

621.3.01(075)
K95
Міністерство освіти України
Вінницький державний технічний університет

М.О. Куцевол

Основи теорії електричних сигналів

Вінниця ВДТУ 1998

Міністерство освіти України

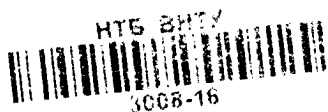
3008-16

Вінницький державний технічний університет

М.О. Куцевол

Основи теорії електричних сигналів

Затверджено Ученою радою Вінницького державного
технічного університету як навчальний посібник для студентів
бакалаврських напрямків 6.0910 та 6.0502



621.3 41(075) К 45

1998

Куцевол М.О. Основи теорії електричних сигналів



Вінниця ВДТУ 1998

УДК 621.3.011.7.

Основи теорії електричних сигналів: Навч. посібник/М.О.Куцевол. – В.: ВДТУ, 1998. - 75 с. Укр. мовою./

В навчальному посібнику приведені основні положення загальної теорії сигналів, що включають поняття про найбільш розповсюджені сигнали, спектральний аналіз як періодичних, так і неперіодичних сигналів з застосуванням перетворення Фур'є і Лапласа. Розглянуті основні характеристики випадкових сигналів. Теоретичні положення проілюстровані аналізом конкретних сигналів.

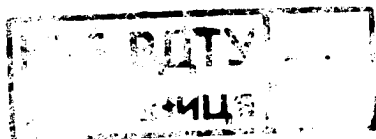
Посібник призначений для студентів бакалаврських напрямків 6.0910 та 6.0502 .

Лл. 49 , Бібліограф. – 4 назв.

Рецензенти: С.М.Злепко, д-р техн. наук, професор

В.П.Кожем'яко, д-р техн. наук, професор

Ю.В.Крушевський, канд. техн. наук, доцент



Вступ

Термін “сигнал” часто зустрічається не тільки в науково-технічних питаннях, але і в повсякденному житті. Інколи, не задумуючись про суворість термінології, ми ототожнюємо такі поняття як сигнал, повідомлення, інформація. Це не призводить до непорозумінь, оскільки слово “сигнал” походить від латинського терміна “*signum*” – “знак”, що має широкий смисловий діапазон.

Однаке, починаючи вивчати цикл спеціальних предметів радіотехнічного профілю, необхідно уточнити, що саме мається на увазі під терміном “сигнал”.

Сигналом називають змінну в часі фізичну величину $s(t)$, що відображає повідомлення, яке передається, або інформацію про стан досліджуваного об'єкта.

Можна сказати, що електричний сигнал – це фізичний процес, що несе в собі інформацію. Таким фізичним процесом може бути електричний струм або електромагнітні хвилі. Якщо говорити про передачу інформації, то слід пам'ятати, що сигнал розповсюджується від передавача до приймача радіоканалу зв'язку у вигляді електромагнітних хвиль, а потім передається електричними колами у вигляді електричних струмів (електричних напруг). В даному навчальному посібнику розглядається передача сигналів у вигляді електричних струмів (електричних напруг) лінійними електричними колами.

Кількість інформації, що може бути передана за допомогою деякого сигналу, залежить від основних його параметрів: тривалості, смуги частот, потужності та деяких інших характеристик. Окрім цього, важливе значення має також рівень завад в каналі зв'язку: чим менший цей рівень, тим більша кількість інформації може бути передана при заданій потужності сигналу.

1. Опис сигналів за допомогою математичних моделей

Сигнали як фізичні процеси можна вивчати за допомогою різноманітних приладів – вольтметрів, електронних осцилографів та ін. Недоліком такого вивчення є те, що дослідник спостерігає окремий випадок фізичного процесу, і тому йому важко узагальнити досліджуване явище чи процес.

Щоб зробити сигнали об'єктами теоретичного вивчення, необхідно вказати спосіб їх математичного опису, інакше кажучи, створити математичну модель досліджуваного сигналу.

Математичною моделлю сигналу може бути, наприклад, функціональна залежність, аргументом якої є час. Як правило, такі математичні моделі сигналів позначаються символами латинського алфавіту $s(t)$, $u(t)$, $f(t)$ та ін.

Створення моделі сигналу – перший суттєвий крок на шляху систематичного вивчення властивостей явища. Насамперед, математична модель дозволяє абстрагуватись від конкретної природи носія сигналу. В теорії електричних кіл та радіотехніці одна і та ж математична модель з однаковим успіхом описує струм, напругу, напруженість електромагнітного поля та ін.

Суттєва сторона абстрактного методу, що базується на понятті математичної моделі, полягає в тому, що ми одержуємо можливість описувати саме ті властивості сигналів, які об'єктивно виступають як найважливіші. При цьому відкидаються всі другорядні ознаки і дослідник вибирає із наявного арсеналу математичних моделей сигналу ті, які в даній конкретній ситуації найкращим і найбільш простим чином описують фізичний процес.

Функції, що описують сигнали, можуть приймати як дійсне, так і комплексне значення. Тому при аналізі можна говорити про дійсні і комплексні значення сигналів. Використання того чи іншого сигналу обумовлюється зручністю аналізу.

2. Класифікація сигналів

Починаючи вивчення яких-небудь нових об'єктів чи явищ, завжди намагаються провести їх попередню класифікацію. Те ж саме зробимо стосовно сигналів. Основна мета – вироблення критеріїв класифікації, а також, що дуже важливо для наступного вивчення матеріалу, встановлення певної термінології.

Типовим для теорії електричних кіл сигналом є напруга на полюсах якого-небудь кола або струм в гілці. Такий сигнал, що описується даною функцією часу, називають одномірним. Частіше всього ми матимемо справу з одномірними сигналами. Однак інколи необхідно мати справу з багатомірними сигналами

$$s(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)\},$$

що утворені деякою множиною одномірних сигналів. Ціле число N називають розмірністю такого сигналу. Серед великої кількості різноманітних сигналів розрізняють детерміновані та випадкові сигнали.

Детермінованим називають сигнал, параметри і миттєве значення якого в будь-який момент часу можуть бути передбачені з ймовірністю, що дорівнює одиниці.

Детерміновані сигнали можуть бути поділені на періодичні і неперіодичні.

1) Періодичним називають сигнал, для якого виконується умова

$$s(t) = s(t + kT), \quad (1)$$

де T - період,

k - будь-яке ціле число.

Найпростішим ідеальним періодичним детермінованим сигналом є гармонічне коливання (струм, заряд, напруга, напруженість поля), що визначається законом

$$s(t) = S_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \psi\right) = S_m \cos(\Omega t - \psi), \quad (2)$$

при $-\infty < t < +\infty$.

У виразі (2) S_m , T , Ω , ψ - постійні амплітуда, період, кутова частота та початкова фаза коливання.

Реальним періодичним гармонічним коливанням можна вважати таке, що існує протягом тривалого часу.

2) Неперіодичним детермінованим сигналом називають будь-який детермінований сигнал, для якого не виконується умова (1). Як правило, неперіодичний сигнал обмежений в часі. Прикладом таких сигналів можуть бути імпульси, серії імпульсів, "урибки" гармонічних коливань та ін. Неперіодичні сигнали – це реальні сигнали, що нас оточують, і тому їх вивчення є особливо цікавим.

До випадкових сигналів відносять функції часу, параметри і миттєве значення яких наперед невідомі і можуть бути передбачені з деякою ймовірністю, що менша одиниці. Такими функціями є, наприклад, електрична напруга, що відповідає мові чи музиці, послідовність знаків телеграфного коду при передачі тексту, який не повторюється. Очевидно, що будь-який сигнал, який несе в собі інформацію, повинен розглядатись як випадковий. Для характеристики і аналізу випадкових сигналів використовується статистичний підхід. Основними характеристиками випадкових сигналів є: а) закон розподілу ймовірностей, б) спектральний розподіл потужності сигналу. На підставі першої характеристики можна знайти відносний час перебування значення сигналу у визначеному інтервалі рівнів, відношення максимальних значень до

середньоквадратичного та ряд інших важливих параметрів сигналу. Друга характеристика дає лиш розподіл за частотами середньої потужності сигналу.

Разом з корисними випадковими сигналами в теорії та на практиці доводиться мати справу з випадковими завадами – “шумами”.

Дуже важливий для радіоелектроніки в цілому і для радіоапаратобудування зокрема клас сигналів – це імпульсні сигнали, тобто коливання, що існують лиш в межах кінцевого відрізка часу.

Серед імпульсів розрізняють відеоімпульси (рис.1а) і радіоімпульси (рис.1б). Різниця між цими двома основними видами імпульсів міститься в наступному. Якщо $u_g(t)$ - відеоімпульс, то відповідний йому радіоімпульс $u_p(t) = u_g(t) \cos(\omega t + \psi)$. При цьому функція $u_g(t)$ називається обгинаючою радіоімпульсу, а функція $\cos(\omega t + \psi)$ - його заповненням.

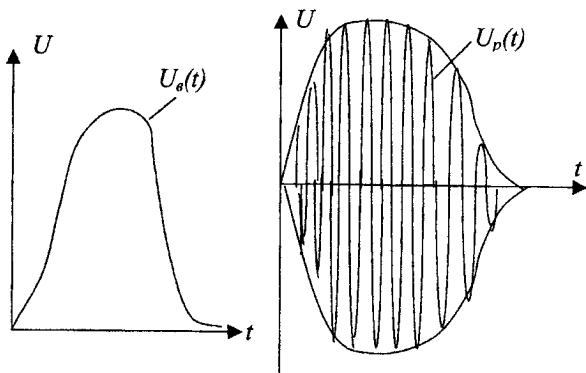
В технічних розрахунках замість повної математичної моделі імпульсу часто використовують числові параметри, що дають спрощене уявлення про його форму. Так, для реального прямокутного відеоімпульсу, що за формою наближається до трапеції (Рис. 1, в), визначають його амплітуду U_m , спадання вершини імпульсу ΔU , тривалість імпульсу t_i , тривалість фронту t_ϕ та тривалість зрізу t_z . Тривалість фронту умовились оцінювати її активним значенням $t_{\phi a}$, що дорівнює часові збільшення сигналу від 0,1 до 0,9 його максимального значення U_m , тобто

$$t_{\phi a} = t_{\phi 0,9} - t_{\phi 0,1},$$

де $t_{\phi 0,1}$ і $t_{\phi 0,9}$ - моменти часу, в які рівень сигналу досягає $0,1U_m$ і $0,9U_m$.

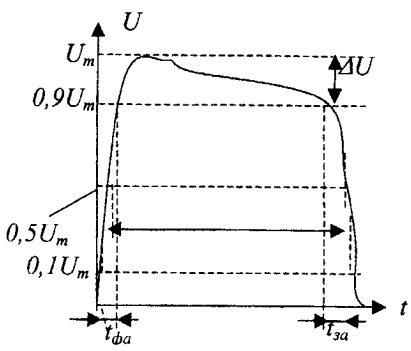
Таким же чином визначається активна тривалість зрізу

$$t_{za} = t_{z0,9} - t_{z0,1}.$$



а)

б)



в)

Рис. 1.

Тривалість імпульсу визначають на деякому рівні, що відрізняється від нуля. Здебільшого цей рівень визначають значенням $0,5U_m$. Визначена таким чином тривалість називається активною і позначається t_{ia} .

Для періодичної послідовності відеоімпульсів (рис. 2) визначають додаткові параметри: період T та шпаруватість $\Theta = \frac{T}{t_i}$.

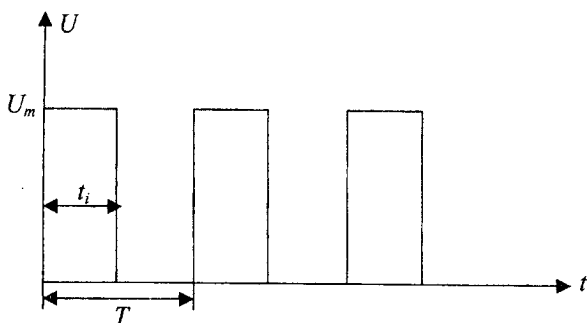


Рис. 2.

Часто фізичний процес, що породжує сигнал, розвивається в часі таким чином, що значення сигналу можна вимірювати в будь-які моменти часу. Сигнали такого класу називають аналоговими (континуальними). Термін “аналоговий сигнал” підкреслює, що такий сигнал “аналогічний”, повністю подібний відповідному фізичному процесу.

З часом вирости вимоги до радіоелектронних систем і це примусило шукати нові принципи їх побудови. На зміну аналоговим в деяких випадках прийшли імпульсні системи, робота яких базується на використанні дискретних сигналів. Найпростіша математична модель дискретного сигналу

$$S_d(\psi) = \{S_i\}$$

є кінцевою множиною точок $\{t_i\}$ (i - ціле число) на осі часу, в кожній з яких визначено значення сигналу S_i (рис. 3).

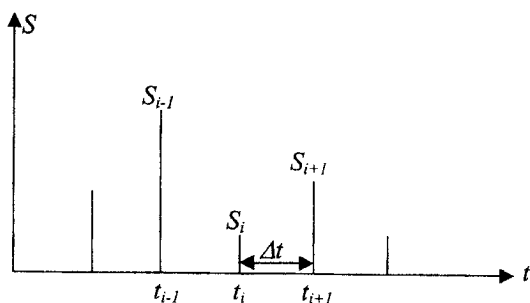


Рис. 3.

Як правило, інтервал дискретизації $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ для кожного сигналу постійний. Одна з переваг дискретних сигналів порівняно з аналоговими – відсутність необхідності відтворювати сигнал безперервно в усі моменти часу. За рахунок цього з'являється можливість по одній і тій же лінії зв'язку передавати повідомлення від різних джерел, розділяючи канали зв'язку в часі.

Особливим різновидом дискретних сигналів є цифрові сигнали. Для них характерним є те, що відлікові значення сигналу в моменти t_i подаються в формі двійкових чисел (рис. 4).

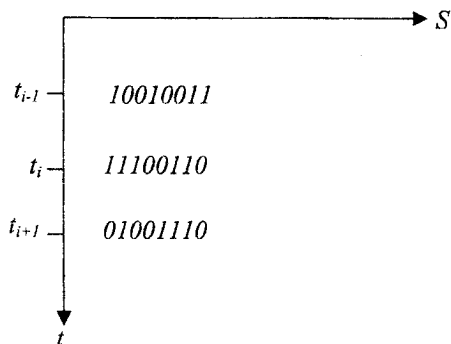


Рис. 4.

Канали зв'язку з цифровими сигналами мають високу швидкодію та завадостійкість.

Необхідно мати на увазі, що будь-якому дискретному або цифровому сигналові може відповідати аналоговий сигнал і навпаки. Так, аналоговому сигналу $S_A(t)$ можна співставити дискретний образ $S_D(t)$, що має вигляд послідовності прямокутних відеоімпульсів однакової тривалості, висота яких пропорційна значенням $S_A(t)$ у відлікових точках (рис. 5, а). Однак можна учинити інакше. Зберігаючи висоту імпульсів постійною, але змінюючи їх тривалість у відповідності з біжучим відліковим значенням (рис. 5, б)

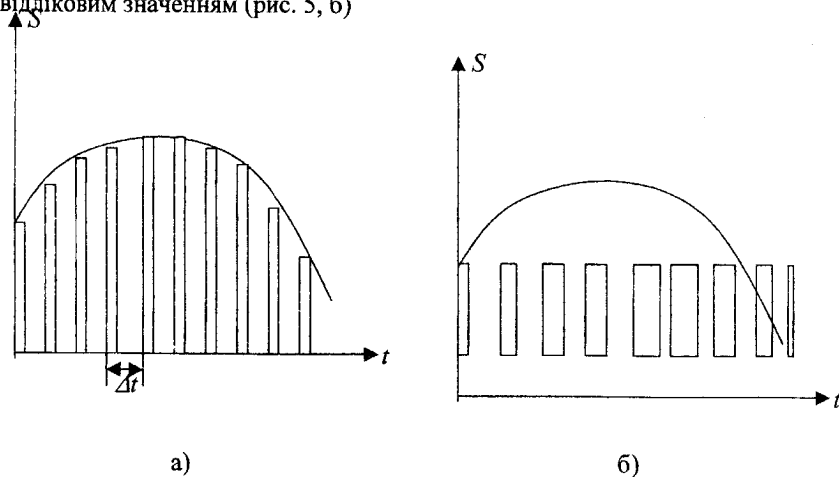


Рис. 5.

3. Гармонічні коливання

Найбільш поширеними видами періодичного процесу в електричних колах є синусоїдний та косинусоїдний режими, які характерні тим, що діючі напруги та струми – синусоїдні та косинусоїдні функції часу.

Коливання, виражені цими функціями, називаються гармонічними.

Розглянемо графіки гармонічних коливань (рис. 6).

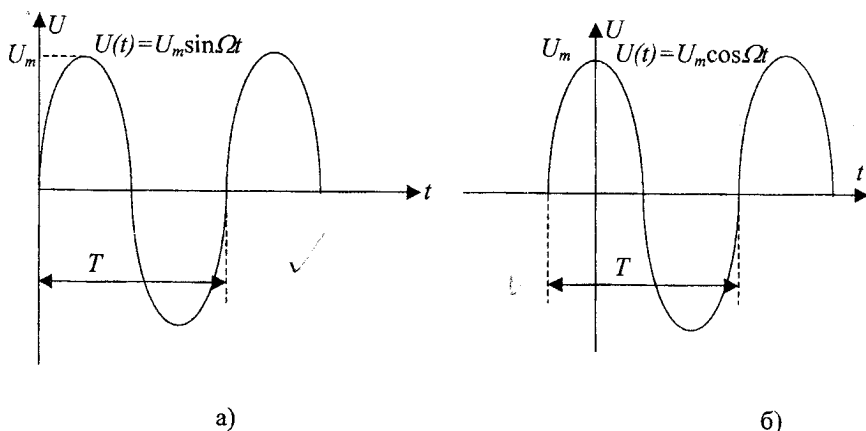


Рис. 6

1) Гармонічні коливання є періодичними коливаннями і мають такі параметри: амплітуду U_m , кутову частоту Ω та біжучу фазу ϕ_0 . Кутова частота знаходиться з виразу

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T},$$

де f - частота, T - період.

Біжуча фаза є добутком кутової частоти і часу

$$\phi = \Omega t + \phi_0$$

В загальному випадку коливання можуть бути зміщені відносно початку координат (рис. 7).

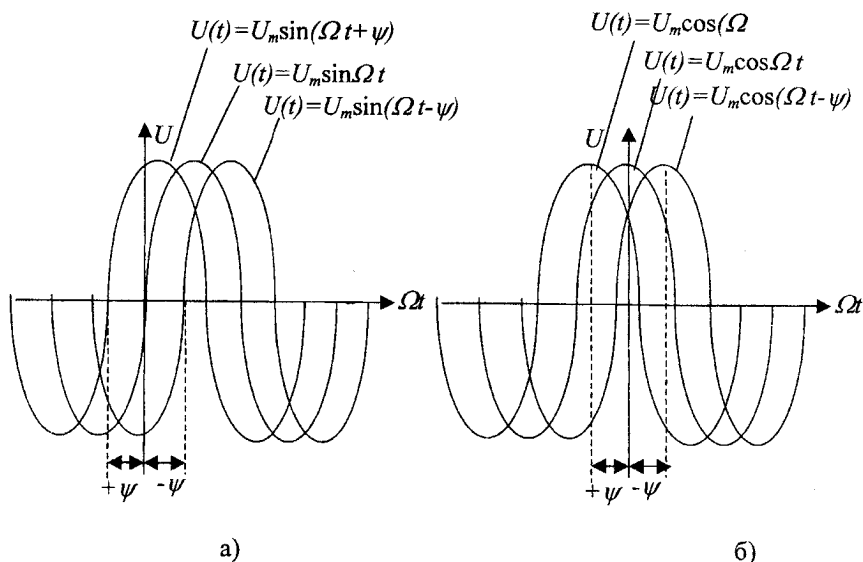


Рис. 7

В цьому випадку біжуча фаза коливання доповнюється початковою фазою ψ

$$\begin{aligned}
 U(t) &= U_m \sin(\Omega t \pm \psi), \\
 U(t) &= U_m \cos(\Omega t \pm \psi).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Початкова фаза визначає зсув гармонічного коливання по осі частот. Як видно з рис. 7, додатна початкова фаза означає зсув коливання вліво по осі частот. При від'ємній початковій фазі коливання зміщується по осі частот вправо.

Аргументом функцій (3) може бути час t , або кут Ωt . В першому випадку період позначається T і вимірюється секундами, в другому - $\Omega T = 2\pi$.

4. Середнє та діюче значення періодичного сигналу

Середнє значення періодичного сигналу $s(t)$ за період T визначається за формулою

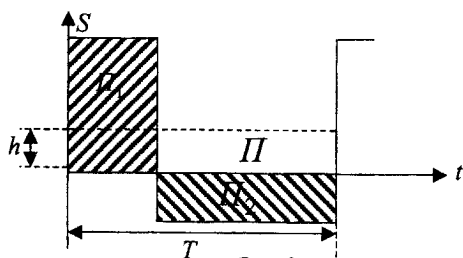


Рис.8

$$S_c = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt \quad (4)$$

і чисельно дорівнює висоті прямокутника з основою T і площею $\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$.

У випадку гармонічного коливання

середнє значення за період $S_c = 0$, тому що сумарна площа додатної і від'ємної напівхвиль дорівнює нулю.

В цьому випадку користуються поняттям середнього напівперіодного значення сигналу. Згідно з цим середнє напівперіодне значення гармонічного струму

$$i(t) = I_m \cos \Omega t$$

дорівнюватиме:

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} I_m \cos \Omega t dt = \frac{2I_m}{\Omega T} \sin \Omega t \bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{2I_m}{\frac{T}{4}} \sin \frac{2\pi}{T} t \bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \\ &= \frac{I_m}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi T}{T} \frac{1}{4} - \sin \left(-\frac{2\pi T}{T} \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{I_m}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{2I_m}{\pi} \end{aligned}$$

Таким же чином одержуємо для гармонічної напруги:

$$U_c = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} U_m \cos \Omega t dt = \frac{2U_m}{\pi}. \quad (5)$$

Теплова дія струму, а також взаємодія двох провідників, по яких проходить один і той же струм, пропорційні квадрату струму. Тому в багатьох випадках про силу струму судять по так званому діючому (середньоквадратичному) значенню за період.

Діюче значення сигналу обчислюється за такою формулою:

$$S_\partial = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}, \quad (6)$$

Згідно з цим, діючі значення гармонічного струму та напруги дорівнюють:

$$I_\partial = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} I_m^2 \cos^2 \Omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m, \quad (7)$$

$$U_\partial = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_m^2 \cos^2 \Omega t dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m, \quad (8)$$

5. Уявлення гармонічних коливань у вигляді проекцій векторів, що обертаються

Миттєве значення функції

$$s(t) = S_m \cos \Omega t$$

можна одержати як проекцію на вісь ординат відрізка довжиною S_m , що обертається відносно початку прямокутної системи координат з кутовою швидкістю Ω і позитивним напрямом проти руху годинникової стрілки. Відрізок, що обертається, умовно називають вектором.

Нехай в момент часу $t = 0$ вектор збігається з віссю ординат (рис. 9) і його проекція дорівнює S_m . В момент t_1 вектор утворює з віссю ординат кут $\alpha_1 = \Omega t_1$ і його проекція на вертикальну вісь

$$s(t_1) = S_m \cos \Omega t_1.$$

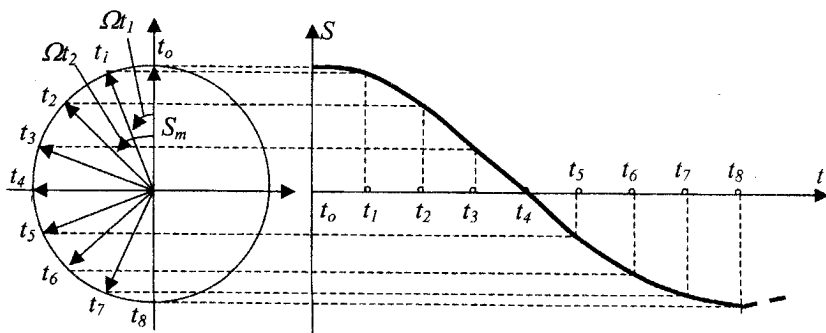


Рис. 9

За час t_2 вектор повертається на кут $\alpha_2 = \Omega t_2$ і його проекція на вісь ординат

$$s(t_2) = S_m \cos \Omega t_2.$$

Таким чином миттєві проекції утворюють гармонічну функцію

$$s(t) = S_m \cos \Omega t \quad (9)$$

Нехай в момент часу $t = 0$ рухомий вектор збігається з віссю абсцис (рис. 10) і його проекція $s(t_0) = 0$. В момент часу t_1 вектор утворює з віссю абсцис кут $\alpha_1 = \Omega t_1$, а його проекція на вісь ординат дорівнює

$$s(t_1) = S_m \sin \Omega t_1.$$

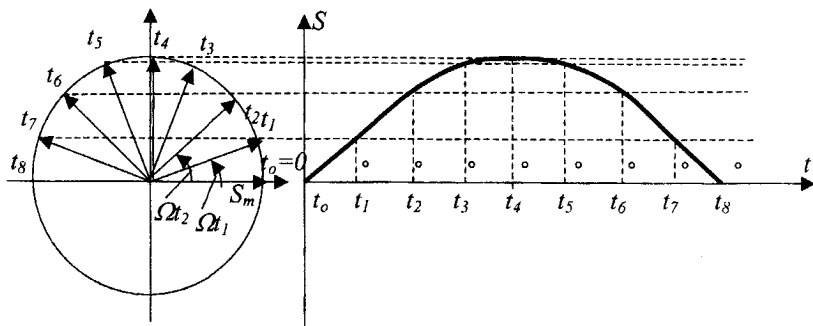


Рис. 10

Як і в попередньому випадку, миттєві проекції вектора утворюють гармонічну функцію часу, але цього разу вже синусоїдну

$$s(t) = S_m \sin \Omega t. \quad (10)$$

В загальному випадку при $t_0 = 0$ вектор може займати якийсь проміжне значення (рис. 11), утворюючи з віссю абсцис кут $\alpha_1 = \psi$, а віссю ординат – кут $\alpha_2 = -\beta$.

Як і в попередніх випадках, миттєві проекції вектора утворюють гармонічну функцію часу t або ж кута Ωt і її можна записати як у вигляді синусоїди

$$s(t) = S_m \sin(\Omega t + \psi), \quad (11)$$

так і у вигляді косинусоїди

$$s(t) = S_m \cos(\Omega t - \beta). \quad (12)$$

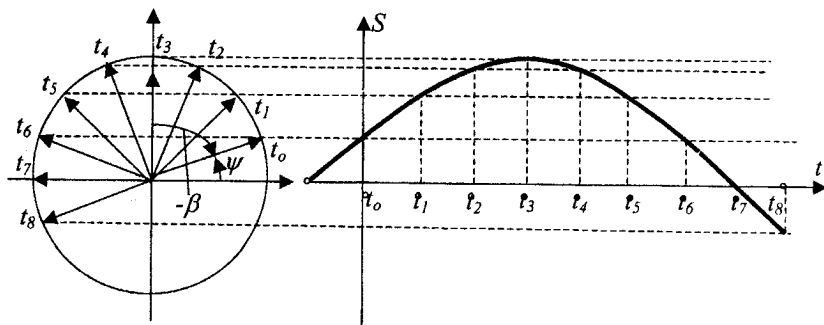


Рис. 11

Отже, гармонічне коливання (рис. 11) є синусоїдою, зсунутою вліво на кут ψ , і одночасно косинусоїдою, зсунутою вправо на кут мінус β

Якщо гармонічні коливання мають одну і ту ж частоту, то відповідні цим коливанням вектори обертаються з однаковою кутовою швидкістю і тому кут між ними зберігається незмінним.

Візьмемо дві гармонічні функції

$$s_1(t) = S_{1m} \sin(\Omega t + \psi_1) \quad \text{і}$$

$$s_2(t) = S_{2m} \sin(\Omega t - \psi_2),$$

які мають однакову кутову частоту Ω і початкові фази ψ_1 і мінус ψ_2 (рис.12).

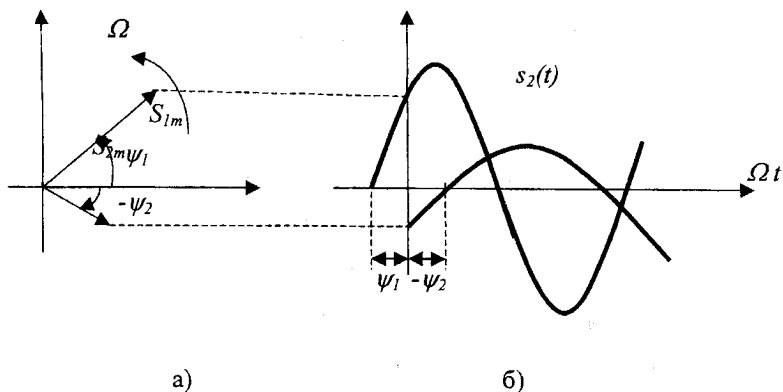


Рис. 12

З рис. 12,а видно, що коливання $s_1(t)$ випереджує $s_2(t)$ на кут

$$\phi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2. \quad (13)$$

Різниця між початковими фазами коливань ϕ називається фазовим зсувом між ними, або кутом зсуву $s_1(t)$ відносно $s_2(t)$.

Коли початкові фази коливань співпадають, то коливання називають синфазними. Якщо початкові фази відрізняються на кут $\phi = 180^\circ$, то коливання будуть протифазними.

Діаграма, що відображає сукупність векторів, побудованих із врахуванням їх взаємної фазової орієнтації, називається векторною діаграмою (рис. 12,а).

На відміну від векторної діаграми криві миттєвих значень називаються часовими діаграмами (рис. 12,б).

6. Динамічне уявлення сигналів

Більшість задач радіоелектроніки, наприклад, визначення відгуку фізичної системи на відомий вхідний вплив, вимагають специфічної форми уявлення сигналів у вигляді їх математичних моделей. При цьому реальний сигнал наближено подається сумою деяких елементарних сигналів, що виникають в послідовні моменти часу. Якщо наближати до нуля тривалість окремих елементарних сигналів, то границею такого наближення буде точне подання початкового сигналу. Такий спосіб опису сигналів називають динамічним уявленням.

Широке використання знайшли два способи динамічного уявлення. Перший передбачає використання в якості елементарних сигналів ступінчатих функцій, що виникають через рівні проміжки часу Δ (рис. 13,а). При другому способі елементарними сигналами є прямокутні імпульси. Ці імпульси безпосередньо приєднуються один до одного і утворюють послідовність, вписану в криву чи описану навколо неї (рис. 13,б).

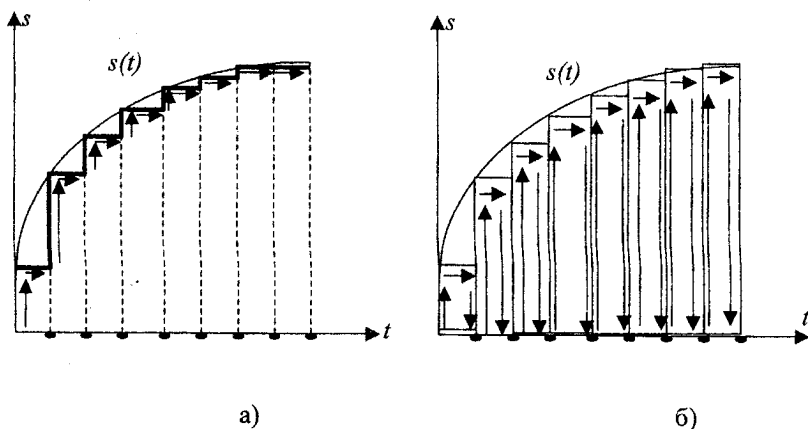


Рис. 13

Розглянемо перший спосіб динамічного уявлення.

Нехай ϵ сигнал (рис. 14), математична модель якого задана системою рівнянь

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < -\xi, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\xi} + 1 \right), & \text{при } -\xi < t < \xi, \\ 1, & \text{при } t > \xi. \end{cases}$$

Така функція описує процес переходу деякого фізичного об'єкта з "нульового" до "одичного" стану. Перехід здійснюється за лінійним

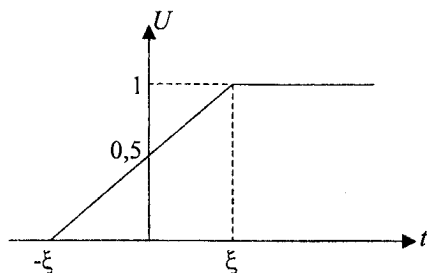


Рис. 14

законом за час 2ξ . Якщо

параметр ξ прямує до нуля, границею буде

миттєвий перехід від одного стану до іншого.

Математична модель цього

граничного сигналу

одержала назву

ступінчатої функції, функції ввімкнення, одичного стрибка або функції Хевісайда¹ (рис. 15,а).

$$\sigma(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (14)$$

В загальному вигляді функція ввімкнення може бути зсунута відносно початку відліку часу на t_0 (рис. 15, б). Запис зсунутої функції

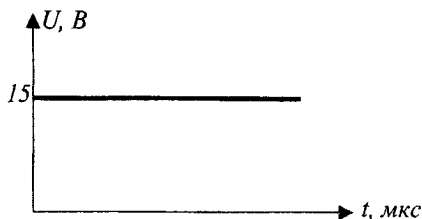
¹ Олівер Хевісайд (1850-1925) – англійський фізик.

такий:

$$\sigma(t-t_0) = 1(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{1}{2}, & t = t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases} \quad (15)$$

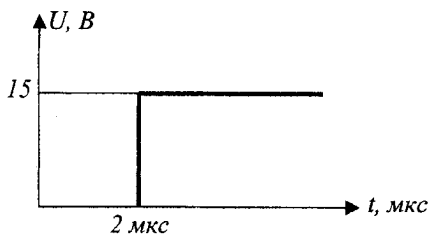
Розглянемо деякі приклади застосування функції ввімкнення для записання математичних моделей простих сигналів:

Приклад 1.



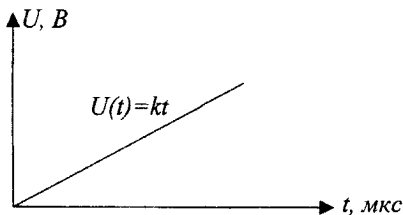
$$U_{\partial}(t) = 15\sigma(t) = 15 \cdot 1(t), \text{ В.}$$

Приклад 2.



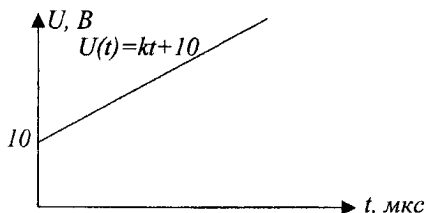
$$U_{\partial}(t) = 15\sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}) = 15 \cdot 1(t - 2 \cdot 10^{-6}), \text{ В.}$$

Приклад 3.



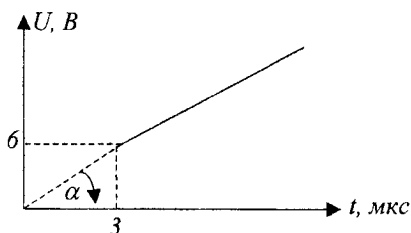
$$U_{\partial}(t) = kt \cdot \sigma(t) = kt \cdot 1(t), \text{ В.}$$

Приклад 4.



$$U_{\delta}(t) = (kt + 10) \cdot \sigma(t) = \\ = kt(kt + 10) \cdot 1(t), \text{ В.}$$

Приклад 5.

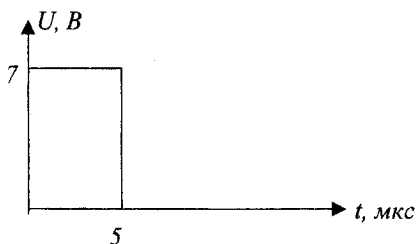


$$U(t) = kt \cdot 1(t - t_0), \text{ В}$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{6}{3 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^6$$

$$U_{\delta}(t) = 2 \cdot 10^6 t \cdot 1(t - 3 \cdot 10^{-6}), \text{ В.}$$

Приклад 6.



$$U_{\delta}(t) = [7 \cdot 1(t) - 7 \cdot 1(t - 5 \cdot 10^{-6})] = \\ = 7[1(t) - 1(t - 5 \cdot 10^{-6})] \text{ В.}$$

Проаналізувавши приведені приклади, можна зробити висновок, що наявність функції ввімкнення у виразі динамічного уявлення сигналу вказує на момент початку дії сигналу.

Розглянемо деякий сигнал $s(t)$ і для однозначності припустимо, що при $t < 0$ $s(t) = 0$. Нехай $\{\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots\}$ - послідовність моментів часу і $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$ - відповідна послідовність значень сигналу (рис.16). Якщо

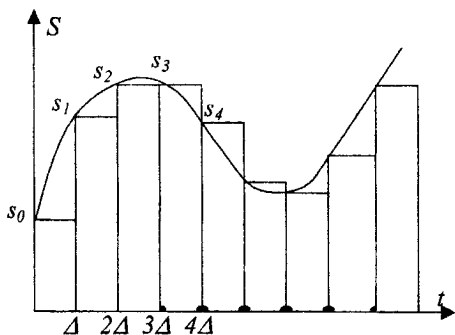


Рис. 16

s_0 - початкове значення сигналу, то його біжуче значення, як видно з рис. 16, при будь-якому значенні t приблизно дорівнює сумі функцій ввімкнення:

$$\begin{aligned}
 s_{\Delta}(t) &\approx s_0\sigma(t) + \\
 &+ (s_1 - s_0)\sigma(t - \Delta) + \\
 &+ (s_2 - s_1)\sigma(t - 2\Delta) + \dots = \\
 &= s_0\sigma(t) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta),
 \end{aligned}$$

де $k=1, 2, \dots$

Якщо тепер відрізок Δ спрямувати до нуля, то дискретну змінну $k\Delta$ можна замінити безперервною змінною τ . При цьому малі прирости перетворюються в диференціали $ds = \frac{ds}{d\tau} d\tau$, а нескінченна сума - в інтеграл і ми одержуємо формулу динамічного уявлення довільного сигналу з допомогою функції Хевісайда

$$s_{\Delta}(t) = s_0\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau. \quad (16)$$

Переходячи до другого способу динамічного уявлення сигналу, коли елементами розкладання є короткі імпульси, необхідно ввести нове важливе поняття.

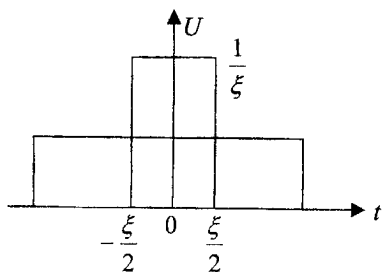


Рис.17.

Розглянемо імпульсний сигнал прямокутної форми (рис. 17), заданий таким виразом:

$$U_{\delta}(t, \xi) = \frac{1}{\xi} \left[\sigma\left(t + \frac{\xi}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\xi}{2}\right) \right] \quad (17)$$

При будь-якому виборі параметра ξ площа цього

імпульсу дорівнює одиниці.

Нехай тепер значення ξ прямує до нуля. Імпульс, скорочуючись за тривалістю, зберігає одиничну площу, тому його висота повинна необмежено зростати. Границя послідовності таких функцій при $\xi \rightarrow 0$ носить назву дельта-функції або функції Дірака:

$$\delta(t) = \lim_{\xi \rightarrow 0} u(t, \xi). \quad (18)$$

Дельта-функція – цікавий математичний об'єкт. Дорівнюючи нулю всюди, окрім точки $t=0$ (прийнято говорити, що вона зосереджена в цій точці), дельта-функція має одиничний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (19)$$

Динамічне подання сигналу з допомогою дельта-функції здійснюється за таким виразом:

$$s_{\delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (20)$$

Отже, якщо безперервну функцію помножити на дельта-функцію і добуток проінтегрувати за часом, то результат дорівнюватиме значенню безперервної функції в тій точці, де існує дельта-функція.

7. Тригонометрична форма ряду Фур'є

Одним з найбільш розповсюджених методів аналізу процесу передавання сигналів через лінійні кола є спектральний метод.

Спектральний аналіз по суті полягає в тому, що будь-яке коливання складної форми замінюється кінцевою або нескінченною сумою гармонічних коливань з відповідними амплітудами, частотами і початковими фазами. Функція часу замінюється ніби-то функцією частоти, що в багатьох випадках є бажаною дією при добре відомих частотних характеристиках електричних кіл.

Вводячи основну частоту $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ послідовності, що утворює періодичний сигнал, запишемо ряд Фур'є, за допомогою якого зручно аналізувати такий сигнал,

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t). \quad (21)$$

Коефіцієнти ряду визначаються за такими виразами:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt \quad \text{або} \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) dt \quad (22)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\Omega_1 t dt \quad (23)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\Omega_1 t dt \quad (24)$$

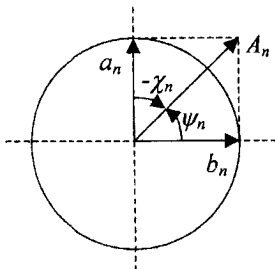
Отже, в загальному вигляді періодичний сигнал (21) має незалежну від часу постійну складову $\frac{a_0}{2}$ і нескінченний набір гармонічних коливань $\lambda_n(t)$, так званих гармонік, з частотами $\Omega_n = n\Omega_1$ ($n=1, 2, \dots, \infty$), що кратні основній частоті послідовності,

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t), \quad (25)$$

$$\lambda_n(t) = a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t - \quad (26)$$

n -та гармоніка.

Кожну гармоніку можна описати її амплітудою A_{mn} і початковою фазою, для чого зручно уявити її складові у вигляді векторів, що обертаються (рис. 18). З рис. 18 очевидно, що



$$A_{mn} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad (27)$$

$$\psi_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}, \quad -\chi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n} \quad (28)$$

Таким чином, вираз для n -ї гармоніки може бути записаний у вигляді синусоїди

$$\lambda_n(t) = A_{mn} \sin(n\Omega_1 t + \psi_n), \quad (29)$$

Рис. 18 або ж у вигляді косинусоїди

$$\lambda_n(t) = A_{mn} \cos(n\Omega_1 t - \chi_n) \quad (30)$$

Підставивши (29) та (30) в (25), одержимо іншу, еквівалентну форму ряду Фур'є:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(n\Omega_1 t + \psi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\Omega_1 t - \chi_n). \quad (31)$$

8. Симетрія сигналів

Періодичні сигнали мають, як правило, який-небудь вид симетрії і це полегшує їх розкладання в ряд Фур'є.

Розглянемо деякі види симетрії сигналів.

1. Сигнал $s(t)$ симетричний відносно осі ординат (рис. 19), тобто

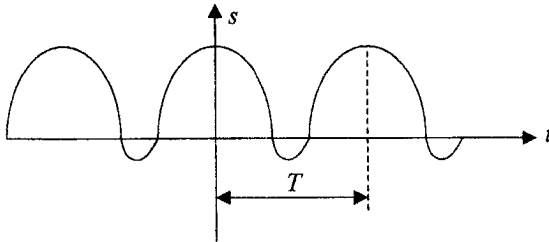


Рис. 19

$s(t) = s(-t)$. Такі сигнали називаються парними. Оскільки синусоїди будь-яких частот є непарними функціями, вони

не входять до складу ряду для даного випадку.

Для такого виду симетрії матимемо:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega_1 t. \quad (32)$$

тобто парний сигнал може мати тільки постійну складову та косинусоїди.

При визначенні коефіцієнтів ряду (32) достатньо проводити інтегрування на половині періоду

$$s(t) = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\Omega_1 t dt. \quad (33)$$

2. Сигнал симетричний відносно початку координат (рис. 20), тобто $s(t) = -s(-t)$. Такі функції називають непарними. Оскільки постійна складова і косинусоїди цій умові не відповідають, то за даного виду симетрії ряд приймає такий вигляд:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega_1 t, \quad (34)$$

тобто непарний сигнал має одні синусоїди.

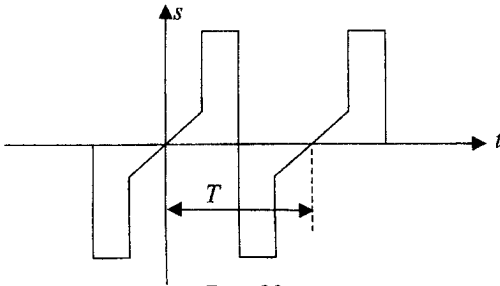


Рис. 20

В цьому випадку, як і в попередньому, для визначення коефіцієнтів ряду b_n достатньо користуватись кривою $s(t)$ за половину періоду, тобто

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\Omega_1 t dt \quad (35)$$

3. Сигнал $s(t)$ симетричний відносно осі абсцис при суміщенні двох напівперіодів в часі (рис. 21), тобто $s(t) = -s\left(t + \frac{T}{2}\right)$.

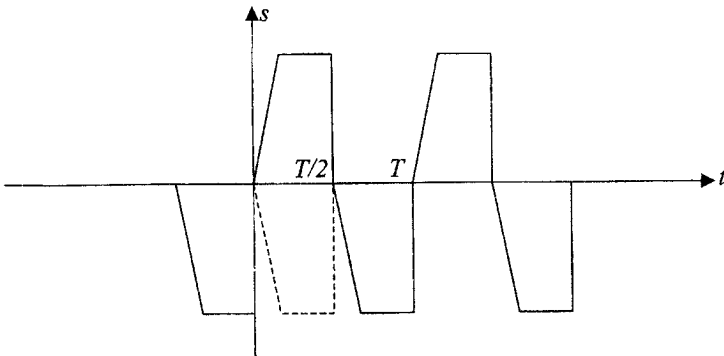


Рис. 21

Замінюючи $s(t)$ у відповідності до (21) одержуємо

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t) = -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\Omega_1 \left(t + \frac{T}{2} \right) + b_n \sin n\Omega_1 \left(t + \frac{T}{2} \right) \right],$$

Звідки для парних n

$$a_0 + 2 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t) = 0.$$

Ця умова виконується за довільних значень $\Omega_1 t$ тільки в тому разі, коли $a_0 = 0$, $a_n = b_n = 0$ при парних n .

Тому за даного виду симетрії

$$s(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t), \quad (36)$$

тобто функція, симетрична відносно осі абсцис при суміщенні двох напівперіодів в часі, має тільки непарні гармоніки.

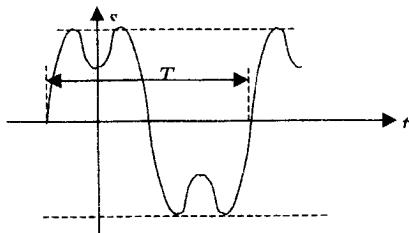


Рис. 22

3. Сигнал $s(t)$ симетричний відносно осі ординат і осі абсцис при суміщенні двох напівперіодів (рис. 22), тобто

$$s(t) = s(-t) = -s\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

В цьому випадку, у відповідності з п. 1 і 3, ряд Фур'є буде мати тільки непарні косинусоїди

$$s(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos n\Omega_1 t. \quad (37)$$

4. Сигнал $s(t)$ симетричний відносно початку координат і осі

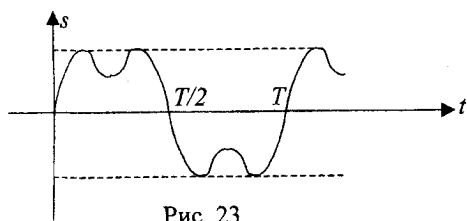


Рис. 23

абсцис при суміщенні двох напівперіодів (рис. 23), тобто

$$s(t) = -s(-t) = -s\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Якщо одночасно

виконуються умови симетрії за пунктами 2 і 3, розкладання в ряд Фур'є має тільки непарні синусоїди

$$s(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \sin n\Omega_1 t. \quad (38)$$

9. Застосування комплексних чисел до аналізу електричних сигналів і кіл

Аналіз електричних кіл гармонічного струму і сигналів (як електричних величин) в тригонометричній формі досить громіздкий і застосовується тільки для найпростіших схем. У випадку складних кіл тригонометричні розрахунки стають занадто трудомісткими. Аналіз значно спрощується, коли електричні величини подаються у вигляді комплексних чисел, що дозволяє складні інтегро-диференціальні рівняння замінювати простими алгебраїчними.

Відомо, що будь-яка точка на комплексній площині визначається радіусом-вектором цієї точки, тобто вектором, початок якого співпадає з

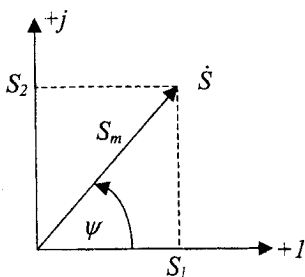


Рис. 24

початком координат, а кінець знаходиться в точці, що відповідає заданому комплексному числу (рис. 24).

Користуючись полярною (показниковою) формою запису комплексного числа, маємо:

$$S = S_m e^{j\psi} = S_m \angle \psi,$$

де S_m - модуль комплексного числа; ψ - аргумент (фаза), $j = \sqrt{-1}$.

Застосувавши формулу Ейлера, одержимо тригонометричну форму запису комплексного числа

$$\dot{S} = S_m \cos \alpha + j S_m \sin \alpha,$$

чи алгебраїчну форму

$$\dot{S} = S_1 + j S_2,$$

де

$$S_1 = S_m \cos \psi,$$

$$S_2 = S_m \sin \psi.$$

Очевидно, що

$$S_m = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}; \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{S_2}{S_1}.$$

Вектор електричної величини, що обертається в додатному напрямі, тобто проти руху годинникової стрілки, з кутовою швидкістю Ω , може бути поданий таким чином:

$$S_m e^{j(\Omega t + \psi)} = S_m e^{j\psi} e^{j\Omega t} = \dot{S}_m e^{j\Omega t}, \quad (39)$$

де $\dot{S}_m = S_m e^{j\psi} = S_m \angle \psi$ – комплексна амплітуда, що являє собою даний вектор в момент часу $t=0$ (рис. 25). Отже, комплексна амплітуда – це комплексна величина, що не залежить від часу, модуль і аргумент якої дорівнюють відповідно амплітуді і початковій фазі заданої гармонічної функції.

Множник $e^{j\Omega t}$ є оператором обертання; операція множення комплексної амплітуди \dot{S}_m на $e^{j\Omega t}$ означає обертання вектора \dot{S}_m на кут Ωt в додатному напрямі.

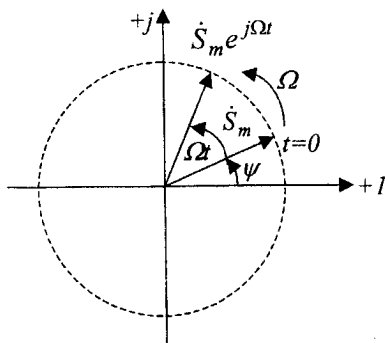


Рис. 25

Записуючи комплексну функцію (39) в тригонометричній формі

$$S_m e^{j(\Omega t + \psi)} = S_m \cos(\Omega t + \psi) + j S_m \sin(\Omega t + \psi), \quad (40)$$

робимо висновок, що гармонічна функція $S_m \cos(\Omega t + \psi)$ може розглядатись як дійсна частина

комплексної функції (40).

Умовно це записується так:

$$S_m \cos(\Omega t + \psi) = \operatorname{Re} \left\{ \dot{S}_m e^{j\Omega t} \right\}.$$

Символ Re (читається Real) означає, що береться дійсна частина комплексної функції.

За аналогією, функція $S_m \sin(\Omega t + \psi)$ може бути подана як уявна частина комплексної функції (40), взята без множника j . Умовно це записується так

$$S_m \sin(\Omega t + \psi) = \text{Im} \{ \dot{S}_m e^{j\Omega t} \},$$

де символ Im (читається Imaginer) означає, що береться уявна частина комплексної функції.

Інший спосіб подання гармонічної функції з допомогою комплексних величин базується на застосуванні формул

$$S_m \cos(\Omega t + \psi) = \frac{S_m}{2} [e^{j(\Omega t + \psi)} + e^{-j(\Omega t + \psi)}] = \frac{\dot{S}_m}{2} e^{j\Omega t} + \frac{\dot{S}_m^*}{2} e^{-j\Omega t}, \quad (41)$$

де $\dot{S}_m^* = S_m e^{-j\psi}$ - комплексно-спряжена амплітуда;

$$S_m \sin(\Omega t + \psi) = \frac{S_m}{2j} [e^{j(\Omega t + \psi)} - e^{-j(\Omega t + \psi)}] = \frac{1}{j} \left[\frac{\dot{S}_m}{2} e^{j\Omega t} - \frac{\dot{S}_m^*}{2} e^{-j\Omega t} \right], \quad (42)$$

Відповідно до (41) можна стверджувати, що функція $S_m \cos(\Omega t + \psi)$ дорівнює геометричній сумі двох комплексно-спряжених векторів, що мають модуль $\frac{S_m}{2}$ і обертаються в протилежні сторони з однаковою кутовою швидкістю Ω

В результаті додавання таких двох векторів одержуємо вектор, розміщений на дійсній осі, тобто для будь-якого моменту часу одержуємо дійсну величину (рис. 26, а).

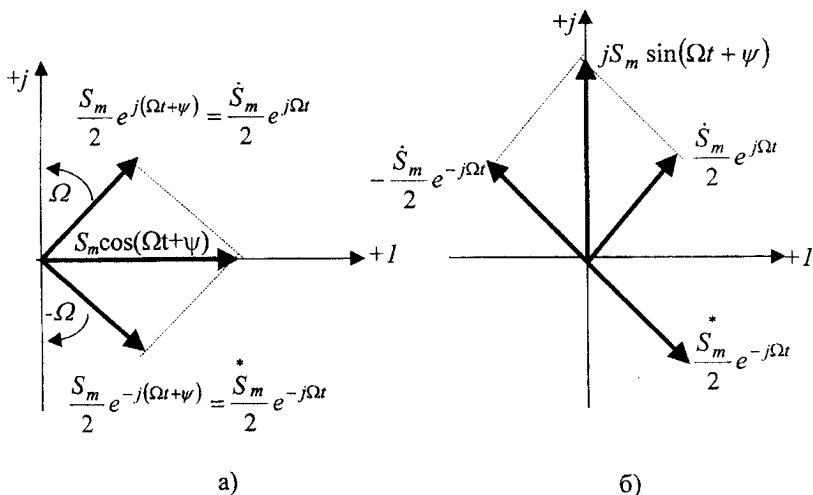


Рис. 26

Аналогічно з (42) видно, що функція $S_m \sin(\Omega t + \psi)$ дорівнює різниці тих же векторів, поділених на j . Оскільки різниця цих векторів є величиною уявною (рис. 26, б), її ділять на j , щоб одержати дійсну величину. Обертання вектора в від'ємному напрямку (за рухом годинникової стрілки) пов'язане з поняттям від'ємної кутової частоти $(-\Omega)$, що є чисто математичним поняттям, що витікає з вищенаведених формул.

10. Комплексна форма ряду Фур'є

Тригонометрична форма ряду Фур'є

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t)$$

може бути перетворена в комплексну форму таким чином.
Використовуючи формули Ейлера

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x; \quad e^{-jx} = \cos x - j \sin x$$

можемо записати

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}. \quad (43)$$

У відповідності з (43) вираз в дужках тригонометричного ряду матиме вигляд:

$$\begin{aligned} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t) &= a_n \frac{e^{jn\Omega_1 t} + e^{-jn\Omega_1 t}}{2} + b_n \frac{e^{jn\Omega_1 t} - e^{-jn\Omega_1 t}}{2j} = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{jn\Omega_1 t} (a_n - jb_n) + e^{-jn\Omega_1 t} (a_n + jb_n) \right] = \\ &= e^{jn\Omega_1 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\Omega_1 t} \frac{a_n + jb_n}{2}, \end{aligned} \quad (44)$$

а сам ряд записується таким чином:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{jn\Omega_1 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\Omega_1 t} \frac{a_n + jb_n}{2} \right) \quad (44)$$

Враховуючи, що a_n парна, а b_n непарна функції відносно n , тобто те, що a_n зберігає свій знак при від'ємних значеннях n , а b_n змінює його, запишемо

$$a_n = a_{-n} \quad \text{і} \quad b_n = -b_{-n},$$

а також те, що

$$\frac{a_0}{2} = \left(e^{jn\Omega_1 t} \frac{a_n - jb_n}{2} \right)_{n=0},$$

ряд (45) може бути записаний в такому вигляді

$$s(t) = \left(e^{jn\Omega_1 t} \frac{a_n - jb_n}{2} \right)_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{jn\Omega_1 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{jn\Omega_1 t} \frac{a_n - jb_n}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\Omega_1 t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}_{mn} e^{jn\Omega_1 t}, \quad (46)$$

де

$$\dot{S}_{mn} = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \quad - \quad (47)$$

комплексна амплітуда ряду (46) при $n = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$.

Отже, ряд (46) включає два нескінченних ряди векторів, що обертаються в протилежні сторони з кутовими швидкостями $n\Omega_1$. Геометрична сума кожної пари спряжених векторів дає тільки дійсне число (рис. 27).

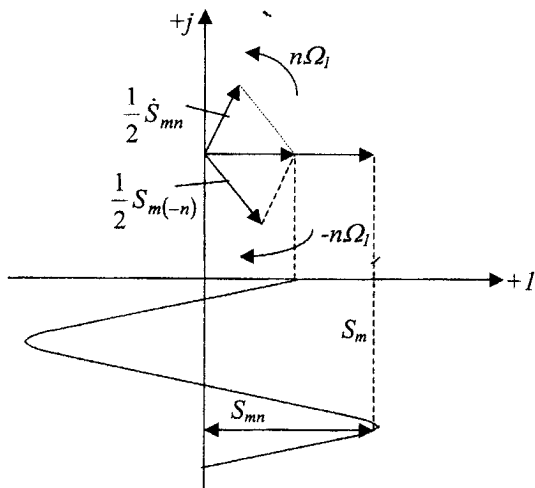


Рис. 27

В результаті додавання двох нескінченних рядів спряжених векторів одержимо дійсну функцію $s(t)$.

Скориставшись формулою Ейлера, можна записати

$$\begin{aligned} \dot{S}_{mn} &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt = \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) (\cos n\Omega_1 t - j \sin n\Omega_1 t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos n\Omega_1 t dt - j \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\Omega_1 t dt. \end{aligned}$$

11. Спектри періодичних сигналів

Будь-який сигнал може бути поданий у вигляді суми яких-небудь сигналів іншої форми, які є складовими заданого сигналу.

Сукупність складових заданої форми, що утворює в сумі деякий сигнал, називають спектром даного сигналу, а складові сигналу – спектральними складовими.

Кількість складових може бути як кінцевою, так і нескінченною.

В радіоелектроніці частіше використовують спектри сигналів у вигляді гармонічних коливань різних частот, що описуються виразами (29), (30).

Розрізняють амплітудний і фазовий спектри складних коливань.

Амплітудним спектром періодичного коливання називають функцію, що відображає залежність амплітуд гармонік від частоти. При графічному зображенні амплітудного спектра по осі абсцис відкладають частоту, а по осі ординат – амплітуду гармонік A_{mn} (рис. 28, а).

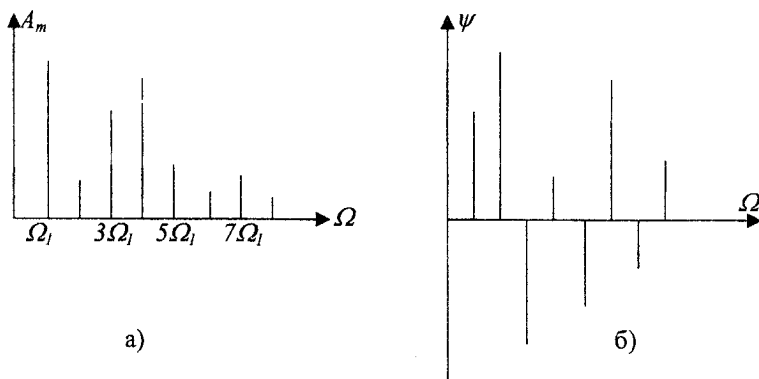


Рис. 28

Фазовим спектром називають залежність початкових фаз гармонік від частоти (рис. 28, б).

Для визначення спектрів використовують розкладення в ряд Фур'є.

Спектр періодичних сигналів є *лінійчастим* або *дискретним*, оскільки складається з окремих “ліній”, що відповідають дискретним частотам : $0, \Omega_1, \Omega_2 = 2\Omega_1, \Omega_3 = 3\Omega_1$ і т.д.

Використання рядів Фур’є для гармонічного аналізу складних періодичних сигналів в сукупності з принципом накладання є ефективним засобом для вивчення впливу лінійних систем на сигнали, які в них розповсюджуються.

Розглянемо спектри найпростіших періодичних сигналів.

1. Прямокутне коливання (рис 29).

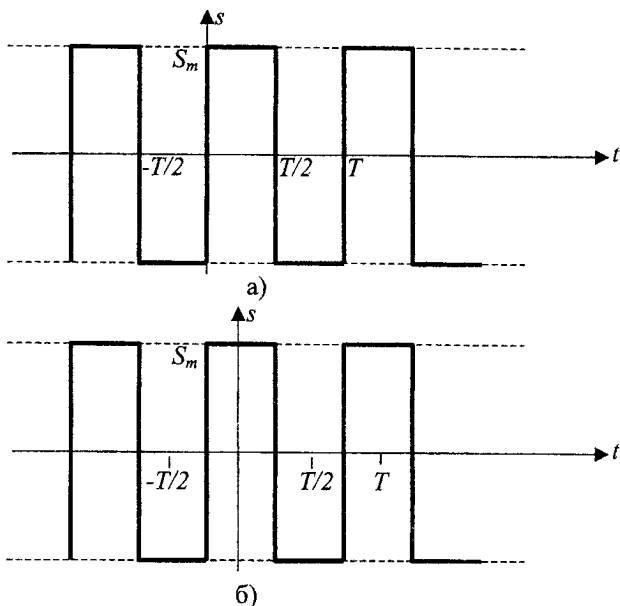


Рис. 29

Такий сигнал часто називають “меандром”, що в перекладі з грецької мови означає “орнамент”. Прямокутне коливання (рис. 9) широко використовується в вимірювальній техніці.

Прямокутне коливання (рис. 29, а) є сигналом, симетричним відносно початку координат і осі абсцис при суміщенні двох напівперіодів, тому у відповідності з (38) розкладення в ряд Фур'є матиме лише непарні синусні складові. Знаходимо коефіцієнти ряду:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} S_m \sin n\Omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -S_m \sin n\Omega_1 t dt \right] = \\
 &= \frac{2S_m}{T} \left[-\frac{\cos n\Omega_1 t}{n\Omega_1} \Big|_0^{\frac{T}{2}} + \frac{\cos n\Omega_1 t}{n\Omega_1} \Big|_{\frac{T}{2}}^T \right] = \\
 &= \frac{2S_m}{n\Omega_1 T} \left[\cos n\Omega_1 t \Big|_{\frac{T}{2}}^T - \cos n\Omega_1 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} \right] = \frac{4S_m}{n\pi}, \quad (48)
 \end{aligned}$$

де $n = 1, 3, 5 \dots$

Тригонометрична форма розшукуваного ряду

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \sum_{n=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{4S_m}{n\pi} \sin n\Omega_1 t = \frac{4S_m}{\pi} \sin \Omega_1 t + \frac{4S_m}{3\pi} \sin 3\Omega_1 t + \frac{4S_m}{5\pi} \sin 5\Omega_1 t + \dots = \\
 &= \frac{4S_m}{\pi} \left(\sin \Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega_1 t + \dots \right) \quad (49)
 \end{aligned}$$

Запишемо той же ряд у вигляді суми синусних гармонік. Тоді

$$A_{mn} = b_n, \quad \psi_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}.$$

Оскільки $a_n = 0$, то для кожної гармоніки $\psi_n = 0$, а ряд співпадатиме з виразом (49).

Для випадку косинусних гармонік A_n також дорівнюватиме b_n , а початкова фаза

$$\chi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} = -\frac{\pi}{2},$$

тому ряд прийме вигляд:

$$s(t) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4S_m}{n\pi} \cos\left(n\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4S_m}{\pi} \left[\cos\left(\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right] \quad (50)$$

Амплітудний спектр (рис. 30) сигналів (49) і (50) співпадає.

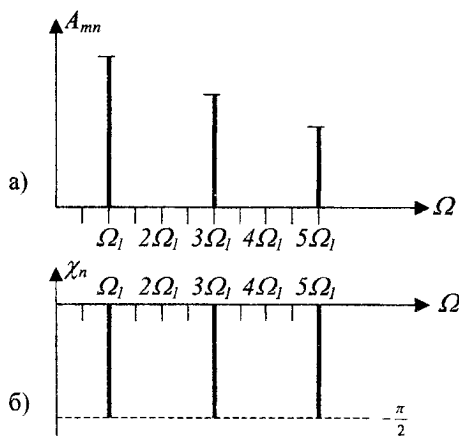


Рис. 30

Фазовий спектр сигналу (50) показаний на рис. 30, б.

При відліку часу від середини імпульсу (рис. 29, б) сигнал $s(t)$ буде симетричним осі ординат і осі абсцис при суміщенні двох напівперіодів. В цьому

випадку тригонометрична форма ряду матиме лише непарні косинусоїди, а коефіцієнти ряду дорівнюватимуть:

$$a_n = \frac{2S_m}{n\pi} \left(\sin n \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} \right). \quad (51)$$

Враховуючи те, що

$$\sin n \frac{\pi}{2} - \sin n \frac{3\pi}{2} = \begin{cases} 2 & \text{при } n = 1, 5, 9, \dots, \\ -2 & \text{при } n = 3, 7, 11, \dots, \end{cases}$$

амплітуди гармонік матимуть такі значення:

$$A_{mn} = \begin{cases} \frac{4S_m}{n\pi} & \text{при } n = 1, 5, 9, \dots, \\ -\frac{4S_m}{n\pi} & \text{при } n = 3, 7, 11, \dots. \end{cases} \quad (52)$$

Початкові фази синусних гармонік:

$$\psi_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } n = 1, 5, 9, \dots, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } n = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \quad (53)$$

З врахуванням (52) та (53) ряд матиме такий вигляд:

$$s(t) = \frac{4S_m}{\pi} \left[\sin\left(\Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \sin\left(3\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{7} \sin\left(7\Omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right] \quad (54)$$

Зважаючи на те, що

$$-\sin \alpha = \sin(\alpha + \pi), \quad (55)$$

вираз (54) приведеється для суми додатних складових

$$s(t) = \frac{4S_m}{\pi} \left[\sin\left(\Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3\Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5\Omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right] \quad (56)$$

Амплітудний спектр такого сигналу співпадає зі спектром (рис. 30, а), а фазовий показаний на рис. 31.

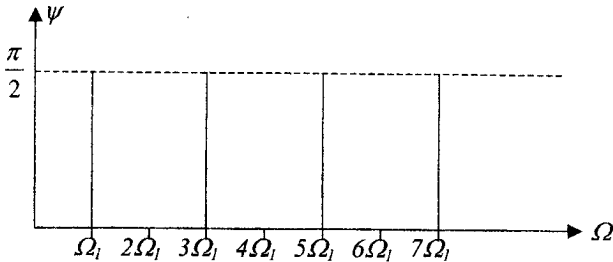


Рис. 31

2. Пилкоподібне коливання (рис. 32).

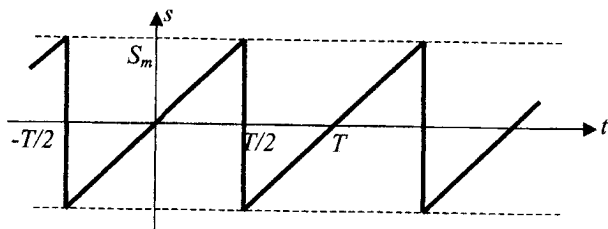


Рис. 31

3 подібними коливаннями потрібно мати справу в пристроях розгортки телевізорів та осцилографів, а також в пристроях автоматичного регулювання. Оскільки дана функція є непарною, ряд Фур'є для неї має тільки синусні складові. Знайдемо загальний вираз для коефіцієнтів ряду,

враховуючи, що на відрізку $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ $s(t) = \frac{2S_m t}{T}$.

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin n\Omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2S_m}{T} \sin n\Omega_1 t dt = \frac{4S_m}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin n\Omega_1 t dt = \\
 &= \frac{4S_m}{T^2} \left(-t \frac{\cos n\Omega_1 t}{n\Omega_1} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\cos n\Omega_1 t}{n\Omega_1} dt \right) = \\
 &= \frac{4S_m}{T^2} \left(-\frac{t}{n\Omega_1} \cos n\Omega_1 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{n^2 \Omega_1^2} \sin n\Omega_1 t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \right) = \\
 &= \frac{4S_m}{T^2} \left(-\frac{T}{2n\Omega_1} \cos n\Omega_1 \frac{T}{2} - \frac{T}{2n\Omega_1} \cos n\Omega_1 \frac{T}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{n^2 \Omega_1^2} \sin n\Omega_1 \frac{T}{2} + \frac{1}{n^2 \Omega_1^2} \sin n\Omega_1 \frac{T}{2} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{4S_m}{T^2} \left(-\frac{T^2}{2\pi n} \cos n\pi - \frac{T^2}{2n^2\pi^2} \sin n\pi \right) = -\frac{2S_m}{n\pi} \cos n\pi. \quad (57)$$

З виразу (57) очевидно, що

$$b_n = \begin{cases} \frac{2S_m}{n\pi} & \text{при } n = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{2S_m}{n\pi} & \text{при } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (58)$$

Амплітуди синусних гармонік $A_{nm} = b_n$, а початкові фази $\psi = 0$.

Враховуючи це, загальний вираз ряду Фур'є для даного сигналу буде таким:

$$s(t) = \frac{2S_m}{\pi} \left(\sin \Omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t - \dots \right) \quad (59)$$

З огляду на умову (55) ряд приймає остаточний вигляд:

$$s(t) = \frac{2S_m}{\pi} \left[\sin \Omega_1 t + \frac{1}{2} \sin(2\Omega_1 t + \pi) + \frac{1}{3} \sin \Omega_1 t + \frac{1}{4} \sin(4\Omega_1 t + \pi) \dots \right] \quad (60)$$

Графіки амплітудного і фазового спектрів такого коливання показані на рис. 33.

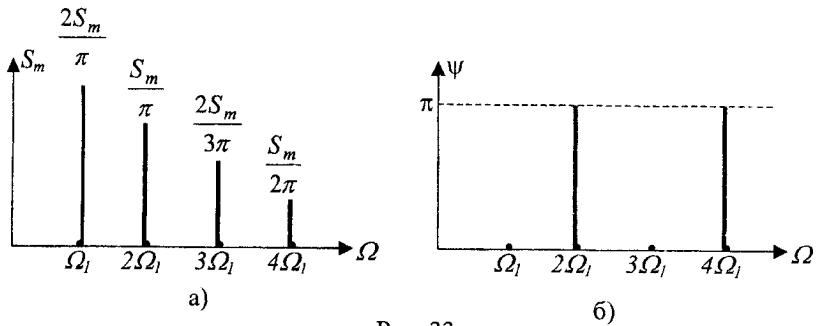


Рис. 33

3. Послідовність однополярних прямокутних імпульсів, симетричних осі ординат (рис. 34).

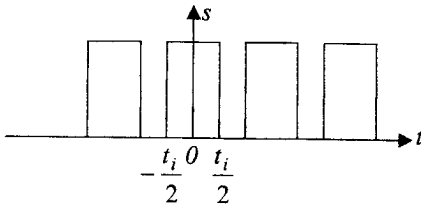


Рис. 34

Даний сигнал симетричний осі ординат, тому в виразі для ряду Фур'є будуть: постійна складова $\frac{a_0}{2}$ та косинусні

складові:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} S_m dt = \frac{S_m}{T} t \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \frac{S_m}{T} t_i = \frac{S_m}{\Theta}, \quad (61)$$

де Θ - шпаруватість імпульсів,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} S_m \cos n\Omega_1 t dt = \frac{2S_m}{T} \frac{\sin n\Omega_1 t}{n\Omega_1} \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \\ &= \frac{S_m}{n\pi} \sin n\Omega_1 t \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\Omega_1 t_i}{2} \end{aligned} \quad (62)$$

Ряд Фур'є для такого сигналу матиме вигляд:

$$s(t) = \frac{S_m}{\Theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\Omega_1 t_i}{2} \cos n\Omega_1 t = \frac{S_m}{\Theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\Theta} \cos n\Omega_1 t \quad (63)$$

З виразу (63) очевидно, що $a_n = 0$, якщо дискретна змінна приймає значення:

$$\Omega = n\Omega_1 = k\Omega_1, \text{ де } k = \Theta, 2\Theta, 3\Theta, \dots \quad (64)$$

Виходячи з парності досліджуваного сигналу, маємо: $b_n = 0$, $A_{mn} = a_n$, а початкова фаза

$$\chi_n = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin \frac{n\pi}{\Theta} > 0, \\ \pi & \text{при } \sin \frac{n\pi}{\Theta} < 0. \end{cases} \quad (65)$$

Отже, у відповідності до виразів (63), (65) та умови (64), вигляд спектрів коливання (рис. 34) залежить від значення шпаруватості сигналу.

Графіки амплітудного і фазового спектрів сигналу (рис. 34) для шпаруватості $\Theta = 4$ показані на рис. 35, а і 35, б.

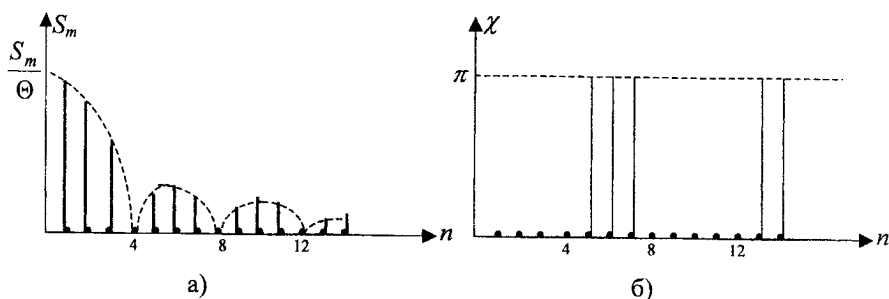


Рис. 35

4. Послідовність однополярних прямокутних відеоімпульсів (рис.36).

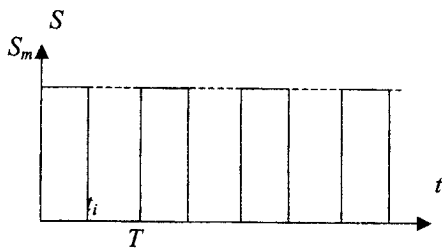


Рис. 36

Знаходимо постійну складову

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^{t_i} S_m dt = \frac{S_m}{T} t \Big|_0^{t_i} = \frac{S_m}{T} t_i = \frac{S_m}{\Theta}. \quad (66)$$

Як бачимо, вираз (66) співпадає з виразом (61), тобто зсув в часі коливання не вплинув на значення постійної складової.

Коефіцієнти ряду:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{t_i} S_m \cos n\Omega_1 t dt = \frac{2S_m}{Tn\Omega_1} \sin n\Omega_1 t \Big|_0^{t_i} = \frac{2S_m}{n\Omega_1 T} \sin n\Omega_1 t_i = \frac{S_m}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{\Theta}. \quad (67)$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{t_i} S_m \sin n\Omega_1 t dt = -\frac{2S_m}{Tn\Omega_1} \cos n\Omega_1 t \Big|_0^{t_i} = -\frac{2S_m}{n\Omega_1 T} (\cos n\Omega_1 t_i - 1) = \\ &= \frac{2S_m}{n\frac{2\pi}{T} T} \left(1 - \cos n\frac{2\pi}{T} t_i\right) = \frac{S_m}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\Theta}\right). \end{aligned} \quad (68)$$

Знаходимо амплітуди і фази гармонік.

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{S_m}{n\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{2n\pi}{\Theta} + \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\Theta}\right)^2} = \\ &= \frac{S_m}{n\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{2n\pi}{\Theta} + 1 - 2\cos \frac{2n\pi}{\Theta} + \cos^2 \frac{2n\pi}{\Theta}} = \frac{S_m}{n\pi} \sqrt{2 - 2\cos \frac{2n\pi}{\Theta}} = \\ &= \frac{S_m}{n\pi} \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\Theta}\right)} = \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\Theta}; \end{aligned} \quad (69)$$

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin \frac{2n\pi}{\Theta}}{1 - \cos \frac{2n\pi}{\Theta}} = \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{\Theta} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{\Theta} \right)$$

$$\psi_n = \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{\Theta}; \quad (70)$$

$$\chi_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{1 - \cos \frac{2n\pi}{\Theta}}{\sin \frac{2n\pi}{\Theta}} = \operatorname{tg} \frac{n\pi}{\Theta}; \quad \chi_n = \frac{n\pi}{\Theta}. \quad (71)$$

Загальний вираз ряду

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \frac{S_m}{\Theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\Theta} \sin \left(n\Omega_1 t + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{\Theta} \right) = \\
 &= \frac{S_m}{\Theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{\Theta} \cos \left(n\Omega_1 t + \frac{n\pi}{\Theta} \right)
 \end{aligned} \quad (72)$$

У відповідності з (72) амплітудний спектр послідовності (рис. 36) співпадає з спектром сигналу (рис. 34), а фазовий спектр зображений на

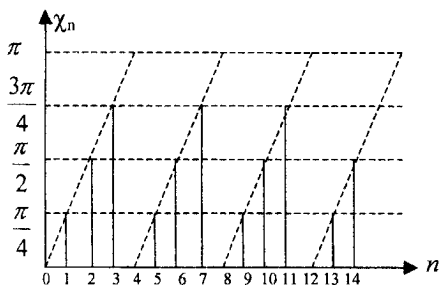


Рис.37

рис. 37. При цьому, заради спрощення, береться ряд з косинусними гармоніками, а також враховується, що

$$\begin{aligned}
 -\cos \alpha &= \cos(\alpha - k\pi), \\
 \cos \alpha &= \cos(\alpha - m\pi),
 \end{aligned} \quad (73)$$

де $k=1, 3, 5, \dots$, $m=2, 4, 6, \dots$ - кількість розгорнутих кутів в початковій фазі гармоніки.

Вернемось до виразу (69)

$$A_n = \frac{2S_m}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{T} t_i$$

і прийmemo $t_i \ll T$. При цьому шпаруватість $\Theta \gg 1$. Для цього випадку

$$A_n \approx \frac{2S_m}{n\pi} \frac{n\pi t_i}{T} = \frac{2S_m}{\Theta}, \quad (74)$$

Тобто амплітуди сусідніх гармонік при великих шпаруватостях майже рівні, а перша гармоніка вдвічі більша за постійну складову.

12. Спектри неперіодичних сигналів

Неперіодичне коливання (рис. 38) можна уявити як періодичне з нескінченно великим періодом ($T = \infty$).

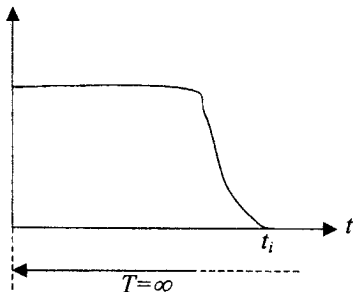


Рис. 38

Розглянемо спектр коливання з періодом, що прямує до нескінченності. При цьому різниця частот між сусідніми гармоніками

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0.$$

Гармоніки зближуються і спектр стає суцільним. Комплексну амплітуду гармоніки можна записати, замінивши в виразі (47) множник $\frac{2}{T}$ множителем $\frac{\Omega}{\pi}$:

$$\dot{S}_{mn} = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt. \quad (75)$$

В одержаному виразі при $T \rightarrow \infty$ дискретна змінна $n\Omega_1$ перетворюється в безперервну змінну ω , частота Ω - в нескінченно малу величину $d\omega$, а комплексна амплітуда - в безперервну функцію частоти ω :

$$\dot{S}_m(\omega) = \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (76)$$

Оскільки $d\omega$ - величина нескінченно мала, то і $\dot{S}_m(\omega)$ також нескінченно мала. Отже, неперіодичне коливання можна розкласти на нескінченне число гармонік з нескінченно малими амплітудами. На

практиці користуватись нескінченно малими величинами незручно, тому спектр неперіодичного сигналу описують функцією спектральної густини

$$S(j\omega) = \pi \frac{\dot{S}_m(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (77)$$

що визначається на всій осі частот ω : від $-\infty$ до $+\infty$.

Знаходження спектральної густини за виразом (77) називають прямим перетворенням Фур'є.

Зворотне перетворення Фур'є можна здійснити, підставивши вираз (75) в (46)

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\Omega t} dt \right] e^{jn\Omega t}$$

і перейшовши до границі при $T \rightarrow \infty$.

В цьому випадку вираз в дужках перетворюється в спектральну густину $S(j\omega)$, а дискретна сума – в інтеграл:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (78)$$

Вираз (78) називають зворотним перетворенням Фур'є.

Функція спектральної густини, як комплексна величина, може бути подана в алгебраїчній та показниковій формі.

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (79)$$

$$S(j\omega) = S_o(\omega) - jS_y(\omega) \quad (80)$$

де $S_o(\omega)$ – дійсна частина спектральної густини,

$$S_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt, \quad (81)$$

$S_y(\omega)$ - уявна частина спектральної густини,

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt. \quad (82)$$

Із виразів (81) і (82) видно, що відносно змінної ω $S_{\delta}(\omega)$ - парна функція, а $S_y(\omega)$ – непарна (що пояснюється парністю функції $\cos \omega t$ і непарністю функції $\sin \omega t$).

Модуль спектральної функції дорівнює:

$$S(\omega) = \sqrt{S_{\delta}^2(\omega) + S_y^2(\omega)}, \quad (83)$$

а її аргумент –

$$\psi_S(\omega) = \arctg \frac{S_y(\omega)}{S_{\delta}(\omega)}. \quad (84)$$

Таким чином, спектральна густина в показниковій формі –

$$S(j\omega) = \sqrt{S_{\delta}^2(\omega) + S_y^2(\omega)} e^{-j \arctg \frac{S_y(\omega)}{S_{\delta}(\omega)}} = S(\omega) e^{-j\psi_S(\omega)}. \quad (85)$$

Якщо $s(t)$ - парна функція відносно t , то

$$S(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} S_{\text{nap}}(t) \cos \omega t dt; \quad (86)$$

в цьому випадку спектральна густина виявляється дійсною (додатною або від'ємною) і аргумент її дорівнює 0 або π ; при $S(j\omega) = S(\omega)$ $\psi_S(\omega) = 0$; при $S(j\omega) = -S(\omega)$ $\psi_S(\omega) = \pi$. Отже

$$S_{\delta}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} S_{\text{nap}}(t) \cos \omega t dt. \quad (87)$$

Зважаючи на те, що $S_{\delta}(\omega)$ функція також парна (відносно змінної ω), зворотне перетворення Фур'є (78) має вигляд

$$S_{нар}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{\partial}(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (88)$$

Вирази (87) і (88) – відповідно пряме і зворотнє перетворення Фур'є для парного сигналу.

Якщо $s(t)$ - непарна функція відносно змінної t , то

$$S(j\omega) = -2j \int_0^{\infty} S_{нен}(t) \sin \omega t dt; \quad (89)$$

в цьому випадку спектральна густина виявляється уявною (додатною або від'ємною); аргумент її дорівнює $\frac{\pi}{2}$ або $-\frac{\pi}{2}$; при

$$S(j\omega) = jS(\omega) \quad \psi_S(\omega) = \frac{\pi}{2}; \quad \text{при} \quad S(j\omega) = -jS(\omega) \quad \psi_S(\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

Для імпульсного неперіодичного сигналу межами інтегрування в формулі (77) будуть $-\frac{t_i}{2}, \frac{t_i}{2}$, а в формулах (86), (87) і (89) – $0, \frac{t_i}{2}$

Перетворення Фур'є має одну важливу властивість, яка визначається теоремою заізнення: при зміні початку відліку часу на t_0 фазовий спектр сигналу змінюється на $-\omega t_0$, а амплітудний спектр сигналу залишається незмінним.

Тобто, якщо сигналу $S_1(t)$ відповідає спектральна густина $S_1(j\omega)$, то сигналу $S_2(t) = S_1(t - t_0)$ відповідатиме спектральна густина $S_2(j\omega)$, яка дорівнює:

$$S_2(j\omega) = S_1(j\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (90)$$

Знайдемо спектральну густину деяких сигналів.

1. Функція Хевісайда (рис. 39)

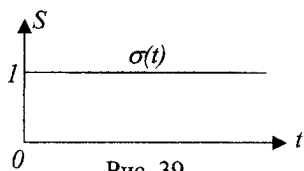


Рис. 39

$$\begin{aligned}
 S(j\omega) &= \int_0^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt = \\
 &= 1 \cdot \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty} = \\
 &= \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega e^{j90^\circ}} = \frac{1}{\omega} e^{-j90^\circ}. \quad (91)
 \end{aligned}$$

2. Функція Хевісайда, зсунута на час t_0 (рис.40).

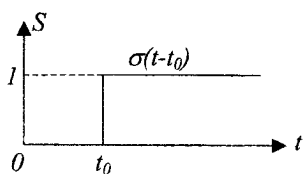


Рис. 40

$$\begin{aligned}
 S_1(j\omega) &= S(j\omega)e^{-j\omega t_0} = \\
 &= \frac{1}{\omega} e^{-j90^\circ} e^{-j\omega t_0} = \frac{1}{\omega} e^{-j(90^\circ + \omega t_0)}. \quad (92)
 \end{aligned}$$

3. Функція Дірака (рис. 41).

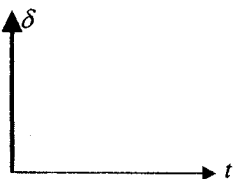


Рис. 41

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (93)$$

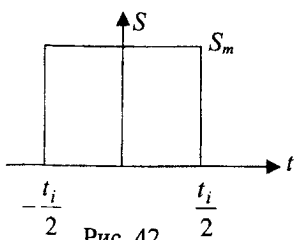
Виходячи з фільтрувальних властивостей дельта-функції, цей інтеграл чисельно дорівнює значенню функції в

момент часу, що розглядається. При $t = 0$ $e^{-j\omega t} = 1$.

4. Прямокутний відеоімпульс, симетричний осі ординат (рис. 42)

Загальний вираз спектральної густини

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt .$$



Оскільки імпульс має кінцеву тривалість, можна звизити межі інтегрування:

$$S(j\omega) = \int_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} S_m e^{-j\omega t} dt = \frac{S_m}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{t_i}{2}}^{\frac{t_i}{2}} = \frac{S_m}{-j\omega} (e^{-j\omega \frac{t_i}{2}} - e^{j\omega \frac{t_i}{2}}) \quad (94)$$

Домножимо чисельник і знаменник виразу (94) на (-2)

$$S(j\omega) = \frac{2S_m}{\omega} \frac{e^{j\omega \frac{t_i}{2}} - e^{-j\omega \frac{t_i}{2}}}{2j} = \frac{2S_m}{\omega} \sin \omega \frac{t_i}{2} \quad (95)$$

Тепер домножимо чисельник і знаменник виразу (95) на $\left(\frac{t_i}{2}\right)$:

$$S(j\omega) = \frac{2S_m}{\omega} \frac{t_i}{2} \frac{\sin \omega \frac{t_i}{2}}{\frac{t_i}{2}} = S_m t_i \frac{\sin \omega \frac{t_i}{2}}{\omega \frac{t_i}{2}} = S_0 \frac{\sin \frac{\omega t_i}{2}}{\frac{\omega t_i}{2}} \quad (96)$$

де S_0 – значення $S(j\omega)$ при нульовій частоті.

Графік спектральної густини, побудований за виразом (96) має вигляд (рис. 43)

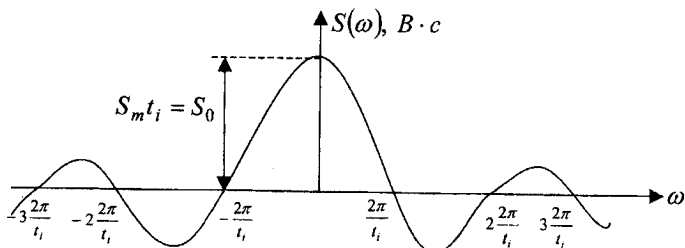


Рис. 43

Частіше спектральна густина сигналу (рис. 42) використовується в такому вигляді:

$$S(j\omega) = S_0 \frac{\left| \sin \frac{\omega t_i}{2} \right|}{\frac{\omega t_i}{2}} e^{j\psi(\omega)} = S(\omega) e^{i\Psi(\omega)}, \quad (97)$$

де

$$S(\omega) = S_0 \frac{\left| \sin \frac{\omega t_i}{2} \right|}{\frac{\omega t_i}{2}} \quad (98)$$

Аргумент $\Psi(\omega)$ залежить від знаку $\sin \frac{\omega t_i}{2}$:

$$\Psi(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin \frac{\omega t_i}{2} > 0, \\ \pi & \text{при } \sin \frac{\omega t_i}{2} < 0 \end{cases}$$

Графік модуля спектральної густини показаний на рис.44а, а аргументу – на рис. 44б.

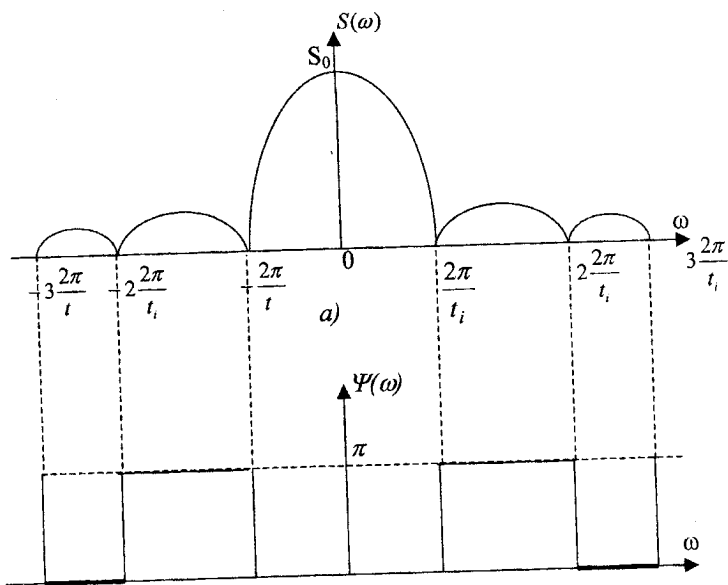


Рис. 44 б

5. Прямокутний відеоімпульс (рис. 45)

Цей сигнал можна розглядати як сигнал (рис. 42), зсунутий вправо на час $\frac{t_i}{2}$. В цьому випадку модуль спектральної густини не зміниться, а аргумент зміниться на величину $-\frac{\omega t_i}{2}$.

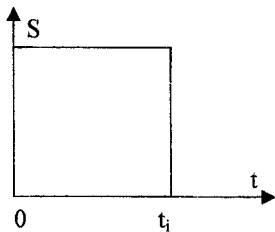


Рис. 45

Таким чином спектральна густина матиме такий вигляд ;

$$S(j\omega) = S_0 \frac{\left| \sin \frac{\omega t_i}{2} \right|}{\frac{\omega t_i}{2}} e^{j\varphi(\omega)}, \quad (99)$$

де $\varphi(\omega) = \psi(\omega) - \omega \frac{t_i}{2}$ - аргумент спектральної густини.

Аргумент спектральної густини дорівнює:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\omega t_i}{2}, & \text{при } \sin \frac{\omega t_i}{2} > 0 \\ \pi - \frac{\omega t_i}{2}, & \text{при } \sin \frac{\omega t_i}{2} < 0 \end{cases}$$

Графік аргументу спектральної густини показаний на рис.46.

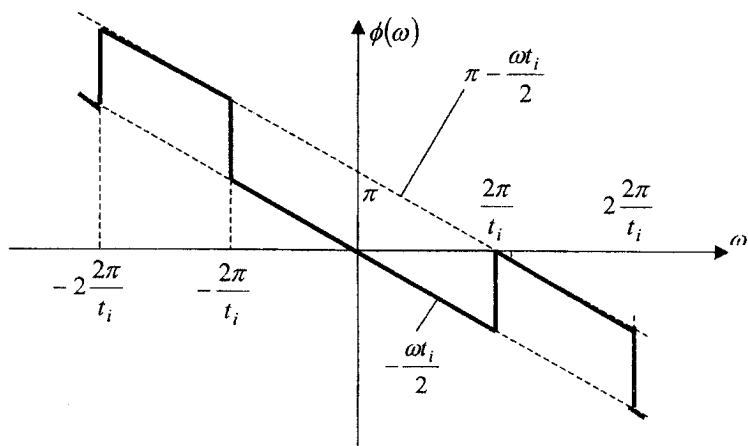


Рис.46

6. Одиночний трикутний відеоімпульс, симетричний осі ординат (рис.47). Функція $S(t)$ – парна і визначається формулою :

$$S(t) = -\frac{2S_m}{t_i} t + S_m$$

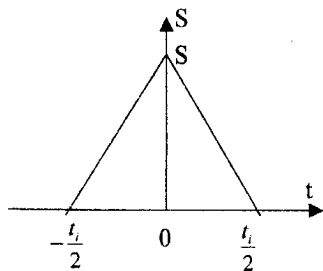


Рис. 47

в межах від 0 до $\frac{t_i}{2}$. Визначимо

$S(j\omega)$ за формулою (86), інтегруючи в цих же межах:

$$\begin{aligned}
S(j\omega) &= 2 \int_0^{\frac{t_i}{2}} S_{\text{nap}}(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\frac{t_i}{2}} \left(-\frac{2S_m}{t_i} t + S_m \right) \cos \omega t dt = \\
&= 2 \left[-\frac{2S_m}{t_i} \int_0^{\frac{t_i}{2}} t \cos \omega t dt + S_m \int_0^{\frac{t_i}{2}} \cos \omega t dt \right] = \\
&= 2 \left[-\frac{S_m}{\omega} \sin \omega \frac{t_i}{2} - \frac{2S_m}{t_i \omega^2} \cos \omega \frac{t_i}{2} + \frac{2S_m}{t_i \omega^2} + \frac{S_m}{\omega} \sin \omega \frac{t_i}{2} \right] = \\
&= \frac{4S_m}{t_i \omega^2} - \frac{4S_m}{t_i \omega^2} \cos \omega \frac{t_i}{2} = \\
&= \frac{8S_m}{t_i \omega^2} 2 \sin^2 \omega \frac{t_i}{4} = \frac{8S_m}{t_i \omega^2} \sin^2 \omega \frac{t_i}{4} \tag{100}
\end{aligned}$$

Чисельник і знаменник виразу (100) спочатку поділимо на 8:

$$S(j\omega) = \frac{S_m}{8t_i \omega^2} \sin^2 \omega \frac{t_i}{4};$$

а потім помножимо на t_i і одержимо остаточно:

$$S(j\omega) = \frac{S_m t_i}{2} \left(\frac{\sin \omega \frac{t_i}{4}}{\omega \frac{t_i}{4}} \right)^2. \tag{101}$$

Як видно з виразу (101) спектральна густина виявляється дійсною і додатною на будь-якій частоті. Тому її аргумент дорівнює нулю, і модуль визначається формулою (101). Початкове значення модуля (при $\omega = 0$)

$$S(0) = \frac{S_m t_i}{2}. \tag{102}$$

Графік модуля спектральної густини одиночного трикутного відеоімпульса (рис.47) показаний на рис. 48.

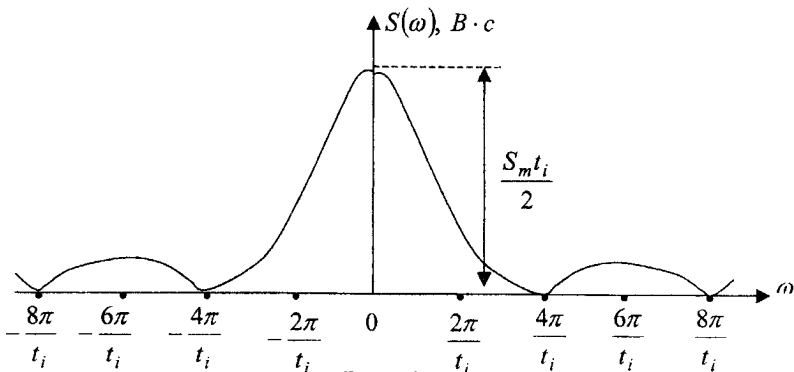


Рис. 48

Частоти, на яких $S(\omega)$ дорівнює нулю, визначаємо з рівняння:

$$\sin \frac{\omega t_i}{4} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\omega t_i}{4} = k\pi,$$

де $k = \pm 1; \pm 2; \pm 3 \dots$ звідси

$$\omega_k = \frac{4k\pi}{t_i}, \quad (103)$$

тобто

$$\omega_k = \pm \frac{4\pi}{t_i}; \pm \frac{8\pi}{t_i}; \pm \frac{12\pi}{t_i} \dots$$

13. Зображення сигналів по Лапласу

Перетворення Фур'є може бути застосоване лиш для тих сигналів, для яких сходиться інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(t)| dt.$$

Якщо цей інтеграл не сходиться, тоді до сигналу застосовують перетворення Лапласа. При цьому вираз сигналу $S(t)$ множиться на функцію e^{ct} , де c – додатна константа. Значення c можна підібрати так, що для будь-якого сигналу інтеграл

$$\int_0^{\infty} |S(t)| e^{-ct} dt$$

буде сходиться (нижня межа інтегрування дорівнює нулю, щоб забезпечити сходимість інтеграла; отже початок відліку часу треба вибирати так, щоб сигнал існував тільки при додатних значеннях t).

Застосувавши до виразу $S(t)e^{-ct}$ пряме перетворення Фур'є, одержимо:

$$\int_0^{\infty} S(t) e^{-ct} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} S(t) e^{-(c+j\omega)t} dt,$$

або

$$\int_0^{\infty} S(t) e^{-pt} dt, \quad \text{де } p = c + j\omega.$$

Комплексне число p називають оператором Лапласа.

Сигнал, перетворений по Лапласу, називається зображенням і позначається $S(p)$. Сам сигнал $S(t)$ називається оригіналом.

Отже, зображення по Лапласу сигналу $S(t)$ дорівнює:

$$S(p) = \int_0^{\infty} S(t)e^{-pt} dt. \quad (104)$$

Вираз (104) називають прямим перетворенням Лапласа.

Застосувавши до зображення $S(p) = S(p + j\omega)$ зворотне перетворення Фур'є, одержимо

$$S(t)e^{-ct} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(c + j\omega)e^{j\omega t} d\omega,$$

звідки

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(c + j\omega)e^{(c+j\omega)t} d\omega.$$

Змінну інтегрування ω замінюємо на $c + j\omega$; тоді і межі інтегрування необхідно замінити:

$$\text{при } \omega = \infty \quad c + j\omega = c + j\infty,$$

окрім того,

$$d(c + j\omega) = d(j\omega) = j d\omega,$$

звідки

$$d\omega = \frac{d(c + j\omega)}{j}.$$

З врахуванням цього інтеграл дорівнюватиме:

$$S(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(c + j\omega)e^{(c+j\omega)t} d(c + j\omega) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p)e^{pt} dp$$

(105)

Формула (105) називається зворотним перетворенням Лапласа, яке здійснюється в комплексній площині $p = c + j\omega$ вздовж прямої $c = \text{const}$.

Для оригіналів $S(t)$ та їх зображень $S(p)$ складені таблиці відповідності, що називаються таблицями формул операційного числення. При наявності таблиць відпадає необхідність в обчисленні інтегралів (104) та (105).

Якщо таблиць немає, то зворотне перетворення Лапласа здійснюється за правилами інтегрування в комплексній площині. Інтеграл по замкненому контуру визначається сумою лишків в особливих точках, що розміщені всередині цього контуру:

$$\oint S(p) dp = 2\pi j \sum \operatorname{Re} s_k S(p). \quad (106)$$

Оскільки при зворотному перетворенні Лапласа інтегрування ведеться вздовж прямої $c = \text{const}$, то можна вважати, що воно ведеться по замкненому колу нескінченно великого радіуса. Підставляючи вираз (106) в формулу зворотного перетворення Лапласа (105), одержимо:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} 2\pi j \sum \operatorname{Re} s_k S(p) e^{p_k t} = \\ &= \sum_k \operatorname{Re} s_k S(p) e^{p_k t}. \end{aligned} \quad (107)$$

Як правило, зображення сигналу $S(p)$ є дробно-раціональною функцією:

$$S(p) = \frac{N(p)}{M(p)}, \quad (108)$$

де $N(p)$ і $M(p)$ – степеневі поліноми (ступінь полінома знаменника більша або дорівнює степені полінома чисельника).

При цьому за теоремою розкладання оригінал дорівнює

$$S(p) = \sum_k \frac{N(p)}{M'(p)} e^{p_k t}, \quad (109)$$

де p_k – корені рівняння $M(p)=0$.

Якщо

$$S(p) = \frac{N(p)}{pM(p)}, \quad (110)$$

то

$$S(t) = \frac{N(0)}{M(0)} + \sum_k \frac{N(p_k)}{p_k M'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (111)$$

Якщо серед коренів рівняння $W(p)=0$ є комплексно-спряжені корені p_k і \bar{p}_k , то при визначенні відповідних їм доданків, що стоять в правій частині рівнянь (109) і (111), досить визначити доданок для одного з цих коренів, наприклад для p_k , а для спряженого кореня \bar{p}_k потрібно взяти спряжене значення цього доданка. Їх сума буде дорівнювати подвоєному значенню дійсної частини, знайденої для одного із коренів.

14. Основні властивості перетворення Лапласа

Математичним операціям над оригіналами відповідають відповідні операції над зображеннями і навпаки.

Знання цих операцій або, як їх називають, властивостей перетворення Лапласа полегшує знаходження зображень.

Основними з таких властивостей є:

1. Перетворення Лапласа є лінійним, тобто сумі оригіналів функцій відповідає сума їх зображень

$$\sum_{i=1}^n S_i(t) = \sum_{i=1}^n S_i(p). \quad (112)$$

2. Збільшення амплітуди коливання $S(t)$ в a раз приводить до збільшення в стільки ж раз його зображення

$$aS(t) \stackrel{\cdot}{=} aS(p). \quad (113)$$

3. Зміна масштабу незалежної змінної оригінала в a раз приводить до зменшення в a раз зображення і його аргументу

$$S(at) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{a} S\left(\frac{p}{a}\right). \quad (114)$$

4. Зсув коливання на час t_0 відповідає множенню його зображення на множник $\exp(-pt_0)$

$$S(t - t_0) \stackrel{\cdot}{=} S(p)e^{-pt_0}. \quad (115)$$

5. Диференціювання коливання відповідає множенню його зображення на p

$$\frac{ds(t)}{dt} \stackrel{\cdot}{=} \begin{cases} pS(p), & \text{якщо } S(0) = 0; \\ pS(p) - S(0), & \text{якщо } S(0) \neq 0, \end{cases} \quad (116)$$

де $S(0)$ - значення $S(t)$ при $t=0$.

6. Інтегрування коливання відповідає діленню його зображення на p

$$\int_{-\infty}^{+} S(t) dt \stackrel{\cdot}{=} \frac{S(p)}{p}. \quad (117)$$

15. Розподіл потужності в спектрі періодичного сигналу

Середня потужність періодичного коливання, що виділяється на одиничному опорі $R=1\text{ Ом}$, в загальному випадку дорівнює

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T S^2(t) dt, \quad (118)$$

де $S(t)$ – сигнал, розкладений в ряд Фур'є.

Підставимо в (118) ряд Фур'є:

$$S(t) = \frac{\omega}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos(n\Omega_1 t - x_n).$$

Підносячи цей ряд до квадрата і інтегруючи його почленно, з врахуванням того, що

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(n\Omega_1 t - x_n) dt &= 0, \\ \int_0^T \cos(n\Omega_1 t - x_n) \cos(m\Omega_1 t - x_m) dt &= 0 \quad m \neq n \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(n\Omega_1 t - x_n) dt &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

одержимо

$$P = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2. \quad (119)$$

Таким чином, середня потужність періодичного коливання дорівнює сумі потужностей всіх гармонік і постійної складової. Потужність кожної гармоніки пропорційна квадрату амплітуди цієї гармоніки; отже середня потужність в спектрі розподілена пропорційно квадратам амплітуд гармонік.

Якщо в (119) нескінченну суму замінити сумою N її перших членів, то одержимо:

$$aP = \frac{\omega^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N A_{mn}^2 \quad \text{при } (a < 1) \quad (120)$$

що є потужністю в смузі частот, які відповідають ширині спектра $\Delta\Omega = N\Omega_1$. Рівняння (120) може слугувати критерієм

визначення ширини спектра коливання. Наприклад, вибравши $a=0,707$, можна знайти таке значення N_a , для якого права частина рівняння (120) буде мати значення, не менше $0,707 P$; тоді ширина спектра дорівнює $N_a \Omega_1$.

16. Розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу

Енергія коливання $S(t)$, що виділяється на одиничному опорі

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt, \quad (121)$$

де $S(t)$ – аналітичний вираз сигналу.

Це рівняння можна записати у вигляді:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt.$$

Змінюючи порядок інтегрування, маємо:

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (122)$$

інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{j\omega t} dt = S(-j\omega) = S(j\omega). \quad (123)$$

Підставивши (123) в (122), одержимо такий вираз для енергії сигналу:

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega.$$

Оскільки функція $S^2(\omega)$ є парною, то

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S^2(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S^2(2\pi f) df. \quad (124)$$

Вираз (124) називають рівнянням Парсеваля.

Величина $2S^2(2\pi f)df$ показує, яка частина енергії сигналу припадає на смугу частот шириною df . Якщо $df=1$, то $2S^2(2\pi f)$ вказує, яка частина енергії припадає на смугу частот шириною 1 Гц при заданій частоті f . Таким чином, квадрат модуля спектра коливання показує, як його енергія розподіляється по осі частот, і називається спектральною густиною енергії сигналу.

Рівняння Парсеваля дозволяє визначити ширину спектра ΔF як смугу частот, в яку потрапляє основна доля ($a < 1$) енергії коливання

$$aW = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi\Delta F} S^2(\omega) d\omega. \quad (125)$$

17. Випадкові сигнали

Більшість сигналів, які нас оточують, є випадковими, тобто передбачуваними з певною ймовірністю.

Випадкові сигнали аналізують за допомогою теорії ймовірності, яка є аксіоматизованим розділом математики, що узагальнює широкий емпіричний матеріал, накопичений наукою при вивченні випадкових явищ.

В основі теорії ймовірності лежить поняття повної множини "елементарних наслідків" або випадкових подій

$$\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

Величини A_n означають різноманітні наслідки деякого випадкового експерименту. Кожній події A_n відповідає дійсне число $p(A_n)$, яке називається імовірністю події A_n і дорівнює

$$p(A_n) = \frac{n}{N}, \quad (126)$$

де n – число подій A_n – в даному експерименті;

N – загальна кількість подій випадкового експерименту.

Основні аксіоми теорії імовірності:

а) імовірність невід'ємна і не перевищує одиниці

$$0 \leq p(A_n) \leq 1;$$

б) якщо A_i та A_n – незалежні події, то

$$p(A_i + A_n) = p(A_i) + p(A_n);$$

в) сума всіх подій що складають повну множину Ω , є повністю передбачувана подія (вірогідна подія)

$$p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$$

Моделлю випадкових сигналів і завад є випадковий процес $x(f)$. В фіксований момент часу $t=t_i$ відлік процесу $x(t)=x_i$ – випадкова величина, що описується густиною розподілу імовірності

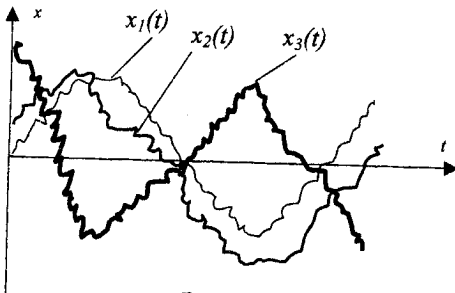


Рис. 49

$W_1(x_i, t_i)$. Для опису випадкового процесу в n фіксованих моменти часу t_1, \dots, t_n використовується n – мірна густина розподілу імовірностей

$$W_n(x_1, \dots, x_n, \dots, t_1, \dots, t_n).$$

Кожне спостереження випадкового процесу (наприклад, на екрані осцилографа) – різні функції $x_n(t)$, $n=1, 2, \dots$ (рис.49).

Функції $x_n(t)$ називають вибірковими або реалізаціями випадкового процесу. Достатньо великий набір реалізації дає певне уявлення про випадковий процес. По ньому знаходяться імовірнісні характеристики процесу.

Багатомірні густини розподілу імовірності при великих n достатньо точно описують випадковий процес. Однак, в зв'язку зі складністю, такий опис використовується тільки в теоретичних дослідженнях. Експериментально, з розумними затратами, можна виміряти одномірну ($n=1$) або двомірну ($n=2$) густину розподілу імовірностей.

Серед множини різноманітних процесів особливе місце займає гаусівський випадковий процес. Його одномірна густина розподілу імовірностей:

$$\omega(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left(-\frac{[x - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)}\right), \quad (127)$$

де $m(t)$ і $\sigma(t)$ - математичне очікування і середньоквадратичне відхилення.

Вияткове значення гаусівського випадкового процесу в прикладних задачах пояснюється тим, що густина розподілу імовірностей суми незалежних або малозалежних рівномірно малих доданків при необмеженому збільшенні їх числа наближається до густини розподілу імовірності гаусівського випадкового процесу. Тому шуми і завади, а також сигнали, що породжуються великою кількістю незалежних джерел, мають густину розподілу імовірностей, близьку до гаусівської.

Менш детальні, але зовсім задовільні в практичному застосуванні характеристики випадкових процесів можна одержати, визначаючи моменти тих випадкових величин, які спостерігаються в

перерізах цих процесів. Оскільки, в загальному вигляді, ці моменти залежать від часових аргументів, вони одержали назву моментних функцій.

Найбільше значення мають три моментні функції нижчих порядків, які називаються математичним очікуванням, дисперсією і функцією кореляції.

Математичне очікування

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega(x, t) dx \quad (128)$$

є середнім значенням процесу $x(t)$ в біжучий момент часу t . Усереднення проводиться по всьому ансамблю реалізації процесу.

Дисперсія

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m(t)]^2 \omega(x, t) dx \quad (129)$$

дозволяє говорити про ступінь розпорощення миттєвих значень, які приймають окремі реалізації в фіксованому перерізі t , відносно середнього значення.

Двомірний центральний момент

$$B(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)] \omega(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (130)$$

називається функцією кореляції випадкового процесу $x(t)$. Ця моментна функція характеризує ступінь статистичного зв'язку тих випадкових величин, які спостерігаються при $t=t_1$ і $t=t_2$.

В якості математичної моделі завади часто використовується стаціонарний випадковий процес, властивості якого не залежать від положення початкового відліку. Математичне очікування і дисперсія стаціонарного випадкового процесу не залежить від часу

$m(t) = m$, $\sigma^2(t) = \sigma^2$, а кореляційна функція залежить тільки від відстані між відліками $\tau = t_1 - t_2$; $B(t_1, t_2) = B(\tau)$.

Багато випадкових процесів, таких як шуми електронних приладів і каналів зв'язку, мають властивість ергодичності, яка полягає в тому, що середні значення функції випадкового процесу знайдені шляхом усереднення по реалізаціях, співпадають з відповідними серединами, які знайдені шляхом усереднення однієї реалізації в часі.

Для ергодичних випадкових процесів математичне очікування, дисперсія та кореляційна функція мають такі вирази:

$$m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt; \quad \sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m]^2 dt;$$

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t) - m][x(t - \tau) - m] dt \quad (131)$$

Спектральні уявлення, що базуються на перетворенні Фур'є можуть бути застосовані тільки до окремих реалізацій випадкового процесу. Середня спектральна густина, знайдена шляхом усереднення сукупності спектральних густин окремих реалізацій процесу, із-за випадковості їх фазових характеристик дорівнює нулю.

Тому для подання спектральних характеристик випадкового процесу вводять поняття спектральної густини потужності, що характеризує розподіл потужності процесу на частотній осі.

Спектральна густина потужності ергодичного процесу знаходиться по одній реалізації і визначається виразом

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| S(j\omega) \right|^2, \quad (132)$$

де $S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ - спектральна густина реалізації

центрованого процесу $x(t) = x(t) - m$

Спектральна густина потужності неергодичного процесу знаходиться шляхом усереднення по реалізаціях спектральних густин потужностей окремих реалізацій, визначених виразом (132).

Середня потужність процесу через спектральну густину потужності виражається інтегралом

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_+(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} G(2\pi f) df \quad (133)$$

де $G_+(\omega)$ - спектральна густина потужності, визначена тільки на додатній напівосі частот.

В заданій смузі частот f_1 - f_2 потужність випадкового процесу

$$P(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} G_+(2\pi f) df \quad (134)$$

Спектральна густина потужності стаціонарного процесу однозначно зв'язана з кореляційною функцією перетворенням Фур'є (теорема Хінчина-Вінера):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (135)$$

В якості моделі завади часто використовується так званий "білий шум", характерною особливістю якого є те, що його спектральна густина потужності постійна в цьому діапазоні частот (від 0 до ∞).

Література

1. Атабеков Г.И. Основы теории цепей. Учебник для вузов. – М.: Энергия, 1969.
2. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебн. для вузов. – 2-е издание, перераб. и доп.- М: Высш. школа., 1988.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. –М.: Высш. школа., 1986.
4. Зернов Н.В., Карпов В.Ч. Теория радиотехнических цепей. – М.: Энергия, 1989.

Зміст

Вступ	3
1.Опис сигналів за допомогою математичних моделей.....	4
2.Класифікація сигналів.....	5
3.Гармонічні коливання.....	11
4.Середнє та діюче значення періодичного сигналу.....	14
5.Уявлення гармонічних коливань у вигляді проєкцій векторів, що обертаються.....	16
6.Динамічне уявлення сигналів.....	20
7.Тригонометрична форма ряду Фур'є.....	26
8.Симетрія сигналів.....	28
9.Застосування комплексних чисел до аналізу електричних сигналів і кіл.....	32
10.Комплексна форма ряду Фур'є.....	36
11.Спектри періодичних сигналів.....	39
12.Спектри неперіодичних сигналів.....	50
13.Зображення сигналів по Лапласу.....	61
14.Основні властивості перетворення Лапласа.....	64
15.Розподіл потужності в спектрі періодичного сигналу.....	65
16.Розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу.....	67
17.Випадкові сигнали.....	68
Література.....	74

Міністерство освіти України
Вінницький державний технічний університет

Навчальне видання

Микола Олександрович Куцевол

Основи теорії електричних сигналів

Навчальний посібник

Вінниця ВДТУ 1998

Редактор Т.А.Ягельська

Коректор З.В.Поліщук

Тираж 50 прим.

ВДТУ, 286021, м.Вінниця, Хмельницьке шосе, 95
