Вища
МАТЕМАТИКА
Спеціальні розділи

$\mathrm{Re}\, S$ $\mathrm{Im}\, S$ Arg

$P(A) = \mu / n$

2

Вища математика

У двох книгах

Книга 2

СПЕЦІАЛЬНІ РОЗДІЛИ

За редакцією професора Г. Л. КУЛІНІЧА

2-ге видання, перероблене й доповнене

Допущено
Міністерством освіти і науки України

Підручник для студентів
природничих спеціальностей університетів
і вищих технічних навчальних закладів

Київ
"Либідь"
2003

ББК 22.11я73
В55

Автори: *Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим, Л. Д. Гординський, М. В. Грисенко, В. Я. Данилов*

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. В Булдигін*
(Національний технічний університет України «КПІ»),
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Д. Кошманенко*
(Інститут математики НАН України)

Допущено Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/12—2355 від 10.09.2001 р.)

Редакція літератури з природничих і технічних наук

Редактор *А. С. Мнишенко*

Вища математика: Підручник: У 2 кн. — 2-ге вид., перероб. і
В55 доп. — К.: Либідь, 2003. — Кн. 2. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулініч, Є. Ю. Таран, В. М. Бурим та ін.; За ред. Г. Л. Кулініча. — 368 с.
ISBN 966-06-0230-8 (кн. 2), ISBN 966-06-0228-6.

У другій книзі розглядаються деякі спеціальні розділи математики: функціональні ряди, звичайні диференціальні рівняння, рівняння математичної фізики, функції комплексної змінної, теорія ймовірностей та математична статистика.

Для студентів природничих спеціальностей університетів і вищих технічних навчальних закладів.

ББК 22.11я73

ISBN 966-06-0230-8 (кн. 2)
ISBN 966-06-0228-6

Глава 12 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

12.1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

При вивченні багатьох явищ природи, коли той чи інший процес описується деякою функцією просторових координат або часу, вдається встановити зв'язок між цією функцією та її похідними. Виражається він диференціальним рівнянням. Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*. Загальний вигляд такого рівняння n-го порядку

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \tag{12.1}$$

де F — відома функція від $n+2$ змінних, що, як правило, задовольняє деякі умови неперервності й диференційовності; $y = y(x)$ — функція від x — розв'язок диференціального рівняння, який підлягає відшуканню.

Розв'язком диференціального рівняння порядку n називають функцію $y(x)$, яка має на деякому інтервалі $I = (a, b)$ похідні до порядку n включно і $\forall\ x \in I$ справджується рівність

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in (a, b). \tag{12.2}$$

Зазначимо, що кожному розв'язкові відповідає свій інтервал визначення. Якщо y_1: $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ — розв'язок рівняння (12.1), то y_2: $y = y(x)$, $x \in (c, d)$ при $(c, d) \subset (a, b)$ також є розв'язком цього самого рівняння; при цьому кажуть, що y_2 є *звуженням* y_1, а y_1 — *продовженням* y_2. Якщо деякий розв'язок визначений на максимальному інтервалі існування, то його називають *непродовжуваним*.

■ **Приклад 12.1**. *Розглянемо таке диференціальне рівняння другого порядку:* $y'' + y = 0$.

Легко переконатися, що функції $y_1 = \sin x$, $x \in (0, \pi)$: $y_2 = \sin x$, $x \in (0, \infty)$; $y_3 = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ є розв'язками даного рівняння. Застосуйте до цих розв'язків вище наведені поняття.

У цій главі вживатимемо вираз *проінтегрувати диференціальне рівняння,* що означає: знайти той чи інший розв'язок даного рівняння; при цьому доводиться застосовувати операцію інтегрування. Для деяких типів диференціальних рівнянь можна вказати конкретну техніку інтегрування.

1. Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (12.3)$$

або, якщо його розв'язати відносно похідної y', то

$$y' = f(x, y), \qquad (12.4)$$

де функції $F(x, y, y')$ та $f(x, y)$ вважаються заданими. При цьому, як правило, $F(x, y, z)$ визначена в деякій області D тривимірного простору $\mathbf{R}^3$ і неперервна в цій області разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial F}{\partial z}$. Область D може збігатися з $\mathbf{R}^3$.

У випадку (12.4) функцію $f(x, y)$ зазвичай вважають неперервною разом з її частинною похідною $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Рівність (12.4) називають ***диференціальним рівнянням першого порядку***, розв'язаним відносно похідної.

Наведемо кілька прикладів таких рівнянь:

- $y' = f(x),\ x \in (a, b),\ f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b);
- $y' = f(x)\,g(y)$, де функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені й неперервні на інтервалах (a, b) та (c, d) відповідно;
- $y' + P(x)y = Q(x)$, де $P(x)$, $Q(x)$ визначені й неперервні на інтервалі $I = (a, b)$ функції.

У разі дослідження диференціальних рівнянь першого порядку дуже корисними можуть бути геометричні тлумачення рівнянь (12.3) або (12.4) та їх розв'язків.

Насамперед зазначимо, що графік розв'язку диференціального рівняння (x, y, як правило, вважають декартовими координатами точок площини) називають *інтегральною кривою.* Зрозуміло, що в кожній точці така крива матиме дотичну. З іншого боку, рівняння (12.4) кожній точці області визначення функції $f(x, y)$ ставить у відповідність певне значення y', тобто дає певне значення кутового коефіцієнта дотичної. Сукупність трійок x, y, $f(x, y)$ утворює так зване *поле напрямів.* Графічно його можна зобразити, накресливши у відповідних точках області визначення $f(x, y)$ стрілки, що утворюють із віссю Ox кути, тангенси яких збігаються зі значеннями $f(x, y)$ у цих точках. Геометричне місце точок з однаковим напрямом поля $y' = C$ називають *ізоклінами.*

Отже, з геометричного погляду, *розв'язати диференціальне рівняння (12.4) — це означає знайти криву лінію (інтегральну криву) $y = \varphi(x)$, яка має в кожній точці $A(x, y)$ дотичну з кутовим коефіцієнтом, що збігається з напрямом поля, породженого рівнянням (12.4), тобто дорівнює $f(x, y)$ в цій точці.*

■ **Приклад 12.2.** *Побудувати (зобразити стрілками на площині) поле напрямів, ізокліну й, користуючися цим, накреслити інтегральні криві таких рівнянь:*

1) $y' = x(y-2)$;
2) $y' = y/x$;
3) $y' = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 < 1$.

Результати дослідження для рівняння 1) наведено на рис. 12.1 (штриховими лініями зображено ізокліни (прямі $x = 0$, $x = 2$ та гіперболи), стрілками — поле напрямів, суцільного лінією — одну з інтегральних кривих).

Зверніть увагу: рівняння має цілу сім'ю розв'язків!

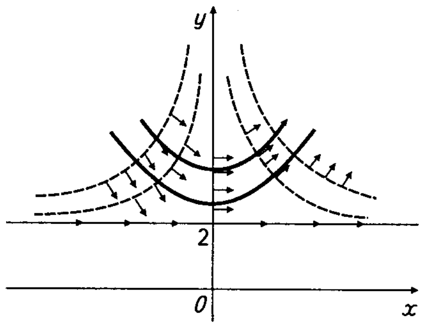

Рис. 12.1

Розглянемо задачу, яку називають ***задачею Коші:*** *знайти розв'язок диференціального рівняння* (12.4) $y = y(x)$ *такий, що*

$$y(x_0) = y_0, \qquad (12.5)$$

де (x_0, y_0) — *задана точка з області визначення рівняння.* Умову (12.5) називають *початковою.*

■ **Приклад 12.3.** *Розв'язати задачу Коші*

$$y' = y/x,\ \ y(1) = 2.$$

Рівняння має цілу сім'ю (однопараметричну) розв'язків: $y = Cx$, $x \in \mathbf{R}^+$. Легко перевірити, що розв'язком цієї задачі (причому непродовжуваним) є функція $y = 2x$, $x \in (0; +\infty)$.

Наведемо важливу теорему, доведення якої можна знайти в будь-якому підручнику з диференціальних рівнянь

Теорема 12.1 Коші—Пікара (достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку). Нехай в області $D \subseteq \mathbf{R}^2$ задано функцію $f(x, y)$, неперервну в цій області разом зі своєю частинною похідною $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Тоді $\forall\,(x_0, y_0) \in D$, задача Коші (12.4)—(12.5) має розв'язок і причому єдиний, визначений у деякому околі точки x_0.

Зазначимо, що суть одного зі способів доведення цієї фундаментальної теореми (методу послідовних наближень) полягає ось у чому: шуканий розв'язок є границею конструктивно побудованої послідовності функцій

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x),$$

де $y_0(x) = y_0$, а

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_n(\tau))d\tau. \tag{12.6}$$

При цьому гарантується рівномірна збіжність у деякому інтервалі.

■ **Приклад 12.4.** *Розв'язати задачу Коші*

$$y' = y, \ \ y(0) = 1; \ \ D = \mathbf{R}^2. \tag{12.7}$$

За схемою (12.6) будуємо послідовність функцій (до речі, самостійно перевірте виконання умов теореми Коші—Пікара): при $x \in \mathbf{R}$

$$y_0(x) \equiv 1, \ \ y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(\tau)d\tau.$$

Звідси

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 \cdot d\tau = 1 + x;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+\tau)d\tau = \left(1 + \tau + \frac{\tau^2}{2}\right)\Bigg|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$y_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

і т. д. Нарешті

$$y_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Легко переконатися, що $\lim\limits_{n \to \infty} y_n(x) = e^x$. Отже, розв'язком розглянутої задачі Коші є функція $y = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

Зауважимо принагідно, що єдиність розв'язку задачі Коші слід розуміти таким чином: якщо $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — два її розв'язки, визначені на інтервалах $I_1 = (a_1, b_1)$ і $I_2 = (a_2, b_2)$ відповідно, то $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ на перетині $I_1 \cap I_2$.

У прикладі 12.4 продумайте цю ситуацію, розглянувши кілька розв'язків задачі Коші (12.7):

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad x \in (-1; +\infty);$$

$$\varphi_2(x) = e^x, \quad x \in (-1; 1);$$

$$\varphi_3(x) = e^x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Повторіть поняття продовження та звуження розв'язку. Котрий із розв'язків φ є непродовжуваним?

Питання щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші є глибоким і цікавим. У спеціальній літературі з диференціальних рівнянь йому приділено значну увагу.

■ **Приклад 12.5.** *Розв'язати задачу Коші*

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0; \ D = \mathbf{R}^2. \tag{12.8}$$

Легко безпосередньо перевірити, що будь-яка функція

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3, & x < \alpha, \\ 0, & \alpha \le x \le \beta, \\ (x-\beta)^3, & x > \beta, \end{cases}$$

де $\alpha \le \beta$, $\beta \ge 0$ довільні, є розв'язком задачі Коші (12.8). Зрозуміло, що єдиність розв'язку порушується. Яка з умов теореми (12.1) про існування та єдиність розв'язку при цьому не справджується?

Розглянемо рівняння (12.3), яке є диференціальним рівнянням першого порядку, не розв'язаним відносно похідної.

Загальним інтегралом диференціального рівняння (12.3) називається рівність

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{12.9}$$

де функція $\Phi(x, y, z)$ неперервно диференційовна в деякій області точок (x, y, z) і має таку властивість: якщо продиференціювати рівняння (12.9) по x, вважаючи $y = y(x)$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y' = 0 \tag{12.10}$$

і виключити C із рівнянь (12.9) та (12.10), то дістанемо диференціальне рівняння, рівносильне (12.3). При цьому рівняння (12.3) називають ***диференціальним рівнянням сім'ї функцій*** (12.9), які залежать від параметра C.

■ **Приклад 12.6.** *Перевірити, що рівність*

$$y - (x - C)^3 = 0, \ x \in \mathbf{R} \tag{12.11}$$

є загальним інтегралом диференціального рівняння

$$y'^3 - 27y^2 = 0. \tag{12.12}$$

Продиференціюємо рівність (12.11) по x, вважаючи y функцією від x. Дістанемо

$$y' - 3(x - C)^2 = 0. \tag{12.13}$$

Виключивши з (12.11) та (12.13) параметр C, матимемо

$$y'^3 = 27y^2,$$

тобто рівняння (12.12).

2. Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь першого порядку, інтегрування яких можна звести до квадратур, тобто до інтегралів.

Зазначимо насамперед, що рівняння (12.4) у цілому ряді випадків варто переписати в так званій диференціальній формі:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0; \tag{12.14}$$

при цьому $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $f(x, y) = -\dfrac{M}{N}$, а рівняння (12.14) зручне тим, що воно по суті об'єднує два рівняння: відносно функції $y = y(x)$ і відносно функції $x = x(y)$.

Рівнянням із відокремленими змінними називають рівняння вигляду

$$f(x)\, dx + \varphi(y)\, dy = 0, \tag{12.15}$$

де $f(x)$, $x \in (a, b)$; $\varphi(y)$, $y \in (c, d)$ — відомі неперервні функції.

Легко безпосередньо (диференціюванням) перевірити, що загальним інтегралом рівняння (12.15) буде

$$\int f(x)\, dx + \int \varphi(y)\, dy = C; \tag{12.16}$$

при цьому первісні $\int f(x)\, dx$, $\int \varphi(y)\, dy$ не обов'язково виражаються через елементарні функції. Рівняння (12.16) визначає y як неявну функцію від x (при фіксованій сталій C); якщо його вдається розв'язати відносно y, то дістають так званий загальний розв'язок рівняння (12.15)

$$y = y(x, C);$$

при цьому C називають *довільною сталою.*

До рівняння вигляду (12.15) зводиться диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$f_1(x)\,f_2(y)\,dx + \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0; \tag{12.17}$$

якщо $\varphi_1(x) \neq 0,\ f_2(y) \neq 0$, то, поділивши обидві частини (12.17) на добуток $\varphi_1(x)\,f_2(y)$, відокремимо змінні й дістанемо рівняння вигляду (12.15):

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(y)}\,dy = 0. \tag{12.18}$$

Рівняння $\varphi_1(x) = 0$ та $f_2(y) = 0$ доцільно дослідити окремо.

■ **Приклад 12.7.** *Розв'язати рівняння*

$$(x^2 + 2)(y^2 - 4)dx + xy\,dy = 0.$$

Відокремимо змінні (поділимо обидві частини на $x(y^2 - 4)$):

$$\frac{x^2 + 2}{x}\,dx + \frac{y}{y^2 - 4}\,dy = 0.$$

Вважаємо, що $x \neq 0$, $y \neq \pm 2$. Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\int \frac{x^2 + 2}{x}\,dx + \int \frac{y}{y^2 - 4}\,dy = \widetilde{C};$$

$$\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|y^2 - 4| = \ln C_1;$$

$$x^2 + \ln x^4 + \ln|y^2 - 4| = \ln C_1^2 = \ln C;$$

$$y^2 = 4 + Cx^{-4}\,e^{-x^2}.$$

У цьому загальному розв'язку містяться також «утрачені» внаслідок відокремлення змінних розв'язки $y = \pm 2$ (підставте ці розв'язки в дане рівняння) при $C = 0$. Розв'язок, якому відповідає інтегральна крива $x = 0$ (дане рівняння ця функція теж задовольняє), в загальному розв'язку не міститься.

До рівнянь із відокремлюваними змінними зводиться однорідне рівняння

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{12.19}$$

в якому функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ — однорідні функції одного й того самого виміру. Нагадаємо, що функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *однорідною функцією виміру m*, якщо справджується тотожність

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \equiv t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{12.20}$$

Ураховуючи однорідність функцій $M(x, y)$ та $N(x, y)$, рівняння (12.19) можна переписати у вигляді

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy = 0.$$

Застосуємо заміну $y = xu$; тут u — нова шукана функція, відносно якої матимемо рівняння

$$M(1, u)\, dx + N(1, u)\, (u\, dx + x\, du) = 0,$$

де змінні легко відокремлюються:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}\, du = 0.$$

■ **Приклад 12.8.** *Розв'язати рівняння*

$$y^2 dx + (x^2 - xy)\, dy = 0.$$

Рівняння однорідне; заміна $y = xu$, $dy = x\, du + u\, dx$ приводить до

$$x^2u^2 dx + (x^2 - x^2u)(x\, du + u\, dx) = 0,$$

або

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u}\, du = 0$$

— змінні відокремлено. Інтегруємо: $\ln|x| + \ln|u| - u = \ln C$. Остаточно маємо загальний інтеграл $y = Ce^{y/x}$. Цей інтеграл містить (при $C = 0$) і розв'язок $y = 0$; інтегральна ж крива $x = 0$ (перевірте безпосередньо в даному рівнянні) в загальному інтегралі не міститься.

Вкажемо, нарешті, один клас рівнянь, які легко зводяться до однорідного:

$$(a_1x + b_1y + c)\, dx + (a_2x + b_2y + c_2)\, dy = 0. \qquad (12.21)$$

Для цього достатньо зробити заміну

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta, \qquad (12.22)$$

де параметри α, β вибрати так, щоб

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0; \qquad (12.23)$$

тоді

$$(a_1u + b_1v)\, du + (a_2u + b_2v)\, dv = 0, \qquad (12.24)$$

і рівняння (12.21) звелося до однорідного. Вказаний прийом здійсненний тоді, коли система рівнянь (12.23) має відносно α, β єдиний розв'язок: $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Спробуйте самостійно з'ясувати ситуацію, коли $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Як у цьому випадку можна розв'язати рівняння (12.21)?

Зауважимо, що однорідне рівняння, розв'язане відносно похідної, можна записати у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad g\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{M}{N}\left(\frac{1, y/x}{1, y/x}\right).$$

Серед рівнянь першого порядку особливе місце посідають лінійні

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{12.25}$$

де функції $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні на деякому інтервалі (a, b). Коли $Q(x) \equiv 0$, то рівняння

$$y' + P(x)y = 0 \tag{12.26}$$

називають *лінійним однорідним*, а рівняння (12.25) — *лінійним неоднорідним*. Лінійне однорідне рівняння (12.26) інтегрується просто:

$$\frac{dy}{y} + P(x)\,dx = 0, \quad \ln|y| + \int P(x)\,dx = \ln C; \tag{12.27}$$

$$y = C\,e^{-\int P(x)\,dx}$$

і є загальним розв'язком однорідного рівняння (12.26).

Цей результат застосуємо до розв'язання неоднорідного рівняння (12.25). При цьому використаємо спосіб варіації довільної сталої, який можна узагальнити й на лінійні рівняння вищих порядків. Він полягає в тому, що у виразі (12.27) розглядаємо C як деяку функцію $C(x)$ і добираємо її так, щоб $y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$ була розв'язком неоднорідного рівняння (12.25). По суті ми робимо в ньому заміну з новою невідомою функцією $C(x)$:

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}(-P(x)).$$

Підставивши в рівняння (12.25), матимемо

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)\,P(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)\,P(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x).$$

Звідси

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx};$$

інтегруючи, дістанемо

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C_1,$$

де C_1 — довільна стала.

Отже, остаточно загальний розв'язок рівняння (12.25)

$$y = C_1 e^{-\int P(x)\,dx} + e^{-\int P(x)\,dx} \int Q(x) e^{\int P(x)\,dx}\,dx. \tag{12.28}$$

Аналізуючи формулу (12.28), можемо зробити важливий висновок: загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (12.25) є сумою його частинного розв'язку й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (12.26).

■ **Приклад 12.9**. *Розв'язати лінійне неоднорідне рівняння*

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Однорідне рівняння $y' + 2xy = 0$ легко інтегрується:

$$\frac{dy}{y} + 2x\,dx = 0, \quad y = Ce^{-x^2}.$$

За методом варіації довільної сталої розв'язок даного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = C(x)e^{-x^2}$. Звідси

$$C'e^{-x^2} - 2xCe^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

Отже,

$$y = \left(C_1 + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x^2} = C_1e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}. \tag{12.29}$$

Це й є загальний розв'язок даного рівняння. Він містить довільну сталу C_1.

Зазначимо принагідно, що, маючи загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку, можемо знайти певний частинний його розв'язок, вибираючи належним чином довільну сталу. Розв'яжемо, наприклад, таку задачу Коші:

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 0.$$

Підставивши у формулу (12.29) $x = 0$ і $y = 0$, матимемо

$$C_1e^0 + \frac{1}{2}0\,e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Тому шуканий частинний розв'язок

$$y_ч(x) = \frac{1}{2}x^2\,e^{-x^2}.$$

Якщо розглядати задачу Коші для рівняння (12.25) із початковою умовою $y(x_0) = y_0$, де x_0 — довільна точка з інтервалу (a, b), то легко дістати такий результат:

$$y(x)=y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt}+e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\int\limits_{x_0}^{x} Q(\tau)e^{\int\limits_{x_0}^{\tau} P(t)\,dt}\,d\tau.$$

Перевірте його й порівняйте з (12.28).

В п. 12.3 наведено задачі, які зводяться до диференціальних рівнянь, зокрема й до лінійних першого порядку.

Вкажемо, нарешті, деякі типи диференціальних рівнянь і відповідні заміни, які приводять ці рівняння до лінійних. Викладки рекомендуємо читачеві як вправу:

$$f'(y)y' + P(x)\,f(y) = Q(x);\;\; z = f(y). \tag{12.30}$$

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},\;\; \alpha \neq 0,\;\; \alpha \neq 1;\;\; z = y^{1-\alpha}. \tag{12.31}$$

Рівняння (12.31) часто називають *рівнянням Бернуллі.*

Повернемося ще до рівняння (12.19)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{12.32}$$

і припустимо, що ліва частина (12.32) є повним диференціалом деякої функції $U(x, y)$:

$$M(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x};\;\; N(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{12.33}$$

Тоді (12.32) називатимемо ***рівнянням у повних диференціалах.*** Оскільки

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

то загальним інтегралом рівняння в повних диференціалах є

$$U(x, y) = C. \tag{12.34}$$

Якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ в (12.32) мають неперервні частинні похідні, а (12.32) є рівнянням у повних диференціалах, то необхідно, щоб

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{12.35}$$

Можна показати, що умова (12.35) є й достатньою для того, аби рівняння (12.32) було в повних диференціалах. Дійсно, шукатимемо таку диференційовну функцію $U(x, y)$ щоб

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y),\;\; \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y), \tag{12.36}$$

причому умова (12.35) справджується. Маємо:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow U(x, y) = \int M(x, y)\,dx + C(y),$$

де $C(y)$ — довільна диференційовна функція y. Далі, використовуючи другу з умов (12.36), дістанемо

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int \frac{\partial M}{\partial y}(x, y)\,dx + C'(y) = N(x, y);$$

$$C'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx. \tag{12.37}$$

Але права частина цієї рівності (як і ліва) є функцією лише від y. Дійсно, згідно з умовою (12.35)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right\} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)\,dx =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Наведене доведення достатності умови (12.35) містить і спосіб відшукання функції $U(x, y)$: спочатку знаходимо $\frac{\partial U}{\partial y}$, а потім із (12.37) визначаємо $C'(y)$.

■ **Приклад 12.10.** *Проінтегрувати рівняння*

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = 0.$$

Тут $M(x, y) = x^2 - 4xy - 2y^2$, $N(x, y) = y^2 - 4xy - 2x^2$. Отже, $\frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -4y - 4x$, і умова повного диференціала (12.35) справджується. Шукаємо $U(x, y)$ у вигляді

$$U(x, y) = \int (x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + C(y) = \frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2xy^2 + C(y).$$

Далі

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y^2 - 4xy - 2x^2 = -2x^2 - 4xy + C'(y);$$

$$C'(y) = y^2 \Rightarrow C(y) = \frac{y^3}{3}.$$

Остаточно загальний інтеграл даного рівняння

$$U(x, y) \equiv \frac{x^3 - y^3}{3} - 2xy\,(x + y) = C_1.$$

Коли вираз у лівій частині рівняння (12.32) не є повним диференціалом (умова (12.35) не справджується), в деяких випадках удається знайти таку функцію $\mu(x, y)$ (її називають *інтегрувальним множником*), що $\mu(M\,dx + N\,dy)$ вже є повним диференціалом деякої функції.

Рівняння для інтегрувального множника можна знайти, використовуючи ознаку (12.35):

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M); \tag{12.38}$$

це, взагалі кажучи, рівняння з частинними похідними в деяких випадках легко інтегрується. Наведемо тут лише один такий випадок.

Якщо існує інтегрувальний множник, який є, скажімо, функцією лише від x: $\mu = \mu(x)$, то з рівняння (12.38) дістанемо

$$N\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{12.39}$$

Якщо вираз $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}$ є функцією лише від x, то $\mu(x)$ знаходимо за допомогою квадратури.

■ **Приклад 12.11**. *Проінтегрувати рівняння*

$$y\,dx - x\,dy = 0; \quad M(x, y) = y, \quad N(x, y) = -x.$$

Ліва частина рівняння не є повним диференціалом: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1, \dfrac{\partial N}{\partial y} = -1.$

Але $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2$ (можна розглядати цей вираз як сталу функцію), тому для μ з (12.39) маємо

$$-x\,\frac{d\mu}{dx} = 2\mu \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\mu} = -2\,\frac{dx}{x} \Rightarrow \mu = \frac{C}{x^2}.$$

Виберемо $C = 1$ і помножимо обидві частини даного рівняння на $\mu = x^{-2}$:

$$\frac{y}{x^2}\,dx - \frac{1}{x}\,dy = 0; \quad M(x, y) = \frac{y}{x^2}, \quad N(x, y) = -\frac{1}{x}.$$

Умова повного диференціала справджується (перевірте!). Загальний інтеграл рівняння знайдіть самостійно.

На закінчення коротко розглянемо питання про особливі розв'язки та особливі точки диференціального рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbf{R}^2. \tag{12.40}$$

Нагадаємо, що коли в околі деякої точки (x_0, y_0) області D справджуються умови теореми 12.1, то через цю точку проходить інтегральна крива, й до того ж лише одна.

Якщо умови теореми 12.1 не справджуються (зазначимо, що ці умови достатні!), то можуть бути різні випадки. Найцікавішим є той, коли диференціальне рівняння (12.1) має особливий розв'язок, такий, що через будь-яку точку відповідної інтегральної кривої проходить, крім неї, ще й інша (дотична до неї) інтегральна крива даного рівняння. Інакше кажучи, «особлива» інтегральна крива складається з точок неєдиності.

■ **Приклад 12.12**. *Проінтегрувати рівняння*

$$y' = y^{\alpha}, \;\; \alpha > 0, \;\; D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon \; y \geq 0\}.$$

Якщо $0 < \alpha < 1$, то частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha y^{\alpha - 1}$ не є обмеженою в околі $y = 0$. Але $y = 0$ є розв'язком даного рівняння, причому особливим. Якщо розв'язати задачу Коші

$$y' = y^{\alpha}, \quad y(x_0) = 0, \tag{12.41}$$

то, крім розв'язку $y = 0$, буде ще принаймні один:

$$y = [(1 - \alpha)(x - x_0)]^{1/1-\alpha},$$

графік якого проходить через точку $(x_0; 0)$.

Характер розташування інтегральних кривих — розв'язків задачі Коші (12.41) — зображено на рис. 12.2 ($\alpha = 1/2$), де $y = 0$; $y = \dfrac{1}{4}(x - x_0)^2$.

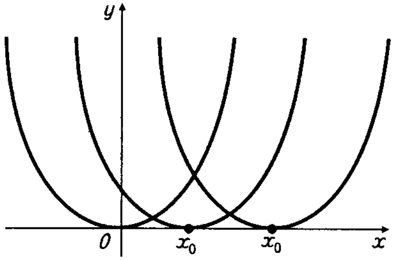

Рис. 12.2

Зупинимося коротко ще на особливих точках диференціального рівняння першого порядку, тобто таких, в яких порушується хоча б одна з умов існування та єдиності.

Грунтовно ознайомитися з поведінкою розв'язків диференціального рівняння можна в літературі. Згадаємо лише рівняння вигляду

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \tag{12.42}$$

зокрема з $P(x, y) = ax + by$, $Q(x, y) = cx + dy$. У випадку (12.42) точка (x_0, y_0) буде особливою, коли

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

До рівняння (12.42) ми повернемося в п. 12.2. Детальна й глибока інформація щодо цього рівняння міститься в спеціальній літературі з якісної теорії диференціальних рівнянь.

3. Застосуємо тут деякі прийоми якісної теорії диференціальних рівнянь до рівняння

$$\dot{x} = f(x). \tag{12.43}$$

Незалежну змінну позначатимемо через t, $x(t)$ — шукана функція, «$\cdot$» означає диференціювання по t. Права частина рівняння (12.43) не залежить явно від t — такі рівняння називають ***автономними***. Вважатимемо, що функція $f(x)$ неперервна й має неперервну похідну при $x \in \mathbf{R}$. Тоді справджуються умови теореми 12.1, отже, через будь-яку точку (t_0, x_0) площини tOx проходить одна й лише одна інтегральна крива рівняння (12.43).

Крім цього, якщо $x = \varphi(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ — деякий розв'язок рівняння (12.43), а C — стала, то розв'язком цього рівняння буде й $x = \psi(t) :=$ $:= \varphi(t + C)$, $\alpha - C < t < \beta - C$. Дійсно,

$$\dot{\psi}(t) = \frac{d}{dt}\,\varphi(t + C) = \frac{d\varphi(t + C)}{d(t + C)} = f(\varphi(t + C)) = f(\psi(t)).$$

Таким чином, сім'я інтегральних кривих рівняння (12.43) є інваріантною відносно зсувів уздовж осі Ot.

У випадку автономного рівняння (12.43) властивості його розв'язків зручно ілюструвати, аналізуючи рух точки $x = \varphi(t)$ по прямій Ox при зміні t. Пряму Ox при цьому називають *фазовою прямою*, а траєкторію точки $x = \varphi(t)$ — *фазовою траєкторією*. Причому, якщо $x = \varphi_1(t)$ і $x = \varphi_2(t)$ — два різних непродовжуваних розв'язки рівняння (12.43), то відповідні їм фазові траєкторії або не мають спільних точок, або збігаються. Цей факт випливає безпосередньо з теореми 12.1. Очевидно, що проекцією інтегральної кривої рівняння (12.43) на фазову пряму буде деяка фазова траєкторія, причому інтегральні криві $x = \varphi(t)$ і $x = \varphi(t + C)$ мають одну й ту саму фазову траєкторію. Особливе місце на фазовій прямій Ox займають точки a такі, що $f(a) = 0$. Вони називаються *точками рівноваги рівняння* (12.43). Якщо a — положення рівноваги, то стала функція $x \equiv a$, $t \in \mathbf{R}$ буде розв'язком рівняння, а відповідна цьому розв'язкові фазова траєкторія зводиться до точки $x = a$ на фазовій прямій Ox. Аналізуючи знак $f(x)$ — правої частини рівняння (12.43) — на інтервалах між точками рівноваги, легко встановити напрям руху зображаючої точки $x(t)$ по фазовій прямій: там, де $f(x) > 0$, $\dot{x} = f(x) > 0$, отже, $x(t)$ зростає з ростом t, і навпаки.

■ **Приклад 12.13**. *Знайти й дослідити положення рівноваги рівняння*

$$\dot{x} = x^2 - 3x + 2. \qquad (12.44)$$

Тут $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, і рівняння (12.44) має два положення рівноваги: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, яким відповідають сталі розв'язки $x_1 \equiv 1, x_2 \equiv 2, t \in \mathbf{R}$.

Рис. 12.3

Очевидно, що при $1 < x < 2$ функція $f(x) < 0$, а на інтервалах $(-\infty; 1)$ та $(2; +\infty)$ маємо $f(x) > 0$, що дає підстави зобразити фазову пряму в такий спосіб, як на рис. 12.3.

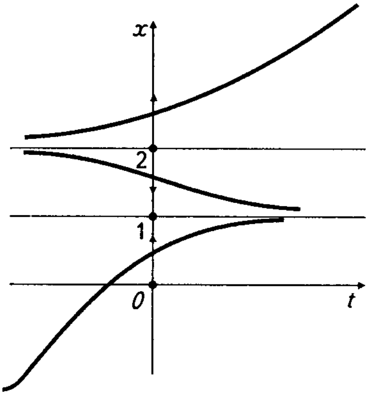

Рис. 12.4

Розташування інтегральних кривих рівняння (12.44) на координатній площині зображено на рис. 12.4. Зауважимо, що стрілками позначено напрям руху зображаючої точки $x(t)$ на фазовій прямій Ox. Зазначимо, що характер положень рівноваги $a_1 = 1$ та $a_2 = 2$ різний по суті: за малих відхилень від $a_1 = 1$ (вліво чи вправо) зображуюча точка з ростом t наближатиметься необмежено до положення $x = 1$ при $t \to +\infty$: таке положення рівноваги називають *стійким*. У випадку $a_2 = 2$ відбувається протилежне: найменше відхилення від точки *2* приводить до того, що зображуюча точка віддаляється від неї при $t \to \infty$. Таке положення рівноваги природно назвати *нестійким*. На рис. 12.3 та 12.4 маємо такі фазові траєкторії: точки *1* і *2*, інтервали $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

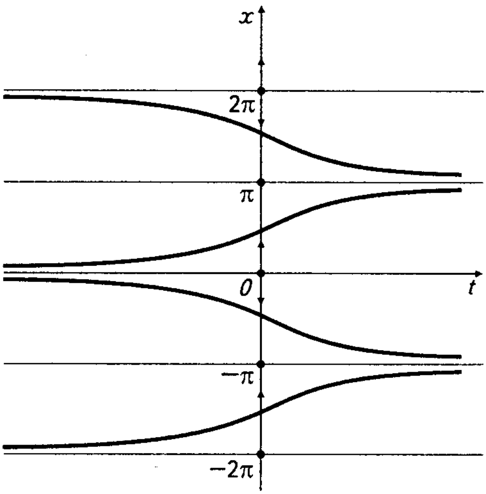

Рис. 12.5

■ **Приклад 12.14**. *Знайти й дослідити положення рівноваги рівняння*

$$x = \sin x. \qquad (12.45)$$

Знаходимо положення рівноваги: $\sin x = 0 \Rightarrow a_n = n\pi, n \in \mathbf{Z}$. Аналізуючи знак правої частини (12.45) між сусідніми положеннями рівноваги, легко дістаємо картину розташування інтегральних кривих (рис. 12.5).

Укажіть самостійно, які з цих положень рівноваги стійкі, а які нестійкі.

12.2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ І СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1. У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку записується у вигляді

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \qquad (12.46)$$

Тут $F(u, v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ — функція, неперервна разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial F}{\partial v_0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial v_n}$ у деякій області $D \subseteq \mathbf{R}^{n+2}$.

Розв'язавши рівняння (12.46) відносно $y^{(n)}$, дістанемо

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \qquad (12.47)$$

Має місце така фундаментальна теорема.

Теорема 12.2 (існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння n-го порядку). Нехай функція f у правій частині рівняння (12.47) неперервна в деякому околі точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ з $\mathbf{R}^{n+1}$ і має в цьому околі неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$. Тоді існує інтервал (a, b) (окіл точки x_0) і визначена на ньому n разів диференційовна функція $y = y(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння (12.47) і початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0', \;\dots,\; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (12.47а)$$

Така функція єдина й називається *розв'язком задачі Коші* для рівняння (12.47).

Із цієї теореми випливає, зокрема, той факт, що (при фіксованому x_0) розв'язки рівняння (12.47) утворюють сім'ю, яка залежить від n сталих $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$:

$$C_1 = y_0, \; C_2 = y_0', \dots, C_n = y_0^{(n-1)}.$$

Остання формула дає загальний розв'язок рівняння (12.47). При фіксованих значеннях констант $C_1, C_2, \dots, C_n$ дістанемо деякий частинний розв'язок даного рівняння.

2. Техніка інтегрування рівнянь вигляду (12.46) або (12.47) детально описується в літературі. Наведемо деякі прийоми й приклади інтегрування диференціальних рівнянь другого порядку.

1) $y'' = f(x)$, де $f(x)$ — відома неперервна на інтервалі $I = (a, b)$ функція.

Безпосереднім інтегруванням знаходимо $y(x)$:

$$y'(x) = \int f(x)\,dx + C_1 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 + \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx.$$

Узагальнення на випадок рівняння n-го порядку очевидне. Рекомендуємо записати загальний розв'язок рівняння $y^{(n)} = f(x)$.

■ **Приклад 12.15.** *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$y'' = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$y'(x) = \int e^{-x^2}dx + C_1, \quad y(x) = C_1 x + C_2 + \int\left(\int e^{-x^2}dx\right)dx.$$

Розв'язок виражений через квадратури. Записати $y(x)$ через елементарні функції не вдається, оскільки інтеграл $\int e^{-x^2}dx$ «не береться» в елементарних функціях.

Вибравши довільну точку $x_0 \in I$, розв'язок можна записати й через визначений інтеграл. Інтегруючи від x_0 до x, маємо

$$y'(x) - y'(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds;$$

$$y(x) - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t} f(s)\,ds\right)dt.$$

Спробуйте довести самостійно, що

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{t} f(s)\,ds\right)ds = \int_{x_0}^{x}(x - \tau)\,f(\tau)\,d\tau.$$

Як узагальнити цей результат у n-кратному випадку?

2) $y'' = f(x, y')$. Таке рівняння елементарною підстановкою зводиться до рівняння першого порядку. Дійсно, $y' = z \Rightarrow y'' = z'$, $z' = f(x, z)$. Така процедура (зниження порядку диференціального рівняння) може бути ефективною й у загальніших випадках.

3) Розглянемо ще рівняння типу $F(y, y', y'') = 0$. Такі рівняння часто трапляються при математичному моделюванні в прикладних задачах природничих (та й гуманітарних) наук.

Шукатимемо таку функцію $p = p(y)$, щоб y (шуканий розв'язок) задовольняв рівняння першого порядку

$$y' = p(y). \qquad (12.48)$$

Диференціюючи, дістанемо $y'' = p'(y)\,y', y' = pp'$. Звідси маємо рівняння першого порядку

$$F(y, p, pp') = 0. \tag{12.49}$$

Якщо з (12.49) знайдемо $p = p(y)$, то далі матимемо справу з рівнянням (12.48) (до якого типу рівнянь воно належить?).

■ **Приклад 12.16.** *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Покладемо $y' = p(y)$, $y'' = p'p$. Підставивши y'' в дане рівняння, дістанемо

$$pp' + \omega^2 y = 0,$$

що буде рівнянням першого порядку, яке допускає відокремлення змінних:

$$p\frac{dp}{dy} + \omega^2 y = 0 \Rightarrow p\,dp + \omega^2 y\,dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{2} + \omega^2\frac{y^2}{2} = \tilde{C}_1 \Rightarrow p^2 = C_1 - \omega^2 y^2,\ \ p\,(y) = \pm\sqrt{C_1 - \omega^2 y^2}.$$

Аби знайти функцію $y(x)$, слід розв'язати ще одне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C_1 - \omega^2 y^2}.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, матимемо

$$\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1 - \omega^2 y^2}} = dx,\ \ x + C_2 = \pm\int\frac{dy}{\sqrt{C_1 - \omega^2 y^2}}.$$

Пропонуємо самостійно знайти інтеграл, записаний у правій частині, аби переконатися, що функцію y можна подати в явному вигляді:

$$y(x) = A\sin(\omega x + \varphi),$$

де A, φ — довільні сталі. Функцію y можна переписати ще й так:

$$y(x) = K_1\sin\omega x + K_2\cos\omega x$$

(K_1, K_2 — довільні сталі).

3. Розглянемо лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Цей клас рівнянь важливий для застосувань і водночас доступний для дослідження.

Загальний вигляд такого рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{12.50}$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ — сталі коефіцієнти; $f(x)$ — задана функція, визначена на деякому інтервалі $I = (a, b)$. Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (12.50) набирає вигляду

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (12.51)$$

і називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*, тоді як рівняння (12.50) називається *неоднорідним.*

Вираз у лівій частині рівняння (12.50) або (12.51) називають *лінійним диференціальним оператором n*-го порядку зі сталими коефіцієнтами й позначають $L(y)$. Легко переконатися, що оператор $L(y)$ будь-яку n разів неперервно диференційовну функцію $y(x)$ перетворює на деяку неперервну функцію; при цьому:

а) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$;

б) $L(\lambda y) = \lambda L(y)$

для довільних функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$ (зазвичай достатню кількість разів диференційовних) і довільного числа λ.

Перевірте справедливість цих тверджень і доведіть (безпосередня перевірка), що

$$L(e^{kx}) = e^{kx}\,(k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0). \qquad (12.52)$$

Структуру множини розв'язків рівняння (12.52) дає наступна теорема.

Теорема 12.3. Загальний розв'язок рівняння (12.50) має вигляд

$$y = y_0(x) + y_1(x), \qquad (12.53)$$

де $y_0(x)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (12.51), а $y_1(x)$ — довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння (12.50).

Доведемо ще одне твердження (принцип суперпозиції) щодо частинного розв'язку $y_1(x)$. Нехай у правій частині неоднорідного рівняння (12.50)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x), \quad x \in I = (a, b),$$

а частинний розв'язок кожного з рівнянь

$$L(y) = f_j(x), \;\; x \in I = (a, b), \;\; j = 1; 2; \ldots; m$$

є $y_{1j}(x)$, $x \in I$. Тоді частинний розв'язок рівняння (12.50)

$$y_1(x) = \sum_{j=1}^{m} y_{1j}(x).$$

Справді, враховуючи властивості оператора L, можемо записати

$$L(y_1)=\sum_{j=1}^{m} L(y_{1j})=\sum_{j=1}^{n} f_j(x)=f(x).$$

Наведемо деякі факти, необхідні для знаходження загального розв'язку рівнянь (12.51) та (12.50), коли $n = 2$, тобто у випадку рівняння другого порядку:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x); \tag{12.54}$$

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{12.55}$$

Розглянемо однорідне рівняння (12.55). Його частинні розв'язки шукатимемо у вигляді e^{kx}, добираючи належним чином параметр k. Скориставшися формулою (12.52), визначимо, що функція задовольняє рівняння (12.55) тоді й лише тоді, коли k є розв'язком рівняння

$$p(k) := k^2 + a_1 k + a_0 = 0. \tag{12.56}$$

Рівняння (12.56) називають *характеристичним.* (Неважко дізнатися про вигляд характеристичного рівняння в загальному випадку). Залежно від характеру коренів рівняння (12.56) можливі три випадки.

1) Рівняння (12.56) має дійсні й різні корені: $k_1 \neq k_2$. Тоді загальний розв'язок рівняння (12.55) буде

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{12.57}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

2) Корені рівняння (12.56) збігаються: $k_1 = k_2 = k$. Тоді загальний розв'язок є

$$y = e^{kx}(C_1 + xC_2).$$

3) Корені рівняння (12.56) комплексно-спряжені: $k_{1,2} = \alpha \pm i\omega$. Тоді

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x).$$

Покажемо на прикладі випадку 1 хід міркувань, які переконують у справедливості сформульованих тверджень.

Якщо k_1, k_2 — корені характеристичного рівняння (12.56), то кожна з функцій $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$ є розв'язком диференціального рівняння (12.55). Застосовуючи властивості а та б відповідного оператора $L(y) := y'' + a_1 y' + a_0 y$, матимемо

$$L(y) = L(C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}) = C_1 L(e^{k_1 x}) + C_2 L(e^{k_2 x}) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Це й означає, що y є розв'язком рівняння (12.55).

Як довести, що формула (12.57) містить усі можливі розв'язки диференціального рівняння (12.55)? З теореми 12.2 випливає (виконання умов цієї теореми для рівнянь (12.54), (12.55) легко перевірити), що початкові умови

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0 \tag{12.58}$$

однозначно визначають частинний розв'язок рівняння (12.54). Покажемо, що із загального розв'язку (12.57) належним добором сталих C_1 та C_2 можна знайти цей розв'язок — розв'язок задачі Коші (12.55), (12.58). З (12.57) та (12.58) маємо

$$\begin{cases} y(x_0)=C_1e^{k_1x_0}+C_2e^{k_2x_0}=y_0, \\ y'(x_0)=C_1k_1e^{k_1x_0}+C_2k_2e^{k_2x_0}=y'_0. \end{cases} \tag{12.59}$$

Щодо невідомих C_1, C_2 система (12.59) має єдиний розв'язок, оскільки її основний визначник

$$\begin{vmatrix} e^{k_1x_0} & e^{k_2x_0} \\ k_1\,e^{k_1x_0} & k_2\,e^{k_2x_0} \end{vmatrix}=(k_2-k_1)e^{(k_1+k_2)x_0}\neq 0,$$

і доведення завершене. В решті випадків воно аналогічне.

■ **Приклад 12.17.** *Записати загальний розв'язок рівняння*

$$y''+5y'+6y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2+5k+6=0,$$

корені якого $k_1=-3$, $k_2=-2$. Тому загальний розв'язок

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

■ **Приклад 12.18.** *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$y''+\omega^2y=0.$$

Характеристичне рівняння $k^2+\omega^2=0$ має два комплексно-спряжених корені $k_1=i\omega$, $k_2=-i\omega$. Це випадок 3, причому $\alpha=0$. Отже, загальний розв'язок

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x.$$

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння (12.54) і вкажемо метод знаходження його частинного розв'язку, який називають *методом невизначених коефіцієнтів*. Цей метод застосовують до рівнянь, в яких функція $f(x)$ має спеціальний вигляд.

Нехай у неоднорідному рівнянні (12.54) $f(x)$ — многочлен:

$$f(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m. \tag{12.60}$$

Покажемо, що в цьому разі частинний розв'язок рівняння (12.54) можна знайти у вигляді многочлена з невизначеними коефіцієнтами; при цьому

$$y_1(x) = x^r(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m), \qquad (12.61)$$

де

$$r = 0 \quad \text{при} \quad p(0) = a_0 \neq 0;$$

$$r = 1 \quad \text{при} \quad p(0) = a_0 = 0,\ p'(0) = a_1 \neq 0,$$

$$r = 2 \quad \text{при} \quad p(0) = p'(0) = a_0 = a_1 = 0.$$

Справді, підставивши вираз (12.61) у рівняння (12.54), при $r = 0$ матимемо

$$a_0(A_mx^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_1x + A_0) + a_1(mA_mx^{m-1} + \ldots + 2A_2x + A_1) +$$
$$+ (m(m-1)A_{m-2}x^{m-2} + \ldots + 2A_2) \equiv b_mx^m + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах цієї рівності, дістанемо систему рівнянь, з якої треба знайти невідомі («невизначені») коефіцієнти $A_0, A_1, \ldots, A_m$:

$$\begin{array}{l|r}
x^0 & a_0A_0 + a_1A_1 + \ldots + 2A_2 = b_0, \\
x^1 & a_0A_1 + 2a_1A_2 + \ldots + 3\cdot 2A_3 = b_1, \\
\vdots & \vdots \qquad\qquad \\
x^{m-1} & a_0A_{m-1} + a_1mA_m + \ldots + \ldots = b_{m-1}, \\
x^m & a_0A_m = b_m.
\end{array} \qquad (12.62)$$

Із цієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь послідовно (починаючи з останнього рівняння) знаходимо $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_0$; умова $a_0 \neq 0$ істотна.

Інші випадки ($r = 1$, $r = 2$) розглядаються аналогічно. Відшукання розв'язку вигляду (12.61) зводиться до аналізу існування розв'язку алгебраїчної системи типу (12.62).

■ **Приклад 12.19**. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$y'' - 4y' + 4y = xe^x.$$

Спробуємо звести це рівняння до розглянутого вище типу. Для цього здійснимо відповідну заміну шуканої функції: такий прийом часто буває ефективним. Покладемо $y = e^xu$. Тоді $y' = e^x(u + u')$, $y'' = e^x(u + 2u' + u'')$, і відносно нової шуканої функції u матимемо рівняння $u'' - 2u' + u = x$.

У його правій частині тепер буде многочлен, тому можемо розглянути викладену вище методику.

Запишемо спочатку відповідне однорідне рівняння

$$u'' - 2u' + u = 0$$

та характеристичне рівняння

$$k^2 = 2k + 1 = 0,$$

яке має двократний корінь $k_1 = k_2 = k = 1$. Загальний розв'язок однорідного рівняння (див. випадок 2) має вигляд

$$y_0 = e^x(C_1 + xC_2).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді многочлена першого степеня

$$y_1 = A_0 + xA_1.$$

Методом невизначених коефіцієнтів знаходимо A_0, A_1: $y' = A_1$, $y'' = 0$, звідки $-2A_1 + A_0 + xA_1 = x$,

$$\begin{array}{c|r} x^1 & A_1 = 1, \\ x^0 & A_0 - 2A_1 = 0. \end{array}$$

Тому $u_1 = x + 2$, а загальним розв'язком неоднорідного рівняння буде

$$u = e^x(C_1 + xC_2) + x + 2\ .$$

Шукану функцію y знайдемо з формули

$$y = e^x u = e^x(x+2) + e^{2x}(C_1 + xC_2).$$

■ **Приклад 12.20**. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$y'' + \omega^2 y = p \sin \mu\, x, \quad p, \omega, \mu \in \mathbf{R}. \tag{12.63}$$

Запишемо його праву частину у вигляді суми показникових функцій

$$p \sin \mu x = \frac{p}{2i} e^{i\mu x} - \frac{p}{2i} e^{-i\mu x},$$

оскільки, як відомо ще з часів Ейлера,

$$\sin \mu x = \frac{1}{2i}(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}).$$

У допоміжному рівнянні

$$y'' + \omega^2 y = \frac{p}{2i} e^{i\mu x}$$

зробимо заміну: $y = e^{i\mu x}u$; тоді для u дістанемо рівняння

$$u'' + 2i\mu \cdot u' + (\omega^2 - \mu^2)u = p/2i\,.$$

Це рівняння має частинний розв'язок — сталу (многочлен нульового степеня), коли виконується умова

$$a_0 = \omega^2 - \mu^2 \neq 0. \qquad (12.64)$$

Справді,

$$u_{11}(x) = \frac{p}{2i(\omega^2 - \mu^2)}.$$

Для допоміжного рівняння

$$y'' + \omega^2 y = -\frac{p}{2i} e^{-i\mu x}$$

цілком аналогічно знаходимо

$$u_{12}(x) = -\frac{p}{2i(\omega^2 - \mu^2)}.$$

Повернемося до шуканої функції y, для чого скористаємося принципом суперпозиції й запишемо частинний розв'язок рівняння (12.63):

$$y_1(x) = \frac{p}{2i(\omega^2 - \mu^2)}(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}) = \frac{p}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu x,$$

а відтак, і загальний його розв'язок (див. приклад 12.16)

$$y(x) = K_1 \sin \omega x + K_2 \cos \omega + \frac{p}{\omega^2 - \mu^2} \sin \mu x.$$

Рекомендуємо знайти загальний розв'язок однорідного рівняння самостійно, а також розглянути випадок (його називають резонансним), коли умова (12.64) не виконується і $\omega^2 - \mu^2 = 0$. Переконайтеся, що тоді частинним розв'язком рівняння (12.63) є

$$y_{1p}(x) = -\frac{p}{2\mu} x \cos \mu x = -\frac{p}{2\omega} x \cos \omega x.$$

Істотною (особливо в разі застосування рівняння (12.63) до аналізу коливальних явищ у різноманітних системах) є поява множника x; тоді «амплітуда» коливань при $x \to +\infty$ зростає необмежено.

4. Розглянемо лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Рівняння

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad (12.65)$$

де функції $a_j(x)$, $j = 0; 1; 2$ неперервні на деякому інтервалі $I = (a, b)$, відіграють важливу роль при розв'язанні задач математичної фізики. (Якщо виникне серйозна потреба в теорії та методах інтегрування подібних рівнянь, рекомендуємо звернутися до спеціальної літератури. Тут укажемо лише деякі теоретичні факти й наведемо приклади рівнянь вигляду (12.65), які часто зустрічаються в застосуваннях.)

Насамперед розглянемо рівняння (12.65) на такому інтервалі I_1 (цілком можливо, що $I_1 \neq I$), де $a_0(x) \neq 0$; тоді його можна переписати у вигляді рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I_1, \tag{12.66}$$

де функції $p(x)$, $q(x)$ — коефіцієнти рівняння, неперервні на інтервалі I_1. Тому до цього рівняння застосовна теорема 12.2 існування й єдиності розв'язку задачі Коші (перевірте самостійно виконання умов теореми). Крім цього, як і у випадку аналогічного рівняння зі сталими коефіцієнтами [див. рівняння (12.55)], загальний розв'язок рівняння (12.66) можна подати у вигляді лінійної комбінації двох частинних розв'язків $y_{10}(x)$ та $y_{20}(x)$, для яких $y_{10}/y_{20} \neq \text{const}$ (тоді кажуть, що розв'язки y_{10}, y_{20} лінійно незалежні):

$$y(x) = C_1 y_{10}(x) + C_2 y_{20}(x), \tag{12.67}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Побудова розв'язків $y_{10}(x)$ та $y_{20}(x)$ — справа складна, зокрема, в елементарних функціях вони існують лише в окремих випадках. Часто розв'язки рівняння типу (12.66) називають спеціальними функціями і для них вводяться спеціальні позначення, а їх властивості детально вивчаються з самого рівняння (12.66).

Наведемо кілька прикладів рівнянь вигляду (12.66).

■ **Приклад 12.21**. *Рівняння Ейлера*

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0, \quad x \in \mathbf{R}^+ \ (x > 0)$$

заміною незалежної змінної $x = e^t$, $t \in \mathbf{R}$ зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2};$$

отже,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{dt}a_0y = 0.$$

■ **Приклад 12.22**. *Рівняння Бесселя*

$$x^2y'' + xy' + (\nu^2 - x^2)y = 0, \quad x > 0,$$

де ν — параметр, ще називають *рівнянням циліндричних функцій.* Його розв'язки матимуть вигляд узагальнених степеневих рядів.

■ **Приклад 12.23.** *Рівняння Матьє*

$$y'' + (\omega^2 + h\cos\nu t)\,y = 0,$$

розв'язки якого мають назву *функцій Матьє.* Таке рівняння виникає в небесній механіці, електротехніці та ін.

Зазначимо, що у випадку, коли один із розв'язків рівняння (12.66) $y_{10}(x)$ відомий, інший можна виразити через квадратуру. Покладемо в (12.66) $y = y_{10}\,z$, де z — нова шукана функція. Щодо z дістанемо рівняння

$$y_{10}z'' + (2y'_{10} + py_{10})\,z' = 0,$$

яке допускає зниження порядку.

5. Як зазначалося вище, для знаходження конкретного частинного розв'язку рівняння n-го порядку можна задати n початкових умов [див. (12.47а)].

Водночас у деяких задачах зустрічаються умови іншого типу (наприклад, слід знайти частинний розв'язок за відомими значеннями шуканої функції в кількох точках). Подібні задачі називають *крайовими* (іноді *граничними*).

■ **Приклад 12.24.** *Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y = x$, який задовольняє крайову умову $y(0) = 1$, $y(\pi/4) = \pi/2$.*

Загальний розв'язок даного рівняння легко знайти за правилами з п. 3:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x.$$

Із крайових умов будуємо систему рівнянь відносно сталих C_1 та C_2:

$$y(0) = C_1 = 1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1\cos\frac{\pi}{2} + C_2\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Звідси $C_1 = 1$, $C_2 = 3\pi/8$ Отже, шуканий розв'язок

$$y = \cos 2x + \frac{3}{8}\pi\sin 2x + \frac{1}{4}x.$$

Крайові умови задаються не обов'язково в такій елементарній формі.

■ **Приклад 12.25.** *Покажіть самостійно, що крайова задача*

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^x$$

з умовами

$$y(0)+y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2},\ \ y'(0)+y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

має такий розв'язок:

$$y(x)=e^x\left(1+\frac{e^\pi-e^{\pi/2}-1}{1+e^\pi}\cos x+\frac{1-2e^{\pi/2}}{1+e^\pi}\sin x\right).$$

Для цього знайдіть загальний розв'язок даного рівняння й складіть, користуючися крайовими умовами, відповідну систему рівнянь для сталих C_1 та C_2.

У загальному випадку для лінійних рівнянь другого порядку зазвичай ставиться двоточкова крайова задача в одній із форм:

$$\begin{cases}\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=\gamma_1,\\ \alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=\gamma_2\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}\delta_1 y(a)+\eta_1 y(b)=\xi_1,\\ \delta_2 y'(a)+\eta_2 y'(b)=\xi_2.\end{cases}$$

У прикладі 12.24

$$a=0,\ b=\frac{\pi}{4}\ \text{ і }\ \alpha_1=\alpha_2=1,\ \beta_1=\beta_2=0,\ \gamma_1=1,\ \gamma_2=\frac{\pi}{4},$$

а в 12.25 — при $a = 0$, $b=\pi/2$

$$\delta_1=\delta_2=\eta_1=\eta_2=1,\quad \xi_1=e^{\pi/2},\ \ \xi_2=1.$$

Часто доводиться мати справу зі складнішими задачами — коли загальний розв'язок виразити через елементарні функції неможливо, або ж коли рівняння містить параметри, які підлягають вибору таким чином, щоб дана крайова задача мала розв'язок. Ця остання задача (на власні значення) виникає при розв'язуванні рівнянь математичної фізики.

■ **Приклад 12.26**. *Знайти такі значення λ, при яких крайова задача $y''+\lambda y=0$, $y(0)=0$, $y'(1)=0$ має нетривіальний (ненульовий) розв'язок.* Такі λ називають *власними значеннями.*

Розглянемо три можливих випадки для λ.

(1) Параметр $\lambda>0$; тоді загальний розв'язок рівняння записується у вигляді

$$y=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}x},$$

а система для визначення сталих C_1 та C_2

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ \sqrt{-\lambda}\,(e^{\sqrt{-\lambda}}C_1+e^{-\sqrt{-\lambda}}C_2)=0\end{cases}$$

має лише тривіальний розв'язок $C_1=C_2=0$. Отже, при $\lambda<0$ власних значень немає.

(2) Параметр $\lambda = 0$; тоді загальним розв'язком рівняння є $y = C_1 x + C_2$, а з крайових умов дістаємо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. І в цьому разі ($\lambda = 0$) власних значень немає.

(3) Нарешті, нехай $\lambda > 0$; тоді загальним розв'язком рівняння є

$$y = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Із крайових умов дістаємо систему для визначення C_1 та C_2, причому її коефіцієнти залежать від λ:

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -\sqrt{\lambda}\,C_1 \sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\,C_2 \cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

або $C_1 = 0$, $C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Така система має ненульовий розв'язок $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ (довільне); тоді й лише тоді виконується умова $\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Із цього тригонометричного рівняння знаходимо шукані значення параметра λ:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k = 0; 1; 2; \ldots$$

Отже, власні значення задачі утворюють нескінченно зростаючу послідовність $\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2$, $k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ При цьому шуканим розв'язком крайової задачі є

$$y(x) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x,\ k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots$$

(C_2 — довільне, k — фіксоване).

6. Для адекватного опису цілої низки явищ і процесів потрібні кілька функцій. Відшукання цих функцій приводить до системи кількох диференціальних рівнянь. Крім цього, систему диференціальних рівнянь першого порядку можна дістати з одного диференціального рівняння вищого порядку, якщо ввести допоміжні функції.

Нехай маємо рівняння

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{12.68}$$

Покладемо

$$y = y_1,\ \ y' = y_2,\ \ y'' = y_2' = y_3, \ldots, y^{(n-1)} = y'_{(n-1)} = y_n,$$
$$y^{(n)} = y_n{}' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Щодо введених у такий спосіб функцій $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дістанемо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (12.69)$$

Ця система є окремим випадком системи рівнянь

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (12.70)$$

Таку систему називають *нормальною системою диференціальних рівнянь першого порядку*, а її розв'язок становить набір (або вектор) із n функцій, які задовольняють усі рівняння системи. Початкові умови (задача Коші) для нормальної системи мають вигляд

$$y_1(x_0) = y_{10},\ \ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \qquad (12.71)$$

де x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0} — задані числа.

Для нормальної системи може бути доведена теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші (звичайно, коли праві частини системи задовольняють певні умови). Щоб знайти розв'язок нормальної системи вигляду (12.70), її зводять до рівносильного рівняння n-го порядку або застосовують метод інтегровних комбінацій. Обидва методи проілюструємо на прикладах.

Нехай маємо систему

$$y_1' = y_2,\ \ y_2' = \mu^2 y_1 \qquad (12.72)$$

(μ — параметр). Диференціюємо перше з рівнянь і виключаємо одну з функцій (наприклад, y_2):

$$y_1'' = y_2',\ \ y_2' = \mu^2 y_1,\ \ \mu > 0;$$

тому відносно y_1 матимемо $y_1'' - \mu_2 y_1 = 0$ — рівняння другого порядку. Його загальний розв'язок (відшукайте за правилами п. 3)

$$y_1(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x},$$
$$y_2(x) = y_1'(x) = \mu(C_1 e^{\mu x} - C_2 e^{-\mu x}).$$

Отже, загальний розв'язок системи (12.72) матиме вигляд

$$\begin{cases} y_1(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x}, \\ y_2(x) = \mu C_1 e^{\mu x} - \mu C_2 e^{-\mu x} \end{cases}$$

або у векторній формі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} e^{\mu x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix} e^{-\mu x}. \qquad (12.73)$$

Розглянемо ще систему (див. (12.72), $\mu = 1$)

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_1, \qquad (12.74)$$

яку розв'яжемо із застосуванням методу інтегровних комбінацій. Додамо обидва рівняння $y_1' + y_2' = y_1 + y_2$; звідси дістанемо інтегровну комбінацію

$$(y_1 + y_2)' = y_1 + y_2.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно суми $y_1 + y_2$:

$$y_1 + y_2 = C_1 e^x. \qquad (12.75)$$

Після диференціювання $y_1' + y_2' = C_1 e^x$, але $y_2' = y_1$, тому для y_1 маємо $y_1' + y_1 = C_1 e^x$.

Розв'яжемо це лінійне диференціальне рівняння першого порядку за методом п. 12.1:

$$y_1 = \frac{1}{2} C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

а для y_2 з (12.74) дістанемо

$$y_2 = \frac{1}{2} C_1 e^x - C_2 e^{-x}$$

або у векторній формі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}. \qquad (12.76)$$

До речі, система (12.74) є окремим випадком (12.72) при $\mu = 1$. Покладіть у (12.73) $\mu = 1$ і порівняйте з (12.76). Результати не збігаються. Поясніть чому.

Звернемо увагу на співвідношення (12.75), яке пов'язує шукані функції та незалежну змінну: $\frac{y_1 + y_2}{x} = C_1$. Таке співвідношення називають *першим інтегралом системи рівнянь.*

Серед систем диференціальних рівнянь особливе місце посідають лінійні. Така система записується у вигляді

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \ldots + a_{1n}\, y_n + b_1, \\ y_2' = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \ldots + a_{2n}\, y_n + b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' = a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \ldots + a_{nn}\, y_n + b_n, \end{cases} \tag{12.77}$$

причому всі коефіцієнти a_{ij} і «вільні» члени b_j $(i, j = 1;\ 2;\ \ldots;\ n)$ є, взагалі кажучи, довільними функціями від x. Випадок, коли $a_{ij} = \mathrm{const}$ $(i, j = 1;\ 2;\ \ldots;\ n)$, теж цікавий.

Лінійна система допускає компактну векторно-математичну форму запису. Якщо ввести до розгляду матрицю A і вектори $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b}$, то при $n = 2$

$$A = (a_{ij}),\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ i, j = 1; 2;$$

домовимося, що $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$; тоді система (12.77) набере вигляду

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}. \tag{12.78}$$

Зокрема, при $a_{ij} = \mathrm{const}$, $\boldsymbol{b} = 0$ матимемо так звану однорідну лінійну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dx} = A\boldsymbol{y}. \tag{12.79}$$

Приклади таких систем — (12.72) та (12.74). Система (12.72) у вектор-но-матричному вигляді записується так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

<u>7.</u> Розглянемо детальніше властивості розв'язків лінійної однорідної системи двох рівнянь. Незалежну змінну позначимо через t, а шукані функції — через $x_1(t)$ та $x_2(t)$. Тоді

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}\, x_1 + a_{22} x_2, \end{cases} \tag{12.80}$$

де $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1;\ 2$. Ця система з точністю до позначення змінних збігається з (12.79).

Нехай $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $t \in \mathbf{R}$ — дійсний розв'язок системи (12.80). Тоді рівняння

$$x_1 = \varphi_1(t), \ x_2 = \varphi_2(t), \ t \in \mathbf{R}$$

визначають криву на площині x_1, x_2. Ця крива називається *фазовою траєкторією системи* (12.80), а картина, яку утворюють фазові траєкторії, *фазовим портретом системи* (12.80). Одну з фазових траєкторій легко знайти: система (12.80) має розв'язок $x_1(t) \equiv 0, x_2(t) \equiv 0$, і фазова траєкторія — точка (0; 0). Ця точка називається *положенням рівноваги системи* (12.80).

Проінтегруємо систему (12.80). Шукатимемо розв'язок у вигляді $\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{e}$, де λ — скаляр, а $\boldsymbol{e}$ — двовимірний вектор: $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2)$. Підставивши $\boldsymbol{x}(t)$ у систему (12.80), дістанемо

$$\lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda t}\boldsymbol{e}.$$

Звідси маємо

$$A\boldsymbol{e} = \lambda \boldsymbol{e}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Отже, λ — власне число матриці A, а $\boldsymbol{e}$ — відповідний йому власний вектор.

Обмежимося випадком, коли власні числа матриці A різні й відмінні від нуля. Власні числа матриці A визначаються з характеристичного рівняння

$$\det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{12.81}$$

Коефіцієнти цього квадратного рівняння дійсні, тому можливі два випадки:

(I) Корені λ_1, λ_2 дійсні;

(II) Корені λ_1, λ_2 комплексно-спряжені: $\overline{\lambda}_2 = \lambda_1$.

Як уже зазначалося вище, ми розглянемо один основний випадок: власні числа матриці A різні й відмінні від нуля.

(I) Нехай $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$. Тоді власні вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ матриці A можна взяти дійсними, й будь-який дійсний розв'язок системи (12.80) матиме вигляд

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{e}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{e}_2, \tag{12.82}$$

де C_1, C_2 — сталі. Вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ утворюють базис на площині. Нехай ξ_1, ξ_2 — координати вектора $\boldsymbol{x}(t)$ в цьому базисі; тоді

$$\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{12.83}$$

Достатньо побудувати фазові траєкторії тільки в першому квадранті, де $C_1 \geq 0$, $C_2 \geq 0$, оскільки в силу (12.83) фазовий портрет буде симетричним відносно осей координат.

1) Числа λ_1, λ_2 мають однаковий знак: λ_1, $\lambda_2 > 0$ (***вузол***).

а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$. При $C_1 = C_2 = 0$ маємо положення рівноваги — точку (0; 0). Якщо $C_1 > 0$, $C_2 = 0$, то фазова траєкторія — вісь ξ_1, якщо $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ — вісь ξ_2 (рис. 12.6). Стрілки на рисунку вказують напрям, в якому рухається точка $\boldsymbol{x}(t)$ із ростом t. Нехай $C_1 > 0$, $C_2 > 0$; тоді $e^{\lambda_j t} \to 0$ $(t \to +\infty)$, $e^{\lambda_j t} \to \infty$ $(t \to -\infty)$, $j = 1;\ 2$, отже, фазова траєкторія — необмежена крива, яка входить у початок координат при $t \to +\infty$. Якщо $\lambda_1 > \lambda_2$, то

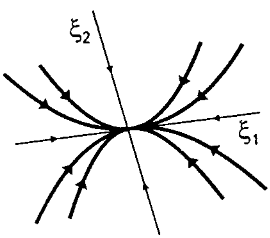

Рис. 12.6

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\xi_2}{\xi_1} = \lim_{t \to +\infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0,$$

так що фазова траєкторія дотикається осі ξ_1 у початку координат (і осі ξ_2, коли $\lambda_1 < \lambda_2$).

Із рівнянь (12.83) можемо дістати рівняння фазової траєкторії в такому вигляді:

$$\xi_2 = C\,\xi_1^{\alpha}, \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \tag{12.84}$$

звідки бачимо: фазові траєкторії мають форму *«парабол»*.

Зображену на рис. 12.6 картину називають *вузлом* (причому стійким, бо точка $\boldsymbol{x}(t)$ прямує до точки (0; 0) при $t \to +\infty$).

б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$. Фазовий портрет системи в точності такий самий, але всі стрілки будуть напрямлені від початку координат. Таку картину називають *нестійким вузлом*.

2) Числа λ_1, λ_2 мають різні знаки: $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ***(сідло)***.

Нехай $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 < 0$. При $C_1 = 0$, $C_2 > 0$ маємо $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, а при $C_2 = 0$, $C_1 > 0$ дістаємо $\xi_2 = 0$, $\xi_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \to 0$ (при $t \to +\infty$). Розглянувши аналогічно випадки $C_1 = 0$, $C_2 < 0$; $C_1 < 0$, $C_2 = 0$, дістанемо в підсумку чотири промені, які називають *«вусами»* *сідла*. Якщо $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, то $\xi_1 \to +\infty$, $\xi_2 \to 0$ при $t \to +\infty$ і траєкторії мають вигляд *«гіпербол»* (рис. 12.7). Таку картину називають *сідлом*.

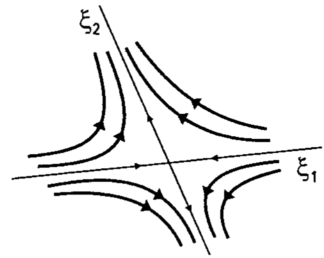

Рис. 12.7

(II) Нехай рівняння (12.81) має комплексні корені. Позначимо $\lambda_1 = \lambda$; тоді $\lambda_2 = \bar{\lambda}$. Нехай $\boldsymbol{e}$ — власний вектор матриці A: $A\boldsymbol{e} = \lambda\,\boldsymbol{e}$. Тоді $A\bar{\boldsymbol{e}} = \bar{\lambda}\,\bar{\boldsymbol{e}}$, тобто $\bar{\boldsymbol{e}}$ — власний вектор, який відповідає $\bar{\lambda}$. Будь-який розв'язок системи (12.80) має вигляд (12.82), а будь-який дійсний розв'язок —

$$\boldsymbol{x}(t) = Ce^{\lambda t}\boldsymbol{e} + \bar{C}e^{\bar{\lambda} t}\bar{\boldsymbol{e}}. \qquad (12.85)$$

Тут C — довільна стала, $C \in \mathbf{C}$. Те, що розв'язок (12.85) буде дійсним, очевидно: кожна компонента вектора $\boldsymbol{x}(t)$ є сумою двох комплексно-спряжених чисел. Неважко довести й обернене: будь-який дійсний розв'язок можна подати у вигляді (12.85). Покладемо $\lambda = \alpha + i\beta$, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}_1 - i\boldsymbol{f}_2$, $C = a + ib$, де числа α, β, a, b та вектори $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ дійсні. Тоді

$$\boldsymbol{x}(t) = \xi_1\boldsymbol{f}_1 + \xi_2\boldsymbol{f}_2, \quad \xi_1 = 2e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\sin\beta t),$$
$$\xi_2 = 2e^{\alpha t}\,(b\cos\beta t + a\sin\beta t).$$

(1) $\alpha = 0$; обидва корені $\pm i\beta$ суто уявні (***центр***).

У цьому випадку

$$\xi_1 = \rho_0\cos(\beta t + \gamma),$$
$$\xi_2 = \rho_0\sin(\beta t + \gamma),$$

де $\rho_0 = \sqrt{a^2 + \beta^2}$, $\operatorname{tg}\gamma = b/a$.

Фазові траєкторії — *еліпси* (рис. 12.8). Напрям обходу еліпса залежить від знака β (тут $\beta > 0$).

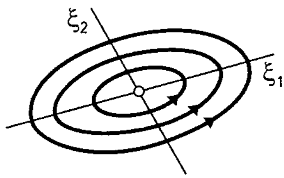

Рис. 12.8

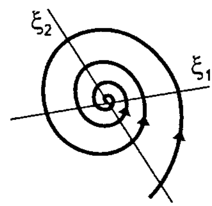

Рис. 12.9

(2) $\alpha \neq 0$ (***фокус***).

Рівняння траєкторій мають вигляд

$$\xi_1 = \rho_0 e^{\alpha t}\cos(\beta t + \gamma), \quad \xi_2 = \rho_0 e^{\alpha t}\sin(\beta t + \gamma).$$

При $\alpha < 0$ траєкторії є *спіралями*, які закручуються до початку координат при $t \to +\infty$ (бо $e^{\alpha t} \to 0$ при $\alpha < 0$). Напрям накручування спіралі залежить від знака β (рис. 12.9). Картину називають *стійким фокусом*.

При $\alpha > 0$ маємо *нестійкий фокус*: фазовий портрет систем такий самий, як на рис. 12.6, але при $t \to +\infty$ точка віддаляється по спіралі на нескінченність.

(3) Розглянемо тепер нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2), \tag{12.86}$$

яка є окремим випадком системи (12.70), причому її праві частини не залежать явно від t. Такі системи називають *автономними*.

Положенням рівноваги системи називають таку точку площини $a(a_1, a_2)$, для якої

$$f_1(a_1, a_2) = 0, \quad f_2(a_1, a_2) = 0.$$

Не обмежуючи загальності, можемо вважати $(a_1, a_2) = (0; 0)$. У противному разі можна перетворити систему (12.86) за схемою $x_1 = y_1 + a_1$, $x_2 = y_2 + a_2$. Відносно нових змінних дістанемо систему типу (12.86), для якої положенням рівноваги буде початок координат.

Припустимо, що функції f_1 та f_2 дійсні й нескінченно диференційовні при всіх x_1, x_2. Виділимо в правих частинах системи (12.86) лінійну частину. Вона набере вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(0;0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1(0;0)}{\partial x_2} x_2 + g(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial f_2(0;0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_2(0;0)}{\partial x_2} x_2 + h(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{12.87}$$

де функції $g(x_1, x_2)$, $h(x_1, x_2)$ містять степені x_1, x_2, більші за 1.

Постає запитання: чи можна судити про структуру фазових траєкторій системи (12.87) в околі положення рівноваги за фазовим портретом відповідної лінеаризованої системи

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f_1(0;0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_1(0;0)}{\partial x_2} x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial f_2(0;0)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f_2(0;0)}{\partial x_2} x_2 \ ? \end{aligned} \tag{12.88}$$

Відповідь на це запитання дає теорема, яку ми приймаємо без доведення.

Теорема 12.4. Нехай положення рівноваги (0; 0) лінеаризованої системи (12.88) — вузол, сідло або фокус. Тоді фазові траєкторії системи (12.87) мають таку саму структуру в малому околі положення рівноваги (0; 0).

■ **Приклад 12.27**. *Визначити характер положення рівноваги системи рівнянь*

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1 + 6x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -3x_1 + 5x_2. \tag{12.89}$$

Матриця цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

а її характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

має корені $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Корені дійсні й різних знаків, отже, положення рівноваги — точка (0; 0) — є сідлом. «Вуса» сідла шукаємо у вигляді $x_2 = kx_1$. Із системи (12.89) виключаємо час:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-3x_1 + 5x_2}{-4x_1 + 6x_2}. \tag{12.90}$$

Зауважимо, що особлива точка рівняння (12.90) і положення рівноваги системи (12.89) збігаються — точка (0; 0). Характер особливої точки такий самий, як і характер положення рівноваги, а фазові траєкторії системи лежать на інтегральних кривих відповідного рівняння. Підставимо $x_2 = kx_1$ у (12.90):

$$k = \frac{-3 + 5k}{-4 + 6k} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}, \; k_2 = 1.$$

На променях прямої $x_2 = \dfrac{x_1}{2}$, $x_1 \neq 0$ система (12.89) зводиться до такої: $\dfrac{dx_1}{dt} = -x_1$, $\dfrac{dx_2}{dt} = -x_2$. Звідси $x_1(t) = x_{1_0}e^{-t} \to 0$ при $t \to +\infty$ і $x_2(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

На променях прямої $x_2 = x_1$ маємо $\dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1$, $\dfrac{dx_2}{dt} = 2x_2$ і $x_1(t) = x_{1_0}e^{2t} \to \pm\infty$, $x_2(t) \to \pm\infty$ при $t \to \infty$. Ця інформація дає змогу зобразити фазову картину на рисунку.

■ **Приклад 12.28**. *Визначити характер особливої точки рівняння*

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - 4x_2}. \tag{12.91}$$

Особлива точка цього рівняння — (0; 0) буде положенням рівноваги системи

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 4x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \tag{12.92}$$

(t можемо розглядати як параметр). Власні числа матриці A суто уявні:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}: \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}.$$

Отже, положення рівноваги системи (12.92) є центром, фазові траєкторії [крім точки (0; 0)] — замкнені криві, відтак, і інтегральні криві рівняння (12.91) мають такий самий характер. Зазначимо, що (12.91) є рівнянням у повних диференціалах, тому

$$(x_1 - x_2)\,dx_1 - (x_1 - 4x_2)\,dx_2 = = d\left(\frac{x_1^2}{2} - x_1 x_2 + 2x_2^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{2} - x_1 x_2 + 2x_2^2 = C \text{ або } (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 = C^2.$$

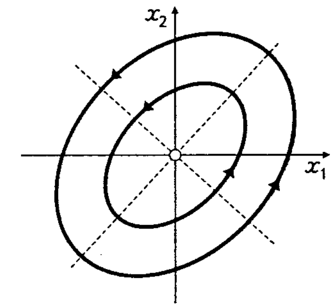

Рис. 12.10

Ми знайшли перший інтеграл; рівняння $(x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 = C^2$ є рівнянням сім'ї еліпсів. За цими даними неважко зобразити сім'ю інтегральних кривих (рис. 12.10).

Для системи (12.92) маємо сім'ю фазових траєкторій. Напрям руху зображаючої точки по фазовій траєкторії легко визначити безпосередньо з системи (12.92): нижче від прямої $x_1 - x_2 = 0$ $\frac{dx_2}{dt} > 0$ і $x_2(t)$ в області $x_1 - x_2 > 0$ зростає.

■ **Приклад 12.29.** *Знайти положення рівноваги системи*

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 + 4, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1^2 + x_2^2 - 17 \qquad (12.93)$$

і дослідити характер точок рівноваги.

Положення рівноваги даної системи визначаються з рівнянь $x_1 x_2 + 4 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 17 = 0$, звідки знаходимо чотири положення рівноваги: $A(-1; 4)$, $B(-4; 1)$, $C(1; -4)$ і $D(4; -1)$.

В околі точки (x_{0_1}, x_{0_2}) лінеаризована система запишеться у вигляді [див. (12.88)]

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_{0_2}(x_1 - x_{0_1}) + x_{0_1}(x_2 - x_{0_2}), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_{0_1}(x_1 - x_{0_1}) + 2x_{0_2}(x_2 - x_{0_2}). \end{cases}$$

Характеристичне рівняння матриці

$$A = \begin{pmatrix} x_{0_2} & x_{0_1} \\ 2x_{0_1} & 2x_{0_2} \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\lambda^2 - 3x_{0_2}\,\lambda + 2\,(x_{0_2}^2 - x_{0_1}^2) = 0.$$

Для точок A і C відповідно дістанемо

$$\lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0,\ \ \lambda^2 + 12\lambda + 30 = 0.$$

Обидва корені першого з рівнянь додатні, отже, лінеаризована система має в точці A нестійкий вузол; з огляду на сформульовану вище теорему таку саму структуру має в околі положення рівноваги A (–1; 4) і дана система (12.93). Цілком аналогічно знаходимо характер інших точок рівноваги системи (12.93): C — стійкий вузол, B, D — точки типу «сідло».

12.3 ЗАДАЧІ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Диференціальні рівняння — один із найефективніших інструментів, які використовуються для математичного моделювання процесів чи явищ у природничих науках.

Наведемо лише декілька типових прикладів. Зазначимо, що для складання математичної моделі задачі використовуються міркування чи припущення, аргументація яких виходить за рамки математики. Для аналізу одержаних диференціальних рівнянь цілком достатньо техніки, викладеної в попередніх параграфах. Зауважимо лише, що незалежну змінну ми позначаємо через t, а шукану функцію — через $x\,(t)$.

❑ **Задача 12.1** ***(з математичної економіки).*** *Розглядається ринок деякого (одного) товару. Нехай ціна P товару, попит D і пропозиція S змінюються в часі. Модель ринку діє згідно з такими припущеннями (аргументація їх виключно економічна):*

1) у кожний момент часу ціна товару встановлюється таким чином, що попит повністю поглинає пропозицію: $D = S$;

2) залежність попиту й пропозиції від ціни P та її похідної вважається лінійною, причому

$$D = \alpha + aP + a_1\frac{dP}{dt},\quad S = \beta + bP.$$

Завдання:

(а) *записати закон зміни ціни в часі у вигляді диференціального рівняння;*

(б) *записати закон зміни ціни $P(t)$ у вигляді аналітичної формули.*

Розв'язання

(а) Підставивши D і S із п. 2 умови у співвідношення з п. 1, дістанемо шукане диференціальне рівняння для ціни:

$$\alpha + aP + a_1 \frac{dP}{dt} = \beta + bP,$$

або

$$\frac{dP}{dt} + \frac{a-b}{a_1} P = \frac{\beta - \alpha}{a_1}, \quad P(0) = P_0,$$

де P_0 — ціна в початковий момент часу $t = 0$.

(б) Розв'язавши одержану попередньо задачу Коші (виконайте цю вправу самостійно; техніку інтегрування викладено в п. 12.1), остаточно дістанемо аналітичну формулу

$$P(t) = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{b-a}{a_1},$$

де $\overline{P} = \dfrac{\beta - \alpha}{a - b}$ — сталий (стаціонарний) розв'язок диференціального рівняння.

В економіці найчастіше припускають, що $a < 0$, $a_1 < 0$, $b > 0$, тобто $\lambda = \dfrac{b-a}{a_1} < 0$. Отже, в цьому випадку ціна $P(t)$ змінюється монотонно, наближаючись до $\overline{P}$ — ціни рівноваги. Інші випадки розгляньте самостійно.

❑ **Задача 12.2** *(з хімії). У процесі хімічної реакції деяка речовина перетворюється на іншу зі швидкістю, пропорційною кількості перетвореної речовини (припущення, за яке відповідають хіміки).*

Завдання:

(а) *записати закон зміни кількості $x(t)$ неперетвореної речовини у вигляді диференціального рівняння (коефіцієнт пропорційності α = const);*

(б) *записати закон зміни кількості $x(t)$ неперетвореної речовини у вигляді аналітичної формули;*

(в) *знайти $x(t)$, якщо через 1 год від початку процесу кількість неперетвореної речовини становила 31,4 г, а через 3 год — 9,7 г;*

(г) *розглянути випадок, коли коефіцієнт α є ω-періодичною функцією часу.*

Розв'язання

(а) Очевидно, шукане диференціальне рівняння відносно функції $x(t)$ матиме вигляд

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \quad \alpha = \text{const},$$

причому $x(0) = x_0$.

(б) Задача Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння з п. (а) інтегрується елементарно:

$$\frac{dx}{x} = \alpha\, dt \Rightarrow \ln|x| = \alpha t + \ln C_1 \Rightarrow x(t) = Ce^{\alpha t};$$

$$x(0) = C = x_0.$$

Остаточно маємо шукану аналітичну формулу $x(t) = x_0 e^{\alpha t}$.

(в) З останньої формули маємо

$$x(1) = x_0 e^{\alpha} = 31{,}4,$$

$$x(3) = x_0 e^{3\alpha} = 9{,}7.$$

Поділимо друге рівняння на перше:

$$e^{2\alpha} = \frac{9{,}7}{31{,}4}, \quad e^{\alpha} = \sqrt{\frac{9{,}7}{31{,}4}}.$$

Тому в цьому конкретному випадку

$$x_0 = 31{,}4e^{-\alpha} = 31{,}4\sqrt{\frac{31{,}4}{9{,}7}} = 56{,}5 \text{ (г)}.$$

До речі, аналітична формула для $x(t)$ має вигляд

$$x(t) = x_0\left(\sqrt{\frac{9{,}7}{31{,}4}}\right)^t.$$

(г) У досліджуваному випадку

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x, \quad x(0) = x_0;$$

$$\alpha(t + \omega) = \alpha(t);$$

інтегрування приводить до аналітичної формули

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau\right)x_0; \quad \exp\gamma := e^{\gamma}.$$

Цікаво, що $x(t+\omega)=\lambda x(t)$, де $\lambda=\exp\int\limits_0^{\omega}\alpha(s)ds$ — так званий мультиплікатор. Зокрема, при $\lambda=1\left(\int\limits_0^{\omega}\alpha(s)ds=1\right)$ розв'язок $x(t)$ є ω-періодичною функцією.

Справді, $x(t+\omega)$ — розв'язок нашого рівняння, оскільки

$$\frac{dx(t+\omega)}{dt}=\frac{dx(t+\omega)}{d(t+\omega)}=\alpha(t+\omega)x(t+\omega)=\alpha(t)x(t+\omega).$$

Але й функція $\lambda x(t)$ — теж розв'язок даного рівняння, причому при $t=0$ обидва розв'язки збігаються:

$$x(t+\omega)|_{t=0}=x(\omega)=x_0\exp\int\limits_0^{\omega}\alpha(s)ds,$$

$$\lambda x(t)|_{t=0}=\lambda x_0=x_0\exp\int\limits_0^{\omega}\alpha(s)ds.$$

Отже, за теоремою єдиності

$$x(t+\omega)=\lambda x(t).$$

❑ **Задача 12.3** ***(з теорії популяцій).*** *В умовах боротьби за існування швидкість збільшення числа особин популяції пропорційна (з коефіцієнтом α) кількості особин у даний момент часу, а швидкість їх зменшення пропорційна (з коефіцієнтом β) квадрату кількості особин; α,β — сталі.*

Завдання:

(а) *записати закон зміни кількості особин $x(t)$ у вигляді диференціального рівняння;*

(б) *дослідити одержане рівняння й відповісти на запитання: яким має бути число особин x_0 в початковий момент часу $t=0$, щоб із плином часу $x(t)$ не змінювалося? збільшувалося? зменшувалося? яким буде закон зміни кількості особин, записаний у вигляді аналітичної формули?*

(в) *розглянути випадок, коли в умовах попередньої задачі α та β — ω-періодичні функції часу: $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$, $\alpha(t+\omega)=\alpha(t)$, $\beta(t+\omega)=\beta(t)$. Знайти аналітичну формулу для $x(t)$ і дослідити її.*

Розв'язання

(а) Шукане диференціальне рівняння дістанемо з умови:

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x-\beta x^2;\ \ x(0)=x_0.$$

(б) Поведінка розв'язку $x(t)$ цієї задачі Коші випливає з аналізу правої частини самого рівняння. Рівняння має, зокрема, стаціонарний (сталий) розв'язок $x(t) = x_0$, коли $\alpha x - \beta x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ (тривіальний випадок) або $x_0 = \alpha/\beta$. Значення $x(t)$ зменшується при $\alpha x_0 - \beta x_0^2 = x_0(\alpha - \beta x_0) < 0$ (бо тоді $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} < 0$) і збільшується при $\alpha - \beta x_0 > 0$.

Пропонуємо закінчити розв'язання задачі самостійно. Зазначимо лише, що коли α, β сталі, диференціальне рівняння цієї задачі припускає відокремлення змінних. У випадку, коли α, β — деякі (зокрема, періодичні) функції часу, рівняння можна звести до лінійного, якщо покласти в ньому $x = z^{-1}$, де z — нова шукана функція.

❑ **Задача 12.4** ***(з фізики).*** *Припустимо, що матеріальна точка масою m рухається вздовж осі Ox під впливом:*

1) *сили, що притягує її до початку координат, яку вважатимемо пропорційною відхиленню x точки від початку координат (відновлювальна сила);*

2) *сили опору середовища, яку припускатимемо пропорційною швидкості руху точки (це реально при незначній швидкості);*

3) *збурювальної, або зовнішньої, сили, що спрямована вздовж осі й дорівнює $F(t)$ у момент часу t.*

Згідно із законом Ньютона диференціальне рівняння руху буде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha x - b\frac{dx}{dt} + F(t)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = f(t),$$

де $h = \frac{b}{2m} > 0, k^2 = \frac{a}{m}$ і $f(t) = \frac{1}{m}F(t)$ (h — коефіцієнт опору, k — коефіцієнт відновлення). Одержане диференціальне рівняння є математичною моделлю руху точки, тобто лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Техніку інтегрування таких рівнянь описано в п. 12.2.

Залишимо повний аналіз можливих випадків для самостійної роботи й розглянемо тут лише два з них.

(а) Збурювальна сила відсутня ($F(t) \equiv 0$), опором середовища нехтуємо. Диференціальне рівняння набирає вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Тоді

$$x(t) = A\sin(kt + \varphi_0)$$

або

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Рух, який описують ці формули, називається *гармонічним коливанням*, величина $kt + \varphi_0$ — *фазою коливання*, φ_0 — *початковою фазою*, k — *власною коловою частотою системи*, A — *амплітудою коливань* (максимальне відхилення точки від стану рівноваги). Сталі A та φ_0 визначаються з початкових умов $x(0) = x_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = x_0'$.

(б) Діє періодична збурювальна сила $f(t) = P \sin \mu t$, опором середовища нехтуємо ($h = 0$). Тоді рівняння руху має вигляд

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P \sin \mu t \quad (k, P, \mu \text{ — сталі}).$$

Це рівняння розглядалося також у п. 12.2. Його загальний розв'язок за умови $k \neq \mu$ (нерезонансний випадок) має вигляд (закон руху точки — аналітична формула)

$$x(t) = A \sin (kt + \varphi_0) + \frac{P}{k^2 - \mu^2} \sin \mu t.$$

Перший доданок в останній формулі зображує власні коливання з частотою k, другий — так звані вимушені коливання, частота яких μ. Амплітуда вимушених коливань $\frac{P}{k^2 - \mu^2}$ дуже велика, коли k (власна частота) мало відрізняється від μ (частота збурювальної сили). При збігу власної частоти й частоти збурювальної сили $k = \mu$ (резонанс) розв'язок рівняння (див. п. 12.2) набирає вигляду

$$x(t) = A \sin (kt + \varphi_0) - \frac{P}{2k} t \cos kt.$$

Амплітуда вимушених коливань зростатиме необмежено при $t \to \infty$. Це так зване явище резонансу.

❑ **Задача 12.5** *(з фізики). Кульку масою m кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0. Опором повітря нехтуємо, вважаємо, що на кульку діє лише сила ваги.*

Завдання:

(а) *скласти математичну модель задачі й дослідити її;*

(б) *відповісти на такі запитання:*

- *в який момент часу від початку руху кулька досягне максимальної висоти x_{max}?*
- *чому дорівнює x_{max}?*
- *коли кулька впаде на землю?*

Розв'язання

Обмежимося лише вказівкою, залишаючи подальші викладки (вони досить елементарні) для самостійної роботи.

Вважаємо, що кулька рухається вздовж осі Ox, напрямленої вертикально вгору. Тоді сила, яка діє на кульку, дорівнює mg і за другим законом Ньютона $m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$. Покладемо

$$x(0) = 0, \ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v|_{t=0} = v_0.$$

Тоді математична модель задачі матиме вигляд такої задачі Коші:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -q; \ x(0) = 0, \ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0.$$

Звідси легко знайти аналітичні вирази для $x(t)$ та $x_{\max}$:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2;$$

$$x_{\max} = x(t_{\max}) = x\left(\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Глава 13 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

13.1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

У гл. 4 (див. кн. 1) подано нескінченні послідовності та їх границі, ряди та їх суми. Елементами цих послідовностей і членами рядів були сталі числа. Припустимо тепер, що задано послідовність, елементами якої є функції

$$f_1(x),\, f_2(x),\, \ldots,\, f_n(x),\, \ldots, \qquad (13.1)$$

котрі залежать від однієї й тієї самої змінної x і визначені на деякій множині $X = \{x\}$. Коротко послідовність (13.1) позначають $\{f_n(x)\}$, де $f_n(x)$ — загальний член послідовності.

Нехай для кожного $x \in X$ послідовність (13.1) має скінченну границю. Оскільки ця границя цілком визначається значенням x, то вона також є функцією від $x \in X$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \qquad (13.2)$$

Функцію $f(x)$, визначену в (13.2), називатимемо ***граничною функцією послідовності*** (13.1).

Для функціональних послідовностей будемо цікавитися не лише існуванням границі для кожного значення x, а й функціональними властивостями граничної функції, оскільки гранична функція $f(x)$ може мати функціональні властивості, відмінні від функціональних властивостей елементів послідовності $\{f_n(x)\}$.

Аби пояснити, про що йдеться, розглянемо приклади.

■ **Приклад 13.1.** Функції послідовності $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x}$ для $x \in [0;\, 1]$ неперервні. Гранична функція

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x} = 0$$

для всіх $x \in [0;\, 1]$. Отже, $f(x)$ неперервна на відрізку $[0;\, 1]$.

■ **Приклад 13.2.** Функції послідовності $f_n(x) = x^n$ для всіх $x \in [0;\, 1]$ неперервні. При $0 \le x < 1$ функція $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, а при $x = 1$ $f(x) = 1$ (див. приклад 4.2, кн. 1), тобто гранична функція має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le x < 1, \\ 1 \text{ при } \quad x = 1 \end{cases}$$

і є розривною.

Постає запитання: за яких умов гранична функція послідовності неперервних функцій буде неперервною? Ця та інші властивості граничної функції досліджуватимуться далі.

Як відомо (див. гл. 4, кн. 1), розгляд числового ряду та його суми є лише іншою формою дослідження послідовності чисел та її границі.

➡ **Означення 13.1**. Нехай на множині X задано послідовність числових функцій $u_n(x)$, $n = 1; 2; \ldots$ *Множину всіх числових сум*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{13.3}$$

або $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, *де в кожному з доданків точка* $x \in X$ *фіксована,*

називають ***функціональним рядом на множині X,*** *а функції* $u_n(x)$, $n = 1; 2; \ldots$ — ***його членами.***

Аналогічно, як і у випадку числових рядів, суму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X \tag{13.4}$$

називають ***n-ю частковою сумою ряду (13.3)***, *а ряд*

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in X \tag{13.5}$$

— ***його n-м залишком.***

➡ **Означення 13.2**. *Ряд (13.3) називають* ***збіжним на множині X,*** *якщо послідовність* $\{S_n(x)\}$ *його часткових сум збігається на цій множині. При цьому границю часткових сум*

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x),} \quad x \in X \tag{13.6}$$

називають ***сумою ряду (13.3).*** У цьому разі пишуть

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

і кажуть, що функція $S(x)$ розвивається в ряд (13.3).

Якщо ряд (13.3) для довільного фіксованого $x \in X$ *збігається абсолютно, то його називають* ***абсолютно збіжним на множині X.***

■ **Приклад 13.3**. *Визначити множину збіжності ряду*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{13.7}$$

Дослідимо абсолютну збіжність цього ряду при фіксованому $x \in \mathbf{R}$ за допомогою ознаки Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Отже, для довільних $x \in \mathbf{R}$ ряд (13.7) збігається абсолютно, а отже, і просто збігається.

■ **Приклад 13.4.** *Визначити область збіжності ряду*

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{x^n}{1+x^{2n}} + \ldots \tag{13.8}$$

Дослідимо збіжність ряду з абсолютних величин

$$\frac{|x|}{1+x^2} + \frac{|x|^2}{1+x^4} + \ldots + \frac{|x|^n}{1+x^{2n}} + \ldots \tag{13.9}$$

Для довільних дійсних x виконується нерівність

$$\frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \le |x|^n.$$

Якщо $|x| < 1$, то ряд $|x| + |x|^2 + \ldots + |x|^n + \ldots$ є сумою членів спадної геометричної прогресії, а отже, збігається. За ознакою порівняння (теорема 4.15, кн. 1) збігається й ряд (13.9). Отже, ряд (13.8) збігається абсолютно для кожного x, такого, що $|x| < 1$.

Якщо $|x| > 1$, то для всіх $n \in \mathbf{N}$ виконується нерівність

$$\frac{|x|^n}{1+x^{2n}} \le \frac{|x|^n}{x^{2n}} = \frac{1}{|x|^n}.$$

Оскільки ряд

$$\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \ldots + \frac{1}{|x|^n} + \ldots$$

при $|x| > 1$ збігається (сума членів спадної геометричної прогресії), то за ознакою порівняння збігається ряд (13.9), а отже, в цьому випадку збігається абсолютно й ряд (13.8).

Якщо $|x| = 1$, то з ряду (13.8) дістанемо числові ряди $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} + \ldots$ при $x = 1$ та $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2} + \ldots$ при $x = -1$, які розбігаються, оскільки загальні члени цих рядів не прямують до нуля при $n \to \infty$.

Отже, областю збіжності ряду (13.8) буде множина $X = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

13.2 РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Розглянемо послідовність функцій $\{f_n(x)\}$, визначених на деякій множині X.

Означення 13.3. ***Послідовність функцій*** $\{f_n(x)\}$ ***поточково збігається*** *на множині X до функції $f(x)$, якщо для кожного фіксованого $x_0 \in X$ числова послідовність $\{f_n(x_0)\}$ збігається до $f(x_0)$.*

Означення 13.4. ***Послідовність функцій*** $\{f_n(x)\}$ ***рівномірно збігається*** *на множині X до функції $f(x)$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ та всіх $x \in X$ виконується нерівність*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{13.10}$$

В означенні 13.4 істотно те, що номер N не залежить від x.

Приклад 13.5. *Розглянемо послідовність $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ для $n \in \mathbf{N}$ і $x \in [0;\, 1]$. Гранична функція цієї послідовності $f(x)$ дорівнює нулю для $x \in [0;\, 1]$.*

Оскільки

$$0 \le f_n(x) = \frac{1}{2n}\,\frac{2nx}{1+n^2x^2} \le \frac{1}{2n},$$

то очевидно, що для виконання нерівності (13.10), тобто $f_n(x) < \varepsilon$, достатньо для довільного $x \in [0;\, 1]$ вибрати $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Отже, якщо взяти $N = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$, то при $n > N$ одночасно для всіх $x \in [0;\, 1]$ виконуватиметься нерівність (13.10).

Приклад 13.6. *Нехай для $n > \mathbf{N}$ та $X = [0;\ 1]$*

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad f(x) = 0.$$

Якщо $0 < x \le 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+nx} = 0$ для кожного значення x з указаної множини. Але рівномірної збіжності послідовності $f_n(x)$ до $f(x)$ не буде, оскільки нерівність (13.10), тобто $\dfrac{1}{(1+nx)} < \varepsilon$, рівносильна нерівності $n > \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\varepsilon} - 1\right)$, а останній вираз необмежено зростає з наближенням x до нуля.

Теорема 13.1 (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності функцій). Аби послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігалася на множині X, необхідно й достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існував номер $N \in \mathbf{N}$ такий, що для всіх $x \in X$, всіх $n > N$ і цілих $p \geq 0$ виконувалася нерівність

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{13.11}$$

Доведення

Необхідність. Нехай послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається до функції $f(x)$ для всіх $x \in X$. Задамо $\varepsilon > 0$. З означення 13.4 випливає: існує такий номер N, що для $n > N$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $x \in X$. Тоді для всіх $n > N$ і $p \geq 0$ дістанемо

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| +$$
$$+ |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ для всіх } x \in X.$$

Достатність. Нехай виконується нерівність (13.11). Тоді для кожного фіксованого $x \in X$ здійснення умов даної теореми означає виконання критерію Коші збіжності числової послідовності $\{f_n(x)\}$ (див. п. 4.5, кн. 1). Отже, послідовність $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ при $n \to \infty$ і $x \in X$. За заданим $\varepsilon > 0$ виберемо номер N так, щоб для всіх $n > N$ і всіх $x \in X$ виконувалася нерівність (13.11). Перейшовши в (13.11) до границі при $p \to \infty$ і n фіксованому, дістанемо нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Це й означає виконання умови (13.10). Теорему доведено.

Теорема 13.2. Якщо послідовність функцій $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігається на множині X до функції $f(x)$ і $f_n(x)$ неперервні в точці $x_0 \in X$, то $f(x)$ також неперервна в точці x_0.

Доведення

Задамо число $\varepsilon > 0$ і виберемо номер N так, щоб виконувалася нерівність $|f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $x \in X$. Це можна зробити, оскільки збіжність послідовності $f_n(x)$ до $f(x)$ рівномірна. Отже, для довільної точки $x \in X$ маємо

$$|f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(x_0)| + |f_N(x_0)-f(x_0)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x)-f_N(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3} = 2\frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x)-f_N(x_0)|.$$

Функція $f_N(x)$ неперервна в точці x_0. Отже, можна знайти таке $\delta > 0$, що $|f_N(x)-f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, якщо $|x-x_0| < \delta$. Звідси з попередньої нерівності випливає: для x таких, що $|x-x_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(x)-f(x_0)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Це й потрібно було довести.

13.3 РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Означення 13.5. *Функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X \tag{13.12}$$

*називають **рівномірно збіжним на множині X**, якщо послідовність його n-х часткових сум $S_n(x)$ збігається рівномірно на множині X, тобто якщо*

$$\sup_{x\in X}|S_n(x)-S(x)| = \sup_{x\in X}|r_n(x)| \to 0 \quad \text{при } n\to\infty. \tag{13.13}$$

Приклад 13.7. *Розглянемо ряд*

$$1 + x + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}. \tag{13.14}$$

Він збігається на проміжку $X = (-1;\ 1)$. Для довільного $x \in X$ n-й залишок ряду $r_n(x)$ при фіксованому n

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{k-1} = \frac{x^n}{1-x} \tag{13.15}$$

і

$$\lim_{x\to 1-0} r_n(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^n}{1-x} = \infty, \quad \lim_{x\to -1+0} r_n(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{x^n}{1-x} = (-1)^n \frac{1}{2}.$$

Звідси випливає, що нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всіх x одночасно, одного й того самого n, для заданого $\varepsilon < \frac{1}{2}$ не виконується. Збіжність ряду (13.15) на проміжку $x = (-1;\ 1)$ нерівномірна. Однак на проміжку $x_\alpha = [-\alpha, \alpha]$, де $0 < \alpha < 1$, даний ряд збігається рівномірно, оскільки

$$\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |r_n(x)| = \sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \frac{|x|^n}{1-x} \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty .$$

Отже, збіжність (у тому числі й рівномірна) функціонального ряду досліджується аналогічно збіжності послідовності функцій, а саме: послідовності його n-х часткових сум.

Теорема 13.3 (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). Аби ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x\in X$$

рівномірно збігався на множині X, необхідно й достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існував номер $N \in \mathbf{N}$ такий, що для всіх $n > N$, довільного $p \in \mathbf{N}$ і всіх $x \in X$ виконувалася нерівність

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{13.16}$$

Доведення

Із рівності

$$u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = S_{n+p}(x) - S_{n-1}(x),$$

де $S_n(x)$ — часткові суми даного ряду, випливає, що критерій Коші рівномірної збіжності ряду утворюється з критерію Коші рівномірної збіжності послідовностей часткових сум $S_n(x)$.

Перевірити умови критерію Коші для конкретних рядів досить важко. Тому сформулюємо ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів.

Теорема 13.4 (необхідна умова рівномірної збіжності ряду). Якщо ряд (13.12) рівномірно збігається на множині X, то послідовність його членів рівномірно прямує до нуля на цій множині.

Доведення

Оскільки

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x), \quad n = 2; 3; \ldots$$

і ряд (13.12) рівномірно збігається на множині X, то послідовності $\{S_n(x)\}$ та $\{S_{n-1}(x)\}$ його часткових сум рівномірно збігаються на множині X до суми ряду $S(x)$:

$$S_n(x) \to S(x), \quad S_{n-1}(x) \to S(x),$$

отже,

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \to S(x) - S(x) = 0.$$

Теорема 13.5 (ознака Вейєрштрасса). Якщо функціональний ряд (13.12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ визначений на множині X й існує збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ такий, що для всіх $x \in X$ і для довільного номера n справедлива нерівність

$$|u_n(x)| \le c_n, \tag{13.17}$$

то функціональний ряд (13.12) збігається рівномірно на множині X.

Доведення

Із критерію Коші збіжності числового ряду випливає: для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $N \in \mathbf{N}$ такий, що для всіх $n > N$ і для довільного натурального p справедлива нерівність

$$c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon. \tag{13.18}$$

Із нерівностей (13.17) і (13.18) випливає, що

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \le c_{n+1} + c_{n+2} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$$

для всіх $n > N$, усіх натуральних p і всіх $x \in X$.

Згідно з критерієм Коші функціональний ряд (13.12) рівномірно збігається на множині X.

- *Зауваження.* З нерівностей (13.17) випливає, що коли функціональний ряд (13.12) збігається рівномірно за ознакою Вейєрштрасса, то він збігається й абсолютно.

■ **Приклад 13.8**. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ рівномірно збігається на всій числовій прямій, оскільки для всіх $x \in \mathbf{R}$

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$

а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається (див. наслідок теореми 4.16, кн. 1).

• *Зауваження.* Якщо виконуються нерівності (13.17) для всіх n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називають *мажорантним рядом для ряду* (13.12).

Однак не до всіх рядів можна безпосередньо застосувати ознаку Вейєрштрасса.

Сформулюємо (без доведення) дві ознаки, що стосуються функціональних рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \ldots + u_n(x)v_n(x) + \ldots, \tag{13.19}$$

де $u_n(x)$, $v_n(x)$ $(n = 1; 2; \ldots)$ є функціями $x \in X$.

Ознака Абеля. Нехай ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = v_1(x) + v_2(x) + \ldots + v_n(x) + \ldots \tag{13.20}$$

збігається рівномірно на множині X, а функції $u_n(x)$ (для кожного x) утворюють монотонну послідовність і для всіх x та n обмежені:

$$|u_n(x)| \leq K.$$

Тоді ряд (13.19) збігається рівномірно на множині X.

Ознака Діріхле. Якщо часткові суми $V_n(x)$ ряду (13.20) обмежені для всіх $x \in X$ та $n \in N$:

$$|V_n(x)| \leq M,$$

а функції $u_n(x)$ (для кожного x) утворюють монотонну послідовність, яка збігається до нуля рівномірно на множині X, то ряд (13.19) збігається рівномірно на множині X.

■ **Приклад 13.9**. Якщо $\{a_n\}$ — монотонна послідовність додатних чисел таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

за ознакою Діріхле збігаються рівномірно на довільній множині $X = [2\pi k + \delta,\ 2\pi(k+1) - \delta]$, $k \in \mathbf{Z}$, $0 < \delta < \pi$. Це випливає з того, що

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|}, \quad x \in X, \quad n \ge 1$$

і $\sin\frac{1}{2}x \ne 0$ для всіх $x \in X$. Отже, сума $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ обмежена числом M, що не залежить від x.

13.4 ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Теорема 13.6. Якщо функції $u_n(x)$ неперервні в точці $x \in X$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається на множині X, то його сума

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{13.21}$$

також неперервна в точці x_0.

Доведення

Нехай точки x_0 та $x_0 + \Delta x$ належать множині X. Тоді

$$S(x_0) = S_n(x_0) + r_n(x_0),$$

$$S(x_0 + \Delta x) = S_n(x_0 + \Delta x) + r_n(x_0 + \Delta x).$$

Обчислимо приріст функції $S(x)$ у точці x_0:

$$\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0) = S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) +$$
$$+ r_n(x_0 + \Delta x) - r_n(x_0) = \Delta S_n + r_n(x_0 + \Delta x) - r_n(x_0).$$

Звідси дістанемо

$$|\Delta S| \le |\Delta S_n| + |r_n(x_0 + \Delta x)| + |r_n(x_0)|. \qquad (13.22)$$

Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно, то для даного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $r_n(x) < \varepsilon / 3$ для всіх $x \in X$, а отже, і для $x = x_0 \in X$ та $x_0 + \Delta x \in X$ (див. означення 13.5). Зафіксуємо одне з таких n і позначимо його через n_0. Оскільки $S_{n_0}(x)$ неперервна в точці $x_0 \in X$, то знайдеться таке число $\delta > 0$, що для $|\Delta x| < \delta$ виконуватиметься нерівність $|\Delta S_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді з нерівності (13.22) при $|\Delta x| < \delta$ випливає, що $|\Delta S| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Це й доводить неперервність функції $S(x)$ у точці x_0.

Теорема 13.7. Нехай функції $u_n(x)$, $x \in [a, b]$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збігається на цьому відрізку. Тоді хоч би яка була точка $x_0 \in [a, b]$, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt \qquad (13.23)$$

також рівномірно збігається для всіх $x \in [a, b]$ і

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt. \qquad (13.24)$$

Доведення

Ряд (13.21) рівномірно збігається на $[a, b]$. Тоді його сума $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неперервна на $[a, b]$, а отже, інтегровна на $[a, b]$, або детальніше:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + r_n(x).$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності на $[x_0, x] \subset [a, b]$, знаходимо

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x} u_1(t)dt + \int_{x_0}^{x} u_2(t)dt + \ldots + \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt + \int_{x_0}^{x} r_n(t)dt.$$

Сума перших n доданків у правій частині є n-ю частковою сумою ряду (13.23). Отже, аби довести рівність (13.24), потрібно показати, що

$$\int_{x_0}^{x} r_n(t)dt \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Справді, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно, то для довільного $\varepsilon \geq 0$ знайдеться номер N такий, що $|r_n(x)| < \varepsilon$ для $n > N$ і всіх $x \in X$. Тоді для $n > N$

$$\left| \int_{x_0}^{x} r_n(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} |r_n(t)|dt \leq \varepsilon(b-a),$$

що й треба було довести.

- *Зауваження.* Рівність (13.24) означає, що рівномірно збіжний ряд можна почленно інтегрувати в області його збіжності.

Теорема 13.8. Нехай функції $u_n(x)$, $n = 1; 2; \ldots$ неперервно диференційовні на відрізку $[a, b]$ і ряд, складений з їхніх похідних,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{13.25}$$

рівномірно збігається на відрізку $[a, b]$. Тоді, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається хоч би в одній точці $x_0 \in [a, b]$, то він збігається рівномірно на всьому відрізку $[a, b]$, і його сума

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{13.26}$$

є неперервно диференційовною функцією, похідна якої дорівнює сумі ряду з похідних, тобто

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{13.27}$$

Доведення

Позначимо суму ряду (13.25) через $\sigma(x)$: $\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$. Для доведення теореми потрібно показати, що $S'(x)=\sigma(x)$.

Нехай x_0, $x_0\in[a,b]$. З теореми 13.7 випливає, що

$$\int\limits_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=\int\limits_{x_0}^{x}u'_1(t)dt+\int\limits_{x_0}^{x}u'_2(t)dt+\ldots+\int\limits_{x_0}^{x}u'_n(t)dt+\ldots$$

або

$$\int\limits_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=[u_1(x)-u_1(x_0)]+[u_2(x)-u_2(x_0)]+\ldots+[u_n(x)-u_n(x_0)]+\ldots=$$

$$=[u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots]-[u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots]=$$

$$=S(x)-S(x_0),$$

тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x}\sigma(t)dt=S(x)-S(x_0).$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності по x, дістанемо $S'(x)=\sigma(x)$.

- *Зауваження.* В даній теоремі рівномірно збіжним має бути ряд (13.25), тобто ряд, складений із похідних, а не первісний.

■ **Приклад 13.10.** *Розглянемо ряд*

$$\sin x+\frac{\sin 8x}{8}+\frac{\sin 27x}{27}+\ldots+\frac{\sin n^3x}{n^3}+\ldots$$

Оскільки $\frac{|\sin n^3x|}{n^3}\le\frac{1}{n^3}$ для всіх $n\in\mathbf{N}$, то даний ряд збігається рівномірно й абсолютно на всій числовій прямій, і його сума $S(x)$ існує й неперервна для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$. Але ряд, складений із похідних

$$\cos x+\cos 8x+\cos 27x+\ldots+\cos n^3x+\ldots,$$

збігається не при всіх $x\in(-\infty,+\infty)$; наприклад, при $x=0$ дістанемо ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$, який розбігається. Тому теорема 13.8 для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$ несправедлива.

13.5 СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

13.5.1. Множина збіжності степеневого ряду

Означення 13.6. Нехай $\{a_n\}$ — послідовність дійсних чисел, $x \in \mathbf{R}$. ***Степеневим рядом*** *називають функціональний ряд вигляду*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{13.28}$$

а числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — ***коефіцієнтами ряду (13.28).***

Лінійна заміна змінної $x' = x - x_0$ дає змогу розглядати ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{13.29}$$

дослідження збіжності якого еквівалентне дослідженню збіжності ряду (13.28). Часткові суми ряду (13.29) є поліномами, й цей ряд завжди збігається в точці $x = 0$. Областю збіжності степеневого ряду є деякий інтервал збіжності, який може вироджуватися в точку. Множина всіх точок збіжності ряду (13.29) має цілком визначену структуру й виражається наступною теоремою.

Теорема 13.9 (Абеля). 1 Якщо степеневий ряд (13.29) збігається в деякій точці $x = x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x, для яких $|x| < |x_0|$. 2 Якщо при $x = x_1$ степеневий ряд розбіжний, то він розбігається в довільній точці x, такій, що $|x| > |x_1|$.

Доведення

1 Оскільки степеневий ряд (13.29) збігається при $x = x_0 \neq 0$, то його загальний член $a_n x_0^n$ в силу необхідної умови збіжності прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто числова послідовність $\{a_n x_0^n\}$ збіжна. З теореми 4.4 (кн. 1) випливає, що вона обмежена. Тому існує таке додатне число M, що

$$|a_n x_0^n| \le M \quad \text{для всіх } n \in \mathbf{N}. \tag{13.30}$$

Перепишемо ряд (13.29) у вигляді

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

і розглянемо ряд з абсолютних значень його членів

$$|a_0| + |a_1 x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots \qquad (13.31)$$

Згідно з (13.30) члени ряду (13.31) менші за відповідні члени ряду

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

Якщо $|x| < |x_0|$, то останній ряд є геометричною прогресією зі знаменником $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, а отже, цей ряд збіжний. У силу ознаки порівняння ряд (13.31) збігається й, отже, ряд (13.29) збігається абсолютно при $|x| < |x_0|$.

(2) Нехай ряд (13.29) розбігається в точці x_1. Припустимо, що він збігається в точці x такій, що $|x| > |x_1|$. Тоді з першої частини даної теореми випливає, що ряд (13.29) збігається в точці x_1, а це суперечить умові теореми. Отже, ряд (13.29) розбігається при всіх x, для яких $|x| > |x_1|$.

Доведена теорема дає змогу говорити про розміщення точок абсолютної збіжності й розбіжності степеневого ряду (13.29). Справді, якщо степеневий ряд (13.29) збіжний у точці $x_0 \neq 0$, то інтервал $(-|x_0|, |x_0|)$ заповнений точками абсолютної збіжності ряду.

Отже, існує таке число $0 < R < +\infty$, що при $|x| < R$ ряд (13.29) абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний.

Означення 13.7. *Число R називають* ***радіусом збіжності степеневого ряду*** *(13.29), якщо для довільної точки x, яка лежить усередині інтервалу $(-R, R)$, ряд абсолютно збігається, а для точок x, котрі розташовані поза ним, ряд розбігається (рис. 13.1).*

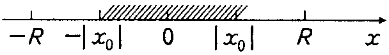

Рис. 13.1

На кінцях інтервалу, тобто при $x = \pm R$, питання про збіжність ряду вирішуються окремо для кожного конкретного ряду.

Зауважимо, що в деяких рядів інтервал збіжності вироджується в точку $x = 0$ $(R = 0)$, в інших — інтервалом збіжності є вся числова пряма $(-\infty, +\infty)$ $(R = +\infty)$.

Для знаходження радіуса збіжності степеневого ряду (13.29) розглянемо ряд, складений з абсолютних значень членів даного ряду:

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (13.32)$$

Нехай існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}\ x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\, L,\ \ x \neq 0,$$

де $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Тоді в силу ознаки Д'Аламбера ряд (13.32) збігатиметься, якщо $|x|L < 1$, тобто при $|x| < \dfrac{1}{L}$, і розбігатиметься, якщо $|x|L > 1$, тобто при $|x| > \dfrac{1}{L}$.

Таким чином, степеневий ряд (13.29) збігається абсолютно при $|x| < \dfrac{1}{L}$ і розбігається при $|x| > \dfrac{1}{L}$. Із попереднього випливає, що інтервал $\left(-\dfrac{1}{L}, \dfrac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду (13.29), причому радіус збіжності обчислюється за формулою

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{13.33}$$

де a_n і a_{n+1} — коефіцієнти відповідно n-го і $(n + 1)$-го членів ряду.

Якщо $a_n \neq 0$ для довільного n, то для визначення радіуса збіжності ряду (13.29) можна скористатись ознакою Коші:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

■ **Приклад 13.11**. *Знайти радіус збіжності степеневого ряду*

$$1 + 3x^2 + 9x^4 + \ldots + 3^n x^{2n} + \ldots$$

Позначимо $3x^2 = t$. Тоді $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$. Цей ряд збігається, якщо $|t| < 1$, і розбігається, якщо $|t| > 1$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$ збігається, якщо $3x^2 < 1$, тобто при $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, і розбігається при $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Таким чином, радіус збіжності ряду $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

■ **Приклад 13.12.** *Визначити область збіжності степеневого ряду*

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Тут $a_1=1,\ a_2=\frac{1}{2},\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{n},\ldots$ Згідно з формулою (13.33)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1.$$

Отже, ряд збігається в інтервалі $(-1;\ 1)$. Для $x=1$ матимемо розбіжний гармонічний ряд, а для $x=-1$ — ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$, який збігається умовно, в силу ознаки Лейбніца.

Таким чином, проміжок $(-1;\ 1)$ є областю збіжності досліджуваного ряду.

13.5.2. Рівномірна збіжність степеневого ряду

Теорема 13.10. Степеневий ряд рівномірно збігається на кожному відрізку, який належить його інтервалу збіжності.

Доведення

Нехай R — радіус збіжності степеневого ряду (13.29) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$.

Візьмемо довільне число $r\in(0,\ R)$ і розглянемо відрізок $[-r,\ r]$, який міститься в інтервалі $(-R,\ R)$. Для $r\in(-R,\ R)$ числовий ряд із додатними членами

$$|a_0|+|a_1|r+|a_2|r^2+\ldots+|a_n|r^n+\ldots$$

збігається. Для всіх $x\in[-r,\ r]$ і $n\in\mathbf{N}$ виконується оцінка $|a_n x^n|\leq$ $\leq|a_n|\,r^n$. В силу ознаки Вейєрштрасса (теорема 13.5) степеневий ряд (13.29) рівномірно збігається на відрізку $[-r,\ r]$.

◆ ***Наслідок.*** *Сума степеневого ряду неперервна на інтервалі збіжності.* Це твердження випливає з доведеної теореми 13.10 і теореми 13.6 про неперервність суми функціонального ряду.

13.5.3. Властивості степеневих рядів

Теорема 13.11 (про почленне диференціювання степеневого ряду). Якщо степеневий ряд (13.29)

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

має інтервал збіжності $(-R,\ R)$, то ряд

$$V(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,x^{n-1}, \qquad (13.34)$$

утворений почленним диференціюванням ряду (13.29), має той самий інтервал збіжності $(-R,\ R)$; при цьому

$$V(x)=S'(x),\ \ x\in(-R,\ R). \qquad (13.35)$$

Доведення

Покажемо, що ряд (13.34) мажорується на довільному відрізку $[-r,\ r\,]$, який належить інтервалу збіжності. Нехай точка x_0 така, що $r < x_0 < R$. У ній ряд (13.29) збігається, і його загальний член у силу необхідної умови збіжності ряду прямує до нуля при $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Тому послідовність $\{a_n x_0^n\}$ збіжна, а відтак, обмежена. Отже, існує таке додатне число M, що

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M \ \ \text{для всіх } n\in\mathbf{N}.$$

У випадку, коли $|x|\le r$,

$$\left|n a_n x^{n-1}\right| \le \left|n a_n r^{n-1}\right| = n\left|a_n x_0^{n-1}\right|\left|\frac{r}{x_0}\right|^{n-1} \le nMq^{n-1},$$

де $q=\dfrac{r}{x_0}<1$.

Таким чином, члени ряду (13.34) при $|x|\le r$ не перевищують за абсолютним значенням членів числового ряду з додатними членами

$$\frac{M}{x_0}(1+2q+3q^2+\ldots+nq^{n-1}+\ldots),$$

який збігається за ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}}=q<1.$$

Отже, ряд (13.34) у силу ознаки Вейєрштрасса (теорема 13.5) рівномірно збігається на відрізку $[-r, r]$. На підставі теореми 13.8 про почленне диференціювання рівномірно збіжного ряду його сума дорівнює похідній від суми ряду (13.29) на відрізку $[-r, r]$, тобто $V(x)=S'(x)$.

Далі, оскільки для кожної внутрішньої точки інтервалу $(-R, R)$ можна вибрати відповідний відрізок $[-r, r]$, який міститься в інтервалі $(-R, R)$, то ряд (13.34) абсолютно збіжний у довільній внутрішній точці вказаного інтервалу $(-R, R)$.

Покажемо, що поза інтервалом $(-R, R)$ ряд (13.34) розбігається. Доводитимемо від супротивного. Нехай він збігається в точці $x_1>R$. Виберемо точку x_2 таким чином, щоб $R<x_2<x_1$. В силу теореми Абеля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx_2^{n-1}$ абсолютно збігається, а отже, абсолютно збігається ряд, усі члени якого домножено на x_2: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx_2^n$. Тоді, оскільки $\left|a_nx_2^n\right|\le n\left|a_nx_2^n\right|$, $n\in\mathbf{N}$, то абсолютно збігається й ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_2^n$. Останнє й указує на суперечність, оскільки за припущенням ряд (13.29) в точці $x_2>R$ розбігається. Таким чином, інтервал $(-R, R)$ є інтервалом збіжності ряду (13.34). Теорему доведено.

◆ ***Наслідок.*** *Сума $S(x)$ степеневого ряду з радіусом збіжності R має в середині інтервалу збіжності похідні довільного порядку. Похідні функції $S(x)$ можна дістати за допомогою почленного диференціювання даного ряду відповідне число разів. Утворені при цьому ряди мають той самий інтервал збіжності, що й початковий ряд.*

Теорема 13.12 (про почленне інтегрування степеневого ряду). Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, який належить його інтервалу збіжності.

Довести теорему пропонуємо самостійно на підставі теорем 13.10 про рівномірну збіжність степеневого ряду, 13.7, а також 13.11. Зазначимо, що ряд, утворений у результаті інтегрування, має той самий інтервал збіжності, що й початковий ряд.

◆ ***Наслідок.*** *На множині збіжності степеневий ряд можна інтегрувати почленно довільне число разів. Радіус збіжності при цьому не змінюється.*

13.6 РЯД ТЕЙЛОРА

Зображення функції у вигляді степеневого ряду дістають широке застосування (при обчисленні значень функції, інтегралів, розв'язанні диференціальних рівнянь тощо). З'ясуємо, які функції можна подати степеневим рядом.

У п. 7.3 (кн. 1) вивчалась одна з основних формул диференціального числення — формула Тейлора. Було показано, що для функції $f(x)$, яка має похідні до $(n+1)$-го порядку включно, в околі деякої точки x_0, тобто в деякому інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$, котрий містить дану точку x_0, справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x). \qquad (13.36)$$

Цю формулу називають *формулою Тейлора функції* $f(x)$ ($r_n(x)$ — залишковий член формули Тейлора). Вираз

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (13.37)$$

називають *залишковим членом формули Тейлора у формі Лагранжа* (див. п. 7.3, кн. 1).

Якщо функція $f(x)$ має похідні довільного порядку в околі точки x_0, то у формулі (13.36) число n може бути як завгодно великим. Припустимо, що в розглядуваному околі точки x_0 залишковий член $r_n(x)$ прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Тоді, перейшовши в (13.36) до границі при $n \to \infty$, дістанемо ряд

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} + (x - x_0) +$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots, \qquad (13.38)$$

який називають ***рядом Тейлора функції*** $f(x)$. Якщо $x_0 = 0$, то (13.38) називають ***рядом Маклорена***. Рівність (13.38) справедлива лише у випадку, коли залишковий член $r_n(x)$ прямує до нуля при необмеженому зростанні n. У цьому разі ряд (13.38) збігається і його сума дорівнює $f(x)$. Для того щоб показати це, позначимо

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Формула (13.36) запишеться так:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x).$$

За припущенням $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, тому

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x).$$

Оскільки $P_n(x)$ — n-на часткова сума ряду (13.38), то її границя дорівнює сумі ряду, що міститься в правій частині рівності (13.38). Це й установлює справедливість формули (13.38). У результаті дійшли до наступного твердження.

Теорема 13.13. Аби ряд Тейлора (13.38) збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$, необхідно й достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків, а залишковий член її формули Тейлора прямував до нуля при $n \to \infty$ для всіх x з указаного інтервалу.

Зазначимо: умова визначеності функції $f(x)$ в околі точки x_0 та існування в ній похідних усіх порядків є лише необхідною для того, щоб зобразити її степеневим рядом. Існують функції, нескінченно диференційовні в околі точки x_0, ряд Тейлора (13.38) для яких не збігається при $x \neq x_0$ до $f(x)$ (хоча може й збігатися до іншої функції). Так, функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

у точці $x = 0$ має похідні всіх порядків і $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 1; 2; \ldots$ Пропонуємо переконатися в цьому самостійно, на підставі означення похідної функції в точці $x = 0$. Очевидно, сума цього ряду дорівнює нулю, а отже, не дорівнює заданій функції при $x \neq 0$.

Теорема 13.13 дає змогу сформулювати достатню умову зображення функції $f(x)$ у вигляді ряду Тейлора.

Теорема 13.14. Нехай функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ має похідні довільного порядку й існує таке дійсне число $M > 0$, що

$$|f^{(n)}(x)| \le M \quad \text{для всіх } n = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\quad x \in (x_0 - R,\ x_0 + R).$$

Тоді функцію $f(x)$ можна зобразити у вигляді ряду Тейлора в указаному інтервалі, тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\quad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Доведення

За умовою теореми функція $f(x)$ в інтервалі $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ має похідні довільного порядку. Отже, для неї можна формально побудувати ряд Тейлора (13.38)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Для доведення збіжності цього ряду до функції $f(x)$ скористаємося теоремою 13.13. Покажемо, що при $n \to \infty$ залишковий член її формули Тейлора прямує до нуля. Справді, використовуючи умови теореми, оцінимо залишковий член (13.37):

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}, \quad (13.39)$$

$$n = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ x \in (x_0 - R,\ x_0 + R).$$

До ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\,|x - x_0|^{n+2}(n+1)!}{(n+2)!\,M\,|x - x_0|^{n+1}} = |x - x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0,\ \ x \in (x_0 - R,\ x_0 + R).$$

Отже, він збігається в інтервалі $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ і на ньому виконується необхідна умова збіжності ряду

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M\,|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Далі з нерівності (13.39) маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$. Це й завершує доведення теореми.

Розглянемо ряд Маклорена конкретних найпростіших функцій.

■ **Приклад 13.13**. *Функція $f(x) = e^x$. Показати, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ має місце розвинення*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{13.40}$$

Згідно з п. 7.3 (кн. 1) запишемо формулу Маклорена для функції e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0 < \theta < 1.$$

Оцінимо залишковий член $r_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Покажемо, що $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. При фіксованому x значення $e^{\theta x}$ для $\theta < 1$ не перевищує e^x у випадку додатних значень x і не перевищує одиниці у випадку від'ємних значень x. Покажемо, що для довільного фіксованого числа x вираз $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для фіксованого числа x завжди знайдеться число $N > 0$ таке, що $|x| < N$. Позначимо $\dfrac{|x|}{N} = q$, при цьому $0 < q < 1$. Тоді для чисел $n = N + 1$, $N + 2$ і т. д. можемо записати:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{x}{1}\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{n}\frac{x}{n+1}\right| =$$

$$= \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{N-1}\frac{|x|}{N}\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n}\frac{|x|}{n+1} < \frac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}q^{n-N+2},$$

оскільки $\dfrac{|x|}{N} = q,\ \dfrac{|x|}{N+1} < q, \ldots, \dfrac{|x|}{n+1} < q.$

Величина $\dfrac{|x|^{N-1}}{(N-1)!}$ від n не залежить, а $q^{n-N+2} \to 0$ при $n \to \infty$ для $q < 1$.

Звідси $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to \infty$, а отже, залишковий член $r_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Знайдемо радіус збіжності ряду (13.40):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n!}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Тому в силу теореми 13.13 ряд збігається до функції e^x для всіх $x \in \mathbf{R}$.

- *Зауваження.* Якщо в ряді (13.40) замінити x на $-x$, то дістанемо ряд

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in \mathbf{R}.$$

■ **Приклад 13.14.** *Функція* $f(x) = \sin x$. *Показати, що для всіх* $x \in \mathbf{R}$ *має місце розвинення*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad (13.41)$$

Справді, на підставі п. 7.3 (кн. 1) запишемо формулу Маклорена для функції $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+ \sin\left(\theta x + \frac{(2n+3)}{2}\pi\right)\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!},\ 0 < \theta < 1.$$

Оскільки $\left|\sin\left(\theta x + \frac{(2n+3)}{2}\pi\right)\right| \le 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\theta x + \frac{(2n+3)}{2}\pi\right)\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbf{R}$. Отже, ряд (13.41) збігається до функції $\sin x$ при будь-якому значенні $x \in \mathbf{R}$.

■ **Приклад 13.15.** *Функція* $f(x) = \cos x$. *Показати, що для всіх* $x \in \mathbf{R}$ *має місце розвинення*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (13.42)$$

Згідно п. 7.3 (кн. 1) маємо

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cos(\theta x + (n+1)\pi)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},\ 0<\theta<1.$$

Цілком аналогічно прикладу 13.14 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\cos(\theta x + (n+1)\pi) \times \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = 0$ при всіх значеннях $x \in \mathbf{R}$. Отже, ряд (13.42) збігається до функції $\cos x$ при всіх значеннях $x \in \mathbf{R}$.

- *Зауваження.* Для побудови розвинення (13.42) можна було б скористатися теоремою 3.11 про почленне диференціювання степеневого ряду (13.41).

■ **Приклад 13.16.** *Функція* $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{R}$. *Показати, що для* $-1<x<1$ *має місце розвинення*

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (13.43)$$

Для цього використаємо дещо інший підхід, оскільки оцінка залишкового члена формули Маклорена викликає певні труднощі.

Очевидно, функція $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ задовольняє диференціальне рівняння першого порядку

$$(1+x)f'(x)=\alpha\, f(x) \quad (13.44)$$

із початковою умовою $f(0)=1$. Побудуємо степеневий ряд, сума якого $S(x)$ задовольняє рівняння (13.44) та умову $S(0)=1$:

$$S(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad (13.45)$$

Звідси

$$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots \quad (13.46)$$

Підставивши вирази (13.45), (13.46) у рівняння (13.44), дістанемо

$$(1+x)(a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots)=$$
$$=\alpha(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots).$$

Для знаходження коефіцієнтів ряду (13.45) прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях у лівій і правій частинах останньої рівності:

$$a_1=\alpha,\ a_1+2a_2=\alpha a_1,\ 2a_2+3a_3=\alpha a_2,\ \ldots,\ na_n+(n+1)a_{n+1}=\alpha a_n,\ \ldots$$

Звідси

$$a_0=1,\ a_1=\alpha,\ a_2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2},$$

$$a_3=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3},\ldots,\ a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n},\ \ldots$$

Тоді (13.45) запишеться так:

$$S(x)=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots \quad (13.47)$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду. В силу ознаки Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\,\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}\right|=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=|x|,\quad x\neq0.$$

Ряд (13.47) збігається, якщо $|x|<1$. На інтервалі $(-1;\ 1)$ даний ряд зображує функцію $S(x)$, яка задовольняє рівняння (13.44) і умову $S(0) = 1$. Оскільки дану умову й диференціальне рівняння (13.44) задовольняє єдина функція, то сума ряду (13.47) тотожно дорівнює функції $f(x)$, тобто дістаємо розвинення (13.43).

У випадку $\alpha = -1$ матимемо розвинення

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \tag{13.48}$$

Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$, то

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots \tag{13.49}$$

Якщо $\alpha = -\frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \tag{13.50}$$

У прикладах 13.13—13.15 для розвинення функцій у степеневий ряд застосовується теорема 13.13. Оскільки умови даної теореми виконуються не завжди або виникають труднощі при їх перевірці, то часто використовують властивості степеневих рядів для побудови відповідних розвинень.

■ **Приклад 13.17**. *Функція $f(x) = \ln(1+x)$. Показати, що для $x \in (-1;\ 1)$ має місце розвинення*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \tag{13.51}$$

Справді, для $|t|<1$ [див. (13.48)]

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \tag{13.52}$$

ряд (13.52) збігається як геометрична прогресія рівномірно на відрізку $[-\alpha, \alpha]$, $0<\alpha<1$. Виберемо й зафіксуємо $x \in (-1;\ 1)$. Застосуємо теорему 13.12 про почленне інтегрування для ряду (13.52) на відрізку $[0;\ x]$, $x>0$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - \ldots + (-1)^n t^n + \ldots)\,dt,$$

звідки

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,\quad |x|<1. \tag{13.53}$$

Враховуючи неперервність логарифмічної функції при $x \to 1$, рівномірну збіжність на відрізку $[0; 1]$ ряду

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

і наслідок теореми 13.10 про неперервність суми степеневого ряду, маємо

$$\lim_{x \to 1}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

Усе це дає змогу зробити висновок, що розвинення (13.53) виконується й при $x = 1$.

- *Зауваження.* Якщо в рівності (13.51) замінити x на $-x$, то дістанемо ряд

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots, \qquad (13.51а)$$

який збігається на інтервалі $(-1; 1)$.

■ **Приклад 13.18**. *Функція* $f(x) = \operatorname{arctg} x$. *Довести, що для* $x \in [-1; 1]$ *має місце розвинення*

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (13.54)$$

Справді, оскільки $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbf{R}$, то [див. (13.48)]

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots, \quad x \in (-1; 1).$$

До цього ряду застосуємо теорему 13.12 про почленне інтегрування степеневого ряду на відрізку $[0; x]$, $x > 0$, $x \in (-1; 1)$:

$$\int_0^x (\operatorname{arctg} t)'\,dt = \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \int_0^x t^6 dt + \ldots + \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt + \ldots,$$

звідки

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (13.55)$$

Цей ряд збігається на $[-1; 1]$. Отже, його сума в силу теореми 13.10 неперервна на відрізку $[-1; 1]$. Ураховуючи неперервність функції $\operatorname{arctg} x$ і рівність (13.55), можна зробити висновок, що співвідношення (13.54) має місце й для $x = +1$, $x = -1$.

13.7 ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Як уже зазначалося, степеневі ряди мають різноманітні застосування. Зокрема, вони дають змогу з будь-якою заданою точністю обчислювати значення функцій, знаходити наближені значення визначених інтегралів, діставати розв'язки диференціальних рівнянь тощо.

13.7.1. Наближене обчислення значень функцій

Якщо функція $f(x)$ може бути розвинена в степеневий ряд в інтервалі $(-R, R)$, то наближене значення цієї функції в деякій точці $x_0 \in (-R, R)$ дорівнює частковій сумі даного ряду $S_n(x_0)$. Отже, відповідну похибку можна знайти, оцінюючи залишок ряду: $|r_n(x_0)| = |f(x_0) - S_n(x_0)|$. Неважко показати, що для випадку знакопереміжних рядів, що задовольняють умови ознаки Лейбніца, модуль n-го залишку ряду не перевищує модуля $(n+1)$-го члена цього ряду, тобто

$$|r_n(x_0)| \leq u_{n+1}.$$

■ **Приклад 13.19**. *Обчислити* $\sin 1°$ *з точністю до* 10^{-4}.

Скористаємося розвиненням (13.41) для $x \in \mathbf{R}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Оскільки $1° = \dfrac{\pi}{180}$, то

$$\sin 1° = \sin\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{\pi}{180}\right)^7 + \ldots$$

Даний ряд знакопереміжний. Отже, його залишок не перевищує за абсолютним значенням першого з відкинутих членів. Як випливає з нерівності $\dfrac{\pi^3}{3!(180)^3} < 10^{-4}$, щоб дістати результат із заданою точністю, достатньо взяти один член розвинення; таким чином: $\sin 1° \approx \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$.

13.7.2. Обчислення логарифмів

Ряди (13.51) та (13.51а) збігаються повільно, і для обчислення, наприклад, $\ln 2$ (формула (13.51) при $x = 1$) з точністю до 10^{-5} потрібно взяти 99 999 членів ряду, оскільки похибка утвореного знакопереміжного ряду за абсолютним значенням менша від першого з відкинутих членів, тобто $1/100\,000$. Така повільна збіжність ряду не дозволяє ефективно застосовувати його до наближених обчислень логарифмів. Для цього виведемо зручнішу формулу.

Віднявши почленно рівності (13.51) та (13.51а), дістанемо ряд для $x \in (-1; 1)$:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots \right).$$

Зауважимо, що при почленному відніманні двох збіжних рядів дістаємо, в силу теореми 4.5 (кн. 1), також збіжний ряд для $|x| < 1$. Матимемо ряд для обчислення $\ln (N + h)$ (вважаємо $N + h > 0$) за відомим значенням $\ln N$. Покладемо $\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N}$, звідки $x = \frac{h}{2N+h}$ (при довільному $N > 0$, $0 < x < 1$). Таким чином,

$$\ln \frac{N+h}{N} = 2\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots \right),$$

а отже,

$$\ln(N+h) = \ln N + 2\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots \right). \quad (13.56)$$

Формула (13.56) й використовується для обчислення натуральних логарифмів для N і $h \in R$ $(N + h > 0)$.

Оцінимо верхню межу похибки, яка виникає при відкиданні членів ряду. Взявши наближено

$$\ln(N+h) \approx \ln N + 2\left(\frac{h}{2N+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n-1} \right), \quad (13.57)$$

оцінимо похибку виразу (13.57), яка задається залишком ряду

$$r_n = 2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+3} + \ldots\right],$$

звідки легко дістанемо

$$r_n < 2\left[\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+3} + \ldots\right] =$$

$$= 2\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1}\left[1+\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2} + \left(\frac{h}{2N+h}\right)^{4} + \ldots\right].$$

Вираз у дужках — нескінченно спадна геометрична прогресія, і сума її становить

$$S = \frac{1}{1-\left(\dfrac{h}{2N+h}\right)^2},$$

а отже,

$$r_n < 2\,\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^{2n+1}\frac{1}{1-\left(\dfrac{h}{2N+h}\right)^2}.$$

Таким чином, повернувшися до змінної x, остаточно запишемо оцінку похибки:

$$r_n < 2\,\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1}\,\frac{1}{1-x^2}.$$

■ **Приклад 13.20**. *Обчислити* $\ln 2$ *з точністю до* 10^{-5}.

Для $N = h = 1$ маємо $\dfrac{h}{2N+h} = \dfrac{1}{3}$, тобто $x = \dfrac{1}{3}$, і

$$\ln 2 = \ln 1 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 + \ldots\right).$$

Безпосереднім підрахунком установимо, що коли взяти п'ять членів ряду, то похибка не перевищує

$$r_n < 2\,\frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\frac{1}{1-\dfrac{1}{9}} = \frac{1}{44}\left(\frac{1}{3}\right)^9 < 0{,}000\,00115.$$

Отже, для обчислення ln 2 з указаною точністю маємо співвідношення

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9\right) \approx 0{,}693\,15.$$

Для обчислення десяткових логарифмів використовують відому формулу переходу від натуральних логарифмів до десяткових: $\lg N = \ln N / \ln 10$.

13.7.3. Наближене обчислення визначених інтегралів

Як відомо, багато практично важливих визначених інтегралів не можна обчислити безпосередньо за допомогою формули Ньютона—Лейбніца, оскільки її застосування пов'язане з відшуканням первісної, котра часто не виражається через елементарні функції. Але якщо підінтегральна функція може бути розвинена в степеневий ряд, а межі інтегрування належать його інтервалу збіжності, то наближене обчислення визначеного інтеграла можна здійснити з наперед заданою точністю.

■ **Приклад 13.21**. *Обчислити інтеграл* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *із точністю до* 10^{-4}.

Використовуючи вираз (13.43), розвинемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, замінивши в ньому x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Проінтегруємо цей ряд на відрізку [0; 1]:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \ldots\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \ldots$$

Дістали знакопереміжний числовий ряд. Похибка, яку ми допускаємо відкиданням усіх членів, починаючи з восьмого, за абсолютним значенням менша від восьмого члена:

$$|r_n| \le \frac{1}{15 \cdot 7!} < 10^{-4}.$$

Обчислюючи інтеграл із точністю до 10^{-4}, дістанемо

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} \approx 0{,}7468.$$

13.8 РЯДИ ФУР'Є

➡ **Означення 13.8.** ***Тригонометричним рядом*** *називають функціональний ряд вигляду*

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),} \tag{13.58}$$

де числа a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ... — коефіцієнти тригонометричного ряду.

На відміну від степеневого ряду, в тригонометричному замість функцій $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ взято найпростіші тригонометричні функції

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ..., \sin nx, \cos nx, ... \tag{13.59}$$

Усі функції системи (13.59) періодичні з періодом 2π. Це означає, що кожний член ряду (13.58)

$$\frac{a_0}{2},\ a_1 \cos x + b_1 \sin x, \ldots, a_n \cos nx + b_n \sin nx, \ldots \tag{13.60}$$

є періодичною функцією з періодом 2π, а отже, й довільна часткова сума ряду (13.58) періодична з періодом 2π. Звідси випливає: якщо ряд (13.58) збігається на відрізку $[-\pi, \pi]$, то він збігається на всій числовій прямій, і його сума є періодичною функцією з періодом 2π.

Постає запитання: чи можна довільну періодичну функцію з періодом 2π подати у вигляді суми (скінченної чи нескінченної) множини найпростіших тригонометричних функцій? Щоб відповісти на нього, розглянемо властивості систем функцій.

13.8.1. Властивості систем найпростіших тригонометричних функцій

Означення 13.9. *Скалярним добутком функцій* $f(x)$ *та* $g(x)$ *із неперевною вагою* $\rho(x)$, *визначених на відрізку* $[a, b]$, *називають число, що становить*

$$\boxed{(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx, \text{ де } \rho(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a, b].} \tag{13.61}$$

Властивості довільних кусково-неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій f, g, h

1. $(f, g) = (g, f)$.
2. *Якщо* $(f, f) = 0$, *то* $f(x) = 0$ *на* $[a, b]$, *за винятком, можливо, скінченного числа точок.*
3. $(\alpha f + \beta g, h) = \alpha(f, g) + \beta(g, h)$, *де* α, β *— довільні дійсні числа.*

Множину всіх кусково-неперервних функцій, визначених на відрізку $[a, b]$, для яких введено скалярний добуток (13.58), позначатимемо $L'_{2,\rho}(a, b)$ і називатимемо *простором* $L'_{2,\rho}$.

Із властивостей 1—3 випливає *нерівність Буняковського*

$$|(f, g)| \le (f, f)^{1/2} (g, g)^{1/2},$$

яка за допомогою інтегралів записується у вигляді

$$\left| \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx \right| \le \sqrt{\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b \rho(x) g^2(x) dx}. \tag{13.62}$$

Величину

$$\| f \| = \left(\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx \right)^{1/2} = (f, f)^{1/2} \tag{13.63}$$

називають *нормою функції* $f(x)$.

Властивості норми

1. $\| f \| \ge 0$, *причому рівність може бути лише для нульової функції* $f = 0$.
2. $\| f + g \| \le \| f \| + \| g \|$.
3. $\| \alpha f \| = |\alpha| \, \| f \|$, $a \in \mathbf{R}$.

Властивість 2 через інтеграли записується у вигляді

$$\left(\int_a^b \rho(x)|f(x)+g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b \rho(x)g^2(x)dx\right)^{1/2}$$

і називається *нерівністю Мінковського.*

Означення 13.10. ***Послідовність функцій*** $\{f_n\}$, $f_n \in L'_{2,\rho}$ ***збігається до функції*** $f \in L'_{2,\rho}$ ***в середньому на*** $[a, b]$, *якщо*

$$\lim_{n\to\infty}\| f_n - f \| = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \rho(x)\,|\,f_n(x)-f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} = 0.$$

- *Зауваження.* Якщо послідовність $f_n(x)$ збігається рівномірно до функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то для досить великих n різниця $f_n(x) - f(x)$ буде малою за абсолютним значенням для всіх $x \in [a, b]$. Якщо $f_n(x)$ збігається до $f(x)$ у середньому на $[a, b]$, то різниця $f_n(x) - f(x)$ може й не бути малою для великих n усюди на $[a, b]$. Для деяких $x \in [a, b]$ ця різниця може бути великою, але інтеграл від квадрата $f_n(x) - f(x)$ по відрізку $[a, b]$ має бути малим для великих n.

13.8.2. Ортогональні системи функцій

Означення 13.11. *Функцію* $f(x) \in L'_{2,\rho}(a, b)$ *називають* ***нормованою,*** *якщо* $\| f \| = (f, f)^{1/2} = 1$. *Дві функції* $f, g \in L'_{2,\rho}(a, b)$ *називають* ***ортогональними,*** *якщо* $(f, g) = 0$. *Систему функцій*

$$g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots \qquad (13.64)$$

називають ***ортогональною,*** *якщо функції* g_i, $i = 1; 2; \ldots$ *мають ненульову норму й ортогональні між собою:* $(g_i, g_j) = 0$, $i \ne j$. *Систему (13.64) називають* ***ортонормованою,*** *якщо*

$$(g_i, g_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \ne j, \end{cases}$$

тобто вона ортогональна й кожна функція, яка входить у цю систему, має норму, що дорівнює одиниці.

Теорема 13.15. Функції ортогональної системи (13.64) лінійно незалежні.

Доведення

Нехай лінійна комбінація N елементів системи (13.64) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, g_k(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Якщо обидві частини цієї рівності скалярно домножити на g_l ($l = 1;$ $2; \ldots; N$), то, враховуючи властивості скалярного добутку, дістанемо

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \alpha_k\, g_k(x), g_l(x)\right) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\,(g_k, g_l) = \alpha_l\,(g_l, g_l) = 0.$$

Оскільки $(g_l, g_l) > 0$, то $\alpha_l = 0$, $l = 1; 2; \ldots; N$.

Теорема 13.16. Система найпростіших тригонометричних функцій (13.59) ортогональна на відрізку $[-\pi, \pi]$ із вагою $\rho(x) = 1$.

Доведення

Зауважимо, що $1 = \cos 0x$. Тоді

$$(\cos mx, \cos nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n; \end{cases}$$

$$(\cos mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0;$$

$$(\sin mx, \sin nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n \end{cases}$$

для всіх натуральних n і m.

Отже, функції системи (13.59) попарно ортогональні, але вони не нормовані, оскільки

$$\|\cos mx\|^2 = (\cos mx, \cos mx) = \pi, \quad m = 0; 1; 2; \ldots,$$

$$\|\sin nx\|^2 = (\sin nx, \sin nx) = \pi, \quad n = 1; 2; \ldots$$

Для нормування системи (13.59) треба поділити функції, що входять до неї, на відповідні сталі величини, які дорівнюють нормам цих функцій. Нормована система найпростіших тригонометричних функцій має вигляд

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ \ldots \qquad (13.65)$$

- *Зауваження.* Використовуючи властивість інтеграла від парної функції, дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} \cos nx \cos mx\, dx = 0, \ n \neq m; \ n, \ m = 0; 1; 2; \ldots$$

Отже, система функцій

$$1/2,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots \tag{13.66}$$

ортогональна на інтервалі $x \in [0; \pi]$, а система

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi/2}},\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi/2}},\ldots,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi/2}},\ \ldots \tag{13.67}$$

ортонормована (тобто ортогональна й нормована) на цьому інтервалі.

Користуючися властивістю інтеграла від непарної функції, можна показати, що система

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots \tag{13.68}$$

ортогональна на інтервалі $x \in [0; \pi]$, а система

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi/2}},\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi/2}},\ \ldots,\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi/2}},\ \ldots$$

ортонормована на цьому інтервалі.

Аналогічно перевіряється, що система функцій

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \frac{\sin 2\pi x}{l},\ \ldots,\ \frac{\cos n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots \tag{13.69}$$

ортогональна на інтервалі $x \in [-l,\ l]$, а системи

$$\frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{13.70}$$

та

$$\sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots \tag{13.71}$$

ортогональні на інтервалі $x \in [0; l]$.

Теорема 13.17. Довільну ортогональну систему функцій можна пронормувати.

Доведення

Нехай (13.64) — ортогональна система функцій. Якщо кожну функцію цієї системи поділити на її норму, то дістанемо систему

$$\frac{g_1}{\|g_1\|},\ \frac{g_2}{\|g_2\|},\ \ldots,\ \frac{g_n}{\|g_n\|},\ \ldots,$$

яка буде ортонормованою, тобто

$$\left(\frac{g_n}{\|g_n\|},\ \frac{g_m}{\|g_m\|}\right) = \frac{1}{\|g_n\|\|g_m\|}(g_n, g_m) = \begin{cases} 1 \text{ при } n=m, \\ 0 \text{ при } n\neq m. \end{cases}$$

Теорема 13.18. Довільну систему лінійно незалежних на відрізку $[a, b]$ функцій можна ортогоналізувати.

Доведення

Нехай функції системи (13.64) лінійно незалежні, тобто довільна лінійна комбінація їх $\alpha_1 g_1(x) + \ldots + \alpha_n g_n(x)$ перетворюється в нуль тотожно на (a, b) тільки за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Візьмемо

$$\varphi_1 = g_1, \quad \varphi_2 = \lambda_{21}\varphi_1 + g_2, \quad \varphi_3 = \lambda_{31}\varphi_1 + \lambda_{32}\varphi_2 + g_3, \ldots;$$

$$\varphi_n = \lambda_{n1}\varphi_1 + \lambda_{n2}\varphi_2 + \ldots + \lambda_{n\,n-1}\varphi_{n-1} + g_n, \ldots$$

і виберемо коефіцієнти λ_{ik} так, щоб система $\{\varphi_n(x)\}$ була ортогональною.

Умова $(\varphi_2, \varphi_1) = 0$ або $\lambda_{21}(\varphi_1, \varphi_2) + (g_2, \varphi_1) = 0$ виконуватиметься, якщо взяти $\lambda_{21} = -(g_2, \varphi_1)/(\varphi_1, \varphi_1)$.

Згідно з методом математичної індукції припустимо, що функції $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ попарно ортогональні й відповідні λ_{ik} вибрано. Умова $(\varphi_n, \varphi_k) = 0$ при $k = 1; 2; \ldots, n-1$ або

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \lambda_{n1}(\varphi_1, \varphi_k) + \ldots + \lambda_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) + \ldots + \lambda_{n\,n-1}(\varphi_{n-1}, \varphi_k) +$$
$$+ (\varphi_n, \varphi_k) = \lambda_{nk}(\varphi_k, \varphi_k) + (\varphi_n, \varphi_k) = 0$$

справджуватиметься, якщо $\lambda_{nk} = -(\varphi_n, \varphi_k)/(\varphi_k, \varphi_k)$.

Оскільки функції системи (13.64) лінійно незалежні, то жодна їх лінійна комбінація, в якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулю, наприклад φ_k, не дорівнює тотожно нулю на (a, b) і, отже, $(\varphi_k, \varphi_k) \neq 0$.

13.8.3. Приклади систем ортогональних многочленів

Властивості ортогональності можуть мати не лише тригонометричні функції. Наприклад, побудуємо систему ортогональних многочленів на інтервалі $x \in [-1; 1]$.

Розглянемо систему функцій

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots, \quad x \in [-1; 1]. \tag{13.72}$$

Легко перевірити, що ці функції лінійно незалежні. Отже, систему можна ортогоналізувати на відрізку $[-1; 1]$.

Перші дві функції ортогональні між собою:

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0.$$

Тому візьмемо $p_0(x) \equiv 1$, $p_1(x) \equiv x$. Третя функція x^2 не ортогональна до першої.

Многочлен $p_2(x)$ візьмемо у вигляді $p_2(x) = ax^2 + bx + c$, тобто як лінійну комбінацію перших трьох функцій. Доберемо коефіцієнти a, b, c так, щоб $p_2(x)$ був ортогональним до $p_0(x)$ та $p_1(x)$:

$$\int_{-1}^{1} p_0(x)\,p_2(x)dx = \int_{-1}^{1} 1(ax^2 + bx + c)dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)\,p_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x(ax^2 + bx + c)dx = 0.$$

Звідси $b = 0$, $a = -3c$ і $p_2(x) = c\,(-3x^2 + 1)$. Коефіцієнт c знаходимо з умови $p_2(1) = 1$ (умови нормування), тобто $c = -\frac{1}{2}$. Отже,

$$p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Многочлен $p_3(x)$ вибиремо у вигляді $p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, де коефіцієнти a, b, c, d знайдемо з умови ортогональності $p_3(x)$ до $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ на $[-1;\ 1]$ і умови $p_3(1) = 1$. Дістанемо

$$p_3(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x.$$

Аналогічно матимемо

$$p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

і т. д. або згідно з формулою Родріга

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n], \quad n = 0; 1; 2; \ldots \tag{13.73}$$

Многочлени $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$, ... називають *многочленами Лежандра*.

Система $\{p_n(x)\}$ ортонормована на відрізку $[-1; 1]$ із вагою $\rho(x) = 1$.

Аналогічний процес ортогоналізації системи (13.72) на відрізку $[-1; 1]$ із вагою $(1-x^2)^{-1/2}$, тобто $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\varphi_n(x)\varphi_k(x)dx$, приводить до ортонормованої системи многочленів Чебишова

$$T_0(x),\ T_1(x),\ T_2(x),\ \ldots,\ T_n(x),\ \ldots,$$

де

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{13.74}$$

13.8.4. Ряди по ортогональних функціях

Нехай задана система функцій

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_n(x),\ \ldots \tag{13.75}$$

ортогональна з вагою $\rho(x)$ на інтервалі $a \le x \le b$. Виникає питання про розвинення довільної функції $f(x)$ на цьому інтервалі за функціями (13.75), тобто в ряд вигляду

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \ldots + c_n g_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x), \tag{13.76}$$

де c_n — числові коефіцієнти.

Припустимо, що жодна з функцій системи (13.75) не дорівнює тотожно нулю. Щоб знайти коефіцієнти c_1, c_2, ..., c_n у ряді (13.76), домножимо обидві частини (13.76) на $g_n(x)$ і проінтегруємо результати по інтервалу $x \in [a, b]$:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) g_n(x)dx = c_1\int_a^b \rho(x) g_1(x) g_n(x)dx + c_2\int_a^b \rho(x) g_2(x) g_n(x)dx + \ldots +$$

$$+ c_n\int_a^b \rho(x) g_n^2(x)dx + \ldots$$

Оскільки функції системи (13.75) ортогональні, то в правій частині цієї рівності всі інтеграли дорівнюють нулю, за винятком інтеграла від $g_n^2(x)$. Таким чином, ми дістанемо формулу для обчислення коефіцієнтів:

$$c_n = \frac{\int\limits_a^b \rho(x) f(x) g_n(x) dx}{\int\limits_a^b \rho(x) g_n^2(x) dx}, \quad n=1;2;3;\ldots \tag{13.77}$$

Звідси випливає: якщо функція $f(x)$ може бути розвинена в ряд (13.76), то коефіцієнти $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ цього ряду однозначно обчислюються за формулою (13.77), а отже, й зображення функції у вигляді ряду (13.76) єдине.

Якщо розвинення (13.76) можливе для довільної функції $f(x) \in L'_{2,\rho}$, то система функцій (13.75) називається *повною.*

Можна показати, що всі наведені в п. 13.8.3 ортогональні системи є повними на вказаних інтервалах. Якщо з довільної повної системи функцій відкинути деяке число функцій, то дістанемо неповну систему функцій, за якою можна розвинути в ряд (13.76) не всяку функцію.

13.8.5. Тригонометричні ряди Фур'є

Ці загальні результати можна застосовувати до конкретних ортогональних систем. Так, для системи (13.59) дістанемо, що довільну обмежену функцію $f(x)$, задану на відрізку $-\pi \le x \le \pi$, можна розвинути в ряд

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{13.78}$$

Теорема 13.19. Якщо функція $f(x)$, визначена й інтегровна на відрізку $[-\pi, \pi]$, може бути розвинена в ряд (13.78), який можна почленно інтегрувати, то це розвинення єдине.

Доведення

Інтегруючи (13.78) на інтервалі $-\pi \le x \le \pi$, дістанемо

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right].$$

Звідси

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{13.79}$$

Для визначення a_n домножимо (13.78) на $\cos nx$ і проінтегруємо по x від $-\pi$ до π. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\ dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\ \cos nx\ dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\ dx\right] =$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\ dx = a_n\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx. \qquad (13.80)$$

Аналогічно, домноживши (13.78) на $\sin nx$ та проінтегрувавши одержаний вираз від $-\pi$ до π, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\ dx. \qquad (13.81)$$

Отже, коефіцієнти a_0, a_n, b_n ряду (13.78) однозначно визначаються за формулами (13.79)—(13.81), що й доводить теорему.

➡ **Означення 13.12**. Нехай $f(x)$ — функція, визначена й інтегровна на відрізку $[-\pi, \pi]$. *Тоді числа a_0, a_n, b_n, знайдені за формулами* (13.79)—(13.81), *називаються* ***коефіцієнтами Фур'є,*** *а ряд*

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

із цими коефіцієнтами — ***рядом Фур'є функції $f(x)$.***

Аналогічно дістають ряди за системами (13.66) та (13.68):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ \ x\in[0,\pi], \qquad (13.82)$$

де

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx,\ \ n=0;1;2;\ldots$$

для парних функцій $f(x)$ та

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x\in[0,\pi],$$

де

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n=1;2;\ldots \tag{13.83}$$

— для непарних.

Якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $2l$, то її розвинення в ряд Фур'є за системою функцій (13.69) має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x\in[-l, l], \tag{13.84}$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Аналогічно дістаються ряди для функції $f(x)$ на відрізку $x\in[0, l]$ за системами функцій (13.70) та (13.71):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}; \tag{13.85}$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

для парної функції $f(x)$ і

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l}; \tag{13.86}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

— для непарної.

Ряди (13.82)—(13.84) називаються *рядами Фур'є для функції* $f(x)$.

■ **Приклад 13.22**. *Розвинути в ряд Фур'є функцію* $f(x)=x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

Ця функція непарна. Отже, $a_0=0$, $a_n=0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin\ nx\ dx = \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}.$$

Тому

$$x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right].$$

Ця рівність справедлива для довільного $x \in (-\pi, \pi)$. При $x = \pm\ \pi$ сума ряду не збігається зі значенням $f(x) = x$, а дорівнює нулю.

13.8.6. Розвинення функцій у ряди Фур'є

З урахуванням теореми 13.19 питання щодо можливості розвинення функції $f(x)$ у тригонометричний ряд зводиться до такого: які мають бути властивості функції $f(x)$, щоб побудований для неї ряд Фур'є збігався, а його сума дорівнювала $f(x)$? Із відповіді на це запитання випливає принципова відмінність між степеневими та тригонометричними рядами. В степеневий ряд може бути розвинена лише функція, що має похідні всіх порядків, тоді як довільну інтегровну функцію можна розвинути в тригонометричний ряд.

Обмежимося формулюванням кількох достатніх ознак збіжності рядів Фур'є.

Теорема 13.20. Якщо функція $f(x)$ із періодом 2π неперервна на всій осі й має кусково-неперервну похідну на періоді, то її ряд Фур'є рівномірно збігається до неї.

■ **Приклад 13.23**. Нехай $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$ і $f(x)$ періодична з періодом 2π. Ця функція задовольняє умову теореми. Оскільки $f(x)$ парна, то її коефіцієнти Фур'є $b_n = 0$, а

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos\ nx\ dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Отже, ряд Фур'є даної функції (рис. 13.2)

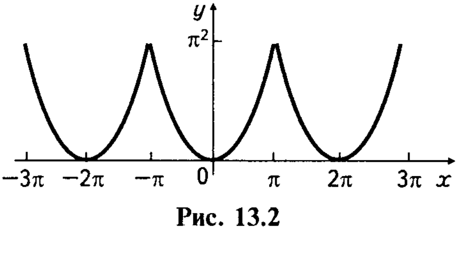

Рис. 13.2

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},$$

$$-\infty < x < +\infty$$

в силу оцінки $\left|(-1)^n\dfrac{\cos\ nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, $-\infty < x < +\infty, n \in \mathbf{N}$ збігатиметься рівномірно згідно з ознакою Вейєрштрасса.

Теорема 13.21 (Діріхле). Якщо періодична функція $f(x)$ із періодом 2π обмежена й кусково-неперервна на періоді $[-\pi, \pi]$, то ряд Фур'є, побудований для $f(x)$, збігається в усіх точках. Сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$. Якщо c — точка розриву $f(x)$, то

$$S(c) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

■ **Приклад 13.24.** *Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$, періодичну з періодом 2π, яка на відрізку $[-\pi, \pi]$ задана рівністю*

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Дана функція непарна. Тому $a_0 = a_n = 0$, $n = 1; 2; \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = -2\frac{\cos n\pi}{n} =$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

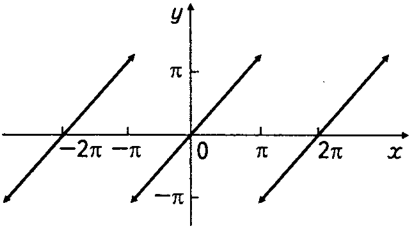

Рис. 13.3

Отже (рис. 13.3),

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

Даний ряд збігається в кожній точці, але не рівномірно.

Нехай $f(x)$ — функція з інтегровним квадратом на відрізку $[a, b]$, тобто відомо, що існує інтеграл

$$\int_a^b \rho(x) f^2(x) dx, \tag{13.87}$$

де $\rho(x) > 0$, $\forall\, x \in [a, b]$ і (13.76) — її ряд Фур'є за ортогональною системою (13.75).

➡ **Означення 13.13.** *Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x)$ називають збіжним до функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ у середньому, якщо послідовність його часткових сум*

$$\boxed{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x), \quad n = 1; 2; \ldots}$$

збігається до $f(x)$ у середньому, тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b \rho(x)[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=0.} \tag{13.88}$$

- *Зауваження.* Для коефіцієнтів Фур'є c_k за ортогональною з вагою $\rho(x)$ системою $g_k(x)$ справедлива нерівність Бесселя

$$\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2,\quad n=1;2;\ldots \tag{13.89}$$

Справді,

$$0\leq\int_a^b \rho(x)\left(f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_kg_k(x)\right)^2 dx=\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx-$$

$$-2\sum_{k=1}^{n}c_k\int_a^b \rho(x)f(x)g_k(x)dx+\int_a^b \rho(x)\left(\sum_{k=1}^{n}c_kg_k(x)\right)^2 dx=$$

$$=\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}c_kc_l\int_a^b \rho(x)\,g_k(x)\,g_l(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx-2\sum_{k=1}^{n}c_k^2+\sum_{k=1}^{n}c_k^2=\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx-\sum_{k=1}^{n}c_k^2.$$

Ортонормована система g_1, g_2, ..., g_n, ... визначених на відрізку $[a, b]$ функцій називається *замкненою*, якщо для кожної функції $f(x)$ з інтегровним квадратом виконується рівність

$$\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2,\quad c_k=\int_a^b \rho(x)f(x)g_k(x)dx. \tag{13.90}$$

Формулу (13.90) називають *рівністю Парсеваля.*

Ортонормована система функцій g_1, g_2, ..., g_n, ... називається *повною*, якщо для будь-якої функції з інтегровним квадратом із рівностей

$$\int_a^b \rho(x)f(x)g_k(x)dx=0,\quad k=1;2;\ldots$$

випливає, що

$$\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx=0.$$

Ортонормована тригонометрична система функцій (13.65) є замкненою й повною на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Можна довести, що поняття замкненості й повноти рівносильні, тобто із замкненості випливає повнота, а з повноти — замкненість.

Теорема 13.22. Нехай $f(x)$ — функція з інтегровним квадратом на відрізку $[-\pi, \pi]$ і

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{13.91}$$

— її ряд Фур'є за системою

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \tag{13.92}$$

Тоді ряд (13.92) збігається до $f(x)$ у середньому.

13.9 ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Якщо $f(x)$ — неперервна $2l$-періодична функція, яка задовольняє умову, за якої її можна розвинути в ряд Фур'є з періодом $2l$, то

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l}+b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{13.93}$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ \ n=1;2;\ldots$$

Сума ряду (13.93) є $2l$-періодичною функцією, яка збігається на всій числовій осі з функцією $f(x)$.

Якщо $f(x)$ не $2l$-періодична, але задовольняє умову, коли її можна розвинути в ряд Фур'є з періодом $2l$, то сума ряду Фур'є поза відрізком $[-l, l]$ не збігатиметься з $f(x)$.

Щоб і в цьому випадку дістати зображення $f(x)$ у вигляді (13.93), справедливе для всіх x, припустимо, що на довільному скінченному відрізку $[-l, l]$ виконуються умови, за яких $f(x)$ можна розвинути в ряд Фур'є з періодом $2l$ і $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=I<\infty$ збігається (тобто $f(x)$ абсолютно інтегровна на всій числовій осі). Знайдемо границю виразу, який стоїть у правій частині рівності (13.93), при $l \to +\infty$. Для цього підставимо значення a_0, a_n, b_n в (13.93):

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x)dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \left[\cos\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi t}{l} + \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi t}{l} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\, dt. \qquad (13.94)$$

Зауважимо, що

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt \right| = \frac{1}{2l} \left| \int_{-l}^{l} f(t)dt \right| \le \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(t)|dt \le \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \frac{I}{2l}.$$

Отже,

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt \right| \le \frac{I}{2l}$$

і

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)dt \right| \to 0 \quad \text{при } l \to +\infty.$$

Розглянемо другий доданок у формулі (13.94). Для цього введемо змінну λ, яка набуває значень

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{l},\ \lambda_2 = \frac{2\pi}{l},\ \ldots,\ \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \ldots,$$

а її приріст на проміжку $[n-1, n]$

$$\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l} \to 0 \ \text{ при } \ l \to \infty.$$

Другий доданок у (13.94) можна записати у вигляді

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^{l} f(t) \cos\frac{n\pi}{l}(x-t)dt \right] \frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-l}^{l} f(t) \cos\lambda_n (x-t)dt \right] \Delta\lambda_n.$$

Ця сума є інтегральною сумою для функції

$$F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda(x-t)dt.$$

Перейдемо до границі при $l\to+\infty$ в рівності (13.94). Дістанемо

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l} f(t)\cos\lambda_n(x-t)dt\right]\Delta\lambda_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt.$$

Вираз

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt}\qquad(13.95)$$

називають ***формулою Фур'є,*** *а подвійний інтеграл у правій частині цієї формули —* ***інтегралом Фур'є*** *для функції $f(x)$.*

Формулу (13.95) можна переписати у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda x\cos\lambda t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda x\sin\lambda t\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\,d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt.\qquad(13.96)$$

Якщо функція $f(x)$ парна, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt=0,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt.$$

Отже, в цьому разі з формули (13.96) матимемо

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\,d\lambda\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt.\qquad(13.97)$$

Для непарної функції $f(x)$ із (13.96) дістанемо

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\,d\lambda\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt.\qquad(13.98)$$

При розвиненні в інтеграл Фур'є функція $f(x)$ може мати скінченне число точок розриву першого роду. В точках розриву x_0 функції $f(x)$ інтеграли (13.95) або (13.97), (13.98) набувають значення

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

У точках неперервності x' інтеграли дають значення $f(x')$.

■ **Приклад 13.25**. *Знайти інтеграл Фур'є функції*

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } a\le x\le a+\delta,\\ 0 \text{ при } x<a,\ x>a+\delta,\ \delta>0.\end{cases}$$

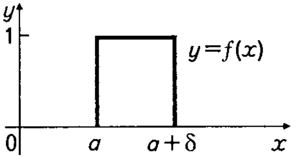

Рис. 13.4

Графік цієї функції зображено на рис. 13.4.

Дана функція інтегровна й кусково-неперервна в інтервалі $(-\infty,+\infty)$. Отже, інтеграл Фур'є збігатиметься для всіх x. За формулою (13.95) дістанемо

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_a^{a+\delta}\cos\lambda(x-t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{\lambda\delta}{2}}{\lambda}\cos\lambda\left(x-a-\frac{\delta}{2}\right)d\lambda. \tag{13.99}$$

Невласний інтеграл (13.99) збігається для всіх x (див. п. 9.4, кн. 1) і дорівнює функції $f(x)$ у всіх точках її неперервності. При $x=a$ та $x=a+\delta$ значення інтеграла дорівнює $1/2$.

Глава 14 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

14.1 ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ГРАНИЦЯ, НЕПЕРЕРВНІСТЬ, ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ

Поняття комплексного числа було розглянуто в кн. 1 підручника. Там же розглядалися многочлени від комплексної змінної, які є найпростішим прикладом функцій комплексної змінної.

У даній главі подано основи теорії функцій комплексної змінної. Вводяться основні поняття: функції комплексної змінної, її похідної, інтеграла тощо. Відомі з аналізу функцій дійсної змінної означення цих понять залишаються майже без змін, але суттєво змінюється їхній зміст. Так, відпадає звичайне геометричне зображення функції за допомогою кривої на площині, і натомість вводиться поняття про функцію як про відображення плоских множин. Умова диференційовності функції комплексної змінної виявляється значно сильнішою, ніж умова диференційовності функції дійсної змінної. Так, з умови диференційовності в комплексній площині автоматично випливає існування похідних усіх порядків і ціла низка властивостей, абсолютно незвичних для аналізу функцій дійсних змінних.

На відміну від дійсних чисел, геометричним зображенням яких є точки числової осі, комплексні числа зображуються точками координатної площини (див. п. 1.3, кн. 1), що в теорії функцій комплексної змінної має назву *комплексної площини.*

Визначення функції комплексної змінної вимагає запровадження допоміжних геометричних понять.

14.1.1. Геометричні поняття

Множину D точок комплексної площини називають ***областю***, якщо вона задовольняє такі умови:

1. разом із кожною точкою з D цій множині належить і достатньо малий круг із центром у вказаній точці *(властивість відкритості);*

2) будь-які дві точки множини D можна сполучити ламаною, що повністю складається з точок множини D *(властивість зв'язності)*.

Усі точки, які задовольняють умову 1 означення області, називають ***точками області (внутрішніми точками області)***.

Зовнішня точка області D — це точка комплексної площини, яка не належить множині D разом із деяким кругом, що містить у собі цю точку.

Будь-яку область, що містить у собі деяку точку z_0, називають ***околом*** цієї ***точки***. За окіл точки часто беруть круг: якщо радіус круга r $(|z-z_0|<r)$, то окіл називається *r-околом точки* z_0.

Під *околом нескінченно віддаленої точки* розуміють зовнішність будь-якого круга з центром у початку координат (тобто область $|z|>R$).

Точку M називають ***межовою точкою області*** D, якщо вона не належить цій області, але будь-який достатньо малий окіл указаної точки містить точки області D.

Сукупність усіх межових точок області D називають її ***межею***. Наприклад, для круга $|z|<1$ межею є коло $|z|=1$.

Усяка область D із приєднаною до неї межею називається ***замкненою областю*** й позначається через $\bar{D}$. Так, множина точок, які задовольняють нерівність $|z|\le 2$, є замкненою областю.

У подальшому викладенні матеріалу користуватимемося багатьма поняттями математичного аналізу функцій дійсної змінної. Деякі з них варто нагадати.

Неперервна на відрізку $[\alpha,\beta]$ функція $z(t)$ дійсного параметра t визначає неперервну криву (лінію, дугу); значення функції $z(t)$ називають *точками кривої;* рівняння $z=z(t)$ — це *рівняння кривої* (параметричне).

На кожній кривій можна зафіксувати один із двох напрямів — у бік збільшення параметра або, навпаки, — зменшення. В першому випадку $z(\alpha)$ — *початок кривої*, а $z(\beta)$ — *її кінець* (у другому випадку навпаки). Якщо початок і кінець кривої збігаються, то криву називають *замкненою*.

Точку, яка відповідає тільки одному значенню параметра, називають *простою*; точку, що відповідає двом і більшому числу значень параметра, — *кратною*. Криву, яка складається лише з простих точок (не має кратних точок), називають *простою* (або *жордановою*) *кривою*.

Область D називають ***однозв'язною***, якщо будь-яка проста замкнена крива, що цілком належить D, може бути стягнена в точку за допомогою неперервної деформації без виведення з області D. Із цього означення випливає: якщо область багатозв'язна, то її межа не може складатися з однієї замкненої кривої.

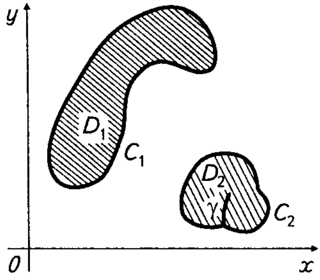

Рис. 14.1

Приклади однозв'язної області наведено на рис. 14.1, багатозв'язної — на рис. 14.2.

Припустимо, що межа області може складатися зі скінченного числа кусково-гладких замкнених кривих, ***розрізів*** — незамкнених кривих — всередині області або від її межі й окремих точок — ***виколотих точок.*** Так, на рис. 14.1 межею області D_1 є проста замкнена крива C_1 межа області D_2 складається з простої замкненої кривої C_2 і розрізу γ, який починається від кривої C_2. На рис. 14.2 межа області складається з трьох замкнених кривих C_0, C_1, C_2, двох розрізів γ_1, γ_2 і однієї виколотої точки M. У випадку обмеженої області D, тобто області, що належить деякому кругу $|z| < R$, число зв'язних частин, на які розбивається її межа, називається ***порядком зв'язності*** цієї ***області.*** На рис. 14.2 зображено п'ятизв'язну область; C_0 і розріз від межі γ_1 утворюють одну зв'язну частину межі.

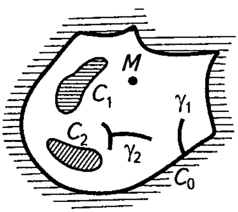

Рис. 14.2

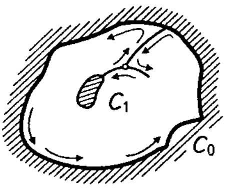

Рис. 14.3

Нехай D — однозв'язна область і C — її межа. Виберемо на C деяку точку й, починаючи від неї, будемо обходити межу C. *Додатним напрямом обходу межі області* вважається такий, при якому область залишається весь час ліворуч. Частина межі області — розрізи — при її обході може проходитися двічі в протилежних напрямах (рис. 14.3).

14.1.2. Функції комплексної змінної

Нехай дано дві площини комплексних чисел $z = x + iy$ і $w = u + iv$ (рис. 14.4, *а*, *б* відповідно). Розглянемо деяку множину D точок у площині z і множину G у площині w.

Якщо кожному числу $z \in D$ за деяким законом поставлено у відповідність певне комплексне число $w \in G$, то кажуть, що *на множи-*

ні D задано однозначну функцію комплексної змінної, яка відображає множину D у множину G. Символічно це позначають $w = f(z)$.

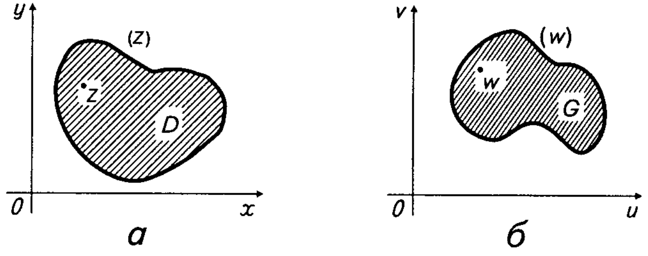

Рис. 14.4

Множину D називають *множиною визначення функції* $f(z)$. Якщо кожна точка множини G є значенням функції, то G — *множина значень цієї функції*, або *образ множини* D, заданий за допомогою функції $f(z)$: $G=f(D)$. У цьому випадку кажуть, що *функція* $f(z)$ *відображає* D *у* G.

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна на множині D і при цьому двом різним точкам множини D завжди відповідають дві різні точки множини G, то таке відображення називають *взаємно однозначним*, або *одналистним* у D.

У подальшому найважливішим буде випадок, коли D і G — області.

Функцію $f(z)$ можна записати у вигляді $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $(x, y) \in D$, де $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ — функції дійсних змінних x і y.

■ **Приклад 14.1**. *Знайти дійсну та уявну частини функції* $w = z^3$.

Поклавши $z = x + iy$, дістанемо

$$f(z) \equiv u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy)^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3).$$

Отже,

$$\operatorname{Re} f(z) \equiv u(x, y) = x^3 - 3xy^2; \quad \operatorname{Im} f(z) \equiv v(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

14.1.3. Границя й неперервність

Означення 14.1. Нехай функція $w = f(z)$ визначена й однозначна в деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, крім, може, самої точки z_0. Казатимемо, що ***існує границя функції*** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *при* $z \to z_0$ (позначення: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$), *якщо існують границі* $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$ *і* $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} (x, y) = v_0$; при цьому

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0.$$

Дане означення зводиться до звичайного означення границі функцій дійсних аргументів, тому основні властивості граничного переходу для функцій дійсних змінних зберігаються й для функцій комплексної змінної:

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim_{z\to z_0}f(z)\pm\lim_{z\to z_0}g(z);$$
$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\,g(z)]=\lim_{z\to z_0}f(z)\lim_{z\to z_0}g(z); \qquad (14.1)$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}\quad(\lim_{z\to z_0}g(z)\neq 0).$$

➡ **Означення 14.2**. *Функцію* $f(z)$ *називають* ***неперервною в точці*** z_0, *якщо вона визначена в деякому околі* z_0 *(включаючи саму точку* z_0*) і* $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

Очевидно, що для неперервності функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ у точці $z_0=x_0+iy_0$ необхідно й достатньо, аби функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були неперервними в точці (x_0, y_0).

Із властивостей (14.1) випливає, що сума, різниця, добуток і частка неперервних у точці z_0 комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ є неперервними функціями в цій точці. У випадку частки треба в цьому формулюванні припускати, що $g(z_0)\neq 0$.

➡ **Означення 14.3**. *Функцію називають* ***неперервною в області*** D, *якщо вона є неперервною в кожній точці цієї області.*

Зазначимо без доведення, що для функцій, неперервних у замкнених областях, а також на замкнених лініях або на відрізках ліній, які містять свої кінці, залишаються справедливими звичайні властивості дійсних функцій, неперервних на замкнених інтервалах. А саме, кожна функція $w=f(z)$, яка є неперервною на замкненій множині $\bar{D}$:

1. *обмежена на ній*, тобто існує така стала M, що для всіх z з $\bar{D}$: $|f(z)|\leq M$;
2. *досягає свого найбільшого й свого найменшого за модулем значень*, тобто в $\bar{D}$ існують такі точки z' і z'', що для всіх z із $\bar{D}$: $|f(z')|\geq|f(z)|, |f(z'')|\leq|f(z)|$;
3. *рівномірно неперервна*, тобто для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться число $\delta>0$, яке залежить лише від ε, таке, що для будь-якої пари точок z_1 і z_2 з $\bar{D}$, котрі задовольняють нерівність $|z_1-z_2|<\delta$, справедлива нерівність $|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$.

Відзначимо також без доведення ще одну властивість, якою будемо користуватися в подальшому.

Теорема 14.1. Якщо функція $w = f(z)$ неперервна в області D і реалізує взаємно однозначне відображення цієї області на деяку множину Δ в площині w, то Δ також є областю й обернена функція $z = \varphi(w)$ неперервна в Δ.

14.1.4. Диференційовність і аналітичність

Означення 14.4. Нехай функція $f(z)$ визначена й однозначна в деякому околі точки z. Казатимемо, що ***f (z) диференційовна в точці** z, якщо існує границя*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

і цю границю називатимемо похідною функції $f(z)$ у точці z (позначення: $f'(z)$).

■ **Приклад 14.2.** *Знайти похідну від функції $w = z^2$.*

Тут $f(z) = z^2$, $f(z + \Delta z) - f(z) = (z + \Delta z)^2 - z^2 = 2z\Delta z + (\Delta z)^2$, тому

$$(z^2)' = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Умови диференційовності функції $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ виражає наступна теорема.

Теорема 14.2. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки z, до того ж у цій точці функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні. Тоді для диференційовності функції комплексної змінної $f(z)$ у точці z необхідно й достатньо, щоб у цій точці мали місце рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.2}$$

(умови Д'Аламбера—Ейлера).

Доведення

Необхідність. Нехай існує

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{14.3}$$

Згідно з означенням границя w_0 функції комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ при $z \to z_0$ визначається через границі $u_0 = \lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y)$ і $v_0 = \lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y)$, що, як відомо, не залежать від способу наближення точки (x, y) до (x_0, y_0). Тому границя (14.3) має існувати за будь-якого способу наближення $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ до нуля й дорівнюватиме одному й тому самому комплексному числу $f'(z)$. Зокрема, це має справджуватись, якщо $\Delta z = \Delta x + i \cdot 0 = \Delta x$ і $\Delta x \to 0$. Дістанемо

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{14.4}$$

Знайдемо ту саму границю, припускаючи, що $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$ і $\Delta y \to 0$. Дістанемо

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y}\right] =$$

$$= -i\lim_{\Delta y \to 0}\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0}\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{14.5}$$

Порівнюючи вирази (14.4) і (14.5) для функції $f'(z)$, матимемо

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

звідки й випливають рівності (14.2).

Достатність. За означенням диференціала функції двох дійсних змінних виконуються рівності

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha|\Delta z|, \\ v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta|\Delta z|, \end{aligned} \tag{14.6}$$

де $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$; α і β прямують до нуля разом із $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Тоді приріст функції $f(z)$ становитиме

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + \eta|\Delta z|,$$

де $\eta = \alpha + i\beta$. Використовуючи рівності (14.2), цей приріст можна переписати у вигляді

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \eta|\Delta z| = A\Delta z + \eta|\Delta z| \quad (14.7)$$

($A = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ — функція, яка не залежить від Δz, а η прямує до нуля разом із Δz). Поділивши співвідношення (14.7) на Δz, бачимо, що границя $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ існує й дорівнює A. Теорему доведено.

З урахуванням умов Д'Аламбера—Ейлера похідну $f'(z)$ можна зобразити в таких рівнозначних формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

■ **Приклад 14.3**. *Обчислити похідну від функції* $w = z^3$.

У прикладі 14.1 дістали, що $\operatorname{Re} z^3 \equiv u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $\operatorname{Im} z^3 \equiv v(x, y) = 3x^2y - y^3$. Тому $(z^3)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3[(x^2 - y^2) + i2xy] = 3z^2$, оскільки $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$.

Властивості алгебраїчних дій і правила граничного переходу для функцій дійсної змінної поширюються й на функцію комплексної змінної; тому правила диференціювання функцій дійсної змінної є справедливими й для функцій комплексної змінної. Зокрема,

$$f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z);$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad g(z) \neq 0;$$

$$(f(g(z)))' = f'(g)g'(z), \quad f'(z) = \frac{1}{\varphi'(w)},$$

де f і φ — взаємно обернені функції, які здійснюють однолистні відображення околів точок z і w відповідно.

➡ **Означення 14.5.** *Функція $f(z)$, яка є диференційовною в кожній точці деякої області D, називається* ***аналітичною*** *в цій області.*

Наголосимо, що дане означення аналітичної функції передбачає її однозначність в області D, оскільки поняття границі й похідної визначені раніше лише для однозначних функцій.

■ **Приклад 14.4.** *Показати, що функція $w = z^2$ аналітична.*

По-перше, функція $w = z^2$ однозначна. По-друге, якщо $w = z^2$, то $u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$ і $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, звідки знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, умови Д'Аламбера—Ейлера (14.2) виконуються в усіх точках комплексної площини. Таким чином, функція $w = z^2$ є аналітичною на всій комплексній площині.

14.2 ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

14.2.1. Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай $w = f(z) = u + iv$ — неперервна функція комплексної змінної z, яка визначена в області D; L — гладка крива, що лежить у D, із початком у точці A й кінцем у точці B (рис. 14.5) і задана рівнянням $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ або, що одне й те саме, двома рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases} \qquad (14.8)$$

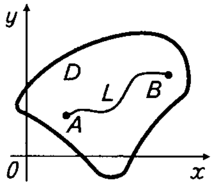

Рис. 14.5

Припускається, що додатний напрям на L відповідає зміні параметра t від α до β $(A = z(\alpha), B = z(\beta))$.

Інтеграл від функції $f(z)$ уздовж кривої L визначається так:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t),\ y(t))x'(t) - v(x)(t),\ y(t))y'(t)]dt +$$

$$+ i\int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)]dt. \qquad (14.9)$$

Урахувавши, що $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ і $f(x(t), y(t)) = f(z(t))$, рівність (14.9) можна коротко записати таким чином:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \qquad (14.10)$$

Отже, згідно з означенням ***інтеграл від функції комплексної змінної z** виражається через криволінійні інтеграли від дійсних функцій дійсних змінних x, y, і його обчислення зводиться до обчислення визначених інтегралів від функцій дійсної змінної.*

З формули (14.9) випливає також, що для інтегралів від комплексних функцій комплексної змінної справджуються всі властивості криволінійних інтегралів від дійсних функцій дійсних змінних. Так, зокрема:

1. $\int_L (A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z))\,dz = A_1\int_L f_1(z)dz + A_2\int f_2(z)\,dz;$

2. $\int_L f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz;$

3. $\int_{L^-} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz;$

4. *якщо на кривій L всюди* $|f(z)| \le M$ $(M \ge 0)$, *то* $\left|\int_L f(z)\,dz\right| \le Ml.$

У цих виразах A_1, A_2 — комплексні сталі; C_1, C_2 — дві криві, які складають криву L; L^- — крива, що збігається з кривою L по формі й положенню, але з протилежним напрямом обходу; l — довжина дуги кривої L.

■ **Приклад 14.5**. *Обчислити інтеграл* $\int_L \mathrm{Re}\, z\, dz$, *де крива L є:*

1) *прямолінійним відрізком, який сполучає точку* 0 *з точкою* $1 + i$;

2) *ламаною, яка складається з прямолінійного відрізка, що сполучає точку* 0 *з точкою* 1, *і прямолінійного відрізка, що сполучає точку* 1 *з точкою* $1 + i$.

① Рівняння відрізка, який сполучає точки 0 і 1 + i, в параметричній формі (14.8) має вигляд $x = t$, $y = t$, а в комплексній формі: $z = (1 + i)t$, де дійсна змінна t набирає значень від 0 до 1. Знаходимо далі

$$dz = (1 + i)dt;$$

$$\int_L \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Re}\,[(1+i)t]\,(1+i)dt = (1+i)\int_0^1 t\,dt = \frac{1+i}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1+i}{2}.$$

② Рівняння відрізка, який сполучає точки 0 і 1, в комплексній формі має вигляд $z = t$, де t змінюється від 0 до 1; рівняння в комплексній формі відрізка, який сполучає точки 1 і 1 + i, має вигляд $z = 1 + it$, де t змінюється від 0 до 1. Отже,

$$\int_L \operatorname{Re} z\, dz = \int_0^1 \operatorname{Re} t\, dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(1+it)i\,dt = \int_0^1 t\,dt + i\int_0^1 dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 + it\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i.$$

14.2.2. Інтегральна теорема Коші

У загальному випадку $\int_L f(z)\,dz$ залежить як від вигляду $f(z)$, так і від вигляду кривої L. Але за деяких умов цей інтеграл не залежить від форми кривої, а залежить лише від положення її кінців.

Теорема 14.3 (інтегральна теорема Коші для однозв'язної області). Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то інтеграл $\int_L f(z)\,dz$ не залежить від форми кривої L, усі точки якої належать області D, а залежить лише від положення кінцевих точок кривої.

Доведення

Для простоти доведення припустимо додатково, що похідна $f'(z)$ неперервна (в означенні аналітичності п. 14.1.4 вимагається лише існування $f'(z)$).

Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. З огляду на співвідношення

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L u\,dy + v\,dx$$

питання про незалежність інтеграла $\int_L f(z)\,dz$ від шляху інтегрування зводиться до питання про незалежність від шляху інтегрування криволінійних інтегралів

$$\int_L u\,dx - v\,dy, \quad \int_L u\,dy + v\,dx. \tag{14.11}$$

Але, як відомо з аналізу функцій дійсних змінних, для незалежності від шляху інтегрування в однозв'язній області криволінійного інтеграла $\int_L P\,dx + Q\,dy$, де P і Q — функції, які мають неперервні частинні похідні, необхідно й достатньо, щоб підінтегральний вираз був повним диференціалом, тобто щоб у кожній точці області D виконувалося співвідношення $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

Для інтегралів (14.11) ці співвідношення мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{14.12}$$

неперервність же частинних похідних випливає з припущення про неперервність $f'(z)$. Рівняння (14.12) збігаються з умовами Д'Аламбера—Ейлера (14.2) й задовольняються, оскільки $f(z)$ — аналітична функція. Теорему доведено.

З теореми 14.3 безпосередньо випливає, що для функцій, аналітичних в однозв'язних областях, замість $\int_L f(z)\,dz$ можна писати $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, де через z_0 і z позначено кінці кривої L.

Використання теореми 14.3 дає змогу довести низку положень, аналогічних положенням інтегрального числення функцій дійсних змінних:

1) якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то функція $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ також аналітична в області D, до того ж

$$F'(z) = \frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = f(z),$$

тобто $F(z)$ — первісна функції $f(z)$;

2) будь-які дві первісні однієї функції відрізняються одна від одної лише на сталий доданок;

3) якщо $F(z)$ — довільна первісна аналітичної функції $f(z)$, то

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = F(z) - F(z_0). \qquad (14.13)$$

■ **Приклад 14.6**. *Обчислити інтеграл* $\int_L z^2\,dz$, де L — *прямолінійний відрізок, який починається в точці* $-1 - i$ *й закінчується в точці* $1 + i$.

Підінтегральна функція $f(z) = z^2$ аналітична на всій комплексній площині, тому шуканий інтеграл залежить не від шляху інтегрування, а лише від положення кінців шляху інтегрування. Це дає змогу обчислити інтеграл як визначений за формулою Ньютона—Лейбніца (14.13)

$$\int_L z^2\,dz = \int_{-1-i}^{1+i} z^2\,dz = \frac{1}{3}z^3\Big|_{-1-i}^{1+i} = \frac{1}{3}((1+i)^3) - (-1-i)^3) = \frac{4}{3}(-1+i).$$

Теорему 14.3 можна сформулювати інакше.

Теорема 14.4. В однозв'язній області інтеграл від аналітичної функції по будь-якому замкненому контуру L, який лежить у цій області, дорівнює нулю.

Дійсно, будь-який замкнений простий контур L завжди можна за допомогою двох точок z_1 і z_2 розбити на два контури C_1 і C_2 зі спільними початком і кінцем (рис. 14.6). Тоді за властивостями інтегралів від функцій комплексної змінної

$$\oint_L f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

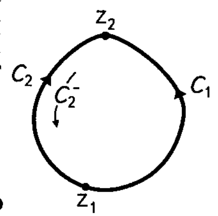

Рис. 14.6

Отже, рівність нулю інтеграла вздовж замкненого контура L зумовлюється рівністю між собою інтегралів уздовж C_1 і C_2, оскільки $f(z)$ — аналітична функція.

Інтегральна теорема Коші для однозв'язної області узагальнюється на випадок, коли контур інтегрування не належить області аналітичності функції $f(z)$, а є її границею.

Теорема 14.5. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\bar{D}$, то інтеграл від $f(z)$, обчислений уздовж межі C цієї області, дорівнює нулю.

Для багатозв'язних областей інтегральна теорема Коші, взагалі кажучи, несправедлива. Дійсно, функція $f(z) = \dfrac{1}{z}$ аналітична всюди в кільці $\frac{1}{2} < |z| < 2$, проте інтеграли від -1 до $+1$ уздовж верхньої і нижньої половин кола $|z|=1$ відрізняються один від одного. Справді, уздовж верхнього півкола C_1, де $z = e^{i\varphi}$, $\pi > \varphi > 0$, маємо:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^{0} \frac{i e^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = i\varphi \Big|_{\pi}^{0} = -i\pi,$$

а уздовж нижнього півкола C_2, де $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$,

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi = i\varphi \Big|_{-\pi}^{0} = i\pi.$$

Звідси

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z} \neq 0.$$

Проте якщо й у багатозв'язній області криві C_1 і C_2 зі спільними кінцями розташовані так, що вони обмежують одну однозв'язну область, яка належить D, то інтеграли уздовж таких кривих, очевидно, рівні між собою.

У зв'язку з цим інтегральну теорему Коші можна сформулювати й для багатозв'язної області.

Теорема 14.6 (інтегральна теорема Коші для багатозв'язної області). Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D і неперервна в замкненій багатозв'язній області $\bar{D}$; крива L — складена межа цієї області. Тоді, якщо при інтегруванні вздовж L цю межу проходити так, що область D завжди буде розташована по один бік, то інтеграл від функції $f(z)$ уздовж межі L дорівнюватиме нулю.

Пояснимо цю теорему. Двозв'язну область D зі складеною межею $L = C_1 + C_2$, зорієнтованою в додатному напрямі, зображено на рис. 14.7. Проведемо гладку криву (розріз) γ (рис. 14.8), який перетворює D на однозв'язну область D^*, обмежену замкненим складеним контуром $L^* = C_1 + \gamma^+ + C_2 + \gamma^-$. При обході цього контура область D^* весь час залишається ліворуч, розріз γ при цьому проходиться двічі в протилежних напрямах.

Тепер функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D^* і неперервна в $\bar{D}^*$, отже, за теоремою 14.5

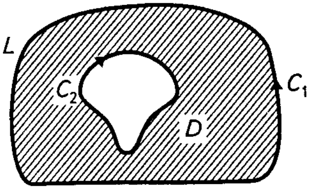

Рис. 14.7

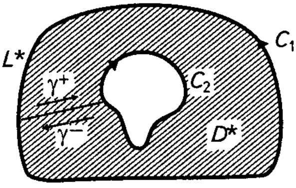

Рис. 14.8

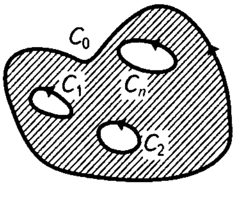

Рис. 14.9

$$\int\limits_{L^*} f(z)\,dz = 0.$$

Але $\int\limits_{\gamma^+ + \gamma^-} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma-} f(z)\,dz = 0$, тому

$$\int\limits_{L^*} f(z)\,dz = \int\limits_{L = C_1 + C_2} f(z)\,dz = 0.$$

У випадку більшого числа внутрішніх контурів до кожного з них проводиться розріз, який сполучає його із зовнішнім контуром, перетворюючи багатозв'язну область на однозв'язну.

З теореми 14.6 як наслідок випливає наступна теорема.

Теорема 14.7. Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D і неперервна в замкненій області $\bar{D}$, і C_0 — зовнішній контур межі області D, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — її внутрішні контури. Тоді справедлива формула

$$\oint\limits_{C_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{C_k} f(z)dz,$$

де контури $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ зорієнтовані в одному й тому самому напрямі (рис. 14.9).

14.2.3. Інтегральна формула Коші

Нехай D — однозв'язна область, обмежена додатно зорієнтованою простою кривою C, $f(z)$ — функція, аналітична в замкненій області $\bar{D}$. Тоді для будь-якої точки $z \in D$ справедлива інтегральна формула Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{14.14}$$

За допомогою формули (14.14) можна знайти значення аналітичної функції $f(z)$ у будь-якій точці області D за її значеннями на границі C цієї області, й навпаки — обчислити інтеграл вигляду (14.14) через значення функції $f(z)$.

■ **Приклад 14.7**. *Обчислити інтеграл* $\oint\limits_C \frac{z^2}{z-2i}dz$, *де* C — *коло радіусом* 2 *з центром у точці* $3i$.

Усередині області, обмеженої колом радіусом 2 з центром у точці $3i$, міститься точка $z_0 = 2i$, в якій знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль.

Функція $f(z) = z^2$ аналітична всередині кола C, тому за формулою Коші (14.14) дістанемо

$$\oint\limits_C \frac{z^2}{z-2i}dz = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-2i}dz = 2\pi i f(2i) = 2\pi i(2i)^2 = -8\pi i.$$

Формулу (14.14) можна поширити й на випадок багатозв'язної області D, границею якої є контур Γ, що складається зі скінченного числа кусково-гладких замкнених ліній: якщо $f(z)$ — аналітична функція в замкненій області $\overline{D}$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\xi)}{\zeta - z}d\zeta,$$

де z — будь-яка точка області D, а інтегрування здійснюється вздовж складеного контура Γ в додатному напрямі.

Вираз $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$, де $f(z)$ — функція, аналітична в замкненій області $\overline{D}$, границею якої є L, називають *інтегралом Коші.*

Якщо $z \in D$, то інтеграл Коші згідно з (14.14) дорівнює $f(z)$, якщо ж z лежить поза L, то $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ — аналітична функція в $\overline{D}$, і тому інтеграл Коші дорівнює нулю.

Нехай $\mathscr{L}$ — довільна кусково-гладка крива (не обов'язково замкнена), $\varphi(z)$ — задана на $\mathscr{L}$ неперервна функція. Вираз $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$ має певне значення для будь-якої точки z, яка не лежить на $\mathscr{L}$ і визначає однозначну функцію $F(z)$ в усіх точках $z \overline{\in} \mathscr{L}$, і називається *інтегралом типу Коші.* Якщо $\mathscr{L}$ — замкнена крива, а $\varphi(z)$ — функція, аналітична всередині $\mathscr{L}$ і на $\mathscr{L}$, то інтеграл типу Коші стає інтегралом Коші.

Для інтеграла типу Коші справедлива наступна теорема.

Теорема 14.8. Функція $F(z)$, визначена інтегралом типу Коші

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

аналітична в усякій однозв'язній області D, яка не містить точок кривої $\mathscr{L}$. У кожній точці $z \in \mathscr{L}$ функція $F(z)$ має похідні всіх порядків, що визначаються формулою

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 1; 2; \ldots).$$

14.2.4. Існування похідних будь-якого порядку для аналітичної функції

Відомо, що для функцій дійсних змінних із факту існування першої похідної ще не випливає існування похідних вищих порядків. Для функцій комплексної змінної справедлива наступна теорема.

Теорема 14.9. Якщо однозначна функція $f(z)$ має скрізь в області D першу похідну, то вона в цій області має похідні будь-якого порядку.

Доведення

Нехай z — довільна точка області D, C — кусково-гладкий замкнений контур, який оточує точку z і лежить з усіма своїми внутрішніми точками в області D. Застосовуючи інтегральну формулу Коші (14.14), зобразимо $f(z)$ у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta .$$

За теоремою 14.8 функція $f(z)$, яка зображується інтегралом Коші, диференційовна в точці z будь-яке число разів, причому

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{14.15}$$

що й доводить теорему.

■ **Приклад 14.8**. *Обчислити інтеграл* $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{(z-i)^2}dz$.

Знаменник підінтегральної функції перетворюється в нуль у точці $z_0 = i$, яка лежить усередині кола $|z-i|=1$, а функція $f(z) = z^2$ аналітична в усіх його точках. Тому за формулою (14.15)

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2}{(z-i)^2}dz = \int\limits_{|z-i|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(i).$$

Знайдемо похідну: $f'(z)=2z$. Звідси $f'(i)=2i$. Отже,

$$\int\limits_{|z-i|=1} \frac{z^2\,dz}{(z-i)^2} = -4\pi.$$

14.2.5. Гармонічні функції

Нехай в області D площини z задано аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. За теоремою 14.9 вона має в D неперервні похідні будь-якого порядку. Тому функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають у D неперервні частинні похідні також будь-якого порядку. Крім того, їхні перші похідні задовольняють умови Д'Аламбера—Ейлера

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{14.16}$$

Якщо продиференціювати в (14.16) перше рівняння по x, а друге — по y і додати їх, то дістанемо $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Диференціювання першого рівняння по y, а другого — по x і віднімання другої одержаної рівності від першої дає $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Одержані диференціальні рівняння для функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є *рівняннями Лапласа*.

Функції, які мають неперервні частинні похідні другого порядку в області D і задовольняють диференціальне рівняння Лапласа, називають ***гармонічними*** в області D.

Отже, ми встановили, що дійсна й уявна частини аналітичної в області D функції є гармонічними в цій області.

14.3 РЯДИ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ

14.3.1. Числові ряди

Означення 14.6. Нехай $\{w_n = u_n + iv_n\}$ — послідовність комплексних чисел. *Вираз*

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots, \tag{14.17}$$

або коротко $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, *називають **числовим рядом**, числа* $w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$ *— **членами ряду**. Суми*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = w_1 + w_2 + \ldots + w_n, \ n=1;\ 2;\ \ldots \tag{14.18}$$

*називають **n-ми частковими сумами ряду (14.17)**, а ряд*

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k = w_{n+1} + w_{n+2} + \ldots \tag{14.19}$$

*— **n-м залишком ряду (14.17)**.*

Якщо послідовність часткових сум збігається, тобто існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (14.17) називають *збіжним*, а границю S — *сумою ряду*. В цьому випадку

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k = 0.$$

Якщо послідовність часткових сум розбігається, то ряд називають *розбіжним*.

Зауважимо, що

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k) = \sum_{k=1}^{n} u_k + i\sum_{k=1}^{n} v_k,$$

а співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ еквівалентне двом співвідношенням: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \operatorname{Re} S = \sigma$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k = \operatorname{Im} S = \tau$. Звідси випливає, що збіжність ряду з комплексними членами еквівалентна одночасно збіжності рядів, складених відповідно з дійсних та уявних частин даного ряду.

Цей факт дає змогу досліджувати збіжності рядів із комплексними членами, використовуючи відомі ознаки збіжності рядів із дійсними членами: ознаки порівняння, Коші, Д'Аламбера та ін.

Застосовуючи до послідовності $\{S_n\}$ критерій Коші збіжності числової послідовності (див. гл. 4, кн. 1), дістанемо *загальний критерій збіжності рядів*. Ряд (14.17) збігається тоді й лише тоді, коли для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, що нерівності

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon \qquad (14.20)$$

виконуються при $n > N(\varepsilon)$ та довільному $p \in \mathbf{N}$.

Необхідною умовою збіжності ряду (14.17) є

$$\lim_{n \to \infty} w_n = 0. \qquad (14.21)$$

Ряд (14.17) називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|, \qquad (14.22)$$

складений із модулів його членів. Із загального критерію збіжності рядів випливає, що кожний абсолютно збіжний ряд збігається.

Обернене твердження несправедливе. Це випливає з відомого прикладу ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n}$, який збігається, але не абсолютно.

Для дослідження абсолютної збіжності ряду (14.17) можна скористатися відомими ознаками збіжності рядів із додатними членами.

Згідно з ознакою Д'Аламбера ряд (14.22) збігається, якщо, починаючи з деякого номера N, справедливе відношення $\left|\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right| \le l < 1$ для всіх $n > N$. Якщо, починаючи з деякого номера N, справедливе відношення $\left|\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right| > 1$, то ряд (14.17) із комплексними членами розбігається.

Згідно з ознакою Коші ряд (14.22) збігається, якщо $\sqrt[n]{|w_n|} \le l < 1$ для всіх $n > N$. Якщо ж, починаючи з деякого номера N, для всіх $n > N$ виконується нерівність $\sqrt[n]{|w_n|} > 1$, то ряд (14.17) розбігається.

■ **Приклад 14.9**. *Дослідити збіжність ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + i\frac{1}{n}\right)^n. \qquad (14.23)$$

Ряд, складений із модулів даного ряду, має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)^n. \qquad (14.24)$$

Оскільки $\sqrt[n]{(\sqrt{2}\ /\ n)^n} = \sqrt{2}\ /\ n < 1$ для всіх $n \geq 2$, то згідно з ознакою Коші ряд (14.24) збігається. Отже, ряд (14.23) збігається, причому абсолютно.

14.3.2. Функціональні ряди

➡ **Означення 14.7.** *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots, \qquad (14.25)$$

*всі члени якого — однозначні функції комплексної змінної z, визначені в деякій області G, називають **функціональним рядом.** Точку z_0 називають **точкою збіжності цього ряду,** якщо збігається числовий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n_n(z_0) = u_1(z_0) + u_2(z_0) + \ldots + u_n(z_0) + \ldots \qquad (14.26)$$

*Множину D називають **областю збіжності функціонального ряду (14.25),** якщо він збігається в кожній точці цієї області.* Область збіжності може бути як *однозв'язною*, так і *багатозв'язною й замкненою.*

Суму

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \qquad (14.27)$$

*називають **n-ю частковою сумою функціонального ряду (14.25)**, а ряд*

$$r_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \qquad (14.28)$$

— n-м залишком ряду (14.25).

Якщо для кожної точки $z \in D$ ряд (14.25) збігається, тобто існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$, то сума $S(z)$ буде однозначною функцією від z, $z \in D$.

Припустимо, що всі члени збіжного ряду (14.25) — неперервні функції в області D. Постає запитання: чи буде сума ряду з неперервних функцій неперервною функцією? В гл. 13 було показано, що сума ряду неперервних дійсних функцій може бути й розривною функцією.

Отже, для того щоб сума збіжного ряду неперервних функцій була неперервною функцією, потрібно на цей ряд накласти додаткове обмеження, а саме — умову рівномірної збіжності ряду.

Означення 14.8. *Ряд (14.25) називають **рівномірно збіжним** в області D до функції $S(z)$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ можна вказати ціле число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для довільної точки $z \in D$ і для всіх $n > N$ виконується нерівність*

$$\left|S(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon, \tag{14.29}$$

де $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$.

Важливу ознаку рівномірної збіжності функціональних рядів сформульовано в наступній теоремі.

Теорема 14.10 (ознака Вейєрштрасса). Якщо всі члени ряду (14.25) в області D задовольняють умову

$$\left|u_n(z)\right| \le a_n, \quad n = 1; 2; \ldots, \tag{14.30}$$

де a_n — сталі додатні дійсні числа, причому числовий ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{14.31}$$

збігається, то ряд (14.25) збігається рівномірно (й при тому абсолютно) в області D.

Доведення

За умовою теореми для членів ряду (14.25) справедлива рівномірна оцінка (14.30), і ряд (14.31) збігається. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n < \varepsilon$ для всіх $n > N$.

Із нерівностей (14.30) випливає, що при $n > N$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|u_k(z)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n < \varepsilon,$$

тобто $\left|S(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon$ при $n > N$ рівномірно для всіх $z \in D$.

Оскільки означення рівномірної збіжності аналогічне відповідному означенню для дійсних змінних (див. гл. 13), то теореми про неперервність суми, про можливість почленного інтегрування справедливі й у випадку комплексної змінної:

1) сума рівномірно збіжного в області D ряду, складеного з неперервних функцій, є неперервною в області D функцією;

2) якщо ряд (14.25) неперервних функцій $u_n(z)$ збігається рівномірно в області D до функції $f(z)$, то інтеграл від цієї функції по довільній кусково-гладкій кривій C, що цілком лежить в області D, можна обчислити почленним інтегруванням ряду (14.17), тобто

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)dz.$$

Для рівномірно збіжних рядів, членами яких є аналітичні функції, справедлива наступна теорема.

Теорема 14.11 (Вейєрштрасса). Нехай функції $u_n(z)$ аналітичні в області D, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ збігається рівномірно в довільній замкненій підобласті $\overline{D'}$ області D до функції $f(z)$. Тоді:

1) $f(z)$ аналітична в області D;

2) $\dfrac{d^k f(z)}{dz^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{d^k u_n(z)}{dz^k}$;

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{d^k u_n(z)}{dz^k}$ збігається рівномірно в замкненій підобласті $\overline{D'}$ області D.

Зауважимо, що теорема гарантує рівномірну збіжність ряду з похідних тільки в довільній замкненій підобласті D' області D, навіть якщо початковий ряд (14.25) збігається рівномірно в області $\overline{D}$.

■ **Приклад 14.10.** Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ в крузі $|z| \le 1$. Для всіх z таких, що $|z| \le 1$, маємо: $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| \le \dfrac{|z|^n}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ збігається, то за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ збігається рівномірно для всіх z, $|z| \le 1$.

Ряд із похідних $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n-1}}{n}$ не може збігатися в крузі $|z| \le 1$ рівномірно, оскільки при $z = 1$ дістанемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, який розбігається.

14.4 СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Означення 14.9. ***Степеневим рядом*** *у комплексній області називають ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots, \qquad (14.32)$$

де $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — сталі комплексні числа, які називаються ***коефіцієнтами ряду;*** *z_0 — комплексне число, яке називають* ***центром ряду;*** *z — незалежна комплексна змінна.*

Ряд (14.32) є окремим випадком загального функціонального ряду (14.25) із загальним членом $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$.

Областю збіжності степеневого ряду (14.32) називають множину всіх точок z площини, в яких даний ряд збігається. Ряд (14.32) збігається, очевидно, в точці $z = z_0$.

Як і у випадку степеневих рядів в дійсній області, справедлива наступна теорема.

Теорема 14.12 (Абеля). 1) Якщо степеневий ряд (14.32) збігається в деякій точці z_1, $z_1 \neq z_0$, то він збігається абсолютно й у довільній точці z, яка задовольняє умову $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. 2) Якщо степеневий ряд (14.32) розбігається в деякій точці z_2, $z_2 \neq z_0$, то він розбігається в усіх точках z таких, що задовольняють нерівність $|z-z_0|>|z_2-z_0|$.

Наслідок. *Для степеневого ряду (14.32), який може в одних точках збігатись, а в інших — розбігатись, завжди існує таке число $R > 0$, що для довільних z таких, що $|z-z_0|<R$, ряд (14.32) абсолютно збігається, а для z таких, що $|z-z_0|>R$, ряд (14.32) розбігається; в точках z, для яких $|z-z_0|=R$, ряд (14.32) може як збігатися, так і розбігатися.*

Область $|z-z_0|<R$ ($R > 0$), у кожній точці якої степеневий ряд (14.32) збігається, називають його ***кругом збіжності,*** *а число R —* ***радіусом збіжності*** *цього ряду.*

Радіус збіжності степеневого ряду можна знаходити за допомогою ознаки збіжності Коші або Д'Аламбера.

У першому випадку згідно з рядом (14.32) утворимо послідовність чисел

$$|c_1|,\ \sqrt{|c_2|},\ \sqrt[3]{|c_3|},\ \ldots,\ \sqrt[n]{|c_n|},\ \ldots, \tag{14.33}$$

де c_1, c_2, ..., c_n, ... — коефіцієнти степеневого ряду (14.32). Усі члени послідовності (14.33) розглядаються як дійсні невід'ємні числа.

Позначимо через l границю послідовності (14.33):

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{14.34}$$

Тоді радіус збіжності R степеневого ряду (14.32) обчислюється за формулою

$$R = \frac{1}{l}. \tag{14.35}$$

Якщо скористатись ознакою збіжності Д'Аламбера, то l можна знайти так:

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|, \tag{14.36}$$

і радіус R — за формулою (14.35).

Значення l, обчислені за формулами (14.34) та (14.36), збігаються. При $l = 0$ у формулі (14.35) треба взяти $R = +\infty$, а при $l = +\infty$ — $R = 0$.

■ **Приклад 14.11.** *Знайти круг збіжності ряду*

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + \frac{z^n}{n} + \ldots$$

Для цього ряду $c_n = \frac{1}{n}$. За формулою (14.36) дістанемо

$$l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n+1}}{1/n}\right| = 1.$$

Отже, $R = \frac{1}{l} = 1$. Ряд збігається всередині круга $|z| < 1$ і розбігається поза цим кругом. Щодо границі $|z| = 1$, то в деяких її точках ряд збігається (наприклад, при $z = -1$), а в деяких — розбігається (наприклад, при $z = 1$).

■ **Приклад 14.12.** *Знайти круг збіжності ряду*

$$1 + \frac{z}{n+1} + \frac{z^2}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{z^n}{(n+1)^n} + \ldots$$

Тут $c_n = 1/(n+1)^n$. Отже, за формулою (14.34) дістанемо

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Тому $R = +\infty$. Отже, даний ряд збігається в усій комплексній площині.

■ **Приклад 14.13.** *Знайти круг збіжності ряду*

$$1 + z + 2!z^2 + \ldots + n!z^n + \ldots$$

Тут $c_n = n!$ Отже, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$. Тому $R = 0$. Даний ряд збігається лише в одній точці $z = 0$.

14.4.1. Властивості степеневого ряду всередині його круга збіжності

Нехай степеневий ряд (14.32) має радіус збіжності R.

Теорема 14.13. Якщо степеневий ряд (14.32) збігається в точці $z_1 \neq z_0$, то він збігається рівномірно в кожній точці z, що належить кругу $|z - z_0| < \rho$ із радіусом ρ, меншим за $|z_1 - z_0|$.

Доведення

Оскільки числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n |z_1 - z_0|^n$ збігається, то для його членів виконується необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n |z_1 - z_0|^n = 0$. Отже, існує така стала M, що $|c_n(z_1 - z_0)^n| \le |c_n||z_1 - z_0|^n = M$. Тоді для довільної точки z із круга $|z - z_0| \le \rho < |z_1 - z_0|$ виконується нерівність

$$|c_n(z - z_0)| \le |c_n||z - z_0| \le \frac{M\rho^n}{|z_1 - z_0|^n}$$

для $n = 1; 2; \ldots$ Оскільки $\frac{\rho}{|z_1 - z_0|} < 1$ за припущенням, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n}$ є нескінченною геометричною прогресією зі знаменником, меншим від одиниці, тобто збіжним. За ознакою Вейєрштрасса ряд (14.32) збігається рівномірно для всіх z із круга $|z - z_0| \le \rho$.

Теорема 14.14. Всередині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції.

Доведення

Члени степеневого ряду $u_n(z) = c_n(z - z_0)^n$ є аналітичними функціями на всій комплексній площині. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ збігається рівномірно в довільній замкненій підобласті, що належить кругу збіжності. За теоремою Вейєрштрасса сума рівномірно збіжного ряду, складеного з аналітичних функцій, є аналітичною функцією.

Із теорем Абеля й Вейєрштрасса випливає наступна теорема.

Теорема 14.15. Степеневий ряд (14.32) всередині круга збіжності можна почленно інтегрувати й диференціювати довільне число разів, причому радіус збіжності утворених рядів дорівнює радіусу збіжності ряду (14.32).

Теорема 14.16. Коефіцієнти степеневого ряду (14.32) виражаються через значення суми ряду $f(z)$ та її похідних у центрі круга збіжності формулами

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \quad n = 0; 1; \ldots \quad (0! = 1). \tag{14.37}$$

Справді, якщо у вираз для суми степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{14.38}$$

підставити $z = z_0$, то дістанемо $f(z_0) = c_0$. Продиференціюємо рівність (14.38) по z. Дістанемо

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, (z - z_0)^{n-1}.$$

Підставивши в останню рівність $z = z_0$, знаходимо $f'(z_0) = c_1$. Аналогічно, якщо продиференціювати (14.38) k разів, то дістанемо

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n\, (n-1)\ldots(n-k+1)\, (z - z_0)^{n-k}.$$

При $z = z_0$ знаходимо, що $f^{(k)}(z_0) = c_k \cdot k\,!$, що й доводить формулу (14.37).

14.4.2. Ряд Тейлора

Степеневий ряд всередині круга збіжності визначає деяку аналітичну функцію, яка є сумою цього ряду. Справедливе й обернене твердження.

Теорема 14.17 (Тейлора). Якщо функція $f(z)$ аналітична всередині круга $|z-z_0|<R$, то вона може бути зображена в цьому крузі збіжним степеневим рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{14.39}$$

причому коефіцієнти цього ряду визначаються однозначно за формулами (14.37).

- *Зауваження.* Оскільки, згідно з теоремою 14.8

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\,d\zeta,$$

то формули (14.37) можна записати у вигляді

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta,\quad n=0;\ 1;\ 2;\ldots, \tag{14.40}$$

де C — довільний замкнений контур усередині круга аналітичності, що містить точку z_0.

Розвинення аналітичної функції $f(z)$ у крузі $|z-z_0|<R$ у збіжний степеневий ряд (14.38) називають ***розвиненням Тейлора***, а відповідний ряд (14.39) — ***рядом Тейлора*** функції $f(z)$.

14.5 ЄДИНІСТЬ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ. АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ

14.5.1. Поняття голоморфної функції

Означення 14.10. *Функцію $f(z)$ називають **голоморфною** в точці z_0, якщо вона в деякому околі цієї точки може бути розвинена в степеневий ряд відносно $z-z_0$.*

Голоморфність функції в точці еквівалентна її аналітичності в цій точці.

Справді, якщо функція $f(z)$ голоморфна в точці z_0, то її можна розвинути в збіжний степеневий ряд усередині круга $|z - z_0| < R$. Функція $f(z)$, як сума цього степеневого ряду, аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, а отже, й у точці $z = z_0$.

Якщо ж функція $f(z)$ аналітична в точці z_0, то існує круг із центром у цій точці, всередині якого $f(z)$ буде аналітичною. Тоді функція $f(z)$ може бути зображена у вигляді суми збіжного в цьому крузі степеневого ряду, тому $f(z)$ — голоморфна в точці z_0.

Якщо функція $f(z)$ голоморфна в кожній точці області D, то кажуть, що вона голоморфна в області D.

Якщо функція $f(z)$ голоморфна в області D, то вона аналітична в області D.

Функція $f(z)$, аналітична в усій комплексній площині ($z \neq \infty$), називається ***цілою функцією.***

- *Зауваження.* Для функцій дійсної змінної аналогічна властивість несправедлива. З існування на відрізку $[a, b]$ усіх похідних функції $f(x)$ не випливає, що її можна розвинути в степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \ x_0 \in [a, b],$$

збіжний на відрізку $[a, b]$. Наприклад, функція $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ має похідні всіх порядків для довільного дійсного значення x, але при $x_0 = 0$ ряд

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

збігається до $\dfrac{1}{1 + x^2}$ тільки на інтервалі $-1 < x < 1$, а не на всій числовій осі.

Теорема 14.18 (єдиності). Якщо дві функції $f(z)$ та $\varphi(z)$, аналітичні в області D, набувають рівних між собою значень на нескінченній множині точок $E = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$ у цій області, причому множина E має хоча б одну граничну точку a, яка лежить в області D, то ці функції рівні між собою всюди в області D.

Доведення

Припустимо, що область D — це круг із центром у точці a. Нехай функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ розвинені в степеневі ряди:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \ldots + c_n(z - a)^n + \ldots; \quad (14.41)$$

$$\varphi(z) = c_0' + c_1'(z - a) + c_2'(z - a)^2 + \ldots + c_n'(z - a)^n + \ldots \quad (14.42)$$

За умовою теореми, якщо точка z належить множині E, то $f(z) = \varphi(z)$. Оскільки точка a є граничною точкою множини E, то можна вибрати послідовність точок $z_k \in E$ таку, що $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = a$. З умови $f(z_k) = \varphi(z_k)$ після переходу до границі при $k \to \infty$, з урахуванням неперервності функцій $f(z)$ та $\varphi(z)$ у точці a, дістанемо $f(a) = \varphi(a)$, тобто $c_0 = c_0'$. Отже, в точках $z \in E$

$$c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + c_n(z-a)^n + \ldots =$$
$$= c_1'(z-a) + c_2'(z-a)^2 + \ldots + c_n'(z-a)^n + \ldots$$

Скоротивши цю рівність на $z - a \neq 0$, дістанемо таку:

$$c_1 + c_2(z-a) + \ldots + c_n(z-a)^{n-1} + \ldots =$$
$$= c_1' + c_2'(z-a) + \ldots + c_n'(z-a)^{n-1} + \ldots, \qquad (14.43)$$

яка справедлива для точок $z \in E$, в тому числі й для $z = z_k$, $k = 1; 2; \ldots$ Перейшовши до границі в рівності (14.43) при $\lim\limits_{k \to \infty} z_k = a$, матимемо $c_1 = c_1'$. Діючи так і далі, визначимо, що $c_n = c_n'$ для довільного n, тобто $f(z) = \varphi(z)$ у крузі D.

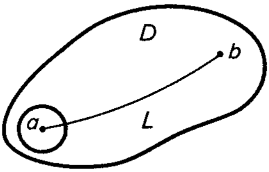

Рис. 14.10

Нехай тепер D — довільна область і $f(z) = \varphi(z)$ для всіх $z \in E$, причому множина E має граничну точку $a \in D$. Покажемо, що $f(b) = \varphi(b)$ для довільної точки $b \in D$ (рис. 14.10). Сполучимо точки a та b довільною неперервною лінією L, яка цілком лежить в області D. Позначимо через d ($d > 0$) найменшу відстань від лінії L до границі області D. Тоді круг із центром у довільній точці лінії L радіусом $d/2$ цілком лежить в області D. Із доведеного випливає, що $f(z) = \varphi(z)$ всередині круга з центром у точці a радіусом $d/2$. Примушуючи центр цього круга неперервно рухатися по лінії L від точки a до точки b, бачимо, що $f(z) = \varphi(z)$ всередині цього круга, хоч би яке було положення цього круга. Отже, і $f(b) = \varphi(b)$.

14.5.2. Аналітичне продовження

Із теореми єдиності 14.18 випливає, що коли дві аналітичні в області D функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ збігаються всюди в довільному малому околі деякої точки в D або на довільній лінії, яка цілком лежить в області D, то вони збігаються в усій області D. Крім того, якщо функція $f(z)$ аналітична в області D_1, а $\varphi(z)$ аналітична в області D_2, причому області D_1 і D_2 мають спільну частину $D' = D_1 \cap D_2$, в якій $f(z) = \varphi(z)$, то існує єдина аналітична функція $F(z)$, $z \in D_1 \cup D_2$ така, що

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D_1, \\ \varphi(z) & \text{при } z \in D_2. \end{cases}$$

У цьому випадку функцію $F(z)$ називають ***аналітичним продовженням функції*** $f(z)$ (відповідно $\varphi(z)$) на область $D_1 \cup D_2$. При цьому $\varphi(z)$ — *аналітичне продовження функції* $f(z)$ *на область* D_2, *а* $f(z)$ — *аналітичне продовження функції* $\varphi(z)$ *на область* D_1.

Якщо функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ збігаються не на всьому перерізі областей D_1 і D_2, а лише на частині перерізу, то аналітичні продовження можуть бути різними. Наприклад (рис. 14.11), нехай функції $f(z)$ та $\varphi(z)$ в області D' збігаються, а в області D'' — різні. Тоді аналітичне продовження функції $f(z)$ в область D'' можна дістати двома способами:

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D_1, \\ \varphi(z) & \text{при } z \in D_2 / D''; \end{cases}$$

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \in D_1 / D'', \\ \varphi(z) & \text{при } z \in D_2. \end{cases}$$

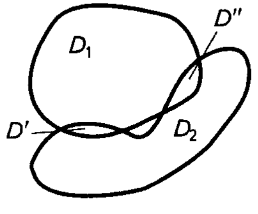

Рис. 14.11

Отже, на області D'' маємо двозначну функцію. У зв'язку з цим вводиться поняття *вітки аналітичної функції*, причому кожна вітка пов'язана з окремою областю, і ці області склеєні між собою певним чином. Такі многовиди називають *рімановими поверхнями* многозначних аналітичних функцій.

14.5.3. Нулі аналітичної функції

Означення 14.11. *Якщо функція* $f(z)$ $(f(z) \neq 0)$ *аналітична в області* D і $f(z_0) = 0$, $z_0 \in D$, *то точку* z_0 *називають* ***нулем функції*** $f(z)$. При цьому її розвинення в степеневий ряд в околі точки z_0 має вигляд

$$f(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots, \qquad (14.44)$$

оскільки $c_0 = f(z_0) = 0$.

Зауважимо, що всі коефіцієнти c_n ряду (14.44) не можуть дорівнювати нулю, оскільки тоді функція $f(z)$ була б тотожно рівною нулю в усій області D. Отже, серед коефіцієнтів c_n ($n = 1; 2; ...$) є відмінні від нуля. Позначимо через m ($m \geq 1$) найменший номер цих коефіцієнтів. Тоді $c_1 = c_2 = ... = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$, і ряд (14.44) матиме вигляд

$$f(z) = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots, \quad c_m \neq 0.$$

У цьому разі точка z_0 називається *нулем m-го порядку* для функції $f(z)$. Якщо $m = 1$, то нуль називається *простим*, якщо ж $m > 1$ — *кратним*.

Множина всіх нулів функції $f(z)$, які лежать в області D, може бути скінченною або нескінченною.

Теорема 14.19. Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і така, що $|f(z_n)| = 0$, $n = 1; 2; ...$, де $z_n \in D$, $n = 1; 2; ...$, і $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a \in D$, то $f(z) \equiv 0$ в області D.

Доведення випливає з теореми 14.18, якщо взяти значення $\varphi(z)$ тотожним нулю.

Із теореми 14.19 випливає, що всі граничні точки множини нулів функції $f(z)$, відмінної від тотожного нуля, мають перебувати на границі L області D. Це означає, що навколо кожного нуля функції $f(z)$ можна описати, як із центра, коло досить малого радіуса так, що всередині цього кола не буде інших нулів, крім центра.

14.6 ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Теорема про єдиність визначення аналітичної функції дає змогу поширити на комплексну область елементарні функції дійсної змінної. Якщо на відрізку $[a, b]$ дійсної осі x задано неперервну функцію $f(x)$ дійсної змінної, то в деякій області D комплексної площини, в якій лежить відрізок $[a, b]$ дійсної осі, може існувати лише одна аналітична функція $f(z)$ комплексної змінної z, що набуває даних значень $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Функція $f(z)$ називається ***аналітичним продовженням*** функції $f(x)$ дійсної змінної x на комплексну область D.

Серед елементарних функцій дійсної змінної x, які породжують відповідні елементарні функції комплексної змінної, важливу роль відіграють функції x^n, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$.

Розглянемо приклади побудови аналітичних продовжень елементарних функцій дійсної змінної.

Степенева функція в комплексній області має вигляд

$$w = z^n \text{ (}n\text{ — ціле дійсне число).} \qquad (14.45)$$

Якщо $n \in \mathbf{N}$, то функція $w = z^n$ визначена для всіх комплексних чисел. Кожному комплексному числу $z = x + iy$ дана функція ставить у відповідність число z^n, тобто добуток n множників, кожний з яких дорівнює z, і похідна $(z^n)' = nz^{n-1}$, а отже, функція z^n, $n > 0$ аналітична на всій комплексній площині.

Розглядають також і степеневу функцію $w = z^n$ для цілих від'ємних чисел n і при $n = 0$. За означенням

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}, \;\; N \in \mathbf{N}; \;\; z^0 = 1. \qquad (14.46)$$

Функцію $w = z^{-n}$ зручно розглядати на розширеній комплексній площині $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$. У цьому разі відображення, що задається цією функцією, є взаємно однозначним відображенням розширеної комплексної площини на себе (при цьому точці $z = \infty$ відповідає точка $w = 0$, а точці $z = 0$ — точка $w = \infty$). Функція $w = z^n$, $n \in \mathbf{Z}$ має цілу низку властивостей, аналогічних властивостям дійсної функції $y = x^n$. Наприклад,

$$\begin{gathered} w(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = w(z_1)\, w(z_2); \\ |w(z)| = |z|^n, \;\; z^n z^{-m} = z^{n-m}, \;\; z^n z^{-n} = z^0 = 1 \end{gathered} \qquad (14.47)$$

і т. д. Якщо $|z| = 1$, то

$$|w(z)| = 1, \qquad (14.48)$$

тобто множина комплексних чисел, модуль яких дорівнює одиниці, зображується на комплексній площині колом одиничного радіуса з центром у початку координат. Із рівностей (14.48) випливає, що в разі руху точки z по колу $w(z)$ також рухається по цьому колу, причому одному повороту z відповідає n поворотів $w(z)$.

Показникова функція. Для дійсної змінної x функція e^x однозначно задається її рядом Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad (14.49)$$

який збігається на всій числовій прямій $x \in (-\infty, +\infty)$. Розглянемо на комплексній площині степеневий ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{14.50}$$

який збігається на всій комплексній площині.

Для дійсних $z = x$ ряди (14.49) та (14.50) збігаються. Отже, ряд (14.50) задає цілу функцію комплексної змінної, що є аналітичним продовженням на всю комплексну площину функції дійсної змінної e^x, для якої зберігається попереднє позначення. Отже, за означенням

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{14.51}$$

Для суто уявного аргументу $z = iy$ $(y \in \mathbf{R})$ справедлива рівність

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots\right). \tag{14.52}$$

Оскільки ряди в дужках збігаються відповідно до $\cos y$ та $\sin y$, то з формули (14.52) дістанемо

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad y \in \mathbf{R}. \tag{14.53}$$

Для функції e^z виконується співвідношення

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbf{C}. \tag{14.54}$$

При $z = x + iy$ маємо: $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Отже,

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{14.55}$$

Звідси випливає, що $|w| = e^x$, $\arg w = y$. Оскільки $\cos(y + 2k\pi) = \cos y$, $\sin(y + 2k\pi) = \sin y$, то при $z = x + iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x[\cos(y + 2k\pi) + i \sin(y + 2k\pi)] =$$

$$= e^x e^{i(y + 2k\pi)} = e^{z + 2k\pi i}.$$

Отже, функція e^z періодична з періодом $2k\pi i$, а тому $y = \arg w$ є лише головним значенням аргументу функції $w = e^z$, а повний аргумент буде

$$\operatorname{Arg} w = \arg w + 2k\pi. \tag{14.56}$$

Тригонометричні функції $\sin x$ та $\cos x$ можуть задаватися своїми розвиненнями в ряди Тейлора:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{14.57}$$

які збігаються для довільного значення $x \in \mathbf{R}$.

Визначимо функції $\sin z$ та $\cos z$ комплексної змінної z як аналітичні продовження рядів (14.57) на комплексну площину, а саме:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{14.58}$$

де ряди збігаються на всій комплексній площині.

Оскільки в ряд для $\sin z$ входять лише непарні степені z, а в ряд для $\cos z$ — тільки парні, то, очевидно, що

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z. \tag{14.59}$$

Якщо в зображенні (14.51) для функції e^z зробити заміну $z = i\zeta$ (ζ — нова комплексна змінна), то дістанемо

$$e^{i\xi} = \sum_{m=0}^{\infty} i^n \frac{\zeta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\zeta^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

тобто

$$e^{i\xi} = \cos\zeta + i\sin\zeta. \tag{14.60}$$

Ця тотожність справедлива для всіх значень комплексної змінної ζ. Співвідношення (14.60) називають *формулою Ейлера*. З нього випливають формули

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z; \tag{14.61}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \tag{14.62}$$

звідки $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$.

За допомогою функції e^z побудуємо гіперболічні функції комплексної змінної

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{14.63}$$

які називають відповідно *гіперболічним косинусом* та *гіперболічним синусом*. Вони також будуть цілими функціями.

Використовуючи формули (14.62) та (14.63), виводимо:

$$\sin iz = -i\operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh} iz = i\sin z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z. \tag{14.64}$$

Користуючися формулою Ейлера, дістанемо показникову форму зображення комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тобто $z = re^{i\varphi}$, де $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. За допомогою тригонометричних функцій $\sin z$ та

$\cos z$ формальним перенесенням у комплексну область відповідних означень можна побудувати інші тригонометричні функції:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z}.$$

Ці функції вже не будуть цілими, оскільки їхня аналітичність порушується в тих точках комплексної площини, в яких знаменники виразів перетворюються в нуль.

Теорема про єдиність визначення аналітичної функції дає змогу не тільки будувати аналітичні продовження елементарних функцій дійсної змінної, а й аналітично продовжувати в комплексну область співвідношення між функціями дійсної змінної. Так, у комплексній області справедливі співвідношення

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;\ \ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

$$\operatorname{tg} 2z = (2 \operatorname{tg} z)/(1 - \operatorname{tg}^2 z),\ \operatorname{tg} z = \operatorname{ctg}(\pi/2 - z);$$

$$(e^z)' = e^z,\ (\sin z)' = \cos z,\ (\cos z)' = -\sin z;$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z,\ (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$$

та інші тригонометричні формули, які є аналітичним продовженням у комплексну область співвідношень між функціями дійсної змінної.

Логарифмічна функція. Розглянемо функцію

$$w = \ln z = \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

яка є аналітичним продовженням функції $\ln x$ на комплексну площину, розрізану по від'ємній частині дійсної осі. Для дійсних $x > 0$ справедлива рівність $e^{\ln x} = x$. Тому в комплексній області $-\pi < \arg z < \pi$ зберігається співвідношення

$$e^{\ln z} = z. \tag{14.65}$$

Таким чином, функція $\ln z$ є оберненою до функції e^w. Із формули (14.65) та співвідношення $w = u + iv = \ln z$ випливає

$$z = e^w = e^{u+iv} = e^u e^{iv}.$$

Отже, $|z| = e^u$, $\arg z = v$. Оскільки u та $|z|$ — дійсні змінні, то

$$u = \ln|z|,\ v = \arg z,$$

де $\ln|z|$ — дійсна логарифмічна функція дійсного додатного аргументу. Таким чином, для функції комплексної змінної $\ln z$ дістанемо

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z. \tag{14.66}$$

Функція $\ln z$ є тільки головним значенням логарифма. Оскільки e^z є періодичною функцією, то логарифм є многозначною функцією. Повний вираз для логарифма z позначають $\mathrm{Ln}\, z$. Справедлива формула

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + i2k\pi.$$

Урахувавши (14.66), дістанемо

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i \arg z + i\,2k\pi. \tag{14.67}$$

Наприклад, $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|(-1)| + i\arg(-1) + i\,2k\pi = i\pi + i\,2k\pi = i(2k+1)\pi$.

Обернені тригонометричні та обернені гіперболічні функції. За означенням функція $w = \mathrm{Arcsin}\, z$ є оберненою до $\sin z$. Це означає, що комплексне число w буде $\mathrm{Arcsin}\, z$ тоді й лише тоді, коли $\sin w = z$. Використовуючи формулу (14.62), дістанемо

$$\frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}) = z,$$

звідки, розв'язавши дане рівняння відносно e^{iw}, знайдемо

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

тобто

$$w = -i\,\mathrm{Ln}\,(iz \pm \sqrt{1 - z^2}). \tag{14.68}$$

Функція $w = \mathrm{Arcsin}\, z$ неоднозначна, оскільки рівняння $\sin z = w$ при довільному комплексному z має нескінченну множину розв'язків. Ця множина значень w і описується формулою (14.68).

Аналогічно можна показати, що

$$w = \mathrm{Arccos}\; z = -i\,\mathrm{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 - 1});$$

$$w = \mathrm{Arctg}\; z = -i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1 + zi}{1 - zi}};$$

$$w = \mathrm{Arcctg}\; z = i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{z - i}{z + i}}.$$

Для гіперболічних функцій $w = \text{ch}\, z$, $w = \text{sh}\, z$, $w = \text{th}\, z$, $w = \text{cth}\, z$ також визначені обернені функції $\text{Arcch}\, z$, $\text{Arcsh}\, z$, $\text{Arcth}\, z$, $\text{Arccth}\, z$. Як і при виведенні формули (14.68), дістанемо

$$\text{Arcsh}\, z = \text{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 + 1});$$

$$\text{Arcch}\, z = \text{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 - 1});$$

$$\text{Arcth}\, z = \text{Ln}\sqrt{\frac{z+1}{-z+1}};$$

$$\text{Arccth}\, z = \text{Ln}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$

Функції $\text{Arcch}\, z$, $\text{Arcsh}\, z$, $\text{Arcth}\, z$, $\text{Arccth}\, z$ многозначні.

Загальна степенева функція. Для дійсних x, $x > 0$ справедлива тотожність $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Аналогічно визначимо функцію комплексної змінної $w = x^\alpha$ як

$$z^\alpha = e^{\alpha \,\text{Ln}\, z}, \quad z \neq 0, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \tag{14.69}$$

Функція (14.69), визначена для всіх $z \neq 0$, многозначна, оскільки $\text{Ln}\, z$ многозначна:

$$z^\alpha = e^{\alpha \,\text{Ln}\, z} = e^{\alpha(\ln|z| + i\, \text{Arg}\, z)}.$$

Якщо z — дійсне, α — ціле, то

$$z^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln|z|} = z^\alpha & \text{при } z > 0, \\ (-1)^\alpha e^{\alpha \ln|z|} = (-1)^\alpha |z|^\alpha & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Якщо $\alpha \leq p/q$ (p, q — дійсні цілі числа), то $z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}$. За формулою Муавра

$$z^{p/q} = r^{p/q}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\,\text{Arg}\, z\right) + i \sin\left(\frac{p}{q}\,\text{Arg}\, z\right)\right], \quad r = |z|.$$

При цьому

$$\frac{p}{q}\,\text{Arg}\, z = p\varphi + \frac{2\pi k}{q}, \quad k = 0; 1; \ldots, \quad q - 1,$$

$$\varphi = \arg z, \quad 0 \leq \arg z < 2\pi.$$

Отже, якщо $\alpha = p/q$, то функція $w = z^{p/q}$ є q-значною функцією при $z \neq 0$.

14.7 РЯД ЛОРАНА

14.7.1. Ізольовані особливі точки

Точку z_0 називають *правильною точкою функції* $f(z)$, якщо існує степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, який збігається до функції $f(z)$ у крузі досить малого радіуса з центром у точці z_0, тобто якщо існує круг як завгодно малого радіуса з центром у точці z_0, в якому функція $f(z)$ аналітична.

Точки, які не є правильними, називають *особливими точками функції* $f(z)$.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D, то всі внутрішні точки цієї області є правильними точками функції $f(z)$. Серед точок межі Γ області D можуть бути як правильні, так і особливі.

Якщо степеневий ряд усередині круга збіжності задає аналітичну функцію $f(z)$, то всі точки, що лежать усередині круга, є правильними, а на колі (межі круга збіжності) буде хоча б одна особлива точка функції $f(z)$. Звідси випливає, що радіус круга збіжності степеневого ряду дорівнює відстані від точки z_0 до найближчої особливої точки суми цього ряду.

➡ **Означення 14.12**. *Точку z_0 називають **ізольованою особливою точкою функції f(z)**, якщо існує такий окіл точки z_0, що функція $f(z)$ визначена й диференційовна в усіх точках цього околу за винятком самої точки z_0.*

Поведінку функції $f(z)$ в околі особливої точки z_0 розрізняють залежно від того, який із в и п а д к і в , що наведені нижче, справджується:

1. існує границя (скінченна) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a < \infty$;
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$;
3. границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує (і не дорівнює нескінченності).

У першому випадку z_0 називають *усувною особливою точкою*. Якщо в цьому разі взяти

$$f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{при } z \neq z_0, \\ a & \text{при } z = z_0, \end{cases}$$

то дістанемо неперервну функцію в усьому околі точки z_0.

У другому випадку точку z_0 називають *полюсом функції* $f(z)$, у третьому — *істотно особливою точкою.*

Нехай z_0 — полюс функції $f(z)$ і існує відмінна від нуля скінченна границя

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k \; f(z) = c. \qquad (14.70)$$

Тоді кажуть, що z_0 — полюс k-го порядку функції $f(z)$. Якщо умова (14.70) не виконується при жодному додатному k, то z_0 — істотно особлива точка функції $f(z)$.

- *Зауваження.* Якщо z_0 — нуль кратності k функції $f(z)$, то z_0 — полюс кратності k функції $\frac{1}{f(z)}$.

■ **Приклад 14.14.** (1) Функція $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ не визначена в точці $z = 0$.

Але

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots}{z} =$$

$$= \lim_{z \to 0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots \right) = 1,$$

тобто існує $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = 1$. Отже, $z_0 = 0$ — усувна особлива точка, а функція

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{при } z \neq z_0, \\ 1 & \text{при } z = 0 \end{cases}$$

неперервна й диференційовна.

(2) Функція $w = \frac{1}{z^2 + 4}$ не визначена в точках $z = \pm 2i$, і

$$\lim_{z \to 2i} \frac{1}{z^2 + 4} (z - 2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{1}{z + 2i} = \frac{1}{4i} \neq 0.$$

Точка $z = 2i$ є полюсом кратності 1, тобто простим полюсом. Точка $z = -2i$ — також простий полюс.

(3) Функція $f(z) = \sin z - z$ має в точці $z = 0$ нуль третього порядку, оскільки $\sin z - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$, а функція $\varphi(z) = \frac{1}{\sin z - z}$ має в точці $z = 0$ полюс третього порядку.

- *Зауваження.* Якщо нескінченно віддалена точка не є правильною точкою однозначної аналітичної функції $f(z)$, то вона буде ізольованою особливою точкою цієї функції тоді, коли існує окіл точки $z = \infty$, в якому немає особливих точок функції $f(z)$, крім самої нескінченно віддаленої точки.

Нескінченно віддалена ізольована особлива точка може бути одного з трьох видів — усувною особливою точкою, полюсом порядку k або істотно особливою точкою.

Функцію $f(z)$ називають *цілою* (або *голоморфною*), якщо вона не має особливих точок у скінченній області.

Якщо функція $f(z)$ не має інших особливих точок, крім полюсів, то її називають *дробовою* (або *мероморфною*).

До мероморфних функцій належать цілі, дробово-раціональні та тригонометричні функції.

14.7.2. Ряд Лорана

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{14.71}$$

де z_0 — фіксована точка площини, c_n — деякі комплексні числа, а підсумовування здійснюється як за додатними, так і за від'ємними значеннями індексу n. Ряд (14.71) називають ***рядом Лорана.***

Запишемо ряд (14.71) у вигляді

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{14.72}$$

Перша частина цього ряду, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, називається *правильною частиною ряду Лорана*, а друга частина — $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ — *головною частиною ряду Лорана.*

Областю збіжності ряду (14.71) є спільна частина області збіжності його головної та правильної частин. Областю збіжності правильної частини, тобто ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, є круг із центром у точці z_0 радіусом R:

$$R = 1 / \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Усередині круга збіжності цей ряд збігається до деякої аналітичної функції $f_1(z)$:

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<R. \tag{14.73}$$

Для визначення області збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ зробимо заміну $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$. Тоді цей ряд матиме вигляд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$. Утворений степеневий ряд збігається в крузі радіусом $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}}$ $\left(|\zeta|<\dfrac{1}{r}\right)$ до функції $\varphi(\zeta)$.

Повернувшися до старої змінної і взявши $\varphi\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)=f_2(z)$, дістанемо

$$f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n},\quad |z-z_0|>r, \tag{14.74}$$

тобто областю збіжності головної частини ряду Лорана є область, зовнішня щодо кола $|z-z_0|=r$.

Отже, кожний ряд у правій частині (14.72) збігається у своїй області до відповідної аналітичної функції.

Якщо $r<R$, то існує спільна область збіжності цих рядів — колове кільце $r<|z-z_0|<R$, в якому ряд (14.71) збігається до аналітичної функції

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad r<|z-z_0|<R. \tag{14.75}$$

Ряд Лорана (14.71) збігається всередині кільця збіжності до функції $f(z)$, аналітичної в даному кільці.

Якщо $r>R$, то ряди (14.73) і (14.74) не мають спільної області збіжності. Отже, і ряд (14.71) в цьому випадку ніде не збігається.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 14.20. Нехай $0\le r<R<\infty$. Довільна аналітична в кільці $r<|z-z_0|<R$ функція $f(z)$ може бути однозначно розвинена в цьому кільці в збіжний ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \tag{14.76}$$

де

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,\quad n=0;\pm1;\pm2;\ldots, \tag{14.77}$$

а C_ρ — довільне коло $|\zeta-z_0|=\rho$, $r<\rho<R$, зорієнтоване проти годинникової стрілки.

За допомогою ряду Лорана зручно вивчати поведінку функції $f(z)$ в околі ізольованої особливої точки. Так, характер особливої точки відповідає таким властивостям ряду Лорана:

1. *в околі усувної особливої точки головна частина ряду Лорана вироджується* — всі коефіцієнти c_n при $n < 0$ у формулі (14.76) дорівнюють нулю;

2. *в околі полюса ряд Лорана функції $f(z)$ має скінченну головну частину* — всі коефіцієнти c_n із номерами, меншими за $-k < 0$, дорівнюють нулю, а $c_{-k} \neq 0$, тобто розвинення (14.76) має вигляд

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \qquad (14.78)$$

причому число k збігається з порядком полюса;

3. *в околі істотно особливої точки ряд Лорана має нескінченну головну частину* — у формулі (14.76) присутні відмінні від нуля коефіцієнти c_n при від'ємних, як завгодно великих за абсолютним значенням n.

- *Зауваження.* Якщо функція $f(z)$ однозначна й аналітична в околі нескінченно віддаленої точки, то в цьому околі вона може бути розвинена в ряд Лорана.

Для цього введемо нову комплексну змінну $\zeta = \frac{1}{z}$. Тоді $f(z) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi(\zeta)$, причому $\varphi(\zeta)$ буде аналітичною функцією в околі точки $\zeta = 0$ і $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \lim\limits_{\xi \to 0} \varphi(\zeta)$.

Розвинемо функцію $\varphi(\zeta)$ у ряд Лорана в околі точки $\zeta_0 = 0$:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\zeta^n}. \qquad (14.79)$$

Розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки дістанемо з ряду (14.79) заміною $\zeta = \frac{1}{z}$. Тоді

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n \qquad (14.80)$$

буде шуканим рядом Лорана. Коефіцієнти c_n визначаються за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\xi, \quad n = 0;\ \pm 1;\ \pm 2; \ldots$$

■ **Приклад 14.15**. *Розвинути в ряд Лорана функцію* $f(z)=\dfrac{1}{z^2-8z+15}$ *в околі точки* $z_0=0$.

Функція має дві особливі точки $z_1=3$ і $z_2=5$. Вона аналітична в областях: 1 $0<|z|<3$; 2 $3<|z|<5$; 3 $5<|z|<+\infty$. Запишемо розвинення в ряд Лорана в кожній із цих областей. Функцію $f(z)$ можна подати у вигляді суми елементарних дробів:

$$f(z)=\frac{1}{z^2-8z+15}=\frac{1}{2(z-5)}-\frac{1}{2(z-3)}.$$

1 Розвинення в крузі $|z|<3$. Перетворимо $f(z)$ таким чином:

$$f(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-5}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{10}\,\frac{1}{1-z/5}+\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-z/3}=$$

$$=-\frac{1}{10}\left(1+\frac{z^5}{5}+\frac{z^2}{5^2}+\ldots+\frac{z^n}{5^n}+\ldots\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\ldots+\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right).$$

Отже, $f(z)=\dfrac{1}{z^2-8z+15}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{5^{n+1}}\right]z^n$ при $|z|<3$.

2 Розвинення в кільці $3<|z|<5$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-5}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-3}=-\frac{1}{10}\,\frac{1}{1-z/5}-\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-3/z}=$$

$$=-\frac{1}{10}\left(1+\frac{z}{5}+\frac{z^2}{5^2}+\ldots+\frac{z^n}{5^n}+\ldots\right)-\frac{1}{2z}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\ldots+\frac{3^n}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}\right].$$

3 Розвинення в області $|z|>5$:

$$f(z)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-5}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-3}=\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-5/z}-\frac{1}{2z}\,\frac{1}{1-3/z}=$$

$$=\frac{1}{2z}\left(1+\frac{5}{z}+\frac{5^2}{z^2}+\ldots+\frac{5^n}{z^n}+\ldots\right)-\frac{1}{2z}\left(1+\frac{3}{z}+\ldots+\frac{3^n}{z^n}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}[5^n-3^n]\frac{1}{z^{n+1}}.$$

Отже, в крузі $|z|<3$ ряд Лорана виявився рядом Тейлора, тобто в нього є тільки правильна частина; в кільці $3<|z|<5$ ряд Лорана функції $f(z)$ має правильну й головну частини, а в кільці $|z|>5$ — тільки головну частину.

Усі розвинення було одержано без використання формули (14.77); в даному прикладі ми скористалися формулою суми збіжної геометричної прогресії.

14.8 ЛИШКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції $f(z)$ і C — довільний замкнений контур, який містить усередині точку z_0, малий настільки, що в ньому немає інших особливих точок. Тоді функція $f(z)$ може бути розвинена в околі $0<|z-z_0|<R$ у ряд Лорана

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{14.81}$$

який буде рівномірно збіжним на контурі C, оскільки контур C лежить в околі точки z_0.

Інтегруючи почленно ряд (14.81) уздовж лінії C, дістанемо

$$\oint_C f(z)\,dz = c_{-1}\,2\pi i, \tag{14.82}$$

оскільки з попереднього відомо (див. теореми 14.5 та 14.8), що

$$\oint_C (z-z_0)^m\,dz = 0,\quad m=0;\,1;\,2;\,\ldots;\quad \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}=0,\quad n=2;\,3;\,\ldots;$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)} = 2\pi i.$$

➡ **Означення 14.13**. *Значення інтеграла* $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$ *будемо називати* ***лишком*** *функції* $f(z)$ *відносно особливої точки* z_0 *і позначати* $\operatorname{Res}[f(z),z_0]$.

Згідно з рівністю (14.82)

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz. \tag{14.83}$$

Звідси випливає, що лишок c_{-1} може бути відмінним від нуля тільки в тому випадку, коли z_0 є полюсом або істотно особливою точкою. Для правильної або усувної особливої точки лишок дорівнює нулю.

Теорема 14.21 (основна теорема про лишки). Нехай $f(z)$ — аналітична функція в області D за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$, які лежать усередині області $D' \subset D$, обмеженої кусково-гладким замкненим контуром L. Тоді

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \qquad (14.84)$$

Доведення

Опишемо з точок $z_1, z_2, .., z_n$ як із центрів кола $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ настільки малих радіусів, щоб вони не перетиналися попарно й цілком лежали всередині L (рис. 14.12). Тоді функція $f(z)$ буде голоморфною в кожній точці замкненої області, обмеженої складним контуром

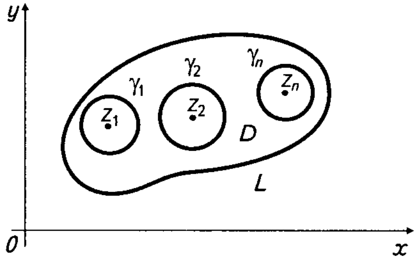

Рис. 14.12

$$\Gamma = L + \gamma_1^- + \gamma_2^- + \ldots + \gamma_n^-,$$

де γ_i^- означає, що контур γ_i обходиться за годинниковою стрілкою.

За теоремою (14.7)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_n} f(z)dz, \quad (14.85)$$

де інтегрування здійснюється вздовж контурів $L, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ у додатному напрямі. Рівність (14.85) і доводить основну теорему про лишки, оскільки в правій частині цієї рівності стоять лишки функції $f(z)$, що відповідають точкам $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

14.8.1. Обчислення лишків

Для того щоб знайти лишок функції $f(z)$ відносно ізольованої особливої точки, потрібно розвинути $f(z)$ у ряд Лорана й визначити коефіцієнт c_{-1} у цьому розвиненні. Проте якщо ізольована особлива точка є полюсом, то лишок відносно цієї точки можна визначити без розвинення в ряд Лорана.

1. Нехай z_0 — простий полюс функції $f(z)$. Тоді розвинення в ряд Лорана матиме вигляд

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}. \qquad (14.86)$$

Домноживши рівність (14.86) на $z - z_0$, дістанемо

$$(z-z_0)f(z)=c_{-1}+c_0(z-z_0)+c_1(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^{n+1}+\ldots$$

Оскільки права частина цієї рівності є степеневим рядом, то його сума — неперервна функція в точці z_0. Перейшовши до границі при $z \to z_0$, матимемо

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0]=c_{-1}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \qquad (14.87)$$

Якщо z_0 — простий полюс функції $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ — голоморфні функції в точці z_0, причому $\varphi(z_0)\neq 0, \psi(z_0)=0, \psi'(z_0)\neq 0$, то за формулою (14.87) дістанемо

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0]=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (14.88)$$

Справді, за формулою (14.87)

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \quad (\psi(z_0)=0).$$

2. Якщо z_0 — полюс функції $f(z)$ кратності m, то ряд Лорана для $f(z)$ має вигляд

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $(z - z_0)^m$ і результат продиференціюємо $(m - 1)$ разів по z. Тоді

$$c_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}. \qquad (14.89)$$

Формула (14.89) дає змогу обчислити лишок функції відносно полюса z_0 кратності m.

3. Якщо нескінченно віддалена точка є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, то лишок відносно такої точки буде

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z)\, dz, \tag{14.90}$$

де C^- — довільний замкнений контур C, який лежить в околі точки $z = \infty$ і обходиться за годинниковою стрілкою (наприклад, C може бути колом досить великого радіуса).

В околі нескінченно віддаленої точки ряд Лорана для функції $f(z)$ матиме вигляд

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

Оскільки даний ряд збігається рівномірно на контурі C, то його можна почленно інтегрувати вздовж C^-.

Зазначимо, що після інтегрування всі члени ряду, крім другого, перетворяться в нуль. Отже,

$$\int_{C^-} f(z)\, dz = c_{-1} \int_{C^-} \frac{dz}{z} = -c_{-1}\, 2\pi i.$$

Звідси

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(z) dz = -c_{-1}, \tag{14.91}$$

тобто лишок відносно нескінченно віддаленої точки дорівнює коефіцієнтові $(-c_{-1})$ ряду Лорана. Використовуючи формули (14.90) і (14.91) та рівність (14.85), можна довести теорему.

Теорема 14.22. Якщо функція $f(z)$ аналітична на повній комплексній площині всюди, крім скінченного числа n ізольованих особливих точок, серед яких є й нескінченно віддалена точка, то сума всіх лишків у ізольованих особливих точках дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0. \tag{14.92}$$

Формула (14.92) випливає з рівності (14.85), якщо за контур L взяти контур C з околу нескінченно віддаленої точки такий, що всі інші скінченні особливі точки лежать усередині контура C.

Із (14.92) випливає, що

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \tag{14.93}$$

14.8.2. Логарифмічний лишок

Нехай $f(z)$ — аналітична функція в області, обмеженій замкненим кусково-гладким контуром L за винятком скінченного числа полюсів усередині контура L, і не дорівнює нулю на L. Позначимо $a_1, a_2, \ldots, a_k$ нулі $f(z)$ усередині контура L і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — порядки цих нулів, а через $b_1, b_2, \ldots, b_m$ і $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ — відповідно полюси $f(z)$ усередині L і порядки цих полюсів. Тоді для довільної функції $\varphi(z)$, аналітичної всередині контура L та на L, справджується формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{m}\beta_j\varphi(b_j). \qquad (14.94)$$

Якщо у формулі (14.94) взяти $\varphi(z) = 1$, то дістанемо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i - \sum_{j=1}^{m}\beta_j. \qquad (14.95)$$

➡ **Означення 14.14.** *Інтеграл* $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ *називають* ***логарифмічним лишком*** *функції* $f(z)$ *відносно контура* L.

Із формули (14.95) випливає, що логарифмічний лишок функції відносно контура L дорівнює різниці між числом нулів та числом полюсів $f(z)$ усередині L, причому кожний нуль і полюс рахуються стільки разів, яка їхня кратність.

14.8.3. Застосування лишків до обчислення інтегралів

Інтеграли від функцій комплексної змінної. Якщо $f(z)$ — аналітична функція всередині області D, обмеженої контуром L, за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$, які лежать у D, то

$$\int_L f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z), z_k]. \qquad (14.96)$$

■ **Приклад 14.16.** *Обчислити інтеграл* $\int_{|z|=1}\frac{dz}{\sin z}$.

Точка $z = 0$ є єдиним простим полюсом функції $\frac{1}{\sin z}$ в області $|z| \le 1$, тоді

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{\sin z}, 0\right] = \lim_{z\to 0}\frac{1}{\sin z}z = 1.$$

Згідно з формулою (14.96) дістанемо $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\sin z} = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i.$

Теореми про лишки дають змогу обчислювати визначені інтеграли від функцій дійсної змінної.

Інтеграли вигляду $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} R(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$. Розглянемо інтеграл

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin\,\theta, \cos\,\theta)d\theta, \tag{14.97}$$

де R — раціональна функція своїх аргументів, обмежена всередині проміжку інтегрування. Зробимо заміну $z = e^{i\theta}$. Тоді

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\;\; \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\;\; d\theta = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}.$$

Коли θ змінюється від 0 до 2π, комплексна змінна z пробігає замкнений контур $|z| = 1$ у додатному напрямі. При цьому інтеграл (14.97) переходить в інтеграл по замкненому контуру від функції комплексної змінної:

$$I = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z}R\left[z + \frac{1}{z},\; z - \frac{1}{z}\right]dz = \int\limits_{|z|=1}R_1(z)\,dz,$$

де $R_1(z)$ — раціональна функція від z, яка має тільки полюси, і інтеграл I можна обчислити згідно з теоремою про лишки за формулою (14.96).

■ **Приклад 14.17**. *Обчислити інтеграл* $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x}{4 + 2\cos\,x}dx.$

Зробимо заміну $z = e^{ix}$, $\cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $dx = \dfrac{1}{i}\dfrac{dz}{z}$. Тоді

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x}{4+2\cos\,x}dx = \frac{1}{4i}\int\limits_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2+4z+1)}dz.$$

Особливими точками підінтегральної функції $f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2+4z+1)}$ є нулі знаменника: $z_1 = 0$, $z_2 = -2+\sqrt{3}$, які лежать усередині круга $|z| = 1$. Оскільки $z_1 = 0$ — полюс кратності 2, то згідно з формулою (14.89)

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2+1)^2}{z^2+4z+1}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z(z^2+1)(z^2+4z+1)-(2z+4)(z^2+1)^2}{(z^2+4z+1)^2}=-4.$$

Лишок у полюсі $z_2=-2+\sqrt{3}$ знаходимо за формулою (14.88):

$$\operatorname{Res}[f(z),-2+\sqrt{3}]=\lim_{z\to -2+\sqrt{3}}\frac{(z^2+1)^2}{z^2(z+2+\sqrt{3})}=-\frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Отже,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 x}{4+2\cos x}dx=2\pi i\frac{1}{4i}\left(-4+\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)=-2\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi.$$

Інтеграли від швидкоспадних на нескінченності функцій. Якщо функцію $f(x)$ можна аналітично продовжити на півплощину $\operatorname{Im} z>0$, причому продовжена функція $f(z)$ аналітична у верхній півплощині за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок z_1, z_2, ..., z_n, і для всіх $|z|>R$ виконується оцінка $|f(z)|<M/|z|^{1+\delta}$ (M та $\delta>0$ — сталі), то справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]. \tag{14.98}$$

■ **Приклад 14.18.** *Обчислити інтеграл* $I=\int_0^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+16}dx.$

Оскільки функція $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^4+16}$ парна, то

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+16}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+16}dx.$$

Аналітичне продовження функції $f(x)$ на верхню півплощину — функція $f(z)=(z^2+2)/(z^4+16)$ — має у верхній півплощині два полюси в точках

$$z_k=\sqrt[4]{-16}=2e^{(\pi i+i2k\pi)/4},\quad k=0;1.$$

Застосовуючи формулу (14.92), дістанемо

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+16}dx=\pi i\sum_{k=0}^{1}\operatorname{Res}\left[\frac{z^2+2}{z^4+16},\ z_k\right]=$$

$$=\pi i\left[\frac{4e^{\pi i/2}+2}{4\cdot 2^3e^{3\pi i/4}}+\frac{4e^{6\pi i/4}+2}{4\cdot 2^3e^{9\pi i/4}}\right]=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

14.8.4. Лема Жордана та її застосування

Лема 14.1 (Жордана). Нехай функція $f(z)$ аналітична в півплощині $\operatorname{Im} z > 0$ за винятком точок $z_1, z_2, \ldots, z_n$ і рівномірна відносно $\arg z$, $0 \le \arg z < \pi$, $|f(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Для $\lambda > 0$ справедливе співвідношення

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{i\lambda\eta} f(\eta)\, d\eta = 0,$$

де C_R — півколо $|z| = R$ радіусом R, що лежить у верхній півплощині.

Доведення

З умови леми випливає, що $|f(\eta)| \le \mu_R$ при $|\eta| = R$, де $\mu_R \to 0$ при $R \to \infty$. Зробимо заміну $\eta = Re^{i\theta}$. Тоді

$$\int_{C_R} e^{i\lambda\eta} f(\eta) d\eta = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\lambda R(\cos\theta + \sin\theta)} Rie^{i\theta}\, d\theta.$$

Оскільки функція $\sin\theta$ симетрична відносно точки $\theta = \pi/2$ і виконується нерівність $\sin\theta > 2\theta/\pi$ для $0 < \theta < \pi/2$, то

$$\left| \int_{C_R} e^{i\lambda\eta} f(\eta) d\eta \right| \le \mu_R R \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin\theta}\, d\theta = 2\mu_R R \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R\sin\theta}\, d\theta \le$$

$$\le 2R\mu_R \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R\theta/\pi} d\theta = -\frac{2\pi R\mu_R}{2\lambda R} e^{-2\lambda R\theta/\pi}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R})\mu_R \to 0$$

при $R \to \infty$, що й доводить лему.

■ **Приклад 14.19**. *Обчислити інтеграл* $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+4} dx.$

Введемо функцію $F(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2+4}$. Дана функція є аналітичним продовженням функції $e^{i2x}/(x^2+4)$, $x \in R$, для якої $\operatorname{Re} \frac{e^{i2x}}{x^2+4} = \frac{\cos 2x}{x^2+4}$. Функція $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ така, що $|f(z)| < \frac{1}{R^2+4}$ і $|f(z)| \to 0$ при $R \to \infty$.

Розглянемо контур, що складається з відрізка $[-R, R]$ дійсної осі та півкола C_R радіусом R, яке лежить у верхній півплощині. За основною теоремою про лишки 14.21 маємо

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i2z}}{x^2+4}dx + \int_{C_R} \frac{e^{i2z}}{z^2+4}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i2z}}{z^2+4}, 2i\right] =$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 2i}\left[\frac{e^{i2z}}{z^2+4}(z-2i)\right] = 2\pi i \frac{e^{i2\cdot 2i}}{2i+2i} = \frac{\pi}{2}e^{-4}.$$

Отже, $I = \frac{\pi}{2}e^{-4}$.

14.9 ПОНЯТТЯ КОНФОРМНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Поняття конформного відображення належить до найважливіших понять математики. Воно застосовується у фізиці, механіці, геофізиці, гідрогеології, теплофізиці тощо. Методом конформних відображень з успіхом розв'язуються плоскі задачі гідро- й аеродинаміки, теорії пружності, теорії електростатичного, магнітостатичного й теплового полів.

14.9.1. Геометричний зміст аргументу й модуля похідної аналітичної функції

Нехай $w = f(z)$ — аналітична функція, яка здійснює взаємно однозначне відображення області D комплексної площини z на область G площини w.

Проведемо через будь-яку точку $z_0 \in D$ довільну гладку криву γ_1, всі точки якої належать області D.

Нехай функція $w = f(z)$ перетворює точку z_0 на точку $w_0 = f(z_0)$ комплексної площини w, а криву γ_1 — на деяку криву Γ_1, яка лежить в області G і проходить через точку w_0 (рис. 14.13).

Припустимо, що $f'(z_0) \neq 0$, і зобразимо комплексне число $f'(z_0)$ у показниковій формі:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = ke^{i\theta},$$

де $\theta = \arg f'(z_0)$, $k = |f'(z_0)| \neq 0$.

Виберемо такий спосіб прямування Δz до нуля, при якому точки $z = z_0 + \Delta z$ лежать на кривій γ_1. Очевидно, відповідні їм точки $w = w_0 + \Delta w$ лежать на кривій Γ_1. Комплексні числа Δz і Δw зображa-

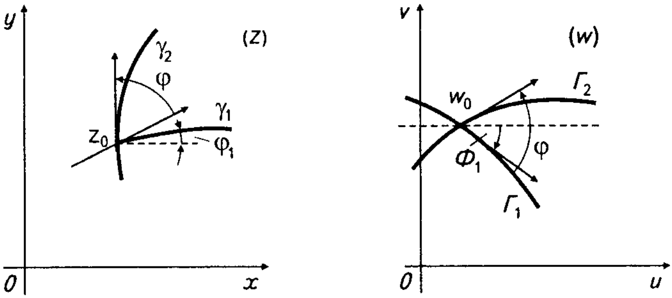

Рис. 14.13

ються векторами січних до кривих γ_1 і Γ_1 відповідно. Зауважимо, що $\arg \Delta z$ і $\arg \Delta w$ мають геометричний зміст кутів відповідних векторів із додатними напрямами осей O_x і O_y, а $|\Delta z|$ і $|\Delta w|$ є довжинами цих векторів. При $\Delta z \to 0$ вектори січних переходять у вектори дотичних до відповідних кривих. Оскільки при діленні комплексних чисел їхні аргументи віднімаються, то на підставі визначення θ маємо

$$\theta = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1, \qquad (14.99)$$

де Φ_1 і φ_1 — кути, які утворюють дотичні до кривих Γ_1 і γ_1 у точках w_0 і z_0 відповідно з додатними напрямами дійсних осей на комплексних площинах w і z. Із рівності (14.99) випливає, що θ — це кут, на який повертається дотична до кривої γ_1 у точці z_0 при відображенні $w = f(z)$.

Для другої пари кривих Γ_2 і γ_2 у тих самих точках w_0 і z_0 також дістанемо $\Phi_2 - \varphi_2 = \theta$. Отже,

$$\theta = \Phi_1 - \varphi_2 = \Phi_2 - \varphi_2, \qquad (14.100)$$

і цей кут залежить лише від функції $w = f(z)$ і точки z_0 (відповідно w_0). Це означає, що θ — це кут, на який повертається достатньо малий окіл точки z_0 у площині z при відображенні її на площину w за допомогою функції $w = f(z)$.

Із рівності (14.100) також випливає, що $\Phi_1 - \Phi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, тобто, якщо криві γ_1 і γ_2 утворюють у точці z_0 на площині z кут φ, то такий самий кут φ утворюватимуть у точці w_0 криві Γ_1 і Γ_2 — відображення кривих γ_1 і γ_2 — на площині w (див. рис. 14.13). Таку властивість відображення, яке здійснюється аналітичною функцією $w = f(z)$, називають *властивістю збереження кутів*. Зауважимо, що при цьому зберігаються не тільки абсолютна вартість кутів між кривими γ_1 і γ_2 та їх образами, а й напрям кутів.

Для модуля похідної, очевидно,

$$k = \lim_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, \tag{14.101}$$

тобто k — це границя відношення довжин векторів Δw і Δz при переміщенні точок w і z уздовж кривих Γ і γ відповідно в точки w_0 і z_0.

Величина $\left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ показує, в якому відношенні змінюється відстань між точками z_0 і $z = z_0 + \Delta z$ при відображенні їх у точках w_0 і $w = w_0 + \Delta w$. Тому величину $k = |f'(z_0)|$ природно назвати *коефіцієнтом розтягу* в точці z_0 при відображенні площини z на площину w за допомогою функції $w = f(z)$ (при $k > 1$ має місце розтягання у власному розумінні цього слова, а при $k < 1$ — стиснення). З (14.101) випливає, що коефіцієнт розтягу в даній точці z_0 у всіх напрямах, які виходять із неї, сталий і залежить лише від функції $w = f(z)$, котра здійснює відображення.

Таким чином, можна сказати, що аналітична функція $w = f(z)$ відображає нескінченно малі кола з центром у точці z_0 подібним чином, тобто в кола, причому $|f'(z_0)|$ визначає коефіцієнт подібності. Така властивість відображення називається *властивістю сталості розтягу.*

Отже, взаємно однозначне відображення околу точки z_0 на окіл точки w_0, яке здійснюється аналітичною функцією $w = f(z)$ із $f'(z_0) \neq 0$, має в точці z_0 властивості збереження кутів і сталості розтягу. Таке відображення називають ***конформним відображенням*** у точці z_0.

Конформне відображення, при якому зберігається не тільки абсолютна вартість кутів між кривими, а й їхній напрям, називається *конформним відображенням першого роду*, якщо напрям відліку кутів змінюється на протилежний, — *конформним відображенням другого роду.* Отже, розглянуте вище відображення за допомогою аналітичної однолистної функції є конформним відображенням першого роду.

Неважко показати, що конформне відображення другого роду здійснюється функціями комплексної змінної, які є комплексно-спряженими аналітичним однолистним функціям з відмінною від нуля похідною.

Будь-яка область D, у котрій дана аналітична функція однолистна, за допомогою цієї функції конформно відображається на деяку область G. Таке конформне відображення є геометричною ілюстрацією даної функції.

Розглянемо деякі приклади конформних відображень, які здійснюються елементарними функціями комплексної змінної.

■ **Приклад 14.20**. *Відображення за допомогою лінійної функції $w = az + b$, де a та b — сталі комплексні числа, причому $a \neq 0$.*

Ця функція визначена на всій комплексній площині z і однозначна на ній. Обернена функція $z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}$ має ті самі властивості на площині w. Отже, $w = az + b$ — однолистна функція в усіх точках площини z, яка встановлює взаємно однозначну відповідність між площинами z і w.

Зобразимо w, a, і z у показниковій формі: $w = |w|e^{i\beta}$, $a = |a|e^{i\alpha}$, $z = |z|e^{i\varphi}$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $b = 0$. При цьому $w = az = |a||z|e^{i(\varphi+\alpha)}$, звідки $|w| = |a||z|$, $\beta = \varphi + \alpha$. Тепер геометричний зміст перетворення $w = az$ очевидний: це подібний розтяг площини z в $|a|$ разів і поворот цієї площини як цілого навколо точки $z = 0$ на кут $\alpha = \arg a$.

При $b \neq 0$ до цього перетворення додається ще зсув точок площини на величину $|b|$ у напрямі вектора $\bar{b}$, який зображає комплексне число b.

Таким чином, лінійна функція $w = az + b$ перетворює комплексну площину z на комплексну площину w шляхом подібного розтягання, повороту й зсуву; і оскільки функція $w = az + b$ однолистна, а $w' = a \neq 0$, то це перетворення конформне.

■ **Приклад 14.21**. *Відображення за допомогою степеневої функції $w = z^n$, де $n > 1$ ціле.*

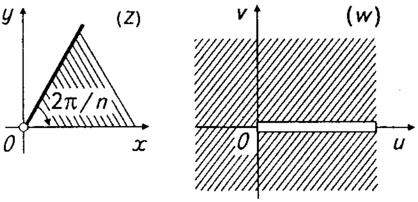

Рис. 14.14

Ця функція визначена на всій комплексній площині.

Використання показникової форми запису комплексних чисел $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\beta}$ дає змогу подати функцію $w = z^n$ у вигляді рівностей $|w| = |z|e^{i\varphi}$, $\beta = n\varphi$ і встановити, що кут $0 < \varphi < 2\pi/n$ площини z із вершиною в початку координат відображається на повну площину w, розрізану по дійсній півосі (рис. 14.14). При цьому промінь $\varphi = 0$ відображається на верхній край розрізу ($\beta = 0$), а промінь $\varphi = 2\pi/n$ — на його нижній край ($\beta = 2\pi$). Таким чином, функція $w = z^n$ усередині кута $0 < \varphi < 2\pi/n$ площини z однолистна. Так само вона однолистна всередині будь-якого кута $\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n}$ ($k = 1; 2; \ldots; n-1$) площини z. Крім того, похідна цієї функції $w' = nz^{n-1}$ у всіх точках, крім $z = \infty$, існує й при $z \neq 0$ відмінна від нуля. Отже, при $z \neq 0$ і $z \neq \infty$ відображення, яке здійснює функція $w = z^n$ у кожному з указаних кутів, є конформним.

Якщо кут менший за вказаний, то, природно, він буде відображеним лише на частину площини w. Так, зокрема, функція $w = z^2$ відображає першу координатну чверть $0 < \varphi < \pi/2$ комплексної площини z на верхню півплощину w ($\operatorname{Im} w > 0$). Ця сама функція $w = z^2$ відображає всю верхню півплощину z ($\operatorname{Im} z > 0$) на площину w, розрізану по дійсній додатній півосі. В точках $z = 0$ і $z = \infty$ відображення $w = z^2$ втрачає конформність.

■ **Приклад 14.22.** *Відображення за допомогою функції $w = e^z$.*

Із зображення $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ випливає, що функція $w = e^z$ кожному комплексному числу $z = x + iy$ ставить у відповідність комплексне число w, модуль якого e^x, а аргумент y. Це означає, що показникова функція $w = e^z$ здійснює відображення прямої $y = y_0$ площини z на промінь $\arg w = y_0$ площини w. Легко побачити, що смуга площини z, яка обмежена прямими $y = 0$ і $y = 2\pi$, перейде в повну площину w, розрізану вздовж додатної частини дійсної осі u. При цьому встановлюється взаємно однозначне відображення відкритої області $0 < y < 2\pi$ на площину w, розрізану вздовж додатної частини дійсної осі u. Граничні прямі $y = 0$ і $y = 2\pi$ смуги $0 < y < 2\pi$ відображаються на відповідно верхній і нижній краї розрізу. Таким чином, функція $w = e^z$ при $0 \le y \le 2\pi$ однолиста. Так само вона є однолистою в будь-якій смузі $y_0 \le y \le y_0 + 2\pi$ площини z, і оскільки $w' = e^z \neq 0$ й існує при всіх z, то відображення, що здійснює ця функція в указаній смузі, конформне.

Якщо $0 < y_1 < 2\pi$, то півпряма $y = y_1 = \text{const}$, $x < 0$ перетворюється функцією $w = e^z$ на одиничний відрізок OA ($|OA| = 1$) променя $\arg w = y_1$

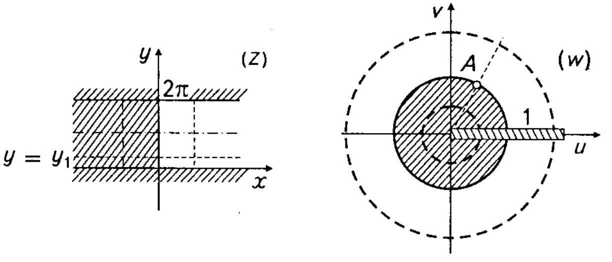

Рис. 14.15

(рис. 14.15); півпряма $y = y_1 = \text{const}$, $x \ge 0$ — на решту променя. Це означає, що півсмуга $0 < y < 2\pi$ площини z при $x < 0$ відображається функцією $w = e^z$ на одиничний круг із розрізом уздовж відрізка $[0; 1]$ дійсної осі Ou.

Ця сама смуга при $x > 0$ відображається на зовнішню частину одиничного кола також із розрізом уздовж дійсної півосі Ou (рис. 14.15).

Приклади 14.21 і 14.22 показують, що існують функції комплексної змінної, які є конформними тільки на частині комплексної площини. На всій комплексній площині вони є неоднолистними й втрачають конформність. Не є конформними також многозначні функції.

■ **Приклад 14.23**. Аналітична функція $w = z^4$ однолистна в першій чверті комплексної площини z, $0 < \arg z < \pi/2$ оскільки вона здійснює взаємно однозначне відображення цієї області на всю площину w, розрізану по додатній частині дійсної осі Ou $(w = u + iv)$. Похідна цієї функції $w' = 4z^3$ у всіх точках, крім $z = \infty$, існує й при $z \neq 0$ відмінна від нуля. Отже, при $z \neq 0$ і $z \neq \infty$ відображення, яке здійснює функція $w = z^4$, у цьому разі конформне. Але ця ж аналітична функція $w = z^4$, якщо вона розглядається в півплощині $\operatorname{Im} z > 0$, не є однолистною. Так, півкільце $1 \leq |z| \leq 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ за допомогою функції $w = z^4$ відображається на множину $1 \leq |w| \leq 16$, $0 \leq \arg w \leq 4\pi$, яка є двічі покритим кільцем $1 \leq |w| \leq 16$ на площині w, що порушує взаємно однозначну відповідність. Отже, відображення в цьому разі не є конформним.

14.9.2. Основна задача теорії комформних відображень

Для практичних цілей значний інтерес становить так звана *основна задача теорії конформних відображень: задано області D і G, потрібно знайти функцію, яка здійснює конформне відображення однієї області на іншу.*

■ **Приклад 14.24**. *Побудувати функцію, яка відображає площину z із розрізом уздовж від'ємної частини дійсної осі* $(-\infty < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0)$ *на смугу $-\pi < v < \pi$ у площині w (при $w = u + iv$).*

Згідно з результатами, одержаними в прикладі 14.22, функція $w = e^z$ конформно відображає смугу $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$ на площину w із розрізом по променю $\arg w = y_0$.

Для розв'язання даної задачі, очевидно, слід розглянути обернене відображення смуги $v_0 \leq v \leq v_0 + 2\pi$ площини w за умови $v_0 = -\pi$ на всю площину z з розрізом по променю $\arg z_0 = v_0 = -\pi$. Таке відображення реалізує функція $z = e^w$. Тому відображення, яке необхідне за умовою задачі, дає функція $w = \ln z = \ln|z| + i \arg z$.

Перевіримо взаємно однозначну відповідність границь відповідних областей (14.16). Коли точка z пробігає по нижньому краю l_1 розрізу від

$x = -\infty$ до $x = 0$, то в площині w відповідна точка описує лінію $l_1'(z = -\pi)$ від $u = +\infty$ до $u = -\infty$, тобто всю нижню границю смуги $-\pi < n < \pi$. Коли точка z пробігає по верхньому краю l_2 розрізу від $x = 0$ до $x = -\infty$, то в

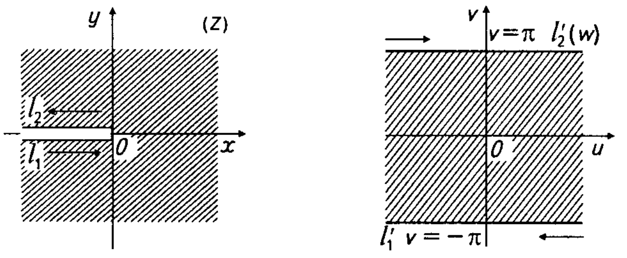

Рис. 14.16

площині w відповідна точка описує лінію l_2' $(v = -\pi + 2\pi = \pi)$ від $u = -\infty$ до $u = +\infty$, тобто всю верхню границю тієї самої смуги. Тому область D на площині z і відповідна її область G на площині w залишаються при обході контура з того самого боку (праворуч); інакше кажучи, напрям відліку кутів зберігається.

Для розв'язання основної задачі теорії конформних відображень не має достатньо простого алгоритму. В разі потреби можна познайомитися з відповідною теорією у спеціалізованих підручниках із теорії функцій комплексної змінної.

Глава 15 ОСНОВИ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

15.1 ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ Й ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Для розв'язання багатьох фізичних задач необхідно знайти ту чи іншу функціональну залежність, наприклад залежність деякої фізичної величини від часу, від координат точки простору тощо. Безпосередньо визначити таку залежність буває складно або й неможливо; в такому разі ставиться задача: знайти зв'язок між шуканою функцією та її похідними, тобто скласти диференціальне рівняння, яке задовольняє ця функція.

Якщо шукана функція залежить лише від однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння, яке задовольняє ця функція, є *звичайним диференціальним рівнянням.*

Якщо ж шукана функція залежить від двох або більшого числа незалежних змінних, то диференціальне рівняння містить, крім самої невідомої функції, також її частинні похідні за незалежними змінними. Таке рівняння називають *диференціальним рівнянням із частинними похідними.*

15.1.1. Основні означення

➡ **Означення 15.1.** ***Диференціальним рівнянням із частинними похідними*** *називають рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, їх функцію та частинні похідні від цієї функції.* Наприклад,

$$u_x + u_y = 0, \quad yu_x - xu_y = 0; \tag{15.1}$$

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x = 0, \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{15.2}$$

де u — шукана функція; x, y, z — незалежні змінні (тут і надалі будемо використовувати такі позначення для частинних похідних: $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$ тощо).

➡ **Означення 15.2.** *Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називають **порядком диференціального рівняння з частинними похідними**.* Так, рівняння (15.1) є рівняннями першого порядку, а (15.2) — другого.

Загальний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними такий:

$$F(x, y, u(x, y), u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

➡ **Означення 15.3.** *Диференціальне рівняння з частинними похідними називають **лінійним**, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та її частинних похідних.*

Лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними має такий загальний вигляд:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Gu = F, \tag{15.3}$$

де $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, ..., $F = F(x, y)$ — задані функції незалежних змінних x і y.

➡ **Означення 15.4.** *Якщо в рівнянні (15.3) $F(x, y) = 0$, то таке диференціальне рівняння з частинними похідними називають **лінійним однорідним**. Якщо коефіцієнти A, B, ..., G рівняння сталі, то рівняння (15.3) називають **лінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами**.*

➡ **Означення 15.5.** *Диференціальне рівняння з частинними похідними називають **квазілінійним**, якщо воно лінійне відносно похідних найвищого порядку.*

Згідно з означенням загальний вигляд квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними такий:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{15.4}$$

➡ **Означення 15.6.** ***Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними** називають усяку функцію, яка при підставленні в диференціальне рівняння замість шуканої функції перетворює його на тотожність за незалежними змінними.*

■ **Приклад 15.1.** *Розглянемо рівняння*

$$u_y = f(y), \tag{15.5}$$

де $f(y)$ — відома функція, а шукана функція u залежить від двох змінних x і y.

Усі функції $u(x, y)$, які задовольняють рівняння (15.5), мають вигляд

$$u(x, y) = \int f(y)\, dy + \psi(x) \tag{15.6}$$

($\psi(x)$ — довільна функція від x). Це можна перевірити, продиференціювавши обидві частини рівності (15.6) по y.

Розв'язок (15.6) рівняння (15.5) містить довільну функцію $\psi(x)$. У цьому полягає докорінна відмінність розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку (15.5) від загального розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння $u'_y = f(y)$, який має вигляд $u(y) = \int f(y)\, dy + C$ і містить лише довільну сталу (тут і надалі скорочене позначення звичайної похідної будемо відрізняти від позначення частинної похідної за наявністю штрихів: $u'_y = \dfrac{du}{dy}$, $u''_y = \dfrac{d^2u}{dy^2}$ тощо).

■ **Приклад 15.2.** *Розв'язати диференціальне рівняння*

$$u_{yy} = 0,$$

де $u = u(x, y)$.

Ураховуючи означення другої похідної $u_{yy} = (u_y)_y$, дане рівняння можна подати у вигляді $(u_y)_y = 0$. Такий запис рівняння дає змогу встановити, що u_y не залежить від y, тобто $u_y = C_1$, де C_1 — довільна величина, яка не залежить від y. Проте C_1 може залежати від x, оскільки шукана функція u за умовою залежить від двох змінних: x і y. Отже, $u_y = C_1(x)$, де $C_1(x)$ — довільна функція від x.

Інтегруючи по y цю рівність, знайдемо: $u = C_1(x)y + C_2$, де C_2 — величина, яка не залежить від y. З огляду на залежність u від x і y величина C_2 може бути функцією від x. Таким чином, розв'язок даного рівняння $u = C_1(x)y + C_2(x)$ містить дві довільні функції.

У розглянутих прикладах ми мали справу з найпростішими диференціальними рівняннями з частинними похідними, розв'язки яких майже очевидні. Для розв'язання складніших диференціальних рівнянь з частинними похідними потрібні інші методи. Далі в цій главі викладатимуться основи деяких із них.

15.1.2. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння з частинними похідними першого порядку з двома незалежними змінними, загальний вигляд якого такий:

$$X_1 u_x + X_2 u_y = 0, \tag{15.7}$$

де $u(x, y)$ — шукана функція; X_1, X_2 — відомі функції незалежних змінних x і y. Припускатимемо, що функції X_1 і X_2 є неперервними разом зі своїми частинними похідними першого порядку й принаймні одна з функцій X_1, X_2 не дорівнює тотожно нулю.

Потреба в розв'язанні рівнянь типу (15.7) виникає в пп. 15.3, 15.4 при зведенні диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку до найпростішого (канонічного) вигляду й, як наслідок, при розв'язанні деяких із них методом характеристик.

Для відшукання розв'язку рівняння (15.7) розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2}. \tag{15.8}$$

Згідно з теоремою про існування й єдиність розв'язку звичайного диференціального рівняння першого порядку розв'язок рівняння (15.8) за умов, накладених на X_1, X_2, існує. Нехай

$$\varphi(x, y) = C \tag{15.9}$$

— загальний інтеграл рівняння (15.8). За означенням загального інтеграла функція $\varphi(x, y)$, яка не є тотожно сталою, після підставлення в неї будь-якого розв'язку рівняння (15.8) перетворюється на сталу величину.

Отже, припустимо, що x — незалежна змінна, а y — функція від x, яка є розв'язком рівняння (15.8). Підставимо цю функцію у вираз $\varphi(x, y)$. В результаті він за вказаною властивістю загального інтеграла (15.9) втрачає залежність і від y, і від x. А це означає, що повний диференціал від $\varphi(x, y)$ в такому разі тотожно дорівнює нулю:

$$\varphi_x \, dx + \varphi_y \, dy \equiv 0. \tag{15.10}$$

Рівність (15.10) одержано з використанням замість y розв'язку рівняння (15.8). Тому диференціали dx і dy в (15.10) мають бути пропорційними згідно з (15.8) величинам X_1 і X_2. Це дає змогу замінити в (15.10) dx і dy на X_1 і X_2 і дістати

$$X_1 \varphi_x + X_2 \varphi_y \equiv 0. \tag{15.11}$$

Порівнюючи вирази (15.11) та (15.7), помічаємо, що рівняння (15.7) перетворюється на тотожність у разі підставлення функції $\varphi(x, y)$ замість $u(x, y)$. Отже, функція $\varphi(x, y)$ є розв'язком рівняння (15.7).

◆ ***Висновок**. Якщо $\varphi(x,y)=C$ — загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння (15.8), то функція $\varphi(x,y)$ є розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними (15.7).*

Справедливе й обернене твердження: якщо $u=\varphi(x,y)$ — будь-який розв'язок рівняння (15.7), то $\varphi(x,y)=C$ — загальний інтеграл рівняння (15.8).

Справді, підставимо у $\varphi(x,y)$ замість y будь-який розв'язок рівняння (15.8) й обчислимо повний диференціал одержаної функції:

$$d\varphi(x,y)=\varphi_x\,dx+\varphi_y\,dy. \qquad (15.12)$$

Відтак маємо право, враховуючи рівність (15.8), замінити в (15.12) dx на λX_1, а dy — на λX_2, де λ — коефіцієнт пропорційності. Тоді вираз для $d\varphi$ запишеться так:

$$d\varphi=\lambda(X_1\varphi_x+X_2\varphi_y). \qquad (15.13)$$

Але φ, за припущенням, справджує рівняння (15.7), тобто

$$X_1\varphi_x+X_2\varphi_y\equiv 0.$$

Звідси і з (15.13) маємо, що $d\varphi(x,y)\equiv 0$. Як відомо, форма першого диференціала не змінюється при переході до інших змінних, або, як кажуть, є інваріантною. Підставивши у $\varphi(x,y)$ розв'язок рівняння (15.8), дістали функцію однієї змінної, в даному разі x, і, як виявилось, її диференціал дорівнює нулю. Інакше кажучи, ми здобули функцію φ, яка не залежить ні від y, ні від x, тобто є сталою. А це означає, що $\varphi(x,y)=C$ — загальний інтеграл рівняння (15.8).

У результаті проведеного дослідження маємо *п р а в и л о: для того щоб знайти розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними (15.7), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (15.8) і визначити його загальний інтеграл $\varphi(x,y)=C$. Тоді $u=\varphi(x,y)$ буде розв'язком рівняння (15.7).*

■ **П р и к л а д 15.3**. *Розв'язати рівняння*

$$xu_x+yu_y=0. \qquad (15.14)$$

Еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$ є рівнянням із відокремленими змінними. Інтегруючи, дістанемо його загальний інтеграл $y/x=C$. Звідси розв'язком рівняння (15.14) є функція $u=y/x$.

Неважко переконатись: якщо $u=\varphi(x,y)$ є розв'язком рівняння (15.7), то $u=F[\varphi(x,y)]$, де F — будь-яка функція, також є розв'язком рівняння (15.7). Можна показати, на чому ми не зупиняємося, що при виконанні деяких умов цією формулою виражається будь-який розв'язок рівняння (15.7). Звідси дістаємо ще одне *правило інтегрування* цього рівняння: *для того щоб знайти загальний розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними (15.7), потрібно скласти еквівалентне йому звичайне диференціальне рівняння (15.8) і визначити його загальний інтеграл* $\varphi(x, y) = C$. Тоді $u = F[\varphi(x, y)]$, де F — довільна функція, буде загальним розв'язком рівняння (15.7).

Таким чином, для рівняння (15.14) у прикладі 15.3 загальним розв'язком буде функція $u = F(y/x)$, де F — довільна функція.

15.1.3. Основні рівняння математичної фізики

Означення 15.7. *Теорія математичного моделювання за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними й методи досліджень таких моделей є предметом розділу вищої математики, який називається* ***«Рівняння математичної фізики»***.

Своєю назвою математична фізика завдячує тому, що рівняння з частинними похідними, які вивчає ця дисципліна, виникли з деяких задач фізики.

У наш час коло задач, які розв'язують методами математичної фізики, надзвичайно широке. До них належать багато задач гідромеханіки, теорії фільтрації, геофізики, теорії пружності, електродинаміки, теорії коливань, теплопровідності тощо. При цьому виявляється, що одне й те саме рівняння може описувати абсолютно різні за своєю природою явища й процеси. Тому при дослідженні багатьох задач потрібно порівняно небагато видів диференціальних рівнянь із частинними похідними. Ці рівняння часто називають ***основними рівняннями математичної фізики.*** До них належать:

- *хвильове рівняння*

$$\boxed{u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t),} \qquad (15.15)$$

де a — сталий коефіцієнт; f — задана функція своїх аргументів; до розв'язання цього рівняння приходять при вивченні хвиль різних видів — пружних, звукових, електромагнітних тощо, а також інших коливальних явищ;

- *рівняння теплопровідності*

$$\boxed{u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t)} \tag{15.16}$$

[a та f — див. (15.15)]; до розв'язання цього рівняння приходять, вивчаючи процеси поширення тепла, явища дифузії, фільтрації тощо;

- *рівняння Пуассона*

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = g(x, y, z)} \tag{15.17}$$

(де $g(x, y, z)$ — задана функція) і *Лапласа*

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0;} \tag{15.18}$$

до розв'язання цих рівнянь приходять при вивченні стаціонарних (незалежних від часу) процесів поширення тепла, явищ стаціонарної дифузії, фільтрації тощо; потенціали поля тяжіння й стаціонарного електричного поля, в яких відсутні відповідно маси й електричні заряди, задовольняють рівняння Лапласа.

15.1.4. Постановка задач математичної фізики

Досліджуючи фізичні явища (процеси) за допомогою диференціальних рівнянь із частинними похідними, вивчають не саме реальне явище (процес), а деяку його *математичну модель*, від якої вимагається збереження основних рис розглядуваного явища (процесу); крім того, вона має бути настільки простою, щоб її можна було вивчати існуючими математичними методами.

Можна виділити такі основні етапи побудови математичної моделі.

I. *Вибір основної величини (або кількох величин), що характеризує явище (процес).* Як правило, ця величина (позначимо її u) є функцією просторових координат (у випадку тривимірного простору — координат x, y, z) і часу t.

II. *Виведення диференціального рівняння з частинними похідними відносно функції u на основі теоретичних передумов, за допомогою яких визначається модель, і законів збереження.*

III. *Визначення додаткових співвідношень для функції u, які характеризують явище (процес), що моделюється*; вони випливають із його фізичного змісту й дають змогу з нескінченної множини розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними вибрати єдиний — саме той, що моделює дане явище (процес). Такими додатковими співвідношеннями найчастіше є *межові (крайові) умови*, котрі має задовольняти шукана функція u на межі області, в якій вивчається явище (процес), і *початкові умови*, що визначають функцію u в момент часу, з якого починається дослідження явища (процесу).

➡ **Означення 15.8.** *Сукупність диференціального рівняння з частинними похідними й додаткових умов (межових і початкових) становить математичне формулювання фізичної задачі й називається* ***задачею математичної фізики.***

Та обставина, що задача математичної фізики має моделювати (хоча й наближено) деяке фізичне явище (процес), накладає на неї низку вимог, часто не обов'язкових для суто математичних задач. Так, задача математичної фізики вважається поставленою коректно (правильно), якщо існує її розв'язок — єдиний і стійкий.

Виконання вимог існування розв'язку задачі та його єдиності вимагає того, щоб серед даних задачі не траплялося несумісних і їх було достатньо для виділення єдиного розв'язку.

Стійкість розв'язку означає, що малим змінам в умові задачі мають відповідати малі зміни в розв'язку. Ця вимога необхідна з такої причини. В даних будь-якої конкретної задачі, добутих експериментально, завжди міститься деяка похибка, й необхідно, щоб мала похибка в даних приводила до малої похибки в розв'язку.

Питання коректності постановки задач математичної фізики належать до так званої якісної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Природно, що основною проблемою теорії «Рівнянь математичної фізики» є відшукання розв'язку задачі математичної фізики у вигляді, зручному для практики. Знаючи цей розв'язок, можна дістати кількісну характеристику процесу в будь-якій точці середовища й у будь-який момент часу.

Через обмеження в обсязі в цій главі головна увага приділяється постановці задач для основних рівнянь математичної фізики й викладенню деяких методів їх розв'язання. При необхідності глибокого вивчення теорії рівнянь математичної фізики слід звернутися до спеціальних підручників.

15.1.5. Оператор Лапласа в полярних, циліндричних і сферичних координатах

Розглянемо зображення оператора Лапласа в різних системах координат. Вони потрібні при розв'язанні рівнянь математичної фізики в областях, які мають кругову (на площині), циліндричну або сферичну (в просторі) симетрію.

Нагадаємо, що *тривимірним оператором Лапласа*, або *лапласіаном*, функції $u = u(x, y, z)$ називають вираз

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}. \tag{15.19}$$

Якщо функція u залежить лише від двох незалежних змінних $u = u(x, y)$, то оператор Лапласа такої функції

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \tag{15.20}$$

називають *двовимірним*. Принагідно зазначимо, що використання оператора Δ істотно скорочує запис основних диференціальних рівнянь математичної фізики (15.15)–(15.18). Хвильове рівняння, рівняння теплопровідності, Пуассона та Лапласа при цьому набувають відповідно такого вигляду:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f;\ \ u_t = a^2 \Delta u + f;\ \ \Delta u = g;\ \ \Delta u = 0.$$

Почнемо з двовимірного оператора Лапласа. Здійснимо заміну прямокутних координат x і y полярними r і φ за формулами

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi. \tag{15.21}$$

Якщо у функцію $u(x, y)$ замість x і y підставити вирази (15.21), то дістанемо функцію $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ змінних r і φ. Обчислимо похідні від функції u по x і y через похідні по r і φ і підставимо знайдені вирази у формулу (15.20). Це дасть змогу дістати оператор Лапласа функції u в полярних координатах.

За правилом диференціювання складеної функції маємо

$$u_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x,\ \ u_y = u_r r_y + u_\varphi \varphi_y. \tag{15.22}$$

Для відшукання частинних похідних від r і φ по x і y виразимо з формул (15.21) r і φ. Знаходимо $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, звідки

$$r_x = x/r = \cos\varphi\ \text{ і }\ r_y = y/r = \sin\varphi. \tag{15.23}$$

Оскільки $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, то

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\varphi_x = -\frac{y}{x^2} \quad \text{і} \quad \frac{1}{\cos^2\varphi}\varphi_y = \frac{1}{x}.$$

Замінюючи x і y за формулами (15.21), матимемо

$$\varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \varphi_y = \frac{\cos\varphi}{r}. \tag{15.24}$$

Підставивши вирази (15.23) і (15.24) у рівності (15.22), остаточно дістанемо вирази для частинних похідних u_x і u_y через похідні u_r і u_φ:

$$u_x = u_r\cos\varphi - u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}, \quad u_y = u_r\sin\varphi + u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{15.25}$$

Перейдемо до відшукання других похідних. До похідної u_x знову застосуємо правило диференціювання складеної функції: $u_{xx} = (u_x)_r r_x + (u_x)_\varphi \varphi_x$. Із рівностей (15.25) матимемо

$$(u_x)_r = u_{rr}\cos\varphi - u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} + u_\varphi\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

$$(u_x)_\varphi = u_{r\varphi}\cos\varphi - u_r\sin\varphi - u_{\varphi\varphi}\frac{\sin\varphi}{r} - u_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Помножимо тепер першу рівність на $r_x = \cos\varphi$, а другу — на $\varphi_x = -\frac{\sin\varphi}{r}$ і додамо. Звівши подібні члени, дістанемо

$$u_{xx} = u_{rr}\cos^2\varphi - 2u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + 2u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}. \tag{15.26}$$

Аналогічно, користуючися співвідношенням $u_{yy} = (u_y)_r r_y + (u_y)_\varphi \varphi_y$, знайдемо:

$$u_{yy} = u_{rr}\sin^2\varphi + 2u_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - 2u_\varphi\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + u_r\frac{\cos^2\varphi}{r} + u_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}. \tag{15.27}$$

Додавши (15.26) і (15.27), остаточно дістанемо вираз оператора Лапласа функції u в полярних координатах

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}. \tag{15.28}$$

Цей вираз часто буває зручно записувати в такому вигляді:

$$\Delta u = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}. \qquad (15.29)$$

Тотожність правих частин формул (15.28) і (15.29) легко перевіряється диференціюванням.

Перейдемо до тривимірного випадку й почнемо з циліндричних координат. Циліндричні координати r, φ, z пов'язані з прямокутними співвідношеннями

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Функція $u(x, y, z)$ перетворюється на функцію $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Тут третя змінна z залишається такою, як і в прямокутній системі координат, і у виразі (15.28) двовимірного оператора Лапласа від функції u в полярних координатах додається лише друга похідна за змінною z:

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}. \qquad (15.30)$$

Для сферичних координат r, θ і φ маємо $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta \times \sin\varphi$, $z = r\cos\theta$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — віддаль точки (x, y, z) від початку координат; θ — кут між радіусом-вектором точки та віссю Oz; φ — кут між проекцією радіуса-вектора на площину Oxy і віссю Ox. Тут перетворення похідних функції $u(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ дуже громіздкі, й ми їх наводити не будемо, обмежившися записом остаточного виразу оператора Лапласа у сферичних координатах

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}u_\theta + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}.$$

Цю формулу часто записують у вигляді

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}(r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}. \qquad (15.31)$$

Тотожність обох формул пропонується перевірити самостійно.

15.2 ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО ОСНОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. ПОСТАНОВКА МІШАНИХ ТА КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

При математичному моделюванні за допомогою диференціальних рівнянь явищ природи, які характеризуються функціями, що залежать від двох або більшого числа незалежних змінних, виникає потреба у виведенні диференціальних рівнянь із частинними похідними. Створення математичної моделі в таких випадках завершується визначенням додаткових співвідношень для основної функції, яка характеризує явище, необхідних для однозначного його описання, й постановкою відповідної задачі математичної фізики для виведеного рівняння.

На конкретних прикладах розглянемо виведення основних диференціальних рівнянь математичної фізики й постановку відповідних основних крайових задач для них.

15.2.1. Поширення тепла в просторі

Розглянемо задачу про поширення тепла в нерівномірно нагрітому твердому тілі. За основну величину, яка характеризує цей процес, візьмемо температуру $u = u(x, y, z, t)$, де x, y, z — координати точки, t — час.

На початку дослідження слід сформулювати основні положення фізичної моделі процесу поширення тепла в твердому суцільному середовищі. Відбувається механічне поширення тепла від частин тіла з більшою температурою до частин тіла з меншою температурою. Властивості речовини тіла від температури не залежать.

Поширення тепла в нерівномірно нагрітому тілі відбувається за законом Фур'є. Це означає, що кількість тепла dQ_1, яке проходить через елементарну площинку ds усередині тіла в напрямі нормалі $\bar{n}$ до цієї площинки за час dt, визначається формулою

$$dQ_1 = -k\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\,dt, \qquad (15.32)$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}$ — похідна за напрямом нормалі $\overline{n}$; k — коефіцієнт теплопровідності тіла, $k > 0$. Вважатимемо, що тіло є ізотропним щодо теплопровідності, тобто k залежить лише від точки $M(x, y, z)$ тіла й не залежить від напряму нормалі $\overline{n}$: $k = k(x, y, z)$.

Ураховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial n} = (\overline{n} \operatorname{grad} u)$, формулу (15.32) надалі використовуватимемо у вигляді

$$dQ_1 = -k(\overline{n} \operatorname{grad} u)\, ds\, dt. \qquad (15.33)$$

Усередині тіла може утворюватись або поглинатися тепло (наприклад, при проходженні електричного струму, внаслідок хімічних реакцій тощо). Таке виділення тепла можна характеризувати *функцією густини теплових джерел* $F(x, y, z, t)$. При цьому припускається, що внаслідок дії цих джерел в елементарному об'ємі dv тіла за малий інтервал часу dt виділяється кількість тепла

$$dQ_2 = F(x, y, z, t)\, dv\, dt. \qquad (15.34)$$

Кількість тепла dQ_3, яке необхідно надати елементарному об'єму dv за час $\Delta t = t_2 - t_1$, щоб підвищити його температуру від $u(x, y, z, t_1)$ до $u(x, y, z, t_2)$, визначається співвідношенням

$$dQ_3 = c\rho\,(u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1))\, dv, \qquad (15.35)$$

де c і ρ — відповідно питома теплоємність і густина речовини тіла, що, як і k, можуть залежати від x, y, z.

Для виведення диференціального рівняння, яке характеризує процес поширення тепла, виділимо всередині твердого тіла довільний об'єм V, обмежений поверхнею S, і обчислимо для нього баланс тепла за час $\Delta t = t_2 - t_1$.

Згідно з формулою (15.33) за цей час приплив тепла в об'єм V за рахунок проходження через поверхню S теплових потоків у нерівномірно нагрітому тілі становить

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint\!\!\!\oint_S k(\overline{n} \operatorname{grad} u)\, ds. \qquad (15.36)$$

У (15.36) $\overline{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні S; це спричинює зміну знака у формулі (15.33) при її використанні в (15.36).

Кількість тепла в об'ємі V змінюється також завдяки наявності в ньому теплових джерел. Приплив тепла в об'єм V за час $\Delta t = t_2 - t_1$ у цьому разі обчислюється згідно з (15.34) за формулою

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dv. \qquad (15.37)$$

У задачі припускається, що все тепло $Q_1 + Q_2$, набуте об'ємом V, витрачається на зміну температури тіла. Тому згідно із законом збереження тепла

$$Q_1 + Q_2 = Q_3, \qquad (15.38)$$

де Q_3 — витрати тепла на зміну температури об'єму V за час $\Delta t = t_2 - t_1$.

Кількість тепла Q_3 можна обчислити з використанням формули (15.35) у вигляді

$$Q_3 = \iiint_V c\rho\,(u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1))\,dv.$$

З урахуванням рівності

$$u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u_t dt$$

остаточно матимемо

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho u_t\, dv. \qquad (15.39)$$

Підставлення у (15.38) виразів (15.36), (15.37) і (15.39) для Q_1, Q_2 і Q_3 дає змогу дістати

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dv + \int_{t_1}^{t_2} dt \oiint_S k\,(\overline{n}\ \mathrm{grad}\ u) ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho\, u_t\, dv. \qquad (15.40)$$

Застосуємо до перетворення другого інтеграла в (15.40) формулу Остроградського—Гаусса

$$\oiint_S \overline{a}\,\overline{n}\, ds = \iiint_V \mathrm{div}\ \overline{a}\, dv. \qquad (15.41)$$

Покладемо в (15.41) $\overline{a} = k\ \mathrm{grad}\, u$; тоді

$$\oiint_S k(\overline{n}\ \mathrm{grad}\ u) ds = \iiint_V \mathrm{div}\,(k\, \mathrm{grad}\ u) dv.$$

Це дає змогу перейти в другому інтегралі (15.40) до інтегрування по об'єму V і об'єднати в (15.40) інтеграли:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V [c\rho\, u_t - \mathrm{div}(k\, \mathrm{grad}\ u) - F(x, y, z, t)]\, dv = 0. \qquad (15.42)$$

Щоб перейти від інтегрального рівняння балансу тепла до диференціального рівняння, припустимо, що $u = u(x, y, z, t)$ двічі диференційовна по x, y, z і один раз по t і що ці похідні неперервні в області V.

Користуючися теоремою про середнє в інтегральному численні, з (15.42) дістанемо

$$\left[c\rho u_t - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - F\right]\Big|_{\substack{t=t_0,\\ M=M_0}} \Delta t V = 0,$$

де t_0 — значення t з інтервалу (t_1, t_2); $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка з об'єму V.

Зафіксуємо деяку точку $M(x, y, z)$ усередині об'єму V і будемо стягувати V в цю точку, а Δt спрямуємо до нуля. Після скорочення на $\Delta t V$ і вказаного граничного переходу, при якому $M_0 \to M$, $t_0 \to t$, дістанемо *диференціальне рівняння теплопровідності*

$$c\rho u_t(x, y, z, t) = \operatorname{div}\left[k \operatorname{grad} u(x, y, z, t)\right] + F(x, y, z, t) \qquad (15.43)$$

або

$$c\rho u_t = (ku_x)_x + (ku_y)_y + (ku_z)_z + F(x, y, z, t).$$

Якщо середовище однорідне ($\rho = \text{const}$), то це рівняння записують у вигляді

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t) \qquad (15.44)$$

або

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),$$

де $a^2 = k/c\rho$ — коефіцієнт температуропровідності; $f = F/c\rho$; $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Якщо в тілі немає джерел тепла, тобто $F \equiv 0$, то з (15.44) дістанемо *однорідне рівняння теплопровідності*

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

У випадку, коли температура залежить лише від координат x, y і часу t, що, наприклад, буває при поширенні тепла в дуже тонкій однорідній пластинці з теплоізольованою поверхнею, (15.44) перетворюється на рівняння

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t). \qquad (15.45)$$

Нарешті, у випадку $u = u(x, t)$, який має місце, наприклад, при поширенні тепла в тонкому однорідному стрижні з теплоізольованою бічною поверхнею, рівняння (15.44) набирає вигляду

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \qquad (15.46)$$

До рівняння вигляду (15.43) або (15.44) приходять також, моделюючи інші фізичні процеси, наприклад дифузію, фільтрацію тощо. Так, при моделюванні дифузії в пористому середовищі замість закону Фур'є (15.32) треба користуватися законом Нернста для потоку речовини g у напрямі нормалі $\overline{n}$ до площинки ds:

$$g = -D\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\,dt.$$

Тут $u = u(x, y, z, t)$ — концентрація дифундуючої речовини (газу, рідини); D — коефіцієнт дифузії. У формулі (15.35) для dQ_3 і надалі замість $c\rho$ слід застосовувати коефіцієнт пористості c середовища, в якому відбувається дифузія. *Рівняння дифузії* при цьому виводиться у вигляді

$$cu_t = \operatorname{div}(D\operatorname{grad}u) + F(x, y, z, t).$$

Хоча рівняння (15.43) описує багато фізичних процесів, у математичній фізиці воно традиційно називається *рівнянням теплопровідності*. Взагалі ж при розв'язанні диференціальних рівнянь у математичній фізиці, як і взагалі в математиці, намагаються абстрагуватися від фізичного змісту шуканої функції.

15.2.2. Постановка мішаних задач і задачі Коші для рівняння теплопровідності

Рівняння теплопровідності як рівняння з частинними похідними має безліч розв'язків, а явище поширення тепла має однозначний характер. Тому при математичному моделюванні поширення тепла не достатньо записати (вивести) рівняння, яке задовольняє температура $u = u(x, y, z, t)$ — основна функція, що характеризує процес, а треба також указати (дістати) додаткові співвідношення, котрі дають змогу виділити лише один розв'язок рівняння — розв'язок, який описує конкретне явище поширення тепла.

З фізичних міркувань випливає, що для однозначного обчислення температури необхідно знати її розподіл на початку процесу й тепловий режим на межі S тіла (області розв'язання задачі).

Розглядають три основних типи (роди) межових (або крайових) умов. Їхній фізичний зміст: І — на межі S підтримується певна температура; II — на межі S заданий певний тепловий потік; III — на межі S відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем, температура якого відома.

Математична модель *крайової умови першого типу* очевидна:

$$u\big|_S = f_1(x, y, z, t), \tag{15.47}$$

де $f_1(x, y, z, t)$ — відома функція координат точки $M(x, y, z) \in S$ і часу t.

Для математичного моделювання крайової умови другого типу через $q\,(x, y, z, t)$ позначимо густину теплового потоку, який надходить до об'єму V через поверхню S; q — кількість тепла, яку дістає в одиницю часу одиниця площі поверхні S. Якщо знехтувати можливими втратами тепла на поверхні S, то ця сама кількість тепла поширюватиметься всередину об'єму V. Це дає змогу з урахуванням закону Фур'є поширення тепла (15.32) записати рівність

$$q(x, y, z, t)\big|_S = k\,\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S \tag{15.48}$$

($\overline{n}$ — зовнішня нормаль до поверхні S). При обчисленні правої частини (15.48) за допомогою (15.32) було враховано, що тепловий потік, який надходить до поверхні S, протилежний за напрямом до $\overline{n}$.

З (15.48) випливає остаточне математичне формулювання *крайової умови другого типу* для функції $u(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_S = f_2(x, y, z, t), \tag{15.49}$$

де $f_2(x, y, z, t) = \dfrac{1}{k}\, q(x, y, z, t)\bigg|_S$ — відома функція точки $M(x, y, z) \in S$ і часу t.

При математичному моделюванні крайової умови третього типу припускається, що теплообмін між тілом і зовнішнім середовищем відбувається за законом Ньютона: густина теплового потоку, який надходить у тіло із зовнішнього середовища, становить

$$q\,(x, y, z, t) = H(u_0 - u), \tag{15.50}$$

де u_0 — температура зовнішнього середовища; H — коефіцієнт теплообміну. Це дає змогу для виведення крайової умови використати рівність (15.48), функція q в якій має спеціальний вигляд (15.50). З (15.48), (15.50), таким чином, дістанемо *крайову умову третього типу*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + hu\right)\bigg|_S = f_3(x, y, z, t), \tag{15.51}$$

де $h = H/k$; $f_3(x, y, z, t) = hu_0$.

Крайові умови (15.47), (15.49), (15.51) *лінійні*, оскільки функція u та її похідна входять у них у першому степені й не перемножаються між собою. Ці крайові умови називають *однорідними*, якщо їхні праві частини f_1, f_2, f_3 тотожно дорівнюють нулю, і *неоднорідними* в протилежному випадку.

Математичне формулювання початкової умови, очевидно, має вигляд

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \tag{15.52}$$

де $\varphi(x, y, z)$ — задана функція — температура в початковий момент. Умова (15.52) задається в усій області V розв'язання задачі.

Сукупність диференціального рівняння теплопровідності, однієї з трьох крайових умов (15.47), (15.49), (15.51) і початкової умови (15.52) становить математичне формулювання задачі поширення тепла в обмеженій області (об'ємі) V і називається ***мішаною задачею математичної фізики для рівняння теплопровідності.***

У математичній фізиці для рівняння теплопровідності відповідно до типу крайових умов ставляться *три основні мішані задачі*: *знайти розв'язок $u(x, y, z, t)$ рівняння теплопровідності в області V, який задовольняє на межі S області V одну з крайових умов (15.47), (15.49), (15.51) і початкову умову (15.52) в області V.* Залежно від типу крайової умови (15.47), (15.49) або (15.51), що використовується в задачі, мішана задача називається *першою, другою* або *третьою мішаною задачею.*

Для рівняння теплопровідності може бути поставлена й інша задача. Нехай область V досить велика; тоді вплив межових умов у точках області, досить віддалених від межі, на якій вони задані, дається взнаки через досить великий інтервал часу. Тому, якщо явище нас цікавить через малий інтервал часу від його початку, коли вплив межових умов іще неістотний, то замість повної крайової задачі можна розглядати *задачу з початковими умовами для необмеженої області,* або *задачу Коші.*

Задача Коші для тривимірного рівняння теплопровідності формулюється таким чином: *знайти функцію $u(x, y, z, t)$, яка в будь-якій точці простору задовольняє рівняння теплопровідності при $t > 0$ і початкову умову* (15.52). Отже, в тривимірному випадку областю розв'язання задачі Коші є весь простір.

Аналогічно ставляться задачі математичної фізики в дво- й одновимірному випадках, тобто для рівнянь (15.45) і (15.46).

15.2.3. Усталена температура в однорідному тілі

Розглянемо окремий випадок задачі про поширення теплоти в однорідному тілі, коли температура u не змінюється з часом (усталена, або стаціонарна температура): $u = u'(x, y, z)$. Оскільки в цьому разі $u_t \equiv 0$, то рівняння (15.44) набуває вигляду

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = g(x, y, z), \qquad (15.53)$$

де $g(x,y,z) = -\dfrac{1}{a^2} f(x,y,z)$.

За відсутності теплових джерел усередині тіла рівняння (15.53) стає таким:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \qquad (15.54)$$

Рівняння (15.53) називають *рівнянням Пуассона,* а (15.24) — *рівнянням Лапласа.*

Для однозначного обчислення температури $u(x, y, z)$ не треба задавати її початковий розподіл, а достатньо знати лише тепловий режим на межі S тіла. *Основні крайові задачі* для рівнянь (15.53) і (15.54) в цьому разі ставляться так: знайти розв'язок $u(x, y, z)$ рівняння (15.53) або (15.54) в області V, який задовольняє на межі S цієї області одну з крайових умов (15.47), (15.49), (15.51), функції f_1, f_2, f_3 яких не залежать від t. Задача з умовою (15.47) називається *задачею Діріхле*, а з умовою (15.49) — *задачею Неймана.*

З рівняння (15.45) аналогічно виводяться двовимірні рівняння Пуассона й Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = g(x, y); \quad u_{xx} + u_{yy} = 0. \qquad (15.55)$$

Крайові умови для цих рівнянь задаються на замкненій кривій, яка є межею двовимірної області розв'язання задачі.

До крайових задач для рівнянь Пуассона й Лапласа, крім задачі про усталену температуру, зводяться багато задач з електростатики, гідродинаміки, теорії фільтрації, дифузії та інших розділів природознавства.

15.2.4. Малі поперечні коливання струни

Розглянемо натягнену струну, закріплену на кінцях. Якщо її вивести з положення рівноваги, то вона коливатиметься. Побудуємо математичну модель цього процесу.

Моделюючи струну, нехтуватимемо її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, які виникають при її згинанні. Вважатимемо, що струна пружна — підлягає закону Гука: сила натягу струни прямо пропорційна її видовженню. Таким чином, моделлю струни є пружна й абсолютно гнучка нитка.

За основну величину, яка характеризуватиме процес коливання струни, вибираємо вектор зміщення точок струни від положення рівноваги.

Для простоти розглядатимемо так звані поперечні коливання, тобто такі, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині в напрямі, перпендикулярному до прямолінійного положення рівноваги струни. Якщо положення рівноваги взяти за вісь Ox, то процес характеризуватиметься однією скалярною величиною $u = u(x, t)$ — відхиленням від положення рівноваги точки струни з абсцисою x у момент часу t. При кожному фіксованому значенні t графік функції $u = u(x, t)$ даватиме форму струни в цей момент часу (рис. 15.1).

Розглянемо тільки малі коливання, тобто такі, при яких можна знехтувати величиною $(u_x)^2$.

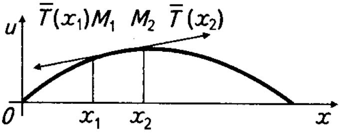

Рис. 15.1

Виділимо довільну ділянку (x_1, x_2) струни (див. рис. 15.1), яка при коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t становить

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 .$$

Отже, за зроблених припущень видовжування струни під час її малих коливань не відбувається. Тоді на підставі закону Гука натяг T у кожній точці струни не змінюється з часом.

Знайдемо проекції на осі Ox і Ou сил натягу $\overline{T}(x_1)$, $\overline{T}(x_2)$, які діють на ділянку M_1M_2 і напрямлені по дотичних до струни в точках M_1 і M_2.

Позначимо через $\alpha(x)$ кут між додатним напрямом осі Ox і дотичною в точці з абсцисою x. Тоді

$$\begin{aligned} \text{Пр}_x\, \overline{T}(x_2) &= T(x_2)\cos\alpha(x_2), \\ \text{Пр}_x\, \overline{T}(x_1) &= -T(x_1)\cos\alpha(x_1); \end{aligned} \qquad (15.56)$$

$$\begin{aligned} \text{Пр}_u\, \overline{T}(x_2) &= T(x_2)\sin\alpha(x_2), \\ \text{Пр}_u\, \overline{T}(x_1) &= -T(x_1)\sin\alpha(x_1). \end{aligned} \qquad (15.57)$$

Ураховуючи малість коливань, можна замінити в цих співвідношеннях $\cos\alpha(x)$ і $\sin\alpha(x)$ величинами

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1; \tag{15.58}$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x. \tag{15.59}$$

На підставі принципу Д'Аламбера всі сили, які діють на ділянку струни M_1M_2, ураховуючи сили інерції, мають урівноважуватися, або, інакше кажучи, суми проекцій усіх цих сил на осі Ox і Ou мають дорівнювати нулю.

Спроектуємо суму всіх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ox. Оскільки розглядаються лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили, які діють на струну, напрямлені перпендикулярно до осі Ox. Отже, їх проекція на вісь Ox дорівнює нулю. Тому, враховуючи тільки сили натягу, з (15.56), (15.58) на підставі принципу Д'Аламбера дістанемо

$$T(x_2) - T(x_1) \approx 0.$$

Звідси з огляду на довільність x_1 і x_2 випливає, що натяг струни не залежить від x. Таким чином, можна вважати, що $T = T_0$ (T_0 — стала величина) для всіх x і t.

Розглянемо проекції всіх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ou.

Поклавши в (15.57) $T(x_2) = T(x_1) = T_0$, з урахуванням (15.59) запишемо суму проекцій на вісь Ou сил натягу у вигляді

$$Y = T_0\,(u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)).$$

Звідси, з огляду на те, що

$$u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x, t)\,dx,$$

остаточно дістанемо

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}(x, t)\,dx. \tag{15.60}$$

Позначимо через $p(x, t)$ щільність зовнішніх сил, які діють на струну паралельно осі Ou. Тоді проекція на вісь Ou зовнішніх сил, що діють на ділянку M_1M_2 струни, дорівнюватиме

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t)dx. \tag{15.61}$$

Нехай $\rho(x)$ — лінійна густина струни. Тоді сила інерції ділянки M_1M_2 струни становитиме

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}(x, t)dx. \tag{15.62}$$

Прирівняємо за принципом Д'Аламбера до нуля суму проекцій сил (15.60)–(15.62) й дістанемо рівняння коливання елемента струни в інтегральній формі:

$$\int_{x_1}^{x_2} (T_0 u_{xx}(x, t) - \rho(x) u_{tt}(x, t) + p(x, t))dx = 0. \tag{15.63}$$

Для переходу до диференціального рівняння припустимо існування й неперервність других похідних від $u(x, t)$; функції $\rho(x)$ і $p(x, t)$ вважатимемо неперервними і застосуємо до (15.63) теорему про середнє в інтегральному численні:

$$(T_0 u_{xx}(x,t) - \rho(x) u_{tt}(x,t) + p(x,t))\big|_{x = x_0} \Delta x = 0; \tag{15.64}$$

тут $x_0 \in (x_1, x_2)$, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Скоротимо рівняння (15.64) на Δx і виконаємо в ньому граничний перехід $x_2 \to x_1$. Враховуючи, що при $x_2 \to x_1$ значення x_0 також прямуватиме до x_1 і те, що значення x_1 є довільним, остаточно дістанемо

$$T_0 u_{xx}(x,t) - \rho(x) u_{tt}(x,t) + p(x,t) = 0$$

або

$$\rho(x) u_{tt} = T_0 u_{xx}(x,t) + p(x,t) \tag{15.65}$$

— шукане *диференціальне рівняння коливання струни.*

У випадку однорідної струни ($\rho = \text{const}$) рівняння (15.65) зазвичай записується у вигляді

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \tag{15.66}$$

де $a^2 = T_0/\rho$, $f = p(x,t)/\rho$.

Рівняння (15.66) при $f(x,t) \neq 0$ називають *рівнянням вимушених коливань струни.* При $f(x,t) \equiv 0$ (зовнішні сили відсутні) приходимо до *рівняння вільних коливань струни*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{15.67}$$

До рівняння (15.66) приходять також при моделюванні багатьох інших хвильових процесів: поздовжніх коливань пружного стрижня, крутильних коливань вала, коливання рідини й газу в тонкій трубці тощо. Всі ці хвильові процеси об'єднує те, що вони є одновимірними. Тому рівняння (15.66) називають також *одновимірним хвильовим рівнянням.* У загальному ж (тривимірному) випадку вивчення багатьох хвильових процесів приводить до *тривимірного хвильового рівняння*

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t). \tag{15.68}$$

Так, до рівняння (15.68) приводить математичне моделювання таких процесів: малих пружних коливань твердих тіл; коливань газу (звукові коливання); електромагнітних коливань тощо.

Рівняння (15.66) є окремим випадком рівняння (15.68). Другим окремим випадком цього рівняння є *рівняння коливання мембрани,* або *двовимірне хвильове рівняння*

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t). \tag{15.69}$$

До рівняння (15.69) приводять задачі про коливання двовимірних тіл, зокрема задача про малі коливання мембрани — пружної плівки, яка може вільно згинатися.

15.2.5. Постановка мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння

Хвильове рівняння як диференціальне рівняння з частинними похідними визначає нескінченну множину розв'язків. Тому для однозначного моделювання конкретного коливального процесу необхідно разом із хвильовим рівнянням розглянути додаткові умови, які б дали змогу виділити єдиний розв'язок рівняння, що описує цей процес. Для цього, як і при моделюванні нестаціонарних теплових процесів, використовують межові (крайові) й початкові умови, які характеризують коливальний процес, що моделюється.

Для задачі про поперечні коливання струни областю розв'язання одновимірного хвильового рівняння (15.66), яке моделює цей коливальний процес, є інтервал $(0, l)$ осі Ox, де l — довжина струни. Межами області розв'язання є точки $x = 0$ і $x = l$. До математичного формулювання межових умов у цій задачі приводить той факт, що кінці струни закріплені нерухомо. Для шуканого зміщення $u(x, t)$ точок струни від положення рівноваги це приводить до крайових умов

$$u(0,\ t) = 0,\quad u(l,\ t) = 0. \tag{15.70}$$

Процес коливання істотно залежить також від того, яким способом струна виводиться з рівноваги. Припускається, що це досягається тим, що в початковий момент часу $t = 0$ усім точкам струни надаються деякі зміщення й швидкості

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ \ u_t(x, 0) = \psi(x),\ \ 0 < x < l, \tag{15.71}$$

де $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ — задані функції.

Таким чином, фізична задача про коливання струни звелася до такої математичної задачі: знайти розв'язок рівняння (15.66) при $0 < x < l$, $t > 0$, який задовольняє крайові умови (15.70) при $t \geq 0$ і початкові умови (15.71).

Основними типами крайових умов для одновимірного хвильового рівняння (15.66) у математичній фізиці є

$$u(0, t) = \mu_1(t),\ \ u(l, t) = \mu_2(t); \tag{15.72}$$

$$u_x(0, t) = \nu_1(t),\ \ u_x(l, t) = \nu_2(t); \tag{15.73}$$

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = \omega_1(t),\ \ u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = \omega_2(t), \tag{15.74}$$

де μ, ν, ω — відомі функції; h_1, h_2 — відомі додатні сталі.

Умови (15.72) справджуються у випадку, коли кінці об'єкта (струна, стрижень тощо) переміщуються за заданим законом; умови (15.73) — у випадку, коли до кінців прикладені задані сили; умови (15.74) — у випадку пружного закріплення кінців.

Для одновимірного хвильового рівняння відповідно до типу крайових умов ставляться *три основні мішані задачі: знайти розв'язок рівняння (15.66) при* $0 < x < l$, $t > 0$, *який задовольняє одну з крайових умов (15.72)–(15.74) при* $t \geq 0$ *і початкові умови (15.71).*

Комбінуючи різні типи крайових умов (15.72)–(15.74) на межах $x = 0$ і $x = l$ області розв'язання, можна дістати ще шість типів найпростіших крайових задач. Відомі також інші крайові умови, наприклад нелінійні.

Для рівняння (15.66) можна поставити *задачу Коші*. Нехай струна досить довга, і нас цікавить коливання її точок, достатньо віддалених від її кінців, причому протягом малого інтервалу часу. В цьому випадку коливальний процес на кінцях струни не справляє суттєвого впливу, й тому його можна не враховувати; струну при цьому вважають нескінченною. Задача Коші ставиться так: знайти розв'язок рівняння (15.66) при $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, який задовольняє початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ \ u_t(x, 0) = \psi(x),\ \ -\infty < x < \infty. \tag{15.75}$$

Таким чином, докладно розглянуто постановку мішаних задач і задачі Коші для хвильового рівняння у випадку однієї незалежної геометричної змінної x і часу t. Якщо число геометричних змінних $n > 1$, наприклад $n = 3$, то перша, друга й третя мішані задачі для хвильового рівняння ставляться так: знайти розв'язок $u(x, y, z, t)$ рівняння (15.68) в області V, який задовольняє на межі S області V одну з крайових умов

$$u\big|_S = \mu(x, y, z, t); \tag{15.76}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu(x, y, z, t); \tag{15.77}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(x, y, z, t)u\right)\right|_S = \beta(x, y, z, t) \tag{15.78}$$

відповідно для першої, другої та третьої мішаних задач і початкові умови

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \; u_t\big|_{t=0} = \psi(x, y, z) \tag{15.79}$$

в області V.

Функції $\mu, \nu, \beta, h, \varphi, \psi$ у (15.76)–(15.79) — це відомі функції своїх аргументів.

Умови (15.71)–(15.74) для одновимірного хвильового рівняння є окремим випадком умов (15.76)–(15.79).

Задача Коші для тривимірного хвильового рівняння (15.68) ставиться аналогічно розглянутій задачі для рівняння (15.66): знайти функцію $u(x, y, z, t)$, яка в будь-якій точці простору задовольняє хвильове рівняння (15.68) при $t > 0$ і початкові умови (15.79).

Таким чином, область розв'язання задачі Коші для рівняння (15.68) — це весь простір.

15.3 КЛАСИФІКАЦІЯ Й ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Основні диференціальні рівняння математичної фізики (хвильове, теплопровідності й Пуассона), які розглядалися в п. 15.2, суттєво відрізняються одне від одного: описують різні за природою фізичні процеси; для них по-різному ставляться задачі математичної фізики. Виявляється також, що ці рівняння належать до трьох різних класів, на які можна поділити лінійні або квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

15.3.1. Класифікація диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \qquad (15.80)$$

Залежно від знака дискримінанта $\Delta = B^2 - AC$ рівняння (15.80) може належати до трьох різних класів (типів).

Якщо в деякій області D дискримінант Δ рівняння (15.80) додатний, $\Delta > 0$, то рівняння (15.80) є *рівнянням гіперболічного типу* в області D (є гіперболічним рівнянням у D).

Якщо $\Delta = 0$ в області D, то (15.80) є *рівнянням параболічного типу* в D (є параболічним рівнянням у D).

Якщо $\Delta < 0$ в усіх точках області D, то рівняння (15.80) є *рівнянням еліптичного типу* (є еліптичним рівнянням у D).

■ **Приклад 15.4**. *Визначити тип основних рівнянь математичної фізики.*

Подамо основні диференціальні рівняння математичної фізики [(15,46), (15.55), (15.66)] у вигляді

$$a^2u_{xx} - u_t + f(x, t) = 0; \qquad (15.81)$$

$$u_{xx} + u_{yy} - g(x, y) = 0; \qquad (15.82)$$

$$u_{tt} - a^2u_{xx} - f(x, t) = 0. \qquad (15.83)$$

У рівнянні (15.81) $A = a^2$, $B = C = 0$, $\Delta = 0$. Отже, одновимірне рівняння теплопровідності (15.81) є *рівнянням параболічного типу.*

У рівнянні (15.82) $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $\Delta = -1 < 0$. Тому двовимірне рівняння Пуассона (15.82), як і відповідне рівняння Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, є *рівнянням еліптичного типу.*

У рівнянні (15.83) $A = 1$, $B = 0$, $C = -a^2$, $\Delta = a^2 > 0$. Отже, одновимірне хвильове рівняння (15.83) є *рівнянням гіперболічного типу.*

Зазначимо, що одне й те саме рівняння в різних областях може належати до різних класів.

■ **Приклад 15.5**. *Визначити тип рівняння $u_{xx} - yu_{yy} = 0$.*

При $y > 0$, $\Delta = y > 0$ рівняння належить до гіперболічного типу.

Якщо $y = 0$, $\Delta = 0$, то рівняння параболічного типу.

При $y < 0$, $\Delta > 0$ маємо рівняння еліптичного типу.

15.3.2. Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

Покажемо, що рівняння (15.80) у кожному із зазначених класів можна звести до найпростішого (канонічного) вигляду за допомогою заміни незалежних змінних x і y.

Отже, введемо нові змінні

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{15.84}$$

Від поки що невідомих функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ вимагатимемо, щоб вони були двічі неперервно диференційовними і щоб якобіан перетворення (15.84) задовольняв умову

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{15.85}$$

в області D, в якій розглядається рівняння (15.80). Як відомо, умова (15.85) є необхідною й достатньою для того, щоб система рівнянь (15.84) могла бути однозначно розв'язаною відносно x і y.

Поставимо перед собою задачу: за допомогою заміни (15.84) незалежних змінних x і y звести рівняння (15.80) до найпростішого вигляду. Маємо:

$$\begin{gathered} u_x = u_\xi \varphi_x + u_\eta \psi_x; \quad u_y = u_\xi \varphi_y + u_\eta \psi_y; \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\varphi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_x\psi_x + u_{\eta\eta}\psi_x^2 + u_\xi\varphi_{xx} + u_\eta\psi_{xx}; \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\varphi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\varphi_y\psi_y + u_{\eta\eta}\psi_y^2 + u_\xi\varphi_{yy} + u_\eta\psi_{yy}; \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\varphi_x\varphi_y + u_{\xi\eta}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + u_{\eta\eta}\psi_x\psi_y + u_\xi\varphi_{xy} + u_\eta\psi_{xy}. \end{gathered} \tag{15.86}$$

Підставивши знайдені похідні (15.86) у (15.80), дістанемо перетворене рівняння

$$\overline{A}u_{\xi\xi} + 2\overline{B}u_{\xi\eta} + \overline{C}u_{\eta\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tag{15.87}$$

де

$$\begin{gathered}\overline{A} = A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2;\\ \overline{B} = A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \psi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y;\\ \overline{C} = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2.\end{gathered} \tag{15.88}$$

Спробуємо вибрати функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ так, щоб перетворити в нуль деякі з коефіцієнтів $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ рівняння (15.87). Для цього розглянемо спочатку дискримінант $\Delta = \overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C}$ цього рівняння, який визначається тотожністю

$$\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} \equiv (B^2 - AC)\left[\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\right]^2. \tag{15.89}$$

Справедливість цієї тотожності можна перевірити безпосереднім підставленням у неї виразів, які визначаються формулами (15.85) і (15.88).

З (15.89) випливає, що при заміні незалежних змінних (15.84), яка задовольняє умову (15.85), тип рівняння не змінюється. Отже, можна передбачити найпростіший вигляд рівняння (15.87) у кожному з типів (класів) рівняння-оригіналу (15.80) і знайти явний вигляд заміни (15.84), яка дає змогу звести рівняння (15.80) до канонічного вигляду.

1. Нехай рівняння (15.80) є гіперболічним в області D. Тоді згідно з (15.89) перетворене рівняння (15.87) також буде гіперболічним. При $\overline{A} = \overline{C} = 0$ це рівняння, не змінюючи свого типу, набуває найпростішого вигляду. Отже, для зведення гіперболічного рівняння (15.80) до найпростішого (канонічного) вигляду функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ у перетворенні (15.84) слід вибрати так, щоб $\overline{A} = \overline{C} = 0$. Звідси з урахуванням (15.88) дістанемо диференціальні рівняння для знаходження таких функцій:

$$\begin{gathered}A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0;\\ A\varphi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = 0.\end{gathered} \tag{15.90}$$

Розв'яжемо рівняння (15.90) відносно φ_x/φ_y і ψ_x/ψ_y, припускаючи (без обмеження загальності), що $A \neq 0$:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{A}, \quad \frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{A}.$$

Таким чином, кожне з рівнянь (15.90) розпадається на два лінійних однорідних диференціальних рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$\begin{cases} \varphi_x + \lambda_1(x, y)\varphi_y = 0, \\ \varphi_x + \lambda_2(x, y)\varphi_y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_x + \lambda_1(x, y)\psi_y = 0, \\ \psi_x + \lambda_2(x, y)\psi_y = 0, \end{cases} \tag{15.91}$$

де

$$\lambda_1(x, y) = \frac{B - \sqrt{\Delta}}{A}, \ \lambda_2(x, y) = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{A}. \tag{15.92}$$

Згідно з п. 5.1.2 для розв'язання перших рівнянь систем (15.91) складається звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_1(x, y)}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1(x, y); \tag{15.93}$$

для розв'язання других рівнянь систем (15.91) — рівняння

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda_2(x, y)}$$

або

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_2(x, y). \tag{15.94}$$

Рівняння (15.93), (15.94) еквівалентні відповідним рівнянням систем (15.91).

Функції $\lambda_1(x, y)$ і $\lambda_2(x, y)$ диференціальних рівнянь (15.93), (15.94) мають неперервні частинні похідні до другого порядку, що випливає з припущень про коефіцієнти A, B і C. Тому існують загальні інтеграли $\varphi^*(x, y) = C$ і $\psi^*(x, y) = C$ рівнянь (15.93), (15.94), і їхні ліві частини мають в області D неперервні похідні до другого порядку включно. Згідно з методикою розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку функції $\varphi^*(x, y)$ і $\psi^*(x, y)$ будуть шуканими розв'язками рівнянь (15.91), а отже, і (15.90).

Таким чином, ми знаходимо заміну $\xi = \varphi^*(x, y)$, $\eta = \psi^*(x, y)$, яка перетворює в нуль коефіцієнти $\overline{A}$ і $\overline{C}$ рівняння (15.87). При цьому $\overline{B}$ не перетворюється в нуль у жодній точці області D, що безпосередньо випливає з тотожності (15.89). Поділивши перетворене рівняння (15.87) на $2\overline{B}$, дістанемо шукану канонічну форму рівняння (15.80) гіперболічного типу

$$u_{\xi\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{15.95}$$

Загальні інтеграли рівнянь (15.93), (15.94) $\varphi^*(x, y) = C$, $\psi^*(x, y) = C$ складають дві сім'ї кривих, які називаються *характеристиками рівняння* (15.80). Рівняння (15.93), (15.94) називаються *диференціальними рівняннями характеристик*. У зв'язку з цим розглянуте спрощення рівняння (15.80) іноді називають *перетворенням рівняння (15.80) до характеристик*.

■ **Приклад 15.6**. *Визначити тип диференціального рівняння*

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0 \tag{15.96}$$

та звести його до канонічного вигляду.

Для визначення типу рівняння складаємо його дискримінант. У цьому рівнянні $A = x^2$, $B = 0$, $C = -y^2$; тому $\Delta = B^2 - AC = x^2y^2 > 0$. Отже, (15.96) є рівнянням гіперболічного типу.

Диференціальні рівняння характеристик рівняння (15.96) згідно з (15.92)–(15.94) мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

а $xy = C$, $y/x = C$ — їхні загальні інтеграли.

Згідно з теорією ліві частини загальних інтегралів диференціальних рівнянь характеристик використовуються як функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ у заміні незалежних змінних (15.84). У прикладі, що розглядається, $\varphi(x, y) = xy$, $\psi(x, y) = y/x$, і заміна незалежних змінних набуває вигляду

$$\xi = xy, \quad \eta = y/x. \tag{15.97}$$

Тоді згідно з (15.86)

$$\begin{aligned} u_{xx} &= y^2 u_{\xi\xi} - 2(y^2/x^2) u_{\xi\eta} + (y^2/x^4) u_{\eta\eta} + 2(y^2/x^3) u_\eta; \\ u_{yy} &= x^2 u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + (1/x^2) u_{\eta\eta}. \end{aligned} \tag{15.98}$$

Підставлення (15.98) у рівняння (15.96) дає змогу спростити його: $2xyu_{\xi\eta} - u_\eta = 0$, і з урахуванням того, що $xy = \xi$, остаточно дістати рівняння (15.96) в канонічному вигляді:

$$2\xi u_{\xi\eta} - u_\eta = 0. \tag{15.99}$$

2. Якщо рівняння (15.80) є еліптичним в області D, то в D існують такі функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, що заміною змінних (15.84) рівняння (15.80) зводиться до канонічного вигляду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{15.100}$$

Опишемо процедуру відшукання функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ для заміни (15.84).

Спочатку формально, як і в попередньому випадку, зводимо рівняння (15.80) до вигляду

$$u_{\xi\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{15.101}$$

При цьому нові змінні ξ і η будуть комплексно-спряженими:

$$\xi = \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad \eta = \alpha(x, y) - i\beta(x, y), \tag{15.102}$$

оскільки диференціальні рівняння характеристик (15.93), (15.94) у розглядуваному випадку мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}. \tag{15.103}$$

Отже, рівняння (15.80) еліптичного типу має лише уявні (комплексні) характеристики.

Здійснимо нову заміну незалежних змінних за формулами

$$\rho = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \alpha(x, y), \quad \sigma = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) = \beta(x, y), \tag{15.104}$$

унаслідок якої рівняння (15.101), а отже, й (15.80), зводиться до шуканої канонічної форми (з точністю до зміни позначень)

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + f_2(\rho, \sigma, u, u_\rho, u_\sigma) = 0.$$

■ **Приклад 15.7.** *Визначити тип диференціального рівняння*

$$\frac{1}{x^2}u_{xx} + \frac{1}{y^2}u_{yy} = 0 \tag{15.105}$$

та звести його до канонічного вигляду.

У цьому рівнянні $A = 1/x^2$, $B = 0$, $C = 1/y^2$, тому $\Delta = B^2 - AC = -1/x^2y^2 < 0$. Отже, (15.105) є рівнянням еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик рівняння (15.105) згідно з (15.103) мають вигляд

$$\frac{dy}{dx} = -i\frac{x}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = i\frac{x}{y}. \tag{15.106}$$

Система (15.106) дає змогу дістати комплексно-спряжені сім'ї характеристик

$$y^2 + ix^2 = C, \quad y^2 - ix^2 = C. \tag{15.107}$$

Нові незалежні змінні для рівняння (15.105) вибираються згідно з (15.102), (15.104). Так, згідно з (15.102) ліві частини загальних інтегралів (15.107) дають змогу здійснити проміжну заміну змінних

$$\xi = y^2 + ix^2, \quad \eta = y^2 - ix^2. \tag{15.108}$$

Змінні ξ і η у (15.108) комплексні. Тому за (15.104) маємо остаточну заміну незалежних змінних: $\rho = y^2$, $\sigma = x^2$. Тоді $u_{xx} = u_{\sigma\sigma}4x^2 + 2u_\sigma$, $u_{yy} = 4y^2u_{\rho\rho} + 2u_\rho$. Підставивши знайдені похідні в рівняння (15.105), дістанемо його в канонічному вигляді:

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\sigma}u_\sigma\right) = 0.$$

3. Якщо рівняння (15.80) параболічне в області D, то в D існують такі функції $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$, що внаслідок заміни змінних (15.84) рівняння (15.80) зводиться до канонічної форми

$$u_{\eta\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{15.109}$$

Розглянемо процедуру відшукання функцій $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$.

Знаходимо функцію $\varphi(x, y)$, яка перетворює в нуль коефіцієнт $\overline{A}$ рівняння (15.87), тобто функцію, яка є розв'язком рівняння

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0. \tag{15.110}$$

Як і у випадку гіперболічного рівняння, припускаємо, що A не дорівнює тотожно нулю в жодній із областей $D_1 \subset D$, і розв'яжемо рівняння (15.110) відносно φ_x/φ_y. При цьому для знаходження $\varphi(x, y)$ дістанемо, на відміну від гіперболічного випадку [див. (15.91), (15.92)], лише одне рівняння

$$\varphi_x + \lambda(x, y)\varphi_y = 0, \tag{15.111}$$

де $\lambda(x, y) = B/A$, оскільки $\Delta = 0$.

Для розв'язання рівняння (15.111) складаємо згідно з п. 15.1.2 звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y), \tag{15.112}$$

яке еквівалентне рівнянню (15.111). Нехай $\varphi^*(x, y) = C$ — його загальний інтеграл. Тоді згідно з методикою розв'язання лінійних однорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку ліву частину цього інтеграла, що не дорівнює тотожно нулю, беремо за функцію $\varphi(x, y)$. Отже, заміна (15.84) при $\varphi(x, y) = \varphi^*(x, y)$ перетворює рівняння (15.80) на (15.87) з коефіцієнтом $\overline{A}$, що дорівнює нулю.

З умови $\Delta = 0$ параболічності рівняння (15.80) і тотожності (15.89) випливає, що при такій заміні змінних і коефіцієнт $\overline{B}$ перетвореного рівняння (15.87) також стає нульовим. Таким чином, при зведенні параболічного рівняння (15.80) до канонічного вигляду функцію $\psi(x, y)$ можна взяти довільною двічі неперервно диференційовною функцією, яка не перетворює в нуль коефіцієнт $\overline{C}$ рівняння (15.87) і разом із функцією $\varphi*(x, y)$ задовольняє умову (15.85). Розділивши перетворене таким чином рівняння на $\overline{C}$, дістанемо шукану канонічну форму.

Рівняння параболічного типу має лише одне диференціальне рівняння характеристик (15.112) і, як наслідок, тільки одну сім'ю характеристик $\varphi*(x, y) = C$.

■ **Приклад 15.8**. *Визначити тип диференціального рівняння*

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0 \tag{15.113}$$

та звести його до канонічного вигляду.

Маємо $A = x^2$, $B = xy$, $C = y^2$, $\Delta = 0$, отже, рівняння (15.113) параболічного типу.

Складаємо згідно з (15.112) єдине диференціальне рівняння характеристик $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Його загальний інтеграл $y/x = C$ дає змогу ввести нову незалежну змінну $\xi = y/x$. Рівняння для другої незалежної змінної можна взяти у вигляді $\eta = y$, оскільки за такого вибору якобіан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = -\frac{y}{x^2}$$

не дорівнює нулю на всій площині Oxy, крім точок осі Ox. Отже, перетворення $\xi = y/x$, $\eta = y$ задовольняє умову (15.85). Крім того, воно не обертає в нуль коефіцієнт $\overline{C}$ перетвореного рівняння. Тоді згідно з (15.86)

$$u_{xx} = \frac{y^2}{x^4}u_{\xi\xi} + \frac{2y}{x^3}u_{\xi}; \quad u_{yy} = \frac{1}{x^2}u_{\xi\xi} + \frac{2}{x}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta};$$

$$u_{xy} = -\frac{y}{x^3}u_{\xi\xi} - \frac{y}{x^2}u_{\xi\eta} - \frac{1}{x^2}u_{\xi}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (15.113), дістанемо його в канонічному вигляді:

$$u_{\eta\eta} = 0. \tag{15.114}$$

4. Якщо рівняння (15.80) лінійне, тобто має вигляд (15.3), то й перетворене рівняння (15.87), очевидно, буде лінійним. Таким чином, канонічні лінійні диференціальні рівняння з частинними похід-

ними другого порядку з двома незалежними змінними мають такий вигляд:

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + G_1 u + F_1 = 0 \\ \text{або} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + G_1 u + F_1 = 0 \end{array}\right\} \text{ при } \Delta > 0; \qquad (15.115)$$

$$u_{\eta\eta} + D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + G_1 u + F_1 = 0 \text{ при } \Delta = 0; \qquad (15.116)$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + G_1 u + F_1 = 0 \text{ при } \Delta < 0. \qquad (15.117)$$

Коефіцієнти D_1, E_1, G_1 і вільний член F_1 у рівняннях (15.115) — (15.117) у загальному випадку є функціями змінних ξ і η.

Якщо вихідне рівняння (15.80) лінійне й зі сталими коефіцієнтами, то й у відповідному канонічному рівнянні коефіцієнти D_1, E_1, G_1 будуть сталими. В цьому випадку рівняння (15.115)–(15.117) допускають подальше спрощення за допомогою заміни невідомої функції

$$u = ve^{\lambda\xi + \mu\eta}, \qquad (15.118)$$

де λ і μ — сталі, що підлягають визначенню.

Параметри λ і μ вибирають так, щоб після підставлення (15.118) у канонічне рівняння два його коефіцієнти, наприклад при перших похідних, перетворилися в нуль.

Обчислимо похідні від функції u і підставимо їх у перше з рівнянь (15.115):

$$v_{\xi\eta} + (\mu + D_1)v_\xi + (\lambda + E_1)v_\eta + (\lambda\mu + \lambda D_1 + \mu E_1 + G_1)v + F_1 e^{-\lambda\xi - \mu\eta} = 0.$$

Якщо покласти $\mu = -D_1$, $\lambda = -E_1$, то перетворене рівняння набуває вигляду

$$v_{\xi\eta} + G_2 v + F_2 = 0, \qquad (15.119)$$

де

$$G_2 = G_1 - D_1 E_1, \quad F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta) e^{\xi E_1 + \eta D_1}.$$

Аналогічно друге з рівнянь (15.115) після заміни (15.118) матиме вигляд

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + G_2 v + F_2 = 0, \qquad (15.120)$$

де

$$G_2 = \frac{1}{4}E_1^2 - \frac{1}{4}D_1^2 + G_1, \quad F_2(\xi, \eta) = F_1(\xi, \eta) e^{\frac{1}{2}\xi D_1 - \frac{1}{2}\eta E_1}.$$

Канонічне рівняння еліптичного типу (15.117) після заміни (15.118) набуває вигляду

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+G_2 v+F_2=0, \tag{15.121}$$

де

$$G_2=G_1-\frac{1}{4}(D_1^2+E_1^2),\ F_2(\xi,\eta)=F_1(\xi,\eta)e^{\frac{1}{2}\xi D_1+\frac{1}{2}\eta E_1}.$$

У рівнянні параболічного типу (15.116) вибором λ і μ не можна обернути в нуль коефіцієнти при v_ξ і v_η, оскільки перетворене рівняння має вигляд $v_{\eta\eta}+D_1 v_\xi+(2\mu+E_1)v_\eta+(\mu^2+\lambda D_1+\mu E_1+G_1)v+$ $+F_1 e^{-\lambda\xi-\mu\eta}=0$. Поклавши $\mu=-\frac{1}{2}E_1$, $\lambda=\frac{1}{D_1}\left(\frac{1}{4}E_1^2-G_1\right)$, дістанемо

$$v_{\eta\eta}+D_1 v_\xi+F_2=0, \tag{15.122}$$

де

$$F_2(\xi,\eta)=F_1(\xi,\eta)e^{\xi\frac{1}{D_1}\left(G_1-\frac{1}{4}E_1^2\right)+\frac{1}{2}\eta E_1}.$$

■ **Приклад 15.9**. *Визначити тип диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами*

$$2u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+4u_x+4u_y+u=0 \tag{15.123}$$

і звести його до канонічного вигляду.

Тут $A=2$, $B=1$, $C=1$, $\Delta=-1<0$, отже, дане рівняння еліптичного типу.

Диференціальні рівняння характеристик рівняння (15.123) згідно з (15.103) мають вигляд

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-i}{2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+i}{2}. \tag{15.124}$$

Система (15.124) дає змогу дістати дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик

$$(2y-x)+ix=C,\quad (2y-x)-ix=C. \tag{15.125}$$

Згідно з (15.102) ліві частини загальних інтегралів (15.125) дають змогу здійснити проміжну заміну змінних

$$\xi=(2y-x)+ix,\quad \eta=(2y-x)-ix. \tag{15.126}$$

Змінні ξ і η у (15.126) комплексні. Тому за (15.104) маємо остаточну заміну незалежних змінних

$$\rho=2y-x,\ \sigma=x. \tag{15.127}$$

Використання заміни (15.127) і формул (15.86) дає змогу обчислити

$$u_x=-u_\rho+u_\sigma,\ u_y=2u_\rho,\ u_{xx}=u_{\rho\rho}-2u_{\rho\sigma}+u_{\sigma\sigma},$$
$$u_{yy}=4u_{\rho\rho},\ u_{xy}=-2u_{\rho\rho}+2u_{\rho\sigma}.$$

Підставивши знайдені похідні в рівняння (15.123), дістанемо його канонічну форму

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + 2u_{\rho} + 2u_{\sigma} + \frac{1}{2}u = 0. \qquad (15.128)$$

Як і рівняння (15.123), перетворене рівняння (15.128) є лінійним зі сталими коефіцієнтами. Воно допускає подальше спрощення за допомогою заміни функції

$$u = ve^{\lambda\rho + \mu\sigma}, \qquad (15.129)$$

де λ і μ — сталі, які підлягають визначенню. Підставимо (15.129) у (15.128):

$$v_{\rho\rho} + v_{\sigma\sigma} + 2(\lambda + 1)v_{\rho} + 2(\mu + 1)v_{\sigma} + \left(\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda + 2\mu + \frac{1}{2}\right)v = 0. \qquad (15.130)$$

Якщо тепер покладемо $\lambda = -1$, $\mu = -1$, то перетворене рівняння (15.130) набуде простішого порівняно з (15.128) вигляду:

$$v_{\rho\rho} + v_{\sigma\sigma} - \frac{3}{2}v = 0.$$

Заміна (15.129) при цьому $u = ve^{-\rho-\sigma}$.

15.4 МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Метод характеристик є одним з ефективних методів побудови розв'язків рівнянь із частинними похідними.

15.4.1. Загальний розв'язок диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку

Для звичайного диференціального рівняння другого порядку загальний розв'язок, тобто вся сукупність розв'язків (за винятком можливих особливих розв'язків), зображується функцією від незалежної змінної x і двох довільних сталих інтегрування C_1, C_2:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \qquad (15.131)$$

Маючи загальний розв'язок рівняння, можна розв'язати ту чи іншу задачу, наприклад задачу Коші, визначаючи відповідним чином сталі C_1, C_2.

Для диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку неможливо вказати загальний розв'язок єдиного вигляду, аналогічний (15.131), але можна знайти його в окремих випадках. Так, загальний розв'язок можна дістати для деяких найпростіших диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку безпосереднім інтегруванням. Ілюстрацією цього є розв'язання рівняння $u_{yy} = 0$ у прикладі 15.2 і рівнянь (15.134), (15.144).

Для складніших лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку загальні розв'язки іноді можна знайти безпосереднім інтегруванням їх канонічних форм. Такий метод знаходження загальних розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними називають ***методом характеристик***. За цим методом дане диференціальне рівняння з частинними похідними спочатку спрощується зведенням його до канонічного вигляду відповідною заміною незалежних змінних x і y на ξ і η (див. п. 15.3). Якщо одержане канонічне рівняння настільки просте, що його можна розв'язати безпосереднім інтегруванням і знайти таким чином u як функцію ξ і η, то для знаходження загального розв'язку вихідного диференціального рівняння з частинними похідними слід у розв'язку $u = u(\xi, \eta)$ повернутися до старих незалежних змінних x і y.

■ **Приклад 15.10**. *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0. \qquad (15.132)$$

Під *загальним розв'язком рівняння з частинними похідними* розумітимемо сім'ю всіх функцій, які є розв'язками цього рівняння.

За допомогою заміни змінних

$$\xi = xy, \quad \eta = y/x \qquad (15.133)$$

рівняння (15.96) зводиться до канонічного вигляду

$$2\xi u_{\xi\eta} - u_\eta = 0. \qquad (15.134)$$

Для розв'язання цього рівняння позначимо $u_\eta = v$. Тоді воно набере вигляду

$$2\xi v_\xi - v = 0. \qquad (15.135)$$

У рівнянні (15.135) фігурує тільки одна незалежна змінна (друга, η, може розглядатись як параметр). Розв'язуючи це рівняння як звичайне (з невідомою функцією v і незалежною змінною ξ), дістанемо

$$\frac{dv}{v}=\frac{d\xi}{2\xi};\ \ \ln v=\frac{1}{2}\ln\xi+\ln C;\ \ v=C\sqrt{\xi},$$

де C — довільна величина, що не залежить від ξ; проте вона може залежати від η, яке ми зафіксували в процесі інтегрування рівняння; тому позначимо цю величину через $C(\eta)$:

$$v=C(\eta)\sqrt{\xi}.$$

Ураховуючи, що $v=u_\eta$, дістанемо

$$u_\eta=C(\eta)\sqrt{\xi}.$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності по η (у процесі інтегрування вважатимемо ξ сталою, оскільки u_η — частинна похідна по η):

$$u=\sqrt{\xi}\int C(\eta)\,d\eta+C_1. \tag{15.136}$$

Довільна величина C_1 у (15.136) не залежить від η, але може залежати від ξ, оскільки шукана функція u залежить від двох змінних ξ і η; позначимо цю величину $C_1(\xi)$. Крім того, внаслідок довільності підінтегральної функції $C(\eta)$ невизначений інтеграл $\int C(\eta)\,d\eta$ є також довільною функцією від η; позначимо цей інтеграл $C_2(\eta)$. Тоді (15.136) остаточно набирає вигляду

$$u=C_1(\xi)+\sqrt{\xi}\,C_2(\eta).$$

Повертаючися до старих змінних x і y, дістанемо загальний розв'язок рівняння (15.132):

$$u=C_1(xy)+\sqrt{xy}\,C_2(y/x). \tag{15.137}$$

Задаючи конкретний вигляд довільних функцій C_1 і C_2, з (15.137) можна дістати всі можливі частинні розв'язки цього рівняння. Зокрема, наприклад, розв'язками рівняння (15.132) є функції

$$u=\ln(xy)+\sqrt{xy}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x}\right],\quad u={}^3\!\sqrt{xy}+\sqrt{xy}\,\sin\frac{y}{x}$$

тощо.

■ **Приклад 15.11.** *Знайти загальний розв'язок рівняння*

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0. \tag{15.138}$$

За допомогою заміни змінних $\xi=y/x$, $\eta=y$ це рівняння в прикладі 15.8 зводиться до канонічного вигляду:

$$u_{\eta\eta}=0. \tag{15.139}$$

Для розв'язання рівняння (15.139) проінтегруємо його двічі по η. Оскільки шукана функція u залежить від двох змінних ξ і η, то дістанемо

$$u_\eta = C_1(\xi), \; u = C_1(\xi)\eta + C_2(\xi), \qquad (15.140)$$

де C_1 і C_2 — довільні функції від ξ. Якби шукана функція u залежала тільки від однієї змінної η, то C_1 і C_2 у (15.140) були б довільними сталими.

Для відшукання загального розв'язку вихідного рівняння (15.138) достатньо повернутися в (15.140) до старих змінних x і y:

$$u(x, y) = C_1(y/x)y + C_2(y/x).$$

Приклади 15.2, 15.10 і 15.11 є ілюстрацією того, що загальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку, якщо їх вдається знайти, залежать не від двох довільних сталих, як це має місце для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а від двох довільних функцій.

Визначаючи ці функції відповідним чином, можна задовольнити ті чи інші додаткові умови, які супроводжують диференціальні рівняння з частинними похідними в задачах математичної фізики.

15.4.2. Розв'язання задачі Коші для рівняння коливання струни методом характеристик

Згідно з п. 15.2 математичною моделлю процесу поширення поперечних хвиль у нескінченній струні за відсутності дії на неї зовнішніх сил є задача Коші для одновимірного однорідного хвильового рівняння. Коливання струни при цьому описується рівнянням

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ при } t > 0, \; -\infty < x < \infty \qquad (15.141)$$

з початковими умовами для функції u

$$u(x, 0) = \varphi(x), \; u_t(x, 0) = \psi(x), \; -\infty < x < \infty, \qquad (15.142)$$

де $\varphi(x)$ — початкове відхилення, а $\psi(x)$ — початкова швидкість точок струни.

Застосуємо до розв'язання задачі (15.141), (15.142) метод характеристик. Спочатку зведемо рівняння (15.141) до канонічного вигляду. У п. 15.3 показано, що рівняння (15.141) є рівнянням гіперболічного типу. Його диференціальні рівняння характеристик

$$\frac{dx}{dt} = -a, \; \frac{dx}{dt} = a$$

мають загальні інтеграли $x + at = C_1$, $x - at = C_2$. Це означає, що для зведення рівняння (15.141) до канонічного вигляду необхідно застосувати заміну незалежних змінних

$$\xi = x + at,\ \eta = x - at. \tag{15.143}$$

Використання (15.86) і (15.143) дає змогу обчислити похідні рівняння (15.141) у нових змінних ξ і η:

$$u_{tt} = u_{\xi\xi}a^2 - 2a^2 u_{\xi\eta} + a^2 u_{\eta\eta},\ u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Підставлення обчислених похідних у рівняння (15.141) зводить його до найпростішого (канонічного) вигляду

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{15.144}$$

Щоб проінтегрувати рівняння (15.144), перепишемо його таким чином: $(u_\xi)_\eta = 0$. Оскільки частинна похідна по η від u_ξ дорівнює нулю, то u_ξ не залежить від η; отже, u_ξ може залежати лише від ξ: $u_\xi = f(\xi)$, де $f(\xi)$ — довільна функція свого аргументу. Інтегруючи по ξ одержану рівність, знайдемо $u = \int f(\xi)d\xi + C$, де C — величина, яка не залежить від ξ. Проте величина C може залежати від η, оскільки шукана функція u залежить від двох незалежних змінних ξ і η. Позначимо $C = \Theta_1(\eta)$, де Θ_1 — довільна функція свого аргументу.

З огляду на довільність функції $f(\xi)$ її невизначений інтеграл також є довільною функцією від ξ; позначимо його $\Theta_2(\xi)$. Таким чином, розв'язок рівняння (15.144) остаточно набуває вигляду

$$u = \Theta_1(\eta) + \Theta_2(\xi). \tag{15.145}$$

Повертаючись у (15.145) до старих незалежних змінних x і t, дістанемо загальний розв'язок рівняння коливання струни (15.141):

$$u(x,t) = \Theta_1(x - at) + \Theta_2(x + at). \tag{15.146}$$

Для того щоб визначити функції Θ_1 і Θ_2 і тим самим знайти закон коливання даної струни, треба використати початкові умови (15.142). Поклавши в (15.146) $t = 0$ і використавши першу з умов (15.142), дістанемо $\varphi(x) = \Theta_1(x) + \Theta_2(x)$.

Для застосування другої з умов (15.142) продиференціюємо обидві частини рівності (15.146) по t. Використовуючи правило диференціювання складених функцій, дістанемо

$$u_t(x,t) = \Theta_1'(x - at)(x - at)_t + \Theta_2'(x + at)(x + at)_t =$$
$$= \Theta_1'(x - at)(-a) + \Theta_2'(x + at)a,$$

де $\Theta_1'(x-at)$ і $\Theta_2'(x+at)$ — звичайні похідні від функцій $\Theta_1(x-at)$ і $\Theta_2(x+at)$ по проміжних аргументах $\eta = x - at$ і $\xi = x + at$ відповідно.

Підставимо $t = 0$ в одержану рівність; тоді з урахуванням другої з умов (15.142) матимемо $\psi(x) = -a\Theta_1'(x) + a\Theta_2'(x)$. Ця рівність справедлива для будь-яких дійсних x; проінтегрувавши її в межах від нуля до x, дістанемо

$$-a[\Theta_1(x) - \Theta_1(0)] + a[\Theta_2(x) - \Theta_2(0)] = \int_0^x \psi(z)dz,$$

або

$$-a\,\Theta_1(x) + a\,\Theta_2(x) = \int_0^x \psi(z)dz + aC, \qquad (15.147)$$

де z позначено змінну інтегрування під знаком інтеграла (щоб не сплутати з верхньою межею інтегрування); стала $C = \Theta_2(0) - \Theta_1(0)$.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \varphi(x), \\ -\Theta_1(x) + \Theta_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(z)dz + C \end{cases}$$

відносно невідомих функцій $\Theta_1(x)$ і $\Theta_2(x)$. Дістанемо

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz - \frac{C}{2}, \\ \Theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(z)dz + \frac{C}{2}. \end{aligned} \qquad (15.148)$$

Згідно з (15.148) $\Theta_1(x)$ і $\Theta_2(x)$ містять невизначену сталу C, але це, як побачимо далі, не заважає однозначно визначити функцію $u(x, t)$.

Рівності (15.148) справедливі, хоч би яким було дійсне число x. Вони залишаються чинними й у тому разі, якщо замість x підставити, наприклад, $x - at$ (адже $x - at$ також є дійсним числом при будь-яких x і t). Із першої з рівностей (15.148) матимемо

$$\Theta_1(x-at) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(z)dz - \frac{C}{2}. \qquad (14.149)$$

Аналогічно, якщо в другу з рівностей (15.148) підставити замість x величину $x + at$, то дістанемо

$$\Theta_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(z)dz+\frac{C}{2}. \qquad (15.150)$$

Додаючи почленно (15.149) та (15.150) і враховуючи (15.146), дістанемо остаточно шукану функцію $u(x,\ t)$, яка виражає закон коливання даної струни:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(z)dz-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(z)dz,$$

або

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (15.151)$$

В останніх перетвореннях невизначена стала C вилучилась і шукана функція $u(x,\ t)$ визначалась однозначно.

Співвідношення (15.151) називають *формулою Д'Аламбера.*

Метод характеристик можна застосувати також для розв'язання крайових задач.

15.4.3. Розв'язання задачі про коливання напівнескінченної струни методом характеристик

Розглянемо задачу: дослідити процес вільних коливань однорідної напівнескінченної струни, якщо початкове відхилення точок струни та їх початкова швидкість дорівнюють відповідно $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, а лівий кінець нерухомо закріплений.

Відповідна математична модель: знайти розв'язок диференціального рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \text{ при } x>0,\ t>0, \qquad (15.152)$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \text{ при } x\ge 0 \qquad (15.153)$$

та крайову

$$u(0,t)=0 \text{ при } t\ge 0. \qquad (15.154)$$

При розв'язанні рівняння (15.152) методом характеристик у п. 15.4.2 знайдено його загальний розв'язок

$$u(x,t)=\Theta_1(x-at)+\Theta_2(x+at), \qquad (15.155)$$

де $\Theta_1(z)$ і $\Theta_2(z)$, $z=x\pm at$ — довільні функції, визначені при будь-яких дійсних z. Оскільки в задачі (15.152)–(15.154) функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначені тільки при $x\ge 0$, то згідно з початковими умовами (15.153) при $x - at > 0$ дістанемо, як і при виведенні (15.149), (15.150):

$$\Theta_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(z)dz-\frac{C}{2}; \qquad (15.156)$$

$$\Theta_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(z)dz+\frac{C}{2}, \qquad (15.157)$$

тобто

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz \qquad (15.158)$$

при $x - at > 0$.

Знайдемо розв'язок задачі (15.152)–(15.154) при $x - at < 0$. Зауважимо, що функція $\Theta_2(x+at)$ визначена за формулою (15.157) для будь-яких $x\ge 0$, $t>0$. Визначимо функцію $\Theta_1(x-at)$ при $x - at < 0$. Для цього використаємо крайову умову (15.154), а також (15.155). Маємо

$$\Theta_1(-at)+\Theta_2(at)=0,\ t\ge 0. \qquad (15.159)$$

Покладемо $-at = z$. Тоді на підставі (15.159) дістанемо

$$\Theta_1(z)=-\Theta_2(-z),\ z<0, \qquad (15.160)$$

а отже, в силу (15.157) визначаємо $\Theta_1(x-at)$ при $x - at < 0$:

$$\Theta_1(x-at)=-\Theta_2(-x+at)=-\frac{1}{2}\varphi(at-x)-\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(z)dz-\frac{C}{2}. \qquad (15.161)$$

Підставивши (15.161), (15.157) у (15.155), знаходимо розв'язок задачі (15.152)–(15.154) при $x - at < 0$:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz. \qquad (15.162)$$

Таким чином, розв'язок задачі (15.152)–(15.154) дається формулою Д'Аламбера (15.158) при $x - at > 0$ і формулою (15.162) при $x - at < 0$.

15.5 РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ МЕТОДОМ ФУР'Є (МЕТОДОМ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ)

Метод Фур'є або, як його ще називають, метод відокремлення змінних, є найважливішим із методів розв'язання задач математичної фізики. Суть його полягає у відшуканні розв'язку задачі математичної фізики у вигляді ряду Фур'є за деякою ортогональною системою функцій, пов'язаних із цією задачею.

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними з двома незалежними змінними x і y:

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+M\frac{\partial u}{\partial y}+Nu=\frac{1}{\rho(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u\right\}+f(x,y), \quad (15.163)$$

де $L(y)$, $M(y)$, $N(y)$ і $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ — неперервні функції при $0\le y\le y_0$ і $0\le x\le l$, причому $\rho(x)>0$, $p(x)>0$, $q(x)\ge 0$ і $\rho(x)$ обмежена. Згідно з п. 15.3.1 за таких припущень відносно $\rho(x)$ і $p(x)$ знак дискримінанта рівняння (15.163), а отже, його тип визначається знаком $L(y)$: якщо $L(y)>0$ — гіперболічний тип, $L(y)=0$ — параболічний і $L(y)<0$ — еліптичний. У випадках, коли $L(y)>0$ і $L(y)=0$, змінна y відіграє роль часу й змінюється в межах $0\le y<\infty$.

Основні рівняння математичної фізики є окремими випадками рівняння (15.163). Так, якщо $p(x)\equiv a^2$, $\rho(x)\equiv 1$, $q(x)\equiv 0$, то при $y\sim t$, $L\equiv 1$, $M=N\equiv 0$ рівняння (15.163) перетворюється на одновимірне хвильове рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t);$$

при $y\sim t$, $L=N\equiv 0, M\equiv 1$ — на одновимірне рівняння теплопровідності

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t);$$

при $p(x)=-\rho(x)\equiv \text{const}$, $L\equiv 1$, $M=N\equiv 0$ — на двовимірне рівняння Пуассона

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,\ y).$$

Розглянемо загальну схему методу Фур'є при розв'язанні задач із однорідними рівняннями й крайовими умовами.

Нехай потрібно знайти функцію $u(x, y)$, яка при $0 < x < l$, $0 < y < y_0$ задовольняє однорідне рівняння

$$L\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + M\frac{\partial u}{\partial y} + Nu = \frac{1}{\rho(x)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)u\right\}, \qquad (15.164)$$

однорідні крайові умови по змінній x

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\right)\right|_{x=0} = 0, \ \left.\left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x} + \delta u\right)\right|_{x=l} = 0 \qquad (15.165)$$

і неоднорідні умови по змінній y:

у гіперболічному випадку ($L > 0$)

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x); \qquad (15.166)$$

у параболічному ($L \equiv 0$)

$$u|_{y=0} = \varphi(x); \qquad (15.167)$$

в еліптичному ($L < 0$)

$$\left.\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial y} + \beta_1 u\right)\right|_{y=0} = \varphi(x), \ \left.\left(\gamma_1\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1 u\right)\right|_{y=y_0} = \psi(x); \qquad (15.168)$$

умови (15.166) і (15.167) початкові, y — час. Сталі $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0$.

На першому етапі розв'язання задачі за методом Фур'є шукають розв'язки однорідного рівняння (15.164), які задовольняють однорідні умови (15.163), у вигляді добутку функцій:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \qquad (15.169)$$

Підставлення (15.169) у рівняння (15.164) дає

$$LXY'' + MXY' + NXY \equiv \frac{1}{\rho(x)}\left\{\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)Y - q(x)XY\right\}.$$

Якщо цю рівність розділити на $X(x)Y(y)$, то в ній відокремляться змінні x і y:

$$\frac{L(y)Y''(y) + M(y)Y'(y) + N(y)Y(y)}{Y(y)} \equiv$$

$$\equiv \frac{\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}. \qquad (15.170)$$

Ліва частина цієї тотожності не залежить від x, а права — від y, отже, рівність можлива тільки у випадку, коли її ліва й права частини дорівнюватимуть сталій величині. Якщо позначити цю сталу $-\lambda$, то з (15.170) дістанемо два звичайних диференціальних рівняння для визначення $X(x)$ і $Y(y)$:

$$L(y)\frac{d^2Y}{dy^2}+M(y)\frac{dY}{dy}+(N(y)+\lambda)Y=0; \qquad (15.171)$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+(\lambda\rho(x)-q(x))X(x)=0. \qquad (15.172)$$

Розв'язки (15.169) мають задовольняти крайові умови (15.165). Підставивши (15.169) у (15.165), дістанемо умови, які має задовольняти функція $X(x)$:

$$\alpha X'(0)+\beta X(0)=0,\ \gamma X'(l)+\delta X(l)=0. \qquad (15.173)$$

Задачу відшукання розв'язків рівняння (15.172), що задовольняють крайові умови (15.173), називають *крайовою задачею Штурма—Ліувілля.* В цій задачі потрібно знайти значення параметра λ — так звані *власні значення*, за яких задача (15.172), (15.173) має ненульові розв'язки, а також знайти ці розв'язки — так звані *власні функції.*

Якщо $\overset{(1)}{X}(x,\lambda)$, $\overset{(2)}{X}(x,\lambda)$ — лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (15.172), то його загальний розв'язок записується у вигляді

$$X(x)=C_1\overset{(1)}{X}(x,\lambda)+C_2\overset{(2)}{X}(x,\lambda). \qquad (15.174)$$

Сталі C_1, C_2 і параметр λ мають бути такими, щоб розв'язок (15.174) задовольняв крайові умови (15.173). Підставлення (15.174) у (15.173) дасть систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно C_1 і C_2. Для існування ненульового розв'язку цієї системи її визначник (він залежить від λ) має дорівнювати нулю. При розв'язанні одержаного рівняння відносно λ знаходять власні значення параметра λ, при яких задача (15.172), (15.173) має ненульові розв'язки — власні функції.

Властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (15.172), (15.173)

1. *Існує нескінченна зліченна множина власних значень* $\{\lambda_k\}$, $k=1$; 2; ... *і відповідних їм власних функцій* $\{X_k(x)\}$.

2 *Усі власні значення дійсні й невід'ємні ($\lambda_k \geq 0$); для першої та третьої мішаних та крайових задач для рівняння (15.164) усі власні значення додатні, для другої мішаної чи крайової задачі з $q(x) \equiv 0$ власним значенням є $\lambda = 0$.*

3 *Кожному власному значенню λ_k відповідає єдина (з точністю до сталого множника) власна функція $X_k(x)$, і навпаки.*

4 *Власні функції $X_k(x)$ і $X_m(x)$, які відповідають різним власним значенням λ_k і λ_m, ортогональні між собою з вагою $\rho(x)$ на інтервалі $0 \leq x \leq l$, тобто для будь-яких k і m при $k \neq m$ виконується рівність*

$$\int_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0.$$

5 *Усяку функцію $\Phi(x)$, яка є неперервною на відрізку $[0, l]$ разом зі своїми похідними першого й другого порядків і яка задовольняє крайові умови (15.173), можна розвинути в ряд Фур'є за системою власних функцій $\{X_k(x)\}$:*

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x), \tag{15.175}$$

котрий збігається абсолютно й рівномірно.

Для знаходження коефіцієнтів a_k ряд (15.175) слід помножити на $\rho(x) X_m(x)$, проінтегрувати в межах від 0 до l і використати умову ортогональності функцій із вагою $\rho(x)$; при цьому

$$a_k = \frac{\int_0^l \rho(x) \Phi(x) X_k(x) dx}{\int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx}. \tag{15.176}$$

Тут властивості задачі Штурма—Ліувілля дано без доведення. В разі потреби можна звернутися до спеціальних підручників із математичної фізики.

Отже, при розв'язанні задачі (15.172), (15.173) знаходять значення параметра λ — власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ і розв'язки — власні функції $X_1(x)$, $X_2(x)$, …, $X_k(x)$, …

При $\lambda = \lambda_k$ рівняння (15.171) перетворюється на систему рівнянь

$$L \frac{d^2 Y_k}{dy^2} + M \frac{dY_k}{dy} + (N + \lambda_k) Y_k = 0, \; k = 1; 2; \ldots \tag{15.177}$$

Якщо $\overset{(1)}{Y}_k(y)$ і $\overset{(2)}{Y}_k(y)$ — лінійно незалежні розв'язки цих рівнянь, то загальними розв'язками рівнянь (15.177) будуть $Y_k(y) = A_k \overset{(1)}{Y}_k(y) + B_k \overset{(2)}{Y}_k(y)$, $k = 1; 2; \ldots$, де A_k і B_k — довільні сталі.

Знайдені розв'язки $X_k(x)$ і $Y_k(x)$ підставляються в (15.169):

$$u_k(x, y) = (A_k \overset{(1)}{Y}_k(y) + B_k \overset{(2)}{Y}_k(y))X_k(x), \quad k = 1; 2; \ldots; \qquad (15.178)$$

при цьому дістають розв'язки рівняння (15.164), які задовольняють крайові умови (15.165).

На другому етапі розв'язання задачі за методом Фур'є з розв'язків (15.178) складається нескінченний ряд

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \overset{(1)}{Y}_k(y) + B_k \overset{(2)}{Y}_k(y))X_k(x). \qquad (15.179)$$

У зв'язку з лінійністю й однорідністю рівняння (15.164) ряд (15.179), складений із його розв'язків, теж буде його розв'язком за умови рівномірної збіжності, а також рівномірної збіжності рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial y}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}.$$

За таких умов сума ряду (15.179) задовольнятиме також лінійні й однорідні крайові умови (15.165), оскільки їх задовольняє кожен доданок цього ряду.

Для знаходження невизначених коефіцієнтів A_k і B_k необхідно задовольнити функцію (15.179) заданим умовам (15.166)–(15.168) за змінною y.

Гіперболічний тип ($L > 0$). Якщо рівняння (15.164) гіперболічного типу, то функція (15.179) має задовольняти початкові умови (15.166). Підставлення (15.179) у (15.166) дає

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \overset{(1)}{Y}_k(0) + B_k \overset{(2)}{Y}_k(0)]X_k(x); \qquad (15.180)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \left. \frac{d\overset{(1)}{Y}_k}{dy} \right|_{y=0} + B_k \left. \frac{d\overset{(2)}{Y}_k}{dy} \right|_{y=0} \right] X_k(x). \qquad (15.181)$$

Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють достатні умови для розвинення їх у ряди Фур'є за власними функціями $\{X_k(x)\}$, то вирази в квадратних дужках у правих частинах (15.180) і (15.181) дорівнюватимуть коефіцієнтам рядів Фур'є функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ за функціями $\{X_k(x)\}$. Використання (15.176) при цьому дає

$$A_k \overset{(1)}{Y_k}(0) + B_k \overset{(2)}{Y_k}(0) = \frac{\int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx}{\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx}; \tag{15.182}$$

$$A_k \left.\frac{d\overset{(1)}{Y_k}}{dy}\right|_{y=0} + B_k \left.\frac{d\overset{(2)}{Y_k}}{dy}\right|_{y=0} = \frac{\int_0^l \rho(x)\psi(x)X_k(x)dx}{\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx}. \tag{15.183}$$

Розв'язавши цю лінійну систему алгебраїчних рівнянь, знаходять A_k і B_k. Розв'язок задачі (15.164)–(15.166) дістають, підставивши A_k і B_k у (15.179).

Параболічний тип ($L = 0$). При розв'язанні задачі (15.164), (15.165), (15.167) рівняння (15.177) порівняно з попереднім випадком набувають вигляду

$$M\frac{dY_k}{dy} + (N + \lambda_k)Y_k = 0,\ k = 1; 2; \ldots \tag{15.177a}$$

Загальними розв'язками (15.177а) будуть $Y_k(y) = A_k \overset{(1)}{Y_k}(y)$, де $\overset{(1)}{Y_k}(y) = e^{-\int \frac{N(y)+\lambda_k}{M(y)}dy}$ — частинні розв'язки рівнянь (15.177а); A_k — довільні сталі. Розв'язки (15.169) рівняння (15.164), які задовольняють крайові умови (15.165), у цьому разі записуються у вигляді

$$u_k(x, y) = A_k \overset{(1)}{Y_k}(y)X_k(x),\quad k = 1; 2; \ldots \tag{15.178a}$$

На другому етапі розв'язок задачі (15.164), (15.165), (15.167) за методом Фур'є шукають у вигляді нескінченного ряду, який складається з розв'язків (15.178а):

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \overset{(1)}{Y_k}(y)X_k(x). \tag{15.179a}$$

Для знаходження коефіцієнтів A_k необхідно задовольнити (15.179а) початковій умові (15.167):

$$u\big|_{y=0} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \overset{(1)}{Y_k}(0)X_k(x).$$

Звідси й за формулою (15.176)

$$A_k = \frac{\int\limits_0^l \rho(x)\varphi(x)X_k(x)dx}{\overset{(1)}{Y_k}(0)\int\limits_0^l \rho(x)X_k^2(x)dx}.$$

Підставивши ці коефіцієнти в (15.179а), дістанемо розв'язок задачі (15.164), (15.165), (15.167).

Еліптичний тип ($L < 0$). Розв'язок рівняння (15.164), який задовольняє крайові умови (15.165), як і в гіперболічному випадку, знаходять у вигляді ряду (15.179). Вимога, щоб розв'язок (15.179) задовольняв ще й крайові умови (15.168) за змінною y, дає систему рівнянь, аналогічну (15.182), (15.183), з якої знаходять коефіцієнти A_k і B_k. Підставивши їх у (15.179), дістають розв'язок задачі (15.164), (15.165), (15.168).

■ **Приклад 15.12**. *Знайти розв'язок одновимірного хвильового рівняння*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{15.184}$$

який задовольняє крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{15.185}$$

і початкові

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{15.186}$$

На першому етапі розв'язання задачі методом Фур'є шукаємо розв'язки рівняння (15.184), які задовольняють умови (15.185), у вигляді добутку функцій:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{15.187}$$

Підставлення (15.187) у рівняння (15.184) перетворює його на тотожність:

$$X(x)T''(t) \equiv a^2 T(t)X''(x).$$

Для відокремлення змінних у цій тотожності треба поділити її зліва й справа на добуток $a^2X(x)T(t)$:

$$\frac{1}{a^2T(t)}T''(t) \equiv \frac{1}{X(x)}X''(x). \tag{15.188}$$

Оскільки ліва частина тотожності (15.188) не залежить від x, а права — від t, то ця рівність можлива тільки у випадку, коли і ліва, і права її частини дорівнюють одній і тій самій сталій величині.

Позначимо цю сталу через $-\lambda$:

$$\frac{1}{a^2T(t)}T''(t) \equiv \frac{1}{X(x)}X''(x) = -\lambda.$$

Звідси дістанемо два звичайних диференціальних рівняння для знаходження функцій $T(t)$ і $X(x)$:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \tag{15.189}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{15.190}$$

Відокремимо змінні й у крайових умовах (15.185). Для цього підставимо (15.187) у (15.185): $X(0)\,T(t) \equiv 0, X(l)\,T(t) \equiv 0.$ Із цих рівностей випливає

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{15.191}$$

Припущення, що $T(t) \equiv 0$, приводить згідно з (15.187) до нульового розв'язку: $u(x, t) \equiv 0$. Задача (15.190), (15.191) — це задача Штурма—Ліувілля — окремий випадок задачі (15.172), (15.173). У ній потрібно знайти такі значення числового параметра λ, що називаються *власними*, при яких задача (15.190), (15.191) має ненульові розв'язки, а також необхідно знайти ці розв'язки — власні функції.

Рівняння (15.190) — це звичайне лінійне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. За методом Ейлера його частинні розв'язки шукають у вигляді

$$X(x) = e^{rx}. \tag{15.192}$$

Підставлення (15.192) у (15.190) дає змогу дістати характеристичне рівняння

$$r^2 + \lambda = 0. \tag{15.193}$$

Оскільки (15.184)–(15.186) — це перша мішана задача, то за другою властивістю власних значень і власних функцій задачі Штурма—Ліувілля її власні значення додатні, тобто в (15.193) $\lambda > 0$. Тому корені характеристичного рівняння (15.193) уявні: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ і загальний розв'язок рівняння (15.190) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}. \tag{15.194}$$

Підставлення (15.194) у крайові умови (15.191) дає

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0; \\ C_1 \cos l\sqrt{\lambda} + C_2 \sin l\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases} \tag{15.195}$$

Однорідна система (15.195) має ненульові розв'язки лише в тому випадку, коли її визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos l\sqrt{\lambda} & \sin l\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \sin l\sqrt{\lambda}$$

дорівнює нулю. Звідси дістанемо рівняння $\sin l\sqrt{\lambda} = 0$ для знаходження власних значень

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \ k = 1; 2; \ldots \tag{15.196}$$

При $\lambda = \lambda_k$ друге рівняння системи (15.195) збігається з першим; тому $C_1 = 0$, а C_2 — довільне. Із загальної теорії задачі Штурма—Ліувілля відомо, що її власні функції визначаються з точністю до довільного сталого множника. Без обмеження загальності покладемо для зручності $C_2 = 1$; тоді з (15.194) з урахуванням (15.196) власні функції задачі (15.190), (15.191) мають вигляд

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{l}x, \ k = 1; 2; \ldots \tag{15.197}$$

При $\lambda = \lambda_k$ рівняння (15.189) перетворюється на систему рівнянь

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0, \ k = 1; 2; \ldots$$

Оскільки $\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 > 0$, то загальні розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t, \tag{15.198}$$

де a_k і b_k — довільні сталі.

Підставивши функції (15.197) і (15.198) у (15.187), знаходимо нескінченну послідовність розв'язків рівняння (15.184), які задовольняють крайові умови (15.185):

$$u_k(x, t) = \sin\frac{k\pi x}{l}\left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right), \ k = 1; 2; \ldots \tag{15.199}$$

На цьому завершується перший етап розв'язання задачі (15.184)–(15.186).

На другому етапі шукатимемо розв'язок рівняння (15.184), який задовольняє як крайові (15.185), так і початкові умови (15.186). Такий розв'язок за загальною схемою Фур'є будується у вигляді нескінченного ряду розв'язків (15.199):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l}t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l}t\right) \sin\frac{k\pi}{l}x. \tag{15.200}$$

Коефіцієнти a_k і b_k ряду (15.200) мають бути такими, щоб рівномірно збігався сам ряд (15.200), а також ряди, які утворюються з (15.200) після дворазового диференціювання по x і t. У такому разі ряд (15.200) задовольнятиме рівняння (15.184) і крайові умови (15.185), оскільки він складається з розв'язків рівняння (15.184), які задовольняють умови (15.185).

Коефіцієнти a_k і b_k знаходять з умови, що ряд (15.200) має задовольняти початкові умови (15.186).

Згідно з першою умовою (15.186)

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (15.201)$$

Продиференціюємо ряд (15.200) за змінною t:

$$u_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi a}{l}t + b_k \cos\frac{k\pi a}{l}t\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

і, користуючися другою з умов (15.186), дістанемо

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (15.202)$$

Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ розвиваються в ряди Фур'є в інтервалі $(0, l)$ за власними функціями $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}$ задачі Штурма—Ліувілля (15.190), (15.191), то з (15.201), (15.202) випливає, що a_k і $b_k \frac{k\pi a}{l}$ — коефіцієнти цих рядів. Згідно з (15.176) при $\rho(x) \equiv 1$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \qquad (15.203)$$

$$b_k \frac{k\pi a}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

З останньої рівності

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (15.204)$$

Таким чином, розв'язок задачі (15.184)–(15.186) має вигляд нескінченного ряду (15.200) з коефіцієнтами a_k і b_k, які визначаються за формулами (15.203), (15.204).

Додаткові дослідження показують, що при таких коефіцієнтах a_k і b_k ряд (15.200) збігається рівномірно й уможливлює дворазове диференціювання по x і t.

■ **Приклад 15.13**. *Знайти розв'язок $u(x, t)$ одновимірного рівняння теплопровідності*

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \qquad (15.205)$$

який задовольняє крайові умови

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0 \qquad (15.206)$$

і початкову

$$u(x, 0) = \varphi(x) \ \ при \ \ 0 < x < l. \tag{15.207}$$

На першому етапі розв'язання задачі методом Фур'є шукаємо розв'язки однорідного рівняння (15.205), які задовольняють однорідні крайові умови (15.206), у вигляді добутку функцій:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{15.208}$$

Відокремивши змінні в рівнянні (15.205) і крайових умовах (15.206), як і в попередньому прикладі, дістанемо звичайне диференціальне рівняння для знаходження функції $T(t)$:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{15.209}$$

і задачу Штурма—Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & (15.210) \\ X'(0) = X'(l) = 0 & (15.211) \end{cases}$$

для знаходження $X(x)$ і довільної сталої λ, яка з'являється при відокремленні змінних у рівнянні (15.205).

Задача (15.210), (15.211) є окремим випадком загальної задачі Штурма—Ліувілля (15.172), (15.173). Оскільки (15.205)–(15.207) — це друга мішана задача, в якій $q(x) \equiv 0$, то за другою властивістю власних значень і власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (15.172), (15.173) $\lambda = 0$ буде власним значенням задачі (15.210), (15.211). Рівняння (15.210) при цьому має вигляд $X''(x) = 0$. Його загальний розв'язок $X(x) = C_1 x + C_2$ дістанемо після дворазового інтегрування.

Крайові умови (15.211) дають змогу знайти лише довільну сталу C_1: $X'(x) = C_1$ і за умовами (15.211) $X'(0) = X'(l) = C_1 = 0$. Тобто $X(x) = C_2$. Власні функції задачі Штурма—Ліувілля визначаються з точністю до довільного сталого множника, тому без обмеження загальності покладемо $C_2 = 1$. Таким чином, власному значенню $\lambda_0 = 0$ відповідає власна функція $X_0(x) = 1$. Решта власних значень задачі (15.210), (15.211) додатні, тобто $\lambda > 0$, тому загальний розв'язок рівняння (15.210) знаходиться, як і в попередньому прикладі, у вигляді $X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}$.

З умови $X'(0) = 0$ дістаємо $C_2 = 0$. Отже, $C_1 \neq 0$ і $X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda}$. З умови $X'(l) = 0$ знаходимо $\sin l\sqrt{\lambda} = 0$, звідки $l\sqrt{\lambda} = \pi k$ і $\lambda_k = \pi^2 k^2 / l^2$, $k = 1; 2; \ldots$ Таким чином, $0,\ \pi^2/l^2,\ 4\pi^2/l^2,\ \ldots,\ k^2\pi^2/l^2,\ \ldots$ — власні значення,

$$X_k(x) = \cos\frac{\pi k}{l}x, \ \ k = 0; 1; 2; \ldots \tag{15.212}$$

— власні функції задачі (15.210), (15.211).

При $\lambda = \lambda_k$ рівняння (15.209) перетворюється на систему рівнянь

$$T_k'(t) + \left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0, \ \ k = 0; 1; 2; \ldots \tag{15.213}$$

Їхні загальні розв'язки знаходять методом відокремлення змінних. Для цього рівняння (15.213) слід помножити на dt, поділити на $T_k(t)$:

$$\frac{dT_k(t)}{T_k(t)} = -\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 dt$$

і проінтегрувати; це дає

$$T_k(t) = a_k e^{-a^2\lambda_k t}, \; k = 0; 1; 2; ..., \tag{15.214}$$

де a_k — довільні сталі.

Підставивши функції (15.212), (15.214) у (15.208), дістанемо нескінченну послідовність розв'язків рівняння (15.205), які задовольняють крайові умови (15.206):

$$u_k(x, t) = a_k e^{-a^2\lambda_k t} \cos\frac{\pi k}{l} x, \; k = 0; 1; 2; ... \tag{15.215}$$

На цьому завершується перший етап розв'язання задачі (15.205) — (15.207).

На другому етапі шукатимемо розв'язок рівняння (15.205), який задовольняє як крайові умови (15.206), так і початкову умову (15.207). За загальною схемою Фур'є такий розв'язок будується у вигляді нескінченного ряду розв'язків (15.215):

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-a^2\lambda_k t} \cos\frac{\pi k}{l} x. \tag{15.216}$$

Коефіцієнти ряду a_k знаходять за початковою умовою (15.207):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k}{l} x. \tag{15.217}$$

Якщо функція $\varphi(x)$ задовольняє умови розвинення в ряд Фур'є в інтервалі $(0, l)$ за власними функціями $\left\{\cos\frac{\pi k}{l} x\right\}$, то з (15.217) випливає, що a_k — коефіцієнти такого ряду. Згідно з (15.176) при $\rho(x) \equiv 1$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)dx, \;\; a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\frac{\pi k}{l} x\,dx, \;\; k = 1; 2; ... \tag{15.218}$$

Таким чином, розв'язок задачі (15.205)−(15.207) має вигляд нескінченного ряду (15.216), коефіцієнти якого визначаються за формулами (15.218).

■ **Приклад 15.14**. *Знайти розв'язок $u(x, t)$ одновимірного рівняння теплопровідності*

$$u_t = a^2 u_{xx} \;\; \textit{при} \;\; 0 < x < l, \; t > 0, \tag{15.219}$$

який задовольняє крайові умови

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{15.220}$$

і початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < l. \tag{15.221}$$

На першому етапі розв'язання задачі методом Фур'є шукаємо розв'язки однорідного рівняння (15.219), які задовольняють однорідні крайові умови (15.220), у вигляді добутку функцій:

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{15.222}$$

Рівняння (15.205) і (15.219) однакові, тому відокремлення змінних при підставленні (15.222) у (15.219) приводить, як і в попередньому прикладі, до рівнянь

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \tag{15.223}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{15.224}$$

де λ — довільна стала.

Для відокремлення змінних у крайових умовах підставимо (15.222) у (15.220):

$$T(t)(X'(0) - h_1 X(0)) \equiv 0;$$

$$T(t)(X'(l) + h_2 X(l)) \equiv 0.$$

Із цих рівностей випливає

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0; \tag{15.225}$$

$$X'(l) + h_2 X(l) = 0. \tag{15.226}$$

Припущення, що $T(t) \equiv 0$, приводить згідно з (15.222) до нульового розв'язку $u(x, t) \equiv 0$.

Таким чином, для знаходження $X(x)$ і λ одержано задачу Штурма—Ліувілля (15.224)–(15.226), яка є окремим випадком загальної задачі (15.172), (15.173). Оскільки (15.219)–(15.221) — це третя мішана задача, то за другою властивістю власних значень і власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (15.172), (15.173) всі власні значення задачі (15.224) — (15.226) додатні, тобто $\lambda > 0$. Звідси загальний розв'язок рівняння (15.224), як і в прикладі 15.12, має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}. \tag{15.227}$$

Оскільки

$$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin x\sqrt{\lambda} + C_2\sqrt{\lambda}\cos x\sqrt{\lambda}, \tag{15.228}$$

то з (15.225) з урахуванням (15.227), (15.228) при $x = 0$ випливає $C_2\sqrt{\lambda} - h_1 C_1 = 0$, звідки $C_1 = C_2\sqrt{\lambda} / h_1$ і

$$X(x) = \frac{C_2}{h_1}(\sqrt{\lambda}\cos x\sqrt{\lambda} + h_1 \sin x\sqrt{\lambda}). \tag{15.229}$$

Підставлення (15.229) у (15.226) при $x = l$ дає змогу дістати трансцендентне рівняння для знаходження власних значень задачі (15.224)–(15.226)

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{1}{l(h_1 + h_2)}\left(\mu - \frac{h_1 h_2}{\mu} l^2\right),$$

де $\mu = l\sqrt{\lambda}$. Нехай $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots$ — додатні корені цього рівняння. Тоді власними значеннями задачі (15.224)–(15.226) будуть числа $\lambda_k = \mu_k^2 / l^2$, $k = 1; 2; \ldots$

Власні функції задачі Штурма—Ліувілля визначаються з точністю до довільного сталого множника, тому, поклавши в (15.229) без обмеження загальності $C_2 = h_1$, знаходимо при $\lambda = \lambda_k$ власні функції задачі (15.224)–(15.226):

$$X_k(x) = \frac{\mu_k}{l}\cos\frac{\mu_k}{l}x + h_1 \sin\frac{\mu_k}{l}x. \qquad (15.230)$$

За четвертою властивістю власних значень і власних функцій задачі Штурма—Ліувілля (15.172), (15.173), окремим випадком якої є задача (15.224)–(15.226), власні функції (15.230) ортогональні на відрізку $[0, l]$ з вагою $\rho(x) \equiv 1$.

Звернемося до рівняння (15.223). Оскільки воно збігається з рівнянням (15.209), то його загальний розв'язок при $\lambda = \lambda_k$ знаходиться, як і в прикладі 15.13, у вигляді

$$T_k(t) = a_k e^{-a^2\lambda_k t}, \; k = 1; 2; \ldots, \qquad (15.231)$$

де a_k — довільні сталі.

Завершуємо перший етап розв'язання задачі (15.219) — (15.221) підставленням (15.230), (15.231) у (15.222):

$$u_k(x, t) = a_k e^{-a^2\lambda_k t}\left(\frac{\mu_k}{l}\cos\frac{\mu_k}{l}x + h_1 \sin\frac{\mu_k}{l}x\right), \; k = 1; 2; \ldots \qquad (15.232)$$

На другому етапі розв'язок задачі (15.219)–(15.221) за методом Фур'є шукатимемо у вигляді нескінченного ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t),$$

члени якого $u_k(x, t)$ визначаються за формулою (15.232), тобто

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-a^2\lambda_k t}\left(\frac{\mu_k}{l}\cos\frac{\mu_k}{l}x + h_1 \sin\frac{\mu_k}{l}x\right).$$

Коефіцієнти a_k цього ряду знаходимо з початкової умови (15.221):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{\mu_k}{l}\cos\frac{\mu_k}{l}x + h_1 \sin\frac{\mu_k}{l}x\right),$$

користуючись ортогональністю власних функцій (15.230):

$$a_k = \frac{\int_0^l \varphi(x)\left(\frac{\mu_k}{l}\cos\frac{\mu_k}{l}x + h_1\sin\frac{\mu_k}{l}x\right)dx}{\int_0^l \left(\frac{\mu_k}{l}\cos\frac{\mu_k}{l}x + h_1\sin\frac{\mu_k}{l}x\right)^2 dx}.$$

■ **Приклад 15.15.** *Знайти розв'язок $u(r, \varphi)$ у крузі радіусом R рівняння Лапласа*

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \tag{15.233}$$

який задовольняє крайову умову

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{r=R} = f(\varphi), \tag{15.234}$$

а також такі умови:

$$u(r, \varphi) \text{ обмежена при } 0 \le r \le R; \tag{15.235}$$

$$u(r, \varphi) \text{ періодична відносно } \varphi \text{ з періодом } 2\pi:$$

$$u(r, \varphi + 2\pi) = u(r, \varphi), \tag{15.236}$$

де $\overline{n}$ — напрям зовнішньої нормалі до кола, яке є межею області розв'язання; $f(\varphi)$ — задана обмежена, кусково-неперервна функція, яка визначена при $-\pi \le \varphi \le \pi$ і задовольняє умову

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi = 0. \tag{15.237}$$

Перш ніж починати розв'язання задачі, звернімо увагу на те, що в цьому прикладі замість прямокутної використовується полярна система координат (r, φ), оператор Лапласа від функції u в якій визначається формулою (15.28). Це зумовлено тим, що область розв'язання у задачі (15.233)–(15.237) має кругову симетрію.

На першому етапі розв'язання задачі за методом Фур'є шукаємо розв'язки однорідного рівняння (15.233), які задовольняють однорідні умови (15.235) і (15.236), у вигляді добутку функцій:

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \tag{15.238}$$

Підставлення (15.238) у рівняння (15.233) перетворює його на тотожність:

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi) \equiv 0. \tag{15.239}$$

Для відокремлення змінних слід поділити ліву й праву частини (15.239) на $\frac{1}{r^2}R(r)\Phi(\varphi)$:

$$\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{\frac{1}{r^2}R(r)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\equiv 0$$

і перенести другий доданок у праву частину:

$$\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{\frac{1}{r^2}R(r)}\equiv -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}. \qquad (15.240)$$

Оскільки ліва частина тотожності (15.240) не залежить від φ, а права — від r, то ця рівність можлива тільки у випадку, коли і ліва, і права її частини дорівнюють одній і тій самій сталій величині. Позначимо цю сталу через λ:

$$\frac{R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)}{\frac{1}{r^2}R(r)}\equiv \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda.$$

Звідси дістанемо звичайні диференціальні рівняння для знаходження функцій $R(r)$ і $\Phi(\varphi)$:

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-\frac{\lambda}{r^2}R(r)=0; \qquad (15.241)$$

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0. \qquad (15.242)$$

Однорідні умови (15.235) і (15.236), які має задовольняти функція $u(r,\varphi)$, рівнозначні таким умовам для функцій $R(r)$ і $\Phi(\varphi)$:

$$R(r) \text{ обмежена при } 0\le r\le R; \qquad (15.243)$$

$\Phi(\varphi)$ обмежена й періодична з періодом 2π:

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi). \qquad (15.244)$$

З умови (15.244) випливає, що λ не може бути від'ємним. У противному разі розв'язок рівняння (15.242) виражався б через показникові функції:

$$\Phi(\varphi)=C_1e^{\varphi\sqrt{\lambda}}+C_2e^{-\varphi\sqrt{\lambda}}$$

і не був би періодичним. Тому $\lambda\ge 0$. Якщо $\lambda=0$, то рівняння (15.242) стає $\Phi''(\varphi)=0$ і його розв'язок $\Phi(\varphi)=C_1\varphi+C_2$ задовольнятиме умову (15.244) тільки при $C_1=0$.

Отже, при $\lambda=0$ крайова задача (15.242), (15.244) має нетривіальний розв'язок $\Phi(\varphi)=C_2$, в окремому випадку, при $C_2=1$, $\Phi(\varphi)=1$. Тобто $\lambda_0=0$ —

власне значення, а функція $\Phi_0(\varphi) = 1$ — відповідна власна функція задачі (15.242), (15.244).

Якщо $\lambda > 0$, то лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (15.242) виглядатимуть таким чином: $\overline{\Phi}(\varphi) = \cos\varphi\sqrt{\lambda}$, $\overline{\overline{\Phi}}(\varphi) = \sin\varphi\sqrt{\lambda}$.

Функції $\overline{\Phi}(\varphi)$ і $\overline{\overline{\Phi}}(\varphi)$ мають період $2\pi/\sqrt{\lambda}$, який дорівнює 2π або ж буде ціле число разів міститись у 2π тоді й лише тоді, коли $\sqrt{\lambda}$ — ціле число; отже, $\lambda = k^2$, де $k = 1; 2; ...$ Таким чином, $\lambda_k = k^2$, $\overline{\Phi}(\varphi) = \cos k\varphi$, $\overline{\overline{\Phi}}(\varphi) = \sin k\varphi$, $k = 1; 2; ...$ — також власні числа й відповідні їм власні функції задачі (15.242), (15.244). Тут кожному власному числу λ_k відповідають два лінійно незалежних частинних розв'язки; ця уявна суперечність із загальною теорією пояснюється тим, що задача (15.242), (15.244) не є задачею Штурма—Ліувілля: крайова умова (15.244) відрізняється від умов (15.173) загальної задачі Штурма—Ліувілля (15.172), (15.173).

Підставимо $\lambda_k = k^2, k = 0; 1; 2; ...$ у рівняння (15.241):

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{k^2}{r^2}R(r) = 0, \quad k = 0; 1; 2; ... \tag{15.245}$$

Це рівняння Ейлера. Для його розв'язання при $k = 0$ слід покласти $R'(r) = v(r)$. Тоді воно матиме вигляд

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0.$$

Після відокремлення змінних

$$\frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} = 0$$

та інтегрування

$$\ln v + \ln r = \ln D_0$$

знаходимо $vr = D_0$ або з урахуванням заміни $v(r) = R'(r)$

$$\frac{dR}{dr}r = D_0,$$

де D_0 — довільна стала.

Ще одне застосування відокремлення змінних та інтегрування дає змогу остаточно дістати загальний розв'язок рівняння (15.245) при $k = 0$:

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \tag{15.246}$$

де C_0 — довільна стала.

Для розв'язання (15.245) при $k > 0$ використаємо підстановку

$$R(r) = r^{\alpha}, \tag{15.247}$$

де α — невідома стала величина. Рівняння для неї знаходимо при підставленні (15.247) у (15.245):

$$\alpha(\alpha - 1)r^{\alpha-2} + \alpha r^{\alpha-2} - k^2 r^{\alpha-2} = 0$$

або

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-k^2=0,\ \alpha^2=k^2,\ \alpha_{1,2}=\pm k.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння (15.245) у цьому випадку буде

$$R_k(r)=C_k r^k+\frac{D_k}{r^k},\ k=1;2;\ldots, \qquad (15.248)$$

де C_k і D_k — довільні сталі.

Застосування умови обмеженості (15.243) до загальних розв'язків (15.246), (15.248) дає змогу дістати $D_k=0$, $k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ Тоді при $C_k=1$, $k=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ з формул (15.246), (15.248) остаточно матимемо частинні розв'язки рівняння (15.245):

$$R_0(r)\equiv 1,\ R_k(r)=r^k,\ k=1;2;\ldots$$

Підставлення знайдених функцій $\Phi(\varphi)$ і $R(r)$ у формулу (15.238) завершує перший етап розв'язання задачі (15.233)–(15.236) знаходженням частинних розв'язків однорідного рівняння (15.233), які задовольняють однорідні умови (15.235), (15.236):

$$\begin{cases} u_0(r,\varphi)=\Phi_0 R_0\equiv 1; \\ \overline{u}_k(r,\varphi)=\overline{\Phi}_k(\varphi)R_k(r)=r^k\cos k\varphi; \\ \overline{\overline{u}}_k(r,\varphi)=\overline{\overline{\Phi}}_k(\varphi)R_k(r)=r^k\sin k\varphi;\ k=1;2;\ldots \end{cases} \qquad (15.249)$$

На другому етапі розв'язок задачі (15.233)–(15.236) за методом Фур'є слід шукати у вигляді нескінченного ряду частинних розв'язків (15.249) із довільними коефіцієнтами

$$u(r,\varphi)=A_0\cdot 1+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k r^k\cos k\varphi+B_k r^k\sin k\varphi). \qquad (15.250)$$

Залишається дібрати коефіцієнти A_0, A_k, B_k так, щоб задовольнити крайову умову (15.234). Для цього знайдемо нормальну похідну $\frac{\partial u}{\partial n}$. У кожній точці кола $r=R$ зовнішня нормаль $\overline{n}$ напрямлена вздовж координатної r-лінії в бік зростання r. Тому похідна в напрямі $\overline{n}$ у всіх точках цього кола дорівнює частинній похідній $\frac{\partial u}{\partial r}$. Ураховуючи це, продиференціюємо по r обидві частини рівності (15.250):

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k k r^{k-1}\cos k\varphi+B_k k r^{k-1}\sin k\varphi)$$

і підставимо $r=R$:

$$f(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}(A_k k R^{k-1}\cos k\varphi+B_k k R^{k-1}\sin k\varphi).$$

Дістали розвинення функції $f(\varphi)$ у ряд Фур'є за загальною тригонометричною системою $\{1,\ \cos k\varphi,\ \sin k\varphi\}$ на відрізку $[-\pi,\ \pi]$. У розвиненні відсутній вільний член; цього слід було чекати, оскільки вільний член ряду Фур'є обчислюється за формулою

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

а цей інтеграл дорівнює нулю згідно з умовою (15.237). Решту коефіцієнтів знайдемо за формулами Фур'є

$$A_k k R^{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi,$$

$$B_k k R^{k-1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1; 2; \ldots,$$

звідки

$$A_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi,$$

$$B_k = \frac{1}{k\pi R^{k-1}} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi, \quad k = 1; 2; \ldots$$

Підставивши коефіцієнти A_k і B_k, $k = 1; 2; \ldots$ у рівність (15.250), дістанемо розв'язок у вигляді суми ряду. Сталий доданок A_0 залишається невизначеним.

15.6 МЕТОД ФУНКЦІЇ ГРІНА РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Метод функції Гріна — один із найбільш застосовних методів розв'язання задач математичної фізики. Він полягає в тому, що спочатку знаходять деякий спеціальний розв'язок задачі того самого типу, а потім через нього в квадратурах виражають розв'язок вихідної задачі.

Опишемо цей метод докладніше на прикладі розв'язання першої крайової задачі для рівняння Лапласа.

Перша крайова задача для рівняння Лапласа — задача Діріхле — полягає в тому, що необхідно знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ у деякій області Ω, який задовольняє на межі Γ цієї області умову $u|_\Gamma = \tilde{u}$, де $\tilde{u}$ — відома функція, задана на Γ.

Ця задача часто зустрічається при моделюванні різних стаціонарних процесів, наприклад поширення тепла, явищ дифузії і фільтрації тощо (див. п. 15.2).

15.6.1. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа

Нехай $M(x, y, z)$ і $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — відповідно змінна й фіксована точки простору, а $r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — відстань між ними. Знайдемо розв'язок тривимірного рівняння Лапласа $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ вигляду $u = u(r)$, тобто розв'язок, який має сферичну симетрію відносно точки M_0.

Вигляд оператора Лапласа Δu після переходу від змінних (x, y, z) до змінної r знайдемо з (15.31) з урахуванням того, що шуканий розв'язок $u(r)$ не повинен залежати від кутів φ і θ сферичної системи координат. Рівняння Лапласа при цьому набуде вигляду

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Інтегруючи це звичайне диференціальне рівняння, дістанемо загальний розв'язок

$$u(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2,$$

де C_1 і C_2 — довільні сталі. Поклавши, зокрема, $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, матимемо частинний розв'язок рівняння Лапласа

$$q(M, M_0) \equiv q(x, y, z;\ x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{r_{MM_0}}, \qquad (15.251)$$

який називають *фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа в просторі.*

Аналогічно, поклавши $u = u(r)$, де $r = r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — відстань між змінною $M(x, y)$ і фіксованою $M_0(x_0, y_0)$ точками площини Oxy, і користуючися (15.29), знайдемо загальний розв'язок двовимірного рівняння Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, який має кругову симетрію відносно точки $M_0(x_0, y_0)$:

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Вибираючи $C_1 = -1$, $C_2 = 0$, матимемо частинний розв'язок рівняння Лапласа

$$q(M, M_0) \equiv q(x, y; x_0, y_0) = \ln \frac{1}{r_{M_0 M}}, \qquad (15.252)$$

який називають *фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа на площині.*

Означення 15.9. *Функцію $u(x, y, z) \equiv u(M)$, яка має неперервні частинні похідні до другого порядку включно й задовольняє рівняння Лапласа в деякій області, називають* ***гармонічною*** *в цій області.*

За цим означенням функції $q(M, M_0)$, які визначаються рівностями (15.251) і (15.252), є гармонічними всюди, крім точки M_0, в якій вони перетворюються на нескінченність.

15.6.2. Функція Гріна для задачі Діріхле (тривимірний випадок)

Розглянемо тривимірну задачу Діріхле, яка полягає в тому, що необхідно знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad (15.253)$$

у просторовій області Ω, обмеженій замкненою поверхнею Γ, який задовольняє умову

$$u\big|_{\Gamma} = \tilde{u}(x, y, z), \qquad (15.254)$$

де $\tilde{u}(x, y, z)$ — відома функція, задана на поверхні Γ.

Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M(x, y, z)$ — довільні фіксована й змінна точки області Ω. Тоді згідно з п. 15.6.1 функція $q(M, M_0)$, яка визначена формулою (15.251), є гармонічною, тобто задовольняє рівняння Лапласа (15.253) в усіх точках області Ω, крім точки M_0.

Оточимо точку M_0 сферою γ радіусом ε з центром у точці M_0 (рис. 15.2). При цьому припускаємо, що сфера γ цілком лежить усередині Γ. Область, обмежену поверхнями Γ і γ, позначимо W.

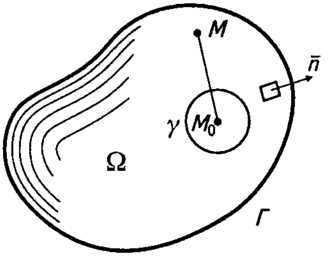

Рис. 15.2

Згідно з побудовою функція $q(M, M_0)$, яка визначена формулою (15.251), буде гармонічною всюди в W, оскільки ця область утворена вилученням із Ω сфери γ разом з областю, що міститься в ній, отже, разом із точкою M_0, в якій $q(M, M_0)$ втрачає гармонічність.

Позначимо через q_1 функцію, яка є гармонічною в усій області Ω, отже, є розв'язком рівняння Лапласа

$$(q_1)_{xx} + (q_1)_{yy} + (q_1)_{zz} = 0 \qquad (15.255)$$

в області Ω, а на поверхні Γ задовольняє умову

$$q_1\big|_\Gamma = q\big|_\Gamma. \qquad (15.256)$$

➡ **Означення 15.10.** *Різницю функцій $q_1 - q$ називають* ***функцією Гріна*** *для задачі Діріхле в області Ω.*

Функцію Гріна зазвичай позначають через

$$G = G(M, M_0) = q_1 - q = q_1 - \frac{1}{r_{M_0 M}}. \qquad (15.257)$$

Звернемо увагу на те, що функція Гріна залежить як від координат x, y, z змінної точки M, так і від координат x_0, y_0, z_0, довільно вибраної, але фіксованої точки M_0 (останні входять явно в q, але вони увійдуть також через крайову умову (15.256) і в q_1). Слід зазначити також, що функція Гріна як різниця двох гармонічних функцій є гармонічною в області W, тобто

$$\Delta G = G_{xx} + G_{yy} + G_{zz} = 0 \qquad (15.258)$$

в області W. Крім того, згідно з (15.256), (15.257) функція Гріна на поверхні Γ перетворюється в нуль:

$$G\big|_\Gamma = 0. \qquad (15.259)$$

15.6.3. Розв'язання задачі Діріхле методом функції Гріна

Тривимірний випадок. Метод функції Гріна базується на використанні формули Гріна, яка для області W, обмеженої зовні й зсередини поверхнями Γ і γ, записується у вигляді

$$\iiint\limits_W (u\Delta v - v\Delta u)dw = \oiint\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma +$$

$$+\oiint\limits_\gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n_1} - v\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)d\sigma, \qquad (15.260)$$

де $u(x, y, z)$ і $v(x, y, z)$ — дві будь-які двічі диференційовні функції; $\bar{n}$ і $\bar{n}_1$ — одиничні вектори зовнішніх нормалей до поверхонь Γ і γ відповідно. Вектор $\bar{n}$ при цьому напрямлений назовні відносно поверхні Γ, а вектор $\bar{n}_1$ — всередину поверхні γ, оскільки внутрішність γ не належить W.

Для знаходження розв'язку задачі Діріхле (15.253), (15.254) в області Ω припустимо, що функція $u(x, y, z)$ у формулі (15.260) — це шуканий розв'язок задачі (15.253), (15.254), а $v(x, y, z) = G$, де G — функція Гріна (15.257) цієї задачі. За таких припущень ліва частина формули (15.260) згідно з (15.253), (15.258) перетворюється в нуль, і ми дістаємо рівність

$$\oiint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n}\right)\partial\sigma + \oiint_{\gamma}\left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)\partial\sigma = 0. \qquad (15.261)$$

Перший з інтегралів у (15.261) з урахуванням (15.254) і (15.259) зводиться до $\oiint_{\Gamma}\tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\partial\sigma$, тому (15.261) стає

$$\oiint_{\gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n_1} - u\frac{\partial G}{\partial n_1}\right)\partial\sigma = \oiint_{\Gamma}\tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\partial\sigma. \qquad (15.262)$$

Обчислимо інтеграл у лівій частині цієї формули. Позначимо через Q довільну точку на сфері γ; матимемо

$$\oiint_{\gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n_1} - u\frac{\partial G}{\partial n_1}\right)\partial\sigma = \oiint_{\gamma}\left\{\left[q_1 - \frac{1}{r_{M_0Q}}\right]\frac{\partial u}{\partial n_1} - \right.$$

$$\left. - u\left[\frac{\partial q_1}{\partial n_1} - \frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r_{M_0Q}}\right)\right]\right\}d\sigma = \oiint_{\gamma}\left[u\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r_{M_0Q}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r_{M_0}Q}\frac{\partial u}{\partial n_1}\right]d\sigma + \oiint_{\gamma}\left(q_1\frac{\partial u}{\partial n_1} - u\frac{\partial q_1}{\partial n_1}\right)d\sigma. \qquad (15.263)$$

Для обчислення останнього інтеграла в (15.263) за формулою Гріна перейдемо в його підінтегральній функції до диференціювання за напрямом зовнішньої (відносно області $\Omega - W$) нормалі $\overline{N} = -\bar{n}_1$ до сфери γ. Це дає змогу дістати

$$\oiint_{\gamma}\left(q_1\frac{\partial u}{\partial n_1} - u\frac{\partial q_1}{\partial n_1}\right)d\sigma = \oiint_{\gamma}\left(u\frac{\partial q_1}{\partial N} - q_1\frac{\partial u}{\partial N}\right)d\sigma =$$

$$= \iiint_{\Omega - W}(u\Delta q_1 - q_1\Delta u)\,dw.$$

Цей інтеграл дорівнює нулю, оскільки за припущенням функції u і q_1 гармонічні в усій області Ω, отже, гармонічні й усередині сфери γ, тобто в області $\Omega - W$.

Таким чином, рівність (15.263) набирає вигляду

$$\oiint_{\gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n_1}-u\frac{\partial G}{\partial n_1}\right)d\sigma=\oiint_{\gamma}\left[u\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r_{M_0Q}}\right)-\frac{1}{r_{M_0Q}}\frac{\partial u}{\partial n_1}\right]d\sigma.$$

Зазначимо, що $r_{M_0Q}=\varepsilon$. Тому

$$\oiint_{\gamma}\frac{1}{r_{M_0Q}}\frac{\partial u}{\partial n_1}d\sigma=\frac{1}{\varepsilon}\oiint_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial n_1}d\sigma=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right)=4\pi\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right),$$

де за теоремою про середнє в інтегральному численні (застосованою до інтеграла по сфері γ) $\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right)$ — значення $\frac{\partial u}{\partial n_1}$ у деякій точці сфери γ.

Похідна за напрямом зовнішньої (відносно області W) нормалі $\overline{n}_1$ у точках Q сфери γ набуває значення

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r_{M_0Q}}\right)=-\frac{\partial}{\partial r_{M_0Q}}\left(\frac{1}{r_{M_0Q}}\right)=\frac{1}{r_{M_0Q}^2}=\frac{1}{\varepsilon^2},$$

так що

$$\oiint_{\gamma}u\frac{\partial}{\partial n_1}\left(\frac{1}{r_{M_0Q}}\right)d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\oiint_{\gamma}u\,d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2\overline{u}=4\pi\overline{u},$$

де $\overline{u}$ — значення u у деякій точці сфери γ.

Таким чином, обчислення інтеграла лівої частини (15.262) завершено:

$$\oiint_{\gamma}\left(G\frac{\partial u}{\partial n_1}-u\frac{\partial G}{\partial n_1}\right)d\sigma=4\pi\overline{u}-4\pi\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right).$$

Це дає змогу переписати (15.262) у вигляді

$$4\pi\overline{u}-4\pi\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right)=\oiint_{\Gamma}\tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma.$$

Права частина цієї рівності, очевидно, не залежить від ε. Тому вона має дорівнювати також і границі лівої частини при $\varepsilon\to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(4\pi\bar{u} - 4\pi\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right)\right) = \oiint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (15.264)$$

При $\varepsilon \to 0$ сфера γ стягується в точку M_0. Тому з (15.264) випливає

$$4\pi\, u(M_0) = \oiint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma$$

або остаточно

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (15.265)$$

Оскільки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — довільна точка області Ω, то формула (15.265) дає розв'язок задачі Діріхле (15.253), (15.254) у цій області, якщо функція Гріна G для неї відома.

Двовимірний випадок. Якщо функція u залежить лише від двох просторових координат, наприклад x і y, то задача Діріхле формулюється так: необхідно знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (15.266)$$

в області D площини Oxy, який на замкненій кривій Γ, що обмежує цю область, задовольняє умову

$$u\big|_{\Gamma} = \tilde{u}(x, y), \qquad (15.267)$$

де $\tilde{u}(x, y)$ — відома функція, задана на кривій Γ.

Нехай $M_0(x, y)$ і $M(x, y)$ — довільні фіксована й змінна точки області D. Оточимо точку M_0 колом γ радіусом $\varepsilon > 0$ з центром у точці M_0, яке цілком лежить у D (рис. 15.3). Область, обмежену кривими Γ і γ, позначимо E.

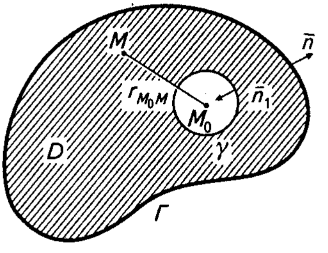

Рис. 15.3

Запишемо для області E формулу Гріна

$$\iint_E (u\,dv - v\,du)\,d\sigma = \oint_{\Gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds +$$

$$+ \oint_{\gamma}\left(u\frac{\partial v}{\partial n_1} - v\frac{\partial u}{\partial n_1}\right)ds. \qquad (15.268)$$

У (15.268) $u\,(x, y)$ і $v\,(x, y)$ — будь-які двічі диференційовні функції; $\bar{n}$ і $\bar{n}_1$ — одиничні вектори зовнішніх (відносно області E) нормалей до кривих Γ і γ відповідно.

Припустимо, що функція $u(x, y)$ у (15.268) — це шуканий розв'язок задачі Діріхле (15.266), (15.267) в області D, а $v(x, y)$ — функція Гріна $G(M, M_0)$ цієї задачі, яка визначається таким чином:

$$G = G(M, M_0) \equiv G(x, y; x_0, y_0) = q_1 - q, \tag{15.269}$$

де q — фундаментальний розв'язок (15.252) рівняння Лапласа (15.266); q_1 — функція, яка є гармонічною в усій області D, а отже, є розв'язком рівняння Лапласа

$$(q_1)_{xx} + (q_1)_{yy} = 0 \tag{15.270}$$

в області D, а на кривій Γ задовольняє умову

$$q_1|_\Gamma = q|_\Gamma, \tag{15.271}$$

унаслідок чого

$$G|_\Gamma = 0. \tag{15.272}$$

Оскільки функція $q = \ln \dfrac{1}{r_{M_0 M}}$ гармонічна в усіх точках D, відмінних від M_0, то функція Гріна (15.269) є гармонічною в усіх точках області E. Отже, в цій області і $\Delta u = 0$, і $\Delta G = 0$. Таким чином, формула (15.268) тепер набере вигляду

$$\oint_\Gamma \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds + \oint_\gamma \left(u\frac{\partial G}{\partial n_1} - G\frac{\partial u}{\partial n_1} \right) ds = 0. \tag{15.273}$$

Для функцій u і G на кривій Γ виконуються умови (15.267) і (15.272), тому

$$\oint_\Gamma \left(u\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \oint_\Gamma \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} ds$$

і рівність (15.273) стає

$$\oint_\gamma \left(G\frac{\partial u}{\partial n_1} - u\frac{\partial G}{\partial n_1} \right) ds = \oint \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n} ds. \tag{15.274}$$

Обчислення інтеграла в лівій частині (15.274) аналогічне обчисленню інтеграла в лівій частині (15.262) і може бути виконане самостійно. При цьому дістанемо

$$\oint_\gamma \left(G\frac{\partial u}{\partial n_1} - u\frac{\partial G}{\partial n_1} \right) ds = 2\pi\bar{u} - 2\pi\varepsilon \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}} \right),$$

де $\bar{u}$ і $\left(\overline{\dfrac{\partial u}{\partial n_1}} \right)$ — значення u і $\dfrac{\partial u}{\partial n_1}$ у деяких точках кола γ.

Звідси рівність (15.274) набуває вигляду

$$2\pi\bar{u} - 2\pi\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right) = \oint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds.$$

Права частина цієї рівності не залежить від радіуса ε кола γ. Тому вона має дорівнювати також і границі лівої частини при $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(2\pi\bar{u} - 2\pi\varepsilon\left(\overline{\frac{\partial u}{\partial n_1}}\right)\right) = \oint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds. \tag{15.275}$$

При $\varepsilon \to 0$ точки, розташовані на колі γ, прямують до точки M_0 — центра кола. Тому з (15.275) знаходимо

$$2\pi u(M_0) = \oint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds$$

або

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma} \tilde{u}\frac{\partial G}{\partial n}\,ds. \tag{15.276}$$

Оскільки $M_0(x_0, y_0)$ — довільна точка області D, то ця формула дає розв'язок задачі Діріхле (15.266), (15.267) у цій області, якщо функція Гріна G для неї відома.

Результати, які одержано в п. 15.6.3, показують, що застосування методу функції Гріна для розв'язання задачі Діріхле розбивається на два етапи. На першому етапі слід знайти функцію Гріна G для цієї задачі. Вона залежить від вигляду області, в якій розв'язується задача Діріхле. Це є наслідком того, що функція q_1, яка входить до складу функції Гріна (15.257) або (15.269), є розв'язком відповідної задачі Діріхле в цій області — (15.255), (15.256) у тривимірному випадку або (15.270), (15.271) — у двовимірному. Обчисленням інтеграла (15.265) або (15.276) на другому етапі завершується розв'язання задачі Діріхле методом функції Гріна.

Досвід показує, що знаходження функцій q_1 як розв'язку відповідної задачі Діріхле є таким самим складним, як розв'язання вихідної задачі Діріхле, для якого вона потрібна. Тому для знаходження функції q_1 і, як наслідок, функції Гріна використовують штучні методи її побудови. Один із таких методів — це *метод віддзеркалення,* або *метод спряжених точок.*

15.6.4. Спряжені точки

➡ **Означення 15.11**. *Дві точки M_0 і M_0^* називають **спряженими відносно площини (у просторі) або прямої (на площині)**, якщо вони симетричні відносно цієї площини або прямої.*

Так, точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_0^*(x_0, y_0, -z_0)$ спряжені відносно площини $z = 0$, а точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M_0^*(x_0, -y_0)$ — відносно прямої $y = 0$.

➡ **Означення 15.12**. *Точки M_0 і M_0^* називають **спряженими відносно сфери або кола**, якщо вони лежать на одному промені, що виходить із центра O сфери або кола, і добуток їх відстаней від центра дорівнює квадрату радіуса: $|OM_0||OM_0^*| = R^2$, де R — радіус сфери або кола.*

Якщо центр сфери збігається з початком координат, то точка M_0 (x_0, y_0, z_0) спряжена відносно сфери з точкою $M_0^*(R^2x_0/r_0^2, R^2y_0/r_0^2, R^2z_0/r_0^2)$, де $r_0 = OM_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. Щоб у цьому переконатися, позначимо координати спряженої точки M_0^* через x_0^*, y_0^*, z_0^*; тоді $r_0^* = |OM_0^*| = \sqrt{x_0^{*2} + y_0^{*2} + z_0^{*2}}$. За означенням $r_0 r_0^* = R^2$. Оскільки точки M_0 і M^* лежать на одному промені, який виходить із початку координат, то

$$\frac{x_0^*}{x_0} = \frac{r_0^*}{r_0} = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad \frac{y_0^*}{y_0} = \frac{R^2}{r_0^2}, \quad \frac{z_0^*}{z_0} = \frac{R^2}{r_0^2},$$

звідки

$$x_0^* = \frac{R^2}{r_0^2}x_0, \quad y_0^* = \frac{R^2}{r_0^2}y_0, \quad z_0^* = \frac{R^2}{r_0^2}z_0.$$

Абсолютно аналогічно визначимо, що точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M_0^*(R^2x_0/r_0^2, R^2y_0/r_0^2)$, де $r_0 = |OM_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, спряжені відносно кола радіусом R із центром у початку координат.

Очевидно, якщо точка M_0 лежить усередині сфери (кола), то точка M_0^* розташовується поза сферою (колом); якщо M_0 лежить на сфері (колі), то M_0^* збігається з M_0. З центром сфери або кола не спряжена жодна точка.

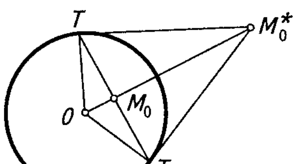

Рис. 15.4

Побудова спряжених точок відносно кола і сфери здійснюється таким чином: нехай M_0 лежить усередині кола й не збігається з її центром (рис. 15.4); проведемо через M_0 хорду TT_1, перпендикулярну до променя OM_0, і через кінці T і T_1 — дотичні до кола; ці дотичні перетинаються в точці M_0^* на промені OM_0, оскільки з подібності трикутників OM_0T і OTM_0^* випливає, що $OM_0 / OT = OT / OM_0^*$, звідки $|OM_0||OM_0^*| = |OT^2| = R^2$. Якщо ми обертатимемо фігуру на рис. 15.4 навколо осі $OM_0M_0^*$, то дістанемо відповідну побудову для сфери. Очевидно, що вказаним способом можна за точкою M_0^* побудувати точку M_0 (тобто спряжену з точкою, яка лежить поза сферою або колом).

Застосування методу віддзеркалення, або методу спряжених точок, до побудови функції Гріна розглянемо на прикладі.

■ **Приклад 15.16**. *Розв'язати задачу Діріхле для кулі: знайти розв'язок тривимірного рівняння Лапласа (15.253) у кулі радіусом R, який на її поверхні набирає відомих значень $\tilde{u}$, тобто задовольняє умову (15.254).*

Розглянемо кулю радіусом R із центром у початку координат. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — довільна фіксована точка всередині кулі, $M_0^*(x_0^*, y_0^*, z_0^*)$ — точка, спряжена з нею, і $M(x, y, z)$ — довільна змінна точка всередині кулі. Позначимо $r_{M_0M} = |M_0M|$, $r_{M_0^*M} = |M_0^* M|$, $r = |OM|$, $r_0 = |OM_0|$, $r_0^* = |OM_0^*|$, $\angle M_0OM = \psi$ (рис. 15.5).

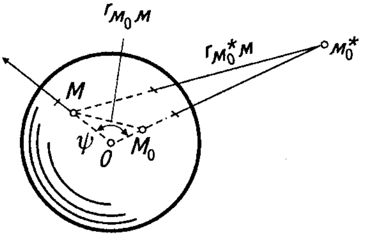

Рис. 15.5

За теоремою косинусів матимемо

$$r_{M_0M} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\psi},$$

$$r_{M_0^*M} = \sqrt{r^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos\psi}.$$

Оскільки $r_0 r_0^* = R^2$, то

$$r_{M_0^*M} = \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r_0^2} - 2r\frac{R^2}{r_0}\cos\psi}.$$

Згідно з п. 15.6.1 функція $q = \dfrac{1}{r_{M_0M}}$ задовольняє рівняння Лапласа (15.253) в усіх точках кулі, крім точки M_0. Оскільки точка M_0^*, як спряжена з точкою M_0 відносно сфери Г, лежить поза кулею, то функція $q_2 = \dfrac{1}{r_{M_0^*M}}$ буде гармонічною всюди всередині кулі. Якщо точка M розташована на межі кулі — на сфері Г, то $r = R$ і

$$r_{M_0M}|_Г = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\psi};$$

$$r_{M^*_0M}|_Г = \sqrt{R^2 + R^4/r_0^2 - 2(R^3/r_0)\cos\psi} = \qquad (15.277)$$

$$= (R/r_0)\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos\psi} = (R/r_0)r_{M_0M}\big|_\Gamma .$$

Тому функція $q_1 = (R/r_0)q_2 = (R/r_0)(1/r_{M_0^*M})$ є гармонічною всередині кулі, а її значення на сфері Γ збігаються зі значеннями функції $q = 1/r_{M_0M}$, оскільки

$$q_1\big|_\Gamma = \frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{M_0^*M}\big|_\Gamma} = \frac{1}{r_{M_0M}\big|_\Gamma} = q\big|_\Gamma .$$

Отже, згідно з означенням (див. п. 15.6.2) функція Гріна для кулі має вигляд

$$G = q_1 - q = \frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{M_0^*M}} - \frac{1}{r_{M_0M}}. \qquad (15.278)$$

Визначивши функцію Гріна, можна за формулою (15.265) знайти розв'язок задачі Діріхле для кулі. Для цього потрібно спочатку обчислити значення похідної від функції Гріна за напрямом зовнішньої нормалі, тобто $\frac{\partial G}{\partial n}$ при $r = R$. Оскільки напрями зовнішньої нормалі $\bar{n}$ у точці M сфери Γ і вектора $\bar{r} = \overline{OM}$ збігаються, то

$$\frac{\partial G}{\partial n\big|_\Gamma} = \frac{\partial G}{\partial r\big|_{r=R}} .$$

Тоді згідно з формулами, які визначають G, r_{M_0M} і $r_{M_0^*M}$, матимемо

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r_{M_0M}^2}\frac{\partial r_{M_0M}}{\partial r} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{M_0^*M}^2}\frac{\partial r_{M_0^*M}}{\partial r} = \frac{r - r_0}{r_{M_0M}^3} - \frac{R}{r_0}\frac{r - (R^2/r_0)\cos\psi}{r_{M_0^*M}^3} .$$

Ураховуючи формули (15.277), дістанемо

$$\frac{\partial G}{\partial r\big|_{r=R}} = \frac{R - r_0\cos\psi}{r_{M_0M\big|_\Gamma}^3} - \frac{R}{r_0}\frac{R - (R^2/r_0)\cos\psi}{(R^3/r_0^3)r_{M_0M}^3\big|_\Gamma} =$$

$$= \frac{R^2 - r_0^2}{Rr_{M_0M\big|_\Gamma}^3} = \frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\psi)^{3/2}} . \qquad (15.279)$$

Введемо сферичні координати з початком у точці O:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta.$$

Позначимо координати точки M через r, θ, φ, а координати точки M_0 — через r_0, θ_0, φ_0. Тоді у формулі (15.265) $d\sigma = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, $\tilde{u}$ буде функцією θ і φ, і залишається тільки виразити через введені сферичні координати величину $\cos\psi$ виразу (15.279). Це можна зробити за допомогою ортів $\bar{e}_0$ і $\bar{e}$ напрямів $\overline{OM}_0$ і $\overline{OM}$. Оскільки

$$\overline{OM}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k} = r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0\bar{i} + r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0\bar{j} + r_0\cos\theta_0\bar{k};$$

$$\overline{OM} = r\sin\theta\cos\varphi\,\bar{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\bar{j} + r\cos\theta\,\bar{k},$$

то

$$\bar{e}_0 = \frac{1}{r_0}\overline{OM}_0 = \sin\theta_0\cos\varphi_0\,\bar{i} + \sin\theta_0\sin\varphi_0\,\bar{j} + \cos\theta_0\,\bar{k};$$

$$\bar{e} = \frac{1}{r}\overline{OM} = \sin\theta\cos\varphi\,\bar{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\bar{j} + \cos\theta\,\bar{k}.$$

Отже,

$$\cos\psi = \bar{e}_0\,\bar{e} = \sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi-\varphi_0) + \cos\theta_0\cos\theta. \qquad (15.280)$$

Таким чином, остаточний розв'язок задачі Діріхле для кулі знаходимо у вигляді

$$u(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{1}{4\pi}\oint\!\!\oint_{\Gamma} \tilde{u}(\theta,\varphi)\frac{R^2 - r_0^2}{R(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\psi)^{3/2}}\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \tilde{u}(\theta,\varphi)\frac{R(R^2 - r_0^2)\sin\theta\,d\theta}{(R^2 + r_0^2 - 2\,Rr_0\cos\psi)^{3/2}}, \qquad (15.281)$$

де замість $\cos\psi$ треба підставити його значення (15.280). Інтеграл (15.281) називають *інтегралом Пуассона для кулі.*

Функція Гріна в явному вигляді відома для небагатьох простих областей. Крім функції Гріна (15.278) для кулі, метод віддзеркалення дає змогу побудувати, зокрема, функції Гріна для півпростору $z > 0$, обмеженого площиною $z = 0$:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{r_{M_0^* M}} - \frac{1}{r_{M_0 M}}; \qquad (15.282)$$

для круга радіусом R із центром у початку координат:

$$G(M, M_0) = \ln\frac{R}{r_0}\frac{1}{r_{M_0^* M}} - \ln\frac{1}{r_{M_0 M}}; \qquad (15.283)$$

для півплощини $y > 0$, обмеженої прямою $y = 0$:

$$G(M, M_0) = \ln\frac{1}{r_{M_0^* M}} - \ln\frac{1}{r_{M_0 M}}. \qquad (15.284)$$

У (15.282)–(15.284) використано ті самі позначення, що й при виведенні формули (15.278). Зокрема, M_0 — довільна фіксована точка області розв'язання задачі Діріхле; M_0^* — точка, яка не належить до області розв'язання задачі Діріхле й є спряженою з точкою M_0 відносно границі цієї області.

Інші приклади побудови функції Гріна для задачі Діріхле, як у просторовому, так і в плоскому випадках, можна знайти в спеціальних підручниках із рівнянь математичної фізики.

Використання у формулі (15.265) виразу (15.282) для функції Гріна дає змогу знайти розв'язок задачі Діріхле (15.253), (15.254) для півпростору $z > 0$, обмеженого площиною $z = 0$:

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{u}(x,y)dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}.$$

Використавши у формулі (15.276) вирази (15.283), (15.284), можна знайти розв'язки задачі Діріхле (15.266), (15.267) для круга радіусом R:

$$u(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} d\varphi$$

і півплощини $y > 0$, обмеженої прямою $y = 0$:

$$u(x_0, y_0) = \frac{y_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{u}(x)}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

Ці розв'язки мають назви *інтегралів Пуассона для півпростору, круга й півплощини* відповідно.

Метод функції Гріна використовується також при розв'язанні другої та третьої крайових задач для рівняння Лапласа, а також задач математичної фізики для рівнянь параболічного й гіперболічного типів.

15.6.5. Побудова функції Гріна за допомогою конформних відображень

Дуже ефективним методом побудови функцій Гріна для плоских областей є метод теорії функцій комплексної змінної. Він ґрунтується на властивостях конформного відображення, яке здійснюється аналітичними функціями комплексної змінної, а також на тому, що дійсна й уявна частини будь-якої аналітичної функції $f(z)$ $(z = x + iy)$ є гармонічними функціями, і навпаки: будь-яку гармонічну функцію можна розглядати як дійсну або уявну частину деякої аналітичної функції.

Нехай D — область, яка обмежена кривою Γ, а M, M_0 — дві точки цієї області. Комплексні координати цих точок позначимо через z і z_0

відповідно. Нехай $w=\varphi(z)$ — функція комплексної змінної z, яка відображає конформно область D на одиничний круг $|w|<1$, причому так, що $\varphi(z_0)=0$. Покажемо, що функція

$$G(M,M_0)=G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|\varphi(z)| \qquad (15.285)$$

є функцією Гріна задачі Діріхле для області D.

Перевіримо спочатку умову (15.272). При відображенні $w=\varphi(z)$ точкам контуру Г відповідають точки одиничного кола $|w|=1$, отже, $|\varphi(z)|=1$, звідки згідно з (15.285) маємо $G=0$.

Покажемо, що функція (15.285) має вигляд (15.269). Оскільки функція $w=\varphi(z)$ здійснює конформне відображення області D, то вона є аналітичною в області D, і $\varphi'(z)\neq 0$ всюди в D, включаючи точку $z=z_0$. Крім того, відображення, яке здійснює функція $w=\varphi(z)$, є взаємно однозначним, тому $\varphi(z)\neq 0$ при $z\neq z_0$. Отже, $z=z_0$ є нулем першого порядку функції $\varphi(z)$. Тому функцію $\varphi(z)$ можна зобразити у вигляді

$$\varphi(z)=(z-z_0)\varphi_1(z), \qquad (15.286)$$

де $\varphi_1(z)$ — аналітична функція, відмінна від нуля в D. Підставивши (15.286) у (15.285), дістанемо

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|\varphi_1(z)|-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|z-z_0|}. \qquad (15.287)$$

Але $\frac{1}{2\pi}\ln|\varphi_1(z)|$ — функція, гармонічна в D як дійсна частина аналітичної функції $\frac{1}{2\pi}\ln\varphi_1(z)$, а $|z-z_0|=r_{M_0M}$. Отже, твердження про те, що функція $G(M, M_0)$, яка визначається формулою (15.285), є функцією Гріна для області D, доведено.

Таким чином, функцію Гріна для двовимірної задачі Діріхле (15.266), (15.267) можна побудувати, якщо відоме конформне відображення області її розв'язання на одиничний круг.

Глава 16 ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

16.1 ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Народження теорії імовірностей відноситься до середини XVII ст. й пов'язане з вивченням азартних ігор задля визначення шансів гравця на виграш. Це привело до задач, які не вкладалися в рамки існуючих на той час математичних моделей і стимулювали тим самим введення нових понять, підходів та ідей. Ці нові елементи можна зустріти вже в працях видатних учених свого часу — П. Ферма (1601—1665), Б. Паскаля (1623—1662), Х. Гюйгенса (1629—1695), Я. Бернуллі (1654—1705), П. Лапласа (1749—1827), К. Гаусса (1777—1855). Протягом майже двох століть основними галузями застосування теорії імовірностей були азартні ігри, страхування та демографія.

Наприкінці XIX — на початку XX століття нагальні потреби природознавства (розв'язання теорії похибок спостережень, теорії стрільби, теорії статистики) сприяли дальшому розвиткові теорії імовірностей.

Переважно завдяки фундаментальним працям із теорії імовірностей російських учених П. Л. Чебишова (1821—1894), А. А. Маркова (1856—1922), О. М. Ляпунова (1857—1918), О. Я. Хінчина (1894—1959), А. М. Колмогорова (1903—1987) та інших вона сформувалася в самостійну математичну науку, теоретико-ймовірнісні методи якої дедалі ширше застосовуються майже в усіх галузях природознавства.

Вихідні поняття теорії імовірностей — це стохастичний експеримент, випадкова подія, імовірність випадкової події.

Предметом теорії імовірностей є математичний аналіз стохастичного експерименту.

16.2 СТОХАСТИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Експеримент у теорії імовірностей називається ***стохастичним****, якщо:*

1) *результат експерименту не можна заздалегідь передбачити;*

2) *експеримент можна повторити будь-яку кількість разів (при повтореннях експерименту за одних і тих самих умов результати можуть бути різними).*

Наведемо кілька прикладів стохастичних експериментів.

■ **Приклад 16.1**. *Гральний кубик (це кубик з однорідного матеріалу, на гранях якого вибито очки від 1 до 6) підкидають один раз.* Результатом експерименту буде кількість очок на верхній грані. Це може бути довільне ціле число від 1 до 6.

■ **Приклад 16.2**. *Монету підкидають доти, доки не випаде герб.* Результатом експерименту буде кількість підкидань. Це може бути довільне натуральне число.

■ **Приклад 16.3**. *Стержень завдовжки l навмання розламують на дві частини.* «Навмання» означає, що розлом може статися в будь-якому місці стержня, тобто жодне місце розлому не має переваги над іншими. Результатом експерименту може бути довільне місце розлому стержня.

■ **Приклад 16.4**. *Частинка, яка бере участь у броунівському русі, рухається внаслідок поштовхів молекул рідини, самі ж молекули перебувають у хаотичному тепловому русі.* Спостерігається частинка певний інтервал часу $[0;\ T]$. Результатом експерименту буде траєкторія руху частинки, вигляд якої заздалегідь не можна передбачити.

Поняття стохастичного експерименту досить широке. Легко переконатися, що до таких експериментів належать, наприклад: розіграш лотереї; вибірковий контроль якості продукції на виробництві; дослідження генетичного механізму спадковості; визначення часу розпаду радіоактивного ядра та ін. До стохастичних експериментів можна віднести й такі явища, які ми не можемо спостерігати.

Для математичного аналізу стохастичного експерименту будують його імовірнісну (математичну) модель. При її побудові формалізуються вихідні поняття теорії імовірностей; при цьому використовуються такі істотні риси стохастичного експерименту:

1) незалежність експерименту від технічної сторони (цікавлять лише його можливі результати);

2) можливість повторити експеримент будь-скільки разів (цікавлять кількісні закономірності появи того чи іншого результату за багаторазових повторень).

Зважаючи на істотну рису 1, на першому кроці побудови ймовірнісної моделі експерименту можна поставити у відповідність множину Ω усіх можливих найпростіших його результатів (які не розкладаються на простіші). Множину Ω називають ***простором елементарних подій*** стохастичного експерименту, а її елементи — ***елементарними подіями.***

Елементи множини Ω позначатимемо символом ω з різними індексами. Так, у прикладі 16.1 буде $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, де ω_k відповідає появі k очок; у прикладі 16.2 матимемо $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots\}$, де ω_k відповідає появі вперше герба при k-му підкиданні ($\omega_k = \underbrace{PP\ldots P}_{k-1}\Gamma$); у прикладі 16.3 за множину Ω можна взяти точки інтервалу $(0, l)$ числової прямої; у прикладі 16.4 множина Ω — це сукупність можливих траєкторій руху броунівської частинки.

Простір елементарних подій Ω може бути: 1) скінченним, тобто складатися зі скінченної кількості елементів (у прикладі 16.1 кількість елементів дорівнює 6); 2) нескінченним, але зліченним, тобто складатися з нескінченної кількості елементів, які можна пронумерувати сукупністю натуральних чисел (у прикладі 16.2 кількість елементів нескінченна, але пронумерована); 3) незліченним, тобто складатися з нескінченної кількості елементів, які не можна пронумерувати сукупністю натуральних чисел (у прикладі 16.3 множина Ω складається з дійсних чисел інтервалу $(0, l)$, які вже не можна перенумерувати).

Зрозуміло, що в кожному стохастичному експерименті, крім найпростіших результатів, можна розглядати й складніші події, які можуть здійснитися (відбутися) в даному експерименті. Так, у прикладі 16.1 можна розглядати подію, яка полягає в тому, що випаде парне число очок. Ця подія відбувається при появі: або двох, або чотирьох, або шести очок, тобто складається з трьох найпростіших результатів. Можна розглядати й такі події: випаде непарне число очок; випаде число очок менше 4 і т. д. Взагалі, якщо M — довільна підмножина $(1; 2; 3; \ldots; 6)$, то може випасти число очок, яке належить до M. Це загальний вигляд події, яка може здійснитися в цьому експерименті.

Події, які можуть відбутися в певному стохастичному експерименті, називають ***випадковими подіями, пов'язаними з даним стохастичним експериментом***, і позначають літерами A, B, C ... латинського алфавіту.

Зауважимо, що заради простоти замість виразу «випадкова подія A, пов'язана з даним стохастичним експериментом» іноді будемо застосовувати такий: «подія A, пов'язана з даним стохастичним експериментом»; а якщо зрозуміло, з яким стохастичним експериментом пов'язана подія A, то просто казатимемо — «подія A».

Серед випадкових подій, пов'язаних із даним стохастичним експериментом, виділяють дві: вірогідну й неможливу. *Вірогідна подія* — це подія, що напевне відбувається в експерименті; *неможлива* — це подія, яка не може відбутися в цьому експерименті. Так, у прикладі 16.1 подія, яка полягає в тому, що з'явиться число очок не більше від 6, є вірогідною, а подія, яка полягає в тому, що з'явиться число очок, котре дорівнює 7, — неможлива.

Зауважимо, що зазвичай є дуже багато подій, які не можуть відбутися в даному експерименті, але оскільки в теорії імовірностей події вивчаються лише з одного боку — кількісного (частота їх при повторенні експерименту), то всі неможливі події ототожнюються.

Нехай A — довільна подія, пов'язана з даним стохастичним експериментом. Оскільки кожна елементарна подія дає повну інформацію про результат експерименту, то, знаючи, що результат експерименту описується елементом ω із простору елементарних подій Ω цього експерименту, завжди можемо сказати: відбулася подія A чи ні. Елементи ω, на підставі яких можна стверджувати, що подія A відбулася, утворюють певну підмножину A' множини Ω. Елементи ω множини A' називають ***елементарними подіями***, які ***сприяють події*** A, і кажуть, що множина A' є відображенням, або інтерпретацією, події A у множині Ω.

Другий крок у побудові ймовірнісної моделі стохастичного експерименту — це ототожнювання події A, пов'язаної з даним стохастичним експериментом, і множини $A' : A \equiv A'$.

Зрозуміло, що вірогідні події ототожнюються з множиною елементарних подій Ω, а неможливі — з порожньою множиною $\varnothing$.

Отже, надалі випадкова подія A (без уточнення «пов'язана з даним стохастичним експериментом») — це підмножина простору елементарних подій Ω, яка складається з елементарних подій ω, що сприяють події A. Якщо результат експерименту описується точкою ω, і $\omega \in A$, то вважаємо, що подія A відбулася, якщо $\omega \overline{\in} A$ — не відбулася.

Так, у прикладі 16.1 підмножина $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ простору елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ означає випадкову подію, яка полягає в тому, що випаде парне число очок; у прикладі 16.2 підмножина $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ простору елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots\}$ означає випадкову подію, яка полягає в тому, що в експерименті буде зроблено не більше ніж три підкидання (ω_1 — експеримент закінчиться після першого підкидання, ω_2 — після другого, ω_3 — після третього).

Як відомо, для множин визначено поняття відношення порядку $A \subset B$ (включення множин) та алгебраїчної дії: 1) $A \cup B$ (об'єднання множин); 2) $A \cap B$ (переріз множин); 3) $\overline{A}$ (доповнення множини A); 4) $A \setminus B$ (різниця множин). Аналіз цих понять у теорії імовірностей, коли підмножини множини Ω інтерпретуються як події, пов'язані з даним стохастичним експериментом, наведено нижче.

Теорія множин	*Теорія ймовірностей*
Ω — універсальна множина	Ω — простір елементарних подій
Ω — множина	Ω — вірогідна подія (подія, що напевно відбувається в експерименті)
$\varnothing$ — порожня множина	$\varnothing$ — неможлива подія (подія, яка не може відбутися в даному експерименті)
$A \subset B$ — включення множин	З події A випливає подія B (у разі здійснення події A обов'язково відбувається подія B)
$A = B$ ($A \subset B$, $B \subset A$) — рівність множин	Події A і B рівносильні (подія A завжди відбувається, коли здійснюється подія B, і навпаки)
$A \cup B$ — об'єднання множин A і B	$A \cup B$ — сума подій A і B (подія, яка здійснюється тоді й лише тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A або B)
$A \cap B$ — переріз множин A і B	$A \cap B$ — добуток подій A і B (подія, яка здійснюється тоді й лише тоді, коли відбуваються і подія A, і подія B)
$\overline{A} = \Omega \setminus A$ — доповнення A до множини Ω	$\overline{A}$ — подія, протилежна до події A (подія, яка відбувається тоді й лише тоді, коли подія A не відбувається)
$A \cap B = \varnothing$ — A і B — множини, які не перетинаються	$A \cap B = \varnothing$ — події A і B несумісні (їх сумісне здійснення неможливе)
$A \setminus B$ — різниця множин A і B	$A \setminus B$ — різниця подій A і B (подія, яка відбувається тоді й лише тоді, коли здійснюється подія A, а подія B не відбувається)
$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ — об'єднання множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$	$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ — сума подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (подія, яка відбувається тоді й лише тоді, коли здійснюється принаймні одна з подій: або A_1, або A_2, ..., або A_n)
$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ — переріз множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$	$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ — добуток подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (подія, яка відбувається тоді й лише тоді, коли здійснюються всі події: і A_1, і A_2, ..., і A_n)

Так, у прикладі 16.1 розглянемо випадкові події $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ і $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Тоді $\overline{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\overline{B} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $A \cup B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$, $A \cap B = \{\omega_2\}$, $A \setminus B = \{\omega_4, \omega_6\}$, $B \setminus A = \{\omega_1, \omega_3\}$ — теж випадкові події. Наприклад, $A \setminus B$ — випадкова подія, яка полягає в тому, що в результаті експерименту випаде число очок 4 або 6.

Пропонуємо переконатися самостійно, що дії над подіями мають ті самі **властивості**, що й відповідні дії над множинами, тобто:

1. $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, якщо $A \subset B$, то $\overline{B} \subset \overline{A}$;
2. $A \cup A = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cup \Omega = \Omega$;
3. $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap \Omega = A$, якщо $A \subset B$, то $A \cap B = A$;
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

16.3 ВІДНОСНА ЧАСТОТА ПОДІЙ. СТАТИСТИЧНЕ ПОНЯТТЯ ЙМОВІРНОСТІ

Третім, останнім, кроком у побудові ймовірнісної моделі стохастичного експерименту є введення поняття ймовірності випадкової події A, яка є числовою характеристикою випадкової події A й характеризує ступінь її об'єктивної появи. Ймовірність випадкової події A позначатимемо через $P(A)$.

При формалізації поняття ймовірності випадкової події використовується друга істотна риса стохастичного експерименту — можливість повторювати стохастичний експеримент будь-скільки разів.

Якщо при повтореннях стохастичного експерименту події, які відбулися при попередніх експериментах, ніяк не впливають на ті події, що відбудуться в даному експерименті, то такі повторення називають ***незалежними.***

Розглянемо певний стохастичний експеримент і подію A, яка може здійснитися в цьому експерименті. Повторимо незалежно експеримент n разів. Нехай $\mu_n(A)$ — кількість експериментів, в яких відбулася подія A. Відношення $\nu_n(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{n}$ називають ***відносною частотою події А в проведеній серії експериментів.***

Властивості відносної частоти

1. *Для кожної події A* $0 \le \nu_n(A) \le 1$.
2. *Для вірогідної події Ω* $\nu_n(\Omega) = 1$.

3 *Якщо A і B — несумісні події, то* $\nu_n(A \cup B) = \nu_n(A) + \nu_n(B)$.

Справді, властивість 1 випливає з того, що $0 \leq \mu_n(A) \leq n$, властивість 2 — з того, що для події Ω $\mu_n(\Omega) = n$ (вірогідна подія відбувається при кожному експерименті), а властивість 3 — з того, що несумісні події не можуть одночасно відбуватися, тому $\mu_n(A \cup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)$.

Одноразове проведення експерименту описується переліченням можливих його результатів і не дає змоги передбачити, який саме результат буде в тому чи іншому конкретному експерименті. Справа істотно змінюється, якщо багато разів незалежно повторювати один і той самий стохастичний експеримент. При цьому виявляються кількісні закономірності, які полягають у тому, що відносні частоти подій мають властивість стійкості: коливаються навколо певних чисел $p \in [0; 1]$, наближаються до них дедалі ближче зі збільшенням числа експериментів. Так, якщо монета симетрична й підкидати її багато разів, то спостерігається кількісна закономірність: кожна зі сторін випаде приблизно однакове число разів. Це підтверджується низкою проведених дослідів. Зокрема, французький учений Ж. Бюффон підкидав монету 4 040 разів, а англійський учений К. Пірсон — 12 000 та 24 000. Результати цих дослідів наведено в таблиці.

Експериментатор	Число підкидань	Число появ герба	Відносна частота
Ж. Бюффон	4 040	2 048	0,508 0
К. Пірсон	12 000	6 019	0,501 6
К. Пірсон	24 000	12 012	0,500 5

Як бачимо, чим більше число підкидань, тим менша похибка відхилення відносної частоти появ герба від 1/2. Факт стійкості відносних частот подій підтверджується багатьма дослідами з різноманітними стохастичними експериментами й має загальний характер.

Отже, кількісні закономірності характеризують об'єктивний зв'язок, що існує між подією A та стохастичним експериментом, в якому ця подія спостерігається. Це дає підстави сталу p (навколо якої коливається відносна частота $\nu_n(A)$) назвати ***ймовірністю події A***.

Якщо так означити поняття ймовірності, то зіткнемося з низкою труднощів. По-перше, з математичного погляду ми не можемо якимось чином з'ясувати факт стійкості відносних частот, оскільки отримати всю послідовність $\nu_n(A)$, $n = 1; 2; \ldots$ неможливо (можемо дістати лише кінцеве число елементів послідовності; більше того, $\nu_n(A)$ при одному й тому самому n у різних серіях буде різне). По-друге, справжнє значення сталої p нам невідоме.

З практичного погляду, за ймовірність $P(A)$ події A беруть відносну частоту $\nu_n(A)$ появ події A в досить великій серії незалежних повторювань експерименту. Так, означену ймовірність називають ***статистичною***. І коли кажуть, що ймовірність події A дорівнює, наприклад, 0,13, то практично це означає, що в 100 дослідах подія A здійснюється в середньому 13 разів.

■ **Приклад 16.5.** *Для контролю якості продукції одного заводу з кожної партії готових деталей беруть 100. Перевірку не витримують у середньому 10 деталей. Яка ймовірність того, що навмання взята деталь, виготовлена на цьому заводі, не буде бракованою?*

Нехай A — подія, яка полягає в тому, що взята деталь не буде бракованою. За умовою задачі ця подія відбувається в середньому 90 разів у кожній партії зі 100 деталей. Тому її відносна частота дорівнює 0,9. Отже, за статистичним означенням імовірності $P(A) = 0{,}9$.

Зрозуміло, що для статистичної ймовірності справджуються властивості 1—3 відносних частот $\nu_n(A)$.

Наголосимо, що статистична ймовірність події A є наближеним значенням невідомої сталої p (навколо якої коливається відносна частота $\nu_n(A)$), а означення статистичної ймовірності має емпіричний, а не формально-математичний характер.

Саме ж значення сталої p дуже важливе, оскільки її можна розглядати як об'єктивну міру частоти появи події A в серії стохастичних експериментів (об'єктивність p полягає в її незалежності від того, що відбувається в окремих експериментах).

Крім того, властивості 1—3 відносних частот $\nu_n(A)$ справджуються при кожному n і, разом із тим, вони не залежать від конкретного експерименту.

Це дало підстави в математичній теорії існування сталих p як імовірностей $P(A)$ подій A постулювати, а властивості ймовірностей $P(A)$ визначати аксіомами, які збігаються з властивостями 1—3 відносних частот $\nu_n(A)$.

Перш ніж навести аксіоматичне поняття ймовірності випадкових подій, розглянемо низку окремих понять імовірності, які охоплюють досить широке коло цікавих і важливих задач (при розв'язанні яких простіше використовувати ці поняття). Крім того, вони стали базою в аксіоматичній побудові основ теорії ймовірностей.

16.4 ЙМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ДИСКРЕТНИМ ПРОСТОРОМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Розглянемо так зване класичне означення ймовірності, яке в історичному плані було першим і ґрунтується на інтуїтивному понятті рівноможливості в скінченних просторах елементарних подій.

16.4.1. Класичне означення ймовірності

➡ **Означення 16.1.** Нехай стохастичний експеримент має скінченне число рівноможливих елементарних подій. ***Імовірністю $P(A)$ події A,*** *пов'язаної з даним експериментом, називається число $P(A) = m / n$, де m — число елементарних подій, які сприяють події A; n — число елементарних подій стохастичного експерименту.*

Слід звернути увагу на те, що користуватися класичним означенням при обчисленні ймовірності подій можемо лише в тих стохастичних експериментах, для яких виконуються дві передумови: 1) кількість елементарних подій скінченна; 2) всі елементарні події рівноможливі. Такі стохастичні експерименти називають ***класичними схемами в теорії імовірностей.***

Розглянемо приклад 16.1. Оскільки гральний кубик виготовлено з однорідного матеріалу (центр ваги збігається з центром симетрії), то є підстави вважати, що є рівні шанси появи кожної грані, тобто має місце рівноможливість елементарних подій. Крім того, їх скінченна кількість $n = 6$. Отже, маємо класичну схему. Тому для визначення ймовірностей подій, пов'язаних із цим експериментом, можемо скористатися класичним означенням імовірності. Нехай подія A полягає в тому, що випаде парне число очок. Цій події сприяють лише три елементарні події $(\omega_2, \omega_4, \omega_6)$. Отже, $n = 6$, $m = 3$. Згідно з означенням $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Зауважимо, що класичне означення ймовірності досить зручне при обчисленні ймовірностей подій у класичних схемах, оскільки не треба будувати сам простір елементарних подій Ω (достатньо обчислити n і m безпосередньо).

■ **Приклад 16.6.** *З урни, в якій міститься п'ять куль, серед яких дві чорні й три білі, навмання взято дві. Визначити ймовірність того, що обидві взяті кулі чорні.*

Зрозуміло, що число всіх елементарних подій у цьому прикладі скінченне. «Навмання» означає рівноможливість елементарних подій. Отже, маємо класичну схему. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що обидві взяті кулі чорні.

(1) Обчислимо n і m безпосередньо. Число n можливих елементарних подій — це число комбінацій $C_5^2 = 10$ (вибір без упорядкування двох куль із п'яти). Оскільки в урні всього дві чорні кулі, то число m елементарних подій, які сприяють події A, дорівнює $C_2^2 = 1$. Тому $P(A) = \frac{1}{10}$.

(2) Для визначення n і m побудуємо простір елементарних подій Ω. Для цього достатньо пронумерувати кулі числами від 1 до 5. Нехай чорні кулі будуть під номерами 4 і 5. Тоді найпростіші результати описуються елементарними подіями: $\omega_1 = (1;\ 2)$, $\omega_2 = (1;\ 3)$, $\omega_3 = (1;\ 4)$, $\omega_4 = (1;\ 5)$, $\omega_5 = (2;\ 3)$, $\omega_6 = (2;\ 4)$, $\omega_7 = (2;\ 5)$, $\omega_8 = (3;\ 4)$, $\omega_9 = (3;\ 5)$, $\omega_{10} = (4;\ 5)$.

Звідси видно, що $n = 10$, а число m елементарних подій, які сприяють події A, дорівнює 1 (тобто лише елементарна подія ω_{10}). Зрозуміло, що в прикладі простіше обчислити n і m безпосередньо.

Деякі важливі властивості ймовірності $P(A)$

1. $0 \le P(A) \le 1$ *для кожної події* A.
2. $P(\Omega) = 1$ *для вірогідної події* Ω.
3. *Якщо події* A *і* B *несумісні, то* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ *для кожної події* A.
5. $P(\varnothing) = 0$ *для неможливої події* $\varnothing$.
6. *Якщо* $A \subset B$, *то* $P(A) \le P(B)$.

Довести ці властивості пропонуємо самостійно, користуючись лише класичним означенням імовірності.

■ **Приклад 16.7.** *У прикладі 16.6 визначити ймовірність того, що серед взятих куль принаймні одна буде білою.*

Подія, ймовірність якої потрібно знайти, протилежна події A, котра полягає в тому, що обидві взяті кулі чорні. Ймовірність $P(A)$ події A знайдено в прикладі 16.1, і вона дорівнює $\frac{1}{10}$. Згідно з властивістю 4 маємо $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$.

Поширенням класичного означення ймовірності на стохастичні експерименти зі скінченним числом нерівноможливих елементарних подій або нескінченним, але зліченним числом елементарних подій є наступне означення ймовірності.

16.4.2. Означення ймовірності в дискретних просторах елементарних подій

➡ **Означення 16.2.** Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n, \ldots\}$ дискретний (множина Ω скінченна або злічення). Припустимо, що кожній елементарній події ω_k поставлено у відповідність число p_k (певну «вагу»). *Число p_k називають **імовірністю елементарних подій** ω_k, якщо:* 1) $p_k \geq 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

***Імовірністю випадкової події** A ($A \subset \Omega$) називають число*

$$p(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k \tag{16.1}$$

(*сума ймовірностей p_k елементарних подій ω_k, з яких складається випадкова подія A*).

- *Зауваження.* В класичній схемі згідно з класичним означенням імовірності кожна елементарна подія має одну й ту саму ймовірність ($m = 1$ для кожної елементарної події).

Отже, класичне означення ймовірності є окремим випадком означення ймовірності в дискретних просторах елементарних подій при $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n\}$ та $p_k = \dfrac{1}{n}, k = 1; 2; \ldots; n \left(p_k > 0, \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1\right)$, тобто кожній елементарній події поставлена у відповідність одна й та сама ймовірність (що природно при рівноможливості елементарних подій).

■ **Приклад 16.8.** *Нехай підкидають один раз гральний кубик, маса якого розподілена таким чином, що ймовірність появи певної грані пропорційна її номеру. Визначити ймовірність появи числа очок, яке ділиться на 3.*

Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_6\}$, де елементарна подія ω_k відповідає появі k очок. За умовою задачі події ω_k поставлено у відповідність число $p_k = \lambda k$, де $\lambda > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Оскільки p_k — ймовірність елементарних подій ω_k, то має виконуватися рівність $p_1 + p_2 + \ldots + p_6 = 1$, тобто $\lambda(1+2+\ldots+6)=1$. Звідси $\lambda=\frac{1}{21}$. Отже, $p_k=\frac{k}{21}$. Підмножина $A=\{\omega_3, \omega_6\}$ — випадкова подія, ймовірність якої потрібно обчислити. За означенням

$$P(A)=\sum_{\omega_k \in A} p_k=\frac{3}{21}+\frac{6}{21}=\frac{3}{7}.$$

Основні властивості означеної імовірності

1. $0 \le P(A) \le 1$ *для довільної випадкової події* A.
2. $P(\Omega)=1$ *для вірогідної події* Ω.
3. *Якщо випадкові події* A *і* B *несумісні* ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $A \cap B=\varnothing$), *то*

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B).$$

Властивість 1 очевидна, оскільки сума $\sum\limits_{\omega_k \in A} p_k$ невід'ємна ($p_k \ge 0$) і $\sum\limits_{\omega_k \in A} p_k \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k=1$. Властивість 2 теж очевидна, оскільки Ω — вірогідна подія й за означенням імовірності $P(\Omega)=\sum\limits_{\omega_k \in \Omega} p_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k=1$.

Доведемо властивість 3. Оскільки випадкові події A і B несумісні, то елементарні події ω_k, з яких складається подія A, відмінні від елементарних подій ω_i, з яких складається подія B. Тому справджується рівність

$$\sum_{\omega_k \in (A \cup B)} p_k=\sum_{\omega_k \in A} p_k+\sum_{\omega_i \in B} p_i.$$

Отже,

$$P(A \cup B)=\sum_{\omega_k \in (A \cup B)} p_k=\sum_{\omega_k \in A} p_k+\sum_{\omega_i \in B} p_i=P(A)+P(B).$$

➡ **Означення 16.3**. *Казатимемо, що для даного стохастичного експерименту з дискретним простором елементарних подій побудовано* ***ймовірнісну модель*** (Ω, P), *якщо:*

1) *указаний простір елементарних подій* $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k, \ldots\}$;

2) *кожному* ω_k *поставлено у відповідність імовірність* p_k, *при цьому* $p_k \ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k=1$.

Імовірність довільної випадкової події A ($A \subset \Omega$) обчислюється за формулою (16.1).

- *Зауваження.* Теорія ймовірностей не вчить тому, як правильно визначати ймовірності p_k елементарних подій ω_k. При означенні p_k береться до уваги інтуїтивне поняття про p_k як відносну частоту появи елементарної події ω_k у серіях із багатьох повторень стохастичного експерименту. Теорія ймовірностей не цікавиться також конкретними значеннями p_k — це питання практичної цінності тієї чи іншої імовірнісної моделі, на яке дає відповідь математична статистика. Теорія ймовірностей лише відповідає на питання, як обчислити ймовірності складних подій, пов'язаних із побудованою ймовірнісною моделлю (Ω, P).

■ **Приклад 16.9.** *Побудувати ймовірнісну модель стохастичного експерименту 16.1. Визначити ймовірність появи числа очок, яке ділиться на 3.*

Як ми вже знаємо, тут класична схема і $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$. Тому кожній елементарній події ω_k природно поставити у відповідність одну й ту саму ймовірність, що дорівнює $\frac{1}{6}$. Згідно з означенням імовірнісну модель даного стохастичного експерименту побудовано. Підмножина $A = \{\omega_3, \omega_6\}$ множини Ω — випадкова подія, ймовірність якої потрібно обчислити. За формулою (16.1)

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

■ **Приклад 16.10.** *Побудувати ймовірнісну модель стохастичного експерименту 16.2, якщо монета симетрична. Визначити ймовірність того, що в експерименті буде зроблено не більше ніж три підкидання.*

Як ми вже знаємо (див. п. 16.2), простір елементарних подій даного експерименту дискретний, тобто $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \ldots\}$, де $\omega_k = \underbrace{PP \ldots P}_{k-1}\Gamma$ — елементарна подія, яка означає, що герб з'явиться при k-му підкиданні. Оскільки монета симетрична, а підкидання можемо вважати незалежними, то природно (див. п. 16.8) кожній елементарній події ω_k поставити у відповідність імовірність $p_k = \frac{1}{2^k}$ ($p_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ як сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^k}, \ldots$). Отже, згідно з означенням імовірнісну модель даного стохастичного експерименту побудовано. Підмножина $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ — випадкова подія, ймовірність якої потрібно обчислити. Згідно з формулою (16.1)

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Розглянемо ще деякі важливі властивості ймовірності $P(A)$, які випливають з основних властивостей 1—3.

4 *Імовірність випадкової події $\overline{A}$, протилежної випадковій події A, обчислюється за формулою $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.*

Справді, згідно з властивістю 2 маємо $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$. Випадкові події A і $\overline{A}$ несумісні, тому згідно з властивістю 3 дістаємо $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Отже, маємо рівність $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, з якої випливає властивість 4.

5 $P(\varnothing) = 0$.

Справді, неможлива подія $\varnothing$ протилежна вірогідній події Ω, тобто $\varnothing = \overline{\Omega}$. Тому згідно з властивостями 4 і 2 маємо $P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

6 *Якщо $A \subset B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.*

Справді, із зображення $B = A \cup (B \setminus A)$ (рис. 16.1) та несумісності випадкових подій A і $B \setminus A$ згідно з властивістю 3 маємо рівність

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A),$$

з якої випливає властивість 6.

7 *Якщо $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.*

Ця властивість випливає з властивостей 6 та 1.

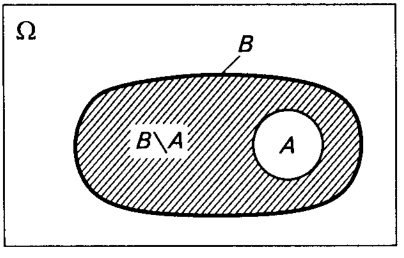

Рис. 16.1

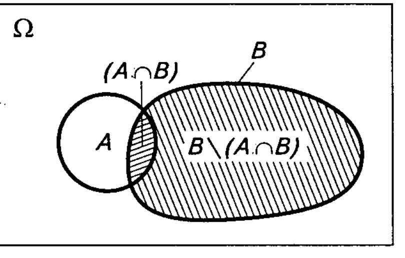

Рис. 16.2

8 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Цю властивість називають *теоремою додавання ймовірностей.*

Доведення

Легко переконатися, що справджується рівність $A \cup B = = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ (рис. 16.2); крім того, $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \varnothing$. Тому згідно з властивістю 3 маємо $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$. Оскільки $(A \cap B) \subset B$, то згідно з властивістю 6 дістанемо $P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$. Підставивши цю рівність у попередню, матимемо властивість 8.

Розглянемо деякі важливі наслідки властивостей 3 і 8.

◆ ***Наслідок 1*** (узагальнення властивості 3). *Якщо випадкові події* A_1, A_2, ..., A_n *попарно несумісні* ($A_i \subset \Omega, A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$), *то*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Доведення

При $n = 2$ це властивість 3. Нехай $n = 3$. Використовуючи властивості дій над випадковими подіями й попарну несумісність подій A_1, A_2, A_3, дістанемо рівність $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. Згідно з властивістю 3

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Отже, дістали доведення наслідку при $n = 3$. Для повного доведення скористаємося методом математичної індукції. Для цього припустимо, що твердження наслідку справджується при $n = k$ ($k > 3$ і довільне). Тому, враховуючи несумісність подій $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$ і A_{k+1}, згідно з властивістю 3 й припущенням матимемо рівність

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P(A_{k+1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_k) + P(A_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i),$$

з якої випливає справедливість твердження наслідку й при $n = k + 1$, а отже, для довільного $n > 1$.

◆ ***Наслідок 2*** (узагальнення властивості 8). *Якщо випадкові події* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_i \subset \Omega$) *довільні, то*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Доведення

При $n = 2$ це властивість 8. Нехай $n = 3$. Згідно з властивістю 8

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) -$$
$$- P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) -$$
$$- P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) -$$
$$- [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - [P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) +$$
$$+ P(A_2 \cap A_3)] + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3),$$

тобто дістали доведення для $n = 3$. При доведенні для довільного n можна скористатися методом математичної індукції.

◆ ***Наслідок 3****. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(A_i \subset \Omega)$ довільні, то*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Доведення

Зрозуміло, що при $n = 2$ ця нерівність випливає з властивості 8 ($P(A \cap B) \ge 0$). При $n = 3$ легко бачити, що

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \le P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) \le$$
$$\le P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Далі для повного доведення можна скористатися методом математичної індукції.

- *Зауваження.* Слід звернути увагу на те, що при доведенні властивостей 4—8 імовірності та їх наслідків 1—3 використовуються лише основні властивості 1—3 ймовірності $P(A)$.

16.5 ІМОВІРНІСНА МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ДОВІЛЬНИМ ПРИРОСТОМ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ПОДІЙ

Розглянемо поняття геометричних імовірностей, яке в історичному плані було першим поширенням видозміненого класичного означення ймовірності на стохастичні експерименти з незліченним числом елементарних подій; при цьому інтуїтивне поняття рівноможливості зберігається.

16.5.1. Поняття геометричних імовірностей

Нехай у стохастичному експерименті елементарні події рівноможливі й утворюють нескінченну неперервну сукупність, яку можна зобразити точками деякої області G у n-вимірному просторі R^n, а подію A, пов'язану з даним експериментом, — точками області $g(g \subset G)$. Припустимо, що G і g — такі множини, для яких має місце поняття *міри* (довжина в R^1, площа в R^2, об'єм R^3). Тоді ймовірність $P(A)$ події A визначається за формулою

$$P(A) = \frac{\text{міра}\, g}{\text{міра}\, G}.$$

Якщо ймовірності визначаються в такий спосіб, то казатимемо, що маємо ***геометричні ймовірності.***

■ **Приклад 16.11**. *У прикладі 16.3 стохастичних експериментів визначити ймовірність того, що довжина меншої частини стержня не перевищує $l/4$.*

Подію, ймовірність якої потрібно обчислити, позначимо через A. Результати такого експерименту можна зобразити точками інтервалу $(0, l)$ числової прямої. Отже, $G = (0, l)$. Нехай x і $l - x$ — довжини частин стержня. Тоді $g = \{(0 < x \le l/4) \cup (3l/4 \le l - x < l)\}$. Зрозуміло, що для множин G та g має місце поняття довжини, крім того, з умов експерименту випливає рівноможливість елементарних подій. Отже, для обчислення ймовірності $P(A)$ події A можемо скористатися геометричними ймовірностями. За формулою для R^1

$$P(A) = \frac{\text{дов.}\, g}{\text{дов.}\, G} = \frac{l/4 + l/4}{l} = \frac{2l}{4l} = \frac{1}{2}.$$

Легко переконатися самостійно, що для геометричних імовірностей справджуються властивості: 1 $0 \le P(A) \le 1$; 2 $P(\Omega) = 1$; 3 *якщо події A і B несумісні й відповідні їм області g_1 і g_2 мають міру* (в цьому разі $g_1 \cap g_2 = \varnothing$), *то* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Отже, можемо стверджувати, що для геометричних імовірностей справедливі й властивості 4—8 та їх наслідки 1—3 ймовірностей для дискретних просторів елементарних подій (див. зауваження до цих властивостей у п. 16.4).

Зробимо загальне зауваження. Звернемо увагу на те, що поняття геометричних імовірностей вводиться лише для тих подій, пов'язаних із даним стохастичним експериментом, які зображуються точками геометричних областей і для яких має місце поняття міри.

Виявляється, що це істотно. Справді, розглянемо приклад 16.3 стохастичних експериментів. Як ми вже знаємо (приклад 16.1), у даному стохастичному експерименті простір елементарних подій Ω складається з рівноможливих точок інтервалу $(0, l)$. Тому, по-перше, згідно з означенням геометричних імовірностей кожному підінтервалу $(a, b) \subset (0, l)$ незалежно від його положення в інтервалі $(0, l)$ приписується ймовірність, що дорівнює $\frac{b-a}{l}$. По-друге, неможливо ввести поняття ймовірності для довільної підмножини інтервалу $(0, l)$ так, щоб $P((a,b)) = \frac{b-a}{l}$ для всіх підінтервалів $(a, b) \subset (0, l)$. Але це можна зробити для сукупності борелівських множин інтервалу $(0, l)$ (тобто множин, які становлять: підінтервали; зліченну кількість об'єднань підінтервалів; зліченну кількість перерізів підінтервалів інтервалу $(0, l)$), бо для таких множин має місце поняття міри. Тому в загальному випадку в теорії імовірностей із простором елементарних подій Ω пов'язують певну сукупність підмножин $\mathscr{F}$ множини Ω, для якої виконуються такі у м о в и: 1) $\Omega \in \mathscr{F}$; 2) якщо $A \in \mathscr{F}$, то і $\overline{A} \in \mathscr{F}$; 3) якщо $A_n \in \mathscr{F}$, $n = 1; 2; \ldots$, то й $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$.

Таку сукупність $\mathscr{F}$ підмножин множини Ω називають *σ-алгеброю («сигма»-алгеброю)* випадкових подій, а її елементи $A \in \mathscr{F}$ $(A \subset \Omega)$ — ***випадковими подіями***. Наголосимо, що інші підмножини Ω, які не входять в σ-алгебру $\mathscr{F}$, випадковими подіями не вважаються.

Можемо ввести аксіоматичне означення ймовірності й завершити побудову ймовірнісної моделі стохастичного експерименту з довільним простором елементарних подій.

➡ **Означення 16.4**. Нехай є множина елементарних подій Ω з σ-алгеброю випадкових подій $\mathscr{F}$. *Казатимемо, що **на σ-алгебрі випадкових подій $\mathscr{F}$ задано ймовірність P**, якщо кожній випадковій події $A \in \mathscr{F}$ поставлено у відповідність число $P(A)$ так, що виконуються наступні у м о в и:*

1) $0 \le P(A) \le 1$;

2) $P(\Omega) = 1$;

③ *якщо випадкові події A і B несумісні, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;*

④ *якщо A_n, $n = 1; 2; \ldots$ — послідовність випадкових подій, які попарно несумісні ($A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$), то $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

*Число $P(A)$ називають **імовірністю випадкової події A,** а умови 1—4 — **аксіомами ймовірності**, при цьому умову 3 — **аксіомою додавання**, а умову 4 — **розширеною аксіомою додавання.***

Необхідність введення розширеної аксіоми додавання пов'язана з тим, що в теорії імовірностей постійно розглядаються складні випадкові події, які є об'єднанням або перерізом зліченної кількості простіших випадкових подій.

Аксіоматичне означення ймовірності було введено А. М. Колмогоровим у 1929 р. і дало змогу завершити аксіоматичну побудову теорії імовірностей як самостійної математичної науки (як, наприклад, будуються геометрія, теоретична механіка та ін.).

➡ **Означення 16.5**. *Казатимемо, що для стохастичного експерименту побудовано **ймовірнісну модель** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, якщо:*

1) *указано простір елементарних подій Ω з σ-алгеброю $\mathcal{F}$ випадкових подій A;*

2) *кожній випадковій події $A (A \in \mathcal{F})$ поставлено у відповідність імовірність $P(A)$.*

*Трійку математичних об'єктів $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ називають **імовірнісним простором.***

Вибір тієї чи іншої σ-алгебри $\mathcal{F}$ підмножин множини Ω пов'язаний, з одного боку, з природою Ω, з іншого — із сутністю задачі. Так, роль σ-алгебри $\mathcal{F}$ у дискретних просторах елементарних подій Ω відіграє сукупність усіх підмножин множини Ω. Це пов'язано з тим, що, по-перше, сукупність усіх підмножин є σ-алгеброю; по-друге, з означення ймовірності в дискретних просторах ($\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, $p(\omega_k) = p_k \geq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1$) і властивостей абсолютно збіжного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ випливає існування ймовірності $P(A)$ для будь-якої підмножини $A \subset \Omega$, і для $P(A)$ виконуються аксіоми 1—4 ймовірності.

Отже, в дискретних просторах елементарних подій Ω кожна підмножина $A \subset \Omega$ вважається випадковою подією, а ймовірнісна модель (Ω, P) таких просторів (див. п. 16.4) є окремим випадком імовірнісної моделі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де $\mathcal{F}$ — сукупність усіх підмножин множини Ω.

У прикладі 16.3 стохастичних експериментів роль σ-алгебри $\mathcal{F}$ відіграє сукупність усіх борелівських множин інтервалу $(0, l)$. Це пов'язано з тим, що борелівські множини (див. загальне зауваження) теж утворюють σ-алгебру й для кожної такої множини $A \in \mathcal{F}$ існує поняття міри (міра Лебега), тобто згідно з означенням геометричних імовірностей (у даному прикладі елементарні події рівноможливі) існує ймовірність $P(A)$, для якої виконуються аксіоми 1—4. Отже, трійка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де $\Omega = (0, l)$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра борелівських множин інтервалу $(0, l)$, $P(A)$ визначається геометричними ймовірностями, є ймовірнісною моделлю стохастичного експерименту 16.3.

Якщо розглянути приклад 16.4 стохастичних експериментів, то тут $\Omega = C_{[0,T]}$ — простір неперервних функцій на відрізку $[0, T]$. У даному випадку теж вводиться певна σ-алгебра $\mathcal{F}$ у просторі неперервних функцій $C_{[0, T]}$ і задається ймовірність. Але це робиться набагато складніше, ніж у стохастичному експерименті 16.3.

Надалі без додаткового нагадування випадкові події A розглядатимуться як елементи $A \in \mathcal{F}$ ймовірнісного простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

16.5.2. Властивості ймовірності

Згідно з аксіоматичним означенням імовірність $P(A)$ можна розглядати як числову функцію, визначену на σ-алгебрі $\mathcal{F} (A \in \mathcal{F})$ випадкових подій. Ця функція має такі властивості:

1. $0 \le P(A) \le 1$ *для кожної випадкової події* A.
2. $P(\Omega) = 1$ *для вірогідної події* Ω.
3. *Якщо випадкові події* A *і* B *несумісні* ($A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \varnothing$), *то* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. *Для ймовірності випадкової події* $\overline{A}$, *протилежної випадковій події* A, *справджується рівність* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. $P(\varnothing) = 0$ *для неможливої події* $\varnothing$.
6. *Якщо випадкові події* A *і* B *такі, що* $A \subset B$, *то* $P(A) \le P(B)$.
7. *Якщо випадкові події* A *і* B *такі, що* $A \subset B$, *то* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
8. *Для довільних випадкових подій* A *і* B *справджується рівність* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

9 *Якщо випадкові події* $A_1, A_2, ..., A_n$ *попарно несумісні* ($A_i \in F$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$), *то* $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

10 *Якщо випадкові події* $A_1, A_2, ..., A_n$ *довільні, то справджується рівність*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < l \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_l) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n).$$

11 *Якщо випадкові події* $A_1, A_2, ..., A_n$ *довільні, то справджується нерівність*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

12 *Якщо в послідовності* $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ *випадкові події попарно несумісні, то* $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Справді, властивості 1—3 — це аксіоми ймовірності й вони постулюються. З них випливають властивості 4 —11 (див. зауваження до властивостей імовірності в дискретних просторах елементарних подій). Властивість 12 — це розширена аксіома ймовірності.

16.6 УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

У деяких випадках імовірності випадкових подій A розглядаються за додаткової умови, що відбулася певна випадкова подія B, яка має додатну ймовірність. Такі ймовірності будемо називати ***умовними ймовірностями*** й позначати $P(A/B)$.

➡ **Означення 16.6**. *Умовні ймовірності визначаються формулою*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad (16.2)$$

де $P(B) > 0$ (у випадку $P(B) = 0$ умовна ймовірність $P(A/B)$ залишається невизначеною).

■ **Приклад 16.12.** *Гральний кубик підкидають двічі. Відомо, що сума очок, які випали при першому та другому підкиданнях, менша за 5 (подія B). Яка ймовірність того, що при першому підкиданні випало 1 (подія A)?*

(1) Для визначення $P(A/B)$ скористаємось означенням умовної ймовірності. Простір Ω складається з 36 рівноможливих елементарних подій

$$\Omega = \{(i, j): i = 1; 2; \ldots; 6, \ j = 1; 2; \ldots; 6\}.$$

Отже, маємо класичну схему. Випадковими подіями A, B та $A \cap B$ є підмножини

$$A = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\};$$

$$B = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1)\};$$

$$A \cap B = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3)\}.$$

Тому

$$P(A) = 6/36, \ P(B) = 5/36, \ (P(A \cap B) = 3/36.$$

Таким чином, за формулою умовної імовірності $P(A/B) = 3/5$.

(2) Обчислимо умовну ймовірність безпосередньо. Якщо відомо, що подія B відбулася, то можемо пропонувати додатковий (умовний) стохастичний експеримент із простором рівноможливих елементарних подій $\Omega_1 = B$, серед яких є всього три елементарні події (1; 1), (1; 2), (1; 3), з яких складається подія A. Тому

$$P(A/B) = 3/5.$$

З означення умовної імовірності $P(A/B)$ і властивостей безумовної імовірності $P(A)$ безпосередньо випливає:

1. $0 \le P(A/B) \le 1 \ (P(A \cap B) \le P(B))$.
2. $P(\Omega / B) = 1, \ P(B/B) = 1; \ (B \cap \Omega = B, \ B \cap B = B)$.
3. *Якщо* $A \cap C = \varnothing$, *то*

$$P((A \cup C)/ B) = P(A/B) + P(C/B),$$

$$((A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B), \ (A \cap B) \cap (C \cap B) = \varnothing).$$

Ураховуючи зауваження до властивостей імовірностей у дискретних просторах Ω, можна зробити висновок, що умовна ймовірність має всі властивості безумовної імовірності.

Співвідношення (16.2) набуває вигляду $P(A \cap B) = P(A/B)\ P(B)$. Якщо $P(A) > 0$, то можемо записати ще: $P(A \cap B) = P(B/A)\ P(A)$. Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 16.1 (про множення ймовірностей). Якщо $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A) = P(A/B)\,P(B). \qquad (16.3)$$

Співвідношення (16.3) називають *формулою множення ймовірностей*. Формулу множення можна узагальнити для будь-якого кінцевого числа випадкових подій. Розглянемо три випадкові події: A_1, A_2, A_3. Нехай $P(A_1 \cap A_2) > 0$. Оскільки $(A_1 \cap A_2) \subset A_1$, то й $P(A_1) > 0$. Тому

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = P(A_3/A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2) =$$
$$= P(A_3/A_1 \cap A_2)P(A_2/A_1)P(A_1). \qquad (16.4)$$

Звідси легко зрозуміти, як можна записати формулу множення для будь-якої скінченної кількості випадкових подій.

■ **Приклад 16.13.** *З урни, в якій міститься 12 куль, серед яких 5 білих і 7 чорних, навмання виймаються поспіль 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі вони чорні?*

Нехай подія A_i полягає в тому, що i-та вийнята куля чорна ($i = 1; 2; 3$). Потрібно знайти $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Для цього скористаємося формулою множення трьох подій (16.4). Умовна ймовірність $P(A_3/A_1 \cap A_2)$ — це ймовірність вийняти навмання чорну кулю за умови, що відбулася й подія A_1, і подія A_2. Якщо відбулася подія $A_1 \cap A_2$, то в урні міститься лише 10 куль і серед них уже тільки 5 чорних (класична схема). Тому $P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{5}{10}$; аналогічно $P(A_2/A_1) = 6/11$, $P(A_1) = 7/12$. Отже, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{5}{10}\frac{6}{11}\frac{7}{12} = \frac{7}{44}$.

➡ **Означення 16.7.** *Випадкові події A і B називають* ***незалежними****, якщо*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

■ **Приклад 16.14.** *У квадрат зі стороною l (рис. 16.3) навмання кидають точку. Нехай A — подія, яка полягає в тому, що абсциса точки не менша від a ($0 < a < l$), B — подія, яка полягає в тому, що ордината точки не менша за b ($0 < b < l$). Чи залежні ці події?*

Оскільки в цьому стохастичному експерименті всі можливі елементарні події рівноможливі й утворюють нескінченну неперервну сукупність $\Omega = [0, l] \times [0, l]$, а подіям A, B і $A \cap B$ відповідають області, які мають площі, то для обчислення ймовірностей цих подій можемо скористатися геометричними ймовірностями. Тому

$$P(A) = \frac{l(l-a)}{l^2}; \quad P(B) = \frac{l(l-b)}{l^2};$$

$$P(A \cap B) = \frac{(l-a)(l-b)}{l^2} = P(A)\,P(B).$$

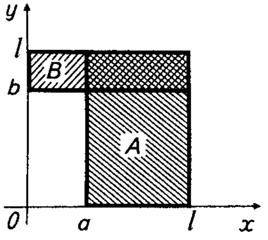

Рис. 16.3

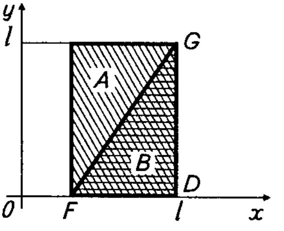

Рис. 16.4

Отже, події A і B незалежні.

Перевірити самостійно: якщо в цьому прикладі подія B полягає в тому, що точка потрапить у трикутник FGD (рис. 16.4), то події A і B будуть уже залежними.

Мають місце прості, але дуже важливі теореми стосовно незалежних випадкових подій.

Теорема 16.2. Нехай $P(B) > 0$. Випадкові події A і B незалежні тоді й лише тоді, коли $P(A/B) = P(A)$ (поява події B не впливає на ймовірність події A).

Доведення

Нехай A і B незалежні й $P(B) > 0$. Користуючись означенням умовної ймовірності, матимемо

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B)}{P(B)} = P(A)$$

(тобто дістали доведення в один бік).

Нехай тепер $P(A/B) = P(A)$. Користуючись означенням умовної імовірності, матимемо

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A/B) = P(A).$$

Звідси дістанемо рівність $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$, а це означає, що A і B незалежні.

Теорема 16.3. Якщо випадкові події A і B незалежні, то A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також незалежні.

Теорема 16.4. Якщо випадкові події A і B_1 незалежні, A і B_2 незалежні, B_1 і B_2 несумісні ($B_1 \cap B_2 = \varnothing$), то A і $(B_1 \cup B_2)$ також незалежні.

Теореми 16.3 і 16.4 пропонуємо довести самостійно.

➡ **Означення 16.8.** *Випадкові події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають* ***незалежними в сукупності,*** *якщо для довільного k і довільного набору індексів $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})\,P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Із незалежності в сукупності подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ випливає попарна незалежність ($k = 2$), тобто незалежність довільних двох подій A_i і A_j ($i \neq j$). Але з попарної незалежності, взагалі кажучи, не випливає незалежність у сукупності.

Це показує наступний приклад.

■ **Приклад 16.15.** *У ящику містяться 4 картки з номерами 112, 121, 211, 222. Навмання взято одну з них.*

Нехай події A_i, $i = 1; 2; 3$ полягають у тому, що у взятій картці на i-му місці стоїть 1. Зрозуміло, що маємо класичну схему. Тому

$$P(A_1) = \frac{1}{2};\quad P(A_2) = \frac{1}{2};\quad P(A_3) = \frac{1}{2};$$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4};\quad P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4};\quad P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.$$

Отже, $P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = P(A_i)\,P(A_j)$ при $i \neq j$, тому сукупність подій A_1, A_2, A_3 попарно незалежна. Але

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \neq P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Тому ці події залежні в сукупності.

16.7 ФОРМУЛА ПОВНОЇ ІМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА (ФОРМУЛА ГІПОТЕЗ)

Означення 16.9. *Випадкові події $H_1, H_2, ..., H_n$ утворюють* ***повну групу подій****, якщо:*

1) *ці події попарно несумісні, тобто* $H_i \cap H_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$;
2) *одна з них обов'язково відбувається, тобто* $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$.

Теорема 16.5. Якщо $H_1, H_2, ..., H_n$ — повна група подій і $P(H_i) > 0$ для $i = 1; 2; ...; n$, то для будь-якої випадкової події A справджується рівність

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) P(H_i).$$

Цю рівність називають ***формулою повної імовірності.***

Доведення

Оскільки $H_1, H_2, ..., H_n$ — повна група подій, то справедлива рівність

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} H_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i).$$

Крім того, $(A \cap H_i) \subset H_i$; із несумісності подій H_i і $H_j (i \neq j)$ випливає несумісність подій $(A \cap H_i)$ і $(A \cap H_j)$.

Отже, випадкові події $(A \cap H_i)$ попарно несумісні. Тому на основі властивостей імовірності

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i) P(H_i),$$

де в останній рівності ми скористалися формулою про множення ймовірностей.

■ **Приклад 16.16.** *Серед N екзаменаційних білетів є m «щасливих». Два студенти підходять один за одним і навмання беруть білет. В якого студента більша ймовірність взяти «щасливий» білет: у того, хто підійшов першим, чи в того, хто підійшов другим?*

Імовірність взяти «щасливий» білет для першого студента дорівнює m / N (тут використовується класична схема). Нехай A — подія, яка полягає в тому, що другий студент взяв «щасливий» білет. Тут можливі лише два припущення: H_1 — перший студент взяв «щасливий» білет, H_2 — перший студент не взяв «щасливий» білет. Ці події несумісні, й одна з них обов'язково відбувається. Тому вони утворюють повну групу подій. За формулою повної імовірності

$$P(A) = P(A/H_1)\,P(H_1) + P(A/H_2)\,P(H_2) =$$
$$= \frac{m-1}{N-1}\,\frac{m}{N} + \frac{m}{N-1}\,\frac{N-m}{N} = \frac{m}{N}.$$

Отже, ймовірність взяти «щасливий» білет у другого студента теж дорівнює m/N (тобто студенти мають рівні «шанси» взяти «щасливий» білет).

Теорема 16.6. Нехай сукупність випадкових подій $H_1, H_2, ..., H_n$ утворює повну групу подій, причому $P(H_i) > 0$, $i = 1; 2; ...; n$. Тоді для довільної випадкової події B, такої, що $P(B) > 0$, виконується рівність

$$P(H_i/B) = \frac{P(B/H_i)\,P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/H_k)\,P(H_k)}.$$

Цю рівність називають ***формулою Байєса.***

Доведення

Користуючись означенням умовної імовірності, а також формулою множення ймовірностей (у чисельнику) і формулою повної імовірності (в знаменнику), дістанемо

$$P(H_i/B) = \frac{P(H_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/H_i)\,P(H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B/H_k)\,P(H_k)}.$$

■ **Приклад 16.17.** *В урні є n куль, колір яких нам невідомий. Можлива $(n+1)$ гіпотеза (припущення) про кількість білих куль в урні: $H_0, H_1, ..., H_n$ (H_i — гіпотеза, яка полягає в тому, що в урні рівно i білих куль). Природно припустити, що ці гіпотези рівноможливі, тобто*

$$P(H_0) = P(H_1) = \ldots = P(H_n) = \frac{1}{n+1}$$

[ці ймовірності називають апріорними (до досліду)]. З урни навмання взяли одну кулю, й вона виявилася білою (подія B). Обчислити $P(H_i/B)$.

Очевидно, що $P(B/H_i) = i/n$. Отже, за формулою Байєса

$$P(H_i/B) = \frac{\frac{i}{n}\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\frac{1}{n+1}} = \frac{i}{\sum_{k=0}^{n}k} = \frac{2i}{n(n+1)}$$

[ці ймовірності називають *апостеріорними* (після досліду)].

Отже, найімовірнішою після досліду є гіпотеза H_n.

16.8 ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ (СХЕМА БЕРНУЛЛІ)

➡ **Означення 16.10.** *Повторні незалежні випробування стохастичного експерименту називають* ***схемою Бернуллі****, якщо при кожному випробуванні можливі лише два наслідки: подія A (успіх) або $\overline{A}$ (невдача) і ймовірність появи події A при кожному випробуванні дорівнює* p $(0 < p < 1)$. Наприклад: стрільба по цілі (при кожному пострілі два наслідки — влучення або промах); перевірка навмання вибраної деталі (може бути придатною або непридатною); підкидання монети (при кожному підкиданні з'явиться герб чи решка); народження дитини (хлопчик або дівчинка).

Терміни «успіх» і «невдача» використовуємо для зручності, а їх імовірності позначатимемо через p та q відповідно. Зрозуміло, що $p + q = 1$.

Теорема 16.7. Нехай $P_n(m)$ — імовірність того, що в схемі Бернуллі при n випробуваннях m разів відбулася подія A. Тоді

$$P_n(m) = C_n^m\, p^m q^{n-m} \quad (m = 0; 1; 2; \ldots; n),$$

де $q = 1 - p$.

Доведення

Побудуємо ймовірнісну модель схеми Бернуллі при $n = 3$. Зрозуміло, що простором елементарних подій буде множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\}$, де $\omega_1 = YYY$, $\omega_2 = YYH$, $\omega_3 = YHY$, $\omega_4 = HYY$, $\omega_5 = YHH$, $\omega_6 = HYH$, $\omega_7 = HHY$, $\omega_8 = HHH$, елементи ω_k якої складаються з 2^3 можливих наборів завдовжки 3 літер Y і H. Оскільки випробування незалежні, то ймовірності помножуються, тобто кожному окремому наборові ставиться у відповідність імовірність, яка дорівнює добутку при заміні в наборі літер Y і H на p і q відповідно. Отже, $\omega_k \to p_k$, де $p_1 = ppp = p^3$, $p_2 = ppq = p^2q$, $p_3 = p^2q$, $p_4 = p^2q$, $p_5 = pq^2$, $p_6 = pq^2$, $p_7 = pq^2$, $p_8 = q^3$. Крім того, $p_i > 0$ і $p_1 + p_2 + \ldots + p_8 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$. Таким чином, побудову ймовірнісної моделі при $n = 3$ закінчено. Тому

$$P_n(m) = P(B_m) = \sum_{\omega_k \in B_m} p_k,$$

де B_m, $m = 0; 1; 2$ — випадкові події, які полягають у тому, що при трьох випробуваннях m разів буде «успіх». Отже,

$$p_3(0) = p_8 = q^3 = C_3^0 p^0 q^3;\ p_3(1) = p_5 + p_6 + p_7 = 3pq^2 = C_3^1 pq^2;$$

$$p_3(2) = p_2 + p_3 + p_4 = 3p^2q = C_3^2 p^2 q,\ p_3(3) = p^3 = C_3^3 p^3 q^0.$$

Тепер легко визначити, що в загальному випадку ймовірність p_k одного окремого набору ω_k дорівнює $p^m q^{n-m}$, якщо в набір завдовжки n входить m літер Y. Крім того, кількість таких наборів становить C_n^m. Тому

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0; 1; \ldots; n).$$

В окремих випадках: 1) імовірність не мати жодного «успіху» дорівнює $q^n (P_n(0) = C_n^0 p^0 q^n = q^n)$; 2) ймовірність мати принаймні один «успіх» дорівнює $1 - q^n$ (імовірність події, протилежної до події у випадку 1).

Якщо розглядати ймовірність $P_n(m)$ як функцію від m, то $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку збільшується зі збільшенням m від 0 до деякого m_0, а потім зменшується зі збільшенням m від m_0 до n (число m_0 називають *найімовірнішим числом появи події A*).

Справді, з відношення

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} p^{m+1} q^{n-(m+1)}}{C_n^m p^m q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q}$$

маємо: 1) $P_n(m+1) > P_n(m)$, якщо $(n-m)\,p > (m+1)\,q$, тобто $m < (n+1)\,p - 1$; 2) $P_n(m+1) = P_n(m)$, якщо $m = (n+1)\,p - 1$; 3) $P_n(m+1) < P_n(m)$, якщо $m > (n+1)\,p - 1$. Легко побачити: якщо $(n+1)\,p$ — ціле число, то найімовірнішими будуть числа $m_0 = (n+1)\,p$ та $m_0 - 1$; якщо $(n+1)\,p$ — дробове число, то $m_0 = [(n+1)\,p]$ є цілою частиною числа $(n+1)\,p$.

■ **Приклад 16.18.** *Стріляють по цілі. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює p. Зроблено n пострілів. Визначити ймовірності подій:* а) *що буде k влучень (подія B_k);* б) *що число влучень не більше за r_2 і не менше від r_1 (подія C).*

Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що буде влучення при одному пострілі. За умовою задачі $P(A) = p$, $q = 1 - P(A) = 1 - p$. Постріли природно вважати незалежними. Отже, маємо схему Бернуллі. Тому:

а) за формулою Бернуллі $P(B_k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

б) подію C можемо зобразити як об'єднання несумісних подій B_k:

$$C = B_{r_1} \cup B_{r_1+1} \cup \ldots \cup B_{r_2}.$$

Використовуючи властивості ймовірності, дістанемо

$$P(C) = \sum_{k=r_1}^{r_2} P(B_k) = \sum_{k=r_1}^{r_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

■ **Приклад 16.19.** *У прикладі 16.18 визначити найімовірніше число влучень при $n = 10$ у випадках:* а) $p = 1/2$; б) $p = 5/11$; в) $p = 9/10$.

Для знаходження найімовірнішого числа влучень потрібно обчислити $(n + 1)\,p$ і взяти цілу частину цього числа. Отже: а) $m_0 = 5$; б) $m_0 = 5$ і $m_0 = 4$ (тут два найімовірніших числа влучень, оскільки $(n + 1)\,p = 5$ — ціле число); в) $m_0 = 9$.

Незважаючи на компактність формули Бернуллі, безпосереднє обчислення $P_n(m)$ за нею при великих n пов'язане зі значними труднощами. Наприклад, якщо $n = 100$, $m = 50$, то для визначення ймовірності $P_{100}(50)$ потрібно здійснити понад 200 арифметичних операцій. У таких випадках для спрощення обчислень користуються граничними теоремами (Муавра—Лапласа, Пуассона), які дають асимптотичні формули для наближеного обчислення $P_n(m)$ з достатньою точністю.

Локальна теорема 16.8 (Муавра—Лапласа). В схемі Бернуллі рівномірно по m в області $a \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le b$, де $[a, b]$ — довільний скінченний відрізок,

$$\frac{P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(m-np)^2}{npq}}} \to 1$$

при $n \to \infty$.

Доведення

При доведенні використовується відома формула Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\alpha_n};$$

в якій залишковий показник α_n задовольняє нерівність

$$|\alpha_n| \le \frac{1}{12n}. \tag{16.5}$$

Введемо позначення $x_{nm} = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$. За умовою теореми $a \le x_{nm} \le b$. Із нерівностей

$$\begin{aligned} m &= np + x_{nm}\sqrt{npq} \ge np + a\sqrt{npq} = n\left(p + a\sqrt{\frac{pq}{n}}\right); \\ n-m &= n - np - x_{nm}\sqrt{npq} = nq - x_{nm}\sqrt{npq} \ge \\ &\ge np - b\sqrt{npq} = n\left(q - b\sqrt{\frac{pq}{n}}\right) \end{aligned} \tag{16.6}$$

випливає, що $m \to \infty$ і $n-m \to \infty$ при $n \to \infty$. Оскільки

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m},$$

то, скориставшися формулою Стірлінга, дістанемо рівність

$$P_n(m) = \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\alpha_n} p^m q^{n-m}}{\sqrt{2\pi m}\, m^m e^{-m} e^{\alpha_m}\, \sqrt{2\pi(n-m)}\,(n-m)^{n-m} e^{-(n-m)} e^{\alpha_{n-m}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_n R_n T_n, \tag{16.7}$$

де

$$S_n = \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}; \quad R_n = \left(\frac{np}{m}\right)^m \left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m};$$

$$T_n = e^{\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m}}.$$

Згідно з нерівностями (16.5), (16.6)

$$|\alpha_n - \alpha_m - \alpha_{n-m}| \le |\alpha_n| + |\alpha_m| + |\alpha_{n-m}| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{np + a\sqrt{npq}} + \frac{1}{nq - b\sqrt{npq}}\right) \to 0$$

рівномірно по $x_{nm} \in [a, b]$ при $n \to \infty$, а отже, і

$$T_n \to 1 \tag{16.8}$$

рівномірно по $x_{nm} \in [a, b]$. Оскільки $a \le x_{nm} \le b$, то існує така стала c, що

$$\left| \frac{1}{npqS_n^2} - 1 \right| = \left| \frac{m(n-m)}{n^2 pq} - 1 \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{n^2 pq} (np + x_{nm}\sqrt{npq})(nq - x_{nm}\sqrt{npq}) - 1 \right| =$$

$$= \left| \frac{x_{nm}\, q\sqrt{npq}}{npq} - \frac{x_{nm}\, p\sqrt{npq}}{npq} - \frac{x_{nm}^2\, pq}{npq} \right| \le \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Звідси випливає, що рівномірно по $x_{nm} \in [a, b]$

$$\sqrt{npq}\, S_n \to 1 \tag{16.9}$$

при $n \to \infty$. Зрозуміло, що

$$\ln R_n = m \ln\left(\frac{np}{m}\right) + (n-m)\ln\left(\frac{nq}{n-m}\right) =$$

$$= (np + x_{nm}\sqrt{npq}) \ln \frac{np}{np + x_{nm}\sqrt{npq}} +$$

$$+ (np - x_{nm}\sqrt{npq}) \ln \frac{nq}{nq - x_{nm}\sqrt{npq}} =$$

$$= -(np + x_{nm}\sqrt{npq}) \ln\left(1 + x_{nm}\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (nq - x_{nm}\sqrt{npq}) \ln\left(1 - x_{nm}\sqrt{\frac{p}{nq}}\right).$$

За умов теореми величини $x_{nm}\sqrt{\frac{q}{np}}, x_{nm}\sqrt{\frac{p}{nq}}$ при досить великих n будуть як завгодно малими. Тому згідно з формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2}{3!}\frac{1}{(1 + \theta x)^3} x^3,$$

де $0 < \theta < 1$, дістанемо рівність

$$\ln R_n = -(np + x_{nm}\sqrt{npq}) \left[x_{nm}\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2} x_{nm}^2 \frac{q}{np} + \right.$$

$$
\left. + \frac{2}{3!} \frac{1}{\left(1 + \theta x_{nm} \sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3} \left(x_{nm} \sqrt{\frac{q}{np}}\right)^3 \right] - (np - x_{nm} \sqrt{npq}) \times
$$

$$
\times \left[-x_{nm} \sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{1}{2} x_{nm}^2 \frac{p}{nq} + \frac{2}{3!} \frac{1}{\left(1 - \theta x_{nm} \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^3} \left(x_{nm} \sqrt{\frac{p}{nq}}\right)^3 \right] =
$$

$$
= -x_{nm} \sqrt{npq} + \frac{1}{2} x_{nm}^2 q - x_{nm}^2 q + x_{nm} \sqrt{npq} + \frac{1}{2} x_{nm}^2 p - x_{nm}^2 p + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) =
$$

$$
= -\frac{1}{2} x_{nm}^2 (p+q) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2} x_{nm}^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),
$$

де оцінка $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ залишкового члена рівномірна по $x_{nm} \in [a, b]$. Отже, рівномірно по $x_{nm} \in [a, b]$

$$
\ln R_n + \frac{1}{2} x_{nm}^2 \to 0
$$

при $n \to \infty$, і

$$
R_n : e^{-\frac{1}{2} x_{nm}^2} \to 0
$$

рівномірно по $x_{nm} \in [a, b]$ при $n \to \infty$. Таким чином, ураховуючи співвідношення (16.7)—(16.9), маємо збіжність

$$
P_n(m) : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}} = \sqrt{npq}\, S_n \frac{R_n}{e^{-\frac{1}{2} x_{nm}^2}} T_n \to 1 \tag{16.10}
$$

рівномірно по $x_{nm} \in [a, b]$ при $n \to \infty$. Очевидно, що зі збіжності (16.10) випливає твердження локальної теореми.

Інтегральна теорема 16.9 (Муавра—Лапласа). Нехай μ — число появ події A в схемі Бернуллі при n випробуваннях. Тоді для довільних a та b $(-\infty < a < b < \infty)$

$$
P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx
$$

при $n \to \infty$.

Доведення

Зрозуміло, що

$$P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \sum_{a \le x_{nm} \le b} P_n(m),$$

де x_{nm} ті самі, що й у попередній теоремі. Тому

$$P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \sum_{a \le x_{nm} \le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}} + \beta_n, \qquad (16.11)$$

де

$$\beta_n = \sum_{a \le x_{nm} \le b} \left[\frac{P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{pnq}}} - 1 \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Сума

$$\sum_{a \le x_{nm} \le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a \le x_{nm} \le b} e^{e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2}} [x_{nm+1} - x_{nm}]$$

є інтегральною сумою інтеграла $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$, де x_{nm} — точки розбиття відрізка $[a, b]$; $x_{nm+1} - x_{nm} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$. Тому

$$\sum_{a \le x_{nm} \le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \qquad (16.12)$$

при $n \to \infty$. З оцінки

$$|\beta_n| \le \max_{a \le x_{nm} \le b} \left| \frac{P_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}}} - 1 \right| \sum_{a \le x_{nm} \le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_{nm}^2} \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

і рівномірної по $x_{nm} \in [a, b]$ збіжності (16.10) випливає збіжність $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тому, враховуючи рівність (16.11) і збіжність (16.12), дістанемо твердження інтегральної теореми.

Практично локальна й інтегральна теореми Муавра—Лапласа застосовуються у вигляді наближених рівностей:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ (локальна формула);}$$

$$\sum_{m=k_1}^{k_2} P_n(m) = P(k_1 \le \mu \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ (інтегральна формула),}$$

де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du.$$

Функції $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ надзвичайно важливі в теорії імовірностей. Функцію $\varphi(x)$ називають ***функцією Гаусса***, або ***щільністю стандартного нормального розподілу***. Для $\varphi(x)$ побудовано таблицю значень від 0 до 4 з інтервалом $\Delta x = 0{,}1$; при $x > 4$ значення $\varphi(x)$ покладають рівним 0 (при цьому похибка менша за 0,0001); для знаходження значень $\varphi(x)$ при $x < 0$ користуються тією самою таблицею, оскільки функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Функцію $\Phi(x)$ називають ***функцією Лапласа***, або ***стандартним інтегралом імовірностей***. Для $\Phi(x)$ побудовано таблицю значень від 0 до 5 з інтервалом $\Delta x = 0{,}01$; при $x > 5$ значення $\Phi(x)$ покладають рівним 0,5 (при цьому похибка менша за 0,000 003); при $x < 0$ використовується непарність функції $\Phi(x)$ $(\Phi(x) = -\Phi(-x))$.

Таблиці значень функції $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ наведено в дод. 1, 2.

■ **Приклад 16.20.** *Визначити ймовірність того, що з 400 виробів, виготовлених на фабриці, 80 — вищого сорту. Відомо, що ймовірність того, що кожний виріб вищого сорту, дорівнює 0,2.*

За умовою $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Для визначення $P_{400}(80)$ скористаємося локальною формулою:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\,\varphi(x),$$

де $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$

За таблицею для функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(0) = 0{,}3989$. Тому $P_{400}(80) \approx$ $\approx \frac{1}{8}\,0{,}3989 \approx 0{,}049\,86$. Якщо обчислити ймовірність за формулою Бернуллі, то дістанемо $P_{400}(80) = 0{,}0498$. Отже, похибка дорівнює 0,000 06.

■ **Приклад 16.21**. *Визначити ймовірність того, що кількість μ бракованих виробів становитиме не більш як 70 у партії з навмання взятих 10 000 виробів, якщо ймовірність бракованості кожного виробу дорівнює 0,005.*

За інтегральною формулою Муавра—Лапласа

$$P(0 \le \mu \le 70) = P\left(-\frac{50}{\sqrt{49{,}75}} \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{20}{\sqrt{49{,}75}}\right) =$$

$$= P\left(-7{,}09 \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le 2{,}84\right) \approx \Phi(2{,}84) - \Phi(-7{,}09) =$$

$$= \Phi(2{,}84) + \Phi(7{,}09) = 0{,}4977 + 0{,}5 = 0{,}9977.$$

■ **Приклад 16.22**. *Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі $p = 0{,}75$. Визначити ймовірність того, що при 10 пострілах буде 8 влучень.*

За умовою $n = 10$, $m = 8$, $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$. Для обчислення $P_{10}(8)$ скористаємося локальною формулою:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\,\varphi(x) = 0{,}7301 \cdot \varphi(x),$$

де $x = \dfrac{8 - 10 \cdot 0{,}75}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx 0{,}36$. За таблицею $\varphi(0{,}36) = 0{,}3739$. Тому $P_{10}(8) \approx$ $\approx 0{,}7301 \cdot 0{,}3739 = 0{,}273$. За формулою Бернуллі $P_{10}(8) = 0{,}282$. Похибка дорівнює 0,009. Така значна похибка порівняно з прикладом 16.20 пов'язана з тим, що значення n мале. Дослідження локальної формули Муавра—Лапласа показують, що вона дає досить добрі наближення лише при достатньо великих n, крім того, p не повинно бути дуже близьким до 0 або 1, а $npq \ge 9$.

У випадках, коли p досить мале (рідкісні події), для наближеного обчислення $P_n(m)$ використовують граничну теорему Пуассона.

Теорема 16.10 (Пуассона). Нехай проводиться n серій випробовувань за схемою Бернуллі по n випробувань у кожній серії, причому ймовірність появи події A в кожному окремому випробуванні залежить від номера серії й дорівнює $p_k = \lambda / k$ у k-й серії ($\lambda > 0$). Якщо $P_n(m)$ — імовірність появи події A m разів у n-й серії, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Доведення

Згідно з формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p_n^m (1-p_n)^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{m!}\, n(n-1)\ldots(n-m+1)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\,\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m}.$$

Якщо $n \to \infty$, а число m фіксоване, то кожний множник

$$\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

прямує до 1, крім того,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^m} = \frac{e^{-\lambda}}{1} = e^{-\lambda}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}.$$

Практично теорема Пуассона застосовується у вигляді наближеної рівності $P_n(m) \approx \frac{(np)^m}{m!}\, e^{-np}$ (наближена формула Пуассона) для таких випробувань за схемою Бернуллі, в яких p мале ($p < 0{,}1$), а n достатньо велике ($n \ge 50$) і $npq < 9$.

■ **Приклад 16.23.** *Імовірність виготовлення на верстаті нестандартної деталі дорівнює 0,004. Визначити ймовірність того, що з 1000 виготовлених на цьому верстаті деталей 5 будуть нестандартними.*

За умовою $n = 1000$, $m = 5$, $p = 0{,}004$, $npq = 3{,}984$. Ці числа задовольняють вимоги $p < 0{,}1$, $n \ge 50$, $npq < 9$. Для визначення ймовірності $P_{1000}(5)$ скористаємося наближеною формулою Пуассона. Отже, $P_{1000}(5) \approx$ $\approx \frac{4^5}{5!}\, e^{-4}$. У дод. 6 знаходимо $P_{1000}(5) \approx 0{,}1563$. Якщо скористатися локальною формулою Муавра—Лапласа, то дістанемо $P_{1000}(5) \approx 0{,}1763$. А її дійсне значення, за формулою Бернуллі, дорівнює 0,1552. Таким чином, похибка обчислення за формулою Муавра—Лапласа становить 0,0211, а за формулою Пуассона — 0,0011, що значно менше.

16.9 ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ РОЗПОДІЛИ

Одне з основних понять теорії імовірностей — це «випадкова величина» («випадкове число»). Такі величини виникають у стохастичних експериментах, результати яких мають кількісний характер, а також у таких, в яких визначається одна або кілька характеристик результатів експерименту, наприклад: число очок, які можуть випасти при одному підкиданні грального кубика; розмір виграшу на лотерейний білет під час розіграшу лотереї; число дефектних деталей серед узятих навмання n деталей; довжина меншої частини стержня при розломі його навмання на дві частини; час безвідмовної роботи приладу; час розпаду радіоактивного ядра та ін.

Отже, в кожному стохастичному експерименті можна розглядати величини, кожна з яких набуває тих або інших числових значень залежно від результатів експерименту. Такі величини називають *випадковими* й позначають здебільшого через ξ, η, ζ.

Оскільки результати стохастичного експерименту описуються елементарними подіями ω, то випадкову величину ξ можна інтерпретувати як числову функцію $\xi = \xi(\omega) \in (-\infty, +\infty)$, визначену на просторі елементарних подій Ω. Проте недовільні функції, визначені на просторі елементарних подій Ω, можна розглядати як випадкові величини. Це пов'язано з тим, що для задання випадкової величини $\xi(\omega)$ необхідно знати не лише її можливі значення, а й імовірності, з якими вона набуває цих значень. Виявляється, що для цього достатньо припустити, аби для кожного дійсного x існувала ймовірність $P(\omega\colon \xi(\omega) < x)$, тобто множина $A_x = \{\omega\colon \xi(\omega) \in (-\infty, x)\} = \{\omega\colon \xi(\omega) < x\}$ елементарних подій ω, на яких $\xi(\omega)$ набуває значень, менших за x, має бути випадковою подією ($A_x \in F$ — σ-алгебрі випадкових подій імовірнісного простору (Ω, F, P)). Тому випадкові величини можна визначити з наступного означення.

Означення 16.11. ***Випадковою величиною*** *ξ називають числову функцію $\xi = \xi(\omega) \in (-\infty, +\infty)$, яка визначена на просторі елементарних подій $\Omega = \{\omega\}$, і така, що для кожного дійсного x існує ймовірність*

$$P(\xi < x) = P(\omega: \xi(\omega) < x).$$

З означення випадкової величини ξ випливає, що ймовірність $P(A_x)$ випадкової події $A_x = \{\omega: \xi(\omega) < x\}$ визначає функцію від x для всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

Означення 16.12. *Функцію*

$$F(x) = P(\xi < x)$$

називають ***функцією розподілу випадкової величини*** *ξ (імовірність того, що випадкова величина ξ набуває значень, менших за x).*

Властивості функцій розподілу $F(x)$

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Справджується тому, що функція розподілу при довільному x є ймовірністю деякої випадкової події.

2. $F(+\infty) = 1,\ F(-\infty) = 0$.

Випливає з того, що $\{\omega: \xi(\omega) < +\infty\} = \Omega$ (нерівність $(\xi < \infty)$ завжди виконується), $\{\omega: \xi(\omega) < -\infty\} = \varnothing$ (нерівність $(\xi < -\infty)$ неможлива).

3. *Для довільних $a < b$*

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Справді, випадкові події $\{\omega: \xi(\omega) < a\}$, $\{\omega: a \le \xi(\omega) < b\}$ несумісні й $\{\omega: \xi(\omega) < b\} = \{\omega: \xi(\omega) < a\} \cup \{\omega: a \le \xi(\omega) < b\}$. Тому $P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \le \xi < b)$. Звідси

$$P(a \le \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a).$$

4. *Функція $F(x)$ неспадна.*

Справді, якщо $x_1 < x_2$, то на основі попередньої властивості $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \le \xi < x_2) \ge 0$, тобто $F(x_1) \le F(x_2)$.

5. *Функція $F(x)$ неперервна зліва, тобто $F(x-0) = F(x)$ для будь-якого x.*

Справді, розглянемо довільну числову послідовність $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x$ таку, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Із рівності випадкових подій

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \{\omega: \xi(\omega) < x_0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\omega: x_{k-1} \le \xi(\omega) < x_k\} \right)$$

та попарної несумісності подій $\{\omega: \xi(\omega) < x_0\}, \{\omega: x_{k-1} \le \xi(\omega) < x_k\}, k = 1; 2;$ ..., згідно з розширеною аксіомою теорії імовірностей і властивістю 3 функції розподілу дістанемо

$$F(x) = P(\xi < x) = P(\xi < x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(x_{k-1} \le \xi < x_k) =$$

$$= F(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [F(x_k) - F(x_{k-1})] = F(x_0) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) -$$

$$- F(x_{k-1})] = F(x_0) + \lim_{n\to\infty} [F(x_n) - F(x_0)] = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Звідси, за означенням неперервності функції зліва, маємо рівність

$$F(x) = F(x-0).$$

Отже, кожна функція розподілу $F(x)$ — це неспадна, неперервна зліва функція, яка задовольняє умови $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

Наголосимо, що завдяки властивості 3 функції $F(x)$ вважатимемо, що випадкова величина ξ задана, якщо відома її функція розподілу [з функції розподілу випливає й те, з якою ймовірністю випадкова величина набуває значень із того чи іншого півінтервалу $[a, b)$].

Під час розв'язання конкретних задач трапляються, як правило, дискретні й неперервні випадкові величини; крім того, вони задаються значно простіше.

Дискретні випадкові величини. *Випадкову величину ξ називають **дискретною**, якщо вона набуває лише скінченне або зліченне число різних значень (x_1, x_2, ..., x_k, ...).*

Законом (або рядом) розподілу дискретної випадкової величини ξ називають сукупність усіх можливих її значень x_k разом з імовірностями $p_k = P(\xi = x_k)$, $k = 1; 2; ...$

Закон розподілу зручно характеризувати за допомогою таблиці:

ξ	x_1	x_2	...	x_k	...
P	p_1	p_2	...	p_k	...

При цьому $p_k \ge 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ (указана сума складається з кінцевої кількості доданків, якщо ξ набуває скінченне число значень).

■ **Приклад 16.24**. *Підкидають один раз гральний кубик. Задати випадкову величину ξ, яка дорівнює числу появ шести очок, і знайти закон її розподілу.*

Простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ складається з шести рівноможливих елементарних подій, де ω_k означає появу k очок у результаті стохастичного експерименту (класична схема). Отже, $P(\omega_k) = \frac{1}{6}$, $k = 1; 2; \ldots; 6$ і

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in A = \{\omega_1, \ldots, \omega_5\}, \\ 1, & \omega = \omega_6. \end{cases}$$

Тому при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ можливі різні значення випадкової величини ξ. Відповідні ймовірності $p_1 = P(\xi = 0) = P(A) = 5/6$, $p_2 = P(\xi = 1) = P(\omega_6) = 1/6$. Таким чином, закон розподілу випадкової величини ξ

ξ	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Розглянемо зв'язок між законом розподілу та функцією розподілу дискретної випадкової величини. Нехай значення дискретної випадкової величини ξ розташовані в порядку зростання $x_1 < x_2 < \ldots < x_k < \ldots$ і $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$. Тоді

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} P(\varnothing) = 0, & x \le x_1, \\ P(A_1) = p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ P(A_i \cup A_2) = p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k, & x_k < x \le x_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Отже, для довільного дійсного x

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Як видно, значення функції $F(x)$ не змінюється при $x_k < x \le x_{k+1}$, а в точках x_k функція $F(x)$ має стрибок величиною p_k, тобто функція розподілу $F(x)$ розривна в точках x_k, східчаста й неперервна зліва.

Так, функція розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ, що розглядалася в прикладі 16.24, має вигляд

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ p_1=5/6, & 0<x\le 1, \\ p_1+p_2=1, & x>1. \end{cases}$$

Розглянемо найважливіші закони розподілу дискретних випадкових величин.

Біноміальний розподіл. *Випадкова величина* ξ, *яка набуває значень* 0; 1; ...; n, *має біноміальний розподіл із параметром* p $(0 < p < 1)$, *якщо*

$$\boxed{P(\xi=k)=C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k},\ k=0;1;\ldots;n.}$$

Таку випадкову величину ξ можна інтерпретувати як число появ події A в схемі Бернуллі при n випробуваннях із $P(A)=p$ у кожному випробуванні. Справді, в цьому разі

$$P(\xi=k)=P_n(k)=C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}.$$

Геометричний розподіл. *Випадкова величина* ξ, *яка набуває значень* 0; 1; ...; k; ..., *має геометричний розподіл із параметром* p $(0 < p < 1)$, *якщо*

$$\bigstar\ \boxed{P(\xi=k)=p(1-p)^k,\ k=0;1;2;\ldots;n;\ldots}$$

Випадкову величину ξ можна інтерпретувати як число незалежних випробувань до першої появи події A (успіху) з $P(A)=p$ у кожному випробуванні. Справді, в цьому разі за простір елементарних подій можна взяти множину $\Omega=\{У, НУ, \ldots, \underbrace{НН\ldots Н}_{k}У, \ldots\}$, а згідно з незалежністю випробувань $P(\underbrace{НН\ldots Н}_{k}У)=q^k p$, де $q=1-p$. Таким чином,

$$P(\xi=k)=P(\underbrace{НН\ldots Н}_{k}У)=p(1-p)^k.$$

Розподіл Пуассона. *Випадкова величина* ξ, *яка набуває значень* 0; 1; ...; k; ..., *має розподіл Пуассона з параметром* $\lambda>0$, *якщо*

$$\boxed{P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0;1;\ldots;n;\ldots}$$

Пуассонів розподіл відіграє важливу роль у теорії масового обслуговування.

Неперервні випадкові величини. *Якщо існує невід'ємна інтегровна функція $f(x)$ така, що для довільного дійсного x функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ можна подати у вигляді*

$$\boxed{F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(y)dy,} \tag{16.13}$$

то випадкову величину ξ називають ***неперервною***, а підінтегральну функцію $f(x)$ — ***щільністю її розподілу.***

Властивості щільності розподілу

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$

2. $P(a\le\xi\le b)=\int_{a}^{b} f(x)dx.$

3. *$F'(x)=f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$.*

Доведення цих властивостей ґрунтується на рівності (16.13) і властивостях функції розподілу $F(x)$. Дійсно, враховуючи рівність (16.13), згідно з властивістю 2 функції розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy=F(\infty)=1,$$

а за властивістю 3 функції розподілу й адитивною властивістю невласного інтеграла

$$P(a\le\xi<b)=F(b)-F(a)=\int_{-\infty}^{b} f(y)dy-\int_{-\infty}^{a} f(y)dy=\int_{a}^{b} f(y)dy.$$

(Ця рівність показує, що ймовірність потрапляння значень випадкової величини ξ у півінтервал $[a, b)$ дорівнює заштрихованій площі на рис. 16.5.)

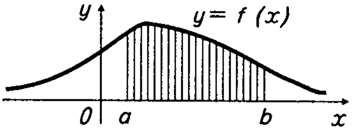

Рис. 16.5

Як відомо, в точках неперервності підінтегральної функції $f(x)$ похідна $\left(\int_{a}^{x} f(y)dy\right)'=f(x)$ для будь-якого фіксованого $a\in(-\infty, x)$. Тому

$$F'(x)=\left(\int_{-\infty}^{x} f(y)dy\right)' = \left(\int_{-\infty}^{a} f(y)dy+\int_{a}^{x} f(y)dy\right)' = \left(\int_{a}^{x} f(y)dy\right)' = f(x).$$

Отже, кожна щільність розподілу $f(x)$ — це невід'ємна інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy=1.$$

Наголосимо: ймовірність того, що неперервна випадкова величина ξ набуває довільного фіксованого значення a, дорівнює 0, тобто $P(\xi=a)=0$. Це випливає з властивості 2. Справді, з того, що $0\le P(\xi=a)\le P(a\le\xi<b)= =\int_a^b f(x)dx \to 0$ при $b\to a$, маємо рівність $P(\xi=a)=0$.

■ **Приклад 16.25**. *На відрізок* $[0;\ 1]$ *навмання кидають точку. Знайти функцію розподілу та щільність розподілу віддалі цієї точки від лівого кінця відрізка.*

Простір елементарних подій становлять точки відрізка, тобто $\Omega=[0;\ 1]$. У цьому разі для знаходження ймовірностей випадкових подій $A\subset\Omega$ скористаємося геометричним поняттям імовірності. Позначимо через ξ віддаль точки від лівого кінця відрізка. Величина ξ набуває значень від 0 до 1. Події $A_x=\{\xi<x\}$ зображуються точками інтервалу $(0,x)\subset\Omega$. Оскільки $A_x=\varnothing$ при $x\le 0$, $A_x=\Omega$ при $x>1$, то відповідно маємо $P(A_x)=0$, $P(A_x)=1$. Для $0<x\le 1$ дістаємо $P(A_x)=x$. За означенням ξ — випадкова величина з функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Отже, випадкова величина ξ неперервна зі щільністю розподілу

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

■ **Приклад 16.26**. *Щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини ξ в інтервалі $(0;\pi/2)$ дорівнює $C\sin 2x$ і 0 в інших випадках. Знайти сталу C і функцію розподілу $F(x)$.*

Сталу C знайдемо з властивості 1 щільності розподілу. В цьому разі

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = C\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx = C\left[-\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=C\left[-\frac{\cos\pi}{2}+\frac{\cos 0}{2}\right]=C\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=C.$$

Отже, $C = 1$. За означенням

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \int_0^x \sin 2y\, dy = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Розглянемо найважливіші розподіли неперервних випадкових величин.

Рівномірний розподіл. *Випадкова величина* ξ *має рівномірний розподіл на відрізку* $[a, b]$, *якщо щільність її розподілу*

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \overline{\in} [a, b]. \end{cases}}$$

Величину ξ можна інтерпретувати як таку, що набуває з рівними «шансами» довільних значень із відрізка $[a, b]$ (див. приклад 16.25).

Нормальний (гауссів) розподіл $N(a, \sigma^2)$. *Випадкова величина* ξ *має нормальний розподіл із параметрами* a, $\sigma > 0$, *якщо щільність її розподілу*

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).}$$

Величину ξ можна інтерпретувати як суму досить великого числа «малих» випадкових величин. Так, в інтегральній теоремі Муавра—Лапласа маємо як граничний нормальний розподіл $N(0; 1)$; при цьому величину $(\mu - np) / \sqrt{npq}$ можна зобразити у вигляді суми

$$\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\nu_k - p}{\sqrt{npq}} \right), \quad \left(\mu = \sum_{k=1}^{n} \nu_k \right)$$

«малих» при великих n випадкових величин $\frac{\nu_k - p}{\sqrt{npq}}$, де ν_k — випадкова величина, яка пов'язана з k-м випробуванням у схемі Бернуллі; $\nu_k = 1$, якщо в k-му випробуванні відбулася подія A, $\nu_k = 0$, якщо в k-му випробуванні відбулася подія $\overline{A}$.

Показниковий розподіл. *Випадкова величина* ξ *має показниковий розподіл із параметром* $\lambda > 0$, *якщо щільність її розподілу*

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}}$$

Показниковий розподіл має важливе значення в теорії надійності. Наприклад, нехай якийсь прилад почав працювати в момент часу $t = 0$. Відомо, що умовна ймовірність виходу приладу з ладу в інтервалі часу $(t, t + \Delta t)$ за умови, що прилад не вийде з ладу до моменту часу t, дорівнює $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, $\lambda > 0$. Нехай ξ — час до першої поломки приладу. Знайдемо функцію розподілу ξ.

Введемо позначення: $\varphi(t) = P(\xi \ge t)$. Тоді за формулою множення ймовірностей

$$\varphi(t + \Delta t) = P(\xi \ge t + \Delta t) = P(\xi \ge t + \Delta t / \xi \ge t)\, P(\xi \ge t).$$

За умовою

$$P(\xi \ge t + \Delta t / \xi \ge t) = 1 - P(t \le \xi \le t + \Delta t / \xi \ge t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Отже,

$$\varphi(t + \Delta t) = [1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)]\,\varphi(t).$$

Звідси

$$\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = -\lambda\varphi(t) + \varphi(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Праворуч у цій рівності границя існує при $\Delta t \to 0$, тому існує границя й зліва. Переходячи до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\lambda\varphi(t).$$

Його загальний розв'язок має вигляд $\varphi(t) = ce^{-\lambda t}$. Значення сталої c знайдемо з умови, що $\varphi(0) = 1$. Тому $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$. Таким чином, функція розподілу $F(x)$ часу ξ до першої поломки приладу

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \ (x = t), \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Отже, випадкова величина ξ неперервна зі щільністю розподілу

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

і час ξ до першої поломки має показниковий розподіл із параметром λ.

16.10 ВИПАДКОВИЙ ВЕКТОР. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Нехай випадкові величини $\xi(\omega)$ і $\eta(\omega)$ задані на одному просторі елементарних подій Ω. Сукупність їх (ξ, η) називають ***двовимірною випадковою величиною*** або ***двовимірним випадковим вектором*** із компонентами ξ і η.

Двовимірна випадкова величина (ξ, η) геометрично інтерпретується як випадкова точка з координатами (ξ, η) на площині XOY (рис. 16.6) або як випадковий вектор, напрямлений із початку координат у точку (ξ, η), компонентами якого є випадкові величини ξ і η (рис. 16.7).

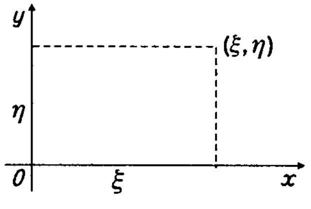

Рис. 16.6

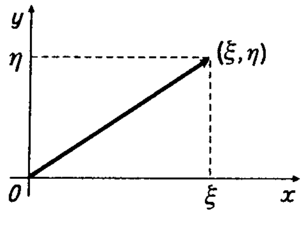

Рис. 16.7

Тривимірна випадкова величина (ξ, η, ζ) зображується випадковою точкою або випадковим вектором у тривимірному просторі: n-вимірна випадкова величина $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — випадковою точкою або випадковим вектором у n-вимірному просторі.

➡ **Означення 16.13**. *Функцію двох змінних x, y*

$$F(x, y) = P(\xi < x,\ \eta < y)$$

називають ***функцією розподілу випадкового вектора*** (ξ, η) (це ймовірність випадкової події $\{(\omega\colon \xi(\omega) < x) \cap (\omega\colon \eta(\omega) < y)\}$, тобто ймовірність сумісного виконання двох нерівностей: $\xi < x$ і $\eta < y$).

Геометрично $F(x, y)$ інтерпретується як імовірність потрапляння випадкової точки (ξ, η) у квадрант із вершиною (x, y) (заштрихована ділянка на рис. 16.8).

Наведемо деякі властивості функції розподілу $F(x, y)$ випадкового вектора (ξ, η).

1 *Імовірність потрапляння випадкової точки* (ξ, η) *у прямокутник* $D = \{(x, y): x_1 \le x < x_2,\ y_1 \le y < y_2\}$ *виражається через функцію розподілу формулою*

$$\boxed{\begin{aligned} &P((\xi, \eta) \in D) = P(x_1 \le \xi < x_2,\ y_1 \le \eta < y_2) = \\ &= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \end{aligned}}$$

Для доведення цієї рівності розглянемо випадкові події:

$$A = \{(\omega: \xi(\omega) < x_2) \cap (\omega: \eta(\omega) < y_2)\};$$

$$B = \{(\omega: x_1 \le \xi(\omega) < x_2) \cap (\omega: y_1 \le \eta(\omega) < y_2)\};$$

$$C_1 = \{(\omega: \xi(\omega) < x_1) \cap (\omega: \eta(\omega) < y_2)\};$$

$$C_2 = \{(\omega: \xi(\omega) < x_2) \cap (\omega: \eta(\omega) < y_1)\}.$$

Геометричну інтерпретацію цих подій подано на рис. 16.9.

Зрозуміло, що події B, $(C_1 \cup C_2)$ несумісні й $A = B \cup (C_1 \cup C_2)$. Тому

$$P(A) = P(B) + P(C_1 \cup C_2).$$

Згідно з формулою додавання ймовірностей

$$P(C_1 \cup C_2) = P(C_1) + P(C_2) - P(C_1 \cap C_2).$$

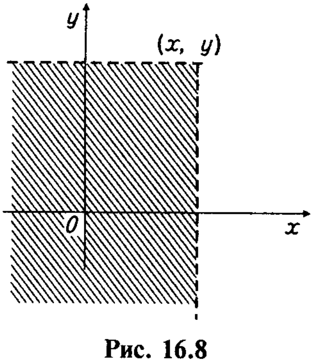

Рис. 16.8

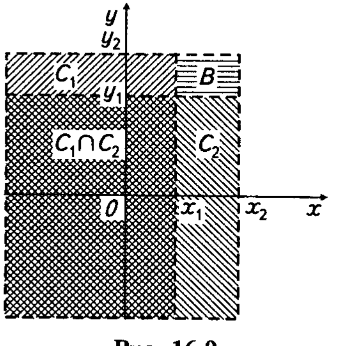

Рис. 16.9

Отже,

$$P(B) = P(A) - P(C_1) - P(C_2) + P(C_1 \cap C_2).$$

Для остаточного доведення властивості 1 залишилося в правій частині попередньої рівності замінити ймовірності функцією розподілу, враховуючи при цьому, що

$$C_1 \cap C_2 = \{(\omega: \xi(\omega) < x_1) \cap (\omega: \eta(\omega) < y_1)\}.$$

2 *Знаючи функцію розподілу $F(x, y)$ випадкового вектора (ξ, η), можна знайти функцію розподілу кожної компоненти.*

Справді,

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = (\omega: \xi(\omega) < x) =$$
$$= P((\omega: \xi(\omega) < x) \cap \Omega) = P((\omega: \xi(\omega) < x) \cap$$
$$\cap (\omega: \eta(\omega) < \infty)) = P(\xi < x,\ \eta < \infty) = F(x, \infty).$$

Аналогічно

$$F_\eta(y) = P(\xi < \infty,\ \eta < y) = F(\infty, y).$$

3 *Функція розподілу $F(x, y)$ неспадна по кожному аргументу x, y.*

Справді, при $x_1 < x_2$ має місце виключення подій $\{\omega: \xi(\omega) < x_1\} \subset \subset \{\omega: \xi(\omega) < x_2\}$. Тому

$$\{(\omega: \xi(\omega) < x_1) \cap (\omega: \eta(\omega) < y)\} \subset \{(\omega: \xi(\omega) < x_2) \cap (\omega: \eta(\omega) < y)\},$$

а згідно з властивостями ймовірності й означенням функції розподілу маємо нерівність $F(x_1, y) \le F(x_2, y)$ для довільних $x_1 < x_2$ та y.

Аналогічно доводиться нерівність $F(x, y_1) \le F(x, y_2)$ для довільних $y_1 < y_2$ та x.

4 $F(\infty, \infty) = 1,\ \ F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$

Зрозуміло, що

$$\{(\omega: \xi(\omega) < \infty) \cap (\omega: \eta(\omega) < \infty)\} = \{\Omega \cap \Omega\} = \Omega;$$
$$\{(\omega: \xi(\omega) < -\infty) \cap (\omega: \eta(\omega) < y)\} =$$
$$= \{\varnothing \cap (\omega: \eta(\omega) < y)\} = \varnothing.$$

Тому $F(\infty, \infty) = P(\Omega) = 1,\ \ F(-\infty, y) = P(\varnothing) = 0.$

Аналогічно доводяться рівності $F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0.$

Як і для одновимірної випадкової величини ξ, надалі розглядатимемо лише дискретні й неперервні випадкові вектори.

Дискретний випадковий вектор. *Випадковий вектор (ξ, η) називають **дискретним**, якщо його компоненти ξ та η — дискретні величини.*

Закон розподілу дискретного випадкового вектора (ξ,η) можна задати за допомогою таблиці:

ξ	η		
	y_1	y_2	...
x_1	p_{11}	p_{12}	...
x_2	p_{21}	p_{22}	...
...	...	...	...

Тут $x_1, x_2, \ldots$ — значення випадкової величини ξ; $y_1, y_2, \ldots$ — значення η, $P_{ij} = P(\xi = x_i,\ \eta = y_j)$, при цьому $P_{ij} \geq 0, \sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$. Для ймовірностей p_{ij} справджуються такі властивості:

1. $\sum\limits_j p_{ij} = P(\xi = x_i)$;

2. $\sum\limits_i p_{ij} = P(\eta = y_j)$.

Справді, з рівності випадкових подій

$$A_i = A_i \cap \Omega = A_i \cap (\bigcup_j B_j) = \bigcup_j (A_i \cap B_j),$$

де $A_i = \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$, $B_j = \{\omega: \eta(\omega) = y_j\}$, та несумісності випадкових подій $(A_i \cap B_j)$ при різних j, оскільки при $y_j \neq y_k$ $(j \neq k)$ маємо

$$P(\xi = x_i) = \sum_j P(A_i \cap B_j) = \sum_j p_{ij}.$$

Властивість 2 пропонуємо довести самостійно.

За аналогією з одновимірною випадковою величиною легко встановити, що для функції розподілу $F(x, y)$ дискретного випадкового вектора (ξ,η), заданого вище таблицею, справджується рівність

$$F(x, y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_i < y} p_{ij}$$

при довільних x, y.

■ **Приклад 16.27**. *Гральний кубик підкидають один раз. Розглядаються дві випадкові величини: ξ — число появ шести очок: η — число очок, що випали. Визначити закон розподілу випадкового вектора (ξ, η) і закон розподілу його компонент.*

Простір Ω складається з шести рівноможливих елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$, де ω_k означає появу k очок (класична схема). Випадкова величина ξ може набувати двох значень ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$), а випадкова величина η — шести значень ($y_k = k$, $k = 1; 2; ...; 6$). Позначимо через A_{ij} випадкові події $\{\omega : \xi(\omega) = x_i,\ \ \eta(\omega) = y_j\}$. Зрозуміло, що $A_{1j} = \omega_j, j = 1; 2; ...; 5$, $A_{16} = \varnothing$, $A_{2j} = \varnothing$, $j = 1; 2; ...; 5$, $A_{26} = \omega_6$. Тому

$$p_{1j} = 1/6,\ \ j = 1; 2; \ldots; 5;\ \ p_{16} = 0;\ \ p_{2j} = 0,\ \ j = 1; 2; \ldots; 5;\ \ p_{26} = 1/6.$$

Отже, закон розподілу випадкового вектора (ξ, η) можна зобразити у вигляді таблиці:

ξ	η					
	1	2	3	4	5	6
0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0
1	0	0	0	0	0	1/6

Звідси, додавши ймовірності по рядках, дістанемо $P(\xi = 0) = 5/6$, $P(\xi = 1) = 1/6$, а додавши ймовірності по стовпчиках, матимемо $P(\eta = j) = 1/6$, $j = 1; 2; ...; 6$. Отже, закони розподілу компонент мають вигляд

ξ	0	1
P	5/6	1/6

,

η	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

.

Неперервний випадковий вектор. *Якщо існує невід'ємна інтегровна на всій площині функція $f(x, y)$ така, що функцію розподілу $F(x, y)$ можна подати у вигляді*

$$\boxed{F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv} \qquad (16.14)$$

для довільних (x, y), то випадковий вектор (ξ, η) називають ***неперервним****, а підінтегральну функцію $f(x, y)$ —* ***щільністю його розподілу.***

Щільність розподілу $f(x, y)$ випадкового вектора має такі в л а с т и в о с т і:

1) $f(x, y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$;

2) *ймовірність потрапляння випадкової точки (ξ, η) в область $D = \{(x, y)\ \ x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ обчислюється за формулою*

$$\boxed{P((\xi,\eta)\in D=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy;} \tag{16.15}$$

3 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=f(x,y)$ *у точках неперервності функції* $f(x, y)$;

4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=f_\xi(x)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=f_\eta(y)$, *де* $f_\xi(x)$, $f_\eta(y)$ — *щільності розподілу випадкових величини* ξ *і* η *відповідно.*

Подібно до одновимірного випадку ці властивості випливають із властивостей функції розподілу $F(x, y)$ випадкового вектора (ξ,η) та рівності (16.14). (Пропонується довести самостійно.)

Зауважимо, що рівність (16.15) стосується й довільної області D, для якої має місце поняття площі. Отже, для обчислення ймовірності потрапляння випадкової точки (ξ,η) в область D достатньо обчислити подвійний інтеграл по області D від щільності розподілу $f(x, y)$ випадкового вектора (ξ,η). Геометрично це означає, що ймовірність потрапляння випадкової точки (ξ,η) в область D дорівнює об'єму тіла, обмеженого зверху поверхнею $z=f(x, y)$, основу якого становить область D.

■ **Приклад 16.28**. *Нехай на відрізок* $[0, T]$ *числової прямої послідовно навмання кидають дві точки. Розглядаються випадкові величини:* ξ — *координата першої точки,* η — *координата другої точки. Знайти:* а) *щільність розподілу випадкового вектора* (ξ,η); б) *імовірність того, що* $|\xi-\eta|\le l$, *де* $l\le T$; в) *щільність розподілу компонент* ξ *і* η.

Результат такого стохастичного експерименту можна зобразити парою чисел (x, y), де $0\le x\le T$, $0\le y\le T$ — координати першої та другої точок відповідно. Таким чином, простір елементарних подій — це квадрат $\Omega=[0, T]\times[0, T]$ на площині XOY (рис. 16.10), $\omega=(x, y)$, $0\le x\le T$, $0\le y\le T$ і $\xi(\omega)=x$, $\eta(\omega)=y$. Очевидно, що тут для визначення ймовірностей випадкових подій можна скористатися поняттям геометричних імовірностей. Тому функція розподілу випадкового вектора має вигляд

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{T^2}, & 0<x\le T, \quad 0<y\le T;\\ \dfrac{x}{T}, & 0<x\le T, \quad y>T;\\ \dfrac{y}{T}, & x>T, \quad 0<y\le T;\\ 0, & x\le 0 \ \text{або}\ y\le 0.\end{cases}$$

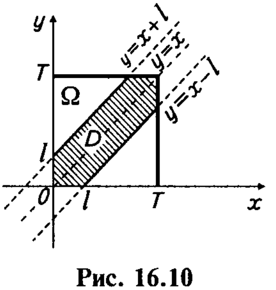

Рис. 16.10

Отже: а) щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η)

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=\begin{cases}\dfrac{1}{T^2}, & 0<x<T,\ \ 0<y<T,\\ 0, & \text{в інших випадках;}\end{cases}$$

б) при $D=\{(x,y): |x-y|\le l,\ 0\le x\le T,\ 0\le y\le T\}$ згідно із зауваженням до властивостей щільності розподілу $f(x, y)$

$$P(|\xi-\eta|\le l)=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{T^2}\,\text{пл.}\,D=\frac{T^2-(T-l)^2}{T^2};$$

в) згідно з властивістю 4

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\dfrac{1}{T^2}\displaystyle\int_0^T dy=\dfrac{1}{T}, & 0<x<T,\\ 0, & \text{в інших випадках;}\end{cases}$$

$$f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\dfrac{1}{T^2}\displaystyle\int_0^T dx=\dfrac{1}{T}, & 0<y<T,\\ 0, & \text{в інших випадках}\end{cases}$$

(компоненти випадкового вектора мають рівномірний розподіл на відрізку $[0,\ T]$).

Зауважимо, що пункт б) цього прикладу іноді формулюють як «задачу про зустріч»: дві особи домовилися про зустріч (вважається, що кожна з них обов'язково прийде на місце зустрічі протягом інтервалу часу $[0,\ T]$), причому та особа, яка прийшла першою, чекає на другу протягом часу $l < T$, після чого йде з місця побачення. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться? Зрозуміло, що ця ймовірність збігається з імовірністю випадкової події $\{|\xi-\eta|\le l\}$ у прикладі 16.28, а отже, дорівнює $[T^2-(T-l)^2]\ T^{-2}$.

Подібно до двовимірного випадку вводиться поняття функції розподілу й щільності розподілу випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Незалежність випадкових величин. *Випадкові величини* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *називаються* ***незалежними***, *якщо*

$$\boxed{\begin{aligned}&P(\xi_1<x_1,\ \xi_2<x_2,\ \xi_n<x_n)=\\ &=P(\xi_1<x_1)P(\xi_2<x_2)\ldots\ P(\xi_n<x_n)\end{aligned}} \tag{16.16}$$

для довільних x_k, $k = 1; 2; \ldots; n$.

Легко показати, що поняття незалежності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ еквівалентне поняттю незалежності випадкових подій $A_k = \{\omega: \xi_k < x_k\}$, $k = 1; 2; \ldots; n$ у сукупності при довільних x_k. Це твердження пропонується перевірити самостійно.

Отже, з незалежності сукупності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ випливає незалежність довільного набору випадкових величин $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{ik}$ із цієї сукупності, зокрема, попарна незалежність довільних випадкових величин ξ_i, ξ_j при $i \neq j$.

Для дискретних і неперервних випадкових величин під час розв'язання конкретних задач зручніше користуватись еквівалентним поняттям незалежності, яке ми наведемо лише для двох випадкових величин.

Дискретні випадкові величини ξ і η, які набувають значень $x_1, x_2, \ldots$ і $y_2, y_2, \ldots$ відповідно, називають *незалежними*, якщо для всіх i, j виконується рівність

$$P(\xi = x_i,\ \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j).$$

Неперервні випадкові величини ξ і η зі щільностями розподілу $f_\xi(x)$ і $f_\eta(y)$ відповідно називають *незалежними*, якщо для щільності розподілу $f(x, y)$ випадкового вектора (ξ, η) виконується рівність

$$f(x, y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$$

для всіх дійсних x, y. Так, у прикладі 16.27 маємо $p_{11} = \frac{1}{6} \neq P(\xi = 0) \times P(\eta = 1) = \frac{5}{6}\frac{1}{6}$, отже, випадкові величини ξ і η залежні; у прикладі 16.28 буде $f(x, y) = f_\xi(x)\, f_\eta(y)$ для всіх дійсних x і y, отже, випадкові величини ξ і η незалежні.

16.11 ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Повну характеристику випадкової величини дає її функція розподілу (для дискретної випадкової величини достатньо знати закон її розподілу, для неперервної — щільність розподілу). Проте при розв'язанні багатьох імовірнісних задач достатньо знати лише деякі числові характеристики розподілу, які відображають найважливіші властивості випадкової величини. Однією з таких характеристик випадкової величини є математичне сподівання.

16.11.1. Математичне сподівання (середнє значення) випадкової величини

❑ **Задача**. *Нехай у лотереї розігрується n білетів, серед яких: n_1 білетів із виграшем величиною x_1 на один білет, $n_2 - x_2$, ..., $n_k - x_k$ ($n_1 + n_2 + ... + n_k = n$). Вартість одного білета лотереї дорівнює x_0. Чи виграшна лотерея?*

Щоб відповісти на поставлене запитання, обчислимо величину $\bar{x}$ середнього виграшу на один білет:

$$\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n}.$$

Якщо $\bar{x} > x_0$, то лотерея виграшна, оскільки середній виграш на один білет більший за вартість цього білета. Зрозуміло, що виграш на один білет є випадковою величиною; позначимо її через ξ. Це дискретна випадкова величина із законом розподілу

ξ	x_1	x_2	...	x_k
P	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$	...	$\frac{n_k}{n}$

При обчисленні ймовірностей $p_i = P(\xi = x_i) = \frac{n_i}{n}$ використано класичну схему («шанси» купити той чи інший білет рівноможливі).

Таким чином,

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P(\xi = x_i).$$

Остання сума в цій рівності називається *математичним сподіванням (середнім значенням) даної випадкової величини* ξ і позначається $M\xi$. Дамо означення в загальному випадку для дискретних і неперервних випадкових величин.

➡ **Означення 16.14**. Нехай ξ — *дискретна випадкова величина*, яка набуває значень $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ з імовірностями $p_1, p_2, ..., p_k, ...$ відповідно. Тоді ***її математичним сподіванням*** *$M\xi$ називають число (сталу) $M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ за умови, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ збіжний (у протилежному разі математичне сподівання не існує).*

➡ **Означення 16.15**. Нехай ξ — *неперервна випадкова величина* зі щільністю розподілу $f(x)$; ***її математичним сподіванням*** *називають* *число* $M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ *за умови, що невласний інтеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$ *збіжний (у противному разі математичне сподівання не існує).*

Розглянемо як приклади математичні сподівання випадкових величин, що мають найважливіші розподіли.

Математичне сподівання біноміального розподілу. Нехай випадкова величина ξ набуває значень $x_k = k$, $k = 0; 1; ...; n$ відповідно з імовірностями $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$, де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. За означенням математичного сподівання дискретної випадкової величини

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} x_k p_k = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_n^k p^{k-1} q^{n-k}.$$

Оскільки

$$\frac{k}{n} C_n^k = \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = C_{n-1}^{k-1},$$

то

$$M\xi = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} p^r q^{n-r}$$

(у сумі зроблено заміну $r = k - 1$). Згідно з формулою бінома Ньютона

$$\sum_{r=0}^{n-1} C_{n-1}^{r} p^r q^{n-r} = (p+q)^{n-1} = 1^{n-1} = 1.$$

Тому $M\xi = np$.

Математичне сподівання геометричного розподілу. Нехай випадкова величина ξ набуває значень $x_k = k$, $k = 0; 1; ...; n; ...$ відповідно з імовірностями $p_k = pq^k$, де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Тоді

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = pq(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + kq^{k-1} + \ldots).$$

Для знаходження суми ряду, який стоїть справа, розглянемо спочатку суму членів нескінченно спадної геометричної прогресії (1, x, x^2, ..., x^k, ..., $0 < x < 1$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots) = \frac{1}{1-x}.$$

За теоремою про диференціювання степеневих рядів $\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \right.$ $\left. = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} \text{ при } |x| < 1\right)$

$$(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + kx^{k-1} + \ldots) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Отже ($x = q$),

$$M\xi = pq\frac{1}{(1-q)^2} = pq\frac{1}{p^2} = \frac{q}{p}.$$

Якщо інтерпретувати випадкову величину ξ як число незалежних випробувань до першої появи події A з імовірністю $P(A) = p$ у кожному випробуванні, то середнє число випробувань буде тим менше, чим ближче p до 1, і навпаки.

Математичне сподівання розподілу Пуассона. Нехай випадкова величина ξ набуває значень 0; 1; 2; ...; k; ... відповідно з імовірностями $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Тоді

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

(скористалися заміною $r = k - 1$ у сумі ряду й розвиненням функції e^{λ} у степеневий ряд $e^{\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}$).

Математичне сподівання рівномірного розподілу. Нехай випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$. Тоді щільність її розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \overline{\in} [a, b]. \end{cases}$$

За означенням математичного сподівання неперервної випадкової величини

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b \right) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{a+b}{2}.$$

Математичне сподівання нормального розподілу. Нехай випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$. Це означає, що щільність її розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Тому

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [(x-a)+a]\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx +$$

$$+ a \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = a,$$

оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a)\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2/2} dz = \sigma^2 \left(e^{-z^2/2} \bigg|_{-\infty}^{\infty} \right) = 0,$$

а згідно з властивістю 1 щільності розподілу

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1.$$

Математичне сподівання показникового розподілу. Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл із параметром $\lambda > 0$.

Це означає, що щільність її розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Тому

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx=\int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_{0}^{\infty} xd(e^{-\lambda x})=$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

(при обчисленні $M\xi$ скористалися формулою інтегрування частинами й тим, що $e^{-\lambda x}\to 0$ при $x\to\infty$).

Розглянемо приклад випадкової величини, для якої математичне сподівання не існує. Нехай ξ має закон розподілу

ξ	1	2	...	2^{n-1}	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Тоді

$$1\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+\ldots+2^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}+\ldots=\infty.$$

Отже, $M\xi$ не існує.

Властивості математичного сподівання

1. *Математичне сподівання сталої величини* $[P(\xi=c)=1]$ *дорівнює цій самій сталій:* $Mc=c$.
2. *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:* $Mc\xi=cM\xi$.
3. *Математичне сподівання суми скінченного числа випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань, якщо існує математичне сподівання кожної випадкової величини:* $M\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\sum_{k=1}^{n}M\xi_k$.
4. *Якщо випадкові величини* ξ *і* η *незалежні й мають математичні сподівання, то математичне сподівання їх добутку дорівнює добутку їх математичних сподівань:* $M\xi\eta=M\xi M\eta$.

5 *Якщо випадкова величина ξ невід'ємна* $[P(\xi \geq 0) = 1]$, *то* $M\xi \geq 0$.

6 *Якщо випадкова величина ξ невід'ємна й $M\xi = 0$, то $\xi = 0$* $[P(\xi = 0) = 1]$.

7 *Якщо $g(x)$ — неперервна функція в області $x \in (-\infty, \infty)$, то:*

1) $Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$ *для дискретної випадкової величини ξ, яка набуває значень x_k, k = 1; 2; ... відповідно з імовірностями p_k за умови, що* $\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| p_k < \infty$;

2) $Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ *для неперервної випадкової величини ξ зі щільністю розподілу $f(x)$ за умови, що* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, f(x) dx < \infty$.

Доведення цих властивостей наведемо лише для дискретної скінченної випадкової величини ξ. В загальному випадку доведення властивостей 2—7 виходить за межі нашої програми.

Властивість 1 випливає з того, що сталу c можна розглядати як дискретну випадкову величину ξ, що набуває лише одного значення $x_1 = c$ з імовірністю $p_1 = 1$, тобто $P(\xi = c) = 1$. Тому за означенням математичного сподівання для дискретної випадкової величини $Mc = c \cdot 1 = c$.

Для доведення властивості 2 розглянемо нову випадкову величину $\eta = c\xi$. Зрозуміло, що випадкова величина η теж дискретна й набуває значень $y_k = cx_k$, $k = 1; 2; ...; n$ відповідно з імовірностями $q_k = P(\eta = y_k) = P(c\xi = cx_k) = P(\xi = x_k) = p_k$. Тому

$$Mc\xi = M\eta = \sum_{k=1}^{n} y_k q_k = \sum_{k=1}^{n} cx_k p_k = c \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = cM\xi.$$

Властивість 3 спочатку доведемо для $n = 2$. Нехай ξ і η — дві дискретні випадкові величини із законами розподілу

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

,

η	y_1	y_2	...	y_m
P	q_1	q_2	...	q_m

. (16.17)

Зрозуміло, що випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ теж дискретна й набуває значень $x_i + y_j$, $i = 1; 2; ...; n$, $j = 1; 2; ...; m$ відповідно з імовірностями

$p_{ij} = P(\xi = x_i,\ \eta = y_j)$. Тому за означенням математичного сподівання для дискретної випадкової величини (сума добутків значень на відповідні ймовірності)

$$M(\xi+\eta) = M\zeta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i + y_i) p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M\xi + M\eta$$

[у другій сумі індекси підсумування поміняли місцями та скористалися властивостями розподілу p_{ij} випадкового вектора (ξ, η)]. Якщо $n > 2$, то

$$M \sum_{k=1}^{n} \xi_k = M\left[\xi_1 + \left(\sum_{k=2}^{n} \xi_k\right)\right] = M\xi_1 + M\sum_{k=2}^{n} \xi_k = \ldots = \sum_{k=1}^{n} M\,\xi_k .$$

Для доведення властивості 4 розглянемо випадкову величину $\zeta = \xi\eta$, де ξ, η взято з (16.17). Випадкова величина ζ теж дискретна й набуває значень $x_i y_j$, $i = 1; 2; \ldots; n$, $j = 1; 2; \ldots; m$ відповідно з імовірностями $p_{ij} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$. Тому

$$M\xi\eta = M\zeta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i q_j =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j q_j\right) = M\xi M\eta$$

(скористалися тим, що за означенням незалежності випадкових величин ξ і η: $p_{ij} = p_i q_j$ для всіх i, j).

Розглянемо невід'ємну випадкову величину ξ. Це означає, що випадкова величина ξ набуває значень $x_k \geq 0$, $k = 1; 2; \ldots; n$. Отже, $x_k p_k \geq 0$, оскільки $p_k \geq 0$. Тому $M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \geq 0$. З цієї нерівності випливає доведення властивості 5.

Для доведення властивості 6 розглянемо невід'ємну випадкову величину ξ, для якої $M\xi = 0$. Тому $x_k p_k = 0$ для всіх $k = 1; 2; \ldots; n$, тобто $p_k = 0$ при всіх $x_k > 0$. Оскільки випадкова величина ξ невід'ємна, то $P(\xi \geq 0) = 1$. Із рівності подій $A = B \cup C$, де $A = \{\omega: \xi(\omega) \geq 0\}$,

$B=\{\omega\colon \xi(\omega)=0\}$, $C=\{\omega\colon \xi(\omega)>0\}$, та несумісності подій B і C згідно з властивістю ймовірності маємо, що $P(A)=P(B)+P(C)$. Отже,

$$1=P(\xi\ge 0)=\left(\sum_{\omega_k\in B} p_k+\sum_{\omega_k\in C} p_k\right)=\sum_{\omega_k\in B} p_k=P(B)=P(\xi=0)$$

(скористались означенням імовірності в дискретних просторах Ω і тим, що для всіх $\omega_k\in C$ $p_k=0$).

Нарешті, для доведення властивості 7 розглянемо величину $\eta=g(\xi)$, де ξ — дискретна випадкова величина, яка набуває значень x_k, $k=1; 2; ...; n$ відповідно з імовірностями p_k, а $g(x)$ — неперервна функція в області $(-\infty,\infty)$. Зрозуміло, що η — теж дискретна випадкова величина, яка набуває значень $g(x_k)$, $k=1; 2; ...; n$ відповідно з імовірностями $p_k=P(\xi=x_k)$. Отже,

$$Mg(\xi)=M\eta=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)p_k.$$

Щоб зрозуміти ступінь ускладнення доведення властивостей 2—7 математичного сподівання в загальному випадку, наведемо доведення властивості 2 для випадкової величини ξ із неперервною щільністю розподілу $f_\xi(x)$ в області $(-\infty,\infty)$. Нехай $c>0$ і $\eta=c\xi$. Визначимо щільність розподілу випадкової величини η. Для цього спочатку знайдемо функцію розподілу

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(c\xi<x)=P\left(\xi<\frac{x}{c}\right)=F_\xi\left(\frac{x}{c}\right).$$

Згідно з властивістю 3 щільності розподілу

$$f_\eta(x)=F'_\eta(x)=\left(F'_\xi\left(\frac{x}{c}\right)\right)'=f_\xi\left(\frac{x}{c}\right)\frac{1}{c}.$$

Отже, за означенням математичного сподівання

$$Mc\xi=M\eta=\int_{-\infty}^{\infty} x f_\eta(x)\,dx=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi\left(\frac{x}{c}\right)dx=$$

$$=c\int_{-\infty}^{\infty} y f_\xi(y)\,dy=cM\xi$$

(у невласному інтегралі зроблено заміну змінних $y=x/c$).

Нехай $c < 0$, $\eta = c\xi$. Тоді

$$F_\eta(x) = P(c\xi < x) = P\left(\xi > \frac{x}{c}\right) = 1 - F_\xi\left(\frac{x}{c}\right);$$

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = -\frac{1}{c} f_\xi\left(\frac{x}{c}\right).$$

Отже,

$$Mc\xi = M\eta = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\eta(x)dx = -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi\left(\frac{x}{c}\right)dx =$$

$$= -c\int_{\infty}^{-\infty} y f_\xi(y)dy = c\int_{-\infty}^{\infty} y f_\xi(y)dy = cM\xi.$$

16.11.2. Дисперсія випадкової величини

Розглянемо дві дискретні випадкові величини ξ і η із законами розподілу

ξ	$-0{,}01$	$0{,}01$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

η	-100	100
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

. (16.18)

Знайдемо математичні сподівання цих величин:

$$M\xi = (-0{,}01)\frac{1}{2} + (0{,}01)\frac{1}{2} = 0;\quad M\eta = (-100)\frac{1}{2} + 100\frac{1}{2} = 0.$$

Отже, математичні сподівання обох випадкових величин однакові, але поведінка ξ і η різна. Легко побачити, що значення ξ мало відрізняються від свого середнього значення, а значення η значно відхиляються від 0. Таким чином, знаючи лише математичне сподівання випадкової величини ξ, не можна судити про щільність групування можливих її значень відносно середнього значення $M\xi$.

Для оцінки щільності групування можливих значень випадкової величини ξ відносно її середнього значення $M\xi$ вводиться ще одна числова характеристика — *дисперсія*.

➡ **Означення 16.16**. ***Дисперсією*** $D\xi$ ***випадкової величини*** ξ *називають число, яке визначається рівністю* $D\xi = M\,[\xi - M\xi]^2$.

Зрозуміло, що $D\xi = Mg(\xi)$, де $g(x) = [x - M\xi]^2$. Тому для її обчислення можна скористатися формулами 1), 2), які наведені у властивості 7 математичного сподівання, у випадках дискретних і неперервних випадкових величин. Крім того, якщо $[\xi - M\xi]^2$ піднести до квадрата й скористатися властивостями математичного сподівання, то дістанемо ще одну формулу:

$$D\xi = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi))^2 = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 =$$
$$= M\xi^2 - (M\xi)^2 = Mg(\xi) - (M\xi)^2,$$

де $g(x) = x^2$.

Отже, для обчислення дисперсії можна скористатися рівністю

$$\boxed{D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k\right)^2} \qquad (16.19)$$

для дискретної випадкової величини ξ, яка набуває значень x_k, $k = 1$; 2; ... відповідно з імовірностями p_k, і

$$\boxed{D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx\right)^2}$$

— для неперервної випадкової величини ξ зі щільністю розподілу $f(x)$.

Як приклад обчислимо дисперсії випадкових величин ξ і η із законами розподілу (16.18). Оскільки $M\xi = M\eta = 0$, то $D\xi = M\xi^2$, $D\eta = M\eta^2$. За формулою (16.19)

$$D\xi = x_1^2\, p_1 + x_2^2\, p_1 = (-0{,}01)^2\, \frac{1}{2} + (0{,}01)^2\, \frac{1}{2} = \frac{1}{10\,000};$$

$$D\eta = (-100)^2\, \frac{1}{2} + (100)^2\, \frac{1}{2} = 10\,000.$$

Така велика різниця у значеннях $D\xi$ і $D\eta$ природна, оскільки величина ξ мало відрізняється від $M\xi$, а η значно відхиляється від $M\eta$.

Властивості дисперсії

1. $D\xi \geq 0$ *для будь-якої випадкової величини* ξ; $D\xi = 0$ *тоді й лише тоді, коли* $\xi = c$, *де* c — *стала величина* $[P(\xi = c) = 1]$.

Справді, невід'ємність дисперсії випливає з того, що $(\xi - M\xi)^2 \geq 0$, і властивості 5 математичних сподівань. Якщо $D\xi = 0$, то з властивості математичних сподівань маємо, що $\xi = M\xi$, тобто ξ — стала величина, і навпаки, якщо $\xi = c$, то $M\xi = c$, а отже, $D\xi = M\,(c-c)^2 = 0$.

2 $D(c\xi) = c^2 D\xi$.

Справді, $D(c\xi) = M(c\xi)^2 - (Mc\xi)^2 = c^2 M\xi^2 - c^2 (M\xi)^2 = c^2 D\xi$.

3 *Якщо випадкові величини незалежні, то* $D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta$.

Справді, в цьому випадку $M\xi\eta = M\xi M\eta$. Тому

$$D(\xi+\eta) = M(\xi+\eta)^2 - (M(\xi+\eta))^2 = M\xi^2 + 2M\xi\eta + M\eta^2 -$$
$$-(M\xi)^2 - 2M\xi M\eta - (M\eta)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 + M\eta^2 - (M\eta)^2 = D\xi + D\eta.$$

- ***Наслідок 1.*** *$D(a\xi + b) = a^2 D\xi$ для довільних сталих a та b.*
- ***Наслідок 2.*** *Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ попарно незалежні (тобто незалежна кожна пара цих величин), то*

$$D\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k.$$

Зрозуміло, що ця рівність теж має місце, якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні в сукупності. Ці наслідки пропонуємо довести самостійно.

*Величина $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$ називається **середнім квадратичним відхиленням випадкової величини** ξ.*

Безпосередньо з властивостей дисперсії випливають наступні властивості $\sigma(\xi)$:

1 $\sigma(c\xi) = c\sigma(\xi)$;

2 *якщо випадкові величини ξ і η незалежні, то* $\sigma(\xi+\eta) = \sqrt{\sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)}$.

16.11.3. Дисперсії найважливіших законів розподілу

Математичні сподівання цих законів відомі (див. вище). Тому обчислювати дисперсію зручніше за формулою $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, в якій залишилося тільки знайти $M\xi^2$.

Для визначення $M\xi^2$ використовується властивість 7 математичних сподівань ($g(x) = x^2$).

Дисперсія біноміального розподілу. Нехай випадкова величина ξ має біноміальний розподіл, тобто $P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1, q=1-p$, $k=0; 1; ...; n$. У цьому разі для обчислення дисперсії $D\xi$ простіше скористатися наслідком 2. Відомо (див. п. 16.9), що випадкову величину ξ можна інтерпретувати як число появ події A (успіху) з $P(A)=p$ у схемі Бернуллі при n випробуваннях. Введемо «індикатори успіхів» — випадкові величини $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ вигляду

$$\nu_k=\begin{cases}1, \text{ якщо у } k\text{-му випробуванні відбулася подія } A,\\ 0, \text{ якщо у } k\text{-му випробуванні — } \overline{A}.\end{cases}$$

Випадкові величини $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n$ незалежні, оскільки випробування незалежні й однаково розподілені, бо $P(\nu_k=1)=p$, $P(\nu_k=0)=q$ для всіх k; крім того, $\xi=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n$. Згідно з наслідком 2

$$D\xi=D\nu_1+D\nu_2+\ldots+D\nu_n.$$

Таким чином, для визначення $D\xi$ достатньо обчислити $D\nu_k$. Оскільки

$$M\nu_k=1\cdot P(\nu_k=1)+0\cdot P(\nu_k=0)=p;$$
$$M\nu_k^2=1^2\cdot P(\nu_k=1)+0^2\cdot P(\nu_k=0)=p,$$

то $D\nu_k=M\nu_k^2-(M\nu_k)^2=p-p^2=p(1-p)=pq$. Отже, $D\xi=npq$.

Наголосимо, що при цій інтерпретації випадкової величини ξ простіше обчислювати й $M\xi (M\xi=M\nu_1+M\nu_2+\ldots+M\nu_n=np)$.

Дисперсія геометричного розподілу. Нехай випадкова величина ξ має геометричний розподіл із параметром $0<p<1$, тобто $P(\xi=k)=pq^k$, $k=0; 1; 2; ...$, де $q=1-p$. Тоді

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2q^kp=p\,(q+2^2q^2+3^2q^3+\ldots+k^2q^k+\ldots)=$$
$$=pq\,(1+2^2q+3^2q^2+\ldots+k^2q^{k-1}+\ldots).$$

При $|x|<1$ справджуються рівності

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots;$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=1+2x+3x^2+\ldots+kx^{k-1}+\ldots;$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^3+\ldots+kx^k+\ldots;$$

$$\frac{(1-x)^2+2x(1-x)}{(1-x)^4}=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=1+2^2x+3^2x^2+\ldots+k^2x^{k-1}+\ldots$$

завдяки можливості почленного диференціювання степеневих рядів (ці ряди рівномірно збіжні при $|x|<1-\delta$ для довільного $0<\delta<1$). Тому ($x = q$)

$$M\xi^2=pq\frac{p^2+2qp}{p^4}=\frac{qp+2q^2}{p^2}.$$

Як відомо, $M\xi=q/p$. Тому

$$D\xi=\frac{qp+2q^2}{p^2}-\left(\frac{q}{p}\right)^2=\frac{q}{p^2}.$$

Дисперсія розподілу Пуассона. Нехай випадкова величина ξ має пуассонів розподіл із параметром $\lambda>0$. Оскільки

$$M\xi^2=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\frac{\lambda^m}{m!}=\lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\right]=$$

$$=\lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty}m\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}+e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\right]=$$

$$=\lambda[M\xi+1]=\lambda(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda$$

(використано заміну індексу підсумування $m = k + 1$, рівність $e^{\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}$, а також $M\xi=\lambda$), то

$$D\xi=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Наголосимо, що в пуассоновому розподілі з параметром λ $M\xi=D\xi=\lambda$.

Дисперсія рівномірного розподілу. Нехай випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$. Оскільки

$$M\xi^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{3}\frac{b^3-a^3}{b-a}=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

і

$$M\xi = \frac{a+b}{2},$$

то

$$D\xi = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Дисперсія нормального закону розподілу. Нехай ξ має нормальний закон розподілу з параметрами a, σ^2. Тут дисперсію простіше обчислити за формулою

$$D\xi = M[\xi - M\xi]^2 = M[\xi - a]^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

У результаті підстановки $\frac{x-a}{\sigma} = z$ дістанемо

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2/2} dz.$$

Інтегруючи частинами ($u = z$, $dv = ze^{-z^2/2}\,dz$), матимемо

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz\right] =$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz = \sigma^2$$

(скористалися тим, що $ze^{-z^2/2} \to 0$ при $|z| \to \infty$, і відомим інтегралом Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi}$).

Отже, в нормальному розподілі $N(a, \sigma^2)$ параметри a, σ^2 — це відповідно математичне сподівання й дисперсія цього розподілу, σ — середнє квадратичне відхилення.

Дисперсія показникового розподілу. Нехай випадкова величина ξ має показниковий розподіл із параметром $\lambda > 0$. Оскільки

$$M\xi^2 = \lambda\int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx,$$

то, інтегруючи частинами ($u = x^2$, $dv = e^{-\lambda x}\,dx$), дістанемо

$$M\xi^2 = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx\right] = \lambda\left[\frac{2}{\lambda^2}M\xi\right] = \frac{2}{\lambda^2}$$

(скористалися тим, що $x^2e^{-\lambda x} \to 0$ при $x \to \infty$, і рівністю $M\xi = \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$).

Тому

$$D\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

16.11.4. Моменти випадкових величин

Часто використовуються загальніші числові характеристики випадкових величин ξ, які називаються *моментами*.

➡ **Означення 16.17.** ***Моментом порядку*** *k* (*$k \geq 1$ — ціле число*) ***випадкової величини*** *ξ називають число $M\xi^k$, число $M(\xi - M\xi)^k$ —* ***центральним моментом порядку k.***

Зокрема, математичне сподівання $M\xi$ є моментом першого порядку, а дисперсія $D\xi$ — центральним моментом другого порядку.

Для обчислення моментів і центральних моментів порядку k випадкової величини ξ можна скористатися формулами, які наведені у властивості 7 математичного сподівання при $g(x) = x^k$, $g(x) = (x - M\xi)^k$ відповідно.

16.11.5. Коефіцієнт кореляції

Розглянемо дуже важливу числову характеристику, пов'язану з двома випадковими величинами ξ і η, за допомогою якої визначають ступінь лінійної залежності випадкових величин ($\eta \approx a\xi + b$, де a і b — сталі).

➡ **Означення 16.18.** Нехай ξ і η — випадкові величини, які мають дисперсії $D\xi$, $D\eta$ відповідно. ***Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами*** *ξ* ***та*** *η називають число (сталу)*

$$r_{\xi\eta} = \frac{M\,[(\xi - M\xi)\,(\eta - M\eta)]}{\sqrt{D\xi\, D\eta}}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції

1 *Для будь-яких* ξ *і* η *коефіцієнт* $|r_{\xi\eta}| \le 1$.

Справді, згідно з властивістю 5 математичних сподівань

$$M\left[\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right]^2 \ge 0.$$

Піднесемо вираз у дужках до квадрата й, використовуючи властивості 2 і 3 математичних сподівань, дістанемо нерівність

$$\frac{M\,[\xi - M\xi]^2}{D\xi} \pm 2r_{\xi\eta} + \frac{M\,[\eta - M\eta]^2}{D\eta} \ge 0,$$

тобто $2\,[1 \pm r_{\xi\eta}] \ge 0$. Звідси маємо, що $|r_{\xi\eta}| \le 1$.

2 $|r_{\xi\eta}| = 1$ *тоді й лише тоді, коли існують такі сталі* $a \ne 0$ *і* b*, що* $\eta = a\xi + b$.

Справді, нехай $\eta = a\xi + b$. Тоді $M\eta = aM\xi + b$, $D\eta = a^2 D\xi$ і

$$r_{\xi\eta} = \frac{1}{\sqrt{D\xi a^2 D\xi}} M\,[(\xi - M\xi)\,(a\xi + b - aM\xi - b)] =$$

$$= \frac{a}{|a|\,D\xi} M\,(\xi - M\xi)^2 = \frac{aD\xi}{|a|\,D\xi} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Навпаки, нехай $|r_{\xi\eta}| = 1$. Припустимо, що $r_{\xi\eta} = 1$. Тоді з доведення властивості 1 маємо рівність

$$M\left[\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\right]^2 = 0.$$

Згідно з властивістю 6 математичних сподівань

$$\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = 0.$$

Звідси $\eta = a\xi + b$, де $a = \sqrt{\dfrac{D\eta}{D\xi}}$, $b = -\sqrt{\dfrac{D\eta}{D\xi}}\, M\xi + M\eta$.

Якщо $r_{\xi\eta}=-1$, то за аналогією дістанемо, що $\eta=a\xi+b$, де $a=-\sqrt{\frac{D\eta}{D\xi}}$, $b=\sqrt{\frac{D\eta}{D\xi}}M\xi+M\eta$.

3 *Якщо ξ і η — незалежні випадкові величини, то $r_{\xi\eta}=0$.*

Це випливає з того, що випадкові величини $\xi-M\xi$, $\eta-M\eta$ теж незалежні, тобто

$$M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]=M(\xi-M\xi)\,M(\eta-M\eta)=0.$$

Обернене твердження взагалі не вірне. Справді, розглянемо випадкову величину ξ, рівномірно розподілену на відрізку $[-1;\ 1]$, а $\eta=\xi^2-\frac{1}{3}$. Зрозуміло, що ξ і η залежні. Покажемо, що коефіцієнт кореляції між ними $r_{\xi\eta}=0$. Щільність розподілу випадкової величини ξ становить

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[-1;\ 1],\\ 0, & x\overline{\in}\,[-1;\ 1].\end{cases}$$

Тому

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{1}\right]=0;$$

$$M\eta=M\left[\xi^2-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}x\right)\bigg|_{-1}^{1}\right]=0;$$

$$r_{\xi\eta}=\frac{1}{\sqrt{D\xi D\eta}}M([\xi-M\xi][\eta-M\eta])=\frac{1}{\sqrt{D\xi D\eta}}M\xi\eta.$$

Оскільки

$$M\xi\eta=M\xi\left(\xi^2-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{6}x^2\right)\bigg|_{-1}^{1}\right]=0,$$

то $r_{\xi\eta}=0$.

16.12 РОЗПОДІЛ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ мають характерну особливість, яка полягає в тому, що розподіл випадкової величини $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, де $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ — неперервна функція, повністю описується функціями розподілу $F_{\xi_1}(x_1), F_{\xi_2}(x_2), \ldots, F_{\xi_n}(x_n)$. Спершу розглянемо найпоширеніший випадок у теорії імовірностей, коли $g(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$ лише для дискретних і неперервних величин.

Теорема 16.11. Нехай ξ і η — незалежні дискретні випадкові величини, які набувають значень x_i, $i = 1; 2; ...$, y_j, $j = 1; 2; ...$ відповідно, а z_k — можливі значення, яких набуває випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$. Тоді

$$P(\zeta = z_k) = \sum_i P(\eta = z_k - x_i)\, P(\xi = x_i) =$$
$$= \sum_j P(\xi = z_k - y_j)\, P(\eta = y_j). \qquad (16.20)$$

Доведення

Оскільки величина суми не залежить від порядку доданків ($\xi + \eta = \eta + \xi$), то достатньо довести першу з рівностей (16.20). Зрозуміло, що

$$P(\zeta = z_k) = P(\xi + \eta = z_k) = P((\xi + \eta = z_k) \cap \Omega) =$$
$$= P((\xi + \eta = z_k) \cap \bigcup_i (\xi = x_i)) =$$
$$= P(\bigcup_i [(\xi + \eta = z_k) \cap (\xi = x_i)]) = \sum_i P((\xi + \eta = z_k) \cap (\xi = x_i)) =$$
$$= \sum_i P((x_i + \eta = z_k) \cap (\xi = x_i)) = \sum_i P(\eta = z_k - x_i,\ \xi = x_i).$$

Залишилося скористатися незалежністю випадкових величин ξ і η, тобто $P(\eta = z_k - x_i,\ \xi = x_i) = P(\eta = z_k - x_i)\, P(\xi = x_i)$. Отже,

$$P(\zeta = z_k) = \sum_i P(\eta = z_k - x_i)\, P(\xi = x_i).$$

◆ ***Наслідок 1***. Користуючися теоремою 16.11, можна виписати закон розподілу суми $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ незалежних дискретних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ через закони розподілу ξ_k. Наприклад, нехай $n = 3$, а випадкові величини ξ_1, ξ_2, ξ_3 незалежні дискретні, які набувають значень $x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, x_k^{(3)}$, $i = 1; 2; ...,$ $j = 1; 2; ...,$ $k = 1; 2; ...$ відповідно. Тоді згідно з незалежністю випадкових величин ξ_3 і $\xi_1 + \xi_2$, а також теоремою 16.11

$$P((\xi_1 + \xi_2) + \xi_3 = x_r^{(4)}) = \sum_k P(\xi_1 + \xi_2 = x_r^{(4)} - x_k^{(3)})\ P(\xi_3 = x_k^{(3)}) =$$

$$= \sum_k \sum_j P(\xi_1 = x_r^{(4)} - x_k^{(3)} - x_j^{(2)})\, P(\xi_2 = x_j^{(2)})\, P(\xi_3 = x_k^{(3)}).$$

Отже, зрозуміло, як діяти при $n > 3$.

Теорема 16.12. Нехай ξ і η — незалежні неперервні випадкові величини з неперервними щільностями розподілу $f_\xi(x)$, $f_\eta(x)$ відповідно. Тоді випадкова величина $\zeta = \xi + \eta$ теж неперервна зі щільністю розподілу $f(x)$, для якої справджуються рівності

$$f_\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x-u) f_\eta(u)du. \qquad (16.21)$$

Доведення

В силу тих самих причин, що й у теоремі 16.11, доведемо лише першу з рівностей (16.21). Нехай $f(x, y)$ — щільність розподілу випадкового вектора (ξ, η). Згідно з властивістю 2 щільності розподілу випадкового вектора для функції розподілу $F(x)$ випадкової величини $\zeta = \xi + \eta$ маємо рівність

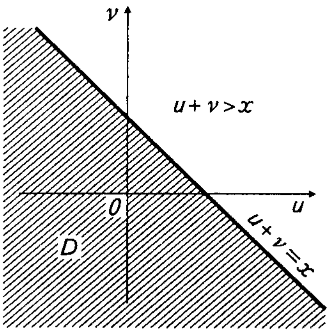

Рис. 16.11

$$F(x) = P(\xi + \eta < x) =$$

$$= P((\xi, \eta) \in D) = \iint_D f(u, v)du\, dv,$$

де $D = \{(u, v): u + v < x\}$ (рис. 16.11).

Перейдемо в подвійному інтегралі до повторного й скористаємося незалежністю випадкових величин ξ і η. Таким чином, дістанемо рівність

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f(u,v)dv \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-u} f_\xi(u) f_\eta(v)\, dv \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) \left(\int_{-\infty}^{x-u} f_\eta(v)\, dv \right) du.$$

Отже,

$$f(x)=F'(x)=\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\left(\int_{-\infty}^{x-u} f_\eta(v)\,dv\right)du\right)'=\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u) f_\eta(x-u)\,du.$$

◆ ***Наслідок 2***. Користуючися теоремою 16.12, можна виписати щільність розподілу суми $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ незалежних неперервних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ через щільності розподілу $f_{\xi_k}(x)$ (доведення аналогічне наслідку 1).

Теорема 16.13. Нехай ξ і η — незалежні випадкові величини. Якщо:
(1) кожна з них має розподіл Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно, то випадкова величина $\zeta=\xi+\eta$ теж має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1+\lambda_2$;
(2) кожна з них має нормальний розподіл $N(a_1,\sigma_1^2)$, $N(a_2,\sigma_2^2)$ відповідно, то випадкова величина $\zeta=\xi+\eta$ теж має нормальний розподіл $N(a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Доведення

(1) Нехай ξ і η — незалежні й мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 і λ_2 відповідно. Це означає, що

$$P(\xi=i)=\frac{\lambda_1^i}{i!}e^{-\lambda_1},\quad P(\eta=j)=\frac{\lambda_2^j}{j!}e^{-\lambda_2},$$

$i=0;\ 1;\ 2;\ \ldots,\ j=0;\ 1;\ 2;\ \ldots$ Зрозуміло, що випадкова величина $\zeta=\xi+\eta$ теж може набувати лише значень 0; 1; 2; ... Оскільки ξ і η незалежні, то згідно з теоремою 16.11

$$P(\zeta=n)=\sum_{i=0}^{\infty}P(\xi=i)P(\eta=n-i)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}P(\xi=i)P(\eta=n-i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\,\frac{\lambda_2^{n-i}e^{-\lambda_2}}{(n-i)!}=$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!\,(n-i)}\,\lambda_1^i\,\lambda_2^{n-i}=$$

$$=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}C_n^i\,\lambda_1^i\,\lambda_2^{n-i}=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\,\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}$$

(скористалися тим, що η — невід'ємна випадкова величина, тобто $P(\eta = n - i) = 0$ при $i > n$, крім того, використали біном Ньютона). Отже,

$$P(\zeta = n) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad n = 0; 1; 2; \ldots,$$

а це означає, що $\xi + \eta$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

Твердження ② теореми доводиться аналогічно, але при цьому замість теореми 16.11 використовується теорема 16.12.

Теорема 16.14. Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ незалежні й кожна з них має:

① розподіл Пуассона з параметрами λ_k, $k = 1; 2; \ldots; n$ відповідно, то випадкова величина $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ теж має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$;

② відповідно нормальний розподіл $N(a_k, \sigma_k^2)$, $k = 1; 2; \ldots; n$, то випадкова величина $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ теж має нормальний розподіл $N(a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)$.

При доведенні цієї теореми можна скористатися методом математичної індукції, враховуючи при цьому теорему 16.13 ($n = 2$) і незалежність випадкових величин $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{k-1}$ і ξ_k при $k \geq 2$.

Стисло розглянемо деякі розподіли, що пов'язані із сумами $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_k^2$ незалежних нормально розподілених випадкових величин ξ_k і які відіграють важливу роль у математичній статистиці.

16.12.1. χ^2-Розподіл

Розподілом χ_n^2(«хі квадрат») із n ступенями вільності називають розподіл випадкової величини $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$, де ξ_k — незалежні однаково розподілені випадкові величини з нормальним розподілом $N(0; 1)$.

Для визначення щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини χ_n^2 знайдемо спочатку щільність розподілу $f_\eta(x)$ випадкової величини $\eta = \xi^2$, де ξ — нормально розподілена $N(0; 1)$ випадкова величина. Враховуючи властивість 2 щільності розподілу та явний вигляд щільності нормального розподілу $N(0; 1)$, для $x > 0$ дістанемо рівність

$$F_\eta(x) = P(\xi^2 < x) = P(|\xi| < \sqrt{x}) =$$

$$= P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2/2}\, du.$$

Функція розподілу $F_\eta(x)$ випадкової величини η має похідну при $x > 0$. При $x < 0$ дістаємо $F_n(x) = 0$.

Отже,

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Таким чином, якщо скористатися наслідком до теореми 16.12, то щільність розподілу випадкової величини χ^2_n становитиме

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\, \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

де

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

— так звана гамма-функція. Легко побачити, що розподіл «хі квадрат» визначається лише одним параметром n — кількістю ступенів вільності.

У статистичній механіці величина $\chi^2_3 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ — це квадрат швидкості частинки за припущення, що проекції ξ_i швидкості на осі координат мають нормальний розподіл. Розподіл випадкової величини χ^2_3 називаються *розподілом Максвелла.*

16.12.2. Розподіл Стьюдента

***Розподілом Стьюдента** (або **t-розподілом**) із n ступенями вільності називають розподіл випадкової величини $t = \xi / \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2}$, де $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — незалежні* *однаково розподілені випадкові величини з нормальним розподілом* $N(0;\,1)$.

Для визначення щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини t обчислимо щільність розподілу $f_\eta(x)$ випадкової величини $\eta=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2}$. Зрозуміло, що при $x>0$

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2<nx^2\right)=F_{\chi_n^2}(nx^2),$$

де $F_{\chi_n^2}(x)$ — функція розподілу випадкової величини χ_n^2. Тому, враховуючи вигляд щільності розподілу випадкової величини χ_n^2, маємо рівність

$$f_\eta(x)=F_\eta'(x)=\begin{cases}\dfrac{n^{n/2}}{2^{n/2-1}\,\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{n-1}e^{-nx^2/2}, & x>0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Аналогічно доведенню теореми 16.12 для щільності $f_{\xi/\eta}(x)$ відношення двох незалежних неперервних випадкових величин ξ і η $[P(\eta=0)=0]$ можна дістати формулу

$$f_{\xi/\eta}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}|u|f_\xi(ux)f_\eta(u)\,du.$$

Згідно з цією формулою й тим, що в даному випадку ξ — нормально розподілена $N(0;\,1)$ випадкова величина, а $t=\xi/\eta$, матимемо рівність для щільності розподілу Стьюдента з n ступенями вільності

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},\quad -\infty<x<\infty.$$

16.13 ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

■ **Приклад 16.29**. Припустимо, що вимірюється відрізок завдовжки a, справжня довжина якого нам не відома. Повторивши незалежно n разів вимірювання в однакових умовах, дістанемо n чисел x_1, x_2, ..., x_n. Як випливає з досвіду, за наближене значення потрібно взяти середнє арифметичне результатів спостережень $a \approx \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, при цьому, чим більше число спостережень n, тим менша середня похибка

$$\delta_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - a.$$

При кожному вимірюванні неминуче виникає похибка ξ_k ($x_k = a + \xi_k$), яку заздалегідь не можна передбачити й тому вважаємо її випадковою величиною. Оскільки повторні вимірювання здійснюються в однакових умовах, то природно припустити, що ці випадкові величини незалежні й однаково розподілені. Якщо вимірювання позбавлені однобічних систематичних похибок (прилади, якими проводяться вимірювання, без дефектів), то $M\xi_k = 0$. Зрозуміло, що середня похибка δ_n є середнім арифметичним незалежних розподілених випадкових величин: $\delta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$, і практичний досвід свідчить, що середня похибка δ_n при збільшенні n наближається до 0 ($M\xi_k = 0$). У цьому проявляється один із найважливіших законів теорії імовірностей, який полягає в тому, що за відносно широких умов середнє арифметичне багатьох випадкових величин майже втрачає випадковий характер, тобто стає незалежним від ω.

Означення 16.19. *Казатимемо, що для послідовності випадкових величин* ξ_n, $n = 1; 2; \ldots$, *для яких існує математичне сподівання* $M\xi_n$, $n = 1; 2; \ldots$, *справджується закон великих чисел, якщо для довільного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{16.22}$$

(*середнє арифметичне математичних сподівань не залежить від* ω).

*Теореми, в яких указуються умови, з яких випливає збіжність (16.22), називають **«законом великих чисел»**.*

Перед формулюванням і доведенням таких теорем установимо одну дуже важливу нерівність, яку називають *нерівністю Чебишова.*

Теорема 16.15. Нехай ξ — невід'ємна випадкова величина: $\xi = \xi(\omega) \geq 0$ для будь-якого $\omega \in \Omega$. Якщо існує математичне сподівання $M\xi$, то $P(\xi > 1) \leq M\xi$.

Доведення

Нехай ξ — неперервна випадкова величина зі щільністю розподілу $f(x)$ (для дискретних випадкових величин доведення аналогічне). Згідно з властивістю 2 щільності розподілу маємо рівності

$$P(\xi > 1) = P(1 < \xi < \infty) = \int_1^\infty f(x)dx.$$

Зрозуміло, що в області інтегрування $x > 1$ виконується нерівність $f(x) \le x\,f(x)$. Функція $x\,f(x)$ інтегровна в області $(0, \infty)$, оскільки існує математичне сподівання $M\xi$. Тому

$$P(\xi > 1) \le \int_1^\infty x\,f(x)dx \le \int_0^\infty xf(x)dx = M\xi$$

($f(x) = 0$ при $x < 0$ для невід'ємної випадкової величини ξ).

◆ ***Наслідок 1 (нерівність Чебишова: перша форма).*** *Якщо випадкова величина ξ невід'ємна й має математичне сподівання $M\xi$, то для довільної сталої $c > 0$ виконується нерівність*

$$\boxed{P(\xi > c) \le \frac{1}{c} M\xi.}$$

Справді, згідно з теоремою

$$P(\xi > c) = P\left(\frac{\xi}{c} > 1\right) \le M\frac{\xi}{c} = \frac{1}{c} M\xi.$$

◆ ***Наслідок 2 (нерівність Чебишова: друга форма).*** *Нехай ξ — випадкова величина, для якої існує математичне сподівання $M\xi$ та дисперсія $D\xi$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність*

$$\boxed{P(|\xi - M\xi| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2} D\xi.}$$

Справді, згідно з теоремою

$$P(|\xi - M\xi| > \varepsilon) = P\left(\frac{|\xi - M\xi|}{\varepsilon} > 1\right) =$$

$$= P\left(\left(\frac{|\xi - M\xi|}{\varepsilon}\right)^2 > 1^2\right) \le M\frac{(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} D\xi$$

(скористалися тим, що події, які стоять під знаком імовірності, рівносильні).

Теорема 16.16 (Чебишова). Для послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ попарно незалежних випадкових величин, для яких існують дисперсії, обмежені однією й тією самою сталою (тобто $D\xi_n \le c$, $n = 1; 2; \ldots$), справджується закон великих чисел.

Доведення

Згідно з попарною незалежністю випадкових величин і властивостями дисперсії

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D\xi_k \le \frac{cn}{n^2} = \frac{c}{n} \to 0$$

при $n \to \infty$. Тому, використовуючи нерівність Чебишова, маємо збіжність

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right| > \varepsilon\right) =$$

$$= P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)\right| > \varepsilon\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ для довільного $\varepsilon > 0$. Отже, згідно з означенням для послідовності випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ справджується закон великих чисел.

Розглянемо окремий випадок теореми Чебишова.

Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *така, що*

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \ldots = M\xi_n = \ldots = a$$

і

$$D\xi_1 \le c,\ D\xi_2 \le c, \ldots,\ D\xi_n \le c, \ldots,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Справді, це є окремий випадок теореми Чебишова, в якій $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = a.$

Зауважимо, що цей окремий випадок обґрунтовує застосування середнього арифметичного в теорії вимірювань. Так, у прикладі 16.29 згідно із законом великих чисел середня похибка δ_n прямує до нуля. Отже, середнє арифметичне результатів спостережень дає тим точніше наближене значення величини a, чим більша кількість спостережень.

Теорема 16.17 (Бернуллі). Нехай μ_n — число появ події A в n незалежних випробуваннях стохастичного експерименту, p — імовірність появи події A в кожному випробуванні. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Доведення

Як відомо (див. п. 16.11.3), можна записати зображення $\mu_n = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$, де $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — незалежні, однаково розподілені випадкові величини з $M\nu_k = p$, $D\nu_k = p\,(1 - p)$. Тому теорема Бернуллі безпосередньо випливає з теореми Чебишова (окремий випадок).

Зауважимо, що теорема Бернуллі теоретично обґрунтовує стійкість відносних частот випадкових подій, установлену емпірично (див. п. 16.3).

Нерівність Чебишова дає змогу дістати при однаково розподілених незалежних випадкових величинах узагальнення теореми Чебишова (вимагається існування лише математичного сподівання).

Теорема 16.18 (Хінчина). Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots$ незалежні, однаково розподілені й мають математичне сподівання ($M\xi_n = a$), то для такої послідовності випадкових величин справедливий закон великих чисел.

Доведемо допоміжне твердження, яким будемо користуватися при доведенні теореми.

Лема. Якщо ξ і η — випадкові величини, то для довільного $\varepsilon > 0$ справджується нерівність

$$P(|\xi + \eta| > 2\varepsilon) \le P(|\xi| > \varepsilon) + P(|\eta| > \varepsilon).$$

Доведення

Зрозуміло, що має місце включення випадкових подій $(A \cap B) \subset C$, де $A = (|\xi| \le \varepsilon)$, $B = (|\eta| \le \varepsilon)$, $C = (|\xi + \eta| \le 2\varepsilon)$ (бо $|\xi + \eta| \le |\xi| + |\eta|$). Згідно з властивостями операцій над випадковими подіями $\overline{C} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Отже, користуючися властивостями ймовірності, дістаємо нерівність

$$P((|\xi + \eta| > 2\varepsilon) = P(\overline{C}) \le P(\overline{A}) + P(\overline{B}) =$$
$$= P(|\xi| > \varepsilon) + P(|\eta| > \varepsilon).$$

Теорему доведемо для неперервних випадкових величин ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ (у загальному випадку доведення аналогічне). Оскільки випадкові величини ξ_n однаково розподілені, то всі вони мають одну щільність розподілу $f(x)$. Введемо випадкові величини:

$$\chi_{|\xi_k| \le n\delta} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } |\xi_k| \le n\delta, \\ 0, \text{ якщо } |\xi_k| > n\delta; \end{cases} \quad \chi_{|\xi_k| > n\delta} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } |\xi_k| \le n\delta, \\ 1, \text{ якщо } |\xi_k| > n\delta, \end{cases}$$

$$k = 1; 2; \ldots; n, \ \delta > 0.$$

Зрозуміло, що $\chi_{|\xi_k| \le n\delta} + \chi_{|\chi_k| > n\delta} = 1$. Тому $\xi_k = \xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta} + \xi_k \chi_{|\xi_k| > n\delta}$ для кожного $k = 1; 2; \ldots, n$ і довільного $n > 1$. Розглянемо набори випадкових величин $\xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta}$, $k = 1; 2; \ldots; n$. У кожному наборі випадкові величини незалежні, оскільки величина $\xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta}$ пов'язана лише з випадковою величиною ξ_k, а в послідовності $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ випадкові величини згідно з умовою теореми незалежні. Крім того, для випадкових величин $\xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta}$, $k = 1; 2; \ldots; n$ уже існують і дисперсії, тобто

$$a_n = M\xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta} = \int_{-n\delta}^{n\delta} x f(x) dx;$$

$$D\xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta} = M(\xi_k \chi_{|\xi_k| \le n\delta})^2 - a_n^2 = \int_{-n\delta}^{n\delta} x^2 f(x) dx - a_n^2 \le \int_{-n\delta}^{n\delta} x^2 f(x) dx \le$$

$$\le n\delta \int_{-n\delta}^{n\delta} |x| f(x) dx \le n\delta b,$$

де $b = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$ (скінченність цього інтеграла випливає з означення існування математичного сподівання $a = M\xi_k$). Більше того, $a_n \to a$ при $n \to \infty$ (згідно з означенням невласного інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$).

Розглянемо випадкові події

$$A=\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\chi_{|\xi_k|\le n\delta}-a\right|\le 2\varepsilon\right\};\;\; B_k=\{|\xi_k|\le n\delta\},\;\; k=1;\,2;\,\ldots;\,n;$$

$$C=\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-a\right|\le 2\varepsilon\right\}.$$

Легко побачити, що $A\cap\left(\bigcap_{k=1}^{n}B_k\right)\subset C$. Тому $\overline{C}\subset\overline{A}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{B}_k\right)$, а згідно з властивостями ймовірності

$$P(\overline{C})\le P(\overline{A})+P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\overline{B}_k\right)\le P(\overline{A})+\sum_{k=1}^{n}P(\overline{B}_k),$$

тобто

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-a\right|>2\varepsilon\right)\le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\chi_{|\xi_k|\le n\delta}-a\right|\ge 2\varepsilon\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}P(|\xi_k|>n\delta).$$

Згідно з лемою

$$P\left(\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\chi_{|\xi_k|\le n\delta}-a_n\right)+(a_n-a)\right|\ge 2\varepsilon\right)\le$$

$$\le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\chi_{|\xi_k|\le n\delta}-a_n\right|>\varepsilon\right)+P(|a_n-a|>\varepsilon).$$

Таким чином, дістаємо нерівність

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k-a\right|>2\varepsilon\right)\le P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\chi_{|\xi_k|\le n\delta}-a_n\right|>\varepsilon\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}P(|\xi_k|>n\delta)+P(|a_n-a|>\varepsilon). \qquad (16.23)$$

Оскільки $a_n\to a$ при $n\to\infty$, то для довільного $\varepsilon>0$ і досить великих n маємо $|a_n-a|<\varepsilon$, а отже, й $P(|a_n-a|>\varepsilon)=0$ як імовірність неможливої події. Згідно з властивістю щільності розподілу

$$\sum_{k=1}^{n}P(|\xi_k|>n\delta)=\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>n\delta}f(x)\,dx\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\delta}\int_{|x|>n\delta}|x|\,f(x)\,dx\le$$

$$\leq \frac{n}{n\delta} \int_{|x| > n\delta} |x| f(x) dx = \frac{1}{\delta} \int_{|x| \geq n\delta} |x| f(x) dx \to 0$$

при $n \to \infty$ для будь-якого $\delta > 0$ (оскільки $b = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$). Нарешті, користуючися нерівністю Чебишова (друга форма) й незалежністю випадкових величин $\xi_k \chi_{|\xi_k| \leq n\delta}$, $k = 1; 2; ...; n$, при довільному $n > 1$ дістанемо

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \chi_{|\xi_k| \leq n\delta} - a_n\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \chi_{|\xi_k| \leq n\delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} D\xi_k \chi_{|\xi_k| \leq n\delta} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{n^2} n\delta b \cdot n = \frac{\delta b}{\varepsilon^2}$$

для довільних $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ (скористалися тим, що $a_n = M\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \chi_{|\xi_k| \leq n\delta}\right)$ і нерівністю $D\xi_k \chi_{|\xi_k| \leq n\delta} \leq n\delta b$, яку було встановлено раніше). Отже, якщо в нерівності (16.23) спочатку спрямувати $n \to \infty$, а потім $\delta \to 0$ і врахувати невід'ємність лівої частини, то дістанемо збіжність

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - a\right| > \varepsilon\right) = 0$$

для довільного $\varepsilon > 0$, а це означає завершення доведення теореми.

16.14 ПОНЯТТЯ ПРО ЦЕНТРАЛЬНУ ГРАНИЧНУ ТЕОРЕМУ

Розглянемо схему Бернуллі. Нехай μ_n — число появ подій A в n незалежних випробуваннях стохастичного експерименту й $0 < p < 1$ — імовірність появи події A в кожному випробуванні. Згідно з теоремою Бернуллі відносна частота μ_n/n наближається до p зі збільшенням n. Якщо розглянути поведінку похибки наближення (флуктуації відносної частоти μ_n/n в околі p), тобто поведінку різниці $\mu_n/n - p$, то виявляється, що величина $\sqrt{n/pq}\,((\mu_n/n) - p)$, де $q = 1 - p$, при $n \to \infty$ поводить себе однаково для будь-якої схеми Бернуллі (не залежить від p) і має нормальний закон розподілу. Справді, згідно з інтегральною теоремою Муавра—Лапласа при $n \to \infty$

$$P\left(\sqrt{n/pq}\,(\mu_n/n - p) < x\right) = P\left(\frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) \to$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du,$$

тобто розподіл випадкової величини $\sqrt{n/pq}\,((\mu_n/n) - p)$ прямує до нормального розподілу $N(0;\ 1)$. Це є проявом найважливішого другого (після закону великих чисел) закону теорії імовірностей, який називають *законом про нормальність флуктуації* (точніше це виражається словами: «флуктуації мають нормальний розподіл»). Для того, щоб мати більше уявлення про загальний характер цього закону, скористаємося зображенням величини μ_n через суму незалежних випадкових (це ми вже робили неодноразово) величин $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, де

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо в } k\text{-му випробуванні з'явилася подія } A, \\ 0, & \text{якщо в } k\text{-му випробуванні з'явилася подія } \overline{A}; \end{cases}$$

при цьому

$$M\mu_n = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n = np;$$

$$D\mu_n = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n = npq.$$

Тоді інтегральну теорему Муавра—Лапласа можемо подати в такій формі: при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} D\xi_k}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du$$

і сформулювати таким чином: *розподіл суми відхилень незалежних випадкових величин, які набувають значень* 0 *і* 1 *з імовірностями* q *і* $p = 1 - q$ $(0 < p < 1)$ *відповідно, від своїх математичних сподівань, поділеної на квадратний корінь із суми дисперсій доданків, прямує при збільшенні кількості доданків до нормального розподілу* $N(0;\ 1)$.

Сформульоване твердження має загальний характер, тобто не обов'язково вимагати, щоб випадкові величини ξ_k набували значень 0 і 1. Так, за відносно широких умов, накладених на послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, яка задовольняє закон великих чисел, розподіл величини

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right)\frac{n}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}D\xi_k}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}D\xi_k}}$$

при $n \to \infty$ прямує до нормального розподілу $N(0;\ 1)$.

Теореми, що стверджують нормальність граничного розподілу сум незалежних випадкових величин, називають ***центральними граничними теоремами.***

Отже, інтегральна теорема Муавра—Лапласа є найпростішою центральною граничною теоремою. Наведемо без доведення (бо вони складні) ще дві центральні граничні теореми, які найчастіше використовуються в застосуваннях.

Теорема 16.19 (Леві—Ліндеберга). Якщо для послідовності ξ_n, $n \ge 1$ незалежних, однаково розподілених випадкових величин існує $M\xi_n = a$ і $D\xi_n = \sigma^2$, то рівномірно по $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a) < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

Теорема 16.20 (Ляпунова). Якщо для послідовності ξ_n, $n \ge 1$ незалежних випадкових величин існує деяке $\delta > 0$, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}M\,|\xi_k - M\xi_k|^{2+\delta} = 0,$$

де $B_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n}D\xi_k\right)^{1/2}$, то рівномірно по $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - M\xi_k) < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

Легко переконатися, що теорема Леві—Ліндеберга за додаткової умови, що існує $M|\xi_k|^{2+\delta}$ при деякому $\delta > 0$, є наслідком теореми Ляпунова.

Центральні граничні теореми показують, що умови, які потрібно накласти на окремі доданки, полягають у незалежності доданків і незначному впливі окремого доданка на всю суму (наприклад, у теоремі Леві—Ліндеберга розглядається сума незалежних випадкових величин $\frac{\xi_k - a}{\sigma\sqrt{n}}$, і зрозуміло, що це нескінченно малі величини); крім того, граничний розподіл сум не залежить від розподілу окремих доданків.

Такі результати є теоретичною основою застосування нормального закону при розв'язанні багатьох практичних задач. Загальна схема застосувань полягає в тому, що розглядуване явище відбувається під впливом великої кількості незалежних випадкових факторів, дія кожного з яких мало впливає на перебіг явища, і спостерігається лише сумарна дія цих факторів.

Типовим є приклад 16.29. Справді, на похибку вимірювання ξ_n неминуче впливає багато факторів, які її породжують. Серед них похибки, які пов'язані зі станом вимірювального приладу (може неістотно змінюватися внаслідок різних атмосферних чи механічних причин), психічним та фізичним станом спостерігача та ін. Кожний із цих факторів спричиняє незначну похибку. Але на результаті вимірювання відбиваються відразу всі ці похибки, тобто спостерігається сумарна похибка. Згідно з центральною граничною теоремою природно припустити, що сумарна похибка вимірювання ξ_n має нормальний закон розподілу.

Іншим типовим прикладом є броунівський рух. Мікроскопічна частинка, яка бере участь у броунівському русі, рухається внаслідок поштовхів молекул рідини, самі ж молекули перебувають у хаотичному тепловому русі. Природно враховувати, що швидкості молекул, з якими відбуваються зіткнення частинки, випадкові й незалежні між собою. Зрозуміло, що дія кожної окремої молекули при зіткненні з частинкою дуже незначна, але завдяки сумарній дії великої кількості молекул частинка перебуває в русі. Зміщення частинки за певний проміжок часу є випадковою величиною. Згідно з центральною граничною теоремою природно припустити нормальність розподілу зміщення частинки.

Подібних прикладів можна навести багато.

Глава 17 ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

17.1 ТИПОВІ ЗАДАЧІ

Теорія ймовірностей вивчає ймовірнісні характеристики випадкових явищ. До таких характеристик належать імовірності випадкових подій, функції розподілу випадкових величин та їх числові характеристики — математичне сподівання, дисперсія тощо. Зазвичай значення імовірнісних характеристик нам невідомі і їх потрібно визначити згідно з результатами спостережень випадкових явищ. Математична статистика вивчає методи відбору та аналізу результатів спостережень випадкових явищ (як правило, це результати спостереження випадкових величин) для виявлення їх закономірностей і обчислення наближених значень їх імовірнісних характеристик.

Наведемо приклади деяких стандартних статистичних задач.

■ **Приклад 17.1**. Для багатьох виробів одним з основних параметрів, яким характеризується якість, є термін роботи виробу. Проте термін роботи виробу (наприклад, електролампи), як правило, випадковий, і заздалегідь визначити його неможливо. Якщо процес виробництва в певному розумінні однорідний, то терміни роботи $\xi_1, \xi_2, \ldots$ відповідно першого, другого й т. д. виробів можна розглядати як незалежні однаково розподілені випадкові величини. За параметр, що визначає термін роботи, природно взяти $\theta = M\xi_i$ (середнє значення). Одна зі стандартних задач полягає в знаходженні значення θ. Для визначення θ навмання вибирають n виробів і перевіряють їх. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — терміни роботи цих виробів [$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — конкретні результати перевірки, тобто одна реалізація випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$]. Із теореми Хінчина (закон великих чисел) випливає, що $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \to \theta$ при $n \to \infty$. Тому природно очікувати, що $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ при достатньо великому n буде близьким до θ. При цьому, очевидно, ми зацікавлені в тому, щоб число спостережень n було по можливості найменшим, а наша оцінка числа θ — якомога точнішою.

■ **Приклад 17.2.** Радіолокаційний пристрій у моменти часу t_1, t_2, ..., t_n зондує дану частину повітряного простору для виявлення там деякого об'єкта. Позначимо x_1, x_2, ..., x_n значення сигналів, що прийняв пристрій. Якщо в даній частині простору об'єкта, що нас цікавить, немає, то значення x_i можна розглядати як значення незалежних випадкових величин ξ_i, що розподілені так, як і випадкова величина ξ, природа якої зумовлена характером різних перешкод. Якщо протягом усього періоду об'єкт перебував у полі зору, то x_i разом із перешкодами містять «корисний» сигнал a, і величини ξ_i будуть розподілені, як $\xi + a$. Таким чином, якщо в першому випадку спостереження ξ_i мали функцію розподілу $F(x)$, то в другому — їх функція розподілу матиме вигляд $F(x-a)$. За вибіркою x_1, x_2, ..., x_n потрібно з'ясувати, який із цих двох випадків має місце, тобто є в даному місці об'єкт, що нас цікавить, чи ні.

■ **Приклад 17.3.** Деякий експеримент проводиться спочатку n_1 разів в умовах A, а потім n_2 разів в умовах B. Позначимо $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ і $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ результати цих експериментів в умовах A і B відповідно. Треба визначити, чи впливає зміна умов експерименту на його результати. Наприклад, якщо треба встановити, чи впливає деякий препарат на розвиток рослин або тварин, то паралельно проводять дві серії експериментів (із препаратом і без нього), результати яких необхідно вміти порівнювати.

Тут обмежимося розглядом лише найтиповіших задач математичної статистики.

Оцінка невідомої функції розподілу. Нехай ξ — випадкова величина, яка описує певну ознаку випадкового явища, а x_1, x_2, ..., x_n — результати незалежних спостережень випадкової величини ξ. Потрібно за результатами спостережень наближено оцінити невідому функцію розподілу $F(x)$ величини ξ.

Оцінка невідомих параметрів розподілу. Нехай випадкова величина ξ має функцію розподілу певного типу, що залежить від параметрів, значення яких невідомі. На основі незалежних спостережень x_1, x_2, ..., x_n випадкової величини ξ потрібно оцінити значення цих параметрів.

Перевірка статистичних гіпотез. Потрібно перевірити узгодженість незалежних спостережень x_1, x_2, ..., x_n випадкової величини ξ із гіпотезою про те, що ξ має вибраний закон розподілу.

17.2 ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

17.2.1. Варіаційні ряди

Вихідним пунктом статистичного дослідження будь-якої випадкової величини ξ із функцією розподілу $F(x)$ є сукупність із n незалежних спостережень, у результаті яких випадкова величина ξ набуває значень $x_1, x_2, ..., x_n$ у порядку одержання. Цей набір значень $x_1, x_2, ..., x_n$ називають ***вибіркою об'ємом n із генеральної сукупності випадкової величини*** ξ ***із функцією розподілу*** $F(x)$.

Оскільки значення $x_1, x_2, ..., x_n$ — результати незалежних спостережень випадкової величини ξ, то цю вибірку можна вважати конкретною реалізацією сукупності однаково розподілених незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (незалежних спостережень однієї випадкової величини ξ) із функцією розподілу $F(x)$. Цю сукупність $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ випадкових величин називають ***вибіркою об'ємом n із генеральної сукупності*** ξ ***із функцією розподілу*** $F(x)$.

- *Зауваження.* Це подвійне тлумачення вибірки — як сукупності реальних числових даних $x_1, x_2, ..., x_n$ і як сукупності незалежних, однаково розподілених величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ [тобто вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$ можна розглядати як одну реалізацію випадкового вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$] — пов'язане в математичній статистиці з історичною традицією. Надалі ці вибірки розрізнятимемо за їх позначеннями.

Нехай у даній вибірці є k різних значень x_i; значення x_1 спостерігається n_1 разів, значення x_2 — n_2 разів і т. д., значення x_k спостерігається n_k разів.

➡ **Означення 17.1.** *Впорядковану за величиною послідовність вибіркових значень* $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$ *називають* ***варіаційним рядом.*** *Різні значення* x_i *у вибірці називають* ***варіантами,*** *числа появ варіант* n_i — ***частотами,*** *відношення частот* n_i *до об'єму вибірки* n: $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1; 2; ...; k$ — ***відносними частотами.***

Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i = n, \ \sum\limits_{i=1}^{k} \omega_i = 1.$

Дію впорядкування за величиною членів вибірки називають ***ранжуванням статистичних даних.***

Варіаційний ряд — початкова форма дослідження статистичних даних.

➡ **Означення 17.2.** *Варіаційний ряд називають* ***дискретним****, якщо довільні його варіанти відрізняються на сталу величину, і* ***неперервним (інтервальним)****, якщо варіанти можуть відрізнятись один від одного на як завгодно малу величину.*

➡ **Означення 17.3.** ***Статистичним розподілом вибірки*** *називають перелік варіант і відповідних їм відносних частот.*

Статистичний розподіл вибірки у випадку дискретного варіаційного ряду зручно подавати у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	...	ω_k

У першому рядку таблиці розміщуються всі варіанти вибірки, а в другому — відносні частоти відповідних варіант.

Зрозуміло, що статистичний розподіл вибірки (x_1, x_2, ..., x_k) є законом розподілу певної дискретної випадкової величини, яку позначимо ξ^*, де $\omega_i = P(\xi^* = x_i)$, $i = 1; 2; ...; k$ (див. гл. 16). Більше того, означення статистичного розподілу вибірки рівносильне тому, що кожному членові x_i вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$ ставиться у відповідність одна й та сама ймовірність (вага), що дорівнює $1/n$.

■ **Приклад 17.4.** *Дослідник, який цікавиться тарифним розрядом працівників механічного цеху, в результаті опитування навмання 10 працівників одержав такі дані: 4; 5; 1; 4; 5; 4; 3; 5; 5; 2; 6. Записати статистичний розподіл вибірки.*

Нехай випадкова величина ξ — тарифний розряд робітника. В результаті опитування одержали вибірку об'ємом $n = 10$ із генеральної сукупності ξ. Розташувавши значення вибірки в порядку зростання, дістанемо варіаційний ряд: 1; 2; 3; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 6.

Виділимо варіанти ряду: 1; 2; 3; 4; 5; 6 із частотами $n_1 = n_2 = n_3 = n_6 = 1$, $n_4 = 2$, $n_5 = 4$. Знайдемо відносні частоти $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_6 = 0{,}1$, $\omega_4 = 0{,}2$, $\omega_5 = 0{,}4$. Отже, статистичний розподіл вибірки має вигляд

x_i	1	2	3	4	5	6
ω_i	0,1	0,1	0,1	0,2	0,4	0,1

Якщо варіанти вибірки можуть відрізнятись одна від одної на як завгодно малу величину, тобто випадкова величина набуває довільних значень у деякому інтервалі (генеральна сукупність неперервна), або коли вибірка містить досить багато варіантів, то на практиці часто в таких випадках вибірки групують. Для цього всю ширину вибірки розбивають на інтервали завдовжки h і дані спостережень подають у вигляді т а б л и ц і ч а с т о т, де вказують часткові інтервали (a_i, a_{i-1}) і n_i — число тих вибіркових значень, які потрапили в i-інтервал розбиття (індивідуальні вибіркові значення не наводяться):

I (інтервали розбиття)	(a_0, a_1)	(a_1, a_2)	...	(a_{k-1}, a_k)
n_i (частоти)	n_1	n_2	...	n_k

Для визначення оптимального інтервалу розбиття користуються формулою $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \ln n}$, де $x_{\max}$, $x_{\min}$ — відповідно максимальна й мінімальна варіанти. Якщо h — дробове число, то за h беруть найближче ціле число або найближчий простий дріб. За початок першого інтервалу беруть величину $a_1 = x_{\min} - \dfrac{h}{2}$, тоді початок другого збігається з кінцем першого й становить $a_2 = a_1 + h$ і т. д. Процес продовжується доти, доки початок наступного інтервалу не буде більший, ніж $x_{\max}$. Число h називають ***кроком вибірки***, а різницю $x_{\max} - x_{\min}$ — ***шириною вибірки.***

Статистичний розподіл у випадку інтервального варіаційного ряду частот задають таблицею, де вказують середини x_i інтервалів розбиття (a_{i-1}, a_i), $\left(x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2}\right)$ і відносні частоти $\omega_i = \dfrac{n_i}{n}$ вибіркових значень, які потрапили в i-й інтервал розбиття $\left(\sum_i \omega_i = 1\right)$:

x_i (середини інтервалів розбиття)	x_1	x_2	...	x_k
ω_i (відносні частоти)	ω_1	ω_2	...	ω_k

■ **Приклад 17.5.** *Дослідник, котрий визначає інтенсивність праці робітників механічного цеху у звітному році в процентах до минулого року, одержав таблицю частот:*

Вироби I, %	80–90	90–100	100–110	110–120
Кількість робітників n_i	1	2	5	2

Записати статистичний розподіл.

Нехай випадкова величина ξ — інтенсивність праці одного робітника. Крок таблиці частот $h = 10$, а ширина вибірки — 40. Визначимо середини інтервалів: $x_1 = 85$; $x_2 = 95$; $x_3 = 105$; $x_4 = 115$. Обчислимо відносні частоти: $\omega_1 = 0,1; \omega_2 = 0,2; \omega_3 = 0,5; \omega_4 = 0,2.$ Отже, статистичний розподіл має вигляд

x_i	85	95	105	115
ω_i	0,1	0,2	0,5	0,2

17.2.2. Графічне зображення варіаційних рядів

Для графічного зображення варіаційних рядів використовують полігон та гістограму. Дискретний варіаційний ряд вибірки ілюструють *полігоном частот*. Для його побудови в прямокутній системі координат xOy наносять точки з координатами (x_i, n_i), де x_i — варіанта, а n_i — її частота, і сполучають їх послідовно відрізками прямих. Утворену ламану лінію називають ***полігоном частот вибірки*** (рис. 17.1). Якщо побудувати точки (x_i, ω_i), де ω_i — відносна частота варіанти x_i, і сполучити їх аналогічним чином, то утворена ламана лінія називатиметься ***полігоном відносних частот***.

Для ілюстрації інтервальних варіаційних рядів будують діаграми, які називають ***гістограмами***.

Нехай результати спостережень подано у вигляді таблиці частот:

I (інтервали розбиття)	(x_0, x_1)	(x_1, x_2)	...	(x_{k-1}, x_k)
n_i (частоти)	n_1	n_2	...	n_k

Тут $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1; 2; ...; k$.

Для побудови гістограми в прямокутній системі координат на осі Ox нанесемо точки $x_0, x_1, ..., x_k$. Побудуємо прямокутники, основою яких є інтервали (x_{i-1}, x_i), а висоти $y_i = n_i / h$, де n_i — частота i-го інтервалу. Ламану лінію, що обмежує зверху побудовану фігуру, називають ***гістограмою частот*** (рис. 17.2).

Гістограма відносних частот — це ламана лінія, що обмежує зверху фігуру, яка складається з прямокутників, основою яких є ін-

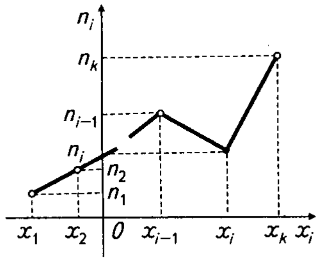

Рис. 17.1

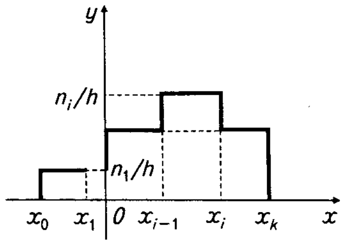

Рис. 17.2

тервали (x_{i-1}, x_i), а висоти $y_i = \omega_i / h$ є геометричним аналогом щільності розподілу.

17.2.3. Емпірична функція розподілу вибірки

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ — вибірка з генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$. Визначимо для кожного x величину $\mu_n(x)$, що дорівнює числу елементів вибірки, значення якої не перевищує x, тобто $\mu_n(x)$ — число тих x_k, для яких виконується нерівність $x_k < x$.

➡ **Означення 17.4**. ***Емпіричною функцією розподілу вибірки*** *$x_1, x_2, ..., x_n$ називають функцію $F_n(x) = \mu_n(x)/n$.*

На відміну від емпіричної функції розподілу вибірки, функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають ***теоретичною функцією розподілу.***

Якщо вибірка з генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$ має лише k ранжованих варіант $x_1 < x_2 < ... < x_k$, то, зрозуміло, що

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le x_1, \\ \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n} & \text{при } x_i < x \le x_{i+1},\ i = 1; \ldots; k-1, \\ 1, & \text{при } x > x_k \end{cases}$$

і справджуються такі властивості:

1. *значення* $F_n(x)$ *належить відрізку* $[0;\ 1]$;
2. $F_n(x)$ — *неспадна функція, зростає в точках* x_i, $i = 1;\ 2;\ ...;\ k$ *стрибками* n_i/n;
3. $F_n(x)$ — *невід'ємна, стала на кожному з проміжків* $(-\infty,\ x_1]$, ..., $(x_{i-1},\ x_i]$, $i = 2;\ 3;\ ...;\ k$, $(x_k,\ +\infty)$, *неперервна зліва.*

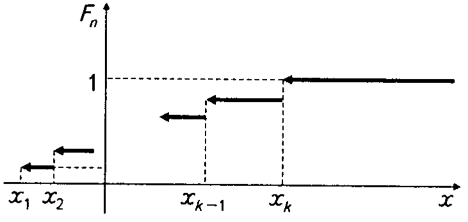

Рис. 17.3

Графік емпіричної функції розподілу $y = F_n(x)$ зображено на рис. 17.3.

Емпірична функція розподілу відіграє фундаментальну роль у математичній статистиці. Найважливіша її властивість полягає в тому, що при збільшенні числа випробувань над випадковою величиною ξ відбувається зближення цієї функції з теоретичною.

➡ **Означення 17.5.** ***Емпіричною функцією розподілу вибірки*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ***із генеральної сукупності*** ξ ***із функцією розподілу*** $F(x)$ *називають функцію* $F_n(x) = \dfrac{\mu_n(x)}{n}$, *де* $\mu_n(x) = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n$; ν_i — *незалежні в сукупності випадкові величини і*:

$$\nu_i = \begin{cases} 1, & \textit{якщо відбулася подія } (\xi_i < x), \\ 0, & \textit{якщо відбулася подія } (\xi_i \geq x). \end{cases}$$

• *Зауваження.* Зрозуміло, що при кожному фіксованому $x \in (-\infty, +\infty)$ емпірична функція розподілу вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є випадковою величиною і при конкретній реалізації $x_1, x_2, ..., x_n$ вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вона збігається з емпіричною функцією розподілу вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$ генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$. Крім того, емпірична функція розподілу вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є певною функцією $h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ від випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тобто $F_n(x) = h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Теорема 17.1. Нехай $F_n(x)$ — емпірична функція розподілу вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$. Тоді для довільного $x \in (-\infty, +\infty)$ і довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

Доведення

Оскільки згідно з означенням емпіричної функції вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \nu_i,$$

де випадкові величини ν_i незалежні, однаково розподілені з математичним сподіванням $M\nu_i = 1 \cdot P\{\xi_i < x\} + 0 \cdot P\{\xi_i \geq x\} = F(x)$, $i = 1; 2; \ldots; n$, то за законом великих чисел (теорема Хінчина) для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\nu_i - M\nu_i\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Тому з очевидної рівності

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\nu_i - M\nu_i\right| > \varepsilon\right\} = P\{|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon\}$$

випливає доведення теореми.

Більш сильні твердження дають наступні теореми.

Теорема 17.2 (Гливенко). В умовах теореми 17.1 при $n \to \infty$

$$P\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| \to 0\} = 1.$$

Теорема 17.3 (Колмогорова). Якщо $F_n(x)$ — емпірична функція розподілу вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$, де $F(x)$ — неперервна, то при будь-якому фіксованому $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| \leq t\} = K(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-2j^2t^2}.$$

Теорема Колмогорова дає змогу вказати межі, в які із заданою ймовірністю потрапляє теоретична функція розподілу, якщо вона невідома.

Нехай задано $\gamma \in (0; 1)$; число t_γ визначається з рівняння $K(t_\gamma) = \gamma$. Тоді за теоремою Колмогорова

$$P(\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| \leq t_\gamma) \to K(t_\gamma) = \gamma$$

при $n \to \infty$.

Таким чином, при великих n з імовірністю, близькою до γ, значення функції $F(x)$ для всіх x задовольняють нерівність

$$F_n(x) - \frac{t_\gamma}{\sqrt{n}} \le F(x) \le F_n(x) + \frac{t_\gamma}{\sqrt{n}}.$$

17.2.4. Числові характеристики вибірки

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вибірка об'ємом n із генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$.

Означення 17.6. ***Вибірковим моментом*** *k-го порядку вибірки x_1, $x_2, \ldots, x_n$ називають величину* $a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$.

*При $k = 1$ величину a_1 називають **вибірковим середнім*** і позначають символом $\bar{x}$, тобто $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Означення 17.7. ***Вибірковим центральним моментом*** *k-го порядку називають величину*

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k.$$

*При $k = 2$ величину m_2 називають **вибірковою дисперсією*** й позначають символом S^2:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

*Величину $S = \sqrt{S^2}$ називають **середньоквадратичним відхиленням вибірки.***

Якщо за вибіркою побудувати її статистичний розподіл, то $\bar{x} = \sum_{i=1}^{l} x_i \omega_i$, $S^2 = \sum_{i=1}^{l}(x_i - \bar{x})^2 \omega_i = \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \omega_i - (\bar{x})^2$, де $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — усі можливі варіанти вибірки, а ω_i — їх відносні частоти, тобто $\bar{x} = M\xi^*$, $S^2 = D\xi^*$, де ξ^* — дискретна випадкова величина, закон розподілу якої збігається зі статистичним розподілом вибірки (див. гл. 16).

Якщо вибірку подано у вигляді таблиці частот неперервної генеральної сукупності, то

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} x_i n_i, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} (x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} (x_i)^2 = (\bar{x})^2,$$

де x_i — середина i-го інтервалу; n_i — число вибіркових значень, що потрапили в i-й інтервал; l — число інтервалів; $n = \sum_{i=1}^{l} n_i$.

- *Зауваження.* Очевидно, що вибіркові моменти a_k, m_k є певними функціями $h_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ від n змінних.

У загальному випадку функції $h_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ від вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$ у математичній статистиці називають ***вибірковими характеристиками вибірки.***

Отже, вибіркові моменти a_k, m_k є найпростішими вибірковими характеристиками вибірки.

17.3 СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

17.3.1. Постановка задачі оцінювання параметрів розподілів

У багатьох задачах вид (форма) теоретичного розподілу генеральної сукупності може вважатися відомим. Так (спираючися на дослідний матеріал), вважають, що розподіл точок влучення (в артилерійських розрахунках) на площині підлягає двовимірному нормальному законові. В деяких фізичних і біологічних схемах теоретичним законом розподілу є показниковий розподіл або розподіл Пуассона.

Цілком природно постає задача оцінювання параметрів, якими визначається розподіл. Наприклад, якщо відомо, що генеральна сукупність має нормальний розподіл, то треба оцінити (наближено знайти) математичне сподівання a та дисперсію σ^2, оскільки ці два параметри повністю визначають нормальний розподіл; якщо є підстави вважати, що генеральна сукупність має розподіл Пуассона, то необхідно оцінити параметр λ, яким визначається цей розподіл. Інакше кажучи, задача визначення закону розподілу випадкової величини (або величин) зводиться до знаходження невідомих значень параметрів.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка об'ємом n із генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x, \theta)$, функціональна форма якої відома, але залежить від невідомого параметра θ. Задача знаходження параметра θ полягає в побудові наближених формул

$$\theta \approx h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

де $h_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функція від n змінних.

➡ **Означення 17.8.** ***Оцінкою (точковою оцінкою) параметра*** θ *називають довільну функцію* $\theta^* = h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *від вибірки* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, *а функцію* $h_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *називають* ***статистикою.***

Зрозуміло, що можна розглядати різні оцінки одного й того самого параметра. Тому серед них шукають ті оцінки, які мають інтуїтивно бажані властивості: незміщеність, ефективність, спроможність.

➡ **Означення 17.9.** *Оцінку* θ^* *називають* ***незміщеною оцінкою невідомого параметра*** θ, *якщо* $M\theta^* = \theta$. *У противному разі оцінку* θ^* *називають* ***зміщеною.***

Проте було б помилково вважати, що незміщена оцінка завжди дає добре наближення оцінюваного параметра. Справді, можливі значення θ^* можуть бути сильно розсіяні навколо свого середнього значення, тобто дисперсія $D(\theta^*)$ може бути великою. Можна пропонувати багато оцінок θ^* для оцінювання параметра θ, таких, що $M\theta^* = \theta$. Кількісну міру похибки при заміні θ на θ^* (міру розсіяння θ^* відносно θ) описує величина $M|\theta^* - \theta|^2$. Цю величину називають ***середнім квадратом похибки***, або ***середньоквадратичною похибкою оцінки*** θ^*. Із сукупності незміщених оцінок параметра θ природно вибрати такі, які мають мінімально можливу міру розсіяння (дисперсію).

➡ **Означення 17.10.** *Незміщену оцінку* $\hat{\theta}$ *називають* ***ефективною,*** *якщо вона має найменшу можливу дисперсію серед усіх інших незміщених оцінок параметра* θ, *тобто* $D\hat{\theta} = \inf\limits_{\theta^*:\, M\theta^* = \theta} D\theta^*$.

Отже, ефективна оцінка — це оцінка з найменшим середнім квадратичним відхиленням.

➡ **Означення 17.11.** *Оцінку* θ^* *називають* ***спроможною,*** *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$ *буде* $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\theta^* - \theta| > \varepsilon\} = 0$.

Отже, «точність» оцінки збільшується зі збільшенням об'єму вибірки.

Зауважимо, що при обчисленні оцінки θ^* параметра θ за результатами конкретної вибірки x_1, x_2, ..., x_n замість випадкових величин

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ підставляють їх конкретні значення: $\xi_1 = x_1$, $\xi_2 = x_2$, ..., $\xi_n = x_n$ і дістають число $h_n(x_1, x_2, ..., x_n)$, яке й беруть замість справжнього значення параметра θ.

Виявляється, що вибіркове середнє й вибіркова дисперсія вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$, для яких існують математичне сподівання $M\xi_i = a$ і дисперсія $D\xi_i = \sigma^2$, є спроможними оцінками відповідно a і σ^2, при цьому вибіркове середнє — незміщена оцінка, а вибіркова дисперсія — зміщена. Справді, мають місце наступні теореми.

Теорема 17.4. Вибіркове середнє $\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x)$ є незміщеною й спроможною оцінкою математичного сподівання $a = M\xi_i$.

Доведення

1. Оскільки випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ однаково розподілені й $M\xi_i = a$, то

$$M\overline{\xi} = \frac{1}{n} M \sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{n} na = a.$$

Отже, вибіркове середнє $\overline{\xi}$ є незміщеною оцінкою.

2. За законом великих чисел (теорема Хінчина) $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - a\right| > \varepsilon\right) \to 0$ при $n \to \infty$ для довільного $\varepsilon > 0$ (див. гл. 16).

Тому оцінка $\overline{\xi}$ є спроможною.

Теорема 17.5. Вибіркова дисперсія $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2$ є зміщеною й спроможною оцінкою дисперсії $D\xi = \sigma^2$. Величина $S_1^2 = \frac{n}{n-1}S^2$ буде незміщеною й спроможною оцінкою σ^2.

Доведення

Введемо випадкові величини $\eta_i = \xi_i - a$. Тоді

$$\overline{\eta} = \overline{\xi} - a, \quad M\eta_i = 0, \quad D\eta_i = M\eta_i^2 = \sigma^2,$$

$$MS^2 = \frac{1}{n} M \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2 = \frac{1}{n} M \sum_{i=1}^{n}(\eta_i - \overline{\eta})^2 =$$

$$= \frac{1}{n} M \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - \frac{2}{n} M \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right) \overline{\eta} + M \overline{\eta}^2 = \frac{1}{n} n\sigma^2 - 2M\overline{\eta}^2 + M\overline{\eta}^2 =$$

$$= \sigma^2 - M\overline{\eta}^2 = \sigma^2 - M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \eta_i \right)^2 = \sigma^2 - \frac{1}{n^2}\left[M\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 - M\sum_{i \neq j}^{n} \eta_i \eta_j \right] =$$

$$= \sigma^2 - \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2(n-1)}{n}.$$

Отже, оцінка S^2 дисперсії σ^2 є зміщеною.

Оскільки $MS_1^2 = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2$, то оцінка S_1^2 є незміщеною.

Спроможність оцінок S^2 і S_1^2 випливає із закону великих чисел.

17.3.2. Метод моментів

Метод моментів — це загальний метод побудови оцінок параметрів, запропонований К. Пірсоном.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x, \theta)$, де $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ — невідомий параметр. Треба побудувати оцінки невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$.

Нехай у випадкової величини ξ існують s моментів $\alpha_k = M\xi^k$, $k = 1; 2; \ldots; s$. Вони також будуть функціями від невідомих параметрів: $\alpha_k = \alpha_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$. Розглянемо вибіркові моменти α_k вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$: $\alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^k$. Метод моментів полягає в тому, що певну кількість вибіркових моментів a_k прирівнюють до відповідних моментів $\alpha_k(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, $k = 1; 2; \ldots; s$ із розподілу $F(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$.

При цьому, розглядаючи кількість моментів, що дорівнює кількості невідомих параметрів, які треба оцінити, дістанемо систему рівнянь для визначення невідомих параметрів:

$$\alpha_i(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = a_i, \quad i = 1; 2; \ldots; s.$$

Розв'язок $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_s^*$ цієї системи визначає відповідні оцінки невідомих параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, знайдені за методом моментів.

Слід зауважити, що деякі з теоретичних моментів можуть не залежати від невідомих параметрів. У такому випадку до виписаних рівнянь додають наступні, щоб при цьому кількість рівнянь дорівнювала кількості невідомих параметрів.

■ **Приклад 17.6.** *Знайти оцінки для параметрів a і σ^2 функції розподілу нормального закону $N(a, \sigma^2)$:*

$$N_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

за методом моментів.

Дістанемо

$$\alpha_1(a, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = a;$$

$$\alpha_2(a, \sigma^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = a^2 + \sigma^2.$$

Перший і другий вибіркові моменти: $a_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$; $a_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Прирівняємо моменти $\alpha_1(a, (\sigma^2))$ та $\alpha_2(a, (\sigma^2))$ до відповідних вибіркових моментів; дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1(a, (\sigma^2)) = a_1, \\ \alpha_2(a, (\sigma^2)) = a_2. \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи рівнянь і будуть оцінками параметрів a і σ^2, одержаними за методом моментів. Для a: $a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$; для σ^2:

$$(\sigma^2)^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

17.3.3. Метод максимальної правдоподібності

Метод максимальної правдоподібності, запропонований Р. Фішером, є загальним важливим методом одержання точкових оцінок, як у теоретичному плані, так і в застосуваннях.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x, \theta)$, що залежить від невідомого параметра θ.

Функцією максимальної правдоподібності вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ називають функцію $L(\theta)$ параметра θ, яка визначається рівністю

$$L(\theta) = p(\xi_1, \theta)\, p(\xi_2, \theta) \ldots p(\xi_n, \theta),$$

коли випадкові величини ξ_i дискретні, де

$$p(x_i, \theta) = P(\xi_i = x_i), \quad L(\theta) = f(\xi_1, \theta)\, f(\xi_2, \theta) \ldots f(\xi_n, \theta),$$

коли випадкові величини ξ_i неперервні зі щільністю розподілу $f(x, \theta)$.

Оцінкою максимальної правдоподібності параметра θ називають те значення параметра θ, при якому функція правдоподібності досягає найбільшого значення за даних $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, тобто є розв'язком рівняння $L(\theta^*) = \max L(\theta)$.

Оскільки $L(\theta)$ і $\ln L(\theta)$ досягають найбільшого значення в одних і тих самих точках, то часто зручніше знаходити точку θ^*, в якій досягає найбільшого значення так звана ***логарифмічна функція правдоподібності*** $\ln L(\theta)$.

Якщо функція $L(\theta)$ неперервно диференційовна, то для знаходження оцінок максимальної правдоподібності необхідно визначити стаціонарні точки функції $\ln L(\theta)$. Рівняння

$$\boxed{\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0}$$

називають ***рівнянням правдоподібності***. При невідомому параметрі $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ розв'язують систему рівнянь максимальної правдоподібності: $\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = 0$, $i = 1; 2; \ldots; s$. Потім знаходять другу похідну $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2}$. Якщо $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial \theta^2} < 0$ при $\theta = \theta^*$, то θ^* — точка максимуму. Оцінку θ^* називають *оцінкою максимальної правдоподібності.*

■ **Приклад 17.7.** *За вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із показникового розподілу зі щільністю*

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0 \quad (\theta > 0) \end{cases}$$

знайти оцінку максимальної правдоподібності для параметра θ.

Оскільки випадкові величини ξ_i, $i = 1; 2; \ldots; n$, неперервні, то функція правдоподібності вибірки має вигляд

$$L(\theta) = \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\}, \quad \ln L(\theta) = n \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Запишемо рівняння правдоподібності $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta) = 0$ або $n \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0$.

Єдиним розв'язком θ^* цього рівняння є $\theta^* = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^{-1}$.

Знайдемо другу похідну по θ: $\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0$. На межі області можливих значень для θ маємо $L(\theta) = 0$. У точці θ^* функція максимальної правдоподібності $L(\theta)$ досягає найбільшого значення. Отже, $\theta^* = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{-1} = 1$ є оцінкою максимальної правдоподібності параметра θ.

17.3.4. Інтервальне оцінювання

Вище розглядалися властивості та способи відшукання точкових оцінок для невідомого параметра θ генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(x, \theta)$. Будь-яка точкова оцінка є функцією $\theta^* = \theta^*(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і при кожній реалізації її $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ця функція визначає єдине значення оцінки, яке береться за наближене значення характеристики, що оцінюється. При цьому в кожному конкретному випадку значення оцінки θ^* може відрізнятися від значення параметра. Отже, потрібно знайти можливу похибку, що виникає при використанні оцінки, тобто вказати такий інтервал, в якому із заданою ймовірністю γ знаходиться точне значення невідомого параметра. В цьому разі кажуть про ***інтервальне***, або ***надійне, оцінювання***, а відповідний інтервал називають ***надійним***. Величину γ вибирають заздалегідь.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності ξ із функцією розподілу $F(\xi, \theta)$, θ^* — точкова оцінка параметра θ.

➡ **Означення 17.12.** Нехай для заданого $\gamma \in (0; 1)$ існує таке $\delta > 0$, що

$$P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma \quad (P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma).$$

Тоді *випадковий інтервал* $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ *називають* ***надійним інтервалом***, *число* γ — ***надійністю (або надійним рівнем)***, δ — ***точністю оцінки***, *значення* $\theta^* - \delta, \theta^* + \delta$ — *відповідно* ***нижньою й верхньою надійними межами***.

Таким чином, γ-надійний інтервал — це випадковий інтервал, який залежить від вибірки (але не від θ) і містить (покриває) справжнє значення невідомого параметра θ з імовірністю γ.

Якщо $P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma$, то це практично означає таке. Нехай проводиться багато незалежних один від одного експериментів, у кожному з яких — по n спостережень над випадковою величиною ξ із функцією розподілу $F(x, \theta)$. Оцінюється параметр θ. Якщо результати експерименту описуються вибіркою $x_1, x_2, ..., x_n$, то значення параметра θ лежить в інтервалі $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$. Цей інтервал уже не випадковий, і надійність його γ указує лише на те, що при достатньо великій кількості вибірок із них $\gamma \cdot 100\%$ визначають ті надійні інтервали, які дійсно містять значення θ. Зазвичай використовують значення довірчого рівня γ із невеликого набору заздалегідь вибраних, достатньо близьких до 1 значень, наприклад: $\gamma = 0{,}9$; $0{,}95$; $0{,}99$.

17.3.5. Надійні інтервали для параметрів нормального закону

Оцінки параметрів нормального закону було визначено раніше. Тепер знайдемо для них довірчі інтервали. Розглянемо різні варіанти цієї задачі.

Надійний інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому σ. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка об'ємом n із генеральної сукупності ξ, що має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$, і σ^2 відоме. Треба оцінити невідоме математичне сподівання $a = \theta$. Для інтервальної оцінки параметра θ скористаємося точковою оцінкою $\theta^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Ця оцінка незміщена, спроможна й ефективна. Поставимо задачу знайти довірчі інтервали, що покривають значення параметра θ із надійністю γ. Оскільки лінійні функції від нормально розподілених величин теж мають нормальний розподіл, то оцінка θ^* має нормальний розподіл $N(\theta, \frac{\sigma^2}{n})$ (див. гл. 16).

Вимагатимемо, щоб виконувалося співвідношення

$$P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma,$$

де γ — задана надійність. Тоді

$$P(|\theta^* - \theta| < \delta) = P(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\delta}^{\delta}\exp\left\{-\frac{u^2 n}{2\sigma^2}\right\}du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) =$$

$$= 2\Phi(c_\gamma) = \gamma.$$

Отже, для визначення надійного інтервалу треба розв'язати рівняння $\Phi(c_\gamma)=\gamma/2$. За таблицею значень функції $\Phi(x)$ (дод. 2) знаходимо c_γ. Оскільки $c_\gamma=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$, то $\delta=c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Отже, γ-надійним інтервалом для математичного сподівання є

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i+c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Якщо замість теоретичної вибірки $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ подано конкретну вибірку x_1, x_2, ..., x_n, то γ-надійним інтервалом для математичного сподівання за вибірковим середнім є

$$\left(\bar{x}-c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

тобто з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $\left(\bar{x}-c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x}+c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідомий параметр $\theta=a$; точність оцінки $\delta=c_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

■ **Приклад 17.8.** *Випадкова величина ξ має нормальний розподіл із відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma=2$. Знайти надійний інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання a з вибірковим середнім $\bar{x}$, якщо об'єм вибірки $n=36$ і задана надійність оцінки $\gamma=0{,}95$.*

Оскільки $\gamma=0{,}95$, знайдемо c_γ зі співвідношення $2\Phi(c_\gamma)=\gamma$. Дістанемо $\Phi(c_\gamma)=0{,}475$. За таблицею дод. 2 знаходимо $c_\gamma=1{,}96$.

Визначимо точність оцінки: $\delta=\frac{c_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 2}{\sqrt{36}}\approx 0{,}65$.

Надійний інтервал: $(\bar{x}-0{,}65;\ \bar{x}+0{,}65)$. Якщо, наприклад, $\bar{x}=5{,}4$, то надійний інтервал має такі надійні межі:

$$\bar{x}-0{,}65=5{,}4-0{,}65=4{,}75;$$

$$\bar{x}+0{,}65=5{,}4+0{,}65=6{,}05.$$

Отже, $a\in(4{,}75;\ 6{,}05)$.

Надійний інтервал для оцінки дисперсії σ нормального розподілу при відомому математичному сподіванні a. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності ξ, що має нормальний розподіл $N(a,\sigma^2)$. Знайдемо надійні інтервали, що покривають із надійністю γ невідомий параметр $\theta=\sigma^2$, за умови, що математичне сподівання a відоме.

Для інтервальної оцінки параметра θ скористаємося незміщеною, спроможною й ефективною точковою оцінкою дисперсії:

$$(\theta^*)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a)^2.$$

Вимагатимемо, щоб виконувалась умова

$$P\{|\sigma - \theta^*| < \delta\} = \gamma \Leftrightarrow P\{\theta^* - \delta < \sigma < \theta^* + \delta\} = \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left\{\theta^*\left(1 - \frac{\delta}{\theta^*}\right) < \sigma < \theta^*\left(1 + \frac{\delta}{\theta^*}\right)\right\} = \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\{\theta^*(1-q) < \sigma < \theta^*(1+q)\} = \gamma,$$

де $q = \delta/\theta^*$. Припустимо, що $q < 1$, тоді з імовірністю γ

$$\frac{1}{\theta^*(1+q)} < \frac{1}{\sigma} < \frac{1}{\theta^*(1-q)}.$$

Домноживши всі члени нерівності на $\theta^*\sqrt{n-1}$, дістанемо

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \frac{\theta^*\sqrt{n-1}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Величина $\chi^2 = \frac{(\theta^*)^2(n-1)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\eta_i^2$ [де $\eta_i = \frac{\xi_i - a}{\sigma}$ незалежні й мають нормальний розподіл $N(0;\ 1)$] має χ^2-розподіл із $n - 1$ ступенями вільності (див. гл. 16). Отже, виконується нерівність

$$\frac{\sqrt{n-1}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{n-1}}{1-q}.$$

Імовірність того, що ця нерівність, а отже, й рівносильна їй нерівність $\theta^*(1-q) < \sigma < \theta^*(1+q)$ виконується, дорівнює γ.

При $q < 1$ надійним інтервалом для середньоквадратичного відхилення σ є $(\theta^*(1-q);\ \theta^*(1+q))$; при $q \geq 1$ (враховуючи те, що $\sigma > 0$) надійний інтервал становить $(0;\ \theta^*(1+q))$. Значення q знаходимо за n і γ (дод. 4).

Якщо замість вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ дано її конкретну реалізацію x_1, x_2, ..., x_n і за вибіркою обчислено оцінки $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ та $S_1 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$, і за таблицями (див. дод. 4) знайдено

$q = q(\gamma; n)$, то шуканим надійним інтервалом, що покриває σ із заданою надійністю γ, є інтервал $\sigma \in (S_1(1-q); S_1(1+q))$ при $q < 1$ і $\sigma \in (0; S_1(1+q))$ при $q \geq 1$.

■ **Приклад 17.9.** *Із надійністю 0,95 знайти надійний інтервал для середньоквадратичного відхилення висоти штамповок внутрішніх кілець підшипників за даними проби об'ємом $n = 25$ штук, якщо розподіл штамповок по висоті нормальний. Середнє арифметичне висоти кілець $\overline{x} = 32,2975$ мм, «виправлена» дисперсія $S_1^2 = 2,5282$.*

За даними задачі $n = 25$, $\gamma = 0,95$. За таблицею дод. 4 знаходимо $q = 0,32$ $(q < 1)$. Визначимо надійні межі. Оскільки $S_1 = \sqrt{S_1^2} \approx 1,59$ і $S_1(1-q) \approx 1,59\,(1 - 0,32) = 1,0812$ мм; $S_1(1+q) \approx 1,59(1 + 0,32) = 2,0988$ мм, то $\sigma \in (1,0812;\ 2,0988)$ із надійністю 0,95.

■ **Приклад 17.10.** *Кількісна ознака ξ генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'ємом $n = 10$ визначено «виправлене» середньоквадратичне відхилення $S_1 = 0,46$. Знайти надійний інтервал для середньоквадратичного відхилення γ із надійністю 0,999.*

За даними задачі $\gamma = 0,999$, $n = 10$. За таблицею дод. 4 знаходимо $q = 1,80$ $(q > 1)$. Тому шуканий надійний інтервал (0; 0,46 (1 + 1,80)). Отже, $\sigma \in (0;\ 1,288)$.

Слід зауважити, що в теорії похибок *точність вимірювання* (точність приладу) характеризують середньоквадратичним відхиленням випадкових похибок. Оскільки результати вимірювань взаємно незалежні й мають однакове математичне сподівання (істинне значення величини, що вимірюється) та однакову дисперсію (у випадку рівноточних вимірювань), то теорія надійних інтервалів може бути використана для оцінки вимірювання.

■ **Приклад 17.11.** *За 25 рівноточними вимірюваннями визначено «виправлене» середньоквадратичне відхилення $S_1 = 0,25$. Знайти точність вимірювання з надійністю 0,99.*

Точність вимірювань характеризується середньоквадратичним відхиленням σ випадкових похибок, тому задача зводиться до відшукання надійного інтервалу $\sigma \in (S_1(1-q);\ S_1(1+q))$ із заданою надійністю $\gamma = 0,99$.

За таблицею дод. 4 і заданими $\gamma = 0,99$, $n = 25$ знайдемо $q = 0,49$. Шуканий надійний інтервал:

$$0,25(1 - 0,49) < \sigma < 0,25(1 + 0,49),\quad 0,1275 < \sigma < 0,3725.$$

Отже, $\sigma \in (0,1275;\ 0,3725)$ із надійністю 0,99.

Надійні інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при невідомій дисперсії. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка з генеральної сукупності ξ, що має нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$.

Розглянемо випадок, коли обидва параметри a і σ^2 невідомі. Оцінки цих параметрів знайдено за методом моментів:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2.$$

Для побудови надійних інтервалів скористаємося тим фактом, що статистики $\dfrac{\bar{\xi} - a}{S}$, $\dfrac{S^2}{\sigma^2}$ мають розподіл, що не залежить від параметрів a та σ^2.

Теорема 17.6. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — незалежні випадкові величини, що мають нормальний розподіл $N(0; 1)$. Тоді вибіркове середнє $\bar{\xi}$ і вибіркова дисперсія S^2 незалежні й величина $(n-1)S_1^2$ має χ^2-розподіл із $n-1$ ступенями вільності.

Теорема 17.7. Якщо ξ_k, $k = 1; 2; \ldots; n$ — незалежні випадкові величини, що мають нормальний розподіл $N(a, \sigma^2)$, то величина

$$\tau = \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - a)}{S_1} = \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - a)}{\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \bar{\xi})^2}}$$

має розподіл Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності.

Розподіл Стьюдента визначається параметром n — об'ємом вибірки (або числом ступенів вільності $k = n - 1$) і не залежить від параметрів a і σ^2.

Теореми 17.6, 17.7 дають змогу будувати надійні інтервали для параметрів a і σ^2.

Якщо величина t_γ визначається з вимоги $P\{|\tau| < t_\gamma\} = \gamma$, де τ має розподіл Стьюдента з $n-1$ ступенями вільності, то

$$P\left\{\left|\frac{\sqrt{n}\,(\bar{\xi} - a)}{S_1}\right| < t_\gamma\right\} = \gamma \Leftrightarrow P\left\{\bar{\xi} - t_\gamma\frac{S_1}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + t_\gamma\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right\} = \gamma.$$

Дістанемо надійний інтервал

$$\left(\bar{\xi} - t_\gamma\frac{S_1}{\sqrt{n}};\ \bar{\xi} + t_\gamma\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right),$$

що покриває невідомий параметр a з надійністю γ. Якщо замість теоретичної вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ дано конкретну вибірку $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та обчислено вибіркові характеристики $\bar{x}$ та S_1, і за таблицею дод. 3 за даним n і γ можна знайти $t_\gamma = t(n, \gamma)$, то шуканий надійний інтервал, що покриває a із заданою надійністю γ,

$$\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{S_1}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + t_\gamma \frac{S_1}{\sqrt{n}}\right).$$

■ **Приклад 17.12.** *Кількісна ознака ξ генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'ємом $n = 16$ знайдено вибіркове середнє $\bar{x} = 30{,}8$ та «виправлене» середньоквадратичне відхилення $S_1 = 0{,}6$. Оцінити невідоме математичне сподівання за допомогою надійного інтервалу з надійністю $\gamma = 0{,}95$.*

Знайдемо $t_\gamma = t(\gamma, n)$ за таблицею дод. 3 за даними $\gamma = 0{,}95$, $n = 16$, $t_\gamma = 2{,}13$.

Визначимо надійні межі:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{S_1}{\sqrt{n}} = 30{,}8 - 2{,}13 \frac{0{,}6}{\sqrt{16}} = 30{,}4805;$$

$$\bar{x} + t_\gamma \frac{S_1}{\sqrt{n}} = 30{,}8 + 2{,}13 \frac{0{,}6}{\sqrt{16}} = 31{,}1195.$$

Отже, з надійністю 0,95 невідомий параметр a покривається надійним інтервалом (30,4805; 31,1195).

Побудуємо надійний інтервал для σ^2.

Визначимо h_γ^1 і h_γ^2 з умови $P(\chi^2 < h_\gamma^1) = P(\chi^2 > h_\gamma^2) = \dfrac{1-\gamma}{2}$, де χ^2 має χ^2-розподіл з $n - 1$ ступенями вільності; дістанемо для дисперсії σ^2 надійний інтервал

$$\frac{(n-1)S_1^2}{h_\gamma^{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_1^2}{h_\gamma^{(1)}}.$$

• *Зауваження.* Вказані надійні інтервали побудовано для величин a і σ^2 окремо. Було б помилкою вважати, що пара значень (a, σ^2) лежить у прямокутнику $\bar{\xi} - t_\gamma \dfrac{S_1}{\sqrt{n}} < a < \bar{\xi} + t_\gamma \dfrac{S_1}{\sqrt{n}}$, $\dfrac{(n-1)S_1^2}{h_\gamma^{(2)}} < \sigma^2 < \dfrac{(n-1)S_1^2}{h_\gamma^{(1)}}$ з імовірністю γ, оскільки величини τ та S_1^2 незалежні. Надійну область для пари параметрів (a, σ^2) можна побудувати, наприклад, використовуючи незалежність величин $\bar{\xi}$ та S_1^2. Маємо:

$$P\left(-t < \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi} - a)}{\sigma} < t,\ h_1 < \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} < h_2\right) =$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}\,|\bar{\xi} - a|}{\sigma} < t\right) P\left(h_1 < \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} < h_2\right).$$

Прирівнявши кожен із цих множників у правій частині до величини $\sqrt{\gamma}$ і визначивши відповідні значення t, h_1, h_2, дістанемо в площині (a, θ) γ-надійну область для пари (a, θ), $\theta = \sigma^2$ вигляду

$$-\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\theta} < a - \bar{\xi} < \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\theta};$$

$$\beta_1 < \theta < \beta_2 \quad \left(\beta_1 = \frac{(n-1)S_1^2}{h_2}, \ \beta_2 = \frac{(n-1)S_1^2}{h_1}\right),$$

яка буде областю, обмеженою параболою $\theta = \frac{\sqrt{n}}{t}(a - \bar{\xi})^2$ та двома прямими $\theta = \beta_1$ і $\theta = \beta_2$.

17.4 ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ

17.4.1. Поняття статистичної гіпотези

Розглянемо стохастичний експеримент, що полягає в спостереженні випадкової величини ξ. В результаті дістанемо вибірку $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ об'ємом n. На практиці часто необхідно знати закон розподілу випадкової величини ξ. Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вид $F(x)$, висувають гіпотезу: випадкова величина ξ розподілена за законом $F(x)$. Таким чином, у цій гіпотезі йдеться про вид розподілу.

Можливий випадок, коли закон розподілу відомий, а його параметри невідомі. Якщо є підстави припустити, що невідомий параметр дорівнює певному значенню θ_0, висувають гіпотезу: $\theta = \theta_0$.

Можливі інші гіпотези: про рівність параметрів двох або кількох розподілів, про незалежність вибірок та ін.

➡ **Означення 17.13.** ***Статистичною гіпотезою*** *називають довільне припущення про вид або властивості розподілу величин, що спостерігаються в експерименті.*

Гіпотези можуть бути *непараметричні* (наприклад, про рівність двох функцій розподілу) і *параметричні* (наприклад, про те, що середнє випадкової величини дорівнює нулю).

Гіпотези про невідомий параметр θ розподілу бувають прості й складні. Гіпотезу, яка полягає тільки в однозначному припущенні (тобто, що параметр θ набуває конкретного значення $\theta = \theta_0$), називають *простою*. В противному разі гіпотеза називається *складною*, тобто складна гіпотеза стверджує, що параметр θ набуває значень із сукупності значень ($\theta < \theta_0$, або $\theta > \theta_0$, або $\theta \neq \theta_0$). Задача перевірки гіпотези полягає в побудові такої випадкової величини (статистики), яка давала б змогу за результатами експерименту прийняти або відхилити дану гіпотезу.

17.4.2. Статистичний критерій. Помилки першого й другого роду

Означення 17.14. ***Статистичним критерієм*** *(або просто критерієм) називають випадкову величину K, яка використовується для перевірки гіпотези.*

Гіпотезу, яку перевіряють, позначимо H_0. Її ще називають *нульовою*, або *основною*, *гіпотезою*. Інші гіпотези будемо називати *альтернативними*, або *конкурентними*. Конкурентну гіпотезу, що суперечить гіпотезі H_0, позначимо H_1.

■ **Приклад 17.13.** Нехай дано гіпотезу H_0: випадкова величина ξ має біноміальний розподіл $P_n(m) = C_n^m \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-m}$, $m = 0; 1; ...; n$. Тут параметр $\theta = \frac{1}{2}$ — фіксоване число; H_0 — проста основна гіпотеза. Гіпотеза H_1: розподілом випадкової величини ξ є розподіл $P_n(m) = C_n^m\, \theta^m (1-\theta)^{n-m}$, $m = 0; 1; ...; n$, де $\theta \in (0; 1)$ і $\theta \neq \frac{1}{2}$ — складна конкурентна гіпотеза.

Математична статистика не дає ніяких рекомендацій щодо вибору основної (нульової) гіпотези. Цей вибір повністю визначається дослідником і залежить від постановки задачі. Вона пропонує методи перевірки статистичних гіпотез, при застосуванні яких можна приймати лише одну з гіпотез H_0 чи H_1, відхиляючи одночасно іншу.

Гіпотезу перевіряють на підставі вибірки, одержаної з генеральної сукупності ξ. Через випадковість вибірки в результаті статистичної перевірки гіпотези H_0 у двох випадках можуть виникати помилки, тобто можливі помилки першого й другого роду.

Означення 17.15. *Помилку, яка полягає в тому, що гіпотеза H_0 відхиляється у випадку, коли вона справедлива, називають* ***помилкою першого роду.***

Означення 17.16. *Помилку, яка полягає в тому, що гіпотеза H_0 приймається у випадку, коли вона несправедлива, називають* ***помилкою другого роду.***

Означення 17.17. *Імовірність допущення помилки першого роду називають* ***рівнем значущості критерію*** *й позначають α.*

Визначення рівня значущості α не є статистичною задачею. Здебільшого за рівень значущості беруть числа 0,1; 0,05; 0,01; 0,001 та ін. Якщо, наприклад, прийняти $\alpha = 0{,}05$, то це означає, що в п'яти випадках зі ста ми ризикуємо зробити помилку першого роду (тобто відхилити правильну гіпотезу). Чим серйозніші наслідки помилки першого роду, тим меншим має бути рівень значущості.

Імовірність помилки другого роду позначають β, тобто ймовірність «прийнята нульова гіпотеза, причому справедлива конкурентна». Тоді ймовірність протилежної події «відхилена нульова гіпотеза, причому справедлива конкурентна» дорівнює $1 - \beta$.

Означення 17.18. ***Потужністю критерію*** *називають імовірність того, що не буде допущено помилку другого роду.*

Інакше кажучи, потужність критерію — це ймовірність того, що нульова гіпотеза відхиляється, якщо справедлива конкурентна гіпотеза.

Розглянемо вибір нульової гіпотези. Раніше вже зазначалося, що нульову гіпотезу із сукупності всіх гіпотез ми вибираємо самі. Так, за основну (нульову) гіпотезу ми беремо ту, для якої важливіше уникнути помилки, що полягає в її відхиленні, коли вона справедлива. Помилка першого роду — це помилка, якої важливіше уникнути, тобто помилка, «ціна» якої вища.

Після вибору відповідного критерію множину його можливих значень розбивають на дві множини: S — множину значень критерію K, при яких гіпотеза H_0 відхиляється, і множину $\overline{S}$, при яких H_0 приймається.

Означення 17.19. ***Критичною областю*** *називають сукупність значень критерію K, при яких гіпотезу H_0 відхиляють.* ***Областю прийняття гіпотези*** *називають сукупність значень критерію, при яких гіпотезу H_0 приймають.*

Далі проводимо експеримент: знаходимо реалізацію випадкової вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$: $\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n$ і обчислюємо за вибіркою значення критерію K. Якщо це значення належить до критичної області S, гіпотезу відхиляють, якщо до області прийняття гіпотези $\overline{S}$, — гіпотезу приймають.

Оскільки критерій K — одновимірна випадкова величина, то її можливі значення належать деякому інтервалові. Тому критична область і область прийняття також інтервальні, отже, існують точки, які їх відокремлюють. Їх називають *критичними точками* (*критичними межами*). Критичні точки визначаються за таблицями розподілу критерію K.

Розрізняють *односторонні* (право- та лівосторонні) і *двосторонні* критичні області.

Означення 17.20. *Критичну область називають:*

- ***правосторонньою,*** *якщо* $K > k$ (рис. 17.4, *а*);
- ***лівосторонньою,*** *якщо* $K < k$ (рис. 17.4, *б*);
- ***двосторонньою,*** *якщо* $k_1 < K$, $K > k_2$ (рис. 17.4, *в*).

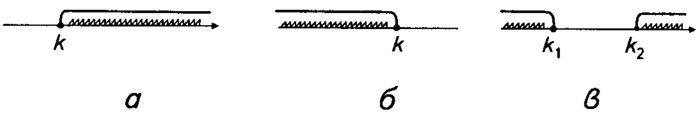

Рис. 17.4

Розглянемо випадок правосторонньої критичної області. Очевидно, що для її визначення достатньо знайти критичну точку. Для цього задають рівень значущості α і знаходять критичну точку c_α, тому $P(K > c_\alpha) = \alpha$.

Оскільки α мале (найчастіше $\alpha = 0{,}05$ або $\alpha = 0{,}01$), то подія в разі справедливості нульової гіпотези, в силу практичної неможливості малоймовірних подій, в одному експерименті практично не відбувається. Якщо ж вона відбулася, тобто $K > C_\alpha$, то це можна пояснити тим, що нульова гіпотеза H_0 несправедлива й, отже, її слід відхилити. В противному разі вважається, що спостереження узгоджені з гіпотезою H_0.

Побудова ліво- та двосторонньої критичних областей зводиться до побудови критичних точок. Їх знаходять з умов $P(K < c_\alpha) = \alpha$ для лівосторонньої критичної області і $P(K < c_\alpha^{(1)}) + P(K > c_\alpha^{(2)}) = \alpha$ — для двосторонньої. Якщо розподіл критерію симетричний відносно нуля, то з умови $P(K > c_\alpha) = \alpha / 2$ для двосторонньої критичної області.

Нехай для перевірки гіпотези прийнято певний рівень значущості α і вибірка має фіксований об'єм. Як краще побудувати критичну область S? Покажемо, що її доцільно побудувати так, щоб потужність критерію була максимальною.

Якщо ймовірність помилки другого роду (прийняти несправедливу гіпотезу) дорівнює β, то потужність становить $1 - \beta$. Нехай потужність зростає. Тоді зменшується ймовірність β зробити помилку другого роду. Отже, якщо рівень значущості вже вибрано, то *критичну область треба будувати так, щоб потужність критерію була максимальною.* Виконання цієї умови забезпечить мінімальну помилку другого роду, що, звичайно, бажано.

Імовірності помилок першого й другого роду однозначно визначаються критичною областю S, і навпаки. Очевидно, що чим менше ймовірності помилок першого та другого роду, тим критична область «краща». Але при заданому об'ємі вибірки зменшити одночасно α і β неможливо: якщо зменшити α, то буде зростати β, і навпаки. Єдиний спосіб одночасно зменшити ймовірності помилок першого та другого роду полягає у збільшенні об'єму вибірки.

Якщо закон розподілу невідомий, але є підстави припустити, що він має певний вид $F_0(x)$, то перевіряють нульову гіпотезу: генеральна сукупність ξ має розподіл $F_0(x)$. Як уже зазначалося, перевіряється гіпотеза щодо виду невідомого розподілу за допомогою спеціально дібраної випадкової величини — критерію згоди.

Розглянемо, як можна перевірити гіпотезу про розподіл генеральної сукупності ξ. Нехай генеральна сукупність має невідомий розподіл $F(x)$. Зробимо вибірку $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ із генеральної сукупності ξ. На підставі вибірки та враховуючи деякі інші міркування, висунемо гіпотезу про конкретний вид розподілу $F_0(x)$ генеральної сукупності, що має функцію розподілу $F(x)$. Розподіл $F_0(x)$ назвемо *гіпотетичним*, на відміну від *теоретичного.* Гіпотеза H_0 полягає в тому, що вибірка $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ є вибіркою з розподілу $F_0(x)$.

Незалежно від того, справедлива гіпотеза H_0 чи ні, можемо за вибіркою знайти емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$. Гіпотезу приймають тоді, коли емпіричний розподіл добре узгоджується з теоретичним, тобто, якщо відхилення емпіричного розподілу $F_n(x)$ від теоретичного мале, то гіпотезу H_0 природно прийняти, якщо ж відхилення велике, то гіпотезу H_0 природно відхилити. Для перевірки таких гіпотез розроблено критерії згоди. Критерії бувають параметричні й непараметричні.

Класичні критерії для перевірки статистичних гіпотез будуються в тих чи інших припущеннях стосовно розподілів у моделі, що розглядається (як правило, в припущенні, що розподіл належить даній параметричній сукупності). Найширше застосування в статистиці має критерій χ^2, який ми розглянемо детально. Крім того, існує цілий клас так званих непараметричних критеріїв, які будуються так, щоб не використовувати припущень стосовно вигляду розподілів. Далі розглянемо критерій Колмогорова.

17.4.3. Критерій χ^2 Пірсона, коли гіпотетичний розподіл не залежить від невідомих параметрів

Нехай гіпотеза H_0 полягає в тому, що вибірка $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ належить генеральній сукупності ξ із функцією розподілу $F_0(x)$. Для побудови критерію χ^2 розбивають область значень випадкової величини ξ на скінченне число r множин Δ_i, $i = 1; 2; \ldots; r$, які не перетинаються. Відповідно вибірку розбивають на r груп. Позначимо через ν_i число елементів вибірки, які потрапили в множину Δ_i, і $p_i = P\{\xi \in \Delta i\}$, $i = 1; 2; \ldots; r$. Множини Δ_i вибрано таким чином, що всі $p_i > 0$. Імовірності p_i обчислюються за відомою функцією розподілу $F_0(x)$. Оскільки множини Δ_i — це розбиття всієї множини значень ξ, то $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1, \sum_{i=1}^{r} \nu_i = n.$

Перша наша задача полягає у відшуканні міри відхилення розподілу вибірки від гіпотетичного розподілу. Будь-яка множина містить у першому розподілі масу ν_i / n, а в другому — p_i. Відповідно до загальних принципів найменших квадратів за таку міру відхилення візьмемо вираз $\sum_{i=1}^{r} c_i \left(\frac{\nu_i}{n} - p_i \right)^2$, де коефіцієнти c_i можуть бути вибрані більш-менш довільно.

К. Пірсон показав: якщо покласти $c_i = \frac{n}{p_i}$, то дістанемо міру відхилення з простими властивостями.

Отже, за міру відхилення розподілу вибірки $F_n(x)$ від гіпотетичного розподілу $F_0(x)$ вибирається величина

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i^2}{np_i} - n.$$

Таким чином, χ_n^2 просто виражається через частоти, що спостерігаються (ν_i), та частоти, на які сподіваються (p_i), для всіх r груп.

Теорема 17.8 (Пірсона). При $n \to \infty$ вибірковий розподіл величини χ_n^2 прямує до розподілу χ^2 з $r-1$ ступенями вільності.

Використовуючи цю теорему, введемо критерій χ^2 (гіпотетичний розподіл не залежить від параметрів). Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ — реалізація вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із функцією розподілу $F(x)$, $c_\alpha = \chi^2_{\alpha;(r-1)}$ – критична точка χ^2-розподілу з $r-1$ ступенями вільності, тобто $P(\chi_n^2 > \chi^2_{\alpha;(r-1)}) \approx \alpha$. *Якщо виконується нерівність*

$$\boxed{\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} > \chi^2_{\alpha;(r-1)},}$$

то гіпотезу H_0 (H_0: $x_1, x_2, ..., x_n$ — вибірка з функцією розподілу $F_0(x)$) відхиляють із рівнем значущості α; якщо $\chi_n^2 < \chi^2_{\alpha;(r-1)}$, то гіпотезу H_0 приймають. При цьому з імовірністю α гіпотезу H_0 буде відхилено, коли вона справедлива.

- *Зауваження.* Критерієм χ^2 можна користуватися, коли об'єм вибірки n і p_i ($i = 1; 2; ...; r$ — імовірність потрапляння вибіркових значень до множини Δ_i), обчислені за гіпотетичним розподілом, такі, що $np_i \geq 10$, $i = 1; 2; ...; r$. Якщо для деяких Δ_i при даному поділі $np_i < 10$, то ті Δ_i, для яких це справджується, слід об'єднати з іншими сусідніми Δ_i так, щоб для «нових» Δ_i було $np_i \geq 10$. Якщо вибіркових значень так мало, що цього зробити не можна, то застосовувати критерій χ^2 не рекомендується.

■ **Приклад 17.14.** *Спостерігач, знімаючи покази вимірювального приладу, бере до уваги цілі числа шкали, навмання оцінюючи десяті та інші поділки. У таблиці наведено кількість поділок ν_i цифри i, які записано як десяті поділки при 200 незалежних вимірюваннях:*

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ν_i	35	16	15	17	17	19	11	16	30	24

Чи узгоджуються ці дані при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ із гіпотезою H_0 про те, що кожна цифра могла з'явитися з однаковою ймовірністю.

Дані прикладу можна розглядати як вибірку об'ємом $n = 200$ із генеральної сукупності ξ, де випадкова величина може набувати довільних значень із півінтервалу $[0;\ 10)$. Розіб'ємо область значень на множини $\Delta_i = [i;\ i+1)$, $i = 0;\ 1;\ ...;\ 9$. Числа ν_i елементів вибірки відомі, $r = 10$. Припустимо, що гіпотеза H_0 справедлива, тобто випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на півінтервалі $[0;\ 10)$. Тому гіпотетичні ймовірності $p_i = P\{\xi \in \Delta_i\} = \frac{1}{10} = 0{,}1,\ i = 0;\ 1;\ ...;\ 9;\ np_i = 200 \cdot 0{,}1 = 20 > 10,\ i = 0;\ 1;\ ...;\ 9.$
Можна скористатися критерієм χ^2. Обчислимо величину

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 25{,}9.$$

За умовою задачі $\alpha = 0{,}01$, $r = 10$.

За таблицею дод. 5 знаходимо значення $\chi^2_{\alpha;\,(r-1)} = \chi^2_{0{,}01;\,9} = 21{,}7$. Оскільки виконується нерівність $25{,}9 > 21{,}7$, тобто $\hat{\chi}_n^2 > \chi^2_{\alpha;\,(r-1)}$, то за критерієм χ^2 гіпотеза H_0 відхиляється з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$.

17.4.4. Критерій χ^2, коли гіпотетичний розподіл залежить від невідомих параметрів

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — вибірка об'ємом n із генеральної сукупності ξ, що має невідомий розподіл $F(x)$. Щодо розподілу $F(x)$ висувається гіпотеза H_0: $F(x) = F_0(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$, де розподіл $F_0(x, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ залежить від параметрів $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$, причому ці параметри невідомі (стосовно значень цих параметрів ми маємо лише інформацію, яка може бути одержана з вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$).

Оскільки параметри $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ невідомі, природно за їх значення взяти точкові оцінки, побудовані за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, і, отже, як гіпотетичний розподіл розглядати $F_0(x, \theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_s^*)$. Як установлено Р. Фішером, якщо оцінки $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_s^*$ визначено за методом максимальної правдоподібності, то в разі справедливості гіпотези H_0 розподіл відхилення

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_s^*))}{np_i(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_s^*)}$$

прямує до розподілу χ^2 з $(r-1-s)$ ступенями вільності, де s — число параметрів, які оцінено за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Тут $p_i(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_s^*)$ — імовірності потрапляння вибіркових значень до множин Δ_i, $i = 1; 2; \ldots; r$, обчислені за гіпотетичним розподілом; ν_i — число елементів вибірки, які потрапили до множини Δ_i, $i = 1; 2; \ldots; r$.

Таким чином, якщо параметри оцінюються за вибіркою за методом максимальної правдоподібності, ми можемо користуватися критерієм χ^2, коли гіпотетичний розподіл залежить від невідомих параметрів у такому формулюванні. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — реалізація вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із функцією розподілу $F(x)$, $\chi^2_{\alpha;(r-1-s)}$ — критична точка χ^2-розподілу з $(r-1-s)$ ступенями вільності. *Якщо виконується нерівність*

$$\boxed{\tilde{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i(\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_s^*))}{np_i(\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_s^*)} > \chi^2_{\alpha;(r-1-s)},}$$

*то гіпотезу H_0 (H_0: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — вибірка з функцією розподілу $F_0(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$) **відхиляють** із рівнем значущості α; якщо $\chi_n^2 < \chi^2_{\alpha;(r-1-s)}$, то гіпотезу H_0 **приймають**.* Гіпотеза H_0 буде відхилятися з імовірністю α, коли вона справедлива.

■ **Приклад 17.15.** *Серед 2020 сімей, в яких є двоє дітей, 527 сімей мають двох хлопчиків і 476 — двох дівчаток (у решти 1017 сім'ях діти різної статі). Чи можна вважати, що кількість хлопчиків у сім'ї з двома дітьми є біноміальною випадковою величиною?*

Розглянемо випадкову величину ξ — кількість хлопчиків у сім'ї. Вона набуває значень 0; 1; 2. Стосовно розподілу випадкової величини ξ висувається гіпотеза H_0: $P\{\xi = k\} = C_2^k\, p^k (1-p)^{2-k}$, $k = 0; 1; 2$. Перевіримо гіпотезу H_0.

Параметр p гіпотетичного розподілу нам не відомий. Його треба оцінити за вибіркою. Оцінкою максимальної правдоподібності параметра p біноміального розподілу $C^{k_m}\, p^k (1-p)^{m-k}$, $k = 0; 1; \ldots; m$ за вибіркою $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ є $p^* = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\xi_k$.

У нашому прикладі значення оцінки p^* параметра p обчислюється так:

$$p^* = \frac{0 \cdot 476 + 1 \cdot 1017 + 2 \cdot 257}{2 \cdot 2020} = 0{,}513.$$

Тому гіпотетичний розподіл можна записати таким чином:

x_i	0	1	2
p_i	0,263	0,500	0,237

Розіб'ємо множину значень ξ на множини: $\Delta_0 = \{0\}$, $\Delta_1 = \{1\}$, $\Delta_2 = \{2\}$. Для цих множин $np_i^* \geq 10$, $i = 0;\ 1;\ 2$, де p_i^* — оцінка гіпотетичних імовірностей потрапляння до множини Δ_i, $i = 0;\ 1;\ 2$, що дорівнюють відповідно 0,263; 0,500; 0,237. Обчислимо відхилення:

$$\tilde{\chi}_n^2 = \frac{(\nu_2 - np_0^*)^2}{np_0^*} + \frac{(\nu_1 - np_1^*)^2}{np_1^*} + \frac{(\nu_2 - np_2^*)^2}{np_2^*} =$$

$$= \frac{(467 - 531{,}26)^2}{531{,}26} + \frac{(1017 - 1010)^2}{1010} + \frac{(517 - 478{,}74)^2}{478{,}78} = 10{,}66.$$

Порівняємо значення $\tilde{\chi}_n^2$ з $\chi^2_{\alpha;\ (r-1-s)_n}$. У нашій задачі $s = 1$ — кількість параметрів, що оцінені за вибіркою, $r = 3$ — кількість множин Δ_i; тому $r - 1 - s = 3 - 1 - 1 = 1$. За таблицею дод. 5 знаходимо $\chi^2_{\alpha;\ (r-1-s)} = \chi^2_{0{,}05;\ 1} = 3{,}84$. Виконується нерівність $\tilde{\chi}_n^2 = 10{,}66 > 3{,}84 = \chi^2_{0{,}05;\ 1}$.

Отже, гіпотеза H_0 про біноміальний розподіл випадкової величини відхиляється, тобто припущення, що кількість хлопчиків у дводітних сім'ях має біноміальний розподіл, суперечить даним.

17.4.5. Критерій χ^2 як критерій незалежності

Розглянемо задачу про *спряжені ознаки*. Припустимо, що вибірка є результатом обстеження деяких об'єктів, кожен з яких характеризується двома ознаками: ξ та η. Ознака ξ може набувати значень $x_1, x_2, \ldots, x_s$, а η — значень $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Виникає запитання: чи залежні ці ознаки? Наприклад, ми можемо проводити деякий експеримент із наслідками $x_1, x_2, \ldots, x_s$ у різних умовах $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Задача полягає в тому, щоб з'ясувати, чи залежать результати експерименту від умов, в яких він проводиться.

Пару (ξ, η) можна розглядати як двовимірну випадкову величину $\zeta = (\xi, \eta)$ із розподілом

η	ξ				
	x_1	x_2	...	x_s	Сума
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1s}	$p_{1\cdot}$
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2s}	$p_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
y_k	p_{k1}	p_{k2}	...	p_{ks}	$p_{k\cdot}$
Сума	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	...	$p_{\cdot s}$	1

$$p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij}, \ j = 1;\ 2;\ ...;\ k; \quad p_{j\cdot} = \sum_{j=1}^{k} p_{ij}, \ i = 1;\ 2;\ ...;\ s,$$

причому розподіл вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ і розподіли відповідних компонент ξ та η вектора нам не відомі.

Стосовно сумісного розподілу вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ висувається гіпотеза H_0: $p_{ij} = p_{i\cdot}\ p_{\cdot j}$, $i = 1;\ 2;\ ...;\ s$, $j = 1;\ 2;\ ...;\ k$, тобто гіпотеза про незалежність випадкових величин ξ та η (ще кажуть: гіпотеза незалежності ознак).

Для перевірки гіпотези H_0 відомі результати n спостережень випадкової величини $\zeta = (\xi, \eta)$: «значень» $(x_i,\ y_j)$ випадкова величина $\zeta = (\xi, \eta)$ набула ν_{ij} разів, $i = 1;\ 2;\ ...;\ s$, $j = 1;\ 2;\ ...;\ k$ (очевидно, $\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij} = n$).

Результати спостережень зручно подати у вигляді *таблиці спряженості ознак:*

η	ξ				
	x_1	x_2	...	x_s	Сума
y_1	ν_{11}	ν_{12}	...	ν_{1s}	$\nu_{1\cdot}$
y_2	ν_{21}	ν_{22}	...	ν_{2s}	$\nu_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...
y_k	ν_{k1}	ν_{k2}	...	ν_{ks}	$\nu_{k\cdot}$
Сума	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$	...	$\nu_{\cdot s}$	n

$$\nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s} \nu_{ij}, \ j = 1;\ 2;\ ...;\ k; \quad \nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{ij}, \ i = 1;\ 2;\ ...;\ s.$$

Для перевірки гіпотези про незалежність величин ξ та η скористаємося критерієм χ^2 у випадку, коли гіпотетичний розподіл залежить від невідомих параметрів. Невідомими параметрами є $p_{\cdot j}$ та $p_{i\cdot}$, $i = 1;$ $2; ...; s$, $j = 1; 2; ...; k$, причому $\sum_{i=1}^{s} p_{i\cdot} = 1$, $\sum_{j=1}^{s} p_{\cdot j} = 1$.

Розіб'ємо множину значень випадкового вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ на множини $\Delta_{ij} = \{\xi = x_i, \eta = y_j\}$, $i = 1; 2; ...; s$, $j = 1; 2; ...; k$.

За міру відхилення емпіричного розподілу ν_{ij}/n, $i = 1; 2; ...; s$, $j = 1;$ $2; ...; k$ від гіпотетичного $p_{i\cdot}\ p_{j\cdot}$, $i = 1; 2; ...; s$, $j = 1; 2; ...; k$ вибирають величини

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_{ij} - n\hat{p}_{i\cdot}\hat{p}_{\cdot j})^2}{n\hat{p}_{i\cdot}\ \hat{p}_{\cdot j}},$$

де $\hat{p}_{i\cdot}$ та $\hat{p}_{\cdot j}$ — оцінки максимальної правдоподібності для $p_{i\cdot}$ і $p_{\cdot j}$, які дорівнюють відповідно $p_{i\cdot}/n$ та $\nu_{\cdot j}/n$, $i = 1; 2; ...; s$, $j = 1; 2; ...; k$.

Таким чином,

$$\chi_n^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}/n} = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{\nu_{ij}^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} - 1\right), \nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k}\nu_{ij}\ \ \nu_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{s}\nu_{ij}.$$

Кількість параметрів, оцінених за вибіркою, дорівнює $(s - 1) +$ $+ (k - 1)$. Кількість множин Δ_{ij}, $i = 1; 2; ...; s$, $j = 1; 2; ...; k$ дорівнює sk. Тому число ступенів вільності χ^2 для χ_n^2 дорівнює $sk - 1 - ((s - 1) +$ $+ (k - 1)) = (s - 1)(k - 1)$.

Розглянемо критерій χ^2 як ***критерій незалежності випадкових величин.*** *Якщо виконується нерівність*

$$\boxed{\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{n\left(\nu_{ij} - \frac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}} > \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)},}$$

то гіпотеза H_0 про незалежність випадкових величин ξ та η відхиляється; якщо ж $\hat{\chi}_n^2 < \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)}$, то гіпотеза H_0 приймається. При цьому з імовірністю α гіпотеза H_0 буде відхилятись, якщо вона справедлива.

Значення випадкових величин ξ та η ще називають *ознаками*, і в цьому разі кажуть про ***критерій χ^2 для незалежності ознак.***

Часто рівні ознак вибирають самі, розбиваючи їх «значення» на підмножини X_i та Y_j; X_i — підмножина значень ξ; Y_j — підмножина значень η. При цьому, як завжди при використанні критерію χ^2, слід стежити, щоб для гіпотетичних імовірностей $\hat{p}_{i\cdot}\ \hat{p}_{\cdot j}$ потрапляння «значень» пар ознак $X_i \times Y_j$ виконувалися співвідношення $(\hat{p}_{i\cdot}\ \hat{p}_{\cdot j}) = \dfrac{\nu_{i\cdot}\ \nu_{\cdot j}}{n} \geq 10$, де n — об'єм вибірки.

■ **Приклад 17.16**. *Випадково вибраних 147 студентів було розподілено відповідно до кольору волосся на голові (світле, темне) й кольору очей (голубі, карі).*

Волосся	Очі		Разом
	голубі	карі	
Темне	31	41	72
Світле	40	35	75
Разом	71	76	147

Чи можна на підставі цих даних зробити висновки про те, що колір очей пов'язаний із кольором волосся на голові?

У термінах перевірки статистичних гіпотез ця задача формулюється як задача перевірки гіпотези про незалежність ознак (кольору очей та кольору волосся).

В умовах прикладу $s = 2$, $k = 2$, $n = 147$, значення ν_{ij}, $\nu_{i\cdot}$, $\nu_{\cdot j}$ подані в таблиці спряженості ознак. Легко перевірити, що $(\nu_{i\cdot}\ \nu_{\cdot j})/n \geq 10$, $i, j = 1; 2$, тому можна скористатися критерієм χ^2:

$$\hat{\chi}_n^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\nu_{ij} - \dfrac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\dfrac{\nu_{i\cdot}\nu_{\cdot j}}{n}} = \frac{\left(31 - \dfrac{72\cdot 71}{147}\right)^2}{\dfrac{72\cdot 71}{147}} + \frac{\left(41 - \dfrac{72\cdot 76}{147}\right)^2}{\dfrac{72\cdot 76}{147}} +$$

$$+ \frac{\left(40 - \dfrac{75\cdot 71}{147}\right)^2}{\dfrac{75\cdot 71}{147}} + \frac{\left(35 - \dfrac{75\cdot 76}{147}\right)^2}{\dfrac{75\cdot 76}{147}} \approx 1{,}51.$$

Виберемо рівень значущості $\alpha = 0{,}05$. Кількість ступенів вільності $(s-1)(k-1) = (2-1)(2-1) = 1$. За таблицею дод. 5 знаходимо $\chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)} = \chi^2_{0,05;1} = 3{,}84$. Оскільки виконується нерівність $\chi^2_n = 1{,}51 < 3{,}84 = \chi^2_{0,05;1}$, то гіпотеза H_0 про незалежність ознак, тобто незалежність кольору очей і кольору волосся, приймається — вона не суперечить даним.

17.4.6. Критерій χ^2 як критерій однорідності

Припустимо, що проведено k послідовних серій незалежних спостережень, що складаються з $n_1, n_2, \ldots, n_k$ одиничних спостережень, причому числа n_j не випадкові, а мають розглядатись як задані. В кожному експерименті спостерігається деяка змінна ознака, і результати кожної серії спостережень розбиваються за значеннями цієї ознаки на s груп. Кількість результатів спостережень в i-й групі j-ї серії будемо позначати ν_{ij}. Тоді наші дані розміщуватимуться в таблиці спряженості ознак, причому суми по стовпчиках $\nu_{\cdot j}$ у цій таблиці позначатимуться n_j. У цьому разі таблиця буде результатом не однієї серії спостережень, як у випадку таблиці спряженості ознак, а результатом s незалежних серій спостережень, кожному з яких відповідає в нашій таблиці один стовпчик.

У таких випадках часто необхідно перевірити гіпотезу про те, що k вибірок взято з однієї й тієї самої генеральної сукупності, або, інакше кажучи, що в цьому розумінні наші дані однорідні. Для перевірки цієї гіпотези обчислюють відхилення

$$\chi^2_n = n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{(\nu_{ij} - \nu_{i\cdot}\, n_j/n)^2}{\nu_{i\cdot} n_j} = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{\nu_{ij}^2}{n_j\,\nu_i} - 1\right),$$

де $\nu_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k}\nu_{ij}$.

У таблиці χ^2-розподілу (дод. 5) за заданим рівнем значущості α та числом ступенів вільності $(s-1)(k-1)$ знаходимо критичну точку $c_\alpha = \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)}$. Тоді, *якщо виконується нерівність* $\hat{\chi}^2_n < \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)}$, *то гіпотеза* H_0 *відхиляється; якщо ж* $\hat{\chi}^2_n < \chi^2_{\alpha;(s-1)(k-1)}$, *то гіпотеза* H_0 *приймається*. При цьому з імовірністю α гіпотезу буде відхилено, коли вона справедлива.

Розглянемо окремий випадок, коли $s = 2$. Таблиця має такий вигляд:

ν_1	ν_2	...	ν_k	$\sum_j \nu_j$
$n_1 - \nu_1$	$n_2 - \nu_2$	...	$n_k - \nu_k$	$n - \sum_j \nu_j$
n_1	n_2	...	n_k	n

Маємо k послідовних спостережень, у кожному з яких деяка подія A відбувається відповідно $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ разів, і треба з'ясувати, чи є підстави вважати, що подія A в усіх спостереженнях має одну й ту саму ймовірність p (p невідоме). Оцінкою для p може слугувати частота події A в усій сукупності даних: $\hat{p} = 1 - \hat{q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \nu_j$; тоді

$$\hat{\chi}_n^2(\hat{p}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(\nu_j - n_j\hat{p})^2}{n_j\hat{p}\hat{q}} = \frac{1}{\hat{p}\hat{q}} \sum_{j=1}^{k} \frac{\nu_j^2}{n_j} - n\frac{\hat{p}}{\hat{q}}$$

з $k - 1$ ступенями вільності.

■ **Приклад 17.17.** *У таблиці подано число дітей, що народилися в Швеції протягом $k = 12$ місяців 1935 року.*

Стать дитини	Місяці												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Разом
Хлопчики	3743	3550	4017	4173	4117	3944	3964	3797	3712	3512	3392	3761	45 682
Дівчатка	3537	3407	3866	3711	3775	3665	3621	3596	3491	3391	3160	3371	42 591
Разом	7280	6957	7883	7884	7892	7609	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88 273

Оцінкою ймовірності народження хлопчика є: $\hat{p} = \frac{45\,682}{88\,273} = 0{,}517\,508\,2$.

Обчисливши $\chi_n^2 = 14{,}986$ з 11 ступенями вільності, за таблицею дод. 5 знаходимо $\chi_{0,05;\,11}^2 = 19{,}7$. Отже, виконується нерівність $\chi_n^2 = 14{,}986 < 19{,}7 = \chi_{0,05;\,11}^2$, тому можна вважати, що дані узгоджені з гіпотезою про сталу ймовірність.

Розглянемо випадок, коли $k = 2$. Маємо дві незалежні вибірки об'ємами n_1 і n_2, причому за умови, що розглядаються спостереження кожної. Вибірки розбиваються на s груп чисельністю $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ і $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$.

Треба перевірити гіпотезу H_0 про те, що розподіл ознаки в двох генеральних сукупностях, з яких зроблено вибірки, однаковий. Інакше кажучи: слід з'ясувати, чи належать ці вибірки одній і тій самій генеральній сукупності. В цьому разі використовують критерій χ^2 у вигляді

$$\chi^2(\hat{p}) = n_1\, n_2 \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{\mu_i + \nu_i}\left(\frac{\mu_i}{n_1} + \frac{\nu_i}{n_2}\right)^2.$$

Можна показати, що цей критерій при великих n_1 і n_2 розподілений за законом χ^2 з $s-1$ ступенями вільності.

■ **Приклад 17.18.** *Нехай маємо дані про наявність домішок сірки у вуглецевій сталі, що виплавляється двома металургійними заводами:*

Вміст сірки x, %	Число плавок		$\mu_i + \nu_i$	$\frac{1}{\mu_i + \nu_i}$	$\frac{\mu_i}{n_1}$	$\frac{\nu_i}{n_2}$	$\left(\frac{\mu_i}{n_1} + \frac{\nu_i}{n_2}\right)^2$	$\frac{1}{\mu_i + \nu_i}\left(\frac{\mu_i}{n_1} + \frac{\nu_i}{n_2}\right)^2$
	μ_i	ν_i						
0,00—0,02	82	63	145	$69 \cdot 10^{-4}$	0,0234	0,0226	$0,6 \cdot 10^{-6}$	$4,1 \cdot 10^{-9}$
0,02—0,04	535	429	964	$10,4 \cdot 10^{-4}$	0,1526	0,1535	$0,8 \cdot 10^{-6}$	$0,8 \cdot 10^{-9}$
0,04—0,06	1173	995	2168	$4,6 \cdot 10^{-4}$	0,3348	0,3561	$453,7 \cdot 10^{-6}$	$208,7 \cdot 10^{-9}$
0,06—0,08	1714	1307	3021	$3,3 \cdot 10^{-4}$	0,4892	0,4678	$458,0 \cdot 10^{-6}$	$151,2 \cdot 10^{-9}$
Сума	3504	2794	6298	—	1,0000	1,0000	—	$364,7 \cdot 10^{-9}$

Треба з'ясувати, чи можна вважати розподіл домішок сірки в плавках сталі цих двох заводів однаковим.

Обчислюємо значення $\hat{\chi}^2_n$:

$$\hat{\chi}^2_n = 3504 \cdot 2794 \cdot 364,7 \cdot 10^{-9} = 3,39.$$

Число ступенів вільності $s - 1 = 4 - 1 = 3$, $\alpha = 0,05$. За таблицею дод. 5 знаходимо $\chi^2_{0,05;\,3} = 78$. Отже, виконується нерівність $\hat{\chi}^2_n = 3,39 < 7,8 = \chi^2_{0,05;\,3}$. Тому можна вважати, що процентний вміст сірки в сталі, що виплавляється двома заводами, має однаковий розподіл.

17.4.7. Критерій Колмогорова

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — реалізація вибірки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ із певним невідомим нам неперервним розподілом $F(x)$. Висувається гіпотеза H_0: $F(x) = F_0(x)$. За вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_n$ знаходимо $F_n(x)$ — емпіричну функцію розподілу. А. М. Колмогоров як ступінь відхилення емпіричного розподілу $F_n(x)$ від гіпотетичного $F_0(x)$ запропонував розглянути величину $D_n = \sup\limits_x |F(x) - F_n(x)|$.

При достатньо великих n за розподіл відхилення D_n можна взяти розподіл Колмогорова з функцією розподілу $K(\lambda) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$.

Звідси випливає, що критичну точку $\varepsilon_{\alpha;n}$, яка визначається з рівності $P(\sup\limits_x |F(x) - F_n(x)| \geq \varepsilon_{\alpha;n}) = P(D_n \geq \varepsilon_{\alpha;n}) = \alpha$, можна взяти $\varepsilon_{\alpha;n} = \lambda_\alpha / \sqrt{n}$, де $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$. У цьому разі

$$P(D_n \geq \varepsilon_{\alpha;n}) = P(D_n \sqrt{n} \geq \lambda_\alpha) \approx 1 - K(\lambda_\alpha) = \alpha.$$

Таким чином, при заданому рівні значущості α *правило* перевірки гіпотези H_0 формулюється так: *якщо значення відхилення D_n задовольняє нерівність $D_n \sqrt{n} \geq \lambda_\alpha$, то гіпотезу H_0 відхиляють; у противному разі гіпотезу приймають.* За цим правилом можна помилково відхилити гіпотезу H_0, коли вона справедлива, з імовірністю α. Це правило називають ***критерієм Колмогорова.***

Для невеликих n точне значення D_n також табульовано. Значення критичної точки $\varepsilon_{\alpha;n}$ знаходять за дод. 7. У цьому випадку правило формулюється так: гіпотеза H_0 приймається, якщо виконується нерівність $D_n < \varepsilon_{\alpha;n}$, і відхиляється в противному разі.

■ **Приклад 17.19**. *Нехай дано вибірку: 0,86; −0,09; −0,59; −0,47; 0,78; 1,00; −0,90; −1,41; 0,54; 0,65; об'єм n = 10. Скориставшися критерієм Колмогорова, перевірити, чи є вона вибірковою з нормальним розподілом з параметрами (0; 1).*

Нехай гіпотеза H_0 полягає в тому, що дана вибірка є вибіркою з нормальним розподілом з параметрами (0; 1), тобто $F_0(x) = \Phi(x)$. Здійснивши відповідні обчислення, дістанемо

$$D_n = \sup_x |\Phi(x) - F_n(x)| = 0{,}2054.$$

Порівнявши це значення з критичним значенням $\varepsilon_{0{,}05;\,10} = 0{,}4087$ (дод. 7): $D_n = 0{,}2054 < 0{,}4087 = \varepsilon_{0{,}05;\,10}$, маємо, що за критерієм Колмогорова гіпотеза H_0 приймається. Тобто можна вважати, що дана вибірка є вибіркою з нормальним розподілом з параметрами (0; 1).

ДОДАТКИ

1. Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3710	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3156	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0981	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Закінчення дод. 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2. Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,51	0,1950	1,02	0,3461	1,53	0,4370
0,01	0,0040	0,52	0,1985	1,03	0,3485	1,54	0,4382
0,02	0,0080	0,53	0,2019	1,04	0,3508	1,55	0,4394
0,03	0,0120	0,54	0,2054	1,05	0,3531	1,56	0,4406
0,04	0,0160	0,55	0,2088	1,06	0,3554	1,57	0,4418
0,05	0,0199	0,56	0,2123	1,07	0,3577	1,58	0,4429
0,06	0,0239	0,57	0,2157	1,08	0,3599	1,59	0,4441
0,07	0,0279	0,58	0,2190	1,09	0,3621	1,60	0,4452
0,08	0,0319	0,59	0,2224	1,10	0,3643	1,61	0,4463
0,09	0,0359	0,60	0,2257	1,11	0,3665	1,62	0,4474
0,10	0,0398	0,61	0,2291	1,12	0,3686	1,63	0,4484
0,11	0,0438	0,62	0,2324	1,13	0,3708	1,64	0,4495
0,12	0,0478	0,63	0,2357	1,14	0,3729	1,65	0,4505
0,13	0,0517	0,64	0,2389	1,15	0,3749	1,66	0,4515
0,14	0,0557	0,65	0,2422	1,16	0,3770	1,67	0,4525
0,15	0,0596	0,66	0,2454	1,17	0,3790	1,68	0,4535
0,16	0,0636	0,67	0,2486	1,18	0,3810	1,69	0,4545
0,17	0,0675	0,68	0,2517	1,19	0,3830	1,70	0,4554
0,18	0,0714	0,69	0,2549	1,20	0,3849	1,71	0,4564
0,19	0,0753	0,70	0,2580	1,21	0,3869	1,72	0,4573
0,20	0,0793	0,71	0,2611	1,22	0,3883	1,73	0,4582
0,21	0,0832	0,72	0,3642	1,23	0,3907	1,74	0,4591
0,22	0,0871	0,73	0,2673	1,24	0,3925	1,75	0,4599
0,23	0,0910	0,74	0,2703	1,25	0,3944	1,76	0,4608

Закінчення дод. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,24	0,0948	0,75	0,2734	1,26	0,3962	1,77	0,4616
0,25	0,0987	0,76	0,2764	1,27	0,3980	1,78	0,4625
0,26	0,1026	0,77	0,2794	1,28	0,3997	1,79	0,4633
0,27	0,1064	0,78	0,2823	1,29	0,4015	1,80	0,4641
0,28	0,1103	0,79	0,2852	1,30	0,4032	1,81	0,4649
0,29	0,1141	0,80	0,2881	1,31	0,4049	1,82	0,4656
0,30	0,1179	0,81	0,2910	1,32	0,4066	1,83	0,4664
0,31	0,1217	0,82	0,2939	1,33	0,4082	1,84	0,4671
0,32	0,1255	0,83	0,2967	1,34	0,4099	1,85	0,4678
0,33	0,1293	0,84	0,2995	1,35	0,4115	1,86	0,4686
0,34	0,1331	0,85	0,3023	1,36	0,4134	1,87	0,4693
0,35	0,1368	0,86	0,3051	1,37	0,4147	1,88	0,4699
0,36	0,1406	0,87	0,3078	1,38	0,4162	1,89	0,4706
0,37	0,1443	0,88	0,3106	1,39	0,4177	1,90	0,4713
0,38	0,1480	0,89	0,3133	1,40	0,4192	1,91	0,4719
0,39	0,1517	0,90	0,3159	1,41	0,4207	1,92	0,4726
0,40	0,1554	0,91	0,3186	1,42	0,4222	1,93	0,4732
0,41	0,1591	0,92	0,3212	1,43	0,4236	1,94	0,4738
0,42	0,1628	0,93	0,3238	1,44	0,4251	1,95	0,4744
0,43	0,1664	0,94	0,3264	1,45	0,4265	1,96	0,4750
0,44	0,1700	0,95	0,3289	1,46	0,4279	1,97	0,4756
0,45	0,1736	0,96	0,3315	1,47	0,4292	1,98	0,4761
0,46	0,1772	0,97	0,3340	1,48	0,4306	1,99	0,4767
0,47	0,1808	0,98	0,3365	1,49	0,4319	2,00	0,4772
0,48	0,1844	0,99	0,3389	1,50	0,4332	2,02	0,4783
0,49	0,1879	1,00	0,3413	1,51	0,4245	2,04	0,4793
0,50	0,1915	1,01	0,3438	1,52	0,4357	2,06	0,4803
2,08	0,4812	2,36	0,4909	2,64	0,4959	2,90	0,4981
2,10	0,4821	2,38	0,4913	2,66	0,4961	2,92	0,4982
2,12	0,4830	2,40	0,4918	2,68	0,4963	2,94	0,4984
2,14	0,4838	2,42	0,4922	2,70	0,4965	2,96	0,4985
2,16	0,4846	2,44	0,4927	2,72	0,4967	2,98	0,4986
2,18	0,4854	2,46	0,4931	2,74	0,4969	3,00	0,498 65
2,20	0,4861	2,48	0,4934	2,76	0,4971	3,20	0,499 31
2,22	0,4868	2,50	0,4938	2,78	0,4973	3,40	0,499 66
2,24	0,4875	2,52	0,4941	2,80	0,4974	3,60	0,499 841
2,26	0,4881	2,54	0,4945	2,82	0,4976	3,80	0,499 928
2,28	0,4887	2,56	0,4948	2,84	0,4977	4,00	0,499 968
2,30	0,4893	2,58	0,4951	2,86	0,4979	4,50	0,499 997
2,32	0,4898	2,60	0,4953	2,88	0,4980	5,00	0,499 997
2,34	0,4904	2,62	0,4956				

3. Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61
6	2,57	4,03	6,86
7	2,45	3,71	5,96
8	2,37	3,50	5,41
9	2,31	3,36	5,04
10	2,26	3,25	4,78
11	2,23	3,17	4,59
12	2,20	3,11	4,44
13	2,18	3,06	4,32
14	2,16	3,01	4,22
15	2,15	2,98	4,14
16	2,13	2,95	4,07
17	2,12	2,92	4,02
18	2,11	2,90	3,97
19	2,10	2,88	3,92
20	2,093	2,861	3,883
25	2,064	2,797	3,745
30	2,045	2,756	3,659
35	2,032	2,720	3,600
40	2,023	2,708	3,558
45	2,016	2,692	3,527
50	2,008	2,679	3,502
60	2,001	2,662	3,464
70	1,996	2,649	3,439
80	1,001	2, 640	3,418
90	1,987	2,633	3,403
100	1,984	2,627	3,392
120	1,980	2,617	3,374
∞	1,960	2,576	3,291

4. Значення $q_\gamma = q(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,211
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

5. Критичні точки розподілу $\chi^2_{\alpha;r}$ (критерій χ^2)

Число ступенів вільності r	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,000 98	0,000 16
2	9,2	7,4	6,0	0,102	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	0,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

6. Значення функції $p_k(\lambda)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (розподіл Пуассона)

k	λ				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,904 84	0,818 73	0,740 82	0,670 32	0,606 53
1	0,090 48	0,163 75	0,222 25	0,268 13	0,303 27
2	0,004 52	0,016 38	0,033 34	0,053 63	0,075 82
3	0,000 15	0,001 09	0,033 33	0,007 15	0,012 64
4		0,000 06	0,000 25	0,000 72	0,001 58
5			0,000 02	0,000 06	0,000 16
6					0,000 01

Продовження дод. 6

k	λ			
	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,548 81	0,496 59	0,449 33	0,406 57
1	0,329 29	0,347 61	0,359 46	0,365 91
2	0,987 9	0,121 66	0,143 79	0,164 66
3	0,019 76	0,028 39	0,038 34	0,049 40
4	0,002 96	0,004 97	0,007 67	0,011 12
5	0,000 36	0,000 70	0,001 23	0,002 00
6	0,000 04	0,000 08	0,000 16	0,000 30
7		0,000 01	0,000 02	0,000 04

Закінчення дод. 6

k	λ				
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,367 88	0,135 34	0,049 79	0,018 32	0,006 74
1	0,367 88	0,270 67	0,149 36	0,073 26	0,033 69
2	0,183 94	0,270 37	0,224 04	0,146 53	0,084 22
3	0,061 31	0,180 45	0,224 04	0,195 37	0,140 37
4	0,015 33	0,090 22	0,168 03	0,195 37	0,175 47
5	0,003 07	0,036 09	0,100 82	0,156 29	0,175 47
6	0,000 51	0,012 03	0,050 41	0,104 19	0,146 22
7	0,000 07	0,003 44	0,021 60	0,059 54	0,104 45
8	0,000 01	0,000 86	0,008 10	0,029 77	0,065 28
9		0,000 19	0,002 70	0,013 23	0,036 27
10		0,000 04	0,000 81	0,005 29	0,018 13
11		0,000 01	0,000 22	0,001 93	0,008 24
12			0,000 06	0,000 64	0,003 43
13			0,000 01	0,000 20	0,001 32
14				0,000 06	0,000 47
15				0,000 02	0,000 16
16					0,000 05
17					0,000 01

7. Значення $\varepsilon_{\alpha; n}$ (критерій Колмогорова)

n	α			n	α		
	0,05	0,02	0,01		0,05	0,02	0,01
1	0,975 00	0,990 00	0,995 00	25	0,264 04	0,295 16	0,316 57
2	841 89	900 00	929 29	30	241 70	270 23	289 87
3	707 60	784 56	829 00	35	224 25	250 73	268 97
4	623 94	688 87	734 24	40	210 12	234 94	252 05
5	563 28	627 18	668 53	45	198 37	221 81	237 98
6	0,519 26	0,577 41	0,616 61	50	0,188 41	0,210 68	0,226 04
7	483 42	538 44	575 81	55	179 81	201 07	215 74
8	454 27	506 54	541 79	60	172 37	192 67	206 73
9	430 01	479 60	513 32	65	165 67	135 25	198 79
10	409 25	456 62	488 93	70	159 75	178 63	191 67
11	0,391 22	0,437 60	0,467 70	75	0,154 49	0,172 68	0,185 28
12	375 43	419 18	449 05	80	149 60	167 28	179 49
13	361 43	403 62	432 47	85	145 20	162 36	174 21
14	348 90	389 70	417 62	90	141 17	157 86	169 38
15	337 60	377 13	404 20	95	137 46	153 71	164 93
20	294 08	328 66	352 41	100	134 03	149 87	160 81

Примітка. При $n > 100$ слід користуватись асимптотичними межами $\varepsilon_{0,05;\, n} = \dfrac{1,36}{\sqrt{n}}$; $\varepsilon_{0,01;\, n} = \dfrac{1,63}{\sqrt{n}}$.

8. Критичні значення функції λ_α для розподілу Колмогорова

α	λ_α	α	λ_α
0,00	1,0000	0,90	0,3927
0,05	1,0000	0,95	3275
0,10	1,0000	1,00	2700
0,15	1,0000	1,10	1777
0,20	1,0000	1,20	1122
0,25	1,0000	1,30	0681
0,30	1,0000	1,40	0397
0,35	0,9997	1,50	0222
0,40	0,9972	1,60	0120
0,45	0,9874	1,70	0,0062
0,50	9639	1,80	0032
0,55	9228	1,90	0015
0,60	8643	2,00	0007
0,65	7920	2,10	0003
0,70	7112	2,20	0001
0,75	6272	2,30	0,0001
0,80	5441	2,40	0,0000
0,85	4653	2,50	0,0000

ЗМІСТ

Навчальне видання

КУЛІНІЧ Григорій Логвинович
ТАРАН Євген Юрійович
БУРИМ Володимир Михайлович
та ін.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

У двох книгах

Книга 2

Спеціальні розділи

Художнє оформлення *О. Г. Григора*
Художній редактор *Т. О. Щур*
Технічний редактор *Л. І. Швець*
Коректори *А. І. Бараз, Л. Ф. Іванова*

Підп. до друку 13.10.03. Формат 60 × 84/16. Папір офс. № 1. Гарнітура Таймс.
Офсетний друк. Умов.-друк. арк. 21,39. Умов. фарбовідб. 21,85.
Обл.-вид. арк. 21,00. Тираж 5000 пр. Вид. № 4063. Зам. № 3-433.

Оригінал-макет виготовлено інженером-програмістом *О. В. Кузьменком*
та оператором *А. В. Гуторовою*

Видавництво «Либідь»
01004, Київ, Пушкінська, 32

Свідоцтво про державну реєстрацію
№ 404 від 06.04.2001

Віддруковано на ВАТ "Білоцерківська книжкова фабрика",
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.