}$, де $x_k = q^k$, $q = \sqrt[n]{2}$ $(k = 1; 2; \ldots; n)$. За точки $c_1, c_2, \ldots, c_n$ беремо точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будуємо інтегральні суми:

$$\sigma(T_n) = \frac{q-1}{q} + \frac{q^2-q}{q^2} + \ldots + \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n} = n\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{2^{1/n}}\frac{2^{1/n}-1}{\frac{1}{n}}.$$

Ураховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} = \ln 2$, дістаємо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \sigma(T_n) = \ln 2.$$

■ **Приклад 9.7.** *Розглянемо на проміжку* $[0;\ 1]$ *функцію Діріхле*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x - \text{раціональне число}, \\ 1, & \text{якщо } x - \text{ірраціональне число}. \end{cases}$$

Нехай T_n — довільна нормальна послідовність подрібнень проміжку $[0;\ 1]$. Якщо всі точки c_i раціональні, то $\sigma(T_n) = 0$, а якщо ірраціональні, то $\sigma(T_n) = 1$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(T_n)$ залежить від вибору точок c_i (ця границя або дорівнює 0, або 1, або ж зовсім не існує). Отже, $\int_0^1 f(x)dx$ не існує.

Властивості визначеного інтеграла

1 *Якщо* $\int_a^b f(x)dx$ *існує (функція* $f(x)$ *інтегровна на проміжку* $[a,\ b]$*), то для будь-якого числа* α

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

2 *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *інтегровні на проміжку* $[a,\ b]$*, то* $f(x) + g(x)$ *— також інтегровна на проміжку* $[a,\ b]$ *і*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3 *Якщо функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *інтегровні на проміжку* $[a,\ b]$ *і* $f(x) \le g(x)$ *для всіх* $x \in [a,\ b]$*, то*

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Доведемо, наприклад, цю властивість. Нехай T_n — нормальна послідовність подрібнень проміжку $[a,\ b]$, а $\sigma_1(T_n)$ і $\sigma_2(T_n)$ — послідовності інтегральних сум для $f(x)$ і $g(x)$, що відповідають тому самому виборові точок c_i. Тоді $\sigma_1(T_n) \le \sigma_2(T_n)$, а тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_1(T_n) \le \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_2(T_n)$.

• *Зауваження.* Аналогічно доводиться, що $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$, оскільки для інтегральної суми $\sigma_1(T_n)$ інтеграла в лівій частині нерівності маємо

$$|\sigma_1(T_n)| = |f(c_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(c_n)(x_n - x_{n-1})| \le$$
$$\le ||f(c_1)|(x_1 - x_0) + \ldots + |f(c_n)|(x_n - x_{n-1})| = \sigma_2(T_n).$$

Ця сума є інтегральною сумою для інтеграла в правій частині нерівності, тому, знаходячи границі зліва і справа, матимемо потрібне.

4 $\int\limits_a^b dx = b - a.$

Справді, в цьому випадку $f(x) = 1$ і всі без винятку інтегральні суми дорівнюють $b - a$.

5 $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

6 $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$

Властивості 5 і 6 не потребують доведення, оскільки $\int\limits_a^b f(x)dx$ не визначався раніше для $a \geq b$. Отже, рівності 5 і 6 будуть визначеннями інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ у випадку $a \geq b$.

7 *Якщо* $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_b^c f(x)dx$ *існують, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx$$

(адитивна властивість інтеграла).

Доведемо спочатку цю властивість для $a < b < c$. Нехай $\varepsilon > 0$. Для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ існують такі подрібнення T проміжку $[a, b]$ і τ проміжку $[b, c]$, що $S^T - S_T < \frac{\varepsilon}{2}$ і $S^\tau - S_\tau < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $T \cup \tau$ — подрібнення $[a, c]$, $S^T + S^\tau$ — верхня, $S_T + S_\tau$ — нижня інтегральні суми функції $f(x)$ для цього подрібнення й $(S^T + S^\tau) - (S_T + S_\tau) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, то $\int\limits_a^c f(x)dx$ існує. Властивість 7 випливає тепер із теореми 4.5 про границю суми двох послідовностей.

Для інших співвідношень між числами a, b і c рівність тепер легко дістати, взявши до уваги властивості 5 і 6.

◆ ***Наслідок.*** *Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, b]$ і має на ньому лише скінченну кількість точок розриву першого роду, то $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.*

Справді, скориставшися кілька разів адитивною властивістю й наслідком ознаки існування визначеного інтеграла, дістанемо бажане.

8 *Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то для певної точки $c \in [a, b]$ справджується рівність*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє значення інтеграла).

Нехай m — найменше, а M — найбільше значення функції $f(x)$ на $[a, b]$. Тоді $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a, b]$, а тому

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

(за властивостями 1, 3, 4). Звідси дістаємо

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Неперервна на проміжку $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває всіх проміжних значень між m і M, а тому знайдеться така точка $c \in [a, b]$, що

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

- *Зауваження.* Із доведеного, а також із властивостей 5 і 6 випливає, що рівність $\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)$ справджується також для $b \le a$.

9 *Якщо $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$ функція і $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, то $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a, b]$.*

Для доведення застосуємо означення похідної. Передусім функція $f(t)$ неперервна на проміжку $[a, x]$, якщо $x \in [a, b]$, а тому $\int_a^x f(t)dt$ існує, тобто функція $F(x)$ визначена на $[a, b]$. Нехай Δx — приріст аргументу x. Тоді

$$\Delta F(x, \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

(остання рівність справджується на підставі властивості 7).

Застосувавши властивість 8, дістаємо:

$$\Delta F(x, \Delta x) = f(c)((x + \Delta x) - x) = f(c)\Delta x,$$

причому c лежить між x і $x + \Delta x$. Тепер маємо

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Оскільки в точці x функція $f(x)$ неперервна, то $\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$. Нарешті, $\lim\limits_{c \to x} f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$, оскільки c лежить між x і $x + \Delta x$.

10 *Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то справджується формула Ньютона—Лейбніца*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a),}$$

де $\Phi(x)$ — довільна первісна функції $f(x)$.

Справді, за властивістю 9 функція $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ первісна для функції $f(x)$. Тому $\Phi(x) = C + F(x)$, де $C \in \mathbf{R}$, — довільна первісна функції $f(x)$. Звідси

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (C + \int_a^b f(t)dt) - (C + \int_a^a f(t)dt) = \int_a^b f(t)dt.$$

- *Зауваження.* Різницю $\Phi(b) - \Phi(a)$ часто позначають так: $\Phi(x)\Big|_a^b$.

11 *Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні на проміжку $[a, b]$ і мають неперервні похідні, то*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dt}$$

(формула інтегрування частинами).

Справді, оскільки $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, то за формулою Ньютона—Лейбніца

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dt = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Далі до лівої частини слід застосувати властивість 2.

12 *Якщо*:

а) *функція $x = \varphi(t)$ неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ і має на цьому проміжку неперервну похідну;*

б) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *і* $\varphi(t) \in [a, b]$ *за умови* $t \in [\alpha, \beta]$;

в) *функція* $f(x)$ *неперервна на проміжку* $[a, b]$, *то*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

(формула заміни змінної у визначеному інтегралі).

Справді, нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ (вона існує за властивістю 9). Тоді $F(\varphi(t))$ — первісна функції $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ на проміжку $[\alpha, \beta]$. Справді, $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Застосувавши двічі формулу Ньютона—Лейбніца, дістанемо

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

■ **Приклад 9.8**. *Обчислити* $\int_0^1 xe^x dx$.

Застосуємо властивість 11, поклавши $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = e^x$. Матимемо

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

■ **Приклад 9.9**. *Обчислити* $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

Застосуємо заміну змінної $x = t^2$, $1 \le t \le 2$. Дістанемо (за властивостями 12, 1, 2, 10):

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int_1^2 \frac{2t\,dt}{t+1} = 2\int_1^2 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\,(t - \ln(t+1))\Big|_1^2 = 2\,((2 - \ln 3) - (1 - \ln 2)) = 2\ln\frac{2e}{3}.$$

■ **Приклад 9.10**. *Довести, що для будь-якого цілого* $m \ge 2$ *справджується рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{mn}\right) = \ln m.$$

Для доведення розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $[1; m]$. Вона неперервна на цьому проміжку, а тому

$$\int_1^m \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^m = \ln m.$$

Побудуємо тепер інтегральну суму $\sigma(T_n)$ функції $f(x) = 1/x$, де T_n — подрібнення проміжку $[1;\ m]$ на $N = n(m-1)$ однакових частин, а точки c_i — праві кінці проміжків подрібнення, тобто $c_i = x_i$. Маємо

$$\sigma(T_n) = \frac{1}{x_1}(x_1 - x_0) + \ldots + \frac{1}{x_N}(x_N - x_{N-1}) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_N}\right).$$

Оскільки $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$, $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \frac{n}{n+2}$, ..., $\frac{1}{x_N} = \frac{1}{1+\frac{N}{n}} = \frac{n}{nm}$, то

$$\sigma(T_n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{nm}.$$

Отже, рівність, указана в умові, є наслідком визначення інтеграла.

9.3 ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Багато застосувань визначеного інтеграла базується на такій теоремі.

Теорема 9.2. Нехай невід'ємна величина L залежить від значень невід'ємної неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $f(x)$, тобто $L = L(f(x), a, b)$, причому ця величина має такі властивості:

а) $L(f(x), a, b) + L(f(x), b, c) = L(f(x), a, c)$;

б) якщо $f(x) \le g(x)$ на проміжку $[a, b]$, то $L(f(x), a, b) \le L(g(x), a, b)$;

в) якщо $f(x) = c$ (стала на проміжку $[a, b]$ функція), то $L(c, a, b) = \varphi(c)(b-a)$, де $\varphi(x)$ — певна неперервна функція, що монотонно зростає при $x \ge 0$, вигляд якої однозначно визначається величиною L. Тоді

$$L(f(x), a, b) = \int_a^b \varphi(f(x))dx.$$

Доведення

Нехай $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ — подрібнення проміжку $[a, b]$. За властивістю а) величини L маємо

$$L(f(x), a, b) = L(f(x), x_0, x_1) + \ldots + L(f(x), x_{n-1}, x_n).$$

Позначимо через m_i і M_i відповідно найменше й найбільше значення функції $f(x)$ на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$. За властивістю б) величини L дістаємо

$$L(m_i, x_{i-1}, x_i) \le L(f(x), x_{i-1}, x_i) \le L(M_i, x_{i-1}, x_i).$$

Оскільки $L(m_i, x_{i-1}, x_i) = \varphi(m_i)(x_i - x_{i-1})$, $L(M_i, x_{i-1}, x_i) = \varphi(M_i)(x_i - x_{i-1})$] за властивістю в), то

$$\varphi(m_1)(x_1 - x_0) + \varphi(m_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \varphi(m_n)(x_n - x_{n-1}) \le$$
$$\le L(f(x), a, b) \le \varphi(M_1)(x_1 - x_0) + \varphi(M_2)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi(M_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Урахувавши, що функція $\varphi(x)$ монотонно зростаюча, доходимо висновку, що $\varphi(M_i)$ — найбільше, а $\varphi(m_i)$ — найменше значення функції $\varphi(f(x))$ на проміжку $[x_{i-1}, x_i]$. Це означає, що суми, які стоять у лівій і правій частинах останньої нерівності, є відповідно нижньою S_T та верхньою S^T інтегральними сумами функції $\varphi(f(x))$. Отже, $S_T \le L(f(x), a, b) \le S^T$. Оскільки функція $\varphi(f(x))$ неперервна, а тому інтегровна на проміжку $[a, b]$, то

$$L(f(x), a, b) = \int_a^b \varphi(f(x))dx.$$

◆ ***Наслідок 1.*** Нехай $S = S(f(x), a, b)$ — площа фігури, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ та графіком невід'ємної і неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ (рис. 9.3). Тоді

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.}$$

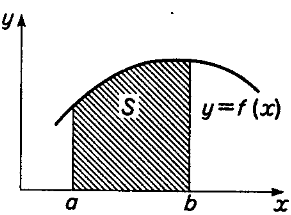


Рис. 9.3

Дійсно, властивості а) і б) мають простий геометричний зміст і справджуються. Якщо $f(x) = c$, то S — площа прямокутника, а тому $S = c\,(b - a)$. Отже, властивість в) справджується для функції $\varphi(x) = x$.

■ **Приклад 9.11.** *Обчислити площу S півкруга, обмеженого відрізком прямої $y = 0$ та півколом $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.*

Дістанемо

$$S = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Для обчислення інтеграла застосуємо заміну змінних $x = R\sin t$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$. Дістанемо

$$S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\; R\cos t\,dt = R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

◆ ***Наслідок 2***. Нехай $V_H = V_H(f(x), a, b)$ — об'єм прямого циліндра з висотою H, в основі якого лежить фігура S, обмежена відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$ та графіком функції $y = f(x)$ ($f(x)$ — невід'ємна неперервна на проміжку $[a, b]$ функція). Тоді

$$\boxed{V_H = H \int_a^b f(x) dx.}$$

Дійсно, цілком очевидно, що властивості а) і б) справджуються. Якщо $f(x) = c$, то $V_H = H c\ (b - a)$, оскільки циліндр стає в цьому разі прямокутним паралелепіпедом. Отже, для функції $\varphi(x) = Hx$ справджується властивість в). Застосувавши тепер доведену теорему, дістанемо бажану формулу.

Взявши до уваги, що $V_H(\sqrt{R^2 - x^2}, -R, R)$ — об'єм половини прямого кругового циліндра з висотою H і радіусом основи R, матимемо відому формулу об'єму циліндра

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 H.$$

◆ ***Наслідок 3***. Нехай $V = V(f(x), a, b)$ — об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої відрізками прямих $y = 0$, $x = a$, $x = b$ та графіком невід'ємної неперервної на проміжку $[a, b]$ функції $y = f(x)$. Тоді

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.}$$

Справді, величина V має властивості а) і б). Якщо $f(x) = c$, то $V = \pi c^2 (b - a)$, оскільки тіло обертання стає в цьому разі прямим круговим циліндром із висотою $b - a$ і радіусом основи c. Тому властивість в) справджується для функції $\varphi(x) = \pi x^2$. Застосуємо цю формулу, щоб дістати відомі формули для об'ємів кулі та конуса:

$$V_{\text{к}} = V\,(\sqrt{R^2 - x^2}, -R, R) = \pi \int_{-R}^{R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(2R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3;$$

$$V_{\text{кон}} = V\left(R - \frac{R}{H}x, 0, H\right) = \pi\int_0^H \left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 dx =$$

$$= \pi R^2\left(x - \frac{x^2}{H} - \frac{x^3}{3H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

◆ ***Наслідок 4.*** Нехай $S = S(\rho(\varphi), \alpha, \beta)$ — площа сектора, обмеженого променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ та кривою $\rho = \rho(\varphi)$, де ρ , φ — полярні координати; $\rho(\varphi)$ — неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ функція (рис. 9.4). Тоді

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.}$$

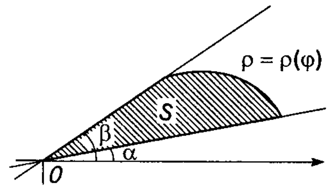


Рис. 9.4

Зрозуміло, що властивості а) і б) справджуються. Якщо $\rho(\varphi) = c$, то матимемо круговий сектор із радіусом c і центральним кутом $\beta - \alpha$, а тому $S = \frac{1}{2}c^2(\beta - \alpha)$. Отже, властивість в) справджується для функції $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2$.

■ **Приклад 9.12.** *Обчислимо площу пелюстки* $\rho = a\sin 2\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$.
Маємо:

$$S = S\left(a\sin 2\varphi, 0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1 - \cos 4\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\pi a^2.$$

Розглянемо величину, яку також можна обчислити за допомогою інтеграла, хоча теорему 9.2 тут використати не можна.

Нехай $f(x)$ — визначена на проміжку $[a, b]$ функція, $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ — подрібнення проміжку $[a, b]$, $P_0, P_1, \ldots, P_k$ — відповідні точки на графіку $y = f(x)$. Позначимо через $L(T) = |P_0P_1| + \ldots + |P_{k-1}P_k|$ довжину ламаної з вершинами в цих точках (рис. 9.5).

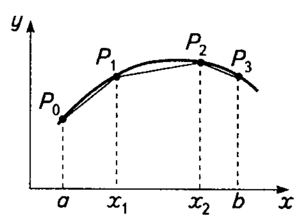


Рис. 9.5

➡ **Означення 9.5.** *Якщо існує* $\lim\limits_{n\to\infty} L(T_n)$, *яка не залежить від вибору нормальної послідовності подрібнень* T_n, *то цю границю називають* ***довжиною дуги графіка*** $y = f(x)$ *на відрізку* $[a, b]$.

Теорема 9.3. Нехай функція $f(x)$ неперервна й має неперервну похідну на проміжку $[a, b]$. Тоді довжина дуги графіка $y = f(x)$ на цьому проміжку існує й обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Доведення

Обчислимо довжину одного відрізка $|P_{i-1} P_i|$, скориставшися теоремою Лагранжа. Оскільки $P_{i-1}(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P_i(x_i, f(x_i))$, то

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(c_i))^2\,(x_i - x_{i-1})^2} = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + (f'(c_i))^2}.$$

Тоді

$$L(T) = (x_1 - x_0)\sqrt{1 + (f'(c_1))^2} + \ldots + (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}.$$

Отже, $L(T) = \sigma(T)$ — інтегральна сума для функції $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Оскільки остання функція неперервна за умовою, то вона інтегровна й, отже, існує $\lim\limits_{n \to \infty} \sigma(T_n)$, яка не залежить ні від вибору нормальної послідовності подрібнень T_n, ні від вибору точок c_1, ..., c_k. Таким чином, $\lim\limits_{n \to \infty} L(T_n)$ існує, що й потрібно довести.

- *Зауваження.* Якщо крива задана параметрично формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$, де функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні й мають неперервні похідні на проміжку $[\alpha, \beta]$, то для довжини дуги кривої при $t \in [\alpha, \beta]$ справджується формула, яка доводиться аналогічно розглянутій вище:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

9.4 НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Розглянемо деяке узагальнення поняття визначеного інтеграла — невласні інтеграли. Один із типів цих інтегралів — інтеграли на нескінченних проміжках.

Означення 9.6. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$ й існує інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ для кожного $b \geq a$. *Якщо існує*

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, *то цю границю називають* ***невласним інтегралом функції*** $f(x)$ *на інтервалі* $[a, +\infty)$ *і позначають* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ — число, то цей невласний інтеграл зветься *збіжним*; якщо ж відповідна границя не існує або дорівнює нескінченності, — *розбіжним.*

У багатьох задачах, де з'являються такі інтеграли, не потрібно мати точне значення невласного інтеграла, а слід тільки встановити факт його збіжності чи розбіжності.

Теорема 9.4 (порівняння). Нехай при $x \ge a$ функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені, $0 \le f(x) \le g(x)$ і інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_a^b g(x)dx$ існують при $b \ge a$.

Тоді:

1) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збіжний, то й $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збіжний;

2) якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбіжний, то й $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ розбіжний.

Доведення

Зауважимо, що друге твердження теореми є наслідком першого. Справді, припустивши в ньому, що $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ збіжний, із першого дістанемо збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, що суперечить другій умові.

Введемо позначення: $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$, $G(b) = \int\limits_a^b g(x)dx$. Оскільки в умові 1) $\lim\limits_{b\to+\infty} G(b) = G$ — число, то $G(b)$ — обмежена зверху при $b \ge a$, отже, з властивості 3 визначеного інтеграла й умови $f(x) \le g(x)$ маємо обмеженість зверху функції $F(b)$. Оскільки $f(x) \ge 0$, то за властивостями 3 і 7 $F(b)$ — неспадна функція, звідки, враховуючи попереднє, дістанемо існування $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

■ **Приклад 9.13**. Для дослідження на збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^4+1}} dx$ скористаємося тим, що $0 < \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^4+1}} < \frac{\pi}{2\sqrt{x^4+1}} < \frac{\pi}{2x^2}$. Оскільки $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\pi\, dx}{2x^2} = = \frac{\pi}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2} \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right) = \frac{\pi}{2}$, то за теоремою 9.4 дістанемо збіжність досліджуваного інтеграла.

Аналогічно визначається інтеграл вигляду $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, а також $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ (такий інтеграл збіжний, якщо збіжні обидва доданки).

Зауважимо, що в останньому випадку число a вибирається довільно, тому потрібно довести, що значення інтеграла (якщо він збіжний) не залежить від a. Справді,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int\limits_{b}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \int\limits_{b}^{a} f(x)dx +$$
$$+ \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ще один тип невласних інтегралів — невласний інтеграл від необмеженої функції.

➡ **Означення 9.7**. Нехай функція $f(x)$ така, що для довільного досить малого $\varepsilon > 0$ вона визначена, обмежена й інтегровна на проміжку $[a+\varepsilon, b]$; отже, існує $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$. Нехай також $f(x)$ необмежена на $(a, b]$. Тоді ***невласним інтегралом*** $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ ***називається***

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.}$$

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ для функції, яка є визначеною, обмеженою й інтегровною на $[a, b-\varepsilon]$ для довільного досить малого $\varepsilon > 0$, але не є обмеженою на $[a, b)$, а також для функції $f(x)$, яка має на проміжку $[a, b]$ точку c, в околі якої $f(x)$ необмежена, але є обмеженою й інтегровною на кожному з проміжків $[a, c-\varepsilon]$ і $[c+\varepsilon, b]$ для довільного досить малого $\varepsilon > 0$. А саме:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

де обидва доданки є невласними інтегралами, визначеними раніше.

Неважко зрозуміти, що можливі комбіновані невласні інтеграли — від необмежених функцій на нескінченному проміжку.

■ **Приклад 9.14.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. Обчисливши перший доданок, дістанемо

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\right) = +\infty.$$

Оскільки цей інтеграл розбіжний, то початковий інтеграл також розбіжний незалежно від збіжності другого доданка.

9.5 НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Припустимо, що $\int_a^b f(x)dx$ існує. Отже, його значення є границею послідовності інтегральних сум $\sigma(T_n)$ для деякої довільно вибраної нормальної послідовності подрібнень проміжку $[a, b]$, наприклад, на n рівних частин. Якщо інтеграл потрібно обчислити з абсолютною похибкою $\varepsilon > 0$, то має справджуватись умова $\left|\int_a^b f(x)dx - I\right| < \varepsilon$, де I — наближене значення. Оскільки для досить великих n ця нерівність виконується для $I = \sigma(T_n)$, то маємо наближену формулу $\int_a^b f(x)dx \approx \sigma(T_n)$. Наперед неясно, яким має бути n для досягнення вказаної вище нерівності. Найпростішою формулою, що усуває цей недолік, є ***формула прямо-***

кутників. Для побудови цієї формули відрізок розбивають на n рівних частин і точку c_i, яка з'являється при побудові інтегральної суми $\sigma(T_n)$, вибирають такою, що дорівнює правому кінцю відповідного відрізка. А саме: $T_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, де $x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ при $i = 1; 2; \ldots; n$, $c_i = x_i$; отже, $\sigma(T_n) = \dfrac{b-a}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n))$. Оцінка похибки при такому наближеному обчисленні інтеграла базується на наступній теоремі.

Теорема 9.5. Нехай $f(x)$ неперервна на $[a, a+h]$ при $h > 0$ і має обмежену похідну $f'(x)$ на $(a, a+h)$, $R(h) = \int\limits_a^{a+h} f(x)dx - h f(a+h)$. Тоді $|R(h)| \le \dfrac{1}{2}Kh^2$, де K — довільне число, для якого $|f'(x)| \le K$ при всіх $x \in (a, a+h)$.

Доведення

Зафіксуємо число h і розглянемо дві функції: $R(t) = \int\limits_a^{a+t} f(x)dx - t f(a+t)$ і $F(t) = R(t) - \dfrac{t^2}{h^2}R(h)$. Функція $R(t)$ визначена на $[0; h]$, оскільки $\int\limits_a^{a+t} f(x)dx$ існує при $t \in [0; h]$ за наслідком теореми 9.1, тому на цьому проміжку визначена також функція $F(t)$. Зазначимо, що $F(h) = F(0) = 0$ і за теоремою про похідну по верхній межі інтеграла (властивість 9) $F'(t) = f(a+t) - f(a+t) - t f'(a+t) - \dfrac{2t}{h^2}R(h) = -t f'(a+t) - \dfrac{2t}{h^2}R(h)$. Тому $F'(t)$ існує при $t \in (0; h)$ за умовою й можна використати теорему Ролля. Тоді знайдеться $c \in (0; h)$, для якого $F'(c) = 0$, тобто $-c f'(a+c) - \dfrac{2c}{h^2}R(h) = 0$. Оскільки $c \ne 0$, звідси $|R(h)| = \dfrac{1}{2}|f'(a+c)|h^2 \le \dfrac{1}{2}Kh^2$, що й потрібно. Тепер ми можемо вивести оцінку похибки при наближенні інтеграла інтегральною сумою $\sigma(T_n)$, вказаною раніше.

Теорема 9.6. Нехай $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і має обмежену похідну $f'(x)$ на (a, b); K — довільне число, для якого $|f'(x)| \leq K$, $x_0 = a$, $x_i = x_{i-1} + \frac{b-a}{n}$ при $i = 1; 2; ...; n$. Тоді формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_1) + ... + f(x_n))$$

дає наближене значення інтеграла, й абсолютна похибка не перевищує $\frac{1}{2n}K(b-a)^2$.

Доведення

Застосуємо теорему 9.5 на кожному з проміжків $[x_{i-1}, x_i]$. Дістанемо $R_i = R_i(h) = \int_{x_i}^{x+h} f(x)dx - hf(x_i + h)$, де $|R_i| \leq \frac{1}{2}Kh^2$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Тоді $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx$ за адитивною властивістю визначеного інтеграла, тому

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(hf(x_i + h) + R_i) = \frac{b-a}{n}(f(x_1) + \ldots + f(x_n)) +$$
$$+(R_1 + \ldots + R_n).$$

Тепер ясно, що сума в других дужках є абсолютною похибкою при обчисленні інтеграла за вказаною в теоремі формулою. Маємо $|R_1 + \ldots + R_n| \leq |R_1| + \ldots + |R_n| \leq n\frac{Kh^2}{2} = n\frac{K(b-a)^2}{2n^2} = \frac{K}{2n}(b-a)^2$, що й потрібно.

Варто зауважити, що формула прямокутників є найпростішою з багатьох відомих наближеною формулою для обчислення визначеного інтеграла. Її недоліком є необхідність обчислювати суму значної кількості доданків для досягнення потрібної точності наближення й мати оцінку похідної підінтегральної функції.

Глава 10 ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

10.1 ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Досі ми розглядали функції однієї змінної, тобто функції, значення яких залежать від значень однієї незалежної змінної. На практиці часто доводиться мати справу з такими залежностями між змінними величинами, в яких числові значення однієї з них визначаються значеннями кількох інших. Наприклад, площа прямокутного трикутника S із катетами, довжини яких дорівнюють x та y $\left(S = \frac{1}{2}xy\right)$, визначається значеннями двох змінних x і y; об'єм V прямокутного паралелепіпеда з ребрами завдовжки x, y, z — значеннями трьох змінних x, y та z ($V = xyz$). Напруга U на відрізку провідника є функцією двох змінних, а саме: сили струму I та опору R: $U = IR$ (закон Ома).

Прикладів таких залежностей можна навести дуже багато. Для того щоб описати й вивчати такі залежності, вводиться поняття функції багатьох змінних і розвивається апарат для дослідження таких функцій.

10.1.1. Означення функцій двох і більшого числа змінних

Означення 10.1. Нехай D — деяка множина впорядкованих пар дійсних чисел: $D = X \times Y$. Припустимо, що кожній парі $(x, y) \in D$ поставлено у відповідність число z із множини Z. *Тоді кажуть, що на множині D* ***задано функцію двох змінних*** *$z = f(x, y)$. Змінні x, y називають* ***незалежними змінними****, або* ***аргументами****; z —* ***залежною змінною****; кажуть також, що $f(x, y)$ — це значення функції f у точці (x, y). Множину D називають* ***областю визначення функції****. Всі зна-*

чення, яких набуває функція $f(x, y)$ при (x, y), що належать області визначення, утворюють ***область значень функції*** *z.*

Аналогічно можна ввести поняття функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, визначеної на множині D, що складається з упорядкованих трійок чисел (x, y, z). Так само можна ввести поняття функції чотирьох, п'яти та більшого скінченного числа змінних. Усі такі функції звуться ***функціями багатьох змінних***.

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел (x, y) у фіксованій прямокутній системі координат відповідає єдина точка M площини, і навпаки, кожній точці M відповідає єдина впорядкована пара чисел (x, y), то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки M і записувати $z = f(M)$ замість $z = f(x, y)$. Областю визначення функції тоді буде множина $\{M\}$ точок площини.

- *Зауваження.* Пару чисел (x, y) можна розглядати й як координати вектора $\bar{r} = \overline{OM}$ — радіуса-вектора точки $M(x, y)$. Тому іноді вигідно функцію z вважати функцією радіуса-вектора $\bar{r}$ і записувати $z = f(\bar{r})$, $|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Щоб задати функцію двох (трьох) замінних, необхідно вказати спосіб, за допомогою якого для кожної пари (трійки) значень аргументів можна знайти відповідне значення функції. Найчастіше використовується (як і у випадку функції однієї змінної) аналітичний спосіб, тобто спосіб задання функції за допомогою формули $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ — деякий вираз (формула) зі змінними x та y. Для функції, заданої аналітично, іноді не вказують явно область визначення. В цьому разі вважають, що область визначення функції $z = f(x, y)$ збігається з областю визначення виразу $f(x, y)$, тобто з множиною тих значень x та y, для яких вираз $f(x, y)$ має зміст.

Розглянемо деякі приклади функцій двох змінних.

■ **Приклад 10.1.** $z = \dfrac{3x + 2y}{x^2 - y^2}$. Областю визначення цієї функції є множина $\{M\}$ усіх точок площини, для яких $x^2 \neq y^2$, тобто, коли $y \neq \pm x$. Геометрично це означає, що область визначення складається з усіх точок площини, що не лежать на бісектрисах першого й третього та другого й четвертого координатних кутів (рис. 10.1).

■ **Приклад 10.2.** $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Областю визначення такої функції є множина всіх точок, для яких вираз $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ визначений. Це множина точок, для яких $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 4$. Це круг із центром у початку координат і радіусом 2, що включає і його межу, тобто коло $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 10.2).

■ **Приклад 10.3.** $z = \ln(x^2 + y^2 - 1)$. Функція визначена за умови $x^2 + y^2 > 1$. Геометрично — це частина площини, що лежить поза кругом із центром у початку координат і радіусом 1, не включаючи межу круга, тобто коло $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 10.3). Областю визначення функції двох змінних може бути вся площина або її частина.

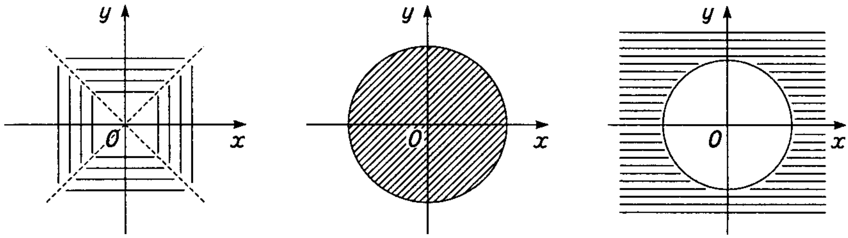


Рис. 10.1 **Рис. 10.2** **Рис. 10.3**

Аналогічно тому, як для множини всіх пар дійсних чисел геометричною моделлю є координатна площина, так і для множини всіх трійок дійсних чисел геометричною моделлю є координатний простір xyz. При цьому кожній трійці (x, y, z) у просторі відповідає точка $M(x, y, z)$. Якщо замість множини $\{M\}$ точок площини взяти множину $\{M\}$ точок простору, то можна дати означення функції трьох змінних $u = f(M)$ або $u = f(x, y, z)$. Областю визначення функції трьох змінних є весь простір або його частина. Так, функція $u = x + y + z$ визначена в усьому просторі, а функція $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ — на множині тих точок простору, координати яких одночасно задовольняють умову $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$.

10.1.2. Геометричне зображення функції двох змінних

➡ **Означення 10.2.** Нехай задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$. *Множину всіх точок (x, y, z) простору таких, що (x, y) належать області визначення функції, а $z = f(x, y)$, називають* ***графіком функції*** $z = f(x, y)$ *і позначають* $\Gamma_f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D(f),$ $z = f(x, y)\}$.

Графіком функції двох змінних є поверхня, що задається рівнянням $z = f(x, y)$. Так, рівняння $z - ax - by - c = 0$ є рівнянням площини.

Ця площина є графіком функції $z = ax + by + c$. Графіком функції $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ є півсфера радіусом 3 з центром у початку координат, яка розташована у верхньому півпросторі. Функції двох змінних відрізняються від функції однієї змінної тим, що для функції багатьох змінних відсутнє поняття монотонної функції.

Побудова графіків функцій двох змінних у багатьох випадках викликає значні труднощі. Тому є ще один спосіб зображення функції двох змінних, який полягає в перетинанні поверхні $z = f(x, y)$ площинами $z = c$ (c — довільне число), паралельними площині Oxy.

➡ **Означення 10.3.** ***Лінією рівня функції*** *$z = f(x, y)$ називають множину точок (x, y) площини Oxy, в яких функція набуває одного й того самого значення c і визначається співвідношенням $f(x, y) = c$.*

При різних c дістанемо різні лінії рівня даної функції. Вони утворюють топографічну карту графіка функції f. Якщо вибрати числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d, то дістанемо ряд ліній рівня, взаємне розташування яких дає уявлення про графік функції. Там, де лінії розташовуються «щільніше», функція змінюється швидше, а там, де рідше, функція змінюється повільніше (поверхня пологіша).

■ **Приклад 10.4.** *Побудувати графік функції $z = x^2 + y^2 + 1$.*

Візьмемо $z = 1$. Тоді $x^2 + y^2 + 1 = 1$, тобто $x^2 + y^2 = 0$ — це точка (0; 0). Якщо $z = 2$, то $x^2 + y^2 = 1$ — це коло з центром у початку координат і радіусом 1.

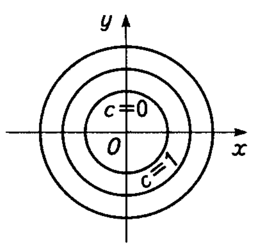


Рис. 10.4

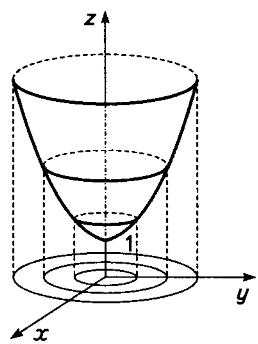


Рис. 10.5

Сім'ю знайдених ліній рівня зображено на рис. 10.4. Якщо тепер кожну з ліній розмістити у відповідній площині, то дістанемо зображення графіка функції $z = x^2 + y^2 + 1$ (рис. 10.5).

Означення 10.4. *Функцію $z = f(x, y)$, що визначена на множині D, називають **обмеженою зверху (знизу)**, якщо область значень функції є множиною, обмеженою зверху (знизу). Якщо є таке число M, що для всіх $(x, y) \in D$ виконується нерівність $f(x, y) \le M$, то функція $z = f(x, y)$ обмежена зверху, а якщо є число m таке, що для всіх $(x, y) \in D$ справджується нерівність $f(x, y) \ge m$, то функція $z = f(x, y)$ обмежена знизу.*

Функцію, обмежену зверху і знизу, називають ***обмеженою***. Наприклад, функція $z = x^2 + y^2 + 1$ обмежена знизу, оскільки $x^2 + y^2 + 1 \ge 1$, але не обмежена зверху (див. рис. 10.4); функція $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ обмежена, оскільки $0 \le \sqrt{9 - x^2 - y^2} \le 3$ для всіх (x, y) з області визначення.

10.2 ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Раніше (див. п. 4.1) було дано кілька еквівалентних одне одному означень границі функції однієї змінної. Згідно з одним із них рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ є коротким записом того, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, що як тільки $0 < |x - x_0| < \delta$, то $|A - f(x)| < \varepsilon$; $|x - x_0|$ — відстань між точками x та x_0 на координатній прямій. Позначивши цю відстань через $\rho(x, x_0)$, можемо дати таке означення границі функції в точці: *число A називають **границею функції** $y = f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $0 < \rho(x, x_0) < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Для функції багатьох змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ часто використовують запис $u = f(M)$, $M = M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Це дає змогу дати означення границі функції $u = f(M)$ при $M \to M_0$, де $M_0 = M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — як і у випадку однієї змінної.

Введемо поняття δ-околу точки $M_0(x_0, y_0)$ і збіжної послідовності точок площини.

Означення 10.5. *Множину $\{M(x, y)\}$ всіх точок, координати x та y яких задовольняють нерівність $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, називають δ-околом точки $M_0(x_0, y_0)$, тобто δ-околом точки*

$M_0(x_0, y_0)$ є сукупність усіх точок, що лежать усередині круга з центром у точці M_0 і радіусом δ.

У випадку функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ δ-околом точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ буде відкрита куля (куля без сфери) з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом δ: $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$. Якщо з околу точки M_0 викинути саму точку M_0, то дістанемо проколотий δ-окіл точки M_0. Точки проколотого δ-околу задовольняють подвійну нерівність $0 < \rho(M, M_0) < \delta$.

Розглянемо послідовність точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$, ... або скорочено $\{M_n\}$.

➡ **Означення 10.6**. *Послідовність точок $\{M_n\}$ називають **збіжною до точки** M_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ є номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $\rho(M_n, M_0) < \varepsilon$.* Це позначається так: $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M_0$.

Задання послідовності $\{M_n\}$ рівносильне заданню двох числових послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$, тобто запис $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = M_0$ тотожний рівностям $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_0$.

Аналогічно вводиться поняття границі послідовності точок у три- й більше вимірних просторах.

Дамо тепер означення границі функції багатьох змінних.

➡ **Означення 10.7**. *Число A називають **границею функції** $u = f(M)$, $M \in R^n$ при $M \to M_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх точок M, таких що $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.* Це позначається так:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \text{ або } \lim_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A.$$

Використовуючи поняття δ-околу, означення 10.7 можна сформулювати інакше.

➡ **Означення 10.8**. *Число A називають **границею функції** $u = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий проколотий δ-окіл точки M_0, в якому виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$.* Звідси випливає, що

$$\lim_{M \to M_0} C = C \ (C \text{ — стала}); \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} x = x_0, \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} y = y_0.$$

➡ **Означення 10.9**. *Число A називають **границею функції** $z = f(M)$ при $M \to M_0$, якщо для довільної послідовності точок M_1, M_2, ..., M_n, ...,* *яка збігається до точки M_0, відповідна послідовність значень функції $f(M_1), f(M_2), ..., f(M_n), ...$ збігається до A.*

Еквівалентність цих означень доводиться так само, як і у випадку функції однієї змінної.

Враховуючи, що означення 10.7—10.9 такі самі, як і відповідні означення границі в точці для функції однієї змінної, всі теореми про границі для функції однієї змінної можна перенести на випадок функції багатьох змінних

Сформулюємо відповідні теореми.

Теорема 10.1. Якщо функція $f(M)$ має границю при $M \to M_0$, то ця границя єдина.

Теорема 10.2. Якщо функція $f(M)$ має границю при $M \to M_0$, то вона обмежена в деякому околі точки M_0.

Теорема 10.3. Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$ і в деякому проколотому околі точки M_0 виконується нерівність $f(M) \le g(M)$, то $A \le B$.

Теорема 10.4. Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} h(M) = A$ і в деякому проколотому околі точки M_0 справджується нерівність $f(M) \le g(M) \le h(M)$, то й $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = A$.

Теорема 10.5. Нехай $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = B$. Тоді:

1) $\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)g(M) = AB$;

3) $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{A}{B}$ (якщо $B \ne 0$).

Доведення цих теорем аналогічні доведенням відповідних теорем для функції однієї змінної.

Означення 10.10. *Функцію $\alpha = \alpha(M)$ називають нескінченно малою в точці M_0 (або при $M \to M_0$), якщо* $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$.

Якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, то $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою при $M \to M_0$. Тоді $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M \to M_0} (f(M) - A) = A - A = 0$. Отже, якщо функція $u = f(M)$ має границю A при $M \to M_0$, то її можна подати у вигляді $f(M) = A + \alpha(M)$, де $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = 0$. Це означає, що функція $f(M)$ в околі точки M_0 відрізняється від числа A на нескінченно малу величину. Порівняння нескінченно малих функцій багатьох змінних здійснюється аналогічно порівнянню нескінченно малих функцій однієї змінної.

■ **Приклад 10.5**. *Обчислити* $\lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} \dfrac{2 - xy}{x^2 - y^2}$.

Використовуючи теорему 10.5 про арифметичні операції над границями, а також те, що границя сталої дорівнює значенню цієї сталої і $\lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} x = 1$, $\lim\limits_{(x,y) \to (1;\,3)} y = 3$, дістанемо

$$\lim_{(x,\,y) \to (1;\,3)} \frac{2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{\lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} (2 - xy)}{\lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} (x^2 - y^2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} 2 - \lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} x \lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} y}{\lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} x \cdot x - \lim\limits_{(x,\,y) \to (1;\,3)} y \cdot y} = \frac{2 - 1 \cdot 3}{1 \cdot 1 - 3 \cdot 3} = \frac{1}{8}.$$

■ **Приклад 10.6**. *Довести, що* $\lim\limits_{(x,\,y) \to (0;\,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ *не існує.*

Виберемо дві послідовності

$$\{(x_n, y_n)\} = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\} \tag{10.1}$$

та

$$\{(x_n', y_n')\} = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)\right\}, \tag{10.2}$$

які прямують до (0; 0) при $n \to \infty$. Тоді для послідовності (10.1)

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{2},$$

а для послідовності (10.2)

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n', y_n') = \lim_{n \to \infty} \frac{-\frac{1}{n}\frac{2}{n}}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2} = -\frac{2}{5}.$$

Зауважимо, що значення границі залежить від вибраної послідовності. Згідно з означенням 10.9 границя функції не повинна залежати від вибраної послідовності. Отже, $\lim\limits_{(x,\,y) \to (0;\,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не існує.

■ **Приклад 10.7.** *Обчислити* $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0;\,0)} \dfrac{x^2y^2}{4x^2+y^2}$.

Виберемо $x = \rho\cos\varphi$, $y = 2\rho\sin\varphi$, де $\rho > 0$. Оскільки $4x^2 + y^2 = 4\rho^2\cos^2\varphi + 4\rho^2\sin^2\varphi = 4\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4\rho^2$, це означає, що при фіксованому ρ точка (x, y) лежить на еліпсі з центром у початку координат, а якщо φ перебігає всі значення від 0 до 2π, то точка (x, y) перебігає весь еліпс. Умова $(x, y)\to(0; 0)$ рівносильна умові $\rho\to 0$. Тоді

$$\lim_{(x,\,y)\to(0;\,0)} \frac{x^2y^2}{4x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\, 4\rho^2\sin^2\varphi}{4\rho^2\cos^2 2\varphi + 4\rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{4\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{4\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\sin^2\varphi\,\cos^2\varphi = 0.$$

10.3 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

10.3.1. Означення неперервності функції багатьох змінних

Неперервність у точці для функції багатьох змінних визначається так само, як і для функції однієї змінної. Тому й локальні властивості неперервної функції багатьох змінних ті самі, що й функції однієї змінної.

➡ **Означення 10.11.** *Функцію $f(M)$, що визначена в деякому околі точки M_0, називають* ***неперервною в точці*** *M_0, якщо* $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Якщо використати для границі функції означення 10.7—10.9, то дістанемо означення неперервності функції в точці *мовою відстаней, мовою околів, мовою послідовностей.*

➡ **Означення 10.12.** *Функцію $u = f(M)$, визначену в деякому околі точки M_0, називають* ***неперервною в точці*** *M_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівності $\rho(M, M_0) < \delta$ випливає нерівність $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.*

➡ **Означення 10.13.** *Функцію $u = f(M)$, визначену в деякому околі точки M, називають* ***неперервною в точці*** *M_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$*

існує $\delta > 0$ таке, що для довільної точки M із δ-околу точки M_0 виконується нерівність $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.

Означення 10.14. *Функцію $u = f(M)$, визначену в деякому околі точки M_0, називають **неперервною в точці** M_0, якщо для довільної послідовності $\{M_k\}$ такої, що $\lim\limits_{k \to \infty} M_k = M_0$, послідовність $\{f(M_k)\}$ збігається й $\lim\limits_{k \to \infty} f(M_k) = f(M_0)$.*

Використовуючи доведення відповідних теорем для функції однієї змінної, можна довести наступні теореми.

Теорема 10.6. Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в точці M_0, то вона обмежена в деякому околі цієї точки.

Теорема 10.7. Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в точці M_0 і $f(M_0) > 0$ ($f(M_0) < 0$), то в деякому околі цієї точки виконується нерівність $f(M) > 0$ ($f(M) < 0$).

Теорема 10.8. Якщо функції $f(M)$ та $g(M)$ неперервні в точці M_0, то їх сума, добуток і частка (при $g(M_0) \neq 0$) також неперервні в точці M_0.

Нехай функцію $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначено в деякому околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Надамо незалежним змінним $x_1, x_2, ..., x_n$ приростів $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ так, щоб точка $M_1(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)$ не вийшла за межі цього околу. Тоді й точки $P(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $R(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0)$, $S(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)$ належатимуть даному околові.

Назвемо *повним приростом функції $u = f(M)$* у точці M_0 функцію Δu, що визначається формулою $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ або інакше:

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Використовуючи поняття повного приросту функції, можна дати означення неперервності функції в точці.

Означення 10.15. *Функцію $u = f(M)$, визначену в деякому околі точки M_0, називають **неперервною в точці** M_0, якщо її повний приріст у цій точці є нескінченно малою при $M \to M_0$ функцією, тобто*

$$\lim_{M \to M_0} \Delta u = \lim_{M \to M_0} (f(M) - f(M_0)) = 0.$$

Ця умова рівносильна умові $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ (див. означення 10.11).

10.3.2. Неперервність складної функції

Нехай функцію $z = f(u, v)$ визначено на множині E, а змінні u і v залежать від змінних x та y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, де обидві функції визначено на множині D. Якщо для довільної точки $(x, y) \in D$ значення $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ такі, що $(u, v) \in E$, то кажуть, що на множині D задано складну функцію $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, u, v — проміжні змінні, x, y — незалежні змінні. Складну функцію можна записати у вигляді $z = f(u(x, y), v(x, y))$. Наприклад, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$, де $u = \ln(x^2 + y^2 + 1)$, $v = \sin^2(x - y^2)$ — складна функція, визначена на всій площі xOy. Її можна записати ще так:

$$z = \sqrt{\ln^2(x^2 + y^2 + 1) + \sin^2(x - y^2)}.$$

Теорема 10.9. Нехай на множині D визначено складну функцію $z = f(u, v)$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, і функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ неперервні в точці $(x_0, y_0) \in D$, а функція $f(u, v)$ неперервна в точці $(u_0, v_0) \in E$, де $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Тоді складна функція $z = f(u(x, y), v(x, y))$ неперервна в точці (x_0, y_0).

Доведення

Оскільки $f(u, v)$ неперервна в точці $P_0(u_0, v_0)$, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\eta > 0$, що з нерівності $\rho(P, P_0) < \eta$, де $P = P(u, v)$, випливає нерівність $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$. Згідно з умовою теореми функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ неперервні в точці $M_0(x_0, y_0)$. Тоді існують такі $\delta_1 > 0$ та $\delta_2 > 0$, що з нерівності $\rho(M, M_0) < \delta_1$ випливає нерівність $|u(M) - u(M_0)| < \eta/\sqrt{2}$, а з $\rho(M, M_0) < \delta_2$ випливає $|v(M) - v(M_0)| < \eta/\sqrt{2}$. Тут $M = M(x, y)$, $M_0 = M_0(x_0, y_0)$. Виберемо найменше з чисел δ_1 та δ_2 і позначимо його через δ. Тоді з нерівності $\rho(M, M_0) < \delta$ випливатимуть обидві нерівності: $|u(M) - u(M_0)| < \eta/\sqrt{2}$, $|v(M) - v(M_0)| < \eta/\sqrt{2}$. Якщо взяти $P = (u(M), v(M))$, $P_0 = (u(M_0), v(M_0))$, то

$$\rho(P, P_0) = \sqrt{(u(M) - u(M_0))^2 + (v(M) - v(M_0))^2} <$$

$$< \sqrt{(\eta/\sqrt{2})^2 + (\eta/\sqrt{2})^2} = \eta.$$

Отже, ми показали, що коли $\rho(M, M_0) < \delta$, то $\rho(P, P_0) < \eta$, а тоді $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$, або $|f(u(x, y), v(x, y)) - f(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0))| < \varepsilon$, що й доводить неперервність функції $z = f(u(x, y), v(x, y))$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

10.3.3. Основні властивості неперервних функцій

Нехай на площині (чи в просторі) задано множину D.

Означення 10.16. *Точку M називають* ***внутрішньою точкою множини*** *D, якщо існує δ-окіл цієї точки, який складається з точок множини D.*

Точку P називають ***зовнішньою точкою відносно множини*** *D, якщо існує δ-окіл точки P, жодна точка якого не належить D.*

Якщо в довільному околі точки S є точки, що належать множині D, і точки, що не належать множині D, то таку точку S називають ***граничною точкою множини*** *D* (рис. 10.6).

Означення 10.17. *Множину, що складається лише з внутрішніх точок, називають* ***відкритою***. *Якщо множина містить усі свої граничні точки, то вона зветься* ***замкненою***.

Означення 10.18. *Якщо довільні дві точки множини D можна сполучити ламаною (неперервною) лінією, що складається лише з точок даної множини, то таку множину називають* ***зв'язною***. Приклади зв'язних множин — прямокутник, круг, кільце (рис. 10.7) тощо.

Зв'язну відкриту множину $\{M\}$ точок називають ***відкритою областю***, *або просто* ***областю***.

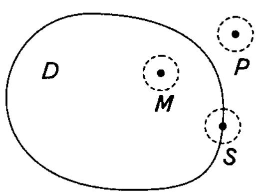


Рис. 10.6

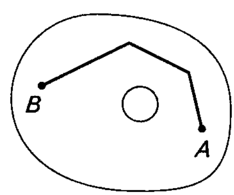


Рис. 10.7

Означення 10.19. *Якщо всі точки M множини D задовольняють нерівність $\rho(M, M_0) < K$, де $K > 0$, а M_0 — деяка точка множини D,* *то D називають* ***обмеженою множиною.*** Геометрично обмеженість множини D означає, що її можна цілком умістити всередині круга (або кулі) з центром у точці M_0 і радіусом K.

➡ **Означення 10.20**. Нехай M_0 — гранична точка множини D. *Функцію $f(M)$ називають* ***неперервною в граничній точці*** *M_0, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $\rho(M, M_0) < \delta$, $M \in D$, випливає нерівність $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$.*

➡ **Означення 10.21**. *Якщо функція $f(M)$ неперервна в кожній точці множини D (внутрішній або граничній), то її називають* ***неперервною на множині*** *D.* Наприклад, функція $u = \sqrt[5]{x^2 - y^2 + z^3}$ неперервна на всьому координатному просторі, а функція $z = \dfrac{x^2 - y^2}{2x - y}$ неперервна в півплощині $y > 2x$ і в півплощині $y < 2x$.

Основні властивості неперервних функцій

Теорема 10.10. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині, тобто всі її значення перебувають між двома межами: $m < f(x, y) \le M$.

Теорема 10.11. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона досягає в цій області своїх точних меж, тобто серед її значень на цій множині є як найменше, так і найбільше.

Доведення аналогічне доведенню теореми 5.19. (Теореми 10.10, 10.11 рекомендуємо довести самостійно.)

Теорема 10.12. Якщо неперервна на зв'язній множині D функція $z = f(x, y)$ набуває в двох точках M_1 та M_2 цієї множини значення різних знаків, то в множині D знайдеться така точка M_0, що в ній функція перетворюватиметься в нуль: $f(M_0) = 0$.

Доведення

Припустимо, що $f(M_1) < 0$, $f(M_2) > 0$, а точки M_1 та M_2 можна сполучити горизонтальним відрізком, який цілком належить D, тобто $M_1(x_1, y_0)$, $M_2(x_2, y_0) \in D$. Тоді на відрізку M_1M_2 буде $y = y_0$, а отже, функція $z = f(x, y_0)$ є функцією однієї змінної x, причому при $x = x_1$ — від'ємною ($f(x_1, y_0) < 0$), а при $x = x_2$ — додатною ($f(x_2, y_0) > 0$). Тоді згідно з теоремою 5.20 на відрізку $[x_1, x_2]$ знайдеться така точка x_0 (тобто точка $M_0(x_0, y_0)$), що $f(x_0, y_0) = 0$.

Аналогічно доводиться теорема, якщо точки M_1 та M_2 можна сполучити вертикальним відрізком, який цілком належить множині D.

Якщо точки M_1 та M_2 не можна сполучити одним горизонтальним або вертикальним відрізком, то їх можна сполучити ламаною $M_1N_1N_2 \ldots N_{n-1}M_2$ (рис. 10.8), оскільки множина D зв'язна. Якщо в одній із вершин ламаної функція перетворюється в нуль, то теорему доведено. Якщо в жодній із вершин функція не перетворюється в нуль, то знайдеться така ланка ламаної N_kN_{k+1}, що $f(N_k) < 0$, а $f(N_{k+1}) > 0$. Якщо відрізок N_kN_{k+1} вертикальний чи горизонтальний, то теорему доведено вище. Якщо відрізок N_kN_{k+1} похилий, то його можна задати рівнянням $y = ax + b$, де $a \neq 0$, $x_k \leq x \leq x_{k+1}$. Тоді функція $z = f(x, y)$ матиме вигляд $z = f(x, ax + b)$. Це складна функція від x, неперервна на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, і на його кінцях набуває значень різних знаків. Отже, всередині відрізка знайдеться точка x_0 така, що $f(x_0, ax_0 + b) = 0$. Таким чином, функція $z = f(x, y)$ перетворюється в нуль у точці $M_0(x_0, ax_0 + b)$, що лежить на відрізку N_kN_{k+1}, а отже, належить множині D.

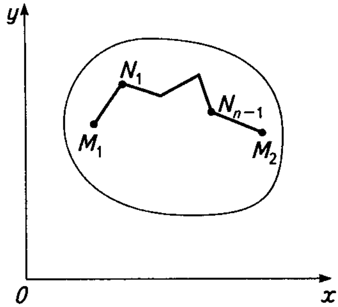


Рис. 10.8

Теорема 10.13. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D, то вона набуває всіх проміжних значень між двома своїми довільними значеннями, тобто, якщо $A < C < B$, де A та B — деякі значення функції $f(M)$ у даній області, то в цій області існує точка $M_0(x_0, y_0)$ така, що $f(M_0) = C$.

Доведення випливає з теореми 10.12, якщо розглянути функцію $F(x, y) = f(x, y) - C$.

Теорема 10.14. Якщо функція $z = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона рівномірно неперервна в цій області, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для двох довільних точок M_1, M_2 області, що задовольняють умову $\rho(M_1, M_2) < \delta$, виконуватиметься нерівність $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$.

Наведені теореми легко узагальнити для функцій трьох і більшого числа змінних.

10.4 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ

Нехай задану функцію двох змінних $z = f(x, y)$ визначено в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Зафіксуємо значення другої змінної y: $y = y_0$ і розглянемо функцію $z = f(x, y_0)$ однієї змінної. Можна ставити питання про обчислення похідної функції $z = f(x, y_0)$ у точці $x = x_0$. Надамо значенню x_0 приріст Δx. Тоді функція дістане приріст

$$\Delta_x z = (f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$

який зветься ***частинним приростом функції по змінній*** x у точці $M_0(x_0, y_0)$.

Аналогічно визначається частинний приріст функції по змінній y в точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то вона називається ***частинною похідною функції*** $z = f(x, y)$ у точці M_0 по змінній x і записується одним із позначень: $z'_x(x_0, y_0)$; $f'_x(x_0, y_0)$; $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$; $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$; $D_x z$, $D_x f(x_0, y_0)$ (символ ∂ читається як *де округла*). Якщо замінити x_0, y_0 на x, y, то дістанемо

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.}$$

Аналогічно, вважаючи, що x — стала, а y — змінна, визначають частинну похідну по y:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

і позначають z'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, f'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $D_y z$, $D_y f(x_0, y_0)$.

З означення випливає, що частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по змінній x є звичайною похідною від функції однієї змінної x при фіксованому значенні змінної y, а похідна по y є похідною від функції однієї змінної y при фіксованому значенні змінної x. Тому частинні похідні обчислюють за формулами й за правилами знаходження похідних функції однієї змінної.

■ **Приклад 10.8**. *Знайти частинні похідні функції* $f(x, y) = 4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6$ у точці $M(2; 3)$.

Обчислюємо:

$$f(x, 3) = 12x^2 + 135x - 3x + 6 - 6 = 12x^2 + 132x;$$

$$f'(x, 3) = 24x + 132;$$

при $x = 2$ матимемо $f'(2; 3) = 180$. Таким чином, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=2\\y=3}} = 180.$

Далі

$$f(2, y) = 16y + 10y^3 - 6 + 2y - 6 = 10y^3 + 18y - 12.$$

Ця функція змінної y має похідну $30y^2 + 18$. При $y = 3$ дістанемо 288. Отже, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=2\\y=3}} = 288.$

■ **Приклад 10.9**. *Знайти загальні формули для частинних похідних функції* $f(x, y)$ *із прикладу 10.8.*

Вважатимемо y сталою й скористуємося звичайними правилами диференціювання. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6)}{\partial x} = 8xy + 5y^3 - 3.$$

Аналогічно при фіксованому x дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(4x^2y + 5xy^3 - 3x + 2y - 6)}{\partial y} = 4x^2 + 15xy^2 + 2.$$

Якщо підставити в ці формули $x = 2$, $y = 3$, то матимемо

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=2\\y=3}} = 8 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot 3^3 - 3 = 180;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\substack{x=2\\y=3}} = 4 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 \cdot 3^2 + 2 = 288.$$

■ **Приклад 10.10**. *Знайти частинні похідні функції* $z = x^y$ $(x > 0)$.

Частинні похідні цієї функції $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y\,x^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$. Перша з них обчислюється як похідна степеневої функції від x (при $y = \text{const}$), а друга — як похідна показникової функції від y (при $x = \text{const}$).

■ **Приклад 10.11.** *Розглянемо функцію двох змінних, що має частинні похідні в точці, в якій вона розривна.*

Нехай

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ в точці (0; 0), оскільки $f(x, 0) = f(0, y) = 0$. З іншого боку, $f(0; 0) = 0$ і в кожному околі, який містить точку (0; 0), є точки (x, y) такі, що $f(x, y) = 1$. Отже, $f(x, y)$ розривна в точці (0; 0).

10.4.1. Диференційовність функцій

Диференційовність функції багатьох змінних у точці M визначається так само, як диференційовність у точці функції однієї змінної.

➡ **Означення 10.22.** *Функцію $z = f(x, y)$ називають* ***диференційовною в точці*** *$M_0(x_0, y_0)$, якщо її повний приріст Δz у цій точці можна подати у вигляді*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \tag{10.3}$$

де A, B — числа, а α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ функції.

Зауважимо, що

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Оскільки $\left|\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \le 1$, $\left|\dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right| \le 1$, то величина $r(\Delta x, \Delta y) = \alpha\dfrac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \beta\dfrac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ і $r(0; 0) = 0$. Це дає змогу записати формулу (10.3) у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ r(\Delta x, \Delta y). \tag{10.3a}$$

Відомо: якщо функція однієї змінної диференційовна в точці, то вона неперервна й має похідну в цій точці. Справедливе й обернене твердження: якщо функція однієї змінної має похідну в точці, то вона диференційовна в цій точці.

У випадку функції двох і більшого числа змінних ми не можемо розраховувати на те, що з існування частинних похідних у точці випливатиме неперервність і диференційовність функції в точці. При обчисленні частинних похідних у точці ми користувалися лише значеннями функції на вертикальному та горизонтальному відрізках, які проходять крізь дану точку. Тому не дивно, що тільки з існування частинних похідних не випливає навіть неперервність функції (див. приклад 10.11).

Теорема 10.15 (необхідна умова диференційовності функції). Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, причому $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = A$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = B$, де A, B — коефіцієнти з формули (10.3).

Доведення

Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M_0, то справедливе співвідношення (10.3)

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Звідси при $\Delta y = 0$ дістанемо

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x,$$

де $\alpha(\Delta x, 0)$ — нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$.

Поділимо дану рівність на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$. Матимемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [A + \alpha(\Delta x, 0)] = A.$$

За означенням похідної $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$. Отже, похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ існує й дорівнює A.

Аналогічно доводиться, що в точці $M_0(x_0, y_0)$ існує частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = B$.

- *Зауваження.* Якщо частинні похідні функції в точці не існують, то така функція недиференційовна в цій точці.

Теорема 10.16. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то вона неперервна в цій точці.

Доведення

З рівності (10.3) випливає: якщо $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, то $\Delta z \to 0$, що й означає неперервність функції $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ (див. означення 10.16).

Обернені твердження теорем 10.15 і 10.16 несправедливі, тобто з неперервності функції двох змінних у точці, а також з існування її частинних похідних у цій точці ще не випливає диференційовність функції.

■ **Приклад 10.12**. Функція $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ неперервна в точці (0; 0), але в ній не має похідних. Дійсно, якщо $y = 0$, то $z = \sqrt{x^2} = |x|$, а ця функція не має похідної в точці $x = 0$. Аналогічно, якщо $x = 0$, то $z = \sqrt{y^2} = |y|$, а ця функція не має похідної в точці $y = 0$. Отже, згідно з теоремою 10.15 функція $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ недиференційовна в точці (0; 0).

■ **Приклад 10.13**. Функція $z = \sqrt{|xy|}$ неперервна на всій площині xOy; при цьому $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ в точці (0; 0). Але дана функція в точці (0; 0) недиференційовна. Справді, в противному разі відповідно до співвідношення (10.3) і теореми 10.15 виконувалася б рівність

$$\Delta z = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\, r(\Delta x, \Delta y),$$

де $r(0; 0) = 0$, тобто $\sqrt{|\Delta x\, \Delta y|} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\, r(\Delta x, \Delta y)$. Якщо в цій рівності взяти $\Delta x = \Delta y$, то

$$|\Delta x| = \sqrt{2}\, |\Delta x|\, r(\Delta x, \Delta x),$$

звідки $r(\Delta x, \Delta x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Отже, $r(0; 0) \neq 0$. Ця суперечність доводить наше твердження.

Теорема 10.17 (достатня умова диференційовності). Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в деякому δ-околі точки $M_0(x_0, y_0)$ і ці похідні неперервні в точці M_0, то функція диференційовна в цій точці.

Доведення

Надамо змінним x та y приростів Δx і Δy відповідно таких, щоб точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ не вийшла за межі того δ-околу, про який ідеться в теоремі. Повний приріст Δz запишемо у вигляді

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) -$$

$$-f(x_0, y_0+\Delta y)]+[f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)].$$

Різницю в перших дужках $[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)]$ можна розглядати як різницю двох значень функції однієї змінної $f(x, y_0+\Delta y)$ на кінцях відрізка $[x_0, x_0+\Delta x]$. За умовою теореми в довільній точці цього відрізка функція $f(x, y_0+\Delta y)$ має похідну, а отже, є неперервною. Тому до неї на цьому відрізку можна застосувати теорему Лагранжа:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0+\Delta y)=f'_x(c_1, y_0+\Delta y)\,\Delta x,$$

де $c_1 \in (x_0, x_0+\Delta x)$.

Аналогічно різницю в других дужках можна подати у вигляді

$$f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f'_y(x_0, c_2)\Delta y,$$

де $c_2 \in (y_0, y_0+\Delta y)$.

Отже, $\Delta z=f'_x(c_1, y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0, c_2)\Delta y$. Похідні f'_x та f'_y неперервні в точці $M_0(x_0, y_0)$, тому

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(c_1, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0, y_0);$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_y(x_0, c_2)=f'_y(x_0, y_0).$$

Це означає, що $f'_x(c_1, y_0+\Delta y)=f'_x(x_0, y_0)+\alpha(\Delta x, \Delta y)$; $f'_y(x_0, c_2)= =f'_y(x_0, y_0)+\beta(\Delta x, \Delta y)$, де $\alpha(\Delta x, \Delta y)\to 0$, $\beta(\Delta x, \Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Підставивши ці рівності у формулу (10.3), дістанемо

$$\Delta z=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

а це означає, що функція $z=f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$.

◆ ***Наслідок.*** *Із неперервності частинних похідних у точці випливає неперервність самої функції в цій точці.*

10.4.2. Похідні складних функцій

Теорема 10.18. Нехай на множині $D\in\mathbf{R}^2$ визначено складну функцію $z=f(u, v)$, де $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, і функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ у деякому околі точки (x_0, y_0) мають неперервні частинні похідні по x і y, а функція $f(u, v)$ має неперервні частинні похідні по змінних u, v у деякому околі точки (u_0, v_0), де $u_0=u(x_0, y_0)$, $v_0=v(x_0, y_0)$. Тоді складна функція $z= =f[u(x, y), v(x, y)]$ диференційовна в точці (x_0, y_0), причому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (10.4)$$

Доведення

За умовою теореми функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні в деякому околі точки (x_0, y_0). Отже, згідно з теоремою 10.17 вони диференційовні в точці (x_0, y_0), тобто

$$\Delta u = A_1\Delta x + B_1\Delta y + \alpha_1\Delta x + \beta_1\Delta y;$$

$$\Delta v = A_2\Delta x + B_2\Delta y + \alpha_2\Delta x + \beta_2\Delta y,$$

де A_1, A_2, B_1, B_2 — сталі, а $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Якщо надати приросту лише аргументу x, то дістанемо

$$\Delta_x u = A_1\Delta x + \alpha_1\Delta x; \quad \Delta_x v = A_2\Delta x + \alpha_2\Delta x, \tag{10.5}$$

де $A_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $A_2 = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, α_1, α_2 — нескінченно малі при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Прирости $\Delta_x u$, $\Delta_x v$ зумовлюють приріст функції $z = f(u, v)$, який позначимо $\Delta_x z$. Оскільки за умовою теореми функція $f(u, v)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки (u_0, v_0), то вона диференційовна в цій точці й

$$\Delta_x z = A\Delta_x u + B\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v, \tag{10.6}$$

де $A = \dfrac{\partial f}{\partial u}$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial v}$, а α, β — нескінченно малі при $\Delta_x u \to 0, \Delta_x v \to 0$.

Підставивши вирази (10.5) у рівності (10.6), дістанемо

$$\Delta_x z = A(A_1\Delta x + \alpha_1\Delta x) + B(A_2\Delta x + \alpha_2\Delta x) + \alpha(A_1\Delta x + \alpha_1\Delta x) +$$
$$+ \beta(A_2\Delta x + \alpha_2\Delta x) = (AA_1 + BA_2)\Delta x + (A\alpha_1 + B\alpha_2 + \alpha A_1 + \beta A_2 +$$
$$+ \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2)\Delta x = (AA_1 + BA_2)\Delta x + \gamma\Delta x,$$

де $\gamma = A\alpha_1 + B\alpha_2 + \alpha A_1 + \beta A_2 + \alpha\alpha_1 + \beta\alpha_2$ — нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(AA_1 + BA_2)\Delta x + \gamma\Delta x}{\Delta x} =$$
$$= AA_1 + BA_2 + \lim_{\Delta x \to 0} \gamma = AA_1 + BA_2,$$

тобто $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Аналогічно доводиться, що $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Ці вирази показують, що частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в точці (x_0, y_0), а тому складна функція $z = f(u(x, y), v(x, y))$ диференційовна в цій точці.

- *Зауваження.* Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох змінних x, y, причому кожна зі змінних x, y є функцією від змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, які диференційовні в точці t. Тоді складна функція $z = f(x(t), y(t))$ диференційовна в точці t і

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.} \qquad (10.7)$$

Якщо $z = f(x, y)$, а $y = \varphi(x)$, то $z = f(x, \varphi(x))$ — складна функція x. У цьому разі похідна $\frac{dz}{dx}$ має вигляд

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.} \qquad (10.8)$$

■ **Приклад 10.14**. *Знайти* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *та* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *для функції* $z = \ln(u^2 + v^2)$, де $u = xy$, $v = x + y$.

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v^2}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2 + v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$, то за формулами (10.4)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v^2}\, y + \frac{2v}{u^2 + v^2}\, 1 = \frac{2xy^2 + 2(x + y)}{x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v^2}\, x + \frac{2v}{u^2 + v^2}\, 1 = \frac{2x^2y + 2(x + y)}{x^2 + y^2 + x^2y^2 + 2xy}.$$

■ **Приклад 10.15**. *Знайти* $\frac{dz}{dx}$, *якщо* $z = \arcsin\frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Згідно з формулою (10.8) дістаємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Отже,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Підставивши замість y його вираз через x, матимемо

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

■ **Приклад 10.16.** *Знайти частинні похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *та* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *для функції* $z = t^2 + 1$, де $t = \sin x + \cos y$.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y}$. Оскільки $\frac{dz}{dt} = 2t$, $\frac{\partial t}{\partial x} = \cos x$, $\frac{\partial t}{\partial y} = -\sin y$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = 2t\cos x$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cos x\,(\sin x + \cos y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2t\,(-\sin y)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2\sin y\,(\sin x + \cos y)$.

■ **Приклад 10.17.** *Знайти похідну* $\frac{dz}{dt}$, *якщо* $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $y = t^2$, $x = t^3 + 1$.

Згідно з формулою (10.7) дістаємо: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$; $\frac{dy}{dt} = 2t$; $\frac{dx}{dt} = 3t^2$. Тому

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{y}{x^2 + y^2}3t^2 + \frac{x}{x^2 + y^2}2t = \frac{-t^4 + 2t}{t^6 + t^4 + 2t^3 + 1}.$$

Похідну $\frac{dz}{dt}$ можна було б знайти, підставивши значення x та y у вираз для z; дістанемо $z = \operatorname{arctg}\frac{t^2}{t^3 + 1}$ і

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{1 + \frac{t^4}{(t^3 + 1)^2}}\,\frac{2t\,(t^3 + 1) - 3t^4}{(t^3 + 1)^2} = \frac{-t^4 + 2t}{t^6 + t^4 + 2t^3 + 1}.$$

Похідні $\frac{dz}{dt}$ збігаються.

10.4.3. Диференціювання функцій трьох і більшого числа змінних

Узагальнення понять частинних похідних та диференційовності для функцій трьох і більшого числа змінних цілком очевидні. Так, якщо $(x, y, z) \to f(x, y, z)$ — функція, визначена на деякій відкритій множині $D \subset \mathbf{R}^3$, то частинна похідна цієї функції по z у точці (x_0, y_0, z_0) — це похідна від функції однієї змінної $z \to f(x_0, y_0, z)$ у точці $z = z_0$. Ця частинна похідна позначається $\frac{\partial f}{\partial z}$, або $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{(x_0, y_0, z_0)}$, або $\frac{\partial}{\partial z}f(x_0, y_0, z_0)$, або $f'_z(x_0, y_0, z_0)$. Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta z}.$$

Для функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначеної на відкритій множині $D\subset \mathbf{R}^n$, частинним приростом функції f в точці $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ по змінній x_j із приростом Δx_j називається величина

$$\Delta_{x_j}(f(\bar{x})=f(x_1,\ldots,x_j+\Delta x_j,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n).$$

Частинною похідною по x_j у точці $\bar{x}$ називається границя

$$f'_{x_j}=\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}=\lim_{\Delta x_j\to 0}\frac{\Delta_{x_j}f(\bar{x})}{\Delta x_j},\quad j=1;\,2;\ldots;n,$$

якщо вона існує.

Функція $f(x, y, z)$ трьох змінних називається *диференційовною в точці* (x_0, y_0, z_0), якщо при всіх (x, y, z) з околу точки (x_0, y_0, z_0) справджується рівність

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}.$$

Функція $z=f(\bar{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ називається *диференційовною в точці* $\bar{x}^0$, якщо в околі точки $\bar{x}^0$ її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z=f(\bar{x}^0+\Delta x)-f(\bar{x}^0)=$$
$$=a_1\Delta x_1+a_2\Delta x_2+\ldots+a_n\Delta x_n+|\Delta\bar{x}|\,r(\Delta\bar{x}),\qquad(10.9)$$

де $\Delta\bar{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n)$, $r(\Delta\bar{x})$ неперервна в точці $\bar{0}=(0;\ldots;0)$ і $r(\bar{0})=0$.

Диференційовна функція буде неперервною.

Теорема 10.19. Нехай функція $f(\bar{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ визначена в точці $\bar{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ і в деякому околі цієї точки. Якщо $f(\bar{x})$ диференційовна в точці $\bar{x}^0$, то вона має в ній частинні похідні, значення яких є коефіцієнтами при $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ у формулі (10.9). Якщо функція f у точці $\bar{x}^0$ та її околі має частинні похідні, неперервні в точці $\bar{x}^0$, то функція f диференційовна в точці $\bar{x}^0$.

Теорема 10.19 узагальнює теореми 10.5 і 10.17 і доводиться аналогічно.

Отже, приріст функції $z=f(\bar{x})$ у точці $\bar{x}^0$

$$\Delta z=\frac{\partial f(\bar{x}^0)}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f(\bar{x}^0)}{\partial x_2}\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(\bar{x}^0)}{\partial x_n}\Delta x_n+|\Delta\bar{x}|\,r(\Delta\bar{x}).\qquad(10.10)$$

Справедлива теорема про диференціювання складної функції.

Теорема 10.20. Нехай функція n змінних $F(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ диференційовна в точці $N(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$ і задано n функцій m змінних $u_1 = u_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, u_n = u_n(x_1, x_2, \ldots, x)$, диференційовних у точці $M(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ і таких, що $u_i^0 = u_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0), i = 1; 2; \ldots; n$,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = F(u_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_m)).$$

Тоді ця функція диференційовна в точці M, і при $j = 1; 2; \ldots; m$ справджуються рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_j},$$

де всі похідні по u беруться в точці N, а по x — у точці M.

Розглянемо тепер векторні диференційовні функції багатьох змінних.

Нехай функція $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$ визначена в області D n-вимірного простору $\mathbf{R}^n$ і набуває значень у m-вимірному просторі $\mathbf{R}^m$. Якщо в цих просторах вибрати певні базиси й записати $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, то можна виразити векторну функцію $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ за допомогою m числових функцій:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(\bar{x}) \equiv f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(\bar{x}) \equiv f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(\bar{x}) \equiv f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Нехай функція $\bar{f}(\bar{x})$ диференційовна при $\bar{x} = \bar{c}, \bar{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Тоді для довільного вектора $\bar{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ справедлива рівність

$$\bar{f}(\bar{c} + \bar{h}) - \bar{f}(\bar{c}) = \bar{f}'(\bar{c})\bar{h} + o(\bar{h}), \qquad (10.11)$$

яка визначає лінійний оператор $\bar{f}'(\bar{c}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Як і довільному лінійному операторові, що діє з $\mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}^m$ (див. п. 2.5), оператору $\bar{f}'(\bar{c})$ можна поставити у відповідність $m \times n$-матрицю. Для цього потрібно рівність (10.11) записати в координатній формі:

$$f_i(\bar{c} + \bar{h}) - f_i(\bar{c}) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}'(\bar{c})h_j + o_i(\bar{h}),\ i = 1;\ 2;\ \ldots,\ m.$$

Величини $f_{ij}'(\bar{c})$ ($i = 1; 2; \ldots; m; j = 1; 2; \ldots; n$) і є елементами матриці $\bar{f}'(\bar{c})$ відносно вибраних базисів. Оскільки коефіцієнти головної лінійної частини приросту довільної числової функції є її частинними похідними по відповідних змінних, то

$$f'_{ij}(\bar{c}) = \frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j} \quad (i = 1;\ 2;\ \ldots;\ m;\quad j = 1;\ 2;\ \ldots;\ n).$$

Отже, матриця лінійного оператора $\bar{f}'(\bar{c}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ складена з частинних похідних і має вигляд

$$\bar{f}'(\bar{c}) \cong \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{c})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\bar{c})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\bar{c})}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(\bar{c})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\bar{c})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\bar{c})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(\bar{c})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\bar{c})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\bar{c})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{10.12}$$

Цю матрицю називають ***матрицею Якобі*** й позначають через

$$\left(\frac{\partial f_i(\bar{c})}{\partial x_j}\right) \text{ або } \left(\frac{\partial (f_1, f_2, \ldots, f_m)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right).$$

При $n = m = 1$ матриця Якобі складається з одного елемента, тотожного звичайній похідній дійсної функції по дійсній змінній. Для числової функції $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n дійсних змінних $m = 1$ і матриця Якобі має один рядок:

$$\left(\frac{\partial f(\bar{c})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\bar{c})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{c})}{\partial x_n}\right) = \operatorname{grad} \bar{f}(\bar{c}).$$

Для m функцій однієї дійсної змінної ($n = 1$): $\bar{y} = \bar{f}(x)$

$$y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),\ \ldots,\ y_m = f_m(x)$$

матриця Якобі перетворюється на матрицю-стовпець:

$$f'(c) = (f_1'(c), f_2'(c), \ldots, f_m'(c))^*.$$

Якщо $m = n$, то матриця Якобі квадратна:

$$\bar{f}'(\bar{c}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\bar{c})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\bar{c})}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n(\bar{c})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(\bar{c})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Її визначник, що є важливою характеристикою відображення $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$ при $\bar{x} = \bar{c}$, називається ***якобіаном*** відображення $\bar{f}(\bar{x})$ при $\bar{x} = \bar{c}$ і позначається $\det \left\| \dfrac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \right\|$.

Нехай вектор-функція m змінних $\bar{z}=\bar{z}(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\bar{z}=(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ диференційовна в точці $N(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ і задано m функцій $y_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i=\overline{1, m}$, диференційовних у точці $M(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, таких, що $y_i^0 = y_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $i=1; 2; \ldots; m$. Вектор-функція $\bar{z}=\bar{z}(\bar{y}(\bar{x}))$ у точці $M(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ має похідну $\bar{z}'(\bar{x})$, матриця Якобі якої обчислюється за формулою

$$\bar{z}'(\bar{x})=\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1} & \frac{\partial z_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1} & \frac{\partial z_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Рівність (10.13) називається ***правилом множення матриць Якобі***. Коротше його можна записати так:

$$\left(\frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_p)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)=\left(\frac{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_p)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}\right)\left(\frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right) \quad (10.14)$$

або для довільних фіксованих $j = 1; 2; \ldots; p$; $i = 1; 2; \ldots; n$

$$\frac{\partial z_j}{\partial x_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial z_j}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}. \quad (10.15)$$

Якщо $j = 1$, тобто $z = z(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $y_k = y_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1; 2; \ldots; m$, то формула диференціювання складної функції має вигляд

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{\partial z}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\frac{\partial z}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}, \quad i=1; 2; \ldots; n. \quad (10.16)$$

У формулах (10.13)—(10.16) усі похідні по y_k беруться в точці N, а по x_i — у точці M.

10.5 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

10.5.1. Означення диференціала

Нагадаємо: якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то її повний приріст

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta xy)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (10.17)$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

Означення 10.23. ***Диференціалом диференційовної в точці*** $M(x, y)$ ***функції*** $z = f(x, y)$ *називається головна, лінійна відносно приростів* Δx *та* Δy *частина повного приросту цієї функції в точці* M:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \qquad (10.18)$$

Ураховуючи теорему 10.17, співвідношення (10.18) можна переписати так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, диференціалами незалежних змінних x та y назвемо їх прирости, тобто $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді повний диференціал можна записати у вигляді

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.} \qquad (10.19)$$

Вирази $d_x z = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx$ та $d_y z = \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ називаються *частинними диференціалами функції* $z = f(x, y)$ по x та y відповідно. Отже,

$$dz = d_x z + d_y z, \qquad (10.20)$$

тобто повний диференціал дорівнює сумі частинних диференціалів.

Приклад 10.18. *Знайти повний диференціал функції* $z = xy + x^2 - 2y$.

Правило 1. Знайдемо повний диференціал за означенням. Зафіксуємо точку $M(x, y)$ і надамо змінним x та y приростів Δx та Δy відповідно. Тоді повний приріст функції в точці M буде

$$\Delta z = [(x + \Delta x)(y + \Delta y) + (x + \Delta x)^2 - 2(y - \Delta y)] - [xy + x^2 - 2y] =$$
$$= (2x + y)\Delta x + (x - 2)\Delta y + (\Delta x)(\Delta y) + (\Delta x)^2.$$

Отже,

$$dz = (2x + y)\,dx + (x - 2)dy.$$

Правило 2. Для того щоб використати формулу (10.19), знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2.$$

Тоді згідно з формулою (10.19) дістанемо

$$dz = (2x + y)dx + (x - 2)dy.$$

Теорема 10.21 (інваріантність форми першого диференціала). Диференціал функції $z = f(x, y)$ інваріантний, тобто формула $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ зберігає свій вигляд незалежно від того, чи є x та y незалежними змінними, чи функціями інших змінних.

Доведення

Нехай $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, де s, t — незалежні змінні, причому функції g та h диференційовні в точці $M(s, t)$. Тоді $z = f(g(s, t), h(s, t))$ має похідні по s та t і

$$dz = \frac{\partial z}{\partial s}ds + \frac{\partial z}{\partial t}dt. \tag{10.21}$$

Обчислимо $\frac{\partial z}{\partial s}$ та $\frac{\partial z}{\partial t}$:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Отже,

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)ds + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)dy =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial z}{\partial t}dt\right).$$

Ураховуючи, що

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s}ds + \frac{\partial x}{\partial t}dt, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s}ds + \frac{\partial y}{\partial t}dt,$$

дістанемо формулу

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{10.22}$$

яка за виглядом тотожна формулі (10.21).

- *Зауваження.* Диференціал функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ записується у вигляді

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

10.5.2. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0)$, то зі співвідношень (10.17) і (10.18) випливає, що різниця між повним приростом і диференціалом функції в точці M_0

$$\Delta z - dz = \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

нескінченно мала при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ вищого порядку, ніж відстань $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ між точками $M_0(x_0, y_0)$ та $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Оскільки $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right| \le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right| \le 1$, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho} + \beta\frac{\Delta y}{\rho}\right) = 0.$$

Отже, $\Delta z - dz = o(\rho)$. Якщо при досить малих Δx, Δy відкинути величину $o(\rho)$, то дістанемо наближену формулу

$$\Delta z \approx dz, \tag{10.23}$$

звідки для функції двох змінних матимемо

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy.$$

Позначивши $a = x_0 + \Delta x$, $b = y_0 + \Delta y$, дістанемо

$$f(a, b) \approx f(x_0, y_0) + \\ + f'_x(x_0, y_0)(a - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(b - y_0). \tag{10.24}$$

Цю формулу використовують у наближених обчисленнях. На ній базується **алгоритм знаходження наближених значень величини** K.

I. Подаємо величину K у вигляді значення деякої функції $f(x, y)$ у точці (a, b): $K = f(a, b)$.

II. Добираємо такі x_0, y_0, щоб точка (x_0, y_0) була близькою до точки (a, b) і щоб значення $f(x_0, y_0)$ легко обчислювалися.

III. Обчислюємо $f(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

IV. Підставляємо добуті значення у формулу (10.24).

■ **Приклад 10.19.** *Обчислити наближено* $(1{,}04)^{2{,}02}$.

I. Тут $K = (1{,}04)^{2{,}02}$. Візьмемо $f(x, y) = x^y$, $x > 0$. Тоді $K = f(a, b)$, де $a = 1{,}04$, $b = 2{,}02$.

II. Виберемо $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

III. $f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$ і $f(x_0, y_0) = 1^2 = 1$, $f'_x(x_0, y_0) = 2 \cdot 1^{2-1} = 2$, $f'_y(x_0, y_0) = 1^2 \ln 1 = 0$.

IV. За формулою (10.21) дістанемо

$$f(a, b) \approx 1 + 2(1{,}04 - 1) + 0(2{,}02 - 2) = 1{,}08.$$

Отже, $(1{,}04)^{2{,}02} \approx 1{,}08$.

Розглянемо застосування повного диференціала, а точніше формули (10.23) для оцінки похибки при наближених обчисленнях.

Нехай є величина $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Відшукуючи значення x_k, $k = 1; 2; \ldots; n$ з експерименту, припускаємося похибок Δx_k, $k = 1; 2; \ldots; n$. При цьому похибка обчислення значення z за неточними даними x_k, $k = 1; 2; \ldots; n$ становить

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Оцінимо похибку Δz за відомими похибками Δx_k:

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Похибки Δx_k, $k = 1; 2; \ldots; n$ можуть бути як додатними, так і від'ємними. Тому, перейшовши в останній формулі до абсолютних величин, дістанемо нерівність

$$|\Delta z| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| |\Delta x_2| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| |\Delta x_n|, \qquad (10.25)$$

яка й дає оцінку похибки Δz через відомі похибки Δx_k.

■ **Приклад 10.20.** *Гіпотенуза прямокутного трикутника* $x = 100$ м $\pm$ 2 м, *а гострий кут* $\varphi = 30° \pm 1°$. *З якою точністю можна знайти протилежний цьому кутові катет?*

Довжину катета позначимо через z. Тоді $z = x \sin\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \sin\varphi$, $\dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = x\cos\varphi$. Згідно з формулою (10.25) матимемо

$$|\Delta z| \le |\sin\varphi|\,|\Delta x| + |x\cos\varphi|\,|\Delta\varphi|.$$

Виберемо $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi}{180}$, $x = 100$, $\Delta x = \pm 2$. Тоді

$$|\Delta z| \le \left|\sin\frac{\pi}{6}\right| 2 + \left|100\cos\frac{\pi}{6}\right| \frac{\pi}{180} \approx 1 + 1{,}5 = 2{,}5 \text{ м.}$$

10.5.3. Дотична площина й нормаль до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала

Нехай задано диференційовну функцію $z = f(x, y)$ в області D площини xOy. Її геометричним образом є поверхня S. Вибравши точку $P_0(x_0, y_0) \in D$, знайдемо $z_0 = f(x_0, y_0)$ і, отже, точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить поверхні S. Через цю точку можна провести нескінченну множину ліній, що лежать на поверхні, а отже, і нескінченну множину дотичних до цих ліній у точці M_0. Сукупність цих прямих утворює ***дотичну площину***.

Як відомо з геометрії, рівняння площини, що проходить через точку M_0, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

або

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

де $a = -A/C$; $b = -B/C$.

Для визначення коефіцієнтів a та b нагадаємо, що $f'_x(x_0, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до поверхні S у точці M_0, яка лежить у площині, паралельній площині xOz. Отже, рівняння цієї дотичної має вигляд

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) \end{cases} \tag{10.26}$$

(лінія M_0K_1 на рис. 10.9).

Аналогічно

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \end{cases} \tag{10.27}$$

— рівняння дотичної M_0K_2, що лежить у площині, паралельній площині yOz.

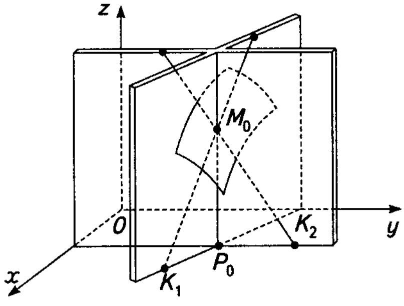


Рис. 10.9

Обидві дотичні прямі лежать у дотичній площині при перетині її площинами $x = x_0$ та $y = y_0$ відповідно, тобто їх рівняння можна записати так: для M_0K_2

$$\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = b(y - y_0); \end{cases}$$

для K_1M_0

$$\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = a(x - x_0). \end{cases}$$

Порівнявши ці рівняння з рівняннями (10.26) та (10.27), дістаємо, що $a = f'_x(x_0, y_0)$, $b = f'_y(x_0, y_0)$. Отже, рівняння дотичної площини має вигляд

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).} \tag{10.28}$$

Нормаллю до поверхні S, заданої рівнянням $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини.

Як відомо з геометрії, рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де m, n, p — координати напрямного вектора $\bar{l}$ прямої, які можна знайти з умови перпендикулярності нормалі до дотичної площини (10.28), нормальний вектор якої $\bar{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$. Вектори $\bar{l}$ та $\bar{n}$ паралельні, а отже, $m : n : p = (f'_x(x_0, y_0) : f'_y(x_0, y_0) : (-1)$.

Рівняння нормалі запишеться так:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.} \tag{10.29}$$

■ **Приклад 10.21**. *Знайти рівняння дотичної площини й нормалі до параболоїда* $z = 4x^2 + 5y^2$ *у точці* M_0 (1; 2; 14).

Обчислимо частинні похідні в даній точці: $z'_x = 8x$, $z'_y = 10y$. При $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ знаходимо: $z'_x = 8$, $z'_y = 20$. Підставивши $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z = 14$, $z'_x = 8$, $z'_y = 20$ у формулу (10.28), дістанемо рівняння дотичної площини $z - 14 = 8(x - 1) + 20(y - 2)$, або $8x + 20y - z - 34 = 0$.

Нормаль до параболоїда в точці M_0 згідно з (10.29) задається рівнянням $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-2}{20}=\dfrac{z-14}{-1}$.

Розглянемо тепер диференціал функції $z = f(x, y)$ у точці M_0 і порівняємо його з рівнянням дотичної площини (10.28).

Вибираючи $dx = \Delta x = x - x_0$, $dy = \Delta y = y - y_0$, $dz = \Delta z = z - z_0$, бачимо, що праві частини рівнянь (10.28) та (10.19) збігаються. Отже, й ліві частини будуть рівними між собою, тобто $\Delta z = dz$, а диференціал функції двох змінних дорівнюватиме приросту аплікати дотичної площини, проведеної до поверхні $z = f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

10.6 ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

10.6.1. Похідна за напрямом

Розглянемо функцію $u = f(x, y, z)$, визначену в деякому околі точки $M(x_0, y_0, z_0)$, і довільний одиничний вектор $\bar{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Проведемо через точку M_0 промінь у напрямі вектора $\bar{l}$ (рис. 10.10) і запишемо його рівняння в параметричній формі:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ \ y = y_0 + t\cos\beta,\ \ z = z_0 + t\cos\gamma,\ \ t \ge 0. \qquad (10.30)$$

Оскільки $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то з формул (10.30) випливає, що

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} =$$
$$= t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t,$$

тобто значення параметра t дорівнює відстані від точки $M(x, y, z)$ променя (10.30), що відповідає даному параметрові, до точки $M(x_0, y_0, z_0)$. Якщо точка $M(x, y, z) \in L$, то

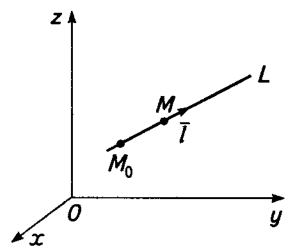


Рис. 10.10

$$f(M) = f(x_0 + t\cos\alpha,\ \ y_0 +$$
$$+ t\cos\beta,\ \ z_0 + t\cos\gamma),\ \ t \ge 0. \qquad (10.31)$$

➡ **Означення 10.24**. ***Похідною від функції*** $u = f(x, y, z)$ ***у точці*** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ***у напрямі вектора*** $\bar{l}$ *називають границю*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{t}, \qquad (10.32)$$

якщо вона існує. Інакше кажучи,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0}. \qquad (10.33)$$

Якщо $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$ — точки лінії (10.30) і $|M_0M| = t$, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \bar{l}} = \lim_{t\to +0} \frac{f(M) - f(M_0)}{t}.$$

Оскільки всі величини в правій частині цієї рівності не залежать від вибору системи координат (вони визначаються функцією f, точкою M_0 і вектором $\bar{l}$), то похідна за напрямом $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}$ у точці M_0 функції $f(x, y, z)$ не залежить від вибору системи координат.

Функції (10.30) лінійні відносно t і, отже, диференційовні по t. Якщо функція $f(x, y, z)$ диференційовна в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то складна функція (10.31) диференційовна в точці $t = 0$.

Обчислимо цю похідну за формулою знаходження похідної складної функції. Тоді

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \qquad (10.34)$$

де згідно з (10.30) $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dt} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dt} = \cos\gamma$. Підставивши ці вирази у формулу (10.34), дістанемо

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (10.35)$$

Значення похідних $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ взяті в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Формула (10.35) дає вираз похідної за напрямом через частинні похідні, причому напрямні косинуси вектора $\bar{l}$ є ваговими множниками, які показують внесок відповідної частинної похідної в похідну за напрямом. Наприклад, якщо $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ($\bar{l}$ збігається з додатним напрямом осі Ox), то $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$; якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ($l \,||\, Oy$), то $\frac{\partial t}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$; якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0$ ($\bar{l} \,||\, Oz$), то $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial f}{\partial z}$.

10.6.2. Градієнт функції

➡ **Означення 10.25.** ***Градієнтом функції*** *$u = f(x, y, z)$* ***у точці*** *$M(x, y, z)$ називають вектор $\left(\frac{\partial f(M)}{\partial x}, \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \frac{\partial f(M)}{\partial z}\right)$ і позначають або* $\operatorname{grad} f$, *або* ∇f (читається *набла еф*).

Отже,

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).} \qquad (10.36)$$

Тут похідні беруться в точці M.

Використовуючи поняття градієнта й скалярного добутку, формулу (10.35) для похідної за напрямом можна записати у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma =$$
$$= (\nabla f, \bar{l}) = |\nabla f|\,|\bar{l}|\cos(\widehat{\nabla f, \bar{l}}) = |\nabla f|\cos\varphi, \qquad (10.37)$$

де φ — кут між векторами ∇f та $\bar{l}$, $|\bar{l}| = 1$.

Як видно з формули (10.37), градієнт функції не залежить від вибору системи координат. Якщо $\nabla f \neq 0$, то напрям градієнта ∇f є єдиним напрямом, в якому в даній точці похідна за напрямом $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}$ набуває найбільшого значення (коли $\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$), що дорівнює $|\nabla f(M)|$. Якщо $\nabla f = \bar{0}$, то в даній точці частинні похідні дорівнюють нулю. Така точка називається *критичною.*

Якщо задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$ і напрям $\bar{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ на площині xOy, то похідна від f у напрямі $\bar{l}$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta, \qquad (10.38)$$

а градієнт функції

$$\operatorname{grad} f \cong \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right). \qquad (10.39)$$

Тут похідні беруться в точці M.

■ **Приклад 10.22.** *Обчислити похідну функції $z = \ln(6x + 7y)$ у точці $M(-2; 2)$ у напрямі вектора $\overline{MM_1}$, де $M_1(2; -1)$.*

Знайдемо одиничний вектор $\bar{l}$, що має заданий напрям: $\overline{MM_1} = (2+2;$ $-1-2) = (4; -3) = 4\bar{i} - 3\bar{j}$, $|\overline{MM_1}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$. Отже, $\bar{l} = \dfrac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} =$ $= \left(\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$.

Обчислимо частинні похідні функції в точці $M(-2; 2)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{6}{6x+7y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{7}{6x+7y}$. Звідси

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = \frac{6}{6(-2)+7\cdot 2} = 3, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y} = \frac{7}{6(-2)+7\cdot 2} = \frac{7}{2}.$$

За формулою (10.38) знайдемо $\dfrac{\partial f(M)}{\partial \bar{l}} = 3\dfrac{4}{5} + \dfrac{7}{2}\left(-\dfrac{3}{5}\right) = 0{,}3$.

Отже, дана функція в точці M зростає в напрямі $\overline{MM_1}$ зі швидкістю 0,3.

■ **Приклад 10.23**. *Довести, що* $\operatorname{grad}|\bar{r}| = \overline{r^0}$, *де* $\bar{r}$ *— радіус-вектор точки* $M(x, y)$, $\overline{r^0}$ *— його одиничний вектор.*

Оскільки $\bar{r}$ — радіус-вектор точки $M(x, y)$, то

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j}, \quad |\bar{r}| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \nabla|\bar{r}| = \frac{\partial|r|}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial|\bar{r}|}{\partial y}\bar{j};$$

$$\frac{\partial|\bar{r}|}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial|\bar{r}|}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тоді

$$\nabla|\bar{r}| = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\bar{j} = \frac{x\bar{i}+y\bar{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|} = \overline{r^0}.$$

10.6.3. Лінії та поверхні рівня

Нехай неперервно диференційовна функція $z = f(x, y)$ описує гірський ландшафт: $z = f(x, y)$ — висота точки земної поверхні, розташованої над точкою (x, y) площини $z = 0$; графік функції $z = f(x, y)$ — поверхня гори. ***Лінія рівня*** — це гладка лінія $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ така, що $f(\varphi(t)\ \psi(t)) = C = \text{const}$. Вважатимемо, що через кожну некритичну точку (x_0, y_0) функції f проходить єдина лінія рівня. Продиференціюємо рівняння $f(\varphi(t)\ \psi(t)) = C$ по t при $t = t_0$. Дістанемо

$$f'_x(x_0, y_0)\,\varphi'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)\,\psi'(t_0) = 0. \qquad (10.40)$$

Тут $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$. Вектор $\varphi'(t_0)\bar{i} + \psi'(t_0)\bar{j}$ — дотичний вектор до нашої лінії. Нехай

$$a = \sqrt{[f'_x(x_0, y_0)]^2 + [f'_y(x_0, y_0)]^2}, \quad b = \sqrt{[\varphi'(t_0)]^2 + [\psi'(t_0)]^2}.$$

Тоді знайдуться такі полярні кути $\theta \in [0; 2\pi)$ та $\beta \in [0; 2\pi)$, що $f'_x(x_0, y_0) = a\cos\theta$, $f'_y(x_0, y_0) = a\sin\theta$, $\varphi'(t_0) = b\cos\beta$, $\psi'(t_0) = b\sin\beta$. Ці рівності дають змогу переписати (10.40) у вигляді

$$(a\cos\theta)(b\cos\beta) + (a\sin\theta)(b\sin\beta) = ab\cos(\beta - \theta) = 0.$$

Отже, $\cos(\beta - \theta) = 0$. Звідси або $\beta = \theta + \dfrac{\pi}{2}$, або $\beta = \theta - \dfrac{\pi}{2}$. І, таким чином, лінія рівня, що проходить через некритичну точку, перпендикулярна до градієнта функції в цій точці (рис. 10.11).

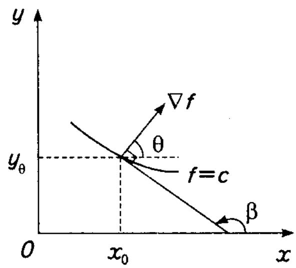


Рис. 10.11

Припустимо, що $z = \varphi(x, y)$, де функція неперервно диференційовна, — рівняння поверхні, на якій функція $u = F(x, y, z)$ набуває сталого значення, тобто

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = C. \qquad (10.41)$$

Така поверхня називається ***поверхнею рівня функції*** $u = F(x, y, z)$. Продиференціювавши (10.41) по x та y, дістанемо

$$F'_x + F'_z\,\varphi'_x = 0, \quad F'_y + F'_z\,\psi'_y = 0. \qquad (10.42)$$

Із рівняння (10.41) випливає, що $(\varphi'_x, \varphi'_y, -1)$ — координати вектора, перпендикулярного до поверхні $z = \varphi(x, y)$ у точці (x, y, z). Із рівностей (10.42) знаходимо

$$\varphi'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \varphi'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Отже, вектор нормалі має вигляд

$$\left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}, -1\right)$$

і паралельний вектору $\nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)$. Таким чином, градієнт функції в кожній точці перпендикулярний до поверхні рівня цієї функції, яка проходить через дану точку.

10.7 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ Й ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

10.7.1. Частинні похідні вищих порядків

Нехай частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ функції $z = f(x, y)$, визначеної в околі точки $M(x, y)$, існують в кожній точці цього околу. В цьому разі частинні похідні — це функції двох змінних x та y, визначені в околі точки M. Ці похідні називатимемо *похідними першого порядку*. Частинні похідні по змінних x та y від функцій $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ у точці M, якщо вони існують, називають *похідними другого порядку* від функції $f(x, y)$ у даній точці й позначають так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y) = f^{(2)}_{x^2}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}(x, y) = f^{(2)}_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}(x, y) = f^{(2)}_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y) = f^{(2)}_{y^2}(x, y).$$

Частинні похідні другого порядку $f''_{xy}(x, y)$ та $f''_{yx}(x, y)$ називаються *мішаними частинними похідними*.

■ **Приклад 10.24**. $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^2 + 5x + 3.$

Знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 2y.$$

Отже,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x + 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x + 6y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 6x + 6y.$$

■ **Приклад 10.25.** $z = \sin(xy)$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy); \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2\sin(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy)) = \cos(xy) - xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy)) = \cos(xy) - xy\sin(xy).$$

У наведених прикладах мішані частинні похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ рівні між собою (див. приклад 10.24). Але, взагалі кажучи, значення мішаних похідних залежать від порядку, в якому здійснюється диференціювання.

■ **Приклад 10.26.** Функція

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

у точці (0; 0) має мішані похідні другого порядку $f''_{xy}(0; 0) \neq f''_{yx}(0; 0)$:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\dfrac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$f''_{yx}(0;0) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f'_x(0;\, \Delta y) - f'_x(0;\, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{\dfrac{\Delta y(-(\Delta y)^4)}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = -1.$$

Аналогічно

$$f'_y(x, y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\dfrac{-2y(x^2 + y^2) - 2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$f'_{xy}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$f''_{xy}(0;0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\dfrac{\Delta x(\Delta x)^4}{(\Delta x)^4}}{\Delta x} = 1.$$

Тобто $f''_{xy}(0; 0) \neq f''_{yx}(0; 0)$.

Відповідь на питання: коли мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, дає така теорема.

Теорема 10.22 (Шварца). Якщо $f''_{yx}(x, y)$ та $f''_{xy}(x, y)$ існують у деякому δ-околі точки $M(x, y)$ і неперервні в самій точці M, то вони рівні між собою в цій точці, тобто справедлива рівність

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Доведення

Розглянемо вираз

$$A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - $$
$$- f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)],$$

де Δx та Δy — довільні й настільки малі числа, що точки $M_1(x, y + \Delta y)$, $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y)$ лежать в δ-околі точки $M(x, y)$.

Введемо допоміжну функцію $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Тоді вираз для A можна розглядати як приріст диференційовної на відрізку $[x, x + \Delta x]$ функції $\varphi(x)$ однієї змінної x:

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x).$$

Застосовуючи до цієї різниці теорему Лагранжа, дістанемо

$$A = \Delta\varphi = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'(x + \Theta_1 \Delta x)\Delta x =$$
$$= [f'_x(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \Theta_1 \Delta x, y)]\Delta x, \quad 0 < \Theta_1 < 1.$$

Вираз у квадратних дужках можна розглядати як приріст диференційовної на відрізку $[y, y + \Delta y]$ функції $f'_x(x + \Theta_1 \Delta x, y)$ однієї змінної y.

Застосовуючи теорему Лагранжа (по змінній y), матимемо

$$A = f''_{yx}(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y, \quad 0 < \Theta_1 < 1, \quad 0 < \Theta_2 < 1. \quad (10.43)$$

З іншого боку, якщо ввести допоміжну функцію $\psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, то

$$A = \Delta\psi = \psi(y + \Delta y) - \psi(y) = f''_{xy}(x + \Theta_3 \Delta x, y + \Theta_4 \Delta y), \quad (10.44)$$
$$0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1.$$

Порівнявши вирази (10.43) та (10.44), дістанемо

$$f''_{yx}(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Theta_2 \Delta y) = f''_{xy}(x + \Theta_3 \Delta x, y + \Theta_4 \Delta y).$$

Якщо в останній рівності перейти до границі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ та врахувати, що похідні f''_{yx} і f''_{xy} неперервні в точці M, то матимемо $f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$, що й доводить теорему.

- *Зауваження.* За аналогією з тим, як вводяться похідні другого порядку, вводяться й похідні третього, четвертого й т. д. порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \ \ldots$$

і доводиться теорема про рівність між собою відповідних неперервних мішаних похідних довільного порядку.

10.7.2. Диференціали вищого порядку

Для функції $z = f(x, y)$, диференційовної в точці $M(x, y)$, було введено поняття диференціала й виведено формулу

$$dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy. \tag{10.45}$$

Називатимемо вираз dz диференціалом першого порядку. Домовимося позначати диференціал літерами d та δ.

Нехай функції $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ диференційовні в точці M. Розглядатимемо dx і dy у формулі (10.45) як сталі множники. Тоді функція dz буде функцією двох змінних x та y, диференційовною в точці $M(x, y)$. Їх диференціал має вигляд

$$\begin{aligned}\delta(dz) &= \delta\,[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy] = \\ &= [f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy]'_x\,\delta x + \\ &+ [f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy]'_y\,\delta y.\end{aligned} \tag{10.46}$$

Диференціал $\delta(dz)$ від диференціала dz у точці M, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається *диференціалом другого порядку функції* $z = f(M)$ у точці M і позначається d^2z. Отже, $\delta(dz)\big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} = d^2 z$. Тоді

$$\begin{aligned}d^2 z &= (f'_x dx + f'_y dy)'_x\,dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y\,dy = f''_{xx}(dx)^2 + f''_{xy}dx\,dy + \\ &+ f''_{yx}dx\,dy + f''_{yy}(dy)^2 = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dx\,dy + f''_{yy}(dy)^2.\end{aligned}$$

Аналогічно диференціал $\delta(d^2z)$ від d^2z, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається *диференціалом третього порядку функції* $z = f(M)$ і позначається d^3z і т. д. Диференціал $\delta(d^{n-1}z)$ при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ називається *диференціалом n-го порядку* й позначається $d^n z$. Тоді

$$d^3 z = f'''_{x^3}(dx)^3 + 3f'''_{x^2y}(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(dy)^3;$$

$$d^n z = f_{x^n}^{(n)}(dx)^n + nf_{x^{n-1}y}^{(n)}(dx)^{n-1}dy + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \times$$
$$\times f_{x^{n-k}y^k}^{(n)}(dx)^{n-k}(dy)^k + \ldots + f_{y^n}^{(n)}(dy)^n.$$

Формула для $d^n z$ нагадує розклад двочлена в n-му степені за формулою Ньютона. Тому її можна записати символічно:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y).$$

Аналогічно попередньому виводимо, що диференціал n-го порядку функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначається за формулою

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

■ **Приклад 10.27**. *Знайти $d^2 z$ для функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.*

Оскільки

$$f'_x = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = \frac{-x}{x^2+y^2}, \quad f''_{xy} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f''_{x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

то

$$d^2 z = \frac{-2xy(dx)^2 + 2(x^2-y^2)dx\,dy + 2xy(dy)^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

10.7.3. Формула Тейлора для функції двох змінних

Функцію двох змінних можна подати у вигляді суми многочлена n-го степеня та деякого залишкового члена. Справедлива така теорема.

Теорема 10.23. Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервно диференційовна до $(n+1)$-го порядку включно в деякому δ-околі точки $M(x, y)$. Нехай точка $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ також належить цьому околові. Тоді приріст $\Delta f = f(M_1) - f(M) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ у точці M можна подати у вигляді

$$\Delta f = df(x,y) + \frac{d^2 f(x,y)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x,y)}{n!} +$$
$$+ \frac{d^{(n+1)} f(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Theta_2 \Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \Theta < 1 \qquad (10.47)$$

Формулу (10.47) називають ***формулою Тейлора для функції*** $z = f(x, y)$.

Доведення

Розглянемо функцію $F(t) = f(x + t\Delta x, y + t\Delta y)$, $t \in [0; 1]$. Вона має $(n + 1)$ похідну по $t \in [0; 1]$. Тоді

$$F'(t) = f'_x(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta y =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x + t\Delta x, y + t\Delta y);$$

$$F''(t) = f''_{xx}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)\Delta x\Delta y +$$
$$+ f''_{yy}(x + t\Delta x, y + t\Delta y)(\Delta y)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x + t\Delta x, y + t\Delta y).$$

За методом математичної індукції знаходимо:

$$F^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x + t\Delta x, y + t\Delta y);$$

$$F^{(n+1)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + t\Delta x, y + t\Delta y).$$

З іншого боку, згідно з формулою Маклорена для функції $F(t)$

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\Theta)}{n+1!}t^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1;$$

при $t = 1$ дістанемо

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}, \qquad (10.48)$$

де

$$F(1) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(M_1);$$
$$F(0) = f(x, y) = f(M);$$

$$F'(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x,y)=df(x,y);$$

$$F''(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x,y)=d^2 f(x,y);$$

$$F^{(n)}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x,y)=d^n f(x,y);$$

$$F^{(n+1)}(\Theta)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y)=$$

$$=d^{n+1}f(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y).$$

Із формули (10.48) знаходимо

$$F(1)-F(0)=f(M_1)-f(M)=df(x,y)+\frac{d^2 f(x,y)}{2!}+$$

$$+\ldots+\frac{d^n f(x,y)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y)}{(n+1)!},$$

що й треба було довести.

- *Зауваження.* При $n=0$ із формули (10.47) дістанемо формулу Лагранжа для функції двох змінних:

$$\Delta f=df(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y)=f'_x(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y)\Delta x+$$

$$+f'_y(x+\Theta\Delta x,\ y+\Theta\Delta y)\Delta y,\quad 0<\Theta<1, \tag{10.49}$$

з якої випливає: якщо $f'_x=f'_y=0$, то повний приріст дорівнює нулю й функція $z=f(x,y)$ — стала.

Для функції $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ аналогічно попередньому виводимо формулу Тейлора

$$\Delta f=df(\bar{x})+\frac{d^2 f(\bar{x})}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(\bar{x})}{n!}+\frac{d^{n+1}f(\bar{x}+\Theta\Delta\bar{x})}{(n+1)!}, \tag{10.50}$$

де $\bar{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $0<\Theta<1$.

10.8 НЕЯВНІ ФУНКЦІЇ

Нехай функцію двох змінних $F(x, y)$ визначено на деякій підмножині D площини $\mathbf{R}^2$ змінних x, y. Прирівняємо її до нуля:

$$F(x, y) = 0. \tag{10.51}$$

Множину всіх точок (x, y), для яких виконується рівність (10.51), позначимо через E.

Якщо існує така функція $y = f(x)$ однієї змінної, визначена на деякій множині X числової прямої, що для довільного $x \in X$ справедливе включення $(x, f(x)) \in E$ і виконується рівність

$$F(x, f(x)) = 0, \tag{10.52}$$

то функцію $y = f(x)$ називають ***неявною функцією***, яка визначається рівнянням (10.51)

■ **Приклад 10.28**. *Розглянемо рівняння еліпса*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \tag{10.53}$$

Воно неявно задає нескінченну множину функцій, визначених на відрізку $X \in [-3; 3]$. Так, функціями, що задаються рівнянням (10.53), є (рис. 10.12, *а*—*в* відповідно)

$$f_1(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2};$$

$$f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2};$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, \text{ якщо } 0 \le x \le 3, \\ -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}, \text{ якщо } -3 \le x < 0. \end{cases}$$

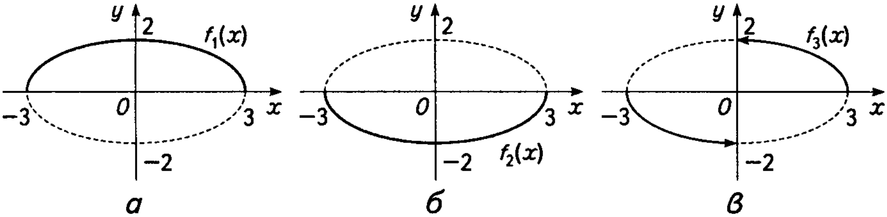


Рис. 10.12

Якщо накласти додаткові умови, які має задовольняти неявна функція, задана рівнянням (10.53), то можливо, що така функція буде єдиною. Наприклад, якщо вимагати, щоб функція f була невід'ємною на відрізку [–3; 3], то лише одна неявна функція f_1 задовольнятиме цю умову.

■ **Приклад 10.29**. Якщо координати точки (x_0, y_0) задовольняють рівняння (10.53), тобто

$$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1,$$

$y_0 \neq 0$ і $U = U(x_0, y_0)$ — деякий круговий окіл точки (x_0, y_0), який не перетинається з віссю Ox, то існує єдина неявна функція f, що задається рівнянням (10.53), графік якої міститься в околі U (рис. 10.13).

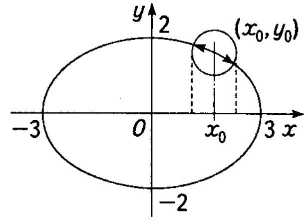


Рис. 10.13

Постає запитання: які властивості повинна мати функція F, щоб неявна функція f була єдиною? Відповідь дає теорема, яку ми сформулюємо без доведення.

Теорема 10.24. Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0.$$

Якщо функція $F(x, y)$, неперервна в деякому околі U точки (x_0, y_0), має в цьому околі частинну похідну $F_y(x, y)$, неперервну в точці (x_0, y_0), і

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y'(x_0, y_0) \neq 0,$$

то знайдуться такі околи $U(x_0)$ та $U(y_0)$ точок x_0 і y_0 відповідно, що для довільного $x \in U(x_0)$ існуватиме єдиний розв'язок $y \in U(y_0)$ рівняння (10.51). Цей розв'язок $y = f(x)$ неперервний на $U(x_0)$ і $y_0 = f(x_0)$.

Якщо, крім того, в деякому околі точки (x_0, y_0) існує частинна похідна $F_x'(x_0, y_0)$, неперервна в точці (x_0, y_0), то функція f має в точці x_0 похідну й

$$f'(x_0) = -\frac{F_x'(x_0, y_0)}{F_y'(x_0, y_0)}. \qquad (10.54)$$

◆ ***Наслідок**. Якщо справджуються умови теореми й, крім того, частинні похідні функції F неперервні в околі точки (x_0, y_0), то неявна функція f має в деякому околі точки x_0 неперервну похідну.*

● *Зауваження 1*. Формула (10.54) дає змогу записати рівняння дотичної до плоскої кривої, заданої рівнянням $F(x, y) = 0$.

Якщо (x_0, y_0) — точка цієї кривої і в ній для функції F справджуються умови теореми 10.24, то в околі точки (x_0, y_0) крива має явне рівняння $y = f(x)$, для якого $y_0 = f(x_0)$ і

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{10.55}$$

Оскільки рівняння дотичної до графіка функції f у точці (x_0, y_0) має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,$$

то, підставивши в це рівняння вираз (10.55) для похідної $f'(x_0)$, знаходимо

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \tag{10.56}$$

— рівняння дотичної до кривої, заданої неявно.

■ **Приклад 10.30**. *Обчислити похідну* $\frac{dy}{dx}$ *із рівняння*

$$x^3 + y^2 - 5x + 4y = 0.$$

Тут $F(x, y) = x^3 + y^2 - 5x + 4y$. Отже, $F'_x(x, y) = 3x^2 - 5$, $F'_y(x, y) = 2y + 4$. За формулою (10.54) знаходимо

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 5}{2y + 4}.$$

■ **Приклад 10.31**. *Записати рівняння дотичної до кривої* $x^3 + y^3 - 4xy = 0$ *у точці* $M_0(2; 2)$.

Оскільки $F(x, y) = x^3 + y^3 - 4xy$, то $F'_x(x, y) = 3x^2 - 4y$, $F'_y(x, y) = 3y^2 - 4x$. Отже, $F'_x(2; 2) = 4$, $F'_y(2; 2) = 4$. Згідно з (10.56) рівняння шуканої лінії

$$4(x - 2) + 4(y - 2) = 0,$$

або

$$x + y - 4 = 0.$$

● *Зауваження 2.* Випадок одного рівняння з більш як двома невідомими, тобто

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0, \tag{10.57}$$

розглядається аналогічно. Необхідно тільки у формулюваннях теореми 10.24 під x розуміти точку $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-вимірного простору $\mathbf{R}^n$, а під околом $U(M_0)$ точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — її окіл в $\mathbf{R}^n$.

Якщо функція F, неперервна в околі точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$, має в цьому околі похідну по y, неперервну в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$, і $F(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0) = 0$, $F'_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0) \neq 0$, то існують такі околи $U(M_0)$ та $U(y_0)$ точок M_0 і y_0, що рівняння (10.51) має єдиний розв'язок

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в околі $U(M_0, y_0) = \{(M, y) = (x_1, x_2, ..., x_n, y)\colon M \in U(M_0),$ $y \in U(y_0)\}$ точки $(M_0, y_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ і цей розв'язок неперервний у всіх точках околу $U(M_0, y_0)$.

Якщо, крім того, існують частинні похідні F'_{x_i}, $i = 1; 2; ...; n$, неперервні в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)$, то функція f має частинні похідні в точці M_0 і

$$f'_{x_i}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = -\frac{F'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)}{F'_y(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_0)}. \tag{10.58}$$

У випадку, коли рівняння $F(x, y, z) = 0$ визначає z як неявну функцію x та y, частинні похідні цієї функції обчислюються за формулами

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{10.59}$$

10.9 ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

10.9.1. Локальний екстремум

Нехай функція $z = f(x, y)$, визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, є неперервною в цій точці.

Означення 10.26. *Функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$* ***локальний максимум,*** *якщо існує такий окіл точки M_0, для довільної точки $M(x, y)$ якого виконується нерівність $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$, і* ***локальний мінімум,*** *якщо $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$.*

Точки локального максимуму й мінімуму функції багатьох змінних називають ***точками екстремуму.***

З означення випливає: якщо $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум, то повний приріст $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ цієї функції в точці M_0 задовольняє в деякому околі точки M_0 одну з нерівностей:

- $\Delta z \le 0$, коли в точці M_0 функція має максимум;
- $\Delta z \ge 0$, коли в точці M_0 функція має мінімум, і навпаки.

Якщо, крім того, при $M \neq M_0$ виконується нерівність $f(M) \neq$ $\neq f(M_0)$, то точку M_0 називають ***точкою строгого локального максимуму (мінімуму)***.

Теорема 10.25 (необхідні умови екстремуму функції багатьох змінних). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум і частинні похідні першого порядку, то в цій точці частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{10.60}$$

Доведення

Нехай, наприклад, $M_0(x_0, y_0)$ є точкою максимуму функції $f(x, y)$. Тоді в деякому околі цієї точки виконується нерівність $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$, у тому числі й $f(x, y_0) \le f(x_0, y_0)$. Це означає, що x_0 є точкою максимуму для функції однієї змінної $f(x, y_0)$. Отже, в точці x_0 справджується необхідна умова екстремуму функції однієї змінної: $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогічно доводиться, що й $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

- *Зауваження 1.* У точці екстремуму $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ диференційовної функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ виконуються рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0. \tag{10.61}$$

- *Зауваження 2.* Якщо функція $z = f(M)$ має екстремум у точці M_0 і є диференційовною в точці M_0, то

$$df(M_0) = 0, \quad \text{або} \quad \operatorname{grad} f(M_0) = 0. \tag{10.62}$$

Точки, в яких перші похідні деякої функції дорівнюють нулю, називають *критичними*.

Як правило, дана функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має скінченні частинні похідні в усій області, й тоді точки, в яких вона досягає екстремуму, слід шукати лише серед критичних точок. Проте трапляються випадки, коли в окремих точках деякі частинні похідні мають нескінченні значення або зовсім не існують (у той час, коли решта похідних дорівнюють нулю). Такі точки також треба віднести до «підозрілих» на екстремум разом із критичними точками.

■ **Приклад 10.32.** *Визначити критичні точки функції* $z = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1$.

Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-1)$ і прирівнюємо їх до нуля: $\begin{cases} x - 2 = 0, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$ Маємо $x = 2$, $y = 1$.

Точка $M(2; 1)$ є критичною. В ній $f(2; 1) = 1$. Якщо ж $(x, y) \neq (2; 1)$, то $(x-2)^2 + (y-1)^2 > 0$, а отже, $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 - 1 > -1$, тобто точка $M(2; 1)$ є точкою мінімуму.

■ **Приклад 10.33**. *Визначити критичні точки функції $z = xy$.*

Тут $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$. Отже, точка $M(0; 0)$ є критичною і $f(0; 0) = 0$. Але для $xy > 0$ $f(x, y) > 0$, а для $xy < 0$ $f(x, y) < 0$. Тобто в цій точці наша функція не має ні мінімуму, ні максимуму. Отже, не всяка критична точка є точкою екстремуму.

Теорема 10.26 (достатні умови екстремуму функції двох змінних). Припустимо, що функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні першого та другого порядків, причому $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Нехай $f''_x(x_0, y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f''_{yy}(x_0, y_0) = C$. Тоді, якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, то $M_0(x_0, y_0)$ є точкою максимуму функції $z = f(x, y)$; якщо $\Delta = AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, то M_0 — точка мінімуму; якщо $\Delta = AC - B^2 < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає.

Доведення

1. Нехай $\Delta > 0$. За формулою Тейлора при $n = 1$ повний приріст функції $f(x, y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ можна записати у вигляді

$$\Delta f = \frac{1}{2!} d^2 f(M'), \tag{10.63}$$

де

$$d^2 f(M') = f''_{xx}(M')(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(M')\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M')(\Delta y)^2;$$

$$M' = M'(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y), \ 0 < \Theta < 1.$$

Із неперервності других похідних у точці M_0 випливає, що

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xx}(M') = f''_{xx}(x_0, y_0) = A;$$

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} f''_{xy}(M') = f''_{xy}(x_0, y_0) = B;$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{yy}(M') = f''_{yy}(x_0, y_0) = C$$

і

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} (A'C' - B'^2) = AC - B^2 = \Delta > 0,$$

де $A' = f''_{xx}(M')$, $B' = f''_{xy}(M')$, $C' = f''_{yy}(M')$.

Виберемо Δx, Δy досить малими, щоб $A' > 0$, коли $A > 0$; $A' < 0$, коли $A < 0$; $A'C' - B'^2 > 0$, коли $\Delta > 0$. Отже, $d^2 f(M') = A'(\Delta x)^2 +$

$+\,2B'\,\Delta x\Delta y + C'(\Delta y)^2$. Оскільки $A' \neq 0$, то співвідношення (10.63) можна переписати так:

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\,\frac{1}{A'}\,[A'^2(\Delta x)^2 + 2A'B'\Delta x\Delta y + A'C'(\Delta y)^2] =$$

$$= \frac{1}{2!}\,\frac{1}{A'}\,[(A'\Delta x + B'\Delta y)^2 + (A'C' - B'^2)(\Delta y)^2].$$

Вираз у квадратних дужках додатний. Тому, якщо $A' > 0$ ($A > 0$), то $\Delta f \geq 0$ і точка M_0 є точкою локального мінімуму, якщо $A' < 0$ ($A < 0$), то $\Delta f \leq 0$, а точка M_0 є точкою локального максимуму.

2. Нехай тепер $\Delta = AC - B^2 < 0$. Якщо взяти $\Delta x = t$, $\Delta y = th$, то формулу (10.63) можна переписати у вигляді

$$\Delta f = \frac{1}{2!}\,t^2\,(A' + 2B'h + C'h^2). \qquad (10.64)$$

Оскільки похідні другого порядку неперервні в точці M_2, то

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} (A' + 2B'h + C'h^2) = A + 2Bh + Ch^2. \qquad (10.65)$$

Ураховуючи, що $B^2 - AC > 0$ (тобто рівняння $Ch^2 + 2Bh + A = 0$ має два розв'язки), можна вказати таких два числа h_1 та h_2, що

$$A + 2Bh_1 + Ch_1^2 > 0, \quad A + 2Bh_2 + Ch_2^2 < 0.$$

Отже, існує δ-окіл точки M_0 такий, що для довільної точки $M(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$ із цього околу в силу (10.65)

$$\begin{aligned} A' + 2B'h_1 + C'h_1^2 &> 0,\\ A' + 2B'h_2 + C'h_2^2 &< 0. \end{aligned} \qquad (10.66)$$

Виберемо тепер $\delta' \leq \delta$ і розглянемо δ-окіл точки M_0. Можна взяти $t > 0$ настільки малим, щоб точка $M_1(x_0 + t,\, y_0 + th)$ належала цьому околові. Тоді, враховуючи нерівності (10.66), із формули (10.64) дістанемо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}\,t^2\,(A' + 2B'h_1 + C'h_1^2) > 0.$$

Аналогічно для значення h_2 матимемо, що в довільному δ-околі точки M_0 існує точка $M_2(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$, для якої

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Таким чином, приріст функції $f(x, y)$ не зберігає знака в як завгодно малому околі точки M_0. Отже, в точці M_0 немає екстремуму.

- *Зауваження.* Якщо $\Delta = 0$, то функція $z = f(x, y)$ у точці M_0 можливого екстремуму може мати екстремум, а може й не мати його.

Сформулюємо **алгоритм дослідження функції** $z = f(x, y)$ **на екстремум.**

I. Знаходимо перші частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

II. Визначаємо критичні точки, тобто точки, в яких $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial z}{\partial e} = 0.$

III. Знаходимо другі частинні похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

IV. Знаходимо для кожної критичної точки значення $A = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_i)$, $B = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}(M_i), C = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_i)$ та $\Delta = AC - B^2$ і робимо висновки на підставі теореми 10.26.

■ **Приклад 10.34.** *Дослідити функцію* $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ *на локальний екстремум.*

I. Знаходимо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$

II. Розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15, \\ 6xy = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{2}{x}, \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, & x_2 = -2, & x_3 = 1, & x_4 = -1, \\ y_1 = 1, & y_2 = -1, & y_3 = 2, & y_4 = -2. \end{cases}$$

Функція z має чотири критичних точки: $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-2;\ -1)$, $M_3(1;\ 2)$, $M_4(-1;\ -2)$.

III. Знаходимо другі похідні: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 6y, \ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$

IV. Для точки $M_1(2;\ 1)$ маємо: $A = 12$; $B = 6$; $C = 12$; $\Delta = 12 \cdot 12 - 6^2 = 108 > 0$, $\Delta > 0$; $A > 0$. Отже, $M_1(2;\ 1)$ є точкою мінімуму; $z_{\min} = z(2;\ 1) = -28$.

Для точки $M_2(-2;\ -1)$: $A = -12$; $B = -6$; $C = -12$; $\Delta = 108 > 0$, $\Delta > 0$, $A = -12 < 0$. Отже, $M_2(-2;\ -1)$ є точкою локального максимуму; $z_{\max} = z(-2;\ -1) = 28$.

Для точки $M_3(1; 2)$: $A = 6$; $B = 12$; $C = 6$; $\Delta = 6 \cdot 6 - 12^2 = -108 < 0$. Отже, в точці M_3 екстремуму немає.

Для точки $M_4(-1; -2)$: $A = -6$; $B = -12$; $C = -6$; $\Delta = 36 - (-12)^2 < 0$. Отже, в точці M_4 екстремуму немає.

Нехай функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена, неперервна й має неперервні похідні до другого порядку включно в околі критичної точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

За формулою Тейлора

$$\Delta = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta x_1^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\Delta x_n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1 \Delta x_2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\Delta x_i \Delta x_k,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, а всі похідні обчислено в деякій точці

$$(x_1^0 + \Theta\Delta x_1, x_2^0 + \Theta\Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Theta\Delta x_n), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Позначимо

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = a_{ik}, \quad i, k = 1; 2; \ldots; n, \quad a_{ik} = a_{ki}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0 + \Theta\Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Theta\Delta x_n)}{\partial x_i \partial x_k} = a_{ik} + \alpha_{ik}, \text{ де } \alpha_{ik} \to 0 \text{ при}$$

$$\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0.$$

Тепер

$$\Delta = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{n}\alpha_{ik}\Delta x_i \Delta x_k\right\},$$

і знак Δ збігається зі знаком першої суми (оскільки α_{ik} — нескінченно малі величини), яка є другим диференціалом функції f у точці $\bar{x}^0$ і являє собою квадратичну форму від змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Квадратичну форму

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k, \quad a_{ik} = a_{ki}$$

від змінних $y_1, \ldots, y_n$ називають *додатно-(від'ємно-)визначеною*, якщо вона набирає додатних (від'ємних) значень для всіх значень аргументів, що одночасно не дорівнюють нулю.

Необхідною й достатньою умовою додатної визначеності квадратичної форми є нерівності (критерій Сільвестра)

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Необхідну й достатню умову від'ємної визначеності квадратичної форми дістають із записаної вище заміною змісту нерівностей через одну (починаючи з першої).

Тепер сформулюємо ***достатні умови існування екстремуму***: якщо другий диференціал, тобто квадратична форма

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \ \Delta x_i \ \Delta x_k \tag{10.68}$$

зі значеннями (10.66) коефіцієнтів є додатно-(від'ємно-)визначеною, то в точці $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ буде мінімум (максимум) функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Якщо квадратична форма (10.68) може набувати значень протилежних знаків, то в точці $\bar{x}^0$ функція $f(x)$ екстремуму не має.

10.9.2. Знаходження найбільших і найменших значень функції

Нехай задано неперервну диференційовну функцію $u = f(\bar{x})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у деякій обмеженій замкненій області $D \subset \mathbf{R}^n$ із границею ∂D.

За теоремою Вейєрштрасса в цій області знайдеться точка $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, в якій функція досягає найбільшого (найменшого) з усіх значень. Якщо точка $\bar{x}^0$ лежить усередині області D, то в ній функція має максимум (мінімум); так що в цьому разі ця точка належить до критичних. Але свого найбільшого (найменшого) значення функція $u = f(x)$ може набувати й на границі ∂D області. Тому, аби знайти найбільше (найменше) значення функції, необхідно визначити критичні точки, обчислити всі значення функції в цих точках і порівняти їх зі значеннями функції на межі ∂D. Найбільше (найменше) з цих значень буде найбільшим (найменшим) значенням функції в усій області D. Найбільше й найменше значення називають ***абсолютним екстремумом***.

■ **Приклад 10.35**. *Знайти абсолютний екстремум функції $z = xy$ в трикутній області D із вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$.*

Дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

отже, критичною є точка $O(0;\ 0)$.

Дослідимо поведінку функції z на межі ∂D (рис. 10.14):

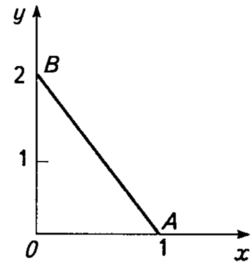


Рис. 10.14

- на відрізку OA: $x = 0$ і $z = 0$;
- на відрізку OB: $y = 0$ і $z = 0$;
- на відрізку AB: $y = 2 - 2x$, $0 \le x \le 1$.

Отже, $z = 2x\,(1 - x)$.

Дослідимо функцію $z = 2x\,(1 - x)$, $0 \le x \le 1$ на екстремум: $z'_x = 2 - 4x$; $2 - 4x = 0$, $x = \frac{1}{2}$; $z''_{xx} = -4 < 0$. Отже, функція $z = 2x\,(1 - x)$ у точці $x = \frac{1}{2}$ досягає максимуму: $z_{\max} = 2\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Порівнявши всі значення функції $z\,(0;\ 0) = 0$, $z\left(\frac{1}{2};\ 1\right) = \frac{1}{2}$, побачимо, що найбільше значення $z_{\text{найб}} = z\left(\frac{1}{2};\ 1\right) = \frac{1}{2}$, а найменше — $z_{\text{найм}} = z(0;\ 0) = 0$, і воно досягається на відрізках OA та OB.

10.9.3. Умовний екстремум функції двох змінних

Досі ми розглядали екстремуми функції, вважаючи, що ті змінні, від яких вона залежить, незалежні між собою. Це абсолютні екстремуми. Перейдемо до розгляду випадку, коли змінні, від яких залежить функція, пов'язані деякими співвідношеннями.

Нехай треба знайти екстремум функції

$$z = f(x,\ y) \tag{10.69}$$

за умови, що змінні x, y задовольняють умову зв'язку

$$\varphi(x,\ y) = 0. \tag{10.70}$$

Якщо функція (10.69) за умови (10.70) має екстремум, то такий екстремум називається ***умовним***, або ***відносним***.

Геометрично це можна розуміти так: функція $z = f(x, y)$ описує в просторі $Oxyz$ деяку поверхню, а рівняння $\varphi(x, y) = 0$ задає в цьому просторі циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі Oz, за напрямну якої править крива, що визначається рівнянням (10.70) у площині xOy. Якщо лінія перетину цих двох поверхонь має внутрішню точку з найменшою або найбільшою аплікатою, то кажуть, що в цій точці функція $z = f(x, y)$ має відносний, або умовний, екстремум.

Дослідити функцію $z = f(x, y)$ на умовний екстремум можна так: знайти функцію $y = y(x)$; розв'язавши рівняння (10.70) відносно y, підставити $y = y(x)$ у рівняння $z = f(x, y)$ і одержану функцію однієї змінної $z = f(x, y(x))$ дослідити на екстремум. Такий спосіб знаходження екстремуму здебільшого досить складний, оскільки потрібно знаходити аналітичний розв'язок рівняння $\varphi(x, y) = 0$. Тому ми розглянемо інший метод знаходження умовних екстремумів — *метод множників Лагранжа.*

Для дослідження функції (10.69) на умовний екстремум складемо функцію Лагранжа

$$\boxed{F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),} \tag{10.71}$$

де λ — множник Лагранжа.

Теорема 10.27 (необхідні умови умовного екстремуму). Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — точка умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$; існують неперервні похідні f'_x, f'_y, φ'_x, φ'_y у точці M_0 і деякому її околі, причому $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ або $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді є таке число λ, що трійка чисел (x_0, y_0, λ) становить критичну точку функції Лагранжа $F(x, y)$, тобто задовольняє систему рівнянь

$$F'_x(x, y) = 0, \ \ F'_y(x, y) = 0, \ \ \varphi(x, y) = 0 \tag{10.72}$$

або

$$f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \ \ f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \ \ \varphi(x, y) = 0. \tag{10.72a}$$

Доведення

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — точка умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$. Якщо $y(x)$ є розв'язком рівняння $\varphi(x, y) = 0$, то $z = f(x, y(x))$ і $\varphi(x, y(x)) = 0$ і виконуються рівності

$$f'_x + f'_y y' = 0, \ \ \varphi'_x + \varphi'_y y = 0$$

при $x = x_0$. Домножимо другу рівність на λ і додамо до першої. Дістанемо

$$(f'_x + \lambda\varphi'_x) + (f'_y + \lambda\varphi'_y)y' = 0.$$

Виберемо λ таким, що $f'_y + \lambda\varphi'_y = 0$. Тоді й $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0$. Оскільки $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ або $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$, то для кожної точки $M_0(x_0, y_0)$ таке λ існує. Отже, для трійки чисел (x_0, y_0, λ) виконуються умови (10.72) і (10.72а), що й треба було довести.

Система (10.72) або (10.72а) є необхідною умовою відносного (умовного) екстремуму функції $z = f(x, y)$. Точки $M_k(x_k, y_k)$, координати яких задовольняють систему (10.72), називають *критичними*. Зауважимо, що точки, в яких f'_x, f'_y не існують, також можуть бути точками екстремуму функції $z = f(x, y)$.

Теорема 10.28 (достатні умови умовного екстремуму). Припустимо, що: 1) $M_0(x_0, y_0)$ — критична точка функції (10.71) для деякого λ, тобто вона задовольняє умови теореми 10.27; 2) функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ двічі неперервно диференційовні на множині, що містить точку M_0:

$$d^2F(M_0) = A(dx)^2 + 2B\,dx\,dy + C\,(dy)^2, \qquad (10.73)$$

де $A = \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x\,\partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2}$; dx, dy задовольняють рівняння зв'язку

$$\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0. \qquad (10.74)$$

Якщо при цьому: 1) $d^2F(M_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 умовний мінімум; 2) $d^2F(M_0) < 0$, то в точці M_0 функція має умовний максимум.

Доведення

Очевидно, що $f(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = F(x, y)$ для всіх x, y, що задовольняють рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Тому для таких x, y

$$df(x, y) = dF(x, y) = F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy$$

для всіх dx і dy, що задовольняють рівняння

$$\varphi'_x(x, y)dx + \varphi'_y(x, y)dy = 0.$$

Отже,

$$d^2 f = d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial F}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial F}{\partial y}d^2 y$$

для всіх dx, dy, що задовольняють рівняння (10.74), оскільки

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}dx\, dy + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}d^2 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}d^2 y = 0$$

для всіх x, y, що задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$. В критичній точці $M_0(x_0, y_0)$: $\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F(M_0)}{\partial y} = 0$. Тому в цій точці

$$d^2 f(M_0) = d^2 F(M_0) = A(dx)^2 + 2B\, dx\, dy + C(dy)^2,$$

де A, B, C та dx, dy визначені в (10.73) і (10.74).

За формулою Тейлора для функції $z = f(x, y)$ у точці M_0

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}d^2 f(M_0') = \frac{1}{2}d^2 F(M_0').$$

Якщо $d^2F(M_0) > 0$ для dx, dy, що задовольняють умову (10.74) в точці M_0, то $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, а отже, функція $f(x, y)$ має в точці M_0 мінімум. Якщо $d^2F(M_0) < 0$, то $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, і функція має в точці M_0 максимум.

■ **Приклад 10.36**. *Знайти екстремум функції* $z = xy$ *за умови, що* $3x + 2y = 1$.

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y) = xy + \lambda(3x + 2y - 1).$$

Необхідною умовою екстремуму є система рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 3\lambda = 0,\ \ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda = 0,\ \ 3x + 2y = 1,$$

звідки знаходимо $\lambda = -\dfrac{1}{12}$, $x = \dfrac{1}{6}$, $y = \dfrac{1}{4}$. Отже, точка $M_0\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}\right)$ є критичною і

$$F(x, y) = xy - \frac{1}{12}(3x + 2y - 1).$$

Аби з'ясувати достатні умови, визначаємо, що $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 1$, а dx, dy задовольняють рівняння зв'язку $3dx + 2dy = 0$, тобто $dy = -\dfrac{3}{2}dx$.

Тоді $d^2F(M_0) = -3(dx)^2 < 0$.

Отже, за теоремою 10.28 функція $z = xy$ за умови, що $3x + 2y = 1$, досягає в точці $M_0\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}\right)$ умовного максимуму $z_{\max} = \dfrac{1}{24}$.

• *Зауваження.* Метод Лагранжа поширюється на випадок довільного числа змінних і умов зв'язку. Нехай задано функцію $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ і умови зв'язку

$$\varphi_l(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ \ l = 1; 2; \ldots; m,\ \ m \le n. \qquad (10.75)$$

Тоді функція Лагранжа матиме вигляд

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m, \tag{10.76}$$

а необхідна умова екстремуму буде задана системою рівнянь відносно $n + m$ невідомих $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$F'_{x_1} = 0,\ F'_{x_2} = 0, \ldots, F'_{x_n} = 0, \ldots, F'_{\lambda_m} = 0. \tag{10.77}$$

Нехай $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — критична точка функції (10.76) для деякого набору $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; функції $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ мають другі неперервні похідні по всіх змінних $x_1, \ldots, x_n$ в околі точки M_0, і матриця (Якобі)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1(M_0)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m(M_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

має відмінний від нуля мінор m-го порядку.

Покладемо для $(a_1, \ldots, a_{n-m})$

$$\Phi(a_1, \ldots, a_{n-m}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x_i\, \partial x_j} a_i a_j,$$

де $(a_{n-m+1}, \ldots, a_m)$ визначаються із системи

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i(M_0)}{\partial x_j} a_j = 0,\ i = 1; 2; \ldots; m.$$

Тоді, якщо $\Phi(a_1, \ldots, a_{n-m}) > 0$, то точка M_0 є точкою строгого умовного мінімуму функції f; якщо $\Phi(a_1, \ldots, a_{n-m}) < 0$, то M_0 — точка строгого умовного максимуму.

10.10 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

При обробці даних експериментальних досліджень виникає необхідність в їх аналітичному описі. Одним зі способів одержання таких формул є метод найменших квадратів. Розглянемо його.

Нехай треба визначити залежність між двома величинами x та y, для яких з експерименту відомо, що значення x_i відповідають значенням y_i. Ці результати експерименту подано в таблиці:

x	x_1	x_2	....	x_n	
y	y_1	y_2	....	y_n	

Розглянемо (x_i, y_i) як прямокутні координати точок на площині. Припустимо, що точки, взяті з таблиці, розташовані на площині так, як показано на рис. 10.15. У цьому разі можна припустити, що між x та y є лінійна залежність

$$y = ax + b. \tag{10.78}$$

Оскільки точки (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) лежать не точно на прямій, а лише біля неї, то формула (10.78) є наближеною. Тому, підставивши значення координат точок у вираз $ax + b - y$, дістанемо рівності

$$\begin{cases} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n, \end{cases} \tag{10.79}$$

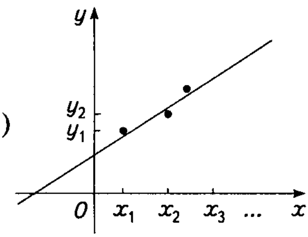


Рис. 10.15

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — числа, що задають відхилення відповідної точки від прямої і називаються *похибками*.

Необхідно дібрати коефіцієнти прямої a та b так, щоб ці похибки були якнайменшими за абсолютним значенням. Для цього й використовується метод найменших квадратів.

Позначимо через S суму квадратів похибок $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$:

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2. \tag{10.80}$$

Ураховуючи вирази для похибок $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, задані в (10.79), дістанемо

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2,$$

тобто

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2. \tag{10.80a}$$

Тут x_i, y_i — задані числа, а коефіцієнти a та b — невідомі, які треба знайти, скориставшись умовами мінімуму S. Отже, можна S вважати функцією від змінних a та b і дослідити цю функцію на мінімум.

Маємо

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i).$$

Прирівнявши ці частинні похідні до нуля, дістанемо лінійну систему двох рівнянь із двома невідомими a та b:

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{10.81}$$

Система (10.81) називається *нормальною системою методу найменших квадратів.*

Розв'язавши (10.81) відносно a та b і підставивши розв'язки у формулу (10.78), дістанемо рівняння шуканої прямої. Покажемо, що розв'язки (a, b) системи (10.81) дають мінімум функції S із (10.80а). Справді,

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial a\, \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Отже,

$$\Delta = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A = \dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$, то в точці $M(a, b)$ функція S має мінімум.

■ **Приклад 10.37**. *Нехай у результаті експерименту знайдено п'ять значень x та відповідних значень y.*

x	-1	1	3	5	8
y	-1	1	4	5	7

Шукатимемо функціональну залежність між x та y у вигляді $y = ax + b$. Для того щоб записати нормальну систему методу найменших квадратів (10.81), обчислимо значення сум при $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 16, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 100, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 95.$$

Тоді система (10.81) матиме вигляд

$$\begin{cases} 100a + 16b = 95, \\ 16a + 5b = 16. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо $a \approx 0{,}897$, $b \approx 0{,}328$. Отже, рівняння прямої: $y = 0{,}897x + 0{,}328$ (рис. 10.16).

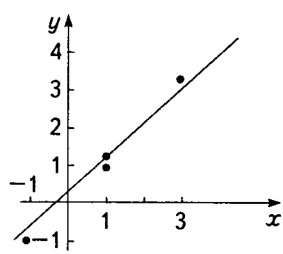


Рис. 10.16

- *Зауваження 1.* Якщо точки, взяті з таблиці даних, розміщені так, що між x та y можна припустити параболічну залежність $y = ax^2 + bx + c$, то коефіцієнти a, b, c треба шукати з умови мінімуму функції S:

$$S = \sum_{i=1}^{n}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Тоді нормальна система методу найменших квадратів для визначення a, b, c матиме вигляд

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{10.82}$$

Підставивши знайдені із системи (10.82) a, b, c у формулу $y = ax^2 + bx + c$, дістанемо шукану залежність між x та y.

- *Зауваження 2.* Якщо точки з таблиці даних наближаються до гіперболи $y = \dfrac{a}{x} + b$, то функція S матиме вигляд

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)^2,$$

а параметри a та b визначатимуться як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} + b\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{x_i}, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{10.83}$$

Системи (10.82) та (10.83) рекомендуємо дістати самостійно.

Глава **11**

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

11.1 ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

11.1.1. Задачі, які приводять до появи подвійного інтеграла. Його означення й властивості

Нехай у площині Oxy задано деяку обмежену область D, у кожній точці якої визначено неперервну функцію $z = f(x, y) > 0$. Графіком цієї функції буде поверхня, розташована над площиною Oxy. Якщо вздовж межі області D переміщати пряму, паралельну осі Oz, то утвориться циліндрична поверхня, обмежена знизу площиною Oxy, а зверху — поверхнею $z = f(x, y)$. Назвемо тіло, обмежене цією замкненою поверхнею, циліндричним брусом і поставимо задачу визначення його об'єму.

Для цього розітнемо область D деякими кривими на області $D_1, ..., D_m$ із площами $S_1, ..., S_m$, утворивши таким чином m циліндричних брусів (рис. 11.1). Об'єм V_i довільного бруса ($i = 1; 2; ...; m$) можна знайти наближено, вважаючи його обмеженим зверху не поверхнею $z = f(x, y)$, а площиною, яка паралельна площині Oxy і проходить через точку N_i на поверхні $z = f(x, y)$ з проекцією P_i на площину Oxy. Отже, висота такого бруса наближено дорівнює числу $f(P_i)$, а об'єм — добутку площі його основи на висоту (див. п. 9.3). Тоді об'єм вихідного бруса наближено дорівнює сумі $V \approx f(P_1)S_1 + f(P_2)S_2 + ... + f(P_m)S_m$. Інтуїтивно ясно, що похибка наближення зменшуватиметься зі зменшенням розмірів областей D_i і залежатиме від того, через яку точку N_i на поверхні проведено площину, паралельну нижній основі бруса.

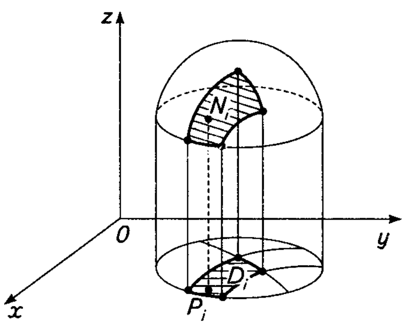


Рис. 11.1

Розглянемо ще одну задачу про визначення маси плоскої пластинки, яка має форму області D при заданій густині маси $\rho(N)$ у довільній точці N цієї області. Для цього знову розітнемо область D на частини $D_1, ..., D_m$ із площами $S_1, ..., S_m$. Вважаючи густину маси в кожній області D_i постійною, знайдемо наближене значення маси пластинки $M \approx \rho(N_1)S_1 + \rho(N_2)S_2 + ... + \rho(N_m)S_m$, де N_i — точка з області D_i, значення густини в якій береться таким, що дорівнює значенню густини в кожній точці області D_i. Ясно, що похибка наближення зменшуватиметься зі зменшенням розмірів областей D_i і залежатиме від того, в якій саме точці N_i області D береться значення густини $\rho(N_i)$ при $i = 1; 2; ...; m$.

Ці два приклади після детальнішого опису понять, згаданих у них, приводять до поняття подвійного інтеграла, яке є природним узагальненням поняття визначеного інтеграла.

➡ **Означення 11.1.** *Криву L на площині Oxy називатимемо* ***гладкою,*** *якщо координати (x, y) її точок можна задати параметрично формулами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервні, мають неперервні похідні першого порядку на деякому проміжку, й ці похідні одночасно не дорівнюють нулю в жодній точці проміжку. Крива L є* ***кусково-гладкою,*** *якщо вона неперервна і її можна розітнути на скінченну кількість гладких кривих. Якщо в обмеженій області D площини Oxy провести скінченну кількість кусково-гладких кривих, які розітнуть область D на скінченну кількість областей, то множину $T = \{D_1, ..., D_m\}$ утворених областей називатимемо* ***подрібненням D.*** *Обмежену функцію $f(x, y)$ називатимемо* ***кусково-неперервною в області D,*** *якщо вона неперервна в кожній з областей D_i.* ***Діаметр області*** *— максимум відстаней між точками цієї області.* Позначимо $\lambda = \lambda(T)$ найбільший із діаметрів областей $D_1, ..., D_m$, які утворюють подрібнення T області D. *Якщо маємо послідовність T_n подрібнень області D і $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$, то цю послідовність називатимемо* ***нормальною.***

➡ **Означення 11.2.** Нехай в області D, обмеженій кусково-гладкою кривою, визначена й обмежена функція $f(x, y)$; $T = \{D_1, ..., D_m\}$ — подрібнення області D. У кожній області D_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і знайдемо суму $\sigma(T) = \sum\limits_{i=1}^{m} f(M_i)S(D_i)$, де $S(D_i)$ — площа області D_i (рис. 11.2). *Цю суму називатимемо* ***інтегральною сумою функції f(x, y) по області D*** *для даного подрібнення області й даного вибору внутрішніх точок M_i.*

Якщо T_n — нормальна послідовність подрібнень області D, $\sigma(T_n)$ — деяка послідовність інтегральних сум, то ***подвійним інтегралом функції f(x, y) по області D*** *називається границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(T_n)$,* *якщо вона існує, не залежить ні від подрібнень T_n, ні від вибору внутрішніх точок M_i при побудові інтегральних сум.* Цей подвійний інтеграл позначається так: $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$.

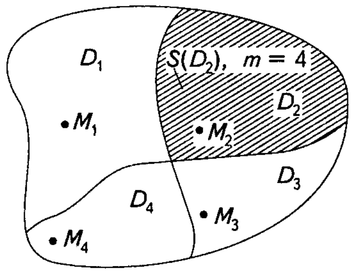


Рис. 11.2

Достатні умови існування подвійного інтеграла (інтегровності функції) доводяться аналогічно тому, як це було зроблено для визначеного інтеграла. Ми обмежимося тільки формулюванням результату.

Теорема 11.1. Якщо область D обмежена кусково-гладкою кривою, а функція $f(x, y)$ визначена, обмежена й кусково-неперервна в ній, то подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ існує.

Властивості подвійного інтеграла

1. *Якщо інтеграл $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$ існує, а c — стала, то справджується формула*

$$\iint\limits_D cf(x, y)dx\,dy = c\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy.$$

2. *Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ інтегровні в області D, то справджується формула*

$$\iint\limits_D (f(x, y) + g(x, y))dx\,dy = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy + \iint\limits_D g(x, y)dx\,dy.$$

3. *Якщо область D розітнути кусково-гладкою кривою на дві частини D_1 і D_2, в кожній з яких функція $f(x, y)$ інтегровна, то справджується формула*

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dx\,dy.}$$

(Ця властивість, яку називають *адитивною властивістю подвійного інтеграла*, справджується й для довільного скінченного подрібнення області D.)

4. *Якщо $f(x, y) = 1$ у кожній точці області D, то $\iint\limits_D dx\,dy = S(D)$ — площа області D.*

5 *Якщо функції $f(x, y)$ і $g(x, y)$ інтегровні в області D і в кожній точці цієї області справджується нерівність $f(x, y) \le$ $\le g(x, y)$, то має місце нерівність*

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy \le \iint_D g(x, y)dx\,dy.$$

6 *Якщо функції $f(x, y)$ і $|f(x, y)|$ інтегровні в області D, то виконується нерівність*

$$\left|\iint_D f(x, y)dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x, y)dx\,dy|.$$

7 *Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, то є така точка $M(x_0, y_0)$ з цієї області, що*

$$\boxed{\iint_D f(x, y)dx\,dy = f(x_0, y_0)\iint_D dx\,dy.}$$

Усі наведені вище властивості подвійного інтеграла аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла й доводяться так само.

11.1.2. Обчислення подвійного інтеграла

Теорема 11.2. Нехай функція $f(x, y)$ обмежена й інтегровна в прямокутнику D, заданому нерівностями $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, і для кожного фіксованого $x \in [a, b]$ існує визначений інтеграл $\int_c^d f(x,y)dy$. Тоді справджується формула

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Доведення

Оскільки функція $f(x, y)$ інтегровна в області D, при обчисленні подвійного інтеграла можна вибрати довільну послідовність подрібнень області D. Розітнемо область D прямими, паралельними осі Ox, які проходять через точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, і прямими, паралельними осі Oy, що проходять через точки $c = y_0 <$ $< y_1 < \ldots < y_m = d$. При цьому утвориться подрібнення області D на прямокутники D_{ij}, у кожному з яких функція має максимум M_{ij} і мінімум m_{ij}, оскільки $f(x, y)$ є обмеженою в області D (рис. 11.3). Проінтегруємо кожну з нерівностей $m_{ij} \le f(\xi_i, y) \le M_{ij}$ на проміжках $[y_{j-1}, y_j]$, використавши властивість 3 визначеного інтеграла, де ξ_i — довільна точка з проміжку $[x_{i-1}, x_i]$. Дістанемо

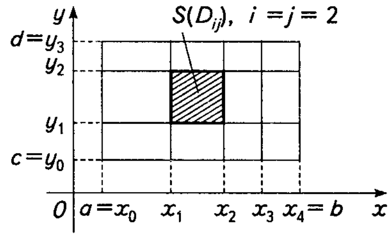


Рис. 11.3

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Додаючи утворені нерівності при $j = 1; 2; \ldots; m$, матимемо

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \int_c^d f(\xi_i, y)dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Якщо кожну з утворених нерівностей помножити на число $(x_i - x_{i-1})$ і результати додати при $i = 1; 2; \ldots; n$, то дістанемо нерівності

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(y_j - y_{j-1})\right)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\int_c^d f(\xi_i, y)dy\right)(x_i - x_{i-1}) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(y_j - y_{j-1})\right)(x_i - x_{i-1}).$$

Аналогічно тому, як це було зроблено для визначеного інтеграла, можна довести, що крайні члени цієї подвійної нерівності є нижньою й верхньою інтегральними сумами для подвійного інтеграла $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$, оскільки число $(y_j - y_{j-1})\ (x_i - x_{i-1})$ дорівнює площі прямокутника D_{ij}, утвореного при подрібненні області D. Середня частина подвійної нерівності є інтегральною сумою для визначеного інтеграла від функції $I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ на проміжку $[a, b]$.

Оскільки існування подвійного інтеграла гарантується умовою теореми, то, вибираючи нормальну послідовність подрібнень T_n, для цих інтегральних сум дістанемо подвійну нерівність $S_{T_n} \le \le \sigma(T_n) \le S^{T_n}$, в якій крайні члени мають спільну границю при $n \to \infty$, і ця границя дорівнює подвійному інтегралові

$\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$. Тоді з теореми про три послідовності випливає рівність $\int\limits_a^b I(x)dx = \iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$, що й потрібно довести.

- *Зауваження 1.* В умові теореми можна переставити місцями x і y, утворюючи при цьому ще одну формулу для обчислення подвійного інтеграла по прямокутній області D. Ця формула аналогічна щойно доведеній і має вигляд

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)dx \right) dy.}$$

- *Зауваження 2.* Розглянувши функцію $F(x, y) = \int\limits_a^x \left(\int\limits_c^y f(u, v)dv \right) du$, де підінтегральна функція неперервна в прямокутнику, можна довести, що для її мішаної частинної похідної виконується рівність $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}(x, y) = f(x, y)$. Це твердження є аналогом теореми про похідну від визначеного інтеграла по змінній верхній межі (властивість 9 визначеного інтеграла).

- *Зауваження 3.* Неважко помітити, що кусково-неперервна функція $f(x, y)$ задовольняє умови доведеної теореми. Це випливає з достатньої умови інтегровності функції $f(x, y)$ в області D, адитивної властивості визначеного інтеграла та інтегровності неперервної на замкненому проміжку функції $f(x, y)$ при довільному фіксованому $x \in [a, b]$.

■ **Приклад 11.1.** *Обчислити інтеграл* $I = \iint\limits_D (6x^2y + 8xy^3)dx\,dy$ *по прямокутнику D, заданому нерівностями* $1 \le x \le 2,\ \ 3 \le y \le 4$.

Цей інтеграл можна обчислити двома різними способами, використавши дві аналогічні формули (див. зауваження 1).

Спочатку дістанемо

$$I = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_3^4 (6x^2y + 8xy^3)dy \right) dx = \int\limits_1^2 (3x^2y^2 + 2xy^4) \Big|_{y=3}^{y=4} dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (21x^2 + 350x)dx = 574.$$

Тут в інтегралі, що стоїть у дужках, вважали змінну x сталою й обчислили первісну $F(y) = 3x^2y^2 + 2xy^4$ функції $f(y) = 6x^2y + 8xy^3$ на проміжку [3; 4], а потім — визначений інтеграл утвореної функції від змінної x.

За іншим способом

$$I = \int_3^4 \left(\int_1^2 (6x^2y + 8xy^3)dx \right) dy = \int_3^4 (2x^3y + 4x^2y^3) \Big|_{x=1}^{x=2} dy =$$

$$= \int_3^4 (14y + 12y^3)dy = 574.$$

Тут в інтегралі, що стоїть у дужках, вважали змінну y сталою й обчислили первісну $F(x) = 2x^3y + 4x^2y^3$ функції $f(x) = 6x^2y + 8xy^3$ на проміжку $[1; 2]$, а потім — визначений інтеграл утвореної функції від змінної y.

Скористаємося зауваженням 3, щоб довести загальну формулу обчислення подвійного інтеграла від неперервної функції по довільній області.

Теорема 11.3. Нехай функція $f(x, y)$ неперервна в області D, заданій нерівностями $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, де функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на проміжку $[a, b]$. Тоді має місце така формула для обчислення подвійного інтеграла:

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Зауважимо, що тут, як і в теоремі 11.2, обчислення інтеграла, що стоїть у дужках праворуч, потрібно здійснювати при фіксованому $x \in [a, b]$.

Для доведення теореми зануримо область D у прямокутник D_1, заданий нерівностями $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. Числа c, d існують, бо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні на проміжку $[a, b]$ і тому є обмеженими (рис. 11.4). Розглянемо також допоміжну функцію $f^*(x, y)$, яка збігається з функцією $f(x, y)$ в кожній точці області D і дорівнює нулю в усіх інших точках. Така функція $f^*(x, y)$, очевидно, буде кусково-неперервною в прямокутнику D_1, і тому для обчислення подвійного інтеграла від неї по цьому прямокутнику можна використати доведену в теоремі 11.2 формулу. Позначимо через D_2 (на рис. 11.4 заштриховано) ту частину прямокутника D_1, точки якої не лежать у D. Послідовно використовуючи означення функції $f^*(x, y)$, адитивну властивість подвійного інтеграла, теорему 11.2, адитивну властивість визначеного інтеграла, дістанемо потрібну формулу:

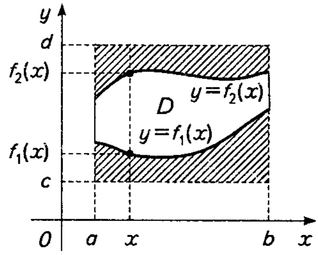


Рис. 11.4

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_D f^*(x,y)dx\,dy = \iint_{D_1} f^*(x,y)dx\,dy -$$

$$-\iint_{D_2} f^*(x,y)dx\,dy = \iint_{D_1} f^*(x,y)dx\,dy = \int_a^b\left(\int_c^d f^*(x,y)dy\right)dx =$$

$$= \int_a^b\left(\int_c^{f_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{f_2(x)}^{d} f^*(x,y)dy\right)dx =$$

$$= \int_a^b\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f^*(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

- *Зауваження 1.* Якщо область D задана нерівностями $c \le y \le d$, $g_1(y) \le \le x \le g_2(y)$, то за відповідних обмежень, накладених на функції $f(x, y)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$, справджуватиметься формула, аналогічна доведеній (обчислення інтеграла в дужках у правій частині рівності здійснюється при сталому y):

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d\left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right)dy.}$$

- *Зауваження 2.* Для обчислення подвійного інтеграла від обмеженої кусково-неперервної функції по області D, обмеженій кусково-гладкою кривою, треба розітнути область D на частини, в кожній з яких функція неперервна, кожну з цих частин зобразити у вигляді об'єднання таких областей, до яких можна застосувати попередню теорему, й скористатись адитивною властивістю подвійного інтеграла. Саме тому щойно доведену формулу називають *загальною формулою обчислення подвійного інтеграла*.

■ **Приклад 11.2.** *Обчислити подвійний інтеграл* $I = \iint_D \sin y\, dx\, dy$ *по області D, обмеженій лініями* $y = 2x$, $2y = x$, $x = \pi$.

Для обчислення скористаємося формулою, доведеною в теоремі 11.3, оскільки область D можна задати нерівностями $0 \le x \le \pi$, $x/2 \le y \le 2x$ (рис. 11.5). Дістанемо

$$I = \int_0^\pi\left(\int_{x/2}^{2x}\sin y\,dy\right)dx = \int_0^\pi (-\cos y)\Big|_{y=x/2}^{y=2x} dx =$$

$$= \int_0^\pi\left(\cos\frac{x}{2} - \cos 2x\right)dx = \left(2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^\pi = 2.$$

Тут в інтегралі, що стоїть у дужках, вважали змінну x сталою й обчислили первісну $F(y) = -\cos y$ функції $f(y) = \sin y$ на проміжку $[x/2, 2x]$, а потім — визначений інтеграл утвореної функції від змінної x.

■ **Приклад 11.3**. *Обчислити подвійний інтеграл* $I = \iint\limits_D (x^2 + y)\,dx\,dy$, *де область* D *обмежена лініями* $y = 2x$, $y = 3 - x$, $y = 0$.

Щоб скористатися формулою, доведеною в теоремі 11.3, потрібно область D (див. зауваження 2) розітнути прямою $x = 1$ на області D_1 і D_2, перша з яких задається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2x$, а друга — нерівностями $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3 - x$ (рис. 11.6). Тоді $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2x} (x^2 + y)\,dy \right) dx + \int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^{3-x} (x^2 + y)\,dy \right) dx$, однак можна простіше обчислити інтеграл, скориставшися зауваженням 1, і, задаючи область D нерівностями $0 \le y \le 2$, $y/2 \le x \le 3 - y$, змінити порядок інтегрування:

$$I = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_{y/2}^{3-y} (x^2 + y)\,dx \right) dy = \int\limits_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy \right) \Bigg|_{x=y/2}^{x=3-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(\frac{(3-y)^3}{3} + y(3-y) - \frac{y^3}{24} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{51}{6}.$$

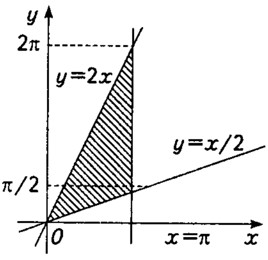


Рис. 11.5

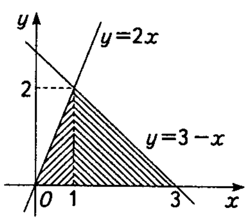


Рис. 11.6

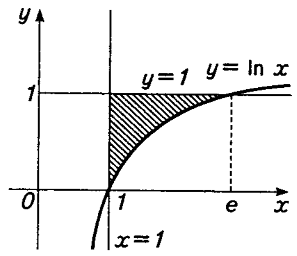


Рис. 11.7

■ **Приклад 11.4**. *Змінити порядок інтегрування в подвійному інтегралі, який обчислюється за формулою* $I = \int\limits_1^e \left(\int\limits_{\ln x}^1 f(x, y)\,dy \right) dx$.

Із доведеної в теоремі 11.3 формули випливає, що область інтегрування D задається нерівностями $1 \le x \le e$, $\ln x \le y \le 1$ (рис. 11.7). Цю область можна задати ще й так: $0 \le y \le 1$, $1 \le x \le e^y$, тому $I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_1^{e^y} f(x, y)\,dx \right) dy$.

11.1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай функції $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$ визначені в кожній точці (u, v) множини Ω, яка розташована в координатній площині O_1uv. Тоді визначене деяке відображення A, що ставить у відповідність кожній точці (u, v) множини Ω деяку точку $(x(u, v), y(u, v))$ координатної площини Oxy. Нехай D — множина всіх точок площини Oxy, які так утворюються (рис. 11.8). Нагадаємо: є [див. формули (10.12)] досить проста умова того, щоб відображення A було взаємно однозначним відображенням множин Ω і D. Для цього достатньо, щоб Ω була обмеженою замкненою областю, в якій функції $x(u, v)$ і $y(u, v)$ мали б неперервні частинні похідні першого порядку і якобіан J_A відображення A

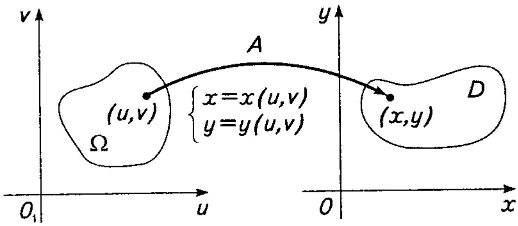


Рис. 11.8

був відмінним від нуля в кожній точці області Ω. У разі виконання цих умов крива, яка обмежує область Ω, при відображенні A перетвориться на криву, що обмежує область D. Нагадаємо також, що якобіан J_A має вигляд

$$J_A = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Виявляється, що площу плоскої фігури, яка має форму області D, можна виразити через подвійний інтеграл по області Ω.

Теорема 11.4 (про заміну в подвійному інтегралі при обчисленні площі). Нехай область Ω обмежена кусково-гладкою кривою, функції $x(u, v)$ і $y(u, v)$ визначені в кожній точці області Ω, мають неперервні частинні похідні першого порядку, і якобіан $J_A(u, v)$ відображення A, яке перетворює область Ω на область D за формулами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, відмінний від нуля в кожній точці області Ω. Тоді

$$\iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_\Omega |J_A(u, v)|\,du\,dv.$$

Приймемо твердження цієї теореми без доведення, а за допомогою нього доведемо загальну формулу.

Теорема 11.5 (про заміну змінних у подвійному інтегралі). Нехай область Ω обмежена кусково-гладкою кривою, функції $x(u, v)$ і $y(u, v)$ визначені в кожній точці області Ω, мають неперервні частинні похідні першого порядку, якобіан $J_A(u, v)$ відображення A, яке перетворює область Ω на область D за формулами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, відмінний від нуля в кожній точці області Ω, а функція $f(x, y)$ неперервна в області D. Тоді має місце формула

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v))\,|J_A(u, v)|\,du\,dv.$$

Доведення

При відображенні A кожне подрібнення $\tau = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ області Ω перетвориться на подрібнення $T = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ області D. Скористаємося теоремою 11.4 для обчислення площі області: $S(D_i) = \iint_{D_i} dx\,dy = \iint_{\Omega_i} |J_A(u, v)|\,du\,dv$. За властивостями 4 і 7 подвійного інтеграла перетворимо утворений праворуч інтеграл: $\iint_{\Omega_i} |J_A(u, v)|\,du\,dv = |J_A(u_i, v_i)|\,S(\Omega_i)$, де $S(\Omega_i)$ — площа області Ω_i, $M_i(u_i, v_i)$ — деяка її точка. При побудові інтегральної суми для функції $f(x, y)$ по області D, що відповідає подрібненню T, у кожній області D_i візьмемо точку $N_i\,(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))$, в яку відобразиться точка $M_i(u_i, v_i)$. Звідси дістанемо рівність інтегральних сум $\sum_{i=1}^{m} f(N_i)S(D_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i))|J_A(u_i, v_i)|S(\Omega_i)$ для подвійних інтегралів, указаних в теоремі. Якщо взяти нормальну послідовність подрібнень τ_n області Ω, то відповідна послідовність подрібнень T_n області D також буде нормальною. Тоді з рівності відповідних інтегральних сум дістанемо рівність їхніх границь при $n \to \infty$. Це й дає рівність подвійних інтегралів, оскільки кожен із них існує за достатньою умовою існування й, отже, не залежить ні від спеціально дібраної нормальної послідовності розбиттів, ні від спеціального вибору внутрішніх точок при побудові інтегральних сум.

- *Зауваження.* Формула, виведена в цій теоремі, залишається правильною, якщо: або умова неперервності, або умова існування частинних похідних функцій $x(u, v)$ та $y(u, v)$, або умова відмінності якобіана від нуля порушується в скінченній кількості точок або на скінченній кількості кусково-гладких кривих.

Застосуємо теорему для відображення смуги, прямокутні координати (φ, ρ) точок якої задані нерівностями $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \rho < \infty$, на координатну площину Oxy за формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ (рис. 11.9). Оскільки модуль якобіана цього відображення дорівнює ρ, дістанемо (враховуючи попереднє зауваження) *формулу переходу до полярної системи координат*:

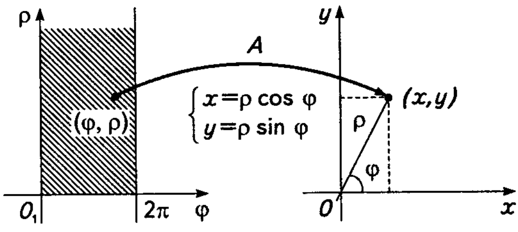


Рис. 11.9

$$\boxed{\iint\limits_D f(x, y)dx\, dy = \iint\limits_\Omega \rho\, f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\, d\varphi\, d\rho.}$$

Таку назву формула дістала тому, що рівності, які задають відображення A, за формою збігаються з формулами, котрі пов'язують прямокутні та полярні координати точок на площині.

■ **Приклад 11.5**. *Обчислити площу фігури, обмеженої лініями* $xy = 9$, $xy = 18$, $y = x$, $y = 2x$ *при* $x > 0$, $y > 0$ *(рис. 11.10, б).*

Аби знайти подвійний інтеграл за теоремою 11.3 по області D, заданій указаними лініями, потрібно розітнути її на чотири частини, що ускладнює обчислення. Урахувавши, що область D можна задати нерівностями $9 \le xy \le 18$, $1 \le y/x \le 2$, здійснимо заміну змінних, вважаючи, що $v = xy$, $u = y/x$. Дістанемо відображення прямокутника Ω, заданого нерівностями $9 \le v \le 18, 1 \le u \le 2$ (рис. 11.10, *а*), в область D за формулами $x = u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}}$, $v^{\frac{1}{2}}$. Знаходячи модуль якобіана цього відображення, дістанемо $|J_A| = 1/(2u)$, звідки за теоремою 11.4 обчислимо площу:

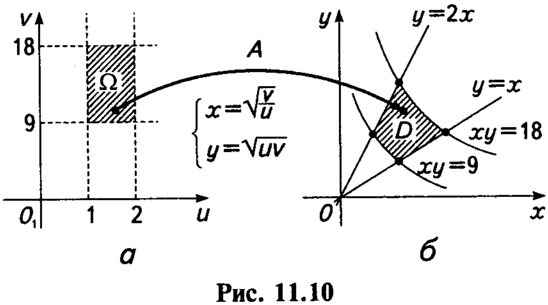


Рис. 11.10

$$S = \iint\limits_D dx\, dy = \iint\limits_\Omega \frac{1}{2u}\, du\, dv = \int_9^{18} \left(\int_1^2 \frac{du}{2u} \right) dv = \frac{9}{2} \ln u \Big|_{u=1}^{u=2} = \frac{9}{2} \ln 2.$$

Приклад 11.6. *Обчислити подвійний інтеграл* $I = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$, *якщо область D обмежена колом* $x^2 + y^2 = Ry$ *(рис. 11.11, б).*

Перейдемо до полярної системи координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ і знайдемо лінію, яка обмежує область Ω, підставивши значення x і y в рівняння даного кола. Дістанемо $\rho = R \times \sin\varphi$, отже, враховуючи, що $\rho \geq 0$, задамо область Ω нерівностями $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq R\sin\varphi$ (рис. 11.11, *а*). Залишається скористатися теоремами 11.5 і 11.3, щоб завершити обчислення:

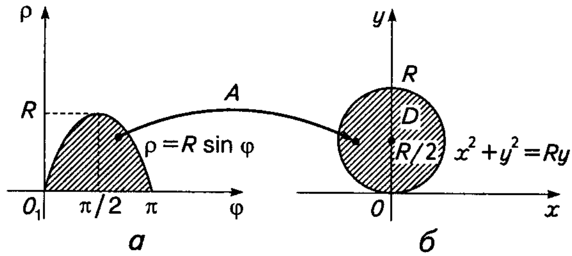


Рис. 11.11

$$I = \iint\limits_\Omega \rho\sqrt{R^2 - \rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,d\rho = \int_0^\pi\left(\int_0^{R\sin\varphi}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\right)d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^\pi (R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R\sin\varphi} d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^\pi (1-\sin^3\varphi)\,d\varphi = \frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

• *Зауваження.* Якщо область D є еліпсом або його частиною, то можна використати узагальнені полярні координати. Відповідне відображення задається формулами $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, де a і b — деякі сталі числа. Модуль якобіана такого відображення дорівнює $ab\rho$.

11.1.4. Деякі застосування подвійних інтегралів до задач геометрії, механіки й фізики

Об'єм тіла. У п. 11.1.1 було розглянуто задачу про об'єм циліндричного тіла. Формулу

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$$

застосовують до обчислення об'єму циліндричного тіла (твірні якого паралельні осі Oz), що обмежене знизу областю D площини Oxy, а зверху — поверхнею $z = f(x, y) > 0$, де функція $f(x, y)$ неперервна в області D.

■ **Приклад 11.7.** *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ і $y = 6 - x$ (рис. 11.12).*

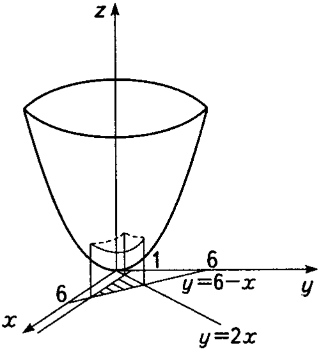


Рис. 11.12

Задане тіло зверху обмежене частиною параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, а знизу — частиною площини Oxy, вміщеною між прямими $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$ (область D на рисунку заштриховано).

За формулою обчислення об'єму матимемо

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dx\,dy.$$

Розставляючи межі інтегрування в подвійному інтегралі, дістанемо

$$V = \int_1^2 dy \int_{y/2}^{6-y} (x^2 + y^2)dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Bigg|_{y/2}^{6-y} dy =$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right]dy = 78\frac{15}{32}.$$

Площа плоскої фігури. Якщо $f(x, y) \equiv 1$, $(x, y) \in D$, то циліндричне тіло перетворюється на прямий циліндр із висотою, яка дорівнює 1. Об'єм такого циліндра чисельно дорівнює площі його основи

$$S(D) = \iint_D dx\,dy.$$

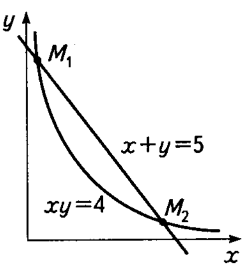


Рис. 11.13

■ **Приклад 11.8.** *Обчислити площу області D, обмеженої лініями $xy = 4$ і $x + y = 5$ (рис. 11.13).*

Область являє собою фігуру, обмежену знизу гіперболою $xy = 4$, а зверху — прямою $y = 5 - x$. Знаходячи точки їх перетину $M_1(1;\ 4)$, $M_2(4;\ 1)$, дістанемо

$$S(D) = \iint_D dx\,dy = \int_1^4 dx \int_{4/x}^{5-x} dy =$$

$$= \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right)dx = \frac{1}{2}(15 - 16\ln 2).$$

Маса. Статичний момент. Центр маси. Момент інерції. Зупинимося на деяких застосуваннях подвійного інтеграла в механіці. Розглянемо на площині Oxy матеріальну пластинку, що має форму замкненої області D, в кожній точці якої густина визначається функцією $\rho = \rho(x, y)$, де $\rho(x, y)$ — неперервна функція в області D. Розітнемо область D на елементарні частини. Елементарна маса становить $dm = \rho\,dS$. Елементарні статичні моменти відносно координатних осей визначаються рівностями $dS_x = y\,dm$; $dS_y = x\,dm$. Тому для всієї області D дістанемо

$$m = \iint_D \rho\,dS;\quad S_x = \iint_D y\rho\,dS;\quad S_y = \iint_D x\rho\,dS.$$

Згідно з визначенням центра маси системи матеріальних точок виконуються умови $mx_c = S_y$, $my_c = S_x$. Отже, центр маси матеріальної області D має координати

$$x_c = \frac{S_y}{m},\quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

■ **Приклад 11.9.** *Знайти координати центра маси однорідної пластинки, обмеженої кривими $y^2 = ax$, $y = x$ (рис. 11.14).*

Координати центра маси даної фігури знайдемо за відповідними формулами. Спочатку обчислимо масу пластинки й статичні моменти:

$$m = \iint_D dx\,dy = \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{ax}} dy = \frac{a^2}{6};$$

$$S_y = \iint_D x\,dx\,dy = \int_0^a x\,dx \int_x^{\sqrt{ax}} dy = \frac{a^3}{15},$$

$$S_x = \iint_D y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_x^{\sqrt{ax}} y\,dy = \frac{a^3}{12}.$$

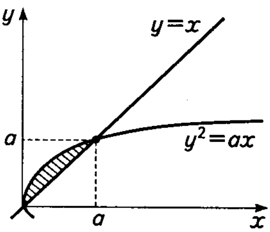


Рис. 11.14

Тоді

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{2}{5}a,\quad y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{a}{2}$$

— координати центра мас.

Елементарні моменти інерції відносно координатних осей визначаються рівностями $dI_x = y^2dm$; $dI_y = x^2dm$. Звідси моменти інерції всієї фігури становлять

$$I_x = \iint_D y^2\rho\,dF;\quad I_y = \iint_D x^2\rho\,dF.$$

■ **Приклад 11.10.** *Знайти момент інерції однорідного трикутника, обмеженого прямими $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, відносно осей Ox і Oy (рис. 11.15).*

За відповідними формулами маємо

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \int_0^1 y^2dy \int_{1-y}^{2-2y} dy = \int_0^1 (y^2 - y)^3\,dy = \frac{1}{12},$$

$$I_y = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_{1-y}^{2-2y} x^2dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 [(2-2y)^3 - (1-y)^3]dy = \frac{17}{12}.$$

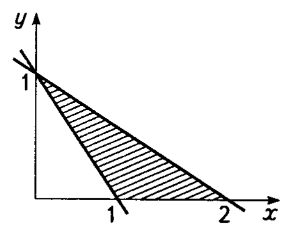


Рис. 11.15

11.1.5. Поняття невласних подвійних інтегралів

Нагадаємо, що невласні визначені інтеграли вводились як для нескінченних проміжків, так і для функцій, необмежених на скінченному проміжку. Аналогічно можна розглядати два типи невласних подвійних інтегралів, однак ми обмежимося лише першим із них.

Означення 11.3. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в необмеженій області D площини Oxy і є інтегровною в кожній обмеженій області, яка цілком належить області D і межею якої є кусково-гладка крива.

Нехай $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots$ — нескінченна послідовність обмежених, укладених одна в одну областей на площині Oxy, що належать області D і мають таку властивість: *хоч би якою була обмежена область $\Omega \subset D$, при всіх достатньо великих n справджуватиметься співвідношення $\Omega \subset D_n$*. Тоді ***невласним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D*** *називається границя* $\lim\limits_{n \to \infty} \iint\limits_{D_n} f(x, y)dx\,dy$, *якщо вона не залежить від вибору послідовності D_n. Якщо така границя не існує, то невласний інтеграл називають* ***розбіжним***.

Теорема 11.6 (достатня умова збіжності невласного подвійного інтеграла). Нехай невід'ємна функція $f(x, y)$ визначена в необмеженій області D і інтегровна в кожній її частині, обмеженій кусково-гладкою кривою. Нехай також $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_n \subset \ldots$ — фіксована нескінченна послідовність обмежених, укладених одна в одну областей на площині Oxy, які належать області D і мають таку властивість: хоч би якою була обмежена область $\Omega \subset D$, при всіх достатньо великих n справджуватиметься співвідношення $\Omega \subset \Delta_n$.

Якщо в разі виконання цих умов послідовність подвійних інтегралів $I_n = \iint\limits_{\Delta_n} f(x, y)dx\,dy$ є обмеженою, то невласний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x, y)dx\,dy$ збіжний.

Доведення

Нехай I — точна верхня межа послідовності I_n. Доведемо, що це число буде границею послідовності $J_n = \iint\limits_{D} f(x, y)dx\,dy$ для довільної послідовності D_n укладених областей, яка має властивість, указану в означенні невласного подвійного інтеграла.

Оскільки (за умовою теореми) для довільної обмеженої області D_n, починаючи з деякого номера m, справджується співвідношення $D_n \subset \Delta_m$, то $J_n \le I_m \le I$. Це випливає з умови $f(x, y) \ge 0$ і означення того, що I — верхня межа послідовності I_n. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді число $I - \varepsilon$ не буде верхньою межею для I_n, отже, для деякого k матимемо нерівність $I - \varepsilon < I_k$. Але ж, за властивістю послідовності D_n, починаючи з деякого номера n, справджується співвідношення $\Delta_k \subset D_n$, тому для подвійних інтегралів дістанемо нерівність $I - \varepsilon < I_k < J_n$. Отже, починаючи з цього самого номера n, справджуються обидві нерівності $I - \varepsilon < J_n$ і $J_n \le I$. За означенням границі послідовності звідси дістанемо потрібне в теоремі твердження, оскільки, починаючи з номера n, матимемо $I - \varepsilon < J_n < I + \varepsilon$.

◆ ***Наслідок***. Нехай функція $f(x, y)$ невід'ємна в області D, заданій нерівностями $a \le x < +\infty$, $c \le y < +\infty$, та інтегровна в кожному скінченному прямокутнику. Нехай також збіжний невласний інтеграл $I = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_b^{+\infty} f(x, y)dy\right)dx$; тоді *збіжним буде й подвійний інтеграл* $\iint\limits_D f(x, y)dx\,dy$, *а його значення дорівнює I.*

Справді, нехай області D_n задані нерівностями $a \le x \le n, c \le y \le n$. Тоді ця послідовність областей задовольняє означення збіжності невласного подвійного інтеграла по області D. Доведення наслідку випливає тепер з попередньої теореми, теореми про обчислення подвійного інтеграла по прямокутнику й означення невласного інтеграла на нескінченному проміжку.

■ **Приклад 11.11**. *Обчислити невласний подвійний інтеграл по області, заданій нерівностями* $0 \le x < +\infty$, $0 \le y < +\infty$, *для функції* $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

Скористаємося попереднім наслідком:

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dy\right)dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = I^2$$

— збіжний інтеграл, тому зазначений в умові невласний подвійний інтеграл збіжний (функція $f(x, y)$ є неперервною в кожній точці площини). Виберемо послідовність областей D_n у вигляді чвертей кругів радіусом $R = n$. Для обчислення подвійного інтеграла по D_n скористаємося заміною змінних: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 < \rho < n$. Враховуючи якобіан $J_A(\rho, \varphi) = \rho$, дістанемо інтеграл по прямокутній області Ω, заданій нерівностями $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 < \rho < n$, який обчислимо за відповідною формулою

$$\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^n \rho e^{-\rho^2} d\rho\right) d\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^n\right) d\varphi = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-n^2}+\frac{1}{2}\right).$$

Визначивши границю виразу справа при $n \to +\infty$, матимемо $\pi/4$ — значення подвійного інтеграла. Побічним результатом цих обчислень є можливість знайти інтеграл Гаусса, який відіграє важливу роль у теорії імовірностей. Цей інтеграл ми вже раніше позначили літерою I, отже, $I^2 = \pi/4$, а тому

$$\boxed{I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

11.1.6. Обчислення площі поверхні

Поверхню П називатимемо *гладкою*, якщо координати (x, y, z) її точок можна задати параметрично формулами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, де функції $x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ неперервні, мають неперервні похідні першого порядку в деякій області й ці похідні одночасно не дорівнюють нулю в жодній точці області. Зокрема, якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна й має неперервні частинні похідні першого порядку в деякій області D і точка (x, y) належить D, то точка з координатами (x, y, z) належатиме гладкій поверхні П (тут за параметри беруться x і y), а область D буде проекцією поверхні П на площину Oxy.

Природно вводиться поняття *кусково-гладкої поверхні.*

➡ **Означення 11.4**. Нехай П — кусково-гладка поверхня. Розітнемо її кусково-гладкими кривими на скінченну кількість поверхонь $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_m$, утворюючи подрібнення T поверхні П. На кожній поверхні Π_i при $i = 1; 2; \ldots; m$ виберемо довільну точку M_i і проведемо через цю точку дотичну площину π_i до поверхні П. Позначимо через ΔS_i площу фігури, утвореної при проектуванні поверхні Π_i на площину π_i паралельно осі Oz, і утворимо суму $\sigma(T) = \Delta S_1 + \; + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_m$.

Якщо існує границя суми $\sigma(T_n)$ при $n \to \infty$, яка не залежить ні від вибору нормальної послідовності T_n, ні від вибору точок M_i при побудові сум $\sigma(T_n)$, то цю границю називають ***площею поверхні*** П.

Теорема 11.7 (про обчислення площі поверхні). Нехай гладка поверхня П задана рівнянням $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ неперервна й має неперервні частинні похідні першого порядку в області D, обмеженій кусково-гладкою кривою. Тоді площа поверхні П існує й обчислюється за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\, dx\, dy.$$

Доведення

Нехай $\{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m\}$ — подрібнення T поверхні П, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ — точка на поверхні Π_i. Тоді $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$, а дотична площина π_i до поверхні П у точці M_i задається рівнянням (див. гл. 10)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i) = z - f(\xi_i, \eta_i).$$

Для площі $S(D_i)$ області D_i, яка є проекцію поверхні Π_i на площину Oxy, і площі ΔS_i проекції поверхні Π_i на дотичну площину π_i матимемо співвідношення $S(D_i) = \Delta S_i \cos\varphi$, де φ — кут між указаними площинами (рис. 11.16). Однак косинус кута між площинами дорівнює скалярному добуткові їхніх векторів нормалей одиничної довжини. Тому, враховуючи, що вектор (0; 0; 1) — нормаль до площини Oxy, а вектор $\bar{n}_i = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i), -\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i), 1\right)$ — нормаль до площини π_i, дістанемо формулу

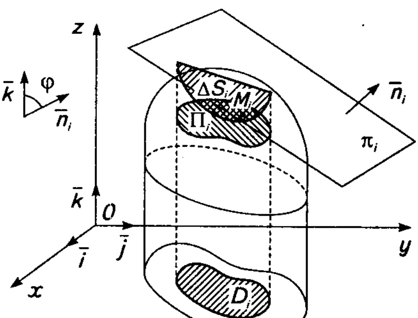


Рис. 11.16

$$\Delta S_i = S(D_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_i)\right)^2}.$$

Додаючи ці рівності при $i = 1; 2; \ldots; m$, матимемо, що $\Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_m$ — інтегральна сума для подвійного інтеграла, вказаного у формулюванні теореми. Оскільки неперервність підінтегральної функції забезпечує її інтегровність, то, побудувавши нормальну послідовність розбиттів T_n для відповідної суми площ $\sigma(T_n)$, дістанемо при $n \to \infty$ границю, яка не залежить ні від вибору нормальної послідовності T_n, ні від вибору точок M_i при побудові сум $\sigma(T_n)$ і дорівнює цьому подвійному інтегралові, а це й потрібно довести.

■ **Приклад 11.12.** *Знайти площу тієї частини поверхні $z = -x^2 - y^2$, яка розташована всередині сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ (рис. 11.17, а).*

Для опису лінії перетину даних поверхні та сфери дістанемо рівняння $z^2 - z = 2$. Це означає, що $z = -1$, і перетином буде коло $x^2 + y^2 = 1$ у площині $z = -1$. Отже, поверхня П задана формулою $z = -x^2 - y^2$, де (x, y) належить області D, заданій на площині Oxy нерівністю $x^2 + y^2 \le 1$ (рис. 11.17, б). Скориставшися доведеною щойно формулою, визначимо площу $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dx\,dy$.

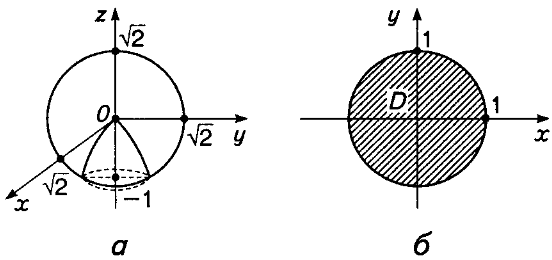


Рис. 11.17

Для обчислення подвійного інтеграла здійснимо заміну змінних $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$. Ураховуючи якобіан $J_A(\rho, \varphi) = \rho$, дістанемо інтеграл

$$S = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho\sqrt{1 + 4\rho^2}\,d\rho\right)d\varphi = 2\pi\int_0^1 (1 + 4\rho^2)^{\frac{1}{2}}\rho\,d\rho = \frac{\pi}{4}\frac{(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

11.2 ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

11.2.1. Основні поняття. Означення потрійного інтеграла

➡ **Означення 11.5.** *Якщо в обмеженій області V простору провести скінченну кількість кусково-гладких поверхонь, які розбивають V на скінченну кількість областей, то множину $T = \{V_1, \ldots, V_m\}$ утворених областей називатимемо* ***подрібненням області V****. Обмежену* *функцію $f(x, y, z)$ називатимемо* ***кусково-неперервною в області V,*** *якщо вона є неперервною в кожній з областей V_i.* ***Діаметр області*** *— максимум відстаней між точками цієї області.* Позначимо через $\lambda = \lambda(T)$ найбільший із діаметрів областей $V_1, ..., V_m$, які утворюють подрібнення T області V. *Якщо маємо послідовність T_n подрібнень області V і $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$, то цю послідовність назвемо* ***нормальною.***

➡ **Означення 11.6.** Нехай в області V, обмеженій кусково-гладкою поверхнею, визначена й обмежена функція $f(x, y, z)$; $T = \{V_1, ..., ..., V_m\}$ — подрібнення області V. У кожній області V_i візьмемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і знайдемо суму $\sigma(T) = \sum\limits_{i=1}^{m} f(M_i)\Delta V_i$, де ΔV_i — об'єм області V_i. *Цю суму називатимемо* ***інтегральною сумою функції $f(x, y, z)$ по області V*** *для даного подрібнення області й даного вибору внутрішніх точок M_i.*

Нехай T_n — нормальна послідовність подрібнень області V, $\sigma(T_n)$ — деяка послідовність інтегральних сум. Тоді ***потрійним інтегралом функції $f(x, y, z)$ по області V*** *називається границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(T_n)$, якщо вона існує, не залежить від подрібнень T_n і від вибору внутрішніх точок M_i при побудові інтегральних сум.* Цей потрійний інтеграл позначається так: $\iiint\limits_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz$.

Достатні умови існування потрійного інтеграла (інтегровності функції) доводяться аналогічно тому, як це було зроблено для визначеного інтеграла. Ми обмежимося тільки формулюванням результату.

Теорема 11.8. Якщо область V обмежена кусково-гладкою поверхнею, а функція $f(x, y, z)$ визначена, обмежена й кусково-неперервна в ній, то потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz$ існує.

11.2.2. Обчислення потрійного інтеграла

Аналогічно тому, як обчислення подвійного інтеграла було зведене до обчислення визначеного (одновимірного) інтеграла, так обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення подвійного.

Теорема 11.9. Нехай функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V, заданій нерівністю $f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)$, де функції $f_1(x, y)$ і $f_2(x, y)$ неперервні в області D, обмеженій кусково-гладкими кривими (рис. 11.18), (x, y) — довільна точка області D. Тоді має місце така формула для обчислення потрійного інтеграла:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right) dx\,dy.$$

- *Зауваження 1.* Тут визначений інтеграл, який стоїть у дужках у правій частині рівності, потрібно обчислювати при постійних x і y.

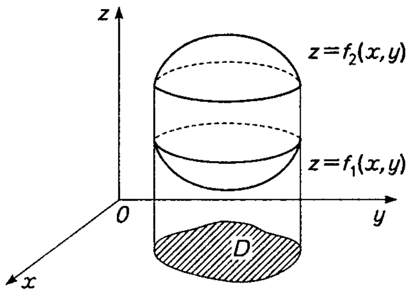


Рис. 11.18

- *Зауваження 2.* Область V, яка розглядається в теоремі, є узагальненням поняття циліндричного бруса, розглянутого в п. 11.1.1. Брус можна задати умовою $0 \le z \le f_2(x, y)$, оскільки він обмежений знизу не поверхнею $z = f_1(x, y)$, як у формулюванні теореми, а площиною Oxy $(z = 0)$.

- *Зауваження 3.* Для доведення цієї теореми можна було б спочатку довести формулу для обчислення потрійного інтеграла по паралелепіпеду, заданому нерівностями $a_1 \le x \le a_2$, $b_1 \le y \le b_2$, $c_1 \le z \le c_2$, а потім поширити цю формулу на загальний випадок, указаний у формулюванні теореми. Для паралелепіпеда формула обчислення потрійного інтеграла має вигляд

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{a_1}^{a_2} \left(\int\limits_{b_1}^{b_2} \left(\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x, y, z)\,dz \right) dy \right) dx.$$

■ **Приклад 11.13**. *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, *де* V *— куб, обмежений площинами* $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

Маємо

$$\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^1 y^2dy \int\limits_0^1 z^3dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^1 x\,dx \int\limits_0^1 y^2dy = \frac{1}{12}\int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{24}.$$

■ **Приклад 11.14**. *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_V (x+y+z)dx\,dy\,dz$, *якщо область* V *обмежена площинами* $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Маємо

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right] dx = \frac{1}{8}.$$

■ **Приклад 11.15**. *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_V 2x\,dx\,dy\,dz$, *де область* V *обмежена площинами* $x=0$, $y=0$, $z=4$ *і параболоїдом* $z=x^2+y^2$ (*рис. 11.19*).

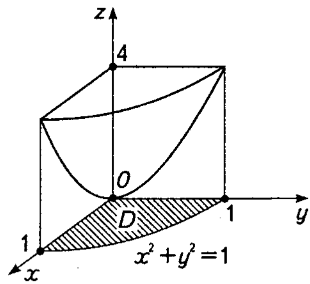


Рис. 11.19

Тут тіло V задається умовами $x^2+y^2 \le z \le 4$, де (x, y) — точка з області D, заданої нерівностями $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x^2+y^2 \le 4$ (чверть круга).

За формулою обчислення потрійного інтеграла дістанемо

$$\iiint\limits_V 2x\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{4} 2x\,dz \right) dx\,dy = \iint\limits_D 2x(4-x^2-y^2)dx\,dy.$$

Для обчислення подвійного інтеграла перейдемо до полярної системи координат. Відображення A задається формулами $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ і має якобіан $|J(\varphi,\rho)|=\rho$, а область Ω задається нерівностями $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \rho \le 2$, звідки

$$\iint\limits_D 2x(4-x^2-y^2)dx\,dy = \iint\limits_\Omega 2\rho^2(4-\rho^2)\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \int\limits_0^2 (8\rho^2 - 2\rho^4)d\rho = \frac{128}{15}.$$

Як видно зі сказаного вище, всі поняття, що використовувалися для введення подвійного інтеграла, природно узагальнюються для тривимірного простору (а в разі потреби — для простору довільної розмірності). Аналогічними є означення потрійного інтеграла та його властивості (див. п. 11.1.2), зокрема, потрійний інтеграл від функції $f(x, y, z)=1$ чисельно дорівнює об'єму області V. Природно, що й заміна змінних у потрійному інтегралі здійснюється й доводиться аналогічно.

Теорема 11.10 (про заміну змінних). Нехай функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ неперервні, мають неперервні частинні похідні в обмеженій замкненій області Δ і задано відображення A, яке кожній точці (u, v, w) області Δ ставить у відповідність деяку точку (x, y, z) області V, а якобіан $J_A(u, v, w)$ відображення A відмінний від нуля в кожній точці області Δ, де

$$J_A = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Нехай також функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V. Тоді справджується така формула заміни змінних у потрійному інтегралі:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_\Delta f(x(u, v, w),\ y(u, v, w),\ z(u, v, w))\,|J_A(u, v, w)|\,du\,dv\,dw.$$

- *Зауваження 1.* Відмінність якобіана J_A від нуля є гарантією того, що відображення A буде взаємно однозначною відповідністю.
- *Зауваження 2.* Обмеження, накладені на відображення A й на функцію $f(x, y, z)$, можуть порушуватися на скінченній кількості кусково-гладких поверхонь.

Розглянемо дві заміни змінних, які найчастіше використовуються в потрійному інтегралі.

1. Нехай у прямокутній системі координат, які позначаються φ, ρ, z, область Δ є частиною множини, заданої нерівностями $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$. Область Δ відображається в область V тривимірного простору з координатами x, y, z за формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ (рис. 11.20). Тоді модуль якобіана відповідного відображення A дорівнює ρ, а формула заміни змінних у потрійному інтегралі, яка називається *формулою переходу до циліндричної системи координат*, має вигляд

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Delta \rho\, f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,d\varphi\,d\rho\,dz.}$$

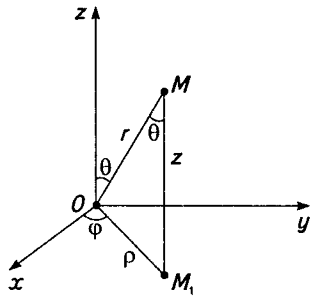


Рис. 11.20

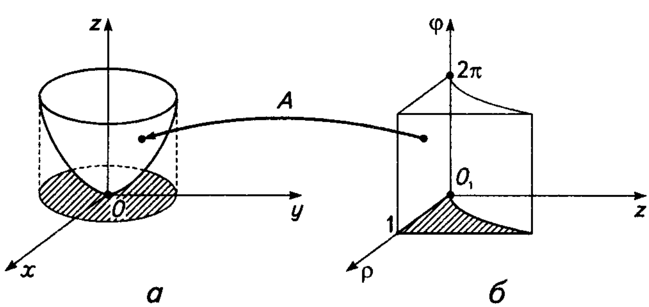
Таку назву формула дістала тому, що при вказаному відображенні A область Δ, задана найпростішими нерівностями $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le R$, $0 \le z \le h$, відображається в прямий круговий циліндр (із радіусом основи R і висотою h).

2. Нехай у прямокутній системі координат, які позначаються r, φ, θ, область Δ є частиною множини, заданої нерівностями $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Область Δ відображається в область V тривимірного простору з координатами x, y, z за формулами $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ (рис. 11.20). Тоді модуль якобіана відповідного відображення A дорівнює $r^2\sin\theta$, а формула заміни змінних у потрійному інтегралі називається *формулою переходу до сферичної системи координат* і має вигляд

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dx\,dy\,dz =$$
$$= \iiint\limits_\Delta r^2 \sin\theta \cdot f(r\cos\varphi\sin\theta,\; r\sin\varphi\sin\theta,\; r\cos\theta)dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Таку назву формула дістала тому, що при вказаному відображенні A область Δ, задана найпростішими нерівностями $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, відображається в кулю (радіусом R).

■ **Приклад 11.16**. *Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V x^2y^2\,dx\,dy\,dz$, де область V обмежена параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і координатною площиною $z = 0$ (рис. 11.21, а).*



а б

Рис. 11.21

Перейдемо до циліндричної системи координат. Область Δ задаватиметься умовами $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, $0 \le z \le \rho^2$ (рис. 11.21, *б*), отже,

$$\iiint\limits_V x^2y^2dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Delta \rho^5 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \,d\varphi\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{\rho^2}\rho^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,dz\right)d\rho\right)d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi\int_0^1\rho^7 d\rho = \frac{\pi}{32}.$$

■ **Приклад 11.17.** *Обчислити інтеграл* $\iiint\limits_V xyz^2dx\,dy\,dz$, *де область* V *обмежена частиною сфери* $x^2+y^2+z^2=1$ *і координатними площинами при* $x>0$, $y>0$, $z>0$ *(рис. 11.22, б).*

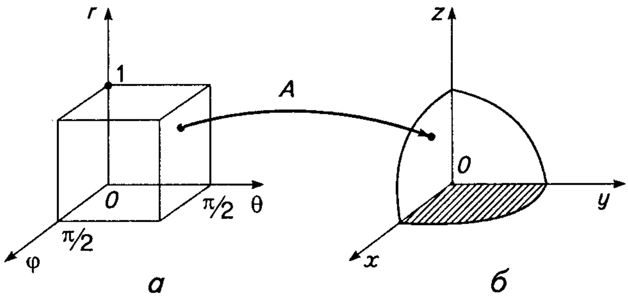


Рис. 11.22

Перейдемо до сферичної системи координат. Оскільки область Δ задається нерівностями $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \rho \le 1$ (рис. 11.22, *а*), а підінтегральна функція дорівнює $xyz^2 = r\cos\varphi\sin\theta \cdot r\sin\varphi\sin\theta \times r^2\cos^2\theta = \frac{1}{2}r^4\sin 2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta$, дістанемо

$$\iiint\limits_V xyz^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Delta \frac{1}{2}r^6\sin^3\theta\cos^2\theta\sin 2\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 r^6\sin^3\theta\cos^2\theta\sin 2\varphi\,dr\right)d\varphi\right)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^6\,dr\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\, d(2\varphi)\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta(\cos^2\theta - 1)\,d(\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2\varphi\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\left(\frac{\cos^5\theta}{5} - \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{1}{105}.$$

11.2.3. Деякі застосування потрійних інтегралів

Обчислення об'єму. Об'єм області V можна обчислювати за формулою

$$\boxed{v = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz.}$$

Ця формула, яка випливає безпосередньо з означення потрійного інтеграла, універсальніша від формули обчислення об'єму тіла за допомогою подвійного інтеграла.

■ **Приклад 11.18**. *Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$, де a — додатна стала.*

Тут задача зображення поверхні, яка обмежує дане тіло, досить складна. Але такої необхідності й немає, оскільки при переході до сферичної системи координат об'єм можна обчислити за формулою $v = \iiint\limits_\Delta r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$, а рівняння поверхні, що обмежує область Δ, знайти, підставивши формули $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$ у рівняння поверхні, яка обмежує область V. Дістанемо $r = a\cos\varphi \times \sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta$. Оскільки тіло V не змінюється при зміні знаків двох довільних координат його точок, можемо обчислити четверту частину об'єму, обмежившися випадком $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, який відповідає випадку $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le r \le a\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta$. Останні три нерівності визначають область Δ, тому для об'єму дістанемо формулу $\frac{1}{4}v = \iint\limits_\Omega \left(\int\limits_0^{a\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta\cos\theta} r^2\sin\theta\, dr\right) d\varphi\, d\theta$, де область Ω є прямокутником, який задається нерівностями $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \theta \le \pi/2$. Звідси й обчислимо об'єм:

$$v = \frac{4}{3}\iint\limits_\Omega a^3\cos^3\varphi\sin^3\varphi\sin^7\theta\cos^3\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\varphi(1-\sin^2\varphi)d(\sin\varphi)\int\limits_0^{\pi/2}\sin^7\theta(1-\sin^2\theta)d(\sin\theta) =$$

$$= \frac{4}{3}a^3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right) = \frac{a^3}{360}.$$

Задачі механіки й фізики. Нехай речовину неперервно розподілено в тривимірній області V із густиною $\gamma(x, y, z) = \gamma(M)$. Розіб'ємо область V на елементарні частини. Елементарна маса становить

$dm = \gamma\, d\tau$, де $d\tau = dx\, dy\, dz$ — елемент об'єму в прямокутній системі координат. Елементарні статичні моменти відносно координатних площин визначаються рівностями

$$dS_{xy} = z\, dm, \quad dS_{yz} = x\, dm, \quad dS_{xz} = y\, dm.$$

Маси й статичні моменти всього тіла обчислюються за відповідними формулами

$$m = \iiint\limits_V \gamma\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\,\gamma\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_V x\,\gamma\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_V y\,\gamma\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Координати центра маси (x_c, y_c, z_c) тіла задовольняють співвідношення

$$x_c = \frac{S_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{S_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{S_{xy}}{m}$$

згідно з означеннями цього поняття.

■ **Приклад 11.19**. *Знайти центр маси однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $2z = x^2 + y^2$ і кулею $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (рис. 11.23).*

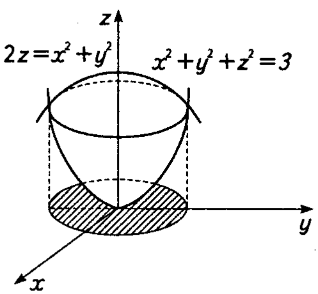


Рис. 11.23

Маємо

$$m = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz = 4\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2-y^2}{2}}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dz =$$

$$= 4\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\sqrt{3-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{2}\right) dy =$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{3} - \frac{5}{6}\right).$$

Аналогічно

$$S_{xy} = \iiint\limits_V z\, dx\, dy\, dz = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(3 - x^2 - y^2 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\right) dy,$$

$$S_{xy} = \frac{5}{3}\pi.$$

Отже,

$$z_c = \frac{S_{xy}}{m} = \frac{5}{6\sqrt{3}-5}.$$

Центр маси заданого тіла міститься в точці $\left(0;\, 0;\, \frac{5}{6\sqrt{3}-5}\right)$.

Елементарні моменти інерції відносно координатних осей становлять

$$dI_x = (y^2 + z^2)\, dm, \quad dI_y = (x^2 + z^2)\, dm, \quad dI_z = (x^2 + y^2)\, dm,$$

де $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$, $x^2 + y^2$ — квадрати відстаней від точки $M(x, y, z)$ до осей Ox, Oy, Oz відповідно, оскільки згідно з означенням моментом інерції системи точок відносно осей називають суму добутків мас цих точок на квадрати їх відстаней до осей.

Моменти інерції всього тіла

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\,\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Момент інерції відносно початку координат

$$I_O = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\,\gamma(M)\, dV.$$

■ **Приклад 11.20.** *Знайти момент інерції однорідного циліндра заввишки H і з радіусом основи R відносно осі, яка є діаметром основи циліндра.*

Нехай вісь z напрямлена вздовж осі циліндра, основа лежить у площині $z = 0$ і центр основи збігається з початком координат. Момент інерції будемо шукати відносно осі y (тобто $x = 0$; $z = 0$):

$$I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\, d\tau = 4\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \int_0^H (x^2 + z^2)\, dz =$$

$$= 4H \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\left(x^2 + \frac{H^2}{3}\right) dx = 4HR^2 \int_0^R \cos^2 t\left(R^2 \sin^2 t + \frac{H^2}{3}\right) dt =$$

$$= (3R^2 + 4H^2)\frac{\pi R^2 H}{12}.$$

11.3 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

11.3.1. Означення криволінійних інтегралів та їхні властивості

Означення 11.7. Нехай у кожній точці M кусково-гладкої кривої L (A — початок, B — кінець дуги кривої) визначені скалярна функція $f(M) = f(x, y, z)$ і векторна функція $\overline{F}(M)$ із координатами $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$, $R(M) = R(x, y, z)$. Розітнемо криву L на m послідовних частин $L_1, L_2, ..., L_m$ (починаючи від точки A), які утворюють подрібнення T цієї кривої й позначимо через $\lambda(T)$ довжину найдовшої з дуг подрібнення. *Послідовність T_n подрібнень кривої L називають **нормальною**, якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda(T_n) = 0$.

На кожній із дуг L_i візьмемо довільну точку M_i (x_i, y_i, z_i) при $i = 1; 2; ...; m$. ***Інтегральними сумами першого й другого родів** називають відповідно суму* $\sigma_1(T) = \sum\limits_{i=1}^{m} f(M_i)\Delta l_i$, *де Δl_i — довжина кривої L_i, та суму* $\sigma_2(T) = \sum\limits_{i=1}^{m} (\overline{F}(M_i), \Delta\overline{r}_i)$, *де під знаком суми стоїть скалярний добуток вектора $\overline{F}(M_i)$ і вектора $\Delta\overline{r}_i$, початок і кінець якого збігаються з початком і кінцем дуги L_i* (рис. 11.24).

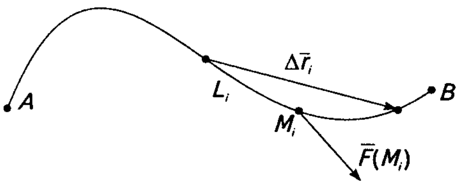


Рис. 11.24

Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_1(T_n)$ (*або* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_2(T_n)$), *яка не залежить від вибору нормальної послідовності подрібнень T_n кривої L і від вибору точок M_i при побудові інтегральних сум, то цю границю називають **криволінійним інтегралом першого (або другого) роду**.*

Криволінійний інтеграл першого роду позначається $\int\limits_{AB} f(M)\,dl$ або $\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl$, а криволінійний інтеграл другого роду — $\int\limits_{AB} \overline{F}(M)\,d\overline{r}$ або $\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$.

- *Зауваження 1.* З означення випливає, що в криволінійному інтегралі першого роду неістотно, яку саме точку (A чи B) взято за початок і кінець дуги кривої L, тоді як у криволінійному інтегралі другого роду зміна початку й кінця змінює знак усіх векторів $\Delta \bar{r}_i$, отже, змінює знак інтегральної суми й самого інтеграла.

- *Зауваження 2.* Означення обох криволінійних інтегралів не виключають випадку, коли крива L є замкненою, тобто початок і кінець кривої L збігаються. В цьому разі криву потрібно довільним способом розітнути на дві частини й скористатись адитивною властивістю (неважко довести, що сума двох інтегралів не залежить від того, як саме криву L розітнути на дві частини).

Властивості криволінійних інтегралів аналогічні властивостям 1, 2, 5, 7 визначеного інтеграла. Крім того, криволінійний інтеграл першого роду має властивості, аналогічні властивостям 3 і 8. Усі ці властивості легко переформульовуються й доводяться.

Достатню умову існування криволінійних інтегралів першого й другого родів містить наступна теорема, доведення якої зводиться до теореми про достатню умову існування визначеного інтеграла від неперервної на замкненому проміжку функції (див. п. 9.2).

Теорема 11.11. Якщо на кусково-гладкій кривій L функції $f(x, y, z)$ чи $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ кусково-неперервні й обмежені, то криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl$ або відповідно $\int\limits_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ існує.

11.3.2. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Теорема 11.12. Нехай функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ неперервні й мають неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$. Нехай при зміні параметра t від α до β точка з координатами $(x(t), y(t), z(t))$ пробігає всю криву L, а функція $f(x, y, z)$ неперервна в кожній точці цієї кривої. Тоді справджується така формула:

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Доведення

Подрібнення $\{t_0 = \alpha, t_1, \ldots, t_m = \beta\}$ проміжку $[\alpha, \beta]$ визначає деяке подрібнення T кривої L на частини L_1, L_2, ..., L_m. Оскільки для довжини кривої L_i справджується формула $\Delta l_i = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$, то, застосовуючи теорему про середнє значення визначеного інтеграла (див. п. 9.2), звідси дістанемо рівність $\Delta l_i = \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^*))^2 + (z'(t_i^*))^2}\ (t_i - t_{i-1})$, де $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$. Виберемо на кожній кривій L_i точку $M_i(x'(t_i^*), (y'(t_i^*), (z'(t_i^*))$ і обчислимо інтегральну суму для криволінійного інтеграла першого роду саме для такого подрібнення й таких внутрішніх точок M_i. Дістанемо

$$\sigma_1(T) = \sum_{i=1}^{m} f(M_i)\Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))\sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^*))^2 + (z'(t_i^*))^2}\ (t_i - t_{i-1}).$$

Утворена праворуч сума є інтегральною сумою для визначеного інтеграла, вказаного у формулюванні теореми. Розглянувши нормальну послідовність подрібнень проміжку $[\alpha, \beta]$, дістанемо відповідну нормальну послідовність подрібнень T_n кривої L. Тоді з доведеної вище рівності, знаходячи границю при $n \to \infty$, дістанемо рівність криволінійного інтеграла першого роду й визначеного інтеграла, оскільки обидва вони існують (за відповідними достатніми умовами існування), а тому границі інтегральних сум не залежать від того, як саме побудовані інтегральні суми.

- *Зауваження.* Зокрема, якщо крива L задана на площині Oxy рівнянням $y = y(x)$, де $a \le x \le b$, то доведена в теоремі формула матиме вигляд

$$\boxed{\int\limits_L f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + ((y'(x))^2}\, dx.}$$

■ **Приклад 11.21**. *Обчислити криволінійний інтеграл* $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2 + y^2}\, dl$, *де* L *— перший виток гвинтової лінії* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$.

Обчислимо $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + a^2} = a\sqrt{2}$. За теоремою 11.12 дістанемо

$$\int\limits_L \frac{z^2}{x^2 + y^2}\, dl = \int\limits_0^{2\pi} \frac{a^2t^2}{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, a\sqrt{2}\, dt = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} t^2\, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\sqrt{2}\,a\,\pi^3.$$

■ **Приклад 11.22.** *Обчислити криволінійний інтеграл першого роду* $\int\limits_L xy\,dl$, *де* L *— чверть кола* $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$, *яка лежить у першому октанті.*

Параметричне рівняння даної частини кола має вигляд

$$x=\frac{a}{2}\cos t,\ \ y=\frac{a}{2}\sin t,\ \ z=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

де $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Тоді $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2 t+\frac{a^2}{4}\cos^2 t}\,dt=\frac{a}{2}\,dt$ і за формулою обчислення криволінійного інтеграла першого роду знаходимо

$$I=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{a}{2}\cos t\,\frac{a}{2}\sin t\,\frac{a}{2}dt=\frac{a^3}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\cdot d(\sin t)=$$

$$=\frac{a^3}{8}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a^3}{16}.$$

11.3.3. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Теорема 11.13. Нехай функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ неперервні й мають неперервні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ при $\alpha\le t\le\beta$. Нехай, крім того, при зміні параметра t від α до β точка з координатами $(x(t), y(t), z(t))$ пробігає всю криву L від точки A до точки B, а координати $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ векторної функції $\overline{F}(M)$ неперервні в кожній точці M цієї кривої. Тоді справджується така формула:

$$\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$
$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+$$
$$+R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Доведемо спочатку рівність $\int\limits_{AB}P(x,y,z)dx=$ $=\int\limits_{\alpha}^{\beta}P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\,dt$. Подрібнення $\{t_0=\alpha, t_1,\ldots,t_m=\beta\}$ проміжку $[\alpha, \beta]$ визначає деяке подрібнення T кривої L на дуги L_1, L_2, ..., L_m. Кінці дуги L_i при $i = 1; 2; ...; m$ мають координати $(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}), z(t_{i-1}))$ та $(x(t_i), y(t_i), z(t_i))$, а перша координата вектора $\Delta\bar{r}_i$ дорівнює $x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$ (див. теорему Лагранжа 7.2). Виберемо на кожній дузі L_i саме ту точку M_i, яка відповідає значенню параметра t_i^*, і побудуємо інтегральну суму для криволінійного інтеграла другого роду для векторної функції $\bar{F}(M)$ із координатами $(P(x, y, z); 0; 0)$. Ясно, що при знаходженні скалярного добутку $(\bar{F}(M_i), \Delta\bar{r}_i)$ значення другої та третьої координат вектора $\Delta\bar{r}_i$ неістотні, тому

$$\sigma_2(T) = \sum_{i=1}^{m} \bar{F}(M_i)\,\Delta\bar{r}_i = \sum_{i=1}^{m} P(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))\,x'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}).$$

Утворена праворуч сума є інтегральною сумою для визначеного інтеграла, вказаного у формулюванні. Розглянувши нормальну послідовність подрібнень проміжку $[\alpha, \beta]$, дістанемо відповідну нормальну послідовність подрібнень T_n кривої L. Тоді з доведеної вище рівності, знаходячи границю при $n \to \infty$, дістанемо рівність криволінійного інтеграла другого роду й визначеного інтеграла, оскільки обидва вони існують (за відповідними достатніми умовами існування), а тому границі інтегральних сум не залежать від того, як саме побудовані інтегральні суми.

Аналогічно доводяться ще дві рівності

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)\,dt$$

і

$$\int_{AB} R(x, y, z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Загальну формулу, вказану у формулюванні теореми, дістанемо тепер, додавши їх до доведеної вище.

- *Зауваження.* Зокрема, якщо крива L задана на площині Oxy рівнянням $y = y(x)$, де $a \le x \le b$, то доведена в теоремі формула матиме вигляд

$$\boxed{\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_{a}^{b} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x))\,dx.}$$

■ **Приклад 11.23**. *Обчислити інтеграл* $\int_L (2 - y)\,dx + x\,dy$, *де* L *— арка циклоїда* $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.

За формулою обчислення криволінійного інтеграла

$$\int_L (2-y)\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} [(1+\cos t)(1-\cos t) + (t-\sin t)\sin t)]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = -t\cos t\,\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t\,dt = -2\pi + \sin t\,\Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

■ **Приклад 11.24.** *Обчислити криволінійний інтеграл* $\int_L y\,dx + x\,dy + (x-y-1)\,dz$, *де L — відрізок прямої від точки* (1; 1; 1) *до точки* (2; 3; 4).

Запишемо рівняння прямої, що проходить через ці точки: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ або в параметричному вигляді: $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 + 3t$. Заданим точкам відповідають параметри $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Підставимо дані в інтеграл і зведемо його до визначеного:

$$\int_L y\,dx + x\,dy + (x-y-1)\,dz =$$

$$= \int_0^1 [1 + 2t + 2(1+t) + 3(-t-1)]dt = \frac{1}{2}.$$

■ **Приклад 11.25.** *Обчислити інтеграл* $\int_L (x+y)\,dx - x\,dy$: *1) уздовж відрізка OA; 2) вздовж ламаної OBA, де точки A*(4; 2) *і B*(2; 0) *(рис. 11.25).*

1. Уздовж прямої OA маємо $y = \frac{1}{2}x$, $dy = \frac{1}{2}dx$ і за формулою із зауваження дістаємо

$$\int_0^4 \left[\left(x + \frac{1}{2}x\right) - \frac{x}{2}\right]dx = 8.$$

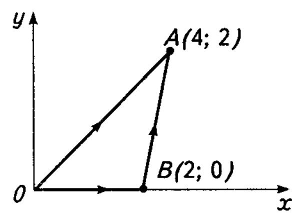


Рис. 11.25

2. Вздовж ламаної OBA на відрізку OB маємо $y = 0$ і $dy = 0$, на відрізку BA – $y = x - 2$, $dy = dx$. Тому

$$\int_L (x+y)\,dx - x\,dy = \int_{OB} (x+y)\,dx - x\,dy + \int_{BA} (x+y)\,dx - x\,dy =$$

$$= \int_0^2 x\,dx + \int_2^4 [(x + x - 2) - x]dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^4 = 4.$$

Зазначимо, що, вибравши два різних шляхи сполучення одних і тих самих точок, ми отримали два різних результати. Це не випадково. Причину цього роз'яснимо в наступному пункті.

11.3.4. Формула Гріна

Формула Гріна встановлює зв'язок між подвійним інтегралом по плоскій області та криволінійним інтегралом по межі цієї області.

Теорема 11.14. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні й мають неперервні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ в замкненій області A, обмеженій кусково-гладкою кривою L, яку кожна пряма, паралельна одній із осей координат, перетинає не більше, ніж у двох точках. Тоді справджується формула Гріна

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dx\,dy,$$

в якій обчислення криволінійного інтеграла здійснюється проти годинникової стрілки (в додатному напрямі).

Доведення

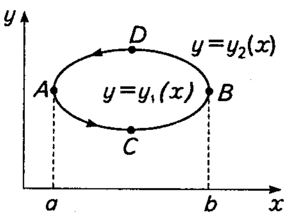


Рис. 11.26

З умови теореми випливає, що крива L, яка обмежує область A, утворена графіками двох функцій $y = y_1(x)$ і $y = y_2(x)$ при $x \in [a,b]$ (рис. 11.26).

Перетворимо подвійний інтеграл на криволінійний, попередньо звівши його до повторного інтеграла, й за формулою Ньютона—Лейбніца проінтегруємо по y:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))]dx =$$

$$= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx.$$

Кожний із цих двох визначених інтегралів дорівнює криволінійному інтегралові другого роду, взятому по відповідній кривій, наприклад:

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{ADB} P(x, y)dx = -\int_{BDA} P(x, y)dx,$$

$$\int_a^b P(x, y_1(x))dx = \int_{ACB} P(x, y)dx.$$

Таким чином,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\left[\int_{BDA} P(x, y)\,dx + \int_{ACB} P(x, y)\,dx\right] = -\oint_L P(x, y)\,dx.$$

Аналогічно дістанемо

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_L Q(x, y)\,dy.$$

У результаті віднімання цих рівностей приходимо до формули Гріна

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

- *Зауваження.* Формула Гріна має місце й у випадку, коли границя L області D може більше ніж у двох точках перетинатися прямими, паралельними одній із координатних осей. Так, у випадку, показаному на рис. 11.27, область D можна розбити на дві прості області — D_1 і D_2, для кожної з яких справедлива формула Гріна. Напишемо її окремо для D_1 і D_2 й складемо почленно отримані рівності.

  Ліворуч матимемо подвійний інтеграл по всій області D, а праворуч — криволінійний інтеграл по контуру L області D, оскільки криволінійний інтеграл по допоміжній лінії береться двічі в протилежних напрямах і при додаванні взаємно знищується.

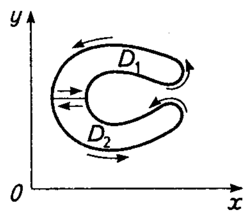


Рис. 11.27

■ **Приклад 11.26.** *За допомогою формули Гріна обчислити криволінійний інтеграл* $I = \int_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, *де* L *— коло* $x^2 + y^2 = ax$.

Функції $P(x, y) = xy + x + y$, $Q(x, y) = xy + x - y$ і $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x + 1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y + 1$ неперервні в крузі, обмеженому колом $x^2 + y^2 = ax$.

За формулою Гріна

$$\int_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy = \iint_D (y - x)\,dx\,dy.$$

У подвійному інтегралі, де D — круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = ax$, тобто $\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$, перейдемо до полярних координат із полюсом у центрі $O\left(\dfrac{a}{2}; 0\right)$ й обчислимо одержаний інтеграл.

Рівняння, яке зв'язує (x, y) і полярні координати (ρ, φ) з полюсом у точці $O\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, має вигляд

$$x - \frac{a}{2} = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \frac{a}{2}.$$

Оскільки якобіан $J(\varphi, \rho) = \rho$, дістанемо

$$\iint\limits_D (y - x)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a/2} \left(\rho\sin\varphi - \frac{a}{2} - \rho\cos\varphi\right)\rho\,dp =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi - \frac{a\rho^2}{4} - \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{a/2} d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{a^3}{24}\cos\varphi - \frac{a^3}{16}\varphi - \frac{a^3}{24}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{\pi a^3}{8}.$$

Зазначимо, що цей результат легко перевірити безпосереднім обчисленням криволінійного інтеграла.

11.3.5. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування

З'ясуємо, за яких умов значення криволінійного інтеграла

$$\int_{M_0}^{M} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової M_0 і кінцевої M точок інтегрування та від функцій P і Q. У дослідженні цього питання важливу роль відіграє саме формула Гріна.

Теорема 11.15. Нехай функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ визначені й неперервні в замкненій області D площини Oxy, обмеженій кусково-гладкою кривою. Тоді наступні чотири умови еквівалентні, тобто виконання будь-якої з них зумовлює виконання решти трьох.

I. Криволінійний інтеграл $\int\limits_L P\,dx + Q\,dy$ по будь-якому замкненому контуру L, який лежить в області D, дорівнює нулю:

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = 0.$$

II. Для довільних двох точок M_0 і M області D значення інтеграла не залежить від вибору шляху інтегрування, який повністю лежить в D,

$$\int\limits_{M_0\alpha M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M_0\beta M} P\,dx + Q\,dy.$$

III. Вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто в області D існує така функція $u(x, y)$, що

$$du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

IV. В області D у кожній точці справджується умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Логічна схема доведення теореми така: доведемо, що з першої умови випливає друга, з другої — третя, з третьої — четверта, а з четвертої — знову перша.

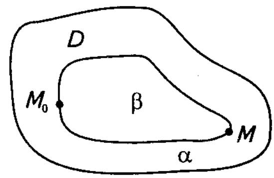


Рис. 11.28

1. Нехай виконана умова I; тоді інтеграл по замкненому контуру $M_0\alpha M\beta M_0$ (рис. 11.28) дорівнює нулю, тобто

$$\int\limits_{M_0\,\alpha M\,\beta M_0} = \int\limits_{M_0\,\alpha M} + \int\limits_{M\,\beta M_0} = 0$$

або

$$\int\limits_{M_0\,\alpha M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{M_0\,\beta M} P\,dx + Q\,dy.$$

2. Нехай справджується умова II; тоді інтеграл, указаний в ній, не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від точок M_0 і M. Якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ фіксована, то цей інтеграл буде деякою функцією координат x і y точки $M(x, y)$:

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0 M} P\,dx + Q\,dy.$$

Доведемо, що ця функція має неперервні частинні похідні першого порядку. Виразимо частинний приріст $\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$ функції $u(x, y)$ в точці $M(x, y)$ через криволінійний інтеграл по шляху, який сполучає дві точки $M(x, y)$ і $N(x + \Delta x, y)$:

$$\Delta_x u = \int\limits_{M_0 MN} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy - \int\limits_{M_0 M} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{MN} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Оскільки за умовою II інтеграл не залежить від вигляду кривої, виберемо шлях від $M(x, y)$ до $N(x + \Delta x, y)$ по прямолінійному відрізку MN, паралельному осі Ox. Криволінійний інтеграл дорівнюватиме визначеному інтегралові, що залежить від параметра y, оскільки y зберігає стале значення, а $dy = 0$:

$$\Delta_x u = \int_{MN} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y)\,dx.$$

Застосувавши до останнього інтеграла теорему про середнє (див. п. 9.2), дістанемо $\Delta_x u = P(x + \theta\,\Delta x, y)\,\Delta x$, $0 < \theta < 1$. Оскільки $P(x, y)$ неперервна, звідси маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta\Delta x, y) = P(x, y).$$

Аналогічно виводиться рівність $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Таким чином,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

3. Нехай виконана умова III, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y).$$

Оскільки $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ неперервні, то за теоремою Шварца 10.22 маємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Отже, умова IV справджується.

4. Нехай виконана умова IV. Фіксуємо в області D будь-який замкнений контур L — гладкий або кусково-гладкий. Позначимо через ω область, обмежену L. Запишемо формулу Гріна

$$\iint_{\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_L P\,dx + Q\,dy.$$

Ліва частина цієї рівності дорівнює нулю за умовою IV, а тому дорівнює нулю й її права частина, тобто виконана умова I. Теорему доведено.

Цю теорему можна узагальнити на випадок тривимірного простору, довівши за відповідних умов еквівалентність таких чотирьох умов:

I. $\oint P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0.$

II. $\int\limits_{M_0 \alpha M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{M_0 \beta M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$

III. Існує $u(x, y, z)$ така, що $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$

IV. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y},\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}.$

Використовуючи ці результати, можна вказати спосіб знаходження функції $u(x, y)$, повний диференціал якої відомий:

$$du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

У процесі доведення теореми ми знайшли один із розв'язків цієї задачі, а загальним розв'язком буде

$$u(x, y) = c + \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy,$$

оскільки дві функції, які мають однакові диференціали, відрізняються на сталу величину c.

Для знаходження $u(x, y)$ за цією формулою достатньо вибрати будь-яку точку (x_0, y_0) в області D й обчислити криволінійний інтеграл по будь-якій кривій, що сполучає точки (x_0, y_0) і (x, y). Оскільки інтеграл не залежить від шляху, то за шлях інтегрування можна взяти ламану, ланки якої паралельні осям координат (рис. 11.29):

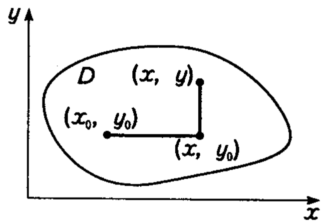


Рис. 11.29

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{(x, y_0)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy.$$

Оскільки $y = y_0$ і $dy = 0$ на ділянці від (x_0, y_0) до (x, y_0), а $dx = 0$ на ділянці від (x, y_0) до (x, y), попередня рівність набере вигляду

$$u(x, y) = c + \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy,$$

де перший визначений інтеграл обчислюється при сталому $y = y_0$, а другий — при сталому x.

■ **Приклад 11.27.** *Знайти $u(x, y)$ з умови $du = (x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + y^3)\,dy$.*

Маємо $P = x^2 + 2xy$; $Q = x^2 + y^3$. Отже,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

Визначимо функцію $u(x, y)$ $(x_0 = y_0 = 0)$:

$$u(x, y) = \int_0^x x^2\,dx + \int_0^y (x^2 + y^3)dy + C;$$

$$u(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + \frac{y^4}{4} + C.$$

Функцію $u(x, y)$ можна обчислити інакше. Спочатку знайдемо таку функцію $f(x, y)$, що $f'_x = P$. Після цього згідно з припущенням $u(x, y) = f(x, y) + \varphi(y)$ доберемо $\varphi(y)$ так, щоб виконувалась умова $u'(y) = Q$.

У цьому прикладі маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^3.$$

Отже, з першої рівності дістанемо $u = \dfrac{x^3}{3} + x^2y + \varphi(y)$. Друга умова дає $x^2 + \varphi'(y) = x^2 + y^3$, тобто $\varphi'(y) = y^3$ і $\varphi(y) = \dfrac{y^4}{4} + C$, де C — стала. Підставивши функцію $\varphi(y)$ у вираз функції u, матимемо $u = \dfrac{x^3}{3} + x^2y + \dfrac{y^4}{4} + C$. Як видно, результат той самий.

11.3.6. Деякі застосування криволінійних інтегралів

Криволінійні інтеграли мають широкі застосування в геометрії, фізиці, механіці.

Статичний момент. Центр маси. Момент інерції. Зупинимося на деяких застосуваннях у механіці. Розглянемо на площині Oxy матеріальну криву AB, у кожній точці якої густина визначається функцією $\rho = \rho(x, y)$, де $\rho(x, y)$ — неперервна функція на кривій AB. Розіб'ємо криву AB на елементарні частини. Елементарна маса становить $dm = \rho\, ds$. Елементарні статичні моменти відносно координатних осей визначаються рівностями $dS_x = y\,dm$; $dS_y = x\,dm$. І для всієї дуги AB дістанемо

$$m=\int_{AB}\rho(x,y)\,dl;\; S_x=\int_{AB}y\,\rho(x,y)\,dl;\; S_y=\int_{AB}x\,\rho(x,y)\,dl.$$

Згідно з означенням центра маси системи матеріальних точок виконуються умови $mx_c=S_y$, $my_c=S_x$.

Отже, центр маси матеріальної кривої AB має координати

$$x_c=S_y/m,\quad y_c=S_x/m.$$

Елементарні моменти інерції відносно координатних осей визначаються рівностями

$$dI_x=y^2\,dm,\quad dI_y=x^2\,dm.$$

Звідси моменти інерції всієї кривої

$$I_x=\int_{AB}y^2\,\rho(x,y)\,dl,\quad I_y=\int_{AB}x^2\,\rho(x,y)\,dl.$$

■ **Приклад 11.28.** *Обчислити масу й координати центра маси циклоїди* $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$ *із рівномірно розподіленою масою.*

Маємо

$$m=\int_{AB}dl=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=8a;$$

$$x_c=\frac{1}{8a}\int_{AB}x\,dl=\frac{1}{8a}a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\pi a,$$

$$y_c=\frac{1}{8a}\int_{AB}y\,dl=\frac{1}{8a}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,dt=\frac{4}{3}a.$$

Обчислення площі. За формулою Гріна можна виразити площу плоскої фігури через криволінійний інтеграл по контуру цієї фігури.

Достатньо вибрати функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, які задовольняють умову $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 1$ в області D, і тоді подвійний інтеграл дає значення площі $S(D)$ області, оскільки $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ при $f(x,y)\equiv 1$ виражає площу області D. Тобто, якщо покласти $P=-\frac{1}{2}y$, $Q=\frac{1}{2}x$, то дістанемо

$$S(D)=\frac{1}{2}\int_L x\,dy-y\,dx.$$

■ **Приклад 11.29**. *Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою* $x = a\cos^3 t,\ \ y = b\sin^3 t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

Оскільки задана фігура симетрична, достатньо обчислити $\frac{1}{4}$ її площі.

За наведеною вище формулою маємо

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(3ab\cos^4 t\sin^2 t + 3ab\sin^4 t\cos^2 t)dt = \frac{3}{32}\pi ab.$$

Робота силового поля. Робота E, яку здійснює сила $\bar{a}(M)$ при переміщенні точки M одиничної маси вздовж даної кривої AB із положення A в положення B, обчислюється за формулою

$$E = \int_{AB} \bar{a}(M)\,\overline{dr} = \int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy + R(x, y)\,dz.$$

■ **Приклад 11.30**. *Знайти роботу сили* $\bar{a} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + zx\bar{k}$ *при переміщенні матеріальної точки вздовж першого витка гвинтової лінії:* $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Маємо

$$E = \int_{AB} \bar{a}\,d\bar{r} = \int_{AB} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz.$$

Оскільки $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = a\cos t\,dt$, $dz = b\,dt$,

$$\int_{AB} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz = \int_0^{2\pi}[-a^3\sin^2 t\cos t + a^2bt\sin t\cos t +$$

$$+ ab^2t\cos t]dt = -\frac{\pi}{2}a^2b.$$

11.4 ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

11.4.1. Означення й властивості поверхневих інтегралів

➡ **Означення 11.8.** Проведемо в кожній точці M гладкої поверхні П дотичну площину (це можна зробити за означенням гладкості); тоді визначено два одиничних вектори нормалі до цієї площини з початком у точці M. *Казатимемо, що на гладкій поверхні* Π *вибрано сторону, якщо в кожній її точці зафіксовано один із двох можливих одиничних векторів нормалі й координати цього вектора є неперервними функціями від координат x, y, z точки M на поверхні.*

Зокрема, якщо поверхня Π задана рівністю $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна й має неперервні частинні похідні першого порядку в деякій області D на координатній площині Oxy, то векторами нормалей у точці $M(x, y, f(x, y))$ будуть

$$\boxed{\bar{n} = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y);\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y);\ 1\right).}$$

Тому *для вибору сторони поверхні, тобто вибору одиничного неперервного вектора нормалі, достатньо вибрати в усіх точках поверхні знак «+» або «–» перед указаним вектором і поділити результат на довжину цього вектора, тобто на*

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}.$$

Природно називати одну зі сторін такої поверхні *верхньою* (вектор нормалі утворює гострий кут із віссю Oz), а протилежну сторону — *нижньою.*

Поняття вибору сторони поверхні спрощується також у випадках, коли поверхня задана рівністю $y = f(x, z)$ або $x = f(y, z)$.

Однак існують поверхні, для яких вибір їхньої сторони взагалі неможливий, оскільки вона єдина. Такі поверхні називають *односторонніми*, і їх ми не розглядатимемо.

➡ **Означення 11.9.** Нехай у кожній точці $M(x, y, z)$ гладкої поверхні Π визначена числова функція $F(x, y, z)$ або векторна функція $\bar{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$. Розітнемо поверхню Π кусково-гладкими кривими на частини $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$, утворюючи так подрібнення T цієї поверхні. Виберемо на кожній поверхні Π_i довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ при $i = 1; 2; \ldots; m$. ***Інтегральними сумами першого й другого родів*** *називаються відповідно суми*

$$\sigma_1(T) = \sum_{i=1}^{m} F(M_i)\Delta s_i \quad \text{і} \quad \sigma_2(T) = \sum_{i=1}^{m} (\bar{F}(M_i)\bar{n}_i(M_i))\Delta s_i,$$

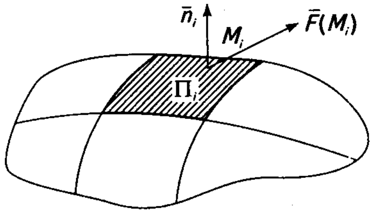


Рис. 11.30

де під знаком другої суми стоїть скалярний добуток вектора $\bar{F}(M_i)$ і вектора нормалі $\bar{n}(M_i)$ у точці M_i для вибраної сторони поверхні, а Δs_i — площа поверхні Π_i (рис. 11.30). Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_1(T_n)$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_2(T_n)$, яка не залежить від вибору нормальної послідовності подрібнень поверхні Π і від вибору точок M_i при побудові відповідних інтегральних сум, то ця границя називається ***поверхневим інтегралом першого чи відповідно другого роду.*** Поверхневий інтеграл першого роду позначається $\iint\limits_{\Pi} F(x, y, z)\,ds$, а другого роду — $\iint\limits_{\Pi} \bar{F}(M)\,\bar{n}(M)\,ds$ або $\iint\limits_{\Pi} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dx\,dz + R(x, y, z)\,dx\,dy$.

Властивості поверхневих інтегралів аналогічні властивостям 1, 2, 3 подвійного інтеграла; крім того, поверхневий інтеграл першого роду має властивості, аналогічні властивостям 4, 5 і 7. Адитивна властивість інтегралів дає змогу обчислити обидва поверхневих інтеграли для кусково-неперервних функцій, визначених на кусково-гладких поверхнях. Природно, що має місце теорема існування поверхневих інтегралів першого й другого родів, яка аналогічна відповідним теоремам для подвійного й криволінійних інтегралів.

- *Зауваження 1.* Поверхневий інтеграл другого роду змінює лише знак при зміні сторони поверхні. Це цілком зрозуміло, оскільки кожна інтегральна сума змінить знак, якщо напрям нормалі в кожній точці змінити на протилежний.

- *Зауваження 2.* Поверхневий інтеграл першого роду обчислюється за формулою, аналогічною формулі теореми 11.7:

$$\iint\limits_{\Pi} F(x, y, z)ds = \iint\limits_{D} F(x, y, f(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2}\,dx\,dy.$$

Відповідна теорема, сформулювати й довести яку пропонуємо самостійно, використовує формулу з теореми 11.7 для обчислення площі поверхні, а доведення аналогічне доведенню теореми 11.16.

■ **Приклад 11.31.** *Площина $3x + 4y - 5z = 6$ перетинає еліптичний циліндр $2x^2 + y^2 = 1$. Визначити площу перерізу.*

Запишемо рівняння поверхні П у вигляді $z = \frac{1}{5}(3x + 4y + 6)$ і застосуємо попередню формулу, знайшовши спочатку $z'_x = \frac{3}{5}$, $z'_y = \frac{4}{5}$, $\sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2} = \sqrt{2}$. Тоді

$$S = \iint\limits_{\Pi} d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{1-2x^2}}^{\sqrt{1-2x^2}} dy =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot 2 \int\limits_{0}^{1/\sqrt{2}} \sqrt{1-2x^2}\, dx = 4 \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = 2 \int\limits_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt = \pi.$$

11.4.2. Обчислення поверхневих інтегралів другого роду

Якщо векторну функцію $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ записати у вигляді суми векторних функцій $(P(x, y, z); 0; 0)) + (0; Q(x, y, z); 0) + (0; 0; R(x, y, z))$, то обчислення поверхневого інтеграла другого роду можна звести (за відповідною властивістю) до обчислення інтеграла від кожного з доданків, тобто до обчислення інтегралів

$$\iint\limits_{\Pi} P(x, y, z)\, dy\, dz, \quad \iint\limits_{\Pi} Q(x, y, z)\, dx\, dz, \quad \iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Теорема 11.16 (про обчислення поверхневого інтеграла другого роду). Якщо поверхня П задана рівністю $z = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ неперервна й має неперервні частинні похідні першого порядку в області D координатної площини Oxy, область D обмежена кусково-гладкою кривою й у кожній точці поверхні П визначена неперервна функція $R(x, y, z)$, то поверхневий інтеграл другого роду від векторної функції $(0; 0; R(x, y, z))$ можна обчислити за формулою

$$\iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\, dx\, dy = \pm \iint\limits_{D} R(x, y, f(x, y))\, dx\, dy.$$

При обчисленні подвійного інтеграла знак «+» або «–» береться залежно від того, верхню чи нижню сторону поверхні П вибрано.

Доведення

Нехай $T = \{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m\}$ — подрібнення поверхні П. За формулою для обчислення площі поверхні Π_i (теорема 11.7) і теоремою про середнє значення подвійного інтеграла (властивість 7) дістанемо

$$\Delta s_i = \iint\limits_{D_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy =$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2}\, S(D_i).$$

Візьмемо на поверхні Π_i точку $M_i\,(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ і побудуємо інтегральну суму для поверхневого інтеграла другого роду, враховуючи, що $\pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i);\, -\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i);\, 1\right)$ — вектор, пропорційний одиничному векторові нормалі вибраної сторони поверхні. Дістанемо рівність

$$\sigma_2(T) = \sum_{i=1}^{m} \overline{F}(M_i),\quad \overline{n}_i(M_i)\Delta s_i = \pm\sum_{i=1}^{m} R(x_i, y_i, f(x_i, y_i))S(D_i),$$

в якій вираз праворуч є інтегральною сумою для подвійного інтеграла, вказаного у формулюванні теореми. Оскільки існування подвійного інтеграла й поверхневого інтеграла другого роду гарантується відповідною теоремою існування, то незалежно від вибору нормальної послідовності T_n і від вибору точок M_i обидві границі інтегральних сум існують і дорівнюють одна одній (за доведеним). А це й потрібно довести.

- *Зауваження 1.* Недоліком цієї простої формули є те, що для обчислення двох інших поверхневих інтегралів другого роду потрібно поверхню, задану рівнянням $z = f(x, y)$, розітнути на кілька поверхонь, кожна з яких задається рівняннями виду $y = g(x, z)$ або $x = h(y, z)$, що не завжди просто зробити.

- *Зауваження 2.* У випадку, коли потрібно обчислити загальний інтеграл другого роду $\iint\limits_{\Pi} P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy$ по поверхні, заданій рівнянням $z = f(x, y)$, можна скористатися загальнішою формулою для обчислення цього інтеграла (її доведення є майже дослівним переказом попереднього), яка має вигляд

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint\limits_{\Pi} P(x, y, z)\, dy\, dz + Q(x, y, z)\, dx\, dz + R(x, y, z)\, dx\, dy = \\ &= \pm \iint\limits_{D} \left(P(x, y, f(x, y))\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) + Q(x, y, f(x, y))\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) + \right. \\ &\qquad \left. + R(x, y, f(x, y))\right) dx\, dy\end{aligned}}$$

(знаки беруться так само, як і в теоремі 11.16).

■ **Приклад 11.32**. *Обчислити поверхневий інтеграл другого роду* $I = \iint\limits_{\Pi} y\,dx\,dz$, *де* П — *верхня сторона параболоїда* $z = x^2 + y^2$ при $z \le 2$.

Тут $P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = y$, $R(x, y, z) = 0$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, а область D обмежена колом $x^2 + y^2 = 2$. За попередньою формулою дістанемо подвійний інтеграл (знак «+» перед інтегралом — за умовою задачі) $I = \iint\limits_{D} (-2y^2)\,dx\,dy$. Перейдемо до полярної системи координат, відобразивши прямокутник, заданий нерівностями $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le \sqrt{2}$, в область D за формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Дістанемо $I = \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^{\sqrt{2}}(-2\rho^3\sin^2\varphi)d\rho\right)d\varphi = -\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = -2\pi$.

11.4.3. Деякі застосування поверхневих інтегралів

Нехай на кусково-гладкій поверхні П розподілено масу з поверхневою густиною $\rho(x, y, z)$ і ця функція є неперервною на поверхні П. Таку поверхню назвемо *матеріальною*.

За допомогою поверхневих інтегралів першого роду можна обчислювати масу, координати центра мас, моменти інерції матеріальної поверхні.

Маса матеріальної поверхні обчислюється за формулою

$$m = \iint\limits_{\Pi} \rho(x, y, z)\,ds.$$

Координати x_c, y_c, z_c центра мас можна обчислювати за формулами

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{\Pi} x\,\rho(x, y, z)\,ds,\quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{\Pi} y\,\rho(x, y, z)\,ds,\quad z_c = \frac{1}{m}\iint\limits_{\Pi} z\,\rho(x, y, z)\,ds.$$

■ **Приклад 11.33**. *Обчислити масу сфери, якщо поверхнева густина в кожній точці пропорційна квадрату відстані від неї до деякого фіксованого діаметра сфери.*

Розмістимо сферу так, щоб її рівнянням було $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, і зафіксуємо діаметр, який лежить на осі Oz. Тоді поверхнева густина становить $\rho = k(x^2 + y^2)$, де k — додатна стала. За формулою обчислення маси й поверхневого інтеграла першого роду дістанемо

$$m = k\iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)ds = 2kR\iint\limits_{D}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dx\,dy =$$

$$= 2kR\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R \frac{\rho^3}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\right)d\varphi = \frac{8}{3}k\pi R^4,$$

де П — верхня половина сфери (тому з'явився множник 2), D — круг радіусом R із центром у початку координат. При обчисленні подвійного інтеграла здійснено перехід до полярної системи координат, а при обчисленні визначеного невласного інтеграла — заміну $t = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Моменти інерції матеріальної поверхні відносно осей координат (осей Ox, Oy, Oz) можна обчислювати відповідно за формулами

$$I_x = \iint\limits_{\Pi}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,ds,\quad I_y = \iint\limits_{\Pi}(x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,ds,$$

$$I_z = \iint\limits_{\Pi}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,ds.$$

■ **Приклад 11.34**. *Обчислити момент інерції бічної поверхні прямого кругового однорідного циліндра з радіусом основи R і висотою H відносно осі циліндра.*

Щоб скористатись однією з наведених вище формул, проведемо вісь циліндра через вісь Ox, задаючи його бічну поверхню П (верхню й нижню її частини) рівностями $z = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$, де область D є прямокутником, заданим на площині Oxy нерівностями $0 \le x \le H$, $-R \le y \le R$. Тоді шуканий момент становить $I_x = 2\rho\iint\limits_{\Pi}(y^2+z^2)ds = 2\rho R^2\iint\limits_{\Pi}ds$. Оскільки одержаний поверхневий інтеграл першого роду дорівнює площі половини бічної поверхні циліндра, звідси дістанемо $I_x = 2\rho\, R^2\cdot\pi RH = mR^2$, де m — маса бічної поверхні циліндра.

Нехай крізь поверхню П протікає рідина, швидкість руху якої в кожній точці M поверхні залежить лише від положення точки, тобто є векторною функцією $\overline{F}(M)$ координат точки M. Тоді потік рідини $P(\overline{n})$ крізь усю поверхню П (кількість рідини, яка протікає крізь поверхню П за одиницю часу в напрямі вектора нормалі поверхні $\overline{n}(M)$) обчислюється за допомогою поверхневого інтеграла другого роду

$$P(\overline{n}) = \iint\limits_{\Pi}\overline{F}(M)\,\overline{n}(M)\,ds.$$

■ **Приклад 11.35**. *Обчислити потік рідини крізь поверхню верхньої півсфери радіусом R у напрямі від центра сфери O, якщо швидкість руху рідини в точці M пропорційна вектору $\overline{OM}$.*

Вважатимемо, що верхня півсфера задана рівнянням $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, де (x, y) — довільна точка області D, заданої нерівністю

$x^2 + y^2 \le R^2$. Тоді за умовою вектор швидкості руху рідини $\overline{F}(M) = k(x, y, z)$, де k — коефіцієнт пропорційності.

Тут потрібно обчислити поверхневий інтеграл $I = k \iint\limits_{\Pi} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$ по верхній стороні верхньої півсфери, отже, у формулі (зауваження 2 до теореми 11.16) для обчислення поверхневого інтеграла другого роду слід взяти знак «+», звідки

$$I = k\iint\limits_{D}\left(\frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)dx\,dy =$$

$$= kR^2\iint\limits_{D}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Обчислюючи цей подвійний інтеграл переходом до полярної системи координат, дістанемо $I = 2\pi k R^3$.

11.4.4. Формула Остроградського—Гаусса

Формула Остроградського—Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні з потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Ця формула є аналогом формули Гріна, яка зв'язує криволінійний інтеграл по замкненій кривій із подвійним інтегралом по плоскій області, обмеженій цією кривою.

Виведемо формулу Остроградського—Гаусса для такої замкненої просторової області, що кожна пряма, паралельна одній із координатних осей, перетинає межу області не більше ніж у двох точках. Назвемо такі області *простими*.

Теорема 11.17. Нехай V — проста область, обмежена кусково-гладкою поверхнею Π, і $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — функції, неперервні в області V разом із похідними $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial z}$. Тоді справедлива формула Остроградського—Гаусса

$$\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Pi} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy,$$

де поверхневий інтеграл другого роду слід обчислювати по зовнішній стороні поверхні Π, яка обмежує область V.

Доведення

Нехай область D — проекція поверхні Π (і області V) на площину Oxy (рис. 11.31), а $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$ — рівняння відповідних частин поверхні Π — нижньої Π_1 і верхньої Π_2.

Розглянемо потрійний інтеграл $\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz$ і перетворимо його спочатку на подвійний інтеграл, а потім на поверхневий інтеграл другого роду:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz \overset{\mathrm{I}}{=} \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \overset{\mathrm{II}}{=} \iint\limits_D [R(x, y, z_2(x, y)) -$$

$$- R(x, y, z_1(x, y))]\, dx\, dy \overset{\mathrm{III}}{=} \iint\limits_{\Pi_2} R(x, y, z)\, dx\, dy +$$

$$+ \iint\limits_{\Pi_1} R(x, y, z)\, dx\, dy \overset{\mathrm{IV}}{=} \iint\limits_{\Pi} R(x, y, z)\, dx\, dy.$$

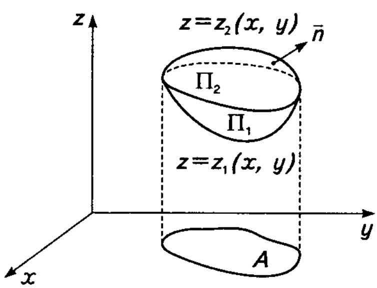


Рис. 11.31

Перетворення I ґрунтується на формулі обчислення потрійного інтеграла, II — на формулі Ньютона—Лейбніца, III — на формулі обчислення поверхневого інтеграла другого роду, в результаті якої поверхневі інтеграли взято відповідно по верхній стороні поверхні $z = z_2(x, y)$ і нижній стороні поверхні $z = z_1(x, y)$.

У подальшому ці інтеграли об'єднано в один інтеграл по зовнішній стороні поверхні П.

Аналогічно доводяться формули

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Pi} P\, dy\, dz, \qquad \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Pi} Q\, dz\, dx.$$

Додаючи почленно ці рівності, приходимо до формули Остроградського—Гаусса.

- *Зауваження.* Використовуючи адитивну властивість поверхневого інтеграла, можна цю формулу узагальнити на довільну замкнену область V, яку можна розбити на скінченну кількість простих областей.

■ **Приклад 11.36.** *Використовуючи формулу Остроградського—Гаусса, обчислити інтеграл*

$$I = \iint\limits_{\Pi} y^2 z\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + x^2 y\, dx\, dz,$$

де П — зовнішня сторона поверхні, що розташована в першому октанті й складається з параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, циліндра $x^2 + y^2 = 1$ і координатних площин.

Оскільки

$$P(x, y, z) = xz, \quad Q(x, y, z) = x^2y, \ R(x, y, z) = y^2z,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2, \ \frac{\partial R}{\partial z} = y^2,$$

то

$$\iint\limits_{\Pi} y^2\, z\, dx\, dy + xz\, dy\, dz + x^2y\, dx\, dz = \iiint\limits_{V} (z + x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Для обчислення потрійного інтеграла перейдемо до циліндричних координат: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$. Якобіан відображення дорівнює ρ, тому

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho^2} (z + \rho^2) dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\frac{z^2}{2} + \rho^2 z\right)\Bigg|_0^{\rho^2} \rho\, d\varphi = \frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^5\, d\rho = \frac{\pi}{8}.$$

11.4.5. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневими та криволінійними інтегралами другого роду.

Теорема 11.18. Нехай П — поверхня, задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ та її частинні похідні першого порядку неперервні в замкненій області D — проекції П на площину Oxy, L — кусково-гладка крива, яка є межею П, Λ — її проекція на площину Oxy, що обмежує область D (рис. 11.32), а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ та їхні частинні похідні першого порядку неперервні в області V, яка цілком містить у собі поверхню П. Тоді має місце формула Стокса

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \iint\limits_{\Pi} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\, dz,$$

в якій напрям інтегрування по кривій L вибирається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора нормалі до поверхні П.

Для доведення теореми перевіримо послідовно формули

$$\oint\limits_L P(x, y, z)\, dx = \iint\limits_{\Pi} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z)\, dx\, dz - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)\, dx\, dy,$$

$$\oint\limits_L Q\, dy = \iint\limits_{\Pi} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\, dy\, dz, \quad \oint\limits_L R\, dz = \iint\limits_{\Pi} \frac{\partial R}{\partial y}\, dy\, dz - \frac{\partial R}{\partial x}\, dx\, dz,$$

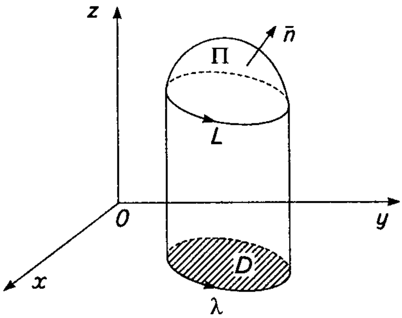


Рис. 11.32

додаючи які, й дістанемо формулу Стокса. При цьому обмежимося випадком верхньої сторони поверхні П (рис. 11.32).

Нехай крива Λ задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $t \in [\alpha, \beta]$. Тоді параметричне рівняння кривої L, яка лежить на поверхні П, заданій рівнянням $z = z(x, y)$, матиме вигляд $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(x(t), y(t))$, де $t \in [\alpha, \beta]$. Звідси за формулою обчислення криволінійного інтеграла другого роду по кривих L, Λ за формулою Гріна й формулою обчислення поверхневого інтеграла другого роду (див. зауваження 2 до теореми 11.16) дістанемо

$$\oint_L P(x, y, z)\,dx = \int_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))x'(t))dt =$$

$$= \oint_\Lambda P(x, y, z(x, y))\,dx = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z(x, y)) - \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z(x, y)) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right) dx\,dy = \iint_\Pi \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z)dx\,dz - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z)dx\,dy,$$

що й потрібно. Зауважимо, що в останній рівності взято знак «+», оскільки формула Стокса доводиться для верхньої сторони поверхні П.

Дві інші рівності доводяться аналогічно.

При зміні сторони поверхні зміниться й напрям інтегрування по кривій П, отже, доведена рівність не порушиться.

- *Зауваження 1.* Формула Стокса залишається правильною й для поверхонь, що задаються рівнянням $x = x(y, z)$ чи $y = y(x, z)$ аналогічно поверхні, вказаної у формулюванні теореми, а також для кусково-гладких поверхонь, які можна розітнути на скінченну кількість поверхонь, розглянутих вище.

- *Зауваження 2.* Як видно з доведення, формула Стокса є наслідком формули Гріна, однак і формула Гріна випливає з формули Стокса, якщо розглянути поверхню П на площині Oxy, котра задається рівнянням $z = 0$.

- *Зауваження 3.* Використовуючи теорему Стокса, можна довести умову незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування, яка вже була сформульована в п. 11.3.5.

■ **Приклад 11.37.** *Обчислити криволінійний інтеграл* $I = \int\limits_L (z - 2y + x^3)\,dx + (2x + z + y^2)\,dy + (x + y + z^4)\,dz$, *де* L *— крива перерізу циліндра* $x^2 + y^2 = Rx$ *і сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *при* $z \ge 0$, *у напрямі проти годинникової стрілки, якщо дивитися з додатного напряму осі* Oz.

Скориставшися формулою Стокса для поверхні П тієї частини сфери, яка розташована всередині даного циліндра, матимемо $I = 4\iint\limits_{П} dx\,dy$. Застосувавши теорему 11.16 про обчислення поверхневого інтеграла другого роду, дістанемо $I = 4\iint\limits_{D} dx\,dy$, де область D — круг на площині Oxy, обмежений колом $x^2 + y^2 = Rx$ радіусом $R/2$, тобто чотири площі цього круга. Остаточно матимемо $I = \pi R^2$.

11.5 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

11.5.1. Скалярне й векторне поля

Якщо в області V *задана скалярна функція точки* $u(M)$, *то кажуть, що в цій області задано **скалярне поле**.* Наприклад, це може бути температура точок нагрітого тіла, щільність розподілу електричних зарядів, потенціал електричного поля. Скалярне поле називають *стаціонарним*, якщо величина $u(M)$ не залежить від часу t. Коли величина u залежить не лише від точки M, а й від часу t, такі поля називають *нестаціонарними*.

Основним питанням дослідження скалярного поля є зміна функції $u(M)$ при переході від однієї точки простору до іншої.

Геометричне місце точок, в яких функція u набуває сталого значення, називають *поверхнею рівня*. Через кожну точку M_0 області V проходить єдина поверхня рівня. Її рівняння у вибраній системі координат має вигляд

$$u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0) = C.$$

Якщо розподіл значень фізичної величини вивчається в якій-небудь плоскій області, то функція залежить від двох змінних x і y. Рівність $u(x, y) = C$ визначає деяку криву, яку називають *лінією рівня* плоского скалярного поля.

Важливою характеристикою скалярного поля є швидкість зміни поля в заданому напрямі.

Швидкість зміни функції $u(M)$ у точці $M(x, y, z)$ у напрямі вектора $\bar{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ характеризується похідною (див. п. 10.6) $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = (\operatorname{grad} u, \bar{l})$, де градієнт функції u — це вектор $\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, і часто позначається $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, де $(-,-)$ — скалярний добуток.

Таким чином, похідна функції за заданим напрямом дорівнює скалярному добуткові градієнта функції на одиничний вектор цього напряму.

Згідно з означенням скалярного добутку

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{l}} = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\operatorname{grad} u$ і $\bar{e}_{\bar{l}}$. Звідси випливає, що похідна за напрямом досягає найбільшого значення, коли $\cos\varphi = 1$, тобто при $\varphi = 0$. Це найбільше значення дорівнює $|\operatorname{grad} u|$. Звідси $|\operatorname{grad} u|$ — найбільше можливе значення похідної $\frac{\partial u}{\partial \bar{l}}$ у точці M, а напрям $\operatorname{grad} u$ збігається з напрямом променя, що виходить із точки M, уздовж якого функція змінюється найшвидше.

Виберемо довільну точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і запишемо рівняння поверхні рівня, що проходить через цю точку:

$$u(x, y, z) = u_0,$$

де $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$.

Запишемо рівняння нормалі до цієї поверхні в точці M:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}}.$$

Звідси градієнт функції $u(x, y, z)$ у точці M_0, що має проекції $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0}, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{M_0}$, є напрямним вектором нормалі.

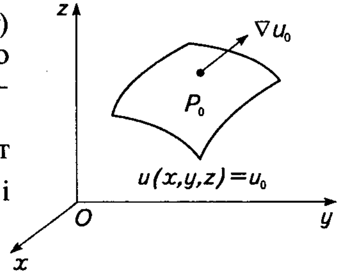


Рис. 11.33

Таким чином, градієнт функції $u(x, y, z)$ у кожній точці напрямлений по нормалі до поверхні рівня скалярного поля, що проходить через цю точку (рис. 11.33).

У плоскому полі $u = u(x, y)$ градієнт $\text{grad}\, u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\bar{j}$ лежить у площині Oxy і перпендикулярний до лінії рівня.

Якщо кожній точці M простору V ставиться у відповідність вектор $\bar{a}$, то кажуть про ***векторне поле*** (наприклад, поле швидкостей потоку рідини, яке описується в кожній точці вектором $\bar{a}$, силове поле тяжіння, поле електричної напруги, поле магнітної напруги).

Векторне поле можна задати в прямокутних координатах у вигляді

$$\bar{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\bar{i} + Q(x, y, z)\,\bar{j} + R(x, y, z)\,\bar{k}.$$

Для наочного зображення векторних полів використовують *векторні лінії*. Це криві, в кожній точці яких вектор поля $\bar{a}(M)$ є дотичним вектором.

Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — параметричне рівняння векторної лінії, то її радіус-вектор $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$. Вектор $d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ напрямлений по дотичній до L. З означення векторної лінії вектори $\bar{a}$ і $d\bar{r}$ колінеарні в кожній точці L. Умови колінеарності

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

визначають систему рівнянь векторних ліній поля. Якщо $\bar{a}(M)$ — поле швидкостей потоку рідини, то його векторні лінії — це траєкторії частинок рідини, які називають *лініями току рідини*.

Поверхні, складені з векторних ліній, називають *векторними поверхнями*. Якщо L — який-небудь замкнений контур, який не збігається з векторною лінією, то векторні лінії, що проходять через точки цього контура, утворюють *векторну поверхню (векторну трубку)*.

■ **Приклад 11.38**. *Знайти векторне поле й векторні лінії поля лінійних швидкостей $\bar{v}$ точок твердого тіла, яке обертається зі сталою кутовою швидкістю $\bar{\omega}$ навколо осі Oz.*

Швидкість $\bar{v}$ точки M дорівнює векторному добуткові: $\bar{v} = [\bar{\omega}, \bar{r}]$, де $\bar{\omega}$ — вектор кутової швидкості; $\bar{r}$ — радіус-вектор точки M відносно якої-небудь точки осі обертання. Візьмемо цю нерухому точку осі за початок координат, а вісь обертання — за вісь Oz. Тоді $\bar{\omega} = \omega\bar{k}$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$,

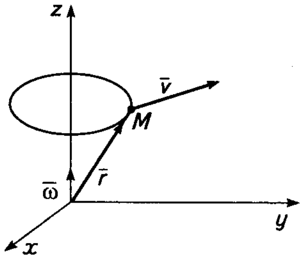


Рис. 11.34

$$\bar v = [\bar\omega, \bar r] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\bar i + \omega x\bar j$$

— шукане векторне поле, тобто поле є плоским. Векторними лініями такого поля є кола, що лежать у площинах, паралельних площині Oxy, з центром на осі Oz (рис. 11.34). Рівняння таких кіл мають вигляд $x^2 + y^2 = R^2$, $z = z_0 = \text{const}$. Легко перевірити, що рівність $\dfrac{dx}{-\omega y} = \dfrac{dy}{\omega x}$ виконується.

Продиференціювавши рівняння кола, дістанемо $2x\,dx + 2y\,dy = 0$, тобто $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x}$. Помножимо знаменник цієї рівності на ω і прийдемо до рівності $\dfrac{dx}{-\omega y} = \dfrac{dy}{\omega x}$.

■ **Приклад 11.39**. *Знайти векторні лінії векторного поля $\bar a(M) = \text{grad}\, u$, де $u = xyz$.*

Для векторного поля

$$\bar a(M) = \text{grad}\,(xyz) = yz\bar i + zx\bar j + xy\bar k$$

векторні лінії мають вигляд $\dfrac{dx}{yz} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{xy}$ або $x\,dx = y\,dy$ і $y\,dy = z\,dz$. Звідси

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_1;\quad \frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + c_2.$$

Ці рівняння визначають дві сім'ї гіперболічних циліндрів, твірні яких паралельні осям Oz і Ox відповідно.

Якщо ($c_1 = c_2 = 0$), то рівняння визначають дві пари площин $x = \pm\, y$, $y = \pm\, z$.

Будь-яка векторна лінія поля $\bar a(M)$ є лінією перетину двох поверхонь, які утворюються із сім'ї при фіксованих значеннях c_1 і c_2.

11.5.2. Потенціальне векторне поле

Векторне поле $\bar a(M)$ називається ***потенціальним в області*** *V, якщо вектор поля $\bar a$ є градієнтом деякої скалярної функції $u = u(M)$:*

$$\bar a = \text{grad}\, u(M).$$

Функцію $u(M)$ у цьому разі називають *потенціалом векторного поля.*

Постає запитання: за яких умов дане векторне поле $\overline{a}(M)$ буде потенціальним? Це питання вже розглядалося в п. 11.3.5.

Нехай P, Q і R — проекції вектора $\overline{a}$ на осі координат Ox, Oy, Oz відповідно, тобто $\overline{a} = \overline{a}(M) = P\overline{i} + Q\overline{j} + R\overline{k}$. Отже, векторне поле $\overline{a}(M)$ буде потенціальним, якщо знайдеться функція $u(M)$ така, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \ \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \ \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

У п. 11.3.5 було встановлено, що вираз $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ (де P, Q, R — неперервні функції і мають неперервні частинні похідні першого порядку) буде повним диференціалом деякої функції $u(x, y, z)$ тоді й лише тоді, коли виконуються умови

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ці умови й означають, що векторне поле $\overline{a}(M)$ потенціальне.

Властивості потенціального поля

1. *Криволінійний інтеграл від вектора поля, взятий між двома точками поля, не залежить від шляху інтегрування й дорівнює різниці значень потенціалу поля наприкінці й на початку інтегрування:*

$$\int_A^B \overline{a}\,d\overline{r} = \int_A^B \operatorname{grad}\ u\,d\overline{r} = \int_A^B du = u(B) - u(A)$$

[легко перевірити, що $(\operatorname{grad} u, d\overline{r}) = du$].

2. *У потенціальному полі $\overline{a}$ потенціал поля $u(M)$ у довільній точці M можна обчислити за формулою*

$$u(M) = \int_A^M \overline{a}\,d\overline{r} + C,$$

причому $C = u(A)$.

Для обчислення інтеграла можна вибрати будь-який шлях — це може бути ламана, яка сполучає точки A і M, відрізки якої паралельні осям координат. За точку A простіше взяти початок координат.

■ **Приклад 11.40.** *Показати, що поле* $\bar{a} = yz(2x+y+z)\bar{i} + xz(x+2y+z)\bar{j} + xy(x+y+2z)\bar{k}$ *потенціальне, й знайти потенціал цього поля.*

Обчислимо частинні похідні: $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = x^2 + 2xy + 2xz$; $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = y^2 + 2xy + 2yz$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = z^2 + 2xz + 2zy$.

За шлях інтегрування виберемо ламану $OABM$, де $O(0; 0; 0)$, $A(X; 0; 0)$, $B(X; Y; 0)$, $M(X; Y; Z)$. Знаходимо:

$$u(X,Y,Z) = \int\limits_{OABM} \bar{a}\,d\bar{r} + C = \int\limits_0^A \bar{a}\,d\bar{r} + \int\limits_A^B \bar{a}\,d\bar{r} + \int\limits_B^M \bar{a}\,d\bar{r} + C;$$

$$\bar{a}\,d\bar{r} = yz(2x+y+z)\,dx + xz(x+2y+z)\,dy + xy(x+y+2z)\,dz.$$

Тоді на $[AB]$ маємо: $x = X$; $dx = 0$; $z = 0$; $dz = 0$; $0 \le y \le Y$; отже, $\int\limits_A^B \bar{a}\,d\bar{r} = 0.$

Аналогічно на $[OA]$: $y = z = 0$; $dy = dz = 0$; $0 \le x \le X$; отже, $\int\limits_0^A \bar{a}\,d\bar{r} = 0.$

На $[BM]$: $x = X$; $y = Y$; $dx = dy = 0$; $0 \le z \le Z$; отже, $\int\limits_B^M \bar{a}\,d\bar{r} = \int\limits_0^Z XY(X+Y+2Z)dz = XY(XZ + YZ + Z^2) = XYZ(X+Y+Z)$.

Таким чином, $u(X, Y, Z) = XYZ(X+Y+Z) + C$. Повертаючися до змінних x, y, z, дістанемо $u(M) = xyz(x+y+z) + C$.

11.5.3. Дивергенція вектора

Нехай у деякій області V, обмеженій поверхнею П, задане таке векторне поле $\bar{a}(M) = (P, Q, R)$, що функції $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ неперервні у V разом із частинними похідними.

➡ **Означення 11.10.** ***Дивергенцією векторного поля*** $\bar{a}(M)$ *називають скалярну функцію* $\operatorname{div}\,\bar{a}(M)$, *яка визначається рівністю*

$$\operatorname{div}\,\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Формула Остроградського—Гаусса у векторній формі має вигляд

$$\oiint\limits_{\Pi} \bar{a}\,\bar{n}\,ds = \iiint\limits_V \operatorname{div}\,\bar{a}(M)\,d\tau$$

і формулюється таким чином: потік векторного поля $\bar{a}$ крізь замкнену поверхню П, яка розташована в цьому полі, в напрямі її зовнішньої нормалі дорівнює потрійному інтегралові по області V, обмеженій цією поверхнею, від дивергенції цього векторного поля.

Для з'ясування фізичного змісту поняття дивергенції розглянемо в полі довільну точку M і візьмемо будь-яку нескінченно малу область V, що містить у собі цю точку й обмежена поверхнею П. За формулою Остроградського з використанням теореми про середнє для потрійного інтеграла дістанемо

$$\iint_{\Pi} \overline{a}\ \overline{n}\ ds = V \operatorname{div} \overline{a}(M^*).$$

Звідси, стягуючи область V у точку M, матимемо

$$\operatorname{div} \overline{a}(M) = \lim_{\Pi \to M} \frac{\iint_{\Pi} a_n\ ds}{V}.$$

Це скалярна величина, яка дорівнює границі відношення потоку векторного поля $\overline{a}$ крізь нескінченно малу замкнену поверхню, що обмежує точку M, до об'єму області, обмеженої цією поверхнею.

Виведена формула визначає дивергенцію незалежно від вибору системи координат, оскільки потік і об'єм від нього не залежать.

Нехай вектор $\overline{a}(M)$ характеризує швидкість руху однорідної нестисливої рідини ($\rho = 1$); тоді інтеграл $K = \iint_{\Pi} a_n\ ds$ дорівнює кількості рідини, що протікає в одиницю часу крізь поверхню П у бік нормалі $\overline{n}$.

При замкненій поверхні П, зовнішній нормалі $\overline{n}$ і потоці $K > 0$ з області V, обмеженої поверхнею П, витікає більше рідини, ніж втікає в неї. Отже, всередині V мають бути джерела рідини, інтенсивність яких характеризується потоком K.

Якщо $K < 0$, то всередині П є стоки рідини. *Потужністю,* або *інтенсивністю, джерела (стоку)* називають значення потоку вектора крізь нескінченно малу поверхню. Відношення потоку до об'єму області, обмеженої П, становить *питому інтенсивність джерел і стоків у області V.* Граничний перехід в одержаному відношенні K/V, коли область V стягується в точку M, дає характеристику питомої інтенсивності джерела або стоку в точці M.

Звідси, якщо $\overline{a}(M)$ — швидкість потоку однорідної нестисливої рідини, то $\operatorname{div} \overline{a}(M)$ характеризує питому інтенсивність джерела або стоку в точці M заданого поля швидкості. В загальному випадку, коли $\overline{a}(M)$ не є швидкістю потоку рідини, доходимо висновку, що $\operatorname{div} \overline{a}(M)$ характеризує потужність джерела або стоку поля в точці M.

При div $\overline{a}(M)>0$ це буде потужність джерела, а при div $\overline{a}(M)<0$ — потужність стоку в точці M.

Розглянемо властивості дивергенції. Нехай $\overline{a}(M)$ і $\overline{b}(M)$ — векторні функції точки і $\varphi(M)$ — скалярна функція точки. Тоді

$$\text{div}\,(\overline{a}+\overline{b})=\text{div}\,\overline{a}+\text{div}\,\overline{b};$$

$$\text{div}\,(\varphi\cdot\overline{a})=\varphi\ \text{div}\,\overline{a}+(\text{grad}\,\varphi\cdot\overline{a}).$$

■ **Приклад 11.41**. *Знайти дивергенцію векторного поля $a=x^3\overline{i}+y^2\overline{j}+$ $+z^3\overline{k}$ у точці $M(1;-1;2)$.*

Згідно з означенням дивергенції векторного поля $\overline{a}=\{P,Q,R\}$ дістаємо

$$\text{div}\,\overline{a}(M)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M=(3x^2+2y+3z^2)_{M(1;\,-1;\,2)}=13.$$

11.5.4. Соленоїдне векторне поле

Векторне поле $\overline{a}(M)$ називається ***соленоїдним*** *в області V, якщо в цій області немає джерел і стоків, тобто виконується умова*

$$\text{div}\,\overline{a}(M)=0.$$

Потік соленоїдного вектора крізь поперечний переріз векторної трубки сталий.

Розглянемо довільну векторну трубку між двома її довільними перерізами Π_1 і Π_2 (рис. 11.35). Бічну поверхню трубки позначимо через П. Згідно з формулою Остроградського запишемо

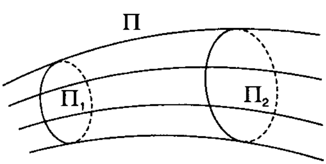


Рис. 11.35

$$\iint\limits_{\Pi_1}a_n\,ds+\iint\limits_{\Pi_2}a_n\,ds+\iint\limits_{\Pi}a_n\,ds=0.$$

Інтеграл $\iint\limits_{\Pi}a_n\,ds=0$, оскільки вектори $\overline{a}$ і $\overline{n}$ ортогональні, а їх скалярний добуток дорівнює нулю. Якщо в інтегралі по поверхні Π_2 змінити напрям нормалі, то доведемо сформульоване твердження

$$\iint\limits_{\Pi_1}a_n\,ds+\iint\limits_{\Pi_2}a_n\,ds.$$

■ **Приклад 11.42**. *Обчислити дивергенцію й потік вектора напруженості електростатичного поля, утвореного зосередженим джерелом.*

Нехай джерело перебуває на початку координат. Тоді $\overline{E} = \frac{q}{r^3}\bar{r}$, де $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Похідні проекцій вектора $\overline{E}$ відповідно становитимуть:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{qx}{r^3}\right) = \frac{q}{r^5}\,(r^2 - 3x^2); \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{qy}{r^3}\right) =$$

$$= \frac{q}{r^5}(r^2 - 3y^2); \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{qz}{r^3}\right) = \frac{q}{r^5}(r^2 - 3z^2).$$

Звідси $\operatorname{div}\overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{r^5}[3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)]$.

Дивергенція електростатичного поля зосередженого джерела дорівнює нулю скрізь навколо джерела: $\operatorname{div}\overline{E}(M) = 0$.

Обчислимо потік вектора напруженості крізь замкнену поверхню П у бік її зовнішньої нормалі.

Якщо всередині поверхні П немає джерела, то за формулою Остроградського—Гаусса, оскільки $\operatorname{div}\overline{E}(M) = 0$, дістанемо $\iint\limits_{П} \overline{E}\,\bar{n}\,ds = 0$. Нехай П — сфера з центром на початку координат. Тоді

$$\iint\limits_{П} \overline{E}\,\bar{n}\,ds = \iint\limits_{П} \frac{q}{r^3}\,\bar{r}\,\frac{\bar{r}}{r}\,ds = 4\pi q.$$

Можна довести, що для будь-якої замкненої поверхні П, яка містить заряд, справедливий одержаний результат: потік вектора напруженості крізь поверхню кулі з центром у джерелі в напрямі зовнішньої нормалі не залежить від радіуса й дорівнює $4\pi q$.

11.5.5. Циркуляція й ротор

Нехай у деякій області задано векторне поле $\bar{a}(M) = P(M)\,\bar{i} + Q(M)\,\bar{j} + R(M)\,\bar{u}$ і L — замкнену кусково-гладку криву, яка розташована в цій області.

Означення 11.11. *Криволінійний інтеграл*

$$\oint\limits_{L}(\bar{a}(M), d\bar{r}) = \int\limits_{L} p\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

*називають **циркуляцією векторного поля** $\bar{a}(M)$ уздовж кривої L.* Циркуляція залежить від вибору напряму на кривій L.

- *Зауваження.* В силовому полі циркуляція виражає роботу силового поля при переміщенні матеріальної точки вздовж шляху L. Для полів іншої природи циркуляція має інший фізичний зміст.

■ **Приклад 11.43.** *Обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{a} = (xy + x + y)\bar{i} + (xy + x - y)\bar{j}$ вздовж контура L, де L — коло $x^2 + y^2 = ax$. Інтегрування здійснити в додатному напрямі.*

Рівняння кола зведемо до параметричного вигляду з центром у точці $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$, тобто

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t,\quad y = \frac{a}{2}\sin t\ \ (0 \le t \le 2\pi);$$

$$\oint_L (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy = \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{a}{2}(1 + \cos t)\times$$

$$\times \sin^2 t - (1 + \cos t)\sin t - \sin^2 t + \frac{a}{2}(1 + \cos t)\sin t\cos t +$$

$$+ (1 + \cos t)\cos t - \sin t\cos t\Big]dt = -\frac{\pi a^3}{8}.$$

➡ **Означення 11.12.** *Векторну функцію $\bar{a}(M)$, яка визначається рівністю*

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}$$

або символічно формулою

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

називають ***ротором*** *або* ***вихором*** *$\bar{a}(M)$.*

Формула Стокса у векторній формі має вигляд

$$\oint_L \bar{a}\,d\bar{r} = \iint_\Pi \operatorname{rot}\bar{a}\cdot\bar{n}\,ds$$

і формулюється таким чином: циркуляція векторного поля $\bar{a}$ по довільному кусково-гладкому замкненому контуру L дорівнює потоку вектора rot $\bar{a}$ крізь поверхню П, обмежену цим контуром L.

■ **Приклад 11.44.** *Обчислити циркуляцію вектора поля $\bar{v} = -\omega y\bar{i} + \omega x\bar{j}$ лінійних швидкостей тіла, котре обертається, вздовж контура L, що лежить у площині П (рис. 11.36), нормаль $\bar{n}$ до якої утворює з осями координат кути α, β, γ. Напрям обходу контура l і напрям нормалі $\bar{n}$ узгоджені між собою так, як у теоремі Стокса.*

Обчислимо циркуляцію за формулою Стокса

$$\oint_l -\omega y\,dx + \omega x\,dy = \omega\iint_S 2dx\,dy = 2\omega\cos\gamma\iint_S ds,$$

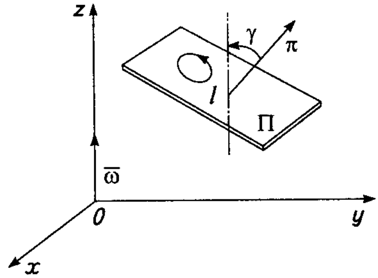


Рис. 11.36

де S — область, обмежена контуром l. Інтегрування здійснюється по верхній стороні П, а тому $dx\,dy = \cos\gamma\, ds$. Оскільки $\cos\gamma = \text{const}$, то циркуляція становить $2\omega\cos\gamma\cdot s = 2\omega_n\cdot s$, де s — площа області, обмеженої контуром l, а $\omega\cos\gamma = \omega_n$ — проекція вектора $\overline{\omega}$ на напрям вектора $\overline{n}$. Якщо l — коло радіусом R, то циркуляція дорівнює $2\omega_n\pi R^2$. Із цієї формули випливає: якщо площину П обертати, тобто змінювати кут γ, то циркуляція змінюватиметься. Найбільшою вона буде при $\gamma = 0$, тобто коли площина П паралельна площині Oxy і нормаль $\overline{n}$ до неї паралельна вектору кутової швидкості $\overline{\omega}$. Якщо $\gamma = \pi/2$, тобто нормаль до площини перпендикулярна до вектора $\overline{\omega}$, то циркуляція дорівнює нулю. Якщо змінити сторону площини П, то вектор $\overline{n}$ змінить напрям, і проекція ω_n стане від'ємною. А тому й циркуляція також буде величиною від'ємною. Як і для дивергенції можна показати, що визначення ротора не залежить від вибору системи координат.

■ **Приклад 11.45.** *Знайти ротор поля* $[\overline{a},\overline{b}]$, *якщо:* $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + x^2\overline{k}$ і $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$.

Згідно з означенням векторного добутку маємо

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x^2 & y^2 & -x^2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2y^2 - x^2)\overline{i} - (2x^2 + x^2)\overline{j} - (x^2 + y^2)\overline{k}.$$

За означенням ротора дістанемо

$$\text{rot}\;\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y^2 - x^2 & -3x^2 & -x^2 - y^2 \end{vmatrix} = -2y\overline{i} + 2x\overline{j} - 2(3x + 2y)\overline{k}.$$

Властивості ротора. Нехай $\overline{a}(M)$ і $\overline{b}(M)$ — векторні поля і $\varphi(M)$ — скалярне поле. Тоді

$$\text{rot}(\overline{a} + \overline{b}) = \text{rot}\;\overline{a} + \text{rot}\;\overline{b},$$

$$\text{rot}(\varphi\,\overline{a}) = \varphi\;\text{rot}\;\overline{a} + \text{grad}\;\varphi\; x\;\overline{a}.$$

Пропонуємо довести цю властивість самостійно.

11.5.6. Безвихрове векторне поле

*Векторне поле $\overline{a}(M)$ в області V називається **безвихровим**, якщо в кожній точці цієї області ротор вектора $\overline{a}(M)$ дорівнює нулю:*

$$\operatorname{rot} \overline{a}(M) = 0.$$

Якщо поле безвихрове, то згідно з означенням виконується така умова:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

яка збігається з умовою потенціальності поля. А тому будь-яке безвихрове поле потенціальне, а будь-яке потенціальне поле безвихрове.

Поле градієнтів завжди безвихрове:

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{grad} u(M) = 0.$$

Доведемо, що поле вихорів соленоїдне, тобто справджується формула

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot} \overline{a}(M) = 0.$$

Розглянемо векторне поле $\overline{a}$ і поле його вихорів $\operatorname{rot} \overline{a}$. Складемо вираз дивергенції:

$$\operatorname{div}\ \operatorname{rot} \overline{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{rot} \overline{a})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot} \overline{a})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot} \overline{a})_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

якщо P, Q, R двічі неперервно диференційовні, тобто поле вихорів не має джерел і стоків.

Поле $\overline{a}(M)$ називається *гармонічним*, або *лапласовим*, якщо воно безвихрове й соленоїдне, тобто $\operatorname{rot} \overline{a}(M) = 0$ і $\operatorname{div} \overline{a}(M) = 0$. Звідси $\overline{a} = \operatorname{grad} u(M)$, причому потенціал цього поля $u(M)$ задовольняє рівняння Лапласа $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$.

Електростатичне поле зосередженого джерела гармонічне.

11.5.7. Векторні диференціальні операції другого порядку

Знаходження градієнта, дивергенції і ротора — це векторні диференціальні операції першого порядку. В них беруть участь тільки перші похідні від скалярних функцій.

Розглянемо векторні диференціальні операції другого порядку. Нехай маємо скалярне поле $u(M)$ і знайдено градієнт цього поля $\operatorname{grad} u$. Поле градієнта є векторним, і ми можемо шукати його дивергенцію й ротор: div grad u і rot grad u.

Якщо задано векторне поле $\bar{a}(M)\ P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k}$, то воно породжує два поля: скалярне $\operatorname{div}\bar{a}(M)$ і векторне $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$. Звідси можемо знайти градієнт першого поля $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}(M)$ і дивергенцію та ротор другого: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}(M)$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}(M)$. Усього маємо п'ять векторних диференціальних операцій другого порядку. Звернемо увагу на три з них і розглянемо їх детальніше.

1 Оскільки $\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$, утворюючи дивергенцію цього вектора, дістанемо

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Права частина рівності називається *оператором Лапласа від функції u* й позначається ще й так:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u=\nabla(\nabla u)=\nabla^2 u,$$

де $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$ — символічний вектор («набла-вектор»). Він має такі властивості:

1 *добуток набла-вектора ∇ на скалярну функцію $u(M)$ дає градієнт цієї функції:*

$$\nabla u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}=\operatorname{grad} u;$$

2 *скалярний добуток набла-вектора ∇ на векторну функцію $\bar{a}(M)$ дає дивергенцію цієї функції:*

$$(\nabla,\bar{a}(M))=\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)(P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k})=$$

$$=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial z}=\operatorname{div}\bar{a}(M);$$

3 *векторний добуток набла-вектора ∇ на векторну функцію $\bar{a}(M)$ дає ротор цієї функції:*

$$[\nabla,\bar{a}(M)]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}=\operatorname{rot}\bar{a}(M).$$

Таким чином, дії з набла-вектором виконуються згідно з правилами дій векторної алгебри.

2) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = 0$. Кожна дужка у виразі для ротора являє собою в даному випадку різницю мішаних похідних функції u, що відрізняється лише порядком диференціювання, наприклад:

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{grad} u = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

За допомогою набла-вектора це співвідношення записується таким чином:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} u = [\nabla, \nabla u] = [\nabla, \nabla] u = 0,$$

оскільки векторний добуток однакових «векторів» дорівнює нулю.

3) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}(M) = 0.$

Дійсно,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} = 0.$$

Якщо записати це за допомогою набла-вектора:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}(M) = (\nabla, [\nabla, \bar{a}]) = 0,$$

то матимемо мішаний добуток трьох векторів, два з яких будуть однаковими. Але такий добуток дорівнює нулю. Не будемо записувати вирази для решти двох векторних операцій другого порядку $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}(M)$ і $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}(M)$, оскільки вони трапляються рідше. Вкажемо лише на зв'язок між ними:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a}(M) - \Delta\bar{a}(M),$$

де $\Delta\bar{a}(M) = \Delta P\bar{i} + \Delta Q\bar{j} + \Delta R\bar{k}$ (Δ — оператор Лапласа).

Пропонуємо довести самостійно, що для диференціальних операцій другого порядку справедливі такі формули:

$$\nabla\nabla u = \nabla \operatorname{grad} u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u;$$

$$[\nabla, [\nabla, \bar{a}]] = [\nabla, \operatorname{rot}\bar{a}] = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{a};$$

$$[\nabla, \nabla u] = [\nabla, \operatorname{grad} u] = \operatorname{rot}\operatorname{grad} u;$$

$$\nabla(\nabla, \bar{a}) = \nabla\operatorname{div}\bar{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a};$$

$$(\nabla, [\nabla, \bar{a}]) = (\nabla, \operatorname{rot}\bar{a}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}.$$

ЗМІСТ

ЗМІСТ
Книги 2

Навчальне видання

ПРИЗВА Георгій Йосипович
ПЛАХОТНИК Володимир Васильович
ГОРДИНСЬКИЙ Любомир Дмитрович
та ін.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У двох книгах

Книга 1

Основні розділи

Художнє оформлення *О. Г. Григора*
Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Л. І. Швець*
Коректори *А. І. Бараз, А. В. Бородавко, Л. Ф. Іванова*

Підп. до друку 19.08.03. Формат 60 × 84/16. Папір офс. № 1. Гарнітура Таймс.
Офсетний друк. Умов.-друк. арк. 23,25. Умов. фарбовідб. 23,71.
Обл.-вид. арк. 22,99. Тираж 5000 пр. Вид. № 4062. Зам. № 3-376.

Оригінал-макет виготовлено інженером-програмістом *О. В. Кузьменком* та оператором *А. В. Гуторовою*

Видавництво «Либідь»
01004, Київ, Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію
№ 404 від 06.04.2001

Віддруковано на ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.