53(03)
К89

В.Е.Кузьмичев

ЗАКОНЫ и ФОРМУЛЫ ФИЗИКИ

Справочник

В.Е.Кузьмичев

ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ФИЗИКИ



СПРАВОЧНИК

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1989

ББК 22.3я2
К 89

УДК 53 (083)

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
В. К. Тартаковский

Печатается по решению редакционной коллегии
справочной литературы АН УССР

Редакция справочной литературы

Заведующий редакцией *В. В. Панюков*

Редактор *А. С. Слыщенко*

Кузьмичев В. Е.

К89 Законы и формулы физики / Отв. ред. В. К. Тартаковский.— Киев: Наук. думка, 1989.— 864 с.— Библиогр.: с. 846—848. (В пер.): 3 р. 40 к., 100 000 экз.

ISBN 5-12-000493-8 (в пер.)

Приведены основные законы и формулы механики, молекулярной физики, термодинамики, электродинамики, механических и электромагнитных колебаний и волн, оптики, атомной и ядерной физики. Отражены квантовые аспекты оптических, атомных и ядерных процессов и явлений. Определены основные физические величины и понятия. Материал систематизирован и подан в краткой доступной форме. Большое внимание уделено физическому содержанию приведенных формул. Рисунки и таблицы дополняют и поясняют текст. В приложении приведены необходимые сведения по математике, таблицы наиболее важных физических величин, физические константы, коэффициенты перевода единиц физических величин в СИ.

Для широкого круга читателей — научных и инженерно-технических работников, преподавателей вузов и средних школ, студентов, абитуриентов, учащихся старших классов и лиц, занимающихся самообразованием.

К $\frac{1604000000-355}{M221(04)-89}$ 555-89

ББК 22.3я2

ISBN 5-12-000493-8

© Издательство «Наукова думка», 1989

Оглавление

Предисловие 17

ЧАСТЬ I

МЕХАНИКА 19

Глава I

Механика материальной точки 19

1. Основные определения и понятия 19
1.1. Задачи классической механики 19
1.2. Основные единицы механических величин 19
1.2.1. Длина (19). 1.2.2. Время (20). 1.2.3. Масса (20).
2. Кинематика 22
2.1. Основные задачи кинематики 22
2.1.1. Материальная точка (22). 2.1.2. Система отсчета (22).
2.2. Криволинейное движение 24
2.2.1. Скорость (24). 2.2.2. Ускорение (26). 2.2.3. Сложение скоростей и ускорений (28). 2.2.4. Параметрическое описание движения (29).
2.3. Классификация механических движений 29
2.3.1. Равномерное прямолинейное движение (29). 2.3.2. Равноускоренное движение (30). 2.3.3. Падение тел (31). 2.3.4. Движение тела, брошенного вертикально вверх (31). 2.3.5 Движение тела, брошенного горизонтально (31). 2.3.6. Движение тела, брошенного под углом к горизонту (32).
2.4. Равномерное и неравномерное движение по окружности 33
2.4.1. Линейная скорость (33). 2.4.2. Угловая скорость и ускорение (34). 2.4.3. Равномерное движение по окружности (36).
3. Динамика 37
3.1. Основная задача динамики 37
3.1.1. Механическая сила (37). 3.1.2. Законы сложения сил (37).
3.2. Первый закон Ньютона (закон инерции) 38
3.2.1. Формулировка закона. Масса и плотность (38). 3.2.2. Следствие первого закона Ньютона (39) 3.2 3. Преобразование Галилея (41).
3.3. Второй закон Ньютона (основной закон динамики) . . 42
3.3.1. Уравнение движения материальной точки (42). 3.3.2. Интегральная форма основного закона динамики (43).
3.4. Третий закон Ньютона 44

3.5. Следствия законов Ньютона . . . 44
3.5.1. Закон сохранения импульса (44). 3.5.2. Закон сохранения момента импульса (45). 3.5.3. Движение центра масс системы (47). 3.5.4. Аддитивность и закон сохранения массы (48). 3.5.5. Задача двух тел (48).
3.6. Движение тела с переменной массой . . . 48
3.6.1. Уравнение Мещерского (48). 3.6.2. Формула Циолковского (49).
3.7. Движение тела под действием силы трения . . . 50
3.7.1. Виды сил сухого трения (50). 3.7.2. Определение коэффициента трения (51). 3.7.3. Вязкое трение и сопротивление среды (51).
3.8. Закон всемирного тяготения . . . 52
3.8.1. Формулировка закона (52). 3.8.2. Гравитационное поле (53). 3.8.3. Сила тяжести и вес (55). 3.8.4. Принцип эквивалентности гравитационной и инертной масс (55). 3.8.5. Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (56).
3.9. Движение небесных тел . . . 56
3.9.1. Траектория (56). 3.9.2. Космические скорости (58). 3.9.3. Законы Кеплера (59).
3.10. Движение в неинерциальных системах отсчета . . . 60
3.10.1. Неинерциальная система отсчета (60). 3.10.2. Сила инерции (60). 3.10.3. Сила Кориолиса (61). 3.10.4. Движение тела в гравитационном поле Земли с учетом ее вращения (62). 3.10.5. Свободное падение тела с учетом вращения Земли (65).

4. Статика . . . 66
4.1. Задачи статики и ее принципы . . . 66
4.2. Условия равновесия тел . . . 68
4.2.1. Условия равновесия тела под действием сил (68). 4.2.2. Устойчивое и неустойчивое равновесие (68).
4.3. Простые машины . . . 69
4.3.1. Рычаг (69). 4.3.2. Неподвижный блок (70). 4.3.3. Подвижный блок (70). 4.3.4. Система блоков (полиспаст) (70). 4.3.5. Дифференциальный блок (71). 4.3.6. Наклонная плоскость (71). 4.3.7. Клин (71). 4.3.8. Винт (72).

5. Работа и энергия . . . 72
5.1. Работа и мощность . . . 72
5.1.1. Работа (72). 5.1.2. Мгновенная и средняя мощность (73). 5.1.3. Коэффициент полезного действия (74).
5.2. Кинетическая и потенциальная энергии . . . 74
5.2.1. Кинетическая энергия материальной точки и системы (74). 5.2.2. Виды механических сил (75). 5.2.3. Потенциальная энергия системы (76). 5.2.4. Закон сохранения энергии невзаимодействующих частиц (77). 5.2.5. Энергия взаимодействия (79). 5.2.6. Закон сохранения энергии для системы взаимодействующих частиц (80). 5.2.7. Теорема вирвала (80).
5.3. Законы столкновения тел . . . 81
5.3.1. Абсолютно упругий удар (81). 5.3.2. Абсолютно неупругий удар (82). 5.3.3. Коэффициент восстановления (83).

6. Релятивистская механика . . . 84
6.1. Постулаты Эйнштейна . . . 84
6.2. Преобразование Лоренца . . . 85
6.2.1. Интервал в четырехмерном пространстве (85). 6.2.2. Преобразование Лоренца. Световой конус (86). 6.2.3. Следствия из преобразования Лоренца (86).
6.3. Релятивистская динамика . . . 88
6.3.1. Импульс, масса. Закон сохранения импульса (88). 6.3.2. Работа и энергия. Закон сохранения энергии (89). 6.3.3. Преобразование импульса, энергии и скорости изменения импульса при переходе от одной системы отсчета к другой (90). 6.3.4. Переход к классической механике (91). 6.3.5. Уравнение движения (91).

7. Динамика систем материальных точек . . . 92
7.1. Обобщенные координаты и скорости . . . 92
7.2. Уравнение Лагранжа . . . 93
7.3. Уравнения Гамильтона . . . 95
7.4. Скобки Пуассона . . . 96
7.5. Уравнение Гамильтона — Якоби . . . 97
7.6. Теорема Лиувилля . . . 98

Глава II . . . 101

Механика твердого тела . . . 101

8. Кинематика твердого тела . . . 101
8.1. Степени свободы . . . 101
8.2. Разложение движения твердого тела на составляющие 101
8.3. Теорема Эйлера . . . 103
8.4. Углы Эйлера . . . 103
9. Динамика твердого тела . . . 104
9.1. Уравнения движения . . . 104
9.2. Момент инерции . . . 105
9.2.1. Вращение вокруг неподвижной оси (105). 9.2.2. Вычисление момента инерции (106). 9.2.3. Моменты инерции простых тел (106). 9.2.4. Теорема Гюйгенса — Штейнера (108).
9.3. Тензор инерции . . . 109
9.4. Работа и энергия движущихся твердых тел . . . 110
9.5. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой . . 112
9.6. Аналогия с поступательным движением . . . 113
10. Упругие тела . . . 113
10.1. Силы упругости. Типы деформаций . . . 113
10.2. Упругие деформации . . . 114
10.2.1. Напряжение. Тензор упругих напряжений (114). 10.2.2. Закон Гука (115). 10.2.3. Упругая энергия. Единицы энергии (117).
10.3. Сдвиг, кручение и изгиб . . . 117

Глава III 119

Механика жидкости и газа . . . 119

11. Основные определения и понятия . . . 119
11.1. Задачи гидроаэромеханики . . . 119
11.2. Жидкость и газ . . . 119
12. Гидростатика и аэростатика . . . 120
12.1. Давление. Закон Паскаля . . . 120
12.2. Сжимаемость . . . 122
12.3. Закон Архимеда . . . 122
12.4. Определение плотности твердых тел и жидкостей . . . 123
12.5. Закон Бойля — Мариотта . . . 123
12.6. Атмосферное давление . . . 124
12.7. Опыт Торричелли . . . 125
12.8. Основное уравнение гидростатики . . . 125
13. Гидродинамика и аэродинамика . . . 126
13.1. Уравнения движения идеальной жидкости . . . 126
13.1.1. Поле скоростей, линии потока (126). 13.1.2. Теорема о неразрывности струи (127). 13.1.3. Уравнение Эйлера (127).
13.2. Стационарное движение идеальной жидкости . . . 129
13.2.1. Уравнение Бернулли (129). 13.2.2. Трубка Пито (130).
13.3. Ламинарное течение жидкости . . . 131
13.3.1. Вязкость (131). 13.3.2. Формула Пуазейля (131). 13.3.3. Закон Стокса (132).
13.4. Турбулентное течение . . . 133
13.5. Законы гидродинамического подобия . . . 133
13.5.1. Физический смысл чисел Рейнольдса и Фруда (133). 13.5.2. Числа Маха и Струхаля (134).
13.6. Лобовое сопротивление . . . 135
13.6.1. Парадокс Даламбера (135). 13.6.2. Коэффициент лобового сопротивления (135).

13.7. Потенциальное и вихревое движения 136
13.8. Подъемная сила 137
13.8.1. Формула Жуковского — Кутта (137). 13.8.2. Эффект Магнуса (139).

ЧАСТЬ II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА 140

Глава IV 140

Молекулярная физика 140

14. Основные определения и понятия 140
14.1. Задачи молекулярной физики 140
14.2. Основные физические величины 140
14.2.1. Давление (140). 14.2.2. Удельный объем (141). 14.2.3. Моль (141). 14.2.4. Температура (142).
14.3. Шкалы температур 143
14.4. Уравнение состояния вещества 143
14.5. Методы молекулярной физики 144
15. Основные положения молекулярно-кинетической теории . . 144
15.1. Молекулярно-кинетическая теория и статистическая физика 144
15.2. Агрегатные состояния вещества 145
15.3. Силы межмолекулярного взаимодействия 145
15.3.1. Силы Ван-дер-Ваальса (145). 15.3.2. Потенциальная энергия (146).
15.4. Движение молекул 147
15.4.1. Движение молекул в газах, жидкостях и твердых телах (147). 15.4.2. Броуновское движение (147).
15.5. Явления переноса 149
15.5.1. Физическая кинетика (149). 15.5.2. Диффузия (149). 15.5.3. Теплопроводность (150). 15.5.4. Внутреннее трение (152).
16. Элементы кинетической теории газов 152
16.1. Параметры газа в нормальном состоянии 152
16.2. Столкновение молекул 153
16.3. Давление газа 154
16.4. Скорость молекул 155
16.4.1. Средние скорости молекул (155). 16.4.2. Закон распределения молекул по скоростям. Распределение Максвелла (156).
16.5. Молекулы в силовом поле 158
16.5.1. Распределение Больцмана (158). 16.5.2. Распределение Максвелла — Больцмана (158).
16.6. Энергия молекул 159
16.6.1. Распределение энергии по степеням свободы (159). 16.6.2. Внутренняя энергия и теплоемкость газа (160).
16.7. Основное уравнение кинетической теории газов . . . 161
16.8. Явления переноса в газах 162
16.8.1. Диффузия газа (162). 16.8.2. Теплопроводность (163). 16.8.3. Внутреннее трение (164). 16.8.4. Связь между коэффициентами переноса (165).
17. Идеальный газ 165
17.1. Давление идеального газа 165
17.2. Уравнение состояния идеального газа 165
17.3. Законы идеального газа 166
17.3.1. Число молекул в единице объема (166). 17.3.2. Закон Бойля — Мариотта (166). 17.3.3. Закон Гей-Люссака (167). 17.3.4. Закон Шарля (168). 17.3.5. Закон Авогадро (169).
17.4. Смесь идеальных газов 169
17.4.1. Парциальное давление и объем (169). 17.4.2. Закон Дальтона (169).
18. Реальные газы 170
18.1. Отклонение свойств газов от идеальности 170
18.2. Уравнения состояния 170

18.2.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса (170). 18.2.2. Уравнение Дитеричи (172). 18.2.3. Уравнения Бертло и Клаузиуса (172). 18.2.4. Вириальные коэффициенты (172).
18.3. Критические параметры газа 173
18.3.1. Изотермы Ван-дер-Ваальса (173) 18.3.2. Изотермы реальных газов (173).
18.4. Эффект Джоуля — Томсона 174

Глава V

Термодинамика 176

19. Термодинамический метод исследования свойств системы взаимодействующих тел 176
19.1. Задачи и методы теории теплоты 176
19.2. Термодинамические параметры состояния системы . . 177

20. Первое начало термодинамики 178
20.1. Количество теплоты. Теплоемкость тела 178
20.2. Теплообмен 181
20.2.1. Уравнение теплового баланса (181). 20.2.2. Процессы передачи теплоты (182).
20.3. Первое начало термодинамики 184
20.3.1. Работа, внутренняя энергия, энтальпия (184). 20.3.2. Уравнение Майера (186). 20.3.3. Тепловой эффект. Уравнение Кирхгофа (186).
20.4. Термодинамические процессы в идеальных газах . . . 187
20.4.1. Адиабатический процесс (187). 20.4.2. Политропический процесс (188).

21. Второе и третье начала термодинамики 190
21.1. Обратимые и необратимые процессы 190
21.2. Циклические процессы 190
21.2.1. Тепловой двигатель. Второе начало термодинамики (190). 21.2.2. Цикл Карно. Теоремы Карно (192). 21.2.3. Термодинамическая температурная шкала (194).
21.3. Энтропия 195
21.3.1. Неравенство Клаузиуса (195). 21.3.2. Закон возрастания энтропии (195). 21.3.3. Энтропия и вероятность (196). 21.3.4. Энтропия идеального газа (198).
21.4. Термодинамические потенциалы 199
21.4.1. Система с двумя степенями свободы (199). 21.4.2. Термодинамические соотношения (201). 21.4.3. Система со многими степенями свободы (201). 21.4.4. Системы с переменным числом частиц (202). 21.4.5. Экстремальные свойства термодинамических потенциалов (203).
21.5. Третье начало термодинамики 205
21.5.1. Теорема Нернста (205). 21.5.2. Следствия третьего начала термодинамики (205).

22. Фазовые превращения и равновесие 206
22.1. Фазы и фазовые превращения первого и второго рода 206
22.1.1. Равновесие двух фаз (207). 22.1.2. Равновесие трех фаз (209). 22.1.3. Метастабильные состояния (211). 22.1.4. Правило фаз Гиббса (212).
22.2. Изменение агрегатного состояния вещества 213
22.2.1. Плавление и кристаллизация (213). 22.2.2. Испарение и конденсация. Пар (214). 22.2.3. Влажность воздуха (215).

23. Тепловое излучение 217
23.1. Равновесное излучение. Основные понятия 217
23.2. Закон Кирхгофа 219
23.3. Законы излучения абсолютно черного тела 222
23.3.1. Закон Стефана — Больцмана (222). 23.3.2. Теорема Вина. Закон смещения Вина (223). 23.3.3. Формула Рэлея — Джинса (224). 23.3.4. Формула Планка (226).

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА 228

Глава VI

Электричество. 228

24. Электростатика 228
24.1. Основные понятия и определения 228
24.1.1. Электрический заряд (228). 24.1.2. Закон сохранения заряда (229). 24.1.3. Квантование электрического заряда (229). 24.1.4. Напряженность электрического поля (229). 24.1.5. Проводники и диэлектрики (230). 24.1.6. Диэлектрическая проницаемость вещества (230).
25. Законы электростатики 231
25.1. Закон Кулона 231
25.2. Электростатическое поле 233
25.2.1. Вектор напряженности (233). 25.2.2. Электрический диполь (235). 25.2.3. Электростатические поля простых систем (237). 25.2.4. Вектор электрической индукции (241).
25.3. Теорема Гаусса для электрических полей 242
25.4. Потенциальность электрического поля 244
25.4.1. Работа перемещения заряда в электрическом поле (244). 25.4.2. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал (245). 25.4.3. Потенциалы электростатических полей простых систем (247). 25.4.4. Уравнения Пуассона и Лапласа (250).
25.5. Электростатическая энергия 251
25.5.1. Потенциальная энергия (251). 25.5.2. Собственная энергия заряда (252). 25.5.3. Объемная плотность энергии (253). 25. 5. 4. Различие между потенциальной энергией и потенциалом (254). 25.5.5. Термодинамика диэлектрика (254).
25.6. Емкость электрического поля 256
25.6.1. Емкость проводника (256). 25.6.2. Емкость конденсатора (257). 25.6.3. Энергия конденсатора (259). 25.6.4. Соединение конденсаторов (260).
26. Законы постоянного электрического тока 261
26.1. Электрический ток 261
26.1.1. Сила и плотность тока (261) 26.1.2. Уравнение непрерывности (263).
26.2. Закон Ома 264
26.2.1. Закон Ома для плотности постоянного тока (264). 26.2.2. Сторонние силы (266). 26.2.3. Закон Ома для силы тока. ЭДС источника тока (266). 26.2.4. Зависимость сопротивления от температуры. Сверхпроводимость (268).
26.3. Электрическая цепь 270
26.3.1. Соединение сопротивлений (270) 26.3.2. Соединение источников тока (271). 26.3.3. Правила Кирхгофа (272). 26.3.4. Измерение тока, напряжения, сопротивления и ЭДС источника (272).
26.4. Работа и мощность электрического тока 274
26.4.1. Работа и мощность (274). 26.4.2. Закон Джоуля — Ленца (275). 26.4.3. Закон сохранения энергии для электрического поля (276).
26.5. Квазистационарные токи 277
26.5.1. Разряд конденсатора (278). 26.5.2. Зарядка конденсатора (278).
27. Электрический ток в жидкостях и газах 279
27.1. Прохождение электрического тока через жидкости . . . 279
27.1.1. Электролиты (279). 27.1.2. Законы электролиза (280). 27.1.3. Закон Ома для тока в жидкости (281).
27.2. Прохождение электрического тока через газы 282
27.2.1. Ионизация и рекомбинация (282). 27.2.2. Самостоятельный и несамостоятельный газовые разряды (283). 27.2.3. Тлеющий разряд (284). 27.2.4. Искровой разряд (285). 27.2.5. Коронный разряд (286). 27.2.6. Дуговой разряд (287).
27.3. Плазма 287
27.3.1. Четвертое состояние вещества (287). 27.3.2. Удельная проводимость плазмы (289). 27.3.3. Метод кинетических уравнений (289). 27.3.4. Термодинамические величины (291)

27.4. Электрический ток в вакууме 292
27.4.1. Скорость свободных электронов (292). 27.4.2. Термоэлектронная эмиссия (293). 27.4.3. Вторичная электронная эмиссия (294). 27.4.4. Автоэлектронная эмиссия (295). 27.4.5. Электронные лампы (295).
28. Электрический ток в металлах 298
28.1. Эффект Холла 298
28.2. Работа выхода электрода из металла 299
28.3. Закон Вольты 300

Глава VII

Магнетизм 302

29. Магнитное поле 302
29.1. Основные понятия 302
29.1.1. Магнитные свойства веществ (302). 29.1.2. Индукция магнитного поля (302). 29.1.3. Магнитное поле в среде. Магнетики (303). 29.1.4. Система единиц Гаусса и СИ (305). 29.1.5. Линии индукций магнитного поля (306).
29.2. Свойства магнитного поля 307
29.2.1. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов (307). 29.2.2. Закон Ампера (307). 29.2.3. Закон Био — Савара—Лапласа (308). 29.2.4. Магнитное поле простейших систем (309). 29.2.5. Действие магнитного поля на проводники с током (311). 29.2.6. Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток (313).
29.3. Соленоидальность и вихревой характер магнитного поля 314
29.3.1. Теорема Гаусса для магнитных полей (314). 29.3.2. Теорема о циркуляции магнитных полей (314).
29.4. Сила Лоренца 316
29.4.1. Определение силы Лоренца (316). 29.4.2. Преобразование электромагнитного поля (316).
30. Электромагнитная индукция 317
30.1. Явление электромагнитной индукции 317
30.1.1. Закон электромагнитной индукции (317). 30.1.2. ЭДС электромагнитной индукции в простых системах (318).
30.2. Явления самоиндукции и взаимной индукции . . . 319
30.2.1. Самоиндукция (319). 30.2.2 Индуктивность простых систем (320). 30.2.3. Явления при замыкании и размыкании постоянного тока (320). 30.2.4. Взаимная индукция (321).
30.3. Энергия магнитного поля 322
30.3.1. Магнитная энергия (322). 30.3.2. Объемная плотность магнитной энергии (323).

Глава VIII

Элементы электродинамики сплошных сред 324

31. Теория Максвелла 324
31.1. Феноменологический и макроскопический характер теории 324
31.2. Уравнения Максвелла 325
31.2.1. Дифференциальная форма уравнений (325). 31.2.2. Интегральная форма уравнений (327).
31.3. Решение уравнений Максвелла 327
32. Законы сохранения в электромагнитном поле 329
32.1. Закон сохранения энергии 329
32.2. Закон сохранения импульса. Масса электромагнитного поля 330
32.3. Границы применимости классической электродинамики 331
33. Движение заряженной частицы в электромагнитном поле . . 332
33.1. Уравнение движения точечной заряженной частицы . . 332
33.2. Заряженная частица в электростатическом поле . . . 333

33.2.1. Электрон в продольном однородном электростатическом поле (333). 33.2.2. Электрон в поперечном однородном электростатическом поле (334). 33.2.3. Аксиально-симметричное электрическое поле (334).
33.3. Заряженная частица в магнитном поле 336
33.3.1. Движение частицы в постоянном однородном магнитном поле (336). 33.3.2. Аксиально-симметричное магнитное поле (338). 33.3.3. Медленно изменяющееся магнитное поле (339).
33.4. Заряженная частица во внешних полях 340
33.4.1. Дрейф (340). 33.4.2. Электрический дрейф (341). 33.4.3. Дрейф в гравитационном поле (341).
33.5. Релятивистская частица в электромагнитном поле . . 341
33.5.1. Движение частицы в статических полях (341). 33.5.2. Ускорители заряженных частиц (343).

ЧАСТЬ IV

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ 345

Глава IX

Механические колебания и волны 345

34. Колебательное движение 345
35. Незатухающие гармонические колебания 346
35.1. Уравнение движения и его решение 346
35.2. Кинетическая и потенциальная энергии колебаний . . 348
35.3. Малые колебания 349
35.4. Простые колебательные системы 349
36. Затухающие свободные колебания 351
36.1. Слабое затухание 351
36.2. Сильное затухание 353
37. Вынужденные колебания 354
37.1. Уравнение движения и его решение 354
37.2. Явление резонанса 355
37.3. Поглощение мощности. Амплитуды дисперсии и поглощения 356
38. Принцип суперпозиции 358
38.1. Сложение гармонических колебаний 358
38.2. Фигуры Лиссажу 360
38.3. Разложение в ряд Фурье 361
39. Волны в упругой среде 361
39.1. Основные понятия 361
39.2. Плотность и поток энергии 363
39.3. Волновое уравнение и его решение 363
39.4. Стоячие волны 365
39.5. Распространение волн в неоднородных средах 366
39.5.1. Отражение и преломление волн (366). 39.5.2. Интерференция. Дифракция (368).
39.6. Солитоны 369
40. Звуковые волны 371
40.1. Природа звуковых волн 371
40.2. Характеристики звука 373
40.3. Эффект Доплера 374
40.4. Ультразвук 375

Глава X

Электромагнитные колебания и волны 376

41. Электромагнитные колебания 376
41.1. Колебательный контур 376

41.2. Незатухающие электромагнитные колебания 377
41.3. Затухающие электромагнитные колебания 379
41.4. Открытый колебательный контур 380
42. Вынужденные электромагнитные колебания 381
42.1. Переменный ток 381
42.2. Цепь переменного тока. Закон Ома 383
42.3. Правила Кирхгофа для переменного тока 384
42.4. Мощность переменного тока 386
42.5. Трансформатор 387
43. Электромагнитные волны 389
43.1. Переменное электромагнитное поле 389
43.2. Электромагнитные волны в непроводящей среде . . 391
43.2.1. Уравнения колебаний. Плоская монохроматическая волна (391). 43.2.2. Стоячая электромагнитная волна (393). 43.2.3. Сферические электромагнитные волны (394). 43.2.4. Энергия и интенсивность электромагнитной волны (394). 43.2.5. Давление электромагнитных волн (395).
43.3. Реальные электромагнитные волны 396
43.3.1. Спектральное разложение (396). 43.3.2. Волновой пакет (397). 43.3.3. Электромагнитные волны в линиях передач (398). 43.3.4. Скин-эффект (399). 43.3.5. Шкала электромагнитных волн (401).
44. Излучение электромагнитных волн 401
44.1. Излучение нерелятивистской системы заряженных частиц 401
44.1.1. Поле в волновой зоне (401). 44.1.2. Поле на близких расстояниях (403).
44.2. Излучение релятивистской заряженной частицы . . . 404
44.2.1. Потенциалы Лиенара — Вихерта (404). 44.2.2. Угловое распределение излучения (405). 44.2.3. Потеря энергии на излучение (406).
44.3. Излучение макроскопических тел 407
44.3.1. Вектор Герца (407). 44.3.2. Излучение линейной антенны (408). 44.3.3. Вибратор Герца (409). 44.3.4. Рамочная антенна (410).
44.4. Излучение Черенкова — Вавилова. 410
45. Рассеяние электромагнитной волны системой зарядов . . . 412
45.1. Сечение рассеяния. Закон Рэлея 412
45.2. Формула Клейна — Нишины 413

ЧАСТЬ V

ОПТИКА 415

Глава XI

Геометрическая оптика 415

46. Предмет исследования оптики 415
46.1. Распространение света 415
46.2. Скорость света в среде 417
47. Основные законы геометрической оптики 419
47.1. Законы отражения света 419
47.2. Законы преломления света 420
47.3. Принцип Ферма. Уравнение геометрической оптики . 421
47.4. Построение изображений в идеальных оптических системах 422
47.4.1. Плоское зеркало (422). 47.4.2. Сферическое зеркало (422). 47.4.3. Плоскопараллельная пластинка (423). 47.4.4. Призма (424). 47.4.5. Линза (424).
48. Реальные оптические системы 426
48.1. Погрешности оптических систем 426
48.2. Оптические приборы 428

48.2.1. Проекционный аппарат (428). 48.2.2. Фотоаппарат (429). 48.2.3. Глаз (429). 48.2.4. Лупа (431). 48.2.5. Микроскоп (431). 48.2.6. Телескопы и бинокли (432).
49. Элементы фотометрии 433
49.1. Интенсивность лучистого потока 433
49.2. Поверхностная яркость и светимость 435
49.3. Спектральный состав излучения 435

Глава XII

Волновая оптика 437

50. Электромагнитная природа света 437
51. Дисперсия света 437
51.1. Классическая теория дисперсии света 437
51.2. Дисперсионный спектр видимого света 440
52. Спектры испускания и поглощения света 441
52.1. Испускание света 441
52.1.1. Типы спектров испускания (441). 52.1.2. Классическая теория испускания света (441). 52.1.3. Спектральные закономерности (445).
52.2. Поглощение света 446
52.2.1. Спектры поглощения (446). 52.2.2. Законы Бугера — Ламберта и Бэра (447).
53. Интерференция света 448
53.1. Природа явления 448
53.2. Цвета тонких пленок 449
53.3. Кольца Ньютона 450
54. Дифракция света 451
54.1. Теория дифракции 451
54.2. Дифракция Френеля 452
54.2.1. Интенсивность света (452). 54.2.2. Зоны Френеля (453). 54.2.3. Зоны Шустера (454).
54.3. Дифракция Фраунгофера 455
54.3.1. Интенсивность света (455). 54.3.2. Дифракция на узкой длинной щели (456). 54.3.3. Дифракция на прямоугольном отверстии (456). 54.3.4. Принцип Бабине (457). 54.3.5. Дифракция на круглом отверстии (457).
54.4. Дифракционная решетка как спектральный прибор . . 458
55. Поляризация света 459
55.1. Явление поляризации света 459
55.2. Поляризация при отражении света 460
55.3. Поляризация при двойном лучепреломлении . . . 461
55.4. Вращение плоскости поляризации 462

Глава XIII

Квантовая оптика 464

56. Корпускулярно-волновая природа света 464
57. Действие света на вещество 465
57.1. Фотоэлектрический эффект 465
57.1.1. Теория Эйнштейна (465). 57.1.2. Виды фотоэффекта (466).
57.2. Эффект Комптона 467
57.2.1. Рассеяние фотона на свободном электроне (467). 57.2.2. Электроны отдачи (469).
57.3. Давление света 470
57.3.1. Электромагнитная теория светового давления (470). 57.3.2. Квантовая теория светового давления (470).
57.4. Фотохимические превращения под действием света . . 470
57.4.1. Фотохимические реакции (470). 57.4.2. Сенсибилизированные фотохимические реакции (471).
57.5. Люминесценция 471
57.5.1. Природа явления (471). 57.5.2. Законы фотолюминесценции (472).

58. Оптические квантовые генераторы 473
58.1. Спонтанное и индуцированное излучения 473
58.1.1. Коэффициенты Эйнштейна (473). 58.1.2. Усиление излучения (476). 58.1.3. Принцип обратной связи. Резонатор (477).
58.2. Квантовые генераторы 478
58.2.1. Молекулярный генератор — мазер (478). 58.2.2. Оптический квантовый генератор — лазер (479).
58.3. Голография 482

ЧАСТЬ VI

АТОМНАЯ ФИЗИКА 485

Глава XIV

Элементы квантовой механики 485

59. Общие принципы квантовой теории 485
59.1. Принцип соответствия 485
59.2. Принцип дополнительности 485
59.3. Принцип причинности 486
59.4. Принцип сохранения числа частиц 486
59.5. Принцип суперпозиции состояний 486
60. Волны вещества 486
60.1. Волна де Бройля 486
60.2. Экспериментальное подтверждение волновой природы вещества 488
60.2.1. Опыты Дэвиссона и Джермера (488). 60.2.2. Опыты Штерна (488).
60.3. Дуализм волна — частица 489
61. Соотношение неопределенности Гейзенберга 489
61.1. Сопряженные переменные 489
61.2. Процесс измерения 491
62. Уравнение Шредингера 492
62.1. Правила квантования динамических переменных классической механики 492
62.1.1. Волновая функция (492). 62.1.2. Операторы (494).
62.2. Нерелятивистское волновое уравнение 496
62.2.1. Уравнение Шредингера (496). 62.2.2. Интегралы движения и квантовые числа (498). 62.2.3. Уравнение непрерывности (498). 62.2.4. Частица в поле действия скалярного потенциала (499). 62.2.5. Заряженная частица в электромагнитном поле (500). 62.2.6. Уравнение движения в форме Гейзенберга (501).
62.3. Стационарное уравнение Шредингера 502
62.3.1. Стационарное состояние (502). 62.3.2. Структура энергетического спектра (502).
62.4. Инвариантность уравнения Шредингера и законы сохранения 503
62.4.1. Оператор симметрии (503). 62.4.2. Калибровочные преобразования и сохранение электрического заряда (505). 62.4.3. Трансляционная инвариантность и сохранение полного импульса (505). 62.4.4. Инвариантность относительно вращений и сохранение момента импульса (506). 62.4.5. Инвариантность относительно отражений и сохранение четности (506). 62.4.6. Инвариантность относительно перестановок частиц и сохранение симметрии. Бозоны и фермионы (507). 62.4.7. Инвариантность относительно сдвига во времени и закон сохранения энергии (507).
62.5. Квантовые переходы 508
62.5.1. Вероятность перехода из одного состояния в другое (508). 62.5.2. Вероятность перехода в единицу времени при постоянном взаимодействии (511). 62.5.3. Вероятность перехода в единицу времени при гармоническом взаимодействии (512).
62.6. Теория возмущений 512

63. Релятивистское волновое уравнение 514
63.1. Уравнение Клейна — Гордона 514
63.1.1. Свободное движение релятивистской частицы (514). 63.1.2. Движение релятивистской частицы в электромагнитном поле (517).
63.2. Уравнение Дирака 518
63.2.1. Свободное движение электрона (518). 63.2.2. Движение электрона в электромагнитном поле. Зарядовое сопряжение. Теория дырок (521). 63.2.3. Динамические переменные частицы Дирака (523).

Глава XV

Механика изолированного атома 521

64. Прямые экспериментальные доказательства существования атомных и субатомных частиц 524
64.1. Открытие электрона 524
64.2. Определение числа Авогадро 525
64.3. Явление радиоактивности 528
64.4. Опыты Резерфорда 529
64.5. Наблюдение элементарных атомных процессов . . . 532
64.6. Атомные единицы 534
65. Квантование в атомных системах 535
65.1. Теория атома Бора 535
65.1.1. Постулаты Бора (535). 65.1.2. Водородоподобный атом (537). 65.1.3. Правила квантования Бора — Зоммерфельда (539).
65.2. Энергетические уровни атомов 542
65.2.1. Опыты Франка — Герца (542). 65.2.2. Ионизационный потенциал (543).
66. Строение атома 545
66.1. Составляющие атома и их характеристика 545
66.2. Теория Шредингера для водородоподобного атома . . 546
66.2.1. Волновое уравнение (546). 66.2.2. Сферические функции (547). 66.2.3. Энергетический спектр (549). 66.2.4. Радиальная волновая функция (550). 66.2.5. Распределение электронной плотности (552).
66.3. Спектры атомов щелочных металлов 554
66.3.1. Модель валентного электрона (554). 66.3.2. Мультиплетность спектров и спин электрона (556).
66.4. Тонкая структура спектров атомов 559
66.4.1. Энергия спин-орбитальной связи (559). 66.4.2. Релятивистская поправка (560). 66.4.3. Тонкая структура спектральных линий атома водорода (561). 66.4.4. Дублеты щелочных металлов (562). 66.4.5. Опыты Лэмба и Резерфорда. Лэмбовский сдвиг (562).
67. Атомы со многими электронами 564
67.1. Уравнение Шредингера для системы электронов . . . 564
67.1.1. Принцип Паули (564) 67.1.2 Приближение независимых электронов (566). 67.1.3. Методы Хартри и Хартри — Фока (569).
67.2. Атом гелия 570
67.2.1. Теория основного состояния атома гелия (571). 67.2.2. Орто- и парагелий (573).
67.3. Векторная модель атома 576
67.3.1. Связь Рассель — Саундерса (*LS*-связь).(576). 67.3.2. *jj*-Связь (578).
67.4. Магнитные свойства атома 578
67.4.1. Орбитальный магнитный момент электрона (578). 67.4.2. Собственный магнитный момент электрона (580). 67.4.3. Полный магнитный момент одноэлектронного атома (581). 67.4.4. Магнитный момент многоэлектронного атома (582). 67.4.5. Опыты Штерна и Герлаха (583).
67.5. Теория периодической системы элементов Д. И. Менделеева 584
67.5.1. Принципы объяснения периодического закона (584). 67.5.2. Электронные конфигурации элементов (586).
68. Атом во внешних электрических и магнитных полях . . . 590
68.1. Атом во внешнем электрическом поле 590
68.1.1. Эффект Штарка (590). 68.1.2. Линейный эффект Штарка для атома водорода (592).
68.2. Атом во внешнем магнитном поле 592
68.2.1. Эффект Зеемана (592). 68.2.2. Эффект Пашена — Бака (595). 68.2.3. Магнитомеханические явления (597). 68.2.4. Магнитные свойства веществ (598). 68.2.5. Теорема Лармора и диамагнетизм (599). 68.2.6. Электронный парамагнитный резонанс (600).
69. Рентгеновские спектры 601
69.1. Рентгеновские лучи 601
69.1.1. Природа рентгеновских лучей (601). 69.1.2. Источники рентгеновского излучения (602).
69.2. Типы рентгеновского излучения и их спектры . . . 603
69.2.1. Тормозное излучение (603). 69.2.2 Характеристическое излучение (604). 69.2.3. Закон Мозли (606).

ЧАСТЬ VII

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА 609

Глава XVI

Атомное ядро 609

70. Общие свойства атомных ядер 609
70.1. Предмет и основные задачи ядерной физики 609
70.2. Характеристики атомного ядра 609
70.2.1. Состав ядер (609). 70.2.2. Размер ядра (612). 70.2.3. Масса и энергия связи ядра (619). 70.2.4. Спин ядра (620). 70.2.5. Магнитный момент ядра (621). 70.2.6. Квадрупольный момент ядра (624).
70.3. Структура спектра энергетических уровней ядра . . . 629
71. Ядерное взаимодействие 630
71.1. Особенности ядерных сил 630
71.2. Нерелятивистская теория ядра 631
71.3. Мезонная теория нуклон-нуклонного взаимодействия 633
71.3.1. Виртуальные частицы (633). 71.3.2. Модель ядерных сил Юкавы (634).
71.4. Сравнение атомных и ядерных сил 638
72. Структура ядра и ядерные модели 639
72.1. Классификация моделей 639
72.2. Модель жидкой капли 642
72.2.1. Обоснование модели (642). 72.2.2. Формула Вайцзеккера (642). 72.2.3. Линия стабильности (643). 72.2.4. Бета-стабильность изобар (645). 72.2.5. Стабильность к испусканию тяжелых частиц (646). 72.2.6. Возбужденные состояния (646). 72.2.7. Деление ядер (647).
72.3. Модель ферми-газа 647
72.3.1. Энергия и импульс Ферми (647). 72.3.2. Кинетическая энергия нуклонов (649). 72.3.3. Возбужденные состояния (650).
72.4. Оболочечная модель ядра 651
72.4.1. Магические числа (651). 72.4.2. Одночастичная оболочечная модель (652). 72.4.3. Классификация одночастичных состояний (655).
72.5. Обобщенная модель ядра 659
72.5.1. Поверхностные колебания сферических ядер (660). 72.5.2. Коллективные вращательные состояния (663).
73. Ядерные реакции 668
73.1. Понятия и определения 668
73.1.1. Типы ядерных реакций (668). 73.1.2. Характеристики ядерных реакций (670). 73.1.3. Следствия законов сохранения (671).
73.2. Матрица столкновений 673
73.2.1. Бесспиновые ядерные частицы (674). 73.2.2. Ядерные частицы со спином (677). 73.2.3. Параметризация *S*-матрицы (678).
73.3. Механизмы ядерных реакций 680
73.3.1. Реакции с образованием составного ядра (680). 73.3.2. Прямые ядерные реакции (685). 73.3.3. Оптическая модель (687). 73.3.4. Фотоядерные реакции. Эффект Мессбауэра (689). 73.3.5. Цепная ядерная ре-

акция (691). 73.3.6. Термоядерные реакции (694). 73.3.7. Источник энергии звезд и их эволюция (697). 73.3.8. Дифракционная модель (702).
74. Радиоактивный распад 703
74.1. Законы радиоактивного распада 703
74.1.1. Сущность явления (703). 74.1.2. Теория радиоактивного распада (704).
74.2. Типы радиоактивного распада ядер 708
74.2.1. Альфа-распад (708). 74.2.2. Бета-распад (711). 74.2.3. Спонтанное деление тяжелых ядер (716). 74.2.4. Протонная радиоактивность (717). 74.2.5. Радиоактивные ряды (717).

Глава XVII

Элементарные частицы 718

75. Свойства элементарных частиц 718
75.1. Предмет физики частиц 718
75.1.1. Единицы физических величин (718). 75.1.2. Краткая хронология (719).
75.2. Стабильность частиц 730
75.3. Характеристики частиц 733
75.4. Классификация частиц 735
75.5. Частицы и античастицы 737
75.6. Законы сохранения 740
76. Структура частиц 740
76.1. Унитарная симметрия 740
76.1.1. Изотопический спин (740). 76.1.2. Теория унитарной симметрии (741).
76.2. Кварковая модель 743
76.2.1. Аромат и цвет (743). 76.2.2. Глюоны (745). 76.2.3. Три поколения кварков и лептонов (748). 76.2.4. Структура кварков и лептонов (748).
77. Взаимодействия частиц 750
77.1. Четыре вида взаимодействий 750
77.2. Гравитационное взаимодействие 753
77.3. Электромагнитное взаимодействие 754
77.3.1. Константа связи (754). 77.3.2. Квантовая электродинамика (755). 77.3.3. Взаимодействие фотонов с адронами (758).
77.4. Слабое взаимодействие 761
77.4.1. Взаимодействие слабых токов (761). 77.4.2. Классификация слабых процессов (765). 77.4.3. Несохранение четности (766).
77.5. Сильное взаимодействие 768
77.5.1. Особенности сильных взаимодействий (768). 77.5.2. Шармоний (769). 77.5.3. Адрон-адронные столкновения (771).
78. Современные концепции физики частиц 775
78.1. Формализм S-матрицы 775
78.1.1. Распад и столкновение частиц (775). 78.1.2. Инвариантная теория возмущений (777).
78.2. Калибровочные поля 780
78.2.1. Принципы квантования полей (780). 78.2.2. Электромагнитное поле как калибровочное (786). 78.2.3. Поля Янга — Миллса (787). 78.2.4. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии (790).
78.3. Теория электрослабых взаимодействий 792
78.4. Квантовая хромодинамика 795
78.4.1. Цветовая калибровочная симметрия (795). 78.4.2. Модель струны (797). 78.4.3. Теория поля на решетке (798).
78.5. Теории великого объединения 801
78.5.1. Модели объединения (801). 78.5.2. Суперсимметрии (803).
78.6. Физика частиц и космология 804
Приложение 808
Рекомендуемая литература 846
Перечень таблиц 849
Справка имен 851

Предисловие

Основная цель справочника состоит в том, чтобы дать в краткой форме по возможности полное представление о современной физике и ее законах. Физика — экспериментальная наука. В основу ее законов положены опытные факты. Сами законы формулируются в виде количественных соотношений между наблюдаемыми на опыте физическими величинами. Языком физики является математика. Поэтому законы физики записываются в форме математических выражений. Это позволяет не только придать им более совершенную по сравнению со словесной форму, но и, что более важно, используя правила обращения с математическими величинами, получить многочисленные следствия законов, допускающие опытную проверку. Опытной проверкой следствий известных законов и поиском новых фактов занимается экспериментальная физика, формулировкой законов природы, объяснением известных эффектов на основе этих законов и предсказанием новых явлений — теоретическая физика. Эти две области физики тесно взаимосвязаны, что служит источником развития каждой из них.

Физика изучает наиболее общие и фундаментальные закономерности явлений природы и законы движения. Без знания этих законов нельзя получить правильное представление о более сложных явлениях и формах движения материи, изучаемых другими естественными науками. Физика является естественнонаучной основой таких наук, как химия, биология, астрономия, геология. Основополагающую роль играет физика в развитии техники. Открытие новых физических явлений приводит к созданию принципиально новых приборов, машин и технологий, определяющих научно-технический прогресс.

Кроме утилитарного физика имеет огромное общенаучное значение как одна из областей интеллектуальной деятельности человека. Развиваясь и обогащаясь, она постоянно видоизменяет, дополняя и углубляя, представления о природе вещей, явлениях и причинных связях окружающего мира. Ее теоретические концепции приобретают со временем общефилософское значение.

Таким образом, знания по физике необходимы широкому кругу специалистов, работающих в самых различных областях науки и техники. Настоящий справочник дает основные сведения о законах и формулах физики. В нем достаточно полно изложены сведения из разделов механики, молекулярной физики и термодинамики, электродинамики, тео-

рии колебаний и волн, оптики, атомной физики, физики атомного ядра и элементарных частиц. Большое внимание уделено выяснению физического содержания приводимых формул. Строгие математические выкладки не приводятся. Тем не менее, где это возможно, указан путь получения математических соотношений, приведены соответствующие уравнения движения, которым они удовлетворяют.

Предназначенный широкому кругу читателей справочник охватывает материал в объеме курса общей физики для вузов. Все необходимые сведения по высшей математике даны в ходе изложения физического материала. Этой же цели служит Приложение.

Между математическим аппаратом физики и изучаемым ею предметом существует простая зависимость: чем сложнее изучаемый предмет (явление), тем сложнее требуемый для его описания математический аппарат. Это хорошо прослеживается по мере изложения материала, начиная от механики материальной точки и заканчивая физикой элементарных частиц и ее современными принципами и понятиями. Однако каждой главой, разделом или подразделом можно пользоваться отдельно, без предварительного знакомства с предшествующим материалом. Это достигается путем использования внутренних перекрестных ссылок на разделы, связанные с излагаемым материалом. Эти ссылки указаны в квадратных скобках.

Справочник будет полезен студентам при решении задач по курсу общей физики и инженерам при выполнении технических расчетов в прикладных задачах, преподавателям высшей и средней школы, а также научным работникам, для которых физика не является основной дисциплиной. Справочником могут пользоваться учащиеся старших классов и абитуриенты, так как разделы, изучаемые в средней школе, содержат все необходимые формулы в доступных для них обозначениях.

Справочник содержит большое количество иллюстраций и таблиц, охватывающих все разделы физики. Используя общедоступные издания, приведенные в списке литературы, можно самостоятельно расширить и углубить знания по физике.

В справочнике в качестве основной использована Международная система единиц физических величин (СИ). Исключение сделано для разделов, посвященных атомной и ядерной физике, где более естественной является гауссовая система, дополненная внесистемной единицей энергии — электронвольтом. Формулы, описывающие квантовые процессы в гауссовой системе единиц, содержат только физические постоянные (e, $\hbar$, c). Все числовые оценки в справочнике выражены в СИ. В Приложении приведены формулы электродинамики и теории электромагнитных колебаний (обозначенные в тексте звездочкой), записанные в гауссовой системе единиц.

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук В. Б. Беляеву, кандидату физико-математических наук В. В. Пересыпкину, доктору физико-математических наук В. К. Тартаковскому за полезные замечания и советы при подготовке справочника.

Автор

ЧАСТЬ I
МЕХАНИКА

Глава 1
Механика материальной точки

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

1.1. Задачи классической механики

Механика есть наука о равновесии и перемещении одного тела относительно другого под действием сил. Изменение в течением времени взаимного положения тел в пространстве называется *механическим движением*. Совокупность тел, движение которых рассматривается, называют *механической системой*.

Движение тел со скоростями v много меньшими скорости света c в вакууме ($v \ll c \simeq 3 \cdot 10^8$ м/с) изучает классическая (нерелятивистская) механика. Она отвлекается от внутренней структуры тел и природы их взаимодействия. Классическая механика ограничивается изучением движения идеализированных модельных тел: материальной точки [2.1.1], абсолютно твердого тела [8; 9; 10], несжимаемой жидкости и идеального газа [11; 12; 13], которые приблизительно правильно передают отдельные свойства конкретных реальных объектов.

Сила в механике (механическая сила) есть векторная величина, которая характеризует меру взаимного воздействия тел одного на другое. Начало вектора силы находится в точке ее приложения, а длина определяет величину этой силы [3.1.1]. Силы в механике считаются заданными. Их физическое содержание раскрывается законами Ньютона [3.2; 3.3; 3.4].

Механика делится на три раздела: *кинематику* [2], *динамику* [3] и *статику* [4].

1.2. Основные единицы механических величин

Для количественного описания механического движения тел вводят величины, характеризующие пространство, время и рассматриваемые тела: длину l, время t и массу m.

1.2.1. Длина. *Длина* l определяется как геометрическое расстояние между двумя точками в пространстве. В Международной системе единиц (СИ) за единицу длины принят метр (м):

$$[l] = \text{м}.$$

По определению

$$1\ \text{м} = 1\,650\,763{,}73\lambda\ (^{86}\text{Kr}),$$



Рис. 1.1

где λ (^{86}Kr) — длина волны в вакууме красного цвета, которая испускается изотопом криптона ^{86}Kr при переходе из состояния $5D_5$ в состояние $2P_{10}$. Характерные размеры встречающихся в природе объектов показаны на рис. 1.1.

Производными от длины являются площадь S и объем V. Они характеризуют области пространств двух и трех измерений, занимаемые протяженными телами. Единицами площади и объема в СИ являются:

$$[S] = \text{м}^2, \quad [V] = \text{м}^3.$$

1.2.2. Время. *Время* t между двумя событиями в заданной точке пространства определяется как разность между показаниями прибора, называемого часами, в основе работы которого лежит строго периодический и равномерный физический процесс. В СИ за единицу времени принята секунда (с):

$$[t] = \text{с}.$$

По определению

$$1\ \text{с} = 9\ 192\ 631\ 770 \cdot T\ (^{133}\text{Cs}),$$

где T (^{133}Cs) — период излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия ^{133}Cs в отсутствие внешних полей. Характерные промежутки времени показаны на рис. 1.2.

1.2.3. Масса. *Масса* m тела есть мера количества вещества, содержащегося в этом теле. Физическое содержание понятия массы раскры-

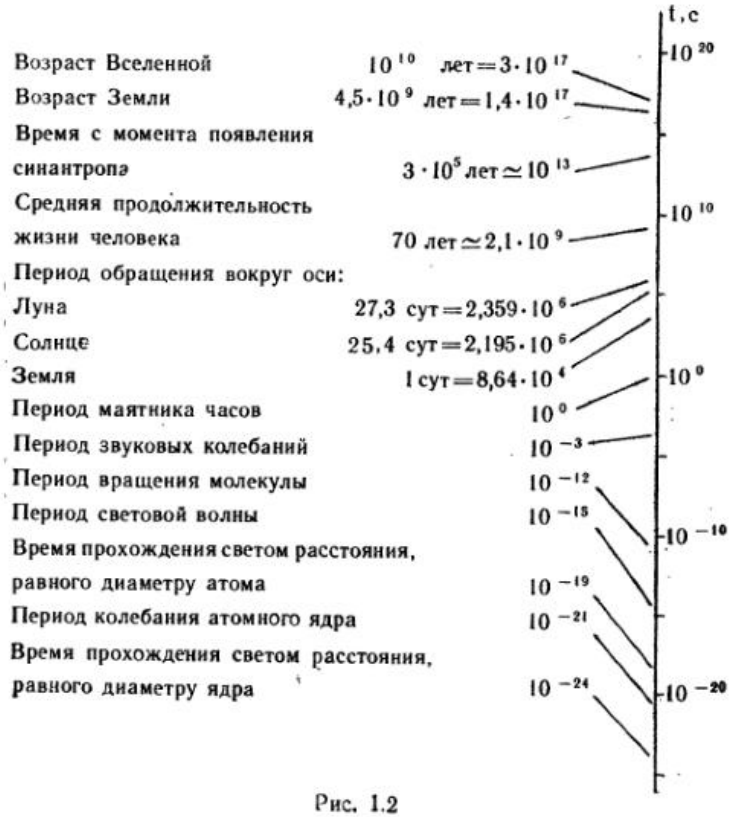


Рис. 1.2



Рис. 1.3

вается законами Ньютона [3.2; 3.3; 3.4]. Единицей массы в СИ является килограмм (кг):

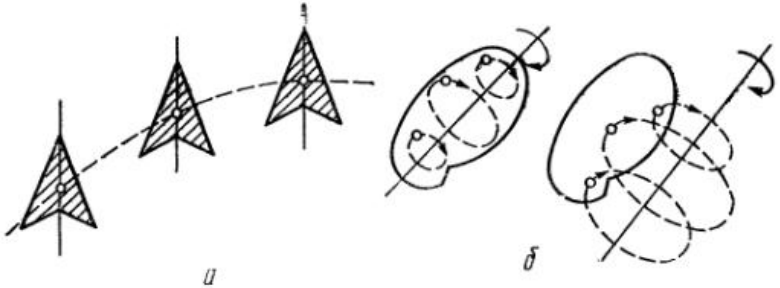
$$[m] = \text{кг}.$$

По определению 1 кг есть масса международного прототипа килограмма — платино-иридиевого цилиндра длиной 39 мм и диаметром 39 мм, хранящегося во дворце Бретейль под Парижем. Практически 1 кг равен массе 1 литра чистой воды при температуре 4 °С. Характерные массы встречающихся в природе объектов показаны на рис. 1.3.

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Основные задачи кинематики

2.1.1. Материальная точка. *Кинематика* — раздел механики, в котором изучаются геометрические законы движения тел без учета их масс и действующих на них сил. Всякое движение тела можно разложить на два основных вида движения — поступательное и вращательное. Под *поступательным движением* тела (рис. 2.1, *а*) понимают такое движение, при котором любая прямая (ось), связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе. Движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой (оси вращения), называется *вращательным движением* (рис. 2.1, *б*).



а *б*

Рис. 2.1

Материальной точкой называется макроскопическое тело, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Вопрос о том, можно ли данное тело рассматривать как материальную точку, зависит не от размеров этого тела, а от условий решаемой задачи. Например, радиус Земли значительно меньше расстояния от Земли до Солнца и ее орбитальное движение можно хорошо описать как движение материальной точки с массой, равной массе Земли и расположенной в ее центре. Однако при рассмотрении суточного движения Земли вокруг собственной оси замена ее материальной точкой не имеет смысла.

Механика материальной точки является основой всей механики. Любое макроскопическое тело можно представить как совокупность взаимодействующих материальных точек с массами, равными массам его частей. Изучение движения этих частей сводится к изучению движения материальных точек.

2.1.2. Система отсчета. Тело или совокупность неподвижных одно относительно другого тел, относительно которой определяется пространственное и временное положение других тел, называется *системой отсчета*. С точки зрения кинематики все системы отсчета кинематически эквивалентны. В кинематике нельзя указать преимуществ одной системы отсчета по сравнению с другой. При решении задач кинематики ее выбор определяется соображениями целесообразности (удобства).

Для описания пространства, в котором осуществляется движение материальной точки, с системой отсчета связывают пространственную систему координат. Под *системой координат* понимают тройку линейно независимых направленных отрезков прямых (координатных осей), выходящих из одной точки (начала отсчета). В этом случае положение материальной точки M в пространстве определяется *радиусом-вектором* $\mathbf{r}$, проведенным из начала координат O в эту точку, а движение представляется в виде векторной суммы независимых движений вдоль трех пространственных осей выбранной системы координат.

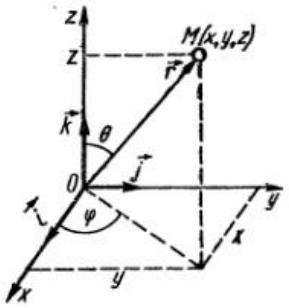


Рис. 2.2

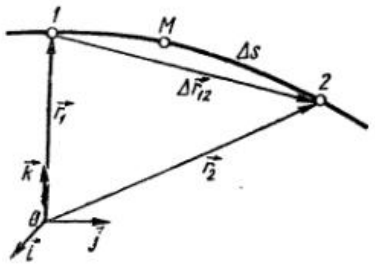


Рис. 2.3

В декартовой системе (рис. 2.2) имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты (единичные векторы), направленные вдоль положительных направлений координатных осей x, y, z; x, y, z — проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на эти оси, выражающиеся числами.

В прямоугольной системе координат,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}|,$$

положение точки M задается тремя числами x, y, z:

$$M = M(x, y, z). \tag{2.2}$$

В цилиндрической системе координат положение точки M задается тремя другими числами ρ, φ, z:

$$M = M(\rho, \varphi, z),$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad z = z; \tag{2.3}$$
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

В сферической системе координат (рис. 2.2)

$$M = M(r, \theta, \varphi),$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \ \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$
$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \ y = r\cos\theta\sin\varphi, \ z = r\cos\theta, \tag{2.4}$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Для **однозначного** определения положения точки M в пространстве **радиус-вектор** $\mathbf{r}$ полагают зависящим от параметра t, называемого *временем* [1.2.2], так, что одному значению t соответствует одно значение функции:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \qquad (2.5)$$

Равенство (2.5) называется *кинематическим уравнением* движения точки M, записанным в векторной форме.

Линия, которую описывает материальная точка M при своем движении, называется *траекторией*. Расстояние между двумя заданными точками 1 и 2, отсчитанное вдоль траектории, называется *путем* ΔS (рис. 2.3). Прямолинейный направленный отрезок (вектор), проведенный из начальной точки 1 в конечную точку 2, называется *перемещением* $\Delta\mathbf{r}_{12}$,

$$\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

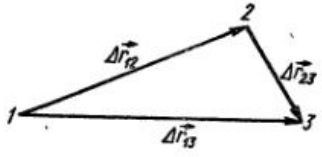


Рис. 2.4

Перемещение есть вектор, а путь — скаляр. Сумма двух последовательных перемещений из точки 1 в точку 2 и из точки 2 в точку 3 есть перемещение из точки 1 в точку 3 (рис. 2.4):

$$\Delta\mathbf{r}_{13} = \Delta\mathbf{r}_{12} + \Delta\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1. \qquad (2.6)$$

Если радиус-вектор материальной точки в момент времени t есть $\mathbf{r}(t)$, а в момент времени $t + \Delta t$ есть $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, то ее перемещение $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени Δt

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \qquad (2.7)$$

Перемещение $\Delta\mathbf{r}$ есть функция времени t:

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}(t). \qquad (2.8)$$

2.2. Криволинейное движение

В общем случае траектория движения материальной точки представляет собой кривую линию. Кроме перемещения $\Delta\mathbf{r}$ (2.8) ее движение вдоль траектории характеризуется скоростью и ускорением.

2.2.1. Скорость. *Средней скоростью* $\langle\mathbf{v}\rangle$ за промежуток времени Δt называется перемещение $\Delta\mathbf{r}$ (2.7) за единицу этого промежутка времени:

$$\langle\mathbf{v}\rangle = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \qquad (2.9)$$

Мгновенная скорость (или просто *скорость*) есть предел, к которому стремится средняя скорость $\langle\mathbf{v}\rangle$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}. \qquad (2.10)$$

Вектор $\mathbf{v}$ направлен по касательной к криволинейной траектории, так как бесконечно малое (элементарное) перемещение $d\mathbf{r}$ совпадает с бесконечно малым элементом траектории ds (рис. 2.5). В декартовых координатах (2.1) уравнение (2.10) эквивалентно трем уравнениям

$$v_x = \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x},\quad v_y = \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y},\quad v_z = \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}, \qquad (2.11)$$

где v_x, v_y, v_z есть проекции вектора $\mathbf{v}$ на координатные оси с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k} = \dot{x}(t)\,\mathbf{i} + \dot{y}(t)\,\mathbf{j} + \dot{z}(t)\,\mathbf{k}. \qquad (2.12)$$

Модуль вектора $\mathbf{v}$

$$v \equiv |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \qquad (2.13)$$

Переход от декартовых прямоугольных координат к криволинейным осуществляется по правилам дифференцирования сложных функций.

Пусть радиус-вектор $\mathbf{r}$ есть функция криволинейных координат:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3). \qquad (2.14)$$

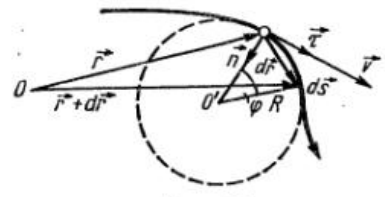


Рис. 2.5

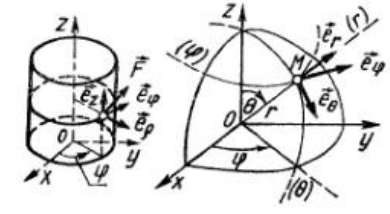


Рис. 2.6

Тогда

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i. \qquad (2.15)$$

В сферических координатах (2.4), полагая $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$, получаем для $\mathbf{v}$ представление

$$\begin{gathered}\mathbf{v} = v_r\mathbf{e}_r + v_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta,\\ v_r = \dot{r},\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta,\ v_\theta = r\dot{\theta},\\ \dot{r} = \frac{dr}{dt},\quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt},\quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt},\\ v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)},\end{gathered} \qquad (2.16)$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$ — орты касательных к линиям (r), (φ), (θ) (рис. 2.6).

Элементарное перемещение тела

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t)\,dt. \qquad (2.17)$$

Конечное перемещение тела $\Delta\mathbf{r}$ за промежуток времени от t_0 до t определяется формулой

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\mathbf{r}' = \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')\,dt'. \qquad (2.18)$$

Выражение (2.18) задает кинематическое уравнение движения (2.5). При этом путь s, пройденный материальной точкой, равен площади

криволинейной трапеции (рис. 2.7):

$$s = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'. \qquad (2.19)$$

Средняя скорость (2.9) за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ определяется соотношением

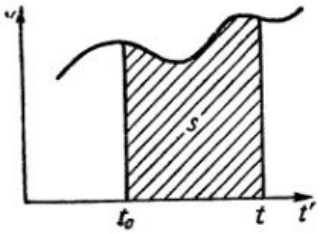


Рис. 2.7

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')\,dt' = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (2.20)$$

Единицей скорости в СИ является метр в секунду:

$$[v] = \text{м/с}.$$

Характерные средние скорости материальных объектов, встречающихся в природе, показаны на рис. 2.8.

2.2.2. Ускорение. *Средним ускорением* $\langle \mathbf{a} \rangle$ за промежуток времени Δt называется приращение скорости $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ за единицу промежутка времени Δt:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \qquad (2.21)$$

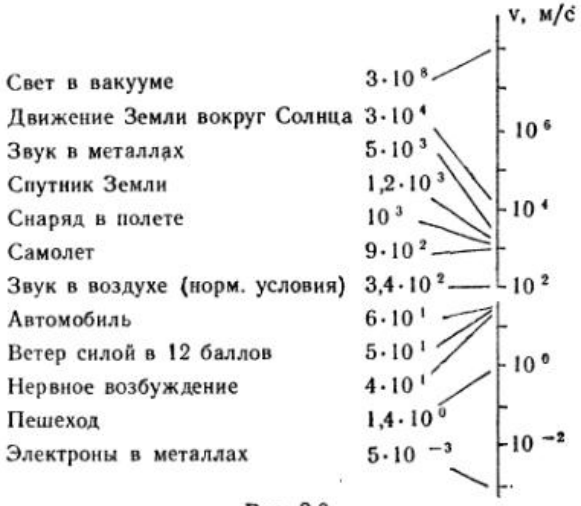


Рис. 2.8

Мгновенным ускорением (или просто *ускорением*) называется предел среднего ускорения $\langle \mathbf{a} \rangle$ при стремлении Δt к нулю:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{v}}, \qquad (2.22)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

В декартовых координатах (2.1) уравнение (2.22) эквивалентно трем уравнениям

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}, \qquad (2.23)$$

где a_x, a_y, a_z есть проекции вектора ускорения $\mathbf{a}$ на координатные оси x, y, z с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= \dot{v}_x \mathbf{i} + \dot{v}_y \mathbf{j} + \dot{v}_z \mathbf{k}, \\ \mathbf{a} &= \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k}. \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \qquad (2.25)$$

В сферической системе координат (рис. 2.6) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_r \mathbf{e}_r + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_\theta \mathbf{e}_\theta, \\ a_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta), \\ a_\varphi &= r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{r}(\sin\theta + \dot{\theta}\cos\theta), \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}, \\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_\theta^2}. \end{aligned} \qquad (2.26)$$

Конец вектора скорости $\mathbf{v}$ при движении материальной точки описывает кривую, называемую *годографом скорости*. Ускорение $\mathbf{a}$ в данной точке годографа скорости направлено по касательной к годографу в этой точке (рис. 2.9):

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(v\,\boldsymbol{\tau}), \qquad (2.27)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — орт, касательный к траектории и направленный вдоль вектора $\mathbf{v}$ (рис. 2.5).

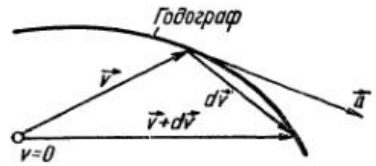


Рис. 2.9

Справедливо представление

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n,\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad (2.28)$$

$$\mathbf{a}_\tau = \dot{v}\,\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{a}_n = v\,\dot{\boldsymbol{\tau}}. \qquad (2.29)$$

Вектор $\mathbf{a}_\tau$ называется *тангенциальным ускорением*, вектор $\mathbf{a}_n$ — *нормальным ускорением*. Тангенциальное ускорение $\mathbf{a}_\tau$ характеризует изменение вектора скорости $\mathbf{v}$ по модулю. Нормальное ускорение $\mathbf{a}_n$ характеризует изменение вектора скорости $\mathbf{v}$ по направлению при криволинейном движении.

В случае, если траектория движения тела лежит в одной плоскости

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{R}\,\mathbf{n}, \qquad (2.30)$$

где $R = ds/d\varphi$ — радиус кривизны траектории в данной точке, $\mathbf{n}$ — орт нормали траектории, направленный в сторону поворота вектора $\boldsymbol{\tau}$ при движении тела по траектории (т. е. к центру кривизны траекто-

рии) (рис. 2.5). Вектор $\mathbf{a}_\tau$ совпадает по направлению с ортом $\boldsymbol{\tau}$ при $v > 0$ (скорость со временем увеличивается) и противоположен ему при $v < 0$ (скорость со временем уменьшается).

Элементарное приращение скорости

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}(t)\,dt, \tag{2.31}$$

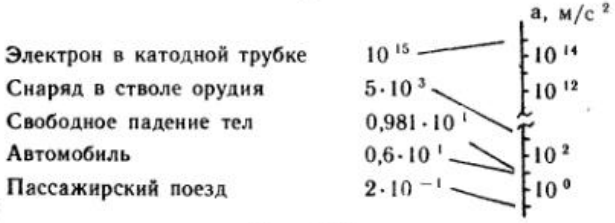


Рис. 2.10

Конечное приращение скорости $\Delta\mathbf{v}$ за промежуток времени от t_0 до t определяется формулой

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} d\mathbf{v} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')\,dt'. \tag{2.32}$$

Среднее ускорение (2.21) за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')\,dt' = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{2.33}$$

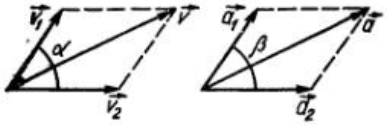


Рис. 2.11

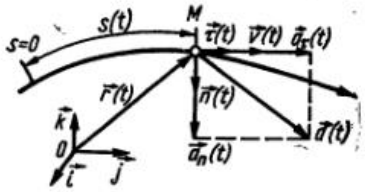


Рис. 2.12

Единицей ускорения в СИ является метр на секунду в квадрате:

$$[a] = \text{м/с}^2.$$

Характерные средние ускорения материальных объектов показаны на рис. 2.10.

2.2.3. Сложение скоростей и ускорений. В общем случае материальная точка может участвовать одновременно в нескольких поступательных движениях. Поскольку скорость и ускорение являются векторами, то их можно складывать по законам векторного сложения (рис. 2.11):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,\quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}, \tag{2.34}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2,$$

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\beta}.$$

Частный случай $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi/2$

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},\quad a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

2.2.4. Параметрическое описание движения. Движение материальной точки по траектории может быть описано с помощью *дифференциально-геометрических параметров*. Пусть зависящий от времени радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ содержит в качестве промежуточного параметра путь $s = s(t)$. Тогда движение описывается *касательным* к траектории в данный момент времени t *вектором* $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(t)$, *вектором нормали* $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t)$, перпендикулярным вектору $\boldsymbol{\tau}$ и направленным к центру кривизны траектории в момент времени t, а также *радиусом кривизны* $R = R(t)$ (рис. 2.12):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s(t)),$$

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\boldsymbol{\tau}(t),\quad v(t) = \frac{ds(t)}{dt},$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\boldsymbol{\tau}(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)}\mathbf{n}(t) \equiv \mathbf{a}_\tau(t) + \mathbf{a}_n(t), \tag{2.35}$$

$$|\mathbf{n}(t)| = 1,\ |\boldsymbol{\tau}(t)| = 1,\ \boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n},$$

$$R(t) = \frac{ds(t)}{d\varphi},\quad \frac{1}{R(t)} = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}(t)}{ds(t)}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{\tau}(t)}{dt}\right|\frac{1}{v(t)}.$$

2.3. Классификация механических движений

Механические движения классифицируют в зависимости от конкретных условий движения:

	Равномерное движение	Неравномерное движение
Прямолинейное движение	$\mathbf{v} = \text{const}$, $v = \text{const}$ $\mathbf{a} = 0$, $a_n = 0$, $a_\tau = 0$	$\mathbf{v} \neq \text{const}$, $v \neq \text{const}$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau$, $a_n = 0$, $a_\tau \neq 0$
Криволинейное движение	$\mathbf{v} \neq \text{const}$, $v = \text{const}$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n$, $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$	$\mathbf{v} \neq \text{const}$, $v \neq \text{const}$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$, $a_n \neq 0$, $a_\tau \neq 0$

2.3.1. Равномерное прямолинейное движение. *Равномерным* называется движение, при котором за равные сколь угодно малые промежутки времени материальная точка (тело) проходит одинаковые пути. При *прямолинейном* движении модуль вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ (2.7) равен пройденному пути Δs. При *равномерном прямолинейном* движении скорость $\mathbf{v}$ постоянна и равна средней скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ (2.9):

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \text{const}. \tag{2.36}$$

Уравнение для траектории движения $\mathbf{r}(t)$ (2.5) следует из (2.18):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t - t_0), \tag{2.37}$$

где $\mathbf{r}(t_0)$ — радиус-вектор тела в начальный момент времени t_0. Векторное уравнение (2.37) эквивалентно трем уравнениям для координат $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$:

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t - t_0),\ y(t) = y(t_0) + v_y(t - t_0),$$
$$z(t) = z(t_0) + v_z(t - t_0), \tag{2.38}$$

где v_x, v_y, v_z — проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на оси координат (2.12).

Путь, пройденный телом за время t, согласно (2.19) определяется формулой (рис. 2.13)

$$s = vt. \tag{2.39}$$

2.3.2. Равноускоренное движение. *Поступательное* движение [2.1.] называется *равноускоренным*, если ускорение **a** (2.22) с течением времени остается постоянным. При таком движении ускорение **a** равно среднему ускорению ⟨**a**⟩ (2.21):

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \text{const}, \tag{2.40}$$

где $\Delta \mathbf{v}$ — приращение скорости за время Δt. При $\mathbf{a} > 0$ движение ускоренное, при $\mathbf{a} < 0$ — замедленное. Скорость $\mathbf{v}(t)$ в момент времени t определяется выражением

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \mathbf{a}(t - t_0). \tag{2.41}$$

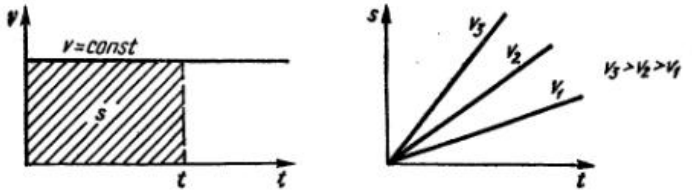


Рис. 2.13

которое эквивалентно трем уравнениям для составляющих скорости v_x, v_y, v_z:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + a_x(t - t_0), \quad v_y(t) = v_y(t_0) + a_y(t - t_0),$$
$$v_z(t) = v_z(t_0) + a_z(t - t_0), \tag{2.42}$$

где a_x, a_y, a_z — проекции вектора **a** на оси координат (2.23). Уравнение для траектории движения $\mathbf{r}(t)$ (2.5) следует из (2.18) и (2.42):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \tag{2.43}$$

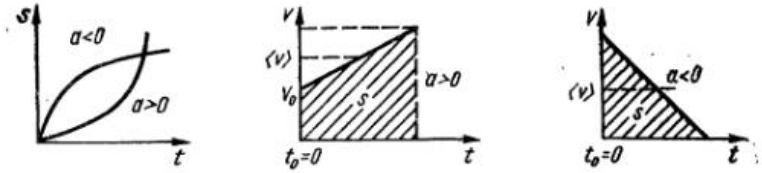


Рис. 2.14

Уравнение для координаты $x(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$ согласно (2.5), (2.1), (2.12) и (2.24) имеет вид

$$x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{a_x}{2}(t - t_0)^2. \tag{2.44}$$

Аналогично записываются два других уравнения для координат $y(t)$ и $z(t)$.

Путь, пройденный телом за время t, согласно (2.19) определяется формулой (рис. 2.14)

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \tag{2.45}$$

где v_0 — скорость в начальный момент времени t_0. При $t_0 = 0$ для пути, скорости, средней скорости, времени движения и ускорения имеем следующие формулы для равноускоренного движения:

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{v_0 + v}{2} t, \tag{2.46}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as} = v_0 + at, \tag{2.47}$$

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 + v}{2} = v_0 + \frac{at}{2} = \frac{s}{t}, \tag{2.48}$$

$$t = \frac{2s}{v_0 + v} = \sqrt{\frac{2s}{a} + \left(\frac{v_0}{a}\right)^2} - \frac{v_0}{a}, \tag{2.49}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = 2\left(\frac{s}{t^2} - \frac{v_0}{t}\right). \tag{2.50}$$

2.3.3. Падение тел. Свободное падение представляет собой частный случай равномерно ускоренного движения без начальной скорости $v_0 = 0$. Ускорение при таком движении равно ускорению свободного падения: $a = g = 9{,}81$ м/с². В пренебрежении суточным вращением Земли [3.10.5], зависимостью g от расстояния до центра Земли [3.10.4] и сопротивлением воздуха в соответствии с (2.46), (2.47) при $v_0 = 0$ получаем

$$v = gt = \sqrt{2gh}, \tag{2.51}$$

$$h = gt^2/2 = vt/2, \tag{2.52}$$

где v — скорость падения тела через время t, h — высота, с которой падает тело (путь за время t).

2.3.4. Движение тела, брошенного вертикально вверх. Тело, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v_0, движется равнозамедленно с ускорением $a = -g = -9{,}81$ м/с². Высота подъема h за время t и скорость v через время t согласно (2.46) и (2.47) определяются формулами

$$h = \frac{v_0 + v}{2} t = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \tag{2.53}$$

$$v = v_0 - gt = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \tag{2.54}$$

(без учета сопротивления воздуха). Время t_{max}, за которое тело достигнет максимальной высоты $h_{max} = h(v = 0)$, и высота h_{max} определяются формулами

$$t_{max} = v_0/g, \tag{2.55}$$

$$h_{max} = v_0^2/2g. \tag{2.56}$$

2.3.5. Движение тела, брошенного горизонтально. Движение тела, брошенного горизонтально со скоростью $\mathbf{v}_0$, есть векторная сумма двух независимых движений: *равномерного горизонтального* с постоянной скоростью v_0 (вдоль оси x на рис. 2.15) и *равноускоренного вертикального* (свободного падения вдоль оси y с ускорением g). Согласно (2.39) и (2.52) перемещения тела в горизонтальном и вертикальном направлениях за время t равны соответственно

$$x = s = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad y = h = \frac{gt^2}{2}, \quad t = \frac{s}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{2.57}$$

Уравнением траектории тела является парабола

$$y = (g/2v_0^2)\,x^2. \tag{2.58}$$

Другие характеристики движения:
радиус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{g}\,t^2}{2}, \tag{2.59}$$

мгновенная скорость

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}\,t, \tag{2.60}$$

угол между начальной скоростью $\mathbf{v}_0$ и мгновенной скоростью $\mathbf{v}$

$$\operatorname{tg}\alpha = gt/v_0, \tag{2.61}$$

величина (модуль) мгновенной скорости

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}. \tag{2.62}$$

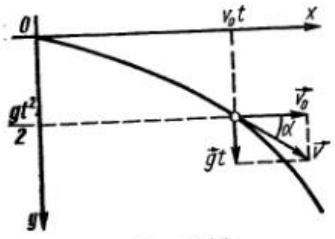


Рис. 2.15

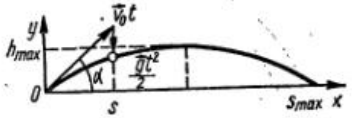


Рис. 2.16

В формулах (2.57)—(2.62) не учитывается сопротивление воздуха и суточное вращение Земли [3.10.5].

2.3.6. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Движение тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью $\mathbf{v}_0$, есть векторная сумма двух независимых движений: равномерного прямолинейного со скоростью v_0 под углом α к горизонту (оси x на рис. 2.16) и свободного падения в вертикальном направлении (против положительного направления оси y). Пусть за время t перемещение тела в горизонтальном направлении есть s, а высота подъема h. Тогда

$$x = s = v_0 t\cos\alpha, \qquad y = h = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}, \tag{2.63}$$

$$t = x/v_0\cos\alpha.$$

Уравнение траектории тела есть парабола

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2. \tag{2.64}$$

Горизонтальная v_x и *вертикальная* v_y составляющие вектора мгновенной скорости v определяются формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha - gt. \tag{2.65}$$

При этом величина мгновенной скорости $\mathbf{v}$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \tag{2.66}$$

время подъема тела на максимальную высоту (из условия $v_y = 0$ в (2.65))

$$t_{max} = v_0\sin\alpha/g, \tag{2.67}$$

общее время движения ($t_s = 2t_{max}$)

$$t_s = 2v_0\sin\alpha/g, \tag{2.68}$$

максимальная высота подъема (за время t_{max})

$$h_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}, \tag{2.69}$$

максимальный путь (дальность s_{max} за время t_s)

$$s_{max} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}. \tag{2.70}$$

В формулах (2.63) — (2.70) не учитывается сопротивление воздуха и суточное вращение Земли [3.10.4].

2.4. Равномерное и неравномерное движение по окружности

2.4.1. Линейная скорость. Движение материальной точки по окружности является частным случаем криволинейного движения [2.2] по траектории, лежащей в одной плоскости (т. е. по плоской кривой). Выберем в качестве этой плоскости плоскость (xOy) (рис. 2.17). Радиус кривизны траектории R (2.35) в этом случае постоянен и равен радиусу окружности:

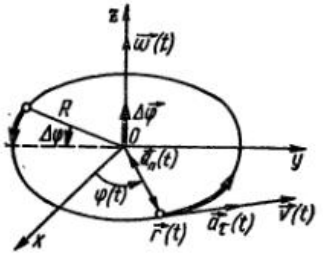


Рис. 2.17

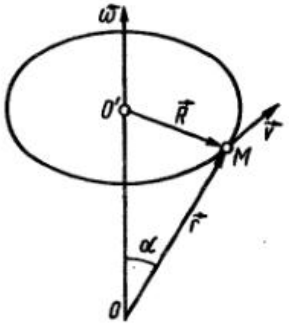


Рис. 2.18

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}. \tag{2.71}$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}\,(t)$ (2.5) равен

$$\mathbf{r}\,(t) = x\,(t)\mathbf{i} + y\,(t)\mathbf{j}, \tag{2.72}$$

или в полярных координатах (см. (2.3))

$$x\,(t) = R\cos\varphi\,(t), \quad y\,(t) = R\sin\varphi\,(t), \tag{2.73}$$

где $\varphi(t)$ — угол поворота радиуса вектора $\mathbf{r}(t)$ в плоскости (xOy) в данный момент времени t, отсчитанный в направлении от оси x к оси y (правый винт на рис. 2.17). Скорость

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \tag{2.74}$$

с которой материальная точка движется по окружности, называется *линейной скоростью*.

2.4.2. Угловая скорость и ускорение. Движение по окружности характеризуют также угловой скоростью и угловым ускорением. Для определения этих величин зададим поворот на малый угол $\Delta\varphi$ в виде вектора $\Delta\boldsymbol{\varphi}$, модуль которого равен величине угла поворота, $|\Delta\boldsymbol{\varphi}| = \Delta\varphi$, а направление совпадает с осью вращения, вокруг которой производится поворот, и определяется по правилу правого винта (рис. 2.17). Вектор $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ является не истинным вектором, а псевдовектором, так как его направление связано с направлением вращения материальной точки.

Угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ материальной точки называется предел, к которому стремится отношение малого угла поворота $\Delta\boldsymbol{\varphi}$ к промежутку времени Δt, за который произошел этот поворот, при стремлении Δt к нулю:

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{2.75}$$

Угловая скорость — псевдовектор. Ее направление совпадает с направлением бесконечно малого вектора $d\boldsymbol{\varphi}$. При выборе направления вращения, как на рис. 2.17, вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль положительного направления оси z. Связь линейной скорости $\mathbf{v}$ (2.74) с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ (2.75) в общем случае имеет вид (рис. 2.18)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad v = \omega r \sin\alpha = \omega R, \tag{2.76}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из лежащего на оси начала координат O, α — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$, R — расстояние от материальной точки M до оси вращения (радиус окружности, по которой движется точка M). *Нормальное ускорение* (2.29), (2.30) равно

$$\mathbf{a}_n = -\omega^2\mathbf{R}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \qquad |\mathbf{R}| = R, \tag{2.77}$$

где $\mathbf{R}$ есть вектор, проведенный из центра окружности O' в точку M на ней. Знак минус в (2.77) отражает тот факт, что векторы $\mathbf{a}_n$ (орт $\mathbf{n}$ в (2.30)) и $\mathbf{R}$ имеют противоположное направление (рис. 2.17).

Угловым ускорением $\boldsymbol{\beta}$ называется предел, к которому стремится отношение малого приращения угловой скорости $\Delta\boldsymbol{\omega}$ за счет изменения скорости вращения материальной точки вокруг оси или малого поворота оси вращения в пространстве, полученное за время Δt при стремлении Δt к нулю:

$$\boldsymbol{\beta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{2.78}$$

Угловое ускорение — псевдовектор. Модуль *тангенциального ускорения* a_τ (2.29) связан с модулем углового ускорения $\boldsymbol{\beta}$ соотношением

$$a_\tau = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = \beta R. \tag{2.79}$$

Элементарное приращение угла поворота

$$d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega}(t)dt. \tag{2.80}$$

Угол поворота $\Delta\varphi$ (*угловое перемещение*) за промежуток времени от t_0 до t определяется формулой

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \omega(t')\,dt', \tag{2.81}$$

где $\varphi(t_0)$ — значение угла поворота в начальный момент времени t_0. Геометрический смысл выражения (2.81) показан на рис. 2.19. Элементарное приращение угловой скорости

$$d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\beta}(t)dt. \tag{2.82}$$

Приращение угловой скорости $\Delta\boldsymbol{\omega}$ за время от t_0 до t

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\beta}(t')\,dt', \tag{2.83}$$

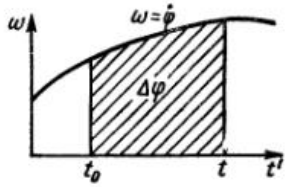


Рис. 2.19

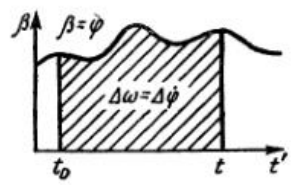


Рис. 2.20

где $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ — угловая скорость в начальный момент времени t_0. Геометрический смысл выражения (2.83) показан на рис. 2.20.

Средняя угловая скорость $\langle\boldsymbol{\omega}\rangle$ и *среднее угловое ускорение* $\langle\boldsymbol{\beta}\rangle$ за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ определяются формулами

$$\langle\boldsymbol{\omega}\rangle = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\omega}(t')\,dt' = \frac{\Delta\boldsymbol{\varphi}}{\Delta t}, \tag{2.84}$$

$$\langle\boldsymbol{\beta}\rangle = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\beta}(t')\,dt' = \frac{\Delta\boldsymbol{\omega}}{\Delta t}. \tag{2.85}$$

Единица угловой скорости в СИ

$$[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \frac{1}{\text{с}}.$$

Единица углового ускорения в СИ

$$[\beta] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Периодом обращения T материальной точки вокруг неподвижной оси вращения называется время, в течение которого эта точка поворачивается на угол $\Delta\boldsymbol{\varphi}$

$$\int_0^T \omega(t)\,dt = 2\pi. \tag{2.86}$$

Число оборотов ν за единицу времени равно

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \omega(t)\,dt. \qquad (2.87)$$

2.4.3. Равномерное движение по окружности. *Равномерным движением по окружности* (или *равномерным вращением*) называется движение, при котором за равные промежутки времени происходит поворот на один и тот же угол. При таком движении угловая скорость ω (2.75) постоянна и равна средней угловой скорости $\langle\omega\rangle$ (2.84):

$$\omega = \langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{const}. \qquad (2.88)$$

Равномерное вращение характеризуется периодом обращения T. При $\Delta\varphi = 2\pi$ имеем $\Delta t = T$ и

$$T = 2\pi/\omega. \qquad (2.89)$$

Число оборотов в единицу времени

$$\nu = \omega/2\pi = 1/T. \qquad (2.90)$$

Если N — полное число оборотов, то угловое перемещение

$$\varphi = 2\pi N. \qquad (2.91)$$

Между формулами (2.39), (2.46) — (2.50), описывающими поступательное движение, и формулами, описывающими движение по окружности, существует прямая аналогия.

Поступательное движение	Вращательное движение
Путь s	Угол φ (в радианах)
Скорость v	Угловая скорость ω
Ускорение a	Угловое ускорение β

Формулы связи

$$s = \varphi R \quad (R \text{ — радиус окружности})$$
$$v = \omega R, \quad a = a_\tau + a_n, \quad a_\tau = \beta R, \quad a_n = \omega^2 R$$

Равномерное движение

$$s = vt \qquad \varphi = \omega t$$

Равноускоренное движение ($t_0 = 0$)

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\beta} = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2}\,t \qquad \varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2}\,t$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2as} = v_0 + at \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\beta\varphi} = \omega_0 + \beta t$$

$$\langle v\rangle = \frac{v_0 + v}{2} = v_0 + \frac{at}{2} = \frac{s}{t} \qquad \langle\omega\rangle = \frac{\omega_0 + \omega}{2} = \omega_0 + \frac{\beta t}{2} = \frac{\varphi}{t}$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = 2\left(\frac{s}{t^2} - \frac{v_0}{t}\right) \qquad \beta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = 2\left(\frac{\varphi}{t^2} - \frac{\omega_0}{t}\right)$$

$$t = \frac{2s}{v_0 + v} = \sqrt{\frac{2s}{a} + \left(\frac{v_0}{a}\right)^2} - \frac{v_0}{a} \qquad t = \frac{2\varphi}{\omega_0 + \omega} = \sqrt{\frac{2\varphi}{\beta} + \left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2} - \frac{\omega_0}{\beta}$$

3. ДИНАМИКА

3.1. Основная задача динамики

3.1.1. Механическая сила. *Динамика* — раздел механики, в котором изучаются законы движения тел под действием приложенных к ним сил. Различают динамику поступательного движения и динамику вращательного движения.

Причиной движения тел и изменения его характера с течением времени является взаимодействие тел. В физике различают четыре типа взаимодействий: 1) *гравитационное*, действующее между всеми телами, имеющими массу; 2) *электромагнитное*, действующее между частицами или телами, обладающими электрическими зарядами; 3) *сильное*, действующее между элементарными частицами, называемыми адронами; 4) *слабое*, обусловливающее процессы превращения некоторых элементарных частиц и атомных ядер [XVI, XVII].

Сила как количественная характеристика является мерой интенсивности взаимодействия. В механике сила (механическая сила) есть вектор: она задается модулем (величиной), направлением и точкой приложения. Линия, вдоль которой направлена сила, называется *линией действия силы*. В задачах механики учитываются гравитационные силы, а также силы упругости и силы трения, являющиеся остаточными от более общих электромагнитных сил [5.2.2].

Основная задача динамики состоит в определении положения тела в произвольный момент времени по известным начальному положению тела, начальной скорости и силам, действующим на тело.

Силы, действующие на данное тело со стороны других тел (или системы тел), называются *внешними силами*. Силы, действующие между частями одного и того же тела, называются *внутренними силами*.

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *изолированной (замкнутой) системой*.

3.1.2. Законы сложения сил. Если на тело действует несколько внешних сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_N$, то их можно заменить одной равнодействующей силой $\mathbf{F}$, равной геометрической сумме всех действующих на тело сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N \equiv \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i. \qquad (3.1)$$

1. Если две *силы* $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ *действуют вдоль одной прямой*, то равнодействующая сила $\mathbf{F}$ направлена в сторону большей из них, а по величине равна их сумме

$$F = F_1 + F_2, \qquad (3.2а)$$

если силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ направлены в одну сторону, или разности

$$F = |F_1 - F_2|, \qquad (3.2б)$$

если силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ имеют противоположное направление (рис. 3.1).

2. Если две *силы* $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к одной точке M и *направлены под углом* γ одна к другой, то равнодействующая $\mathbf{F}$ определяется правилом параллелограмма (рис. 3.2). Ее величина

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\gamma},$$

$$F = F_1 \sin\gamma/\sin\beta, \qquad F = F_2 \sin\gamma/\sin\alpha. \tag{3.3}$$

3. Если на тело действует *более двух сил*, то применяя последовательно к ним правило параллелограмма, можно найти их равнодействующую.

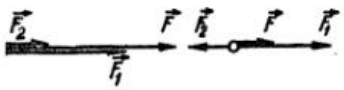


Рис. 3.1

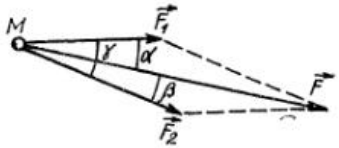


Рис. 3.2

Другой способ сложения сил показан на рис. 3.3. Он состоит в том, что вектор $\mathbf{F}_2$ переносится (параллельно самому себе) в конец силы $\mathbf{F}_1$, а вектор $\mathbf{F}_3$ — в конец перенесенной силы $\mathbf{F}_2$. Соединяя начало силы $\mathbf{F}_1$ с концом перенесенной силы $\mathbf{F}_3$, получаем равнодействующую силу $\mathbf{F}$. Этот способ очень просто обобщается на случай большего чем три числа внешних сил.

Если силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ приложены к различным точкам M_1 и M_2 макроскопического тела, то для определения равнодействующей силы $\mathbf{F}$ следует перенести силы вдоль их линий действия до точки пересечения O, а затем найти силу $\mathbf{F}$ по правилу параллелограмма. При этом будут

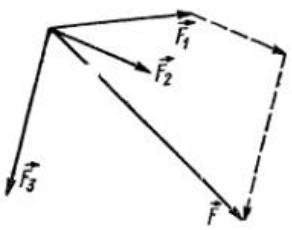


Рис. 3.3

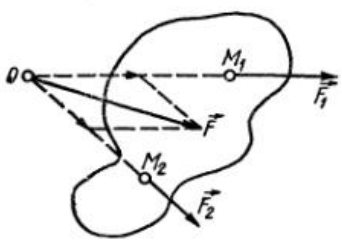


Рис. 3.4

определены величина и направление силы $\mathbf{F}$, но не точка ее приложения (точка O не есть точка приложения силы $\mathbf{F}$) (рис. 3.4).

Движение тел под действием внешних сил подчиняется законам динамики. Эти законы являются обобщением опытных фактов. В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные Ньютоном (1687).

3.2. Первый закон Ньютона (закон инерции)

3.2.1. Формулировка закона. Масса и плотность. Первый закон Ньютона (1687): *тело (материальная точка) находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, если оно не подвержено внешним воздействиям со стороны других тел.* Свойство тела сохранять свою скорость в отсутствие взаимодействия с другими телами называется *инертностью*. Мерой инертности тела (материальной точки) в поступательном движении является физическая величина, называемая *инертной массой* или просто *массой тела*. Наличие у тела массы подтверждается опытами, которые показывают, что одинаковое воздействие сообщает разным телам разные по величине ускорения. Масса является одной из трех основных величин, характеризующих механическое движение тела [1.2.3]. Масса тела, содержащаяся в единице объема, называется ее *плотностью*. Плотность ρ тела в данной точке равна пределу, к которому стремится отношение массы Δm элемента тела в окрестности данной точки к объему ΔV этого элемента при неограниченном его уменьшении:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}. \tag{3.4}$$

Плотность ρ есть функция трех пространственных координат x, y, z, характеризующих точку внутри объема V, заданного размерами тела: $\rho = \rho(x, y, z) = \rho(\mathbf{r})$. Масса m тела определяется формулой

$$m = \int_V \rho\, dV = \int_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{3.5}$$

где интеграл берется по всему объему тела V; dx, dy, dz есть линейные размеры элементарного объема dV, отсчитанные по осям координат x, y, z. *Средняя плотность*

$$\langle\rho\rangle = \frac{1}{V}\int_V \rho\, dV = \frac{m}{V}. \tag{3.6}$$

Тело называется **однородным**, если

$$\rho = \langle\rho\rangle = \frac{m}{V}. \tag{3.7}$$

Единицей плотности в СИ является килограмм на кубический метр

$$[\rho] = \text{кг/м}^3.$$

Плотности некоторых веществ даны в табл. 3.1. Характерные значения плотностей показаны на рис. 3.5.

3.2.2. Следствие первого закона Ньютона. Из первого закона Ньютона следует, что любое изменение состояния движения тела обусловлено действием на него сил. Связь между действующей силой и ускорением, приобретаемым телом под действием этой силы, устанавливает второй закон Ньютона [3.3].

Первый закон Ньютона не является абсолютным — он выполняется не во всех системах отсчета [2.1.2]. *Систему отсчета*, в которой выполняется этот закон, называют *инерциальной*. Можно дать другое, эквивалентное определение инерциальной системы отсчета: система, по отношению к которой пространство является однородным (т. е. в нем выполняется закон сохранения импульса [3.5.1]) и изотропным (т. е. справедлив закон сохранения момента импульса [3.5.2]), а время — однородным (т. е. справедлив закон сохранения энергии системы [5.2.4; 5.2.6]) называется инерциальной системой отсчета.

Существование инерциальной системы отсчета в классической механике является постулатом, обобщающим большую совокупность

Таблица 3.1. **Плотность ρ различных веществ**

Вещество	ρ, г/см³	Вещество	ρ, г/см³	Вещество	ρ, г/см³
Твердые тела				**Жидкости ($t = 20$ °C)**	
Алмаз	3,5	Медь	8,9	Ацетон	0,8
Алюминий	2,7	Молибден	10,2	Бензол	0,88
Бетон	2,2	Натрий	0,97	Бензин	0,7
Вольфрам	19,1	Никель	8,9	Вода	1,00
Гранит	2,8	Олово	7,4	Глицерин	1,26
Графит	1,6	Песчаник	2,4	Керосин	0,8
Дуб	0,8	Платина	21,5	Молоко	1,03
Дюралюминий	2,79	Пробка	0,20	Ртуть	13,6
Железо (сталь)	7,8	Свинец	11,34	Спирт	0,79
Золото	19,3	Серебро	10,5	Тяжелая вода	1,1
Иридий	22,4	Сосна	0,5	Эфир	0,72
Кадмий	8,65	Стекло (окон.)	2,5	**Газы ($t = 0$ °C, $p = 101{,}3$ кПа)**	
Каменный уголь	1,4	Титан	4,5	Азот	1,25
Кобальт	8,9	Уран	19,0	Аммиак	0,77
Латунь	8,6	Цинк	7,1	Водород	0,09
Лед	0,916	Фарфор	2,3	Воздух	1,293
Магний	1,74	Электрон	1,8	Кислород	1,43
				Метан	0,72
				Углекислый газ	1,98
				Хлор	3,21
				Протан	2,2
				Гелий	0,179

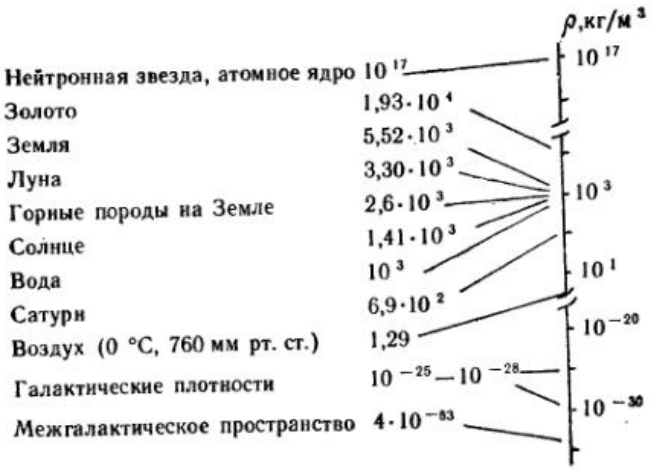


Рис. 3.5

опытных данных. Физическое содержание первого закона Ньютона, таким образом, сводится к утверждению, что существует по крайней мере одна инерциальная система отсчета.

3.2.3. Преобразование Галилея. Любая система отсчета S', движущаяся прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{V}$ относительно выбранной инерциальной системы S, также будет инерциальной. Координаты данной точки M в системах отсчета S' и S связаны между собой *преобразованием Галилея*:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы точки M в системах отсчета S и S' (рис. 3.6). При этом подразумевается, что ход времени одинаков в обеих системах отсчета, т. е. постулируется абсолютность времени:

$$t' = t. \tag{3.9}$$

В специальной теории относительности соотношения (3.8) и (3.9) не справедливы [6.2].

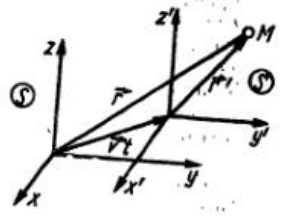


Рис. 3.6

Преобразование (3.8) эквивалентно трем преобразованиям декартовых координат точки M:

$$x' = x - V_x t, \quad y' = y - V_y t, \quad z' = z - V_z t, \tag{3.10}$$

где x, y, z — координаты вектора $\mathbf{r}$ в системе координат, связанной с S; x', y', z' — координаты вектора $\mathbf{r}'$ в системе координат, связанной с S'; V_x, V_y, V_z — проекции вектора скорости $\mathbf{V}$ на координатные оси системы координат, связанной с S.

Следствия преобразования Галилея:

1) нерелятивистский **закон сложения скоростей**

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt$ — скорости точки в системах S и S'; $\mathbf{V}$ — скорость (в данном случае постоянная) движения системы S' относительно S;

2) равенство ускорений любой точки в инерциальных системах

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}', \qquad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \qquad \mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \tag{3.12}$$

— ускорения в инерциальных системах S и S', т. е. ускорение инвариантно относительно преобразования Галилея;

3) равенство сил взаимодействия материальных точек в инерциальных системах отсчета. Если сила $\mathbf{F}$ взаимодействия двух материальных точек зависит только от разностей координат и разностей скоростей этих точек, то она одинакова в любых инерциальных системах отсчета, т. е. сила инвариантна относительно преобразования Галилея

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}', \tag{3.13}$$

где $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ — силы в инерциальных системах S и S'.

Условия (3.12) и (3.13) позволяют сформулировать один из важнейших принципов механики — **принцип относительности Галилея:** *уравнения механики Ньютона* [3.3] *инвариантны относительно преобразования Галилея, т. е. они остаются неизменными при переходе от*

одной инерциальной системы отсчета к другой. Существуют другие эквивалентные формулировки принципа относительности Галилея: 1) все инерциальные системы отсчета равноправны; 2) все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом; 3) никакими механическими опытами невозможно установить, покоится данная система отсчета или движется прямолинейно и равномерно; 4) в инерциальных системах свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы и все законы механики.

Принцип относительности Галилея и законы Ньютона составляют основу *классической теории относительности*.

3.3. Второй закон Ньютона (основной закон динамики)

3.3.1. Уравнение движения материальной точки. Второй закон Ньютона (1687) устанавливает связь между действующей на тело силой **F** и ускорением **a**, приобретаемом телом под действием этой силы: *ускорение* **a** (2.22) *прямо пропорционально действующей силе* **F** *и обратно пропорционально массе тела* m:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m, \tag{3.14}$$

или *масса тела, умноженная на ускорение, равна действующей силе*:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}, \tag{3.15}$$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \qquad m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}, \tag{3.16}$$

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \qquad m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \tag{3.17}$$

Согласно второму закону Ньютона сила **F** в общем случае есть функция радиуса-вектора **r**, скорости **v** и времени t:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \tag{3.18}$$

Из принципа относительности Галилея (3.12) и однородности пространства [3.5.1] следует, что сила **F** зависит не от **r** и **v**, а от разностей координат и скоростей материальной точки и точек, с которыми она взаимодействует. Для двух материальных точек 1 и 2, взаимодействующих с силой **F**, получаем

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,\ t), \tag{3.19}$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — координаты и скорости точек 1 и 2. Установлением вида функции (3.19) занимается физическая механика.

Уравнение (3.15) позволяет ввести единицу силы. Единицей силы в СИ является ньютон (Н):

$$[F] = \text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ньютон есть сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2.

Уравнение (3.17) называется *уравнением движения тела (материальной точки)*. Относительно времени t — это дифференциальное уравнение второго порядка. Его решения с граничными условиями, определяющими положение материальной точки в начальный момент времени t_0, $\mathbf{r}(t_0)$, и ее скорость, $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$, позволяют определить положение точки $\mathbf{r}(t)$ и ее скорость $\mathbf{v}(t)$ в любой последующий момент $t > t_0$

Дифференциальное уравнение (3.17) эквивалентно трем следующим уравнениям: 1) в декартовых координатах (2.1) (рис 2.2)

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad m\ddot{y} = F_y, \qquad m\ddot{z} = F_z, \tag{3.17а}$$

где F_x, F_y, F_z — проекции вектора силы **F** на координатные оси с ортами **i**, **j**, **k**;

2) в сферических координатах (2.4) (рис. 2.6)

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2) &= F_r, \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta &= F_\varphi, \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta) &= F_\theta, \end{aligned} \tag{3.17б}$$

где F_r, F_φ, F_θ — проекции вектора силы **F** на координатные оси с ортами $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$.

Уравнение (3.17) называют также основным **законом динамики материальной точки.**

В общем случае, когда масса тела m является функцией времени (движение с переменной массой [3.6]), основной закон динамики имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{3.20}$$

где величина

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3.21}$$

называется *импульсом* или *количеством движения* материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

3.3.2. Интегральная форма основного закона динамики. Закон динамики (3.17) можно переписать в интегральной форме

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t')\,dt', \tag{3.22}$$

где $\Delta\mathbf{p}$ характеризует изменение импульса за промежуток времени от t_0 до t и называется *импульсом силы*.

При движении тела под действием силы **F**, не зависящей от времени, импульс силы

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t, \quad \Delta t = t - t_0. \tag{3.23}$$

Импульс $\mathbf{p}(t)$ при этом определяется формулой

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t_0) + \mathbf{F}(t - t_0), \tag{3.24}$$

где $\mathbf{p}(t_0)$ — импульс тела в начальный момент времени t_0.

При движении по инерции $\mathbf{F} = 0$ и

$$\mathbf{p}(t) = \text{const}. \tag{3.25}$$

При движении под действием переменной силы изменение импульса $\Delta\mathbf{p}$ за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$ выражается соотношением

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0) = \langle\mathbf{F}\rangle(t - t_0), \tag{3.26}$$

где

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}(t')\, dt' = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \qquad (3.27)$$

— среднее значение вектора силы $\mathbf{F}$ за промежуток времени Δt.

3.4. Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона (1687): *силы, с которыми действуют одно на другое взаимодействующие тела, равны по величине и противоположны по направлению.* Пусть $\mathbf{F}_{12}$ есть сила, с которой тело 1 действует на тело 2, а $\mathbf{F}_{21}$ — сила, с которой тело 2 действует на тело 1. Тогда

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \qquad (3.28)$$

Из опыта следует, что силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ направлены вдоль одной прямой, соединяющей тела 1 и 2.

Третий закон Ньютона неявно содержит предположение о бесконечно большой скорости распространения возмущения в поле, через которое осуществляется взаимодействие тел. В классической механике, рассматривающей движение тел со скоростями v, много меньшими скорости света в вакууме ($v \ll c$), указанное выше предположение выполняется с очень высокой точностью.

3.5. Следствия законов Ньютона

3.5.1. Закон сохранения импульса. Пусть система двух взаимодействующих тел 1 и 2 замкнута. Тогда из (3.20) и (3.28) следует **закон сохранения полного импульса** системы

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}, \qquad (3.29)$$

где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — импульсы (3.21) тел 1 и 2. Этот результат обобщается на случай системы из N взаимодействующих материальных точек (частиц). Предполагая, что взаимодействие частиц парное, из (3.28) находим

$$\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki} = 0, \qquad (3.30)$$

где i и k — любые две частицы системы, $i \neq k$. Величины $\mathbf{F}_{ik}$ являются внутренними силами данной системы. Согласно (3.30), геометрическая сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \mathbf{F}_{ik} = 0, \qquad (3.31)$$

т. е. равнодействующая внутренних сил системы равна нулю.

Уравнения движения для всех N частиц имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \mathbf{F}_{ik}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (3.32)$$

где $\mathbf{F}_i$ — внешние силы, действующие на i-ю частицу; $\sum \mathbf{F}_{ik}$ — сумма внутренних сил, действующих на эту частицу со стороны всех остальных частиц системы ($i \neq k$); $\mathbf{p}_i$ — импульс i-й частицы. Для всей системы из N частиц, просуммировав N уравнений (3.32), получим уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \qquad (3.33)$$

где

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \cdots + \mathbf{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \qquad (3.34)$$

— импульс всей системы (или полный импульс),

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \qquad (3.35)$$

— равнодействующая всех внешних сил.

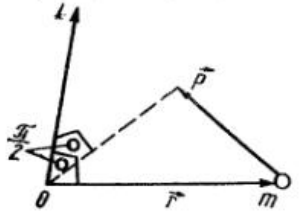


Рис. 3.7

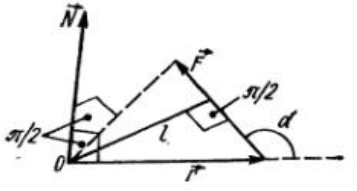


Рис. 3.8

Для замкнутой системы внешние силы $\mathbf{F}_i$, действующие на систему, равны нулю, $\mathbf{F}_i = 0$, и полный импульс системы сохраняется:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \text{const}. \qquad (3.36)$$

Соотношение (3.36) есть закон сохранения полного импульса для замкнутой системы материальных точек. Закон сохранения импульса системы является следствием фундаментального свойства пространства — однородности. Однородность пространства означает, что при любом параллельном переносе замкнутой системы как целого в пространстве ее механические свойства не изменяются.

Закон сохранения полного импульса справедлив для незамкнутых систем при условии, что сумма всех внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на систему, равна нулю: $\mathbf{F} = 0$.

3.5.2. Закон сохранения момента импульса. *Моментом импульса частицы* массой m *относительно точки* O (рис. 3.7) называется псевдовектор $\mathbf{L}$, равный векторному произведению векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}), \qquad (3.37)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы, проведенный из точки O, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — ее импульс, $\mathbf{v}$ — скорость.

Моментом импульса системы частиц относительно точки O называется векторная сумма моментов импульсов частиц $\mathbf{L}_i$, составляющих систему. Для системы из N частиц

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i). \qquad (3.38)$$

Моментом силы **F** *относительно точки* O, из которой проведен радиус-вектор **r** в точку приложения силы (рис. 3.8), называется псевдовектор **N**, равный векторному произведению векторов **r** и **F**:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{3.39}$$

Модуль момента силы (рис. 3.8)

$$N = rF\sin\alpha = lF, \tag{3.40}$$

где $l = r\sin\alpha$ называется *плечом силы* **F** *относительно точки* O.

Из уравнений движения для N частиц системы (3.32) и определений (3.38), (3.37) и (3.39) следуют уравнения движения для моментов импульсов $\mathbf{L}_i$:

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \mathbf{N}_i + \sum_k \mathbf{N}_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.41}$$

где $\mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ — момент внешней силы $\mathbf{F}_i$ относительно точки O, действующей на i-ю частицу с радиусом-вектором $\mathbf{r}_i$, проведенным из точки O, $\mathbf{N}_{ik} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}$ — момент внутренней силы $\mathbf{F}_{ik}$.

Из равенства нулю равнодействующей внутренних сил (3.31) следует, что момент этой силы также равен нулю:

$$\mathbf{N}_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \mathbf{N}_{ik} = 0. \tag{3.42}$$

Момент импульса системы из N частиц относительно точки O согласно (3.41), (3.42) и (3.38) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \tag{3.43}$$

где $\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{N}_i$ — геометрическая сумма моментов внешних сил относительно точки O. Для замкнутой системы моменты внешних сил равны нулю: $\mathbf{N}_i = 0$ и справедлив **закон сохранения момента импульса**

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0, \qquad \mathbf{L} = \text{const}. \tag{3.44}$$

Закон сохранения момента импульса обусловлен фундаментальным свойством пространства — изотропией. *Изотропия пространства* означает, что свойства замкнутой механической системы не зависят от ее поворота как целого в пространстве.

Закон сохранения момента импульса выполняется и для незамкнутых систем в случае, когда сумма моментов всех внешних сил **N** равна нулю: $\mathbf{N} = 0$.

Формулы (3.37) и (3.39) определяют момент импульса частицы **L** и момент силы **N** относительно точки O (рис. 3.7; 3.8). Моменты **L** и **N** являются векторами. Их проекции на некоторую ось z, проходящую через точку O, называют *моментом импульса* и *моментом силы относительно* этой *оси* и обозначают L_z и N_z соответственно. Величины L_z и N_z связаны между собой уравнением движения

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z,$$

которое является одним из трех уравнений для компонент L_x, L_y, L_z и N_x, N_y, N_z векторов **L** и **N**, эквивалентных (3.43).

Плечом силы **F** *относительно оси* z называется кратчайшее расстояние между осью z и линией действия силы **F**. Момент силы относительно оси z равен произведению составляющей силы **F**, перпендикулярной этой оси, на соответствующее плечо силы, а момент импульса относительно оси равен произведению составляющей импульса **p**, перпендикулярной оси, на то же плечо силы. Знаки этих произведений определяются векторами **r**, **p**, **F**.

Момент силы **N** (3.39) и момент импульса **L** (3.37) частицы зависят от положения точки, относительно которой они определяются. Пусть **L** и **N** — моменты относительно некоторой точки O, а **L′** и **N′** — относительно другой точки O'. Тогда

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' - \mathbf{R} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}' - \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}, \tag{3.45}$$

где $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ — радиусы-векторы одной и той же частицы относительно точек O' и O.

3.5.3. Движение центра масс системы. В нерелятивистской механике ввиду независимости массы от скорости полный импульс системы **P** можно представить в виде произведения *суммарной массы* системы

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{3.46}$$

где m_i — масса i-й частицы, на скорость центра инерции системы $\mathbf{V}_C$:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}_C. \tag{3.47}$$

Центром инерции (или *центром масс*) системы называется точка C, положение которой задается радиусом-вектором

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \cdots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} = \frac{\sum m_i\mathbf{r}_i}{M}. \tag{3.48}$$

При этом

$$\mathbf{V}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \frac{\sum m_i\mathbf{v}_i}{M}, \tag{3.49}$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость частицы i.

Для замкнутых систем

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}_C = \text{const}, \tag{3.50}$$

т. е. центр инерции замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или остается в состоянии покоя. Система отсчета, в которой центр инерции покоится ($\mathbf{V}_C = 0$), называется *системой центра инерции* (ц-системой). Систему отсчета, связанную с измерительным прибором, принято называть *лабораторной системой* (л-системой). Между динамическими переменными, описывающими свойства системы в ц- и л-системах, существует однозначная связь.

В общем случае $\mathbf{V}_C \neq 0$ согласно (3.47) и (3.33) имеем уравнение движения для центра масс системы:

$$M\frac{d\mathbf{V}_C}{dt} = \mathbf{F}. \tag{3.51}$$

Из уравнения (3.51) следует **теорема о движении центра масс**: *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе системы, а действующая сила — геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.*

3.5.4. Аддитивность и закон сохранения массы. Утверждение о том, что масса системы, состоящей из N материальных точек, равна сумме их масс, составляет содержание так называемого *свойства аддитивности масс* системы. Свойство аддитивности связано с **законом сохранения масс:** *сумма масс взаимодействующих тел с течением времени не изменяется.* Закон сохранения массы и свойство аддитивности масс являются следствиями принципа относительности Галилея [3.2.3].

3.5.5. Задача двух тел. Задачей двух тел называется задача о движении двух взаимодействующих частиц. Пусть m_1, m_2— массы частиц, $\mathbf{F}_{12}$— сила, с которой частица 1 действует на частицу 2, $\mathbf{F}_{21}$— сила, с которой частица 2 действует на частицу 1; $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$— внешние силы. Тогда уравнения движения частиц 1 и 2 имеют вид

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1, \qquad m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2, \tag{3.52}$$

где $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Решение задачи двух тел в механике сводится к двум независимым задачам. Первая состоит в *решении уравнения движения для центра масс* системы

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2\mathbf{r}_C}{dt^2} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \tag{3.53}$$

где

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

— радиус-вектор центра масс системы двух частиц с радиусами-векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Вторая задача — *определение относительного движения двух частиц*. Уравнение такого движения имеет вид

$$\mu \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}_{12} + \mu\left(\frac{\mathbf{F}_2}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}\right), \tag{3.54}$$

где $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ называется *приведенной массой*, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Для замкнутой системы двух тел ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 = 0$) центр масс движется прямолинейно и равномерно, а уравнение (3.54) формально аналогично второму закону Ньютона (3.17). Его можно трактовать как уравнение движения частицы с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и массой μ, движущейся под действием силы $\mathbf{F}_{12}$. Это утверждение остается справедливым и в случае незамкнутой системы из двух частиц при условии $\frac{\mathbf{F}_2}{m_2} = \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}$, т. е. когда ускорение, сообщаемое силой $\mathbf{F}_1$ телу с массой m_1, равно ускорению сообщаемому силой $\mathbf{F}_2$ телу с массой m_2. Глубокого физического смысла приведенная масса μ не имеет.

Для замкнутой системы переходом в систему центра инерции, (в ц-системе $\mathbf{r}_C = 0$) задача двух тел сводится к задаче о движении одной частицы в силовом поле.

3.6. Движение тела с переменной массой

3.6.1. Уравнение Мещерского. Под движением с переменной массой понимают такое движение тела, при котором его масса с течением времени изменяется, т. е. масса m является функцией в ремени t:

$$m = m(t). \tag{3.55}$$

Согласно второму закону Ньютона (3.33) бесконечно малое приращение импульса

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}dt, \tag{3.56}$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех внешних сил. Приращение $d\mathbf{p}$ есть изменение импульса тела за бесконечно малое приращение времени:

$$d\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t + dt) - \mathbf{p}(t). \tag{3.57}$$

Пусть в момент времени t масса тела равна $m(t)$, а его скорость $\mathbf{v}$. Через время dt масса будет $m(t + dt)$, а скорость $(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. Если масса тела со временем уменьшается (реактивное движение), то приращение массы dm за время dt отрицательно:

$$m(t + dt) - m(t) = -dm < 0 \tag{3.58}$$

Пусть масса dm покидает тело со скоростью $\mathbf{v}'$. Тогда

$$\mathbf{p}(t + dt) = (m - dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + \mathbf{v}'dm, \tag{3.59}$$
$$\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}.$$

Пренебрегая произведением $dmd\mathbf{v}$ как бесконечно малой высшего порядка, из (3.56) — (3.59) получаем

$$md\mathbf{v} = (\mathbf{v}' - \mathbf{v})dm + \mathbf{F}dt \tag{3.60}$$

Отсюда следует *уравнение Мещерского* для движения тела с переменной массой

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} + \mathbf{F}, \tag{3.61}$$

где $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ есть скорость истечения массы относительно тела. Величина

$$\mathbf{F}_{\text{тяг}} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} \tag{3.62}$$

называется *силой тяги* или *реактивной силой*. Она равна силе, с которой действует на тело покидающая его масса.

3.6.2. Формула Циолковского. Следствия из уравнения Мещерского (3.61):

1) внешние силы равны нулю: $\mathbf{F} = 0$. Тогда уравнение движения

$$m\,d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\,dm \tag{3.63}$$

при $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \text{const}$ имеет решение вида

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{\text{отн}} \ln\frac{m_0}{m(t)}, \tag{3.64}$$

где $\mathbf{v}_0$ и m_0— скорость и масса тела в начальный момент времени;

2) движение тела прямолинейно в направлении, противоположном вектору $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \text{const}$. Из (3.64) следует **формула Циолковского** (1895)

$$\frac{m_0}{m} = e^{\frac{v}{v_{\text{отн}}}}; \tag{3.65}$$

3) движение ракеты в вертикальном направлении в гравитационном поле Земли (g — ускорение свободного падения).

Уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} - mg. \tag{3.66}$$

Его решение при условии $v_{отн} = \text{const}$ имеет вид

$$v = v_{отн} \ln \frac{m_0}{m} - gt \qquad (3.67)$$

(сопротивление воздуха и изменение g с высотой не учитываются). Для того чтобы ракета могла двигаться в поле тяготения, масса, выбрасываемая ракетой за единицу времени, должна удовлетворять условию

$$m_{газ} > -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{v_{отн}} \exp(-gt/v_{отн}). \qquad (3.68)$$

3.7. Движение тела под действием силы трения

При соприкосновении твердых тел между ними возникает взаимодействие, препятствующее их относительному перемещению. Силы такого взаимодействия называют *силами трения*. Силы трения действуют вдоль поверхностей соприкасающихся тел (т.е. по касательной к трущимся поверхностям) и направлены в сторону, противоположную перемещению этих тел одного относительно другого. Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки называется *сухим трением*.

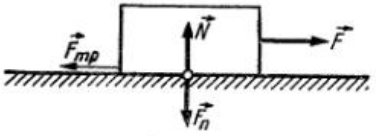


Рис. 3.9

3.7.1. Виды сил сухого трения. Различают три вида сил сухого трения.

1. Сила, которая возникает между соприкасающимися и покоящимися одно относительно другого телами, называется *силой трения покоя*. Сила трения покоя не есть однозначная величина. С увеличением внешней силы $\mathbf{F}_{вн}$, стремящейся придать покоящимся телам относительное перемещение, сила трения покоя возрастает от нуля до некоторой максимальной величины $F_{тр}$, такой, что при выполнении условия $F_{вн} > F_{тр}$ тела будут двигаться. Пусть $\mathbf{F}$ — минимальная внешняя сила, при которой тела начинают двигаться, F_n — модуль силы нормального давления, прижимающей одно тело к другому (или опоре). Тогда по определению сила трения (рис. 3.9)

$$\mathbf{F}_{тр} = -\mathbf{F}, \qquad F_{тр} = \mu F_n, \qquad (3.69)$$

где μ называется *коэффициентом трения покоя*. Сила $\mathbf{N}$, равная по величине силе $\mathbf{F}_n$ и противоположно ей направленная, называется *силой нормальной реакции опоры*:

$$\mathbf{N} = -\mathbf{F}_n. \qquad (3.70)$$

В соответствии с (3.69) сила трения покоя равна по модулю и противоположна по направлению той минимальной внешней силе, которая может вызвать скольжение одного тела относительно другого. Она увеличивается с увеличением силы нормального давления и не зависит от площади соприкасающихся поверхностей. Коэффициент трения μ не является строго постоянной величиной. Он зависит от вещества соприкасающихся тел и состояния их поверхностей. Гладкая обработка поверхностей уменьшает коэффициент трения.

2. Сила, которая возникает между соприкасающимися и движущимися одно относительно другого телами, называется *силой трения скольжения*. Сила трения скольжения меньше сил трения покоя. Она зависит от рода и состояния трущихся поверхностей, а также скорости их взаимного перемещения. По определению сила трения скольжения $\mathbf{F}^c_{тр}$ равна по модулю и противоположна по направлению той внешней силе $\mathbf{F}^c$, при которой соприкасающиеся тела движутся равномерно одно относительно другого:

$$\mathbf{F}^c_{тр} = -\mathbf{F}^c, \qquad F^c_{тр} = \mu^c N. \qquad (3.71)$$

Величина μ^c называется *коэффициентом трения скольжения*. В общем случае $\mu^c < \mu$ и зависит от скорости взаимного перемещения тел v, т. е. $\mu^c = \mu^c(v)$. При малых скоростях для заданной пары тел $\mu^c \simeq \mu$.

3. Сила, действующая со стороны опоры на катящееся по нему тело, называется *силой трения качения*. Сила трения качения $F^k_{тр}$ много меньше силы трения скольжения $F^c_{тр}$:

$$F^k_{тр} \ll F^c_{тр}. \qquad (3.72)$$

Сила трения качения $\mathbf{F}^k_{тр}$ равна по модулю и противоположна по направлению той внешней силе $\mathbf{F}^k$, при которой тело катится по опоре равномерно:

$$\mathbf{F}^k_{тр} = -\mathbf{F}^k, \qquad F^k_{тр} = \mu^k N, \qquad (3.73)$$

где μ^k называется *коэффициентом трения качения*, $\mu^k \ll \mu^c$. Коэффициент μ^k зависит от радиуса катящегося тела.

3.7.2. Определение коэффициента трения. Коэффициент трения можно определить с помощью изучения движения тела по наклонной плоскости под действием силы тяжести $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, где g — ускорение свободного падения. Уравнение движения тела массой m по наклонной плоскости с углом наклона α (рис. 3.10) имеет согласно второму закону Ньютона вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{тр} + \mathbf{N} + m\mathbf{g}.$$

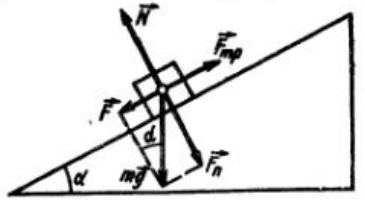


Рис. 3.10

Учитывая, что

$$F = mg \sin\alpha,$$
$$F_{тр} = \mu F_n = \mu\, mg \cos\alpha, \qquad (3.74)$$

получаем для ускорения a, с которым движется тело, формулу

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \qquad (3.75)$$

При движении тела с постоянной скоростью ускорение $a = dv/dt = 0$ и коэффициент трения скольжения

$$\mu^c = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (3.76)$$

Соотношение (3.76) позволяет определить и коэффициент трения покоя μ. В этом случае α есть угол наклонной плоскости, при котором тело начинает двигаться по ней. Коэффициенты μ и μ^c, найденные на опыте, приведены в табл. 3.2.

3.7.3. Вязкое трение и сопротивление среды. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями этой среды, называется *вязким*. Силы вязкого трения зависят от скорости движения тела в среде. Они равны нулю для покоящегося относительно среды тела и пропорциональны скорости $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F}_{тр} = -k_1\mathbf{v} \qquad (3.77)$$

Таблица 3.2. **Коэффициенты трения покоя μ и трения скольжения μ^c**

Соприкасающиеся вещества	μ	μ^c	
		Скольжение сухое	Скольжение со смазкой
Автошина/асфальт	0,55	0,3	0,15
Автошина/булыжник	0,55	0,5	0,2 (с водой)
Дерево/дерево	0,65	0,3	0,1
Кожа/дерево	0,47	0,27	0,014 (с водой)
Кожа/серый чугун	0,56	0,28	0,12
Металл/дерево	0,5—0,6	0,4—0,5	0,03—0,08
Сталь/сталь	0,15	0,1	0,01

при малых v. Сила трения (3.77) включает в себя и *силу сопротивления среды*, обусловленную силами нормального давления жидкости или газа на поверхности движущегося тела. При бо́льших скоростях

$$\mathbf{F}_{тр} = -k_2 v^2 \mathbf{e}_v, \tag{3.78}$$

где $\mathbf{e}_v$ — орт скорости. Коэффициенты k_1 и k_2 зависят от размеров и формы твердого тела, состояния его поверхности, а также от свойств среды. Знак минус в (3.77) и (3.78) означает, что сила вязкого трения $\mathbf{F}_{тр}$ направлена противоположно скорости.

3.8. Закон всемирного тяготения

3.8.1. Формулировка закона. Закон всемирного тяготения (Ньютон, 1687): *сила, с которой две материальные точки притягивают одна другую, прямо пропорциональна массам этих точек m_1 и m_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r_{12} между ними:*

$$F_{12} = G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \tag{3.79}$$

Коэффициент G_N называется *гравитационной постоянной*. Сила F_{12} называется *гравитационной силой* или *силой тяготения*. Гравитационная сила направлена вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие материальные точки. Она является примером центральной силы. Вводя радиус-вектор $\mathbf{r}_{12}$, имеющий направление от первой материальной точки $\mathbf{r}_1$ до второй $\mathbf{r}_2$, и модуль, равный расстоянию между этими точками, закон всемирного тяготения можно записать в векторной форме

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_{12}) = -G_N \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \tag{3.80}$$

Закон всемирного тяготения является универсальным. Любые два тела, имеющие массы, притягиваются одно к другому. Это свойство тел обусловлено их массой. Силы тяготения могут быть лишь силами притяжения.

Для протяженных тел, размеры которых много меньше расстояния между ними, гравитационная сила определяется формулой (3.80). В общем случае для определения гравитационной силы взаимодействия двух протяженных тел эти тела мысленно разбивают на элементарные

массы Δm, каждую из которых можно считать материальной точкой. Тогда гравитационная сила между элементом i одного тела и элементом k другого подчиняется закону

$$\Delta \mathbf{F}_{ik} = -G_N \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}, \qquad \mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i, \tag{3.81}$$

где $\mathbf{r}_{ik}$ — радиус-вектор, проведенный из центра масс элемента Δm_i в центр масс элемента Δm_k. Сила взаимодействия двух тел определяется как сумма по всем элементарным взаимодействиям $\Delta \mathbf{F}_{ik}$:

$$\mathbf{F}_{12} = \sum_{i,k} \Delta \mathbf{F}_{ik} = -G_N \sum_{i,k} \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}. \tag{3.82}$$

Переходя к бесконечно малым массам dm_i и dm_k и вводя плотности ρ (3.4) тел в точках с координатами $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, равные $\rho_1 = \rho_1(\mathbf{r}_1)$, $\rho_2 = \rho_2(\mathbf{r}_2)$ [3.2.1], суммирование в (3.82) можно заменить интегрированием по полным объемам V_1 и V_2, занимаемым телами:

$$\begin{gathered} \mathbf{F}_{12} = -G_N \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\, \rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\, dV_1\, dV_2, \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\,\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\,\mathbf{k}, \\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}, \end{gathered} \tag{3.83}$$

где $dV_1 \equiv d\mathbf{r}_1 \equiv dx_1 dy_1 dz_1$, $dV_2 \equiv d\mathbf{r}_2 \equiv dx_2 dy_2 dz_2$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты (2.1). Интегрирование выражения (3.83) является сложной задачей.

Если тела представляют собой однородные шары, то формула (3.83) сводится к формуле (3.80), где m_1 и m_2 — массы шаров, а $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, соединяющий их центры. Формула (3.80) справедлива и в том случае, когда, например, тело 1 является однородным шаром очень большого радиуса с массой m_1 (Земля), а тело 2 можно рассматривать как материальную точку с массой m_2 (искусственный спутник Земли). Тогда r_{12} есть расстояние от центра шара до материальной точки.

Числовое значение гравитационной постоянной

$$G_N = 6{,}6720\,(41) \cdot 10^{-11} \quad \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}. \tag{3.84}$$

Согласно (3.80) и (3.84) два однородных шара с массами 1 кг, центры которых расположены один от другого на расстоянии 1 м, притягиваются с силой

$$F_{12} = 6{,}6720\,(41) \cdot 10^{-11} \quad \text{Н}.$$

3.8.2. Гравитационное поле. Гравитационное взаимодействие тел осуществляется через *гравитационное поле* (или *поле тяготения*). Всякое тело является источником гравитационного поля. Это поле проявляет себя в том, что на помещенное в него другое тело действует сила тяготения прямо пропорциональная массе этого тела. Гравитационное поле характеризуется напряженностью. *Напряженность гравитационного поля* $\mathbf{g}$ равна силе, с которой это поле действует на материальную точку с массой, равной единице, и помещенной в данную точку пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{m}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r}). \tag{3.85}$$

Сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ есть гравитационная сила, действующая на материальную точку с массой m в данной точке поля тяготения. Напряженность гравитационного поля является векторной величиной. Напряженность поля, создаваемая материальной точкой с массой m в точке пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, определяется формулой

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G_N \frac{m}{r^3}\mathbf{r}. \tag{3.86}$$

Гравитационное поле можно характеризовать *потенциалом* $\varphi(\mathbf{r})$, связанным с напряженностью $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ соотношением

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \equiv -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \tag{3.87}$$

Потенциал φ, создаваемый в точке $\mathbf{r}$ материальной точкой с массой m, равен

$$\varphi(\mathbf{r}) = -G_N \frac{m}{r} + C, \qquad \nabla C = 0, \tag{3.88}$$

где C — постоянная, зависящая от начала отсчета φ. В общем случае потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ и напряженность $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, создаваемые произвольно распределенными в пространстве массами, определяются интегралами

$$\varphi(\mathbf{r}) = -G_N \int\limits_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \qquad \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G_N \int\limits_{V'} \rho(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,dV', \tag{3.89}$$

где dV' — элемент объема в точке $\mathbf{r}'$, ρ — плотность распределения массы, интегрирование производится по всему объему V', занятому массами, создающими гравитационное поле.

Напряженность $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ (3.89) есть решение дифференциального уравнения

$$\operatorname{div}\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -4\pi G_N \rho(\mathbf{r}), \tag{3.90}$$

где

$$\operatorname{div}\mathbf{g} \equiv \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \equiv \nabla\cdot\mathbf{g}(\mathbf{r}) \tag{3.91}$$

— дивергенция вектора $\mathbf{g}$, имеющего проекции на оси x, y, z декартовой системы координат, равные g_x, g_y и g_z.

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ (3.89) есть решение *дифференциального уравнения Пуассона*

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -4\pi G_N \rho(\mathbf{r}), \tag{3.92}$$

где

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{3.93}$$

Гравитационное поле однородного шара с радиусом R и плотностью ρ при $r < R$ описывает в первом приближении гравитационное поле Земли. Это поле является сферически симметричным. Масса шара $m = (4\pi/3)R^3\rho$. Напряженность $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ и потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ имеют вид

$$g(r) = -G_N \frac{m}{r^2}, \qquad \varphi(\mathbf{r}) = -G_N \frac{m}{r} \quad \text{при} \quad r > R,$$

$$g(r) = -G_N \frac{m}{R^2}, \qquad \varphi(\mathbf{r}) = -G_N \frac{m}{R} \quad \text{при} \quad r = R,$$

$$g(r) = -G_N \frac{m}{R^3} r, \qquad \varphi(\mathbf{r}) = -G_N \frac{m}{R^3}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) \quad \text{при} \quad r < R.$$

Вне шара гравитационное поле равно гравитационному полю материальной точки с массой m, помещенной в центр шара.

3.8.3. Сила тяжести и вес. Закон Галилея (1604—1609): *все тела под действием силы притяжения Земли падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением* $\mathbf{g}$, т. е. на всякое тело с массой m действует сила

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}, \tag{3.94}$$

которая называется *силой тяжести*. Сила $\mathbf{G}$, с которой тело действует на подвес или опору, называется *весом тела*. Согласно третьему закону Ньютона [3.4]

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} = m\mathbf{g}. \tag{3.95}$$

Если тело движется с ускорением $\mathbf{a}$, то его вес определяется формулой

$$\mathbf{G} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}). \tag{3.96а}$$

Модуль веса тела

$$G = m(g + a) \tag{3.96б}$$

при движении тела против сил тяжести и

$$G = m(g - a) \tag{3.96в}$$

при движении с ускорением $\mathbf{a}$, совпадающим по направлению с ускорением свободного падения $\mathbf{g}$. Состоянию невесомости соответствует случай $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, при котором вес тела равен нулю: $\mathbf{G} = 0$.

Силы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{G}$, равные одна другой при $\mathbf{a} = 0$, являются различными силами. Сила $\mathbf{P}$ приложена к самому телу, а сила $\mathbf{G}$ — к опоре или подвесу, ограничивающему движение тела в гравитационном поле Земли. При этом согласно (3.94) и (3.96) сила тяжести $\mathbf{P}$ всегда равна $m\mathbf{g}$, а вес $\mathbf{G}$ зависит от ускорения $\mathbf{a}$, с которым движутся опора и тело относительно Земли. Соотношение (3.95) дает способ измерения масс тел путем взвешивания

$$G_1 : G_2 : G_3 : \ldots = m_1 : m_2 : m_3 : \ldots \tag{3.97}$$

Ускорение свободного падения $\mathbf{g}$ и сила тяжести $\mathbf{P}$ зависят от широты местности и высоты h над уровнем моря, т. е. от расстояния до центра Земли [3.10.4]

$$g = G_N \frac{M}{r^2} = g_3 \frac{R_3^2}{r^2}, \qquad r = R_3 + h, \tag{3.98}$$

где M — масса Земли, g — ускорение свободного падения тела на расстоянии r от центра Земли, $R_3 \simeq 6{,}37 \cdot 10^6$ м — средний радиус Земли, $g_3 \simeq 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

3.8.4. Принцип эквивалентности гравитационной и инертной масс. Масса, которая фигурирует в первом [3.2] и втором [3.3] законах Ньютона, является мерой инертности тел и называется *инертной массой*. Массы, входящие в закон всемирного тяготения [3.8.1], характеризуют способность тел возбуждать в окружающем пространстве гравитационное поле [3.8.2] и называются *гравитационными массами* или гравитационными зарядами по аналогии с законом Кулона [25.1], описывающим взаимодействие электрически заряженных частиц.

Согласно опытным данным инертность тела и его способность быть источником гравитационного поля являются различными проявлениями одного и того же свойства тела. Физический закон (2.79), установленный Ньютоном, состоит в том, что сила гравитационного взаимодействия тел пропорциональна их инертным массам. Выбирая систему единиц так, чтобы коэффициент пропорциональности был равен гравитационной постоянной G_N (3.84), приходим к **фундаментальному физическому закону:** *гравитационная и инертная массы эквивалентны.* Первое подтверждение этого закона было получено в опытах Галилея (1604—1609) со свободно падающими телами. Опыты показали, что все тела в поле тяготения Земли падают с одним и тем же ускорением. Этот закон справедлив для любого гравитационного поля: в одном и том же гравитационном поле все тела при свободном падении приобретают одинаковое ускорение. Последнее утверждение составляет существо **обобщенного закона Галилея.** Современные эксперименты (В. Б. Брагинский, В. И. Панов, 1971) показали, что инертная масса равна гравитационной массе с относительной точностью 10^{-12}.

Закон об эквивалентности инертной и гравитационной масс является главным опытным фактом, на котором построена *общая теория относительности*, называемая также *релятивистской теорией гравитации* (Эйнштейн, 1916).

3.8.5. Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции. Формулировка принципа: *в замкнутой системе тел все физические явления в гравитационном поле происходят так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряженности g и a обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают.* Для однородных полей (т. е. полей, напряженность которых одна и та же во всех точках пространства) всякое гравитационное поле может быть имитировано надлежащим ускоренным движением системы отсчета и, наоборот, любые силы инерции во всем пространстве можно заменить гравитационными силами. В общем случае неоднородных полей оба эти утверждения неверны. Например, гравитационное поле точечной массы не может быть получено никаким вращением системы отсчета. В небольших объемах неоднородное гравитационное поле можно считать практически однородным, и оно может быть приближенно имитировано ускоренным движением системы отсчета (локальный характер принципа эквивалентности).

В общей теории относительности на основе эквивалентности инертной и гравитационной масс гравитационное поле и поле всех сил инерции объединяются в единое поле, называемое также гравитационным. Это поле описывается уравнением Эйнштейна (1916). Закон всемирного тяготения, использующий идею о мгновенном распространении взаимодействия, следует из уравнения Эйнштейна и является приближенным.

3.9. Движение небесных тел

3.9.1. Траектория. При движении небесного тела (планеты, кометы, искусственного спутника) под действием сил притяжения Солнца его полная энергия E и момент импульса $\mathbf{L}$ относительно Солнца сохраняются:

$$E = \frac{mv^2}{2} - G_N \frac{Mm}{r} = \text{const},$$

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \text{const}, \qquad (3.99)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость тела, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра Солнца к телу, M — масса Солнца, m — масса небесного тела. В полярных координатах эти уравнения имеют вид

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2\dot{\varphi}^2 - G_N \frac{Mm}{r} = E, \qquad (3.100)$$

$$mr^2\dot{\varphi} = L,$$

где использованы следующие представления для скорости $\mathbf{v}$ и момента импульса $\mathbf{L}$ (рис. 3.11):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r) + m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z, \qquad (3.101)$$

$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные орты.

Решение уравнений (3.100) определяет *траекторию движения небесного тела*

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}, \qquad (3.102)$$

где введены обозначения

$$p \equiv \frac{4\sigma^2}{GM}, \quad e \equiv \sqrt{1 + \frac{8E\sigma^2}{mG_N^2M^2}}, \quad \sigma \equiv \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi} = \frac{L}{2m}. \qquad (3.103)$$

Величина σ называется *секториальной скоростью*, которая представляет собой площадь, описываемую радиусом-вектором небесного тела в единицу времени. Уравнение (3.102) есть уравнение конического сечения с эксцентриситетом e и параметром p (3.103). Конкретный вид траектории (3.102) зависит от значений e и p, которые определяются начальными условиями, т. е. *положением и скоростью небесного тела* в некоторый (начальный) момент времени.

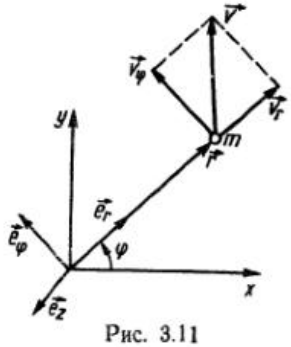


Рис. 3.11

Если $E > 0$, то $e > 1$ и траектория есть гипербола, если $E = 0$, то $e = 1$ — парабола, если $E < 0$, то $e < 1$ — эллипс. Все виды возможных траекторий небесных тел показаны на рис. 3.12.

Обозначим через v_0 начальную скорость небесного тела. Тогда

$$v_n = \sqrt{2G_N \frac{M}{r_0}} = v_k\sqrt{2}, \qquad v_k = \sqrt{G_N \frac{M}{r_0}}, \qquad (3.104)$$

v_n — *параболическая скорость*, т. е. скорость, которую нужно сообщить небесному телу, чтобы оно двигалось по параболе, v_k — *круговая скорость*, т. е. скорость, которую нужно сообщить небесному телу, чтобы оно под действием гравитационной силы Солнца двигалось вокруг него по кругу радиусом r_0 ($r_0 = AS$ на рис. 3.12).

Движение небесных тел по эллиптическим орбитам называется *финитным*, так как они движутся в ограниченной области пространства, не уходя на бесконечность. В случае гиперболических и парабо-

лических орбит движение *инфинитно* — небесное тело может удалиться от Солнца на бесконечно большое расстояние.

3.9.2. Космические скорости. *Первой космической скоростью* v_k называется скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно двигалось вокруг планеты (или любого другого небесного тела) по круговой орбите на высоте h от ее поверхности:

$$v_k = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} = \sqrt{\frac{G_N M}{R+h}}, \qquad (3.105)$$

где R — средний радиус планеты, g — ускорение свободного падения на ее поверхности, M — масса планеты.

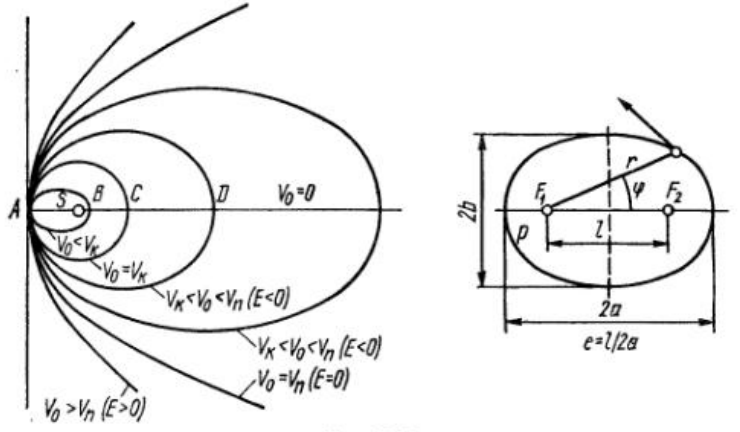


Рис. 3.12

Второй или *параболической космической скоростью* v_n называется скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло без затрат дополнительной работы преодолеть влияние поля тяготения планеты и удалиться от нее на бесконечно большое расстояние:

$$v_n = v_k\sqrt{2}. \qquad (3.106)$$

Числовые значения v_k и v_n:

1) движение спутника вокруг Земли

$$R = R_з = 6{,}37 \cdot 10^6 \text{ м} \gg h,\ g \simeq 9{,}81 \text{ м/с}^2,$$
$$v_k = 7{,}9 \text{ км/с},\quad v_n = 11{,}2 \text{ км/с};$$

2) движение Земли вокруг Солнца

$$h \simeq 1{,}50 \cdot 10^{11} \text{ м},\quad R = R_c \simeq 0{,}7 \cdot 10^9 \text{ м},\quad M = M_c \simeq 2 \cdot 10^{30} \text{ кг},$$
$$v_k \simeq 29{,}8 \text{ км/с},\quad v_n \simeq 42{,}1 \text{ км/с}.$$

Скорость $v_з$, которую нужно сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло пределы Солнечной системы, называется *третьей космической скоростью*. Величина $v_з$ зависит от того, в каком направлении тело выходит из зоны действия земного притяжения:

$$v_з^2 = [(1+\cos^2\theta)^{1/2} - \cos\theta]^2 V_k^2 + 2v_k^2, \qquad (3.107)$$

где V_k и v_k — первые космические скорости тела относительно Солнца и относительно Земли, θ — угол, под которым тело выходит из зоны земного тяготения. Числовые значения $v_з$:

1) запуск ракеты в направлении орбитального движения Земли ($\theta = 0$)

$$v_з \simeq 16{,}7 \text{ км/с};$$

2) запуск ракеты против орбитального движения Земли ($\theta = \pi$)

$$v_з \simeq 72{,}7 \text{ км/с}.$$

В формуле (3.107) не учитывается влияние поля тяготения Солнца на движение тела в течение всего времени, которое оно затрачивает для выхода из области действия земного тяготения. Точное вычисление третьей космической скорости требует строгого решения задачи трех тел: Солнца, Земли и тела.

Четвертой космической скоростью v_4 называют скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно могло упасть в заданную точку Солнца:

$$v_4^2 = V_k^2\left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}}\right)^2 + 2v_k^2, \qquad (3.108)$$

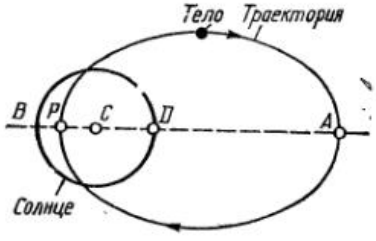


Рис. 3.13

где V_k и v_k — первая космическая скорость относительно Солнца и относительно Земли, $R = CA$ — расстояние тела от Солнца при его максимальном удалении, $x = CP$ — параметр, определяющий место падения $x = 2a - R$, где $2a$ — большая ось эллипса — траектории, по которой движется тело (рис. 3.13).

Числовые значения v_4:

1) прямолинейное движение по направлению к центру Солнца ($x = 0$) — тело упадет в точку D со скоростью

$$v_4 \simeq 31{,}8 \text{ км/с}.$$

2) движение по касательной к поверхности Солнца ($x = R_c$, R_c — радиус Солнца) — тело упадет в точку B со скоростью

$$v_4 \simeq 29{,}2 \text{ км/с}.$$

3.9.3. Законы Кеплера. Законы Кеплера являются чисто кинематическими законами движения планет. Они были установлены Кеплером эмпирическим путем на основе гелиоцентрической системы Коперника [3.10.5] и точных измерений орбит планет, выполненных Браге (1576—1597).

Первый закон (1609): *планеты движутся по траекториям, имеющим форму эллипса, в одном из фокусов которого находится Солнце.* Движение планеты финитно, так как ее полная энергия $E < 0$ [3.9.1].

Второй закон (1609): *радиус-вектор планеты за равные времена описывает равные площади, т. е. секториальная скорость* σ (3.103) *планеты постоянна*: $\sigma = \text{const}$. Этот закон является следствием более общего закона сохранения момента импульса L в поле центральных сил [3.5.2].

Третий закон (1619): *отношение кубов больших полуосей орбит движения всех планет Солнечной системы к квадратам времен* T *и*

обращения вокруг Солнца есть величина постоянная.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G_N M_c}{4\pi^2}, \qquad \frac{a^3}{T^2} \simeq 3{,}36 \cdot 10^{-18}\ \text{м}^3/\text{с}^2, \tag{3.109}$$

где M_c — масса Солнца. Закон (3.109) следует из условия, согласно которому центростремительная сила при движении планеты по замкнутой криволинейной траектории должна быть равна силе гравитационного притяжения:

$$m\omega^2 r = G_N \frac{mM_c}{r^2},$$

где m — масса планеты, $\omega = 2\pi/T$ и $r = a$.

Третий закон Кеплера в форме (3.109) не является вполне точным. Он не учитывает движение Солнца при его взаимодействии с планетой. Учет этого движения приводит к закону для относительного движения Солнца и планеты в форме

$$\frac{a^3}{T^2 (M_c + m)} = \frac{G_N}{4\pi^2}. \tag{3.110}$$

Отношение (3.110) является универсальной постоянной, которая не зависит от масс взаимодействующих тел и расстояний между ними. Для относительных движений первый и второй законы Кеплера остаются справедливыми.

Эмпирические законы Кеплера находят свое теоретическое обоснование в рамках классической механики. Вывод этих законов из трех законов Ньютона [3.2; 3.3; 3.4] и закона всемирного тяготения [3.8] обнаруживает их приближенный характер. Законы Кеплера являются точными решениями задачи двух тел и поэтому справедливы только для случая невозмущенного эллиптического движения планет вокруг Солнца. В действительности слабое взаимное влияние всех планет Солнечной системы приводит к тому, что реальное их движение имеет сложный характер и описывается пространственной кривой, которую с хорошим приближением можно считать (плоской) эллиптической только за время одного-двух оборотов вокруг Солнца.

3.10. Движение в неинерциальных системах отсчета

3.10.1. Неинерциальная система отсчета. *Неинерциальной* называется такая система отсчета, которая движется ускоренно относительно инерциальной системы. Законы Ньютона выполняются только в инерциальных системах отсчета. Для того чтобы найти уравнение движения в неинерциальных системах отсчета, нужно знать законы преобразования сил и ускорений при переходе от инерциальной системы к любой неинерциальной. Классическая механика постулирует следующие **два принципа:** 1) *время абсолютно, т. е. промежутки времени между любыми двумя событиями одинаковы во всех произвольно движущихся системах отсчета;* 2) *пространство абсолютно, т. е. расстояние между двумя любыми материальными точками одинаково во всех произвольно движущихся системах отсчета.* Эти два принципа позволяют записать уравнение движения материальной точки относительно любой неинерциальной системы отсчета.

3.10.2. Сила инерции. *Движение* материальной точки относительно заданной неподвижной инерциальной системы отсчета называется *абсолютным.* Движение материальной точки относительно заданной подвижной системы отсчета называется *относительным.* Движение точки, которая является неподвижной в движущейся системе отсчета, относительно неподвижной системы отсчета называется *переносным. Абсолютное* движение складывается из относительного и переносного.

При поступательном движении системы отсчета со скоростью $\mathbf{v}_0$, равной скорости движения начала координат неинерциальной системы отсчета, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{абс}} &= \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}, \\ \mathbf{a}_{\text{абс}} &= \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{пер}}, \end{aligned} \tag{3.111}$$

где $\mathbf{v}_{\text{абс}}$ и $\mathbf{a}_{\text{абс}}$ — абсолютные скорость и ускорение, $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ и $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ — относительные скорость и ускорение, $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ и $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ — переносные скорость и ускорение, причем $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_0$ и $\mathbf{a}_{\text{пер}} = \dot{\mathbf{v}}_0$. Уравнение относительного движения имеет вид

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\dot{\mathbf{v}}_0, \tag{3.112}$$

где $\mathbf{F}$ — сила взаимодействия тел в инерциальной системе отсчета, сила

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\dot{\mathbf{v}}_0 \tag{3.113}$$

называется *поступательной силой инерции* или просто *силой инерции*

Свойства сил инерции: 1) силы инерции неинвариантны относительно перехода от одной ускоренной системы отсчета к другой; 2) силы инерции не подчиняются третьему закону Ньютона (равенству действия и противодействия); 3) силы инерции всегда являются внешними по отношению к любой движущейся материальной точке; 4) силы инерции пропорциональны массе материальной точки; 5) движение материальной точки под действием сил инерции аналогично движению во внешних силовых полях, в том числе в гравитационном поле.

Силы инерции нельзя ставить в один ряд с силами, обусловленными воздействием на материальную точку других тел. Они обусловлены свойствами той системы отсчета, в которой рассматриваются механические явления. Поскольку в принципе любое движение можно всегда рассмотреть по отношению к инерциальной системе отсчета, введение в рассмотрение сил инерции не является принципиально необходимым. Движение по отношению к неинерциальным системам отсчета представляет практический интерес (например, движение относительно Земли).

3.10.3. Сила Кориолиса. Всякое произвольное движение одной системы отсчета относительно другой можно разложить на два: поступательное со скоростью $\mathbf{v}_0$, равной скорости движения начала координат движущейся системы отсчета, и вращательное движение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{абс}} &= \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}}, \\ \mathbf{v}_{\text{пер}} &= \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ \mathbf{a}_{\text{абс}} &= \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}}, \\ \mathbf{a}_{\text{кор}} &= 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}), \\ \mathbf{a}_{\text{пер}} &= \dot{\mathbf{v}}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}), \end{aligned} \tag{3.114}$$

где $\mathbf{v}_{\text{абс}}$ и $\mathbf{a}_{\text{абс}}$ — абсолютные скорость и ускорение, $\mathbf{v}_{\text{отн}}$ и $\mathbf{a}_{\text{отн}}$ — относительные скорость и ускорение, $\mathbf{v}_{\text{пер}}$ и $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ — переносные скорость и

ускорение, $\mathbf{a}_{кор}$ — называется *кориолисовым ускорением* (Кориолис, 1832), $\mathbf{r}$ — радиус-вектор движущейся материальной точки в движущейся системе отсчета. Выражение для $\mathbf{a}_{абс}$ (3.114) суть **теорема Кориолиса**: *абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, кориолисова и переносного ускорений.* Выражение

$$\mathbf{a}_{ц} = (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = -\omega^2 \mathbf{R} \qquad (3.115)$$

есть центростремительное ускорение, $\mathbf{R}$ — перпендикулярная оси вращения составляющая радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (модуль R равен расстоянию от оси вращения до движущейся произвольным образом материальной точки).

Уравнение относительно движения имеет вид

$$m\mathbf{a}_{отн} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{кор} + \mathbf{F}_{пер}, \qquad (3.116)$$

где $\mathbf{F}$ — внешняя сила (или равнодействующая внешних сил), действующая на материальную точку,

$$\mathbf{F}_{кор} = -m\mathbf{a}_{кор} = 2m\,(\mathbf{v}_{отн} \times \boldsymbol{\omega}) \qquad (3.117)$$

— *сила Кориолиса*,

$$\mathbf{F}_{пер} = \mathbf{F}_{ин} + \mathbf{F}_{цб} - m\,(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) \qquad (3.118)$$

— *переносная сила инерции*, сила $\mathbf{F}_{ин} = -m\dot{\mathbf{v}}_0$ есть поступательная сила инерции (3.113), сила

$$\mathbf{F}_{цб} = m\omega^2 \mathbf{R} \qquad (3.119)$$

называется *центробежной силой инерции* или *центробежной силой*. Центробежная сила $\mathbf{F}_{цб}$, как и всякие силы инерции, существует лишь в ускоренно движущихся (вращающихся) системах отсчета и исчезает при переходе к инерциальным системам. Сила Кориолиса $\mathbf{F}_{кор}$ возникает тогда, когда система отсчета вращается, а материальная точка движется относительно этой системы. В отличие от сил $\mathbf{F}_{ин}$ и $\mathbf{F}_{цб}$ сила $\mathbf{F}_{кор}$ зависит от относительной скорости $\mathbf{v}_{отн}$. Сила Кориолиса перпендикулярна относительной скорости, она не совершает работы при относительном движении. Свойства сил инерции приведены в [3.10.2]. Слагаемое $m\,(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r})$ обусловлено неравномерностью вращения. Оно обращается в нуль при $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$.

3.10.4. Движение тела в гравитационном поле Земли с учетом ее вращения. Выберем в качестве неинерциальной систему отсчета, связанную с Землей. Неинерциальность такой системы отсчета объясняется тем, что Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца. Говорят, что Земля движется ускоренно относительно *системы Коперника* (1541—1543) или *гелиоцентрической системы отсчета*. В системе Коперника начало координатной системы связывают с центром масс Солнца, а координатные оси — с прямыми, направленными на три удаленные звезды, не лежащие в одной плоскости. Система Коперника является практически инерциальной системой отсчета для движений объектов малых по сравнению с размерами Галактики (например, движение планет Солнечной системы).

Движение тела в гравитационном поле Земли описывается уравнением (3.116), которое в данном случае можно переписать в следующем виде:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m\,(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{F}, \qquad (3.116а)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{отн}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{отн}$ — ускорение и скорость,

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_з + m\omega^2 \mathbf{R}, \qquad (3.120)$$

материальной точки относительно системы отсчета, связанной с Землей, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли, которая практически постоянна, m — масса материальной точки, $\mathbf{F}$ — геометрическая сумма действующих на нее внешних сил, за вычетом силы гравитационного притяжения Земли $\mathbf{F}_з$ и силы $\mathbf{F}_0$ — равнодействующей сил гравитационного притяжения Солнца, Луны, планет, звезд и других небесных тел. Сила $\mathbf{F}_0$ полностью компенсируется поступательными силами инерции, возникающими из-за ускорения, сообщаемого Земле гравитационными полями небесных тел:

$$\mathbf{F}_0 = m\dot{\mathbf{v}}_0. \qquad (3.121)$$

Уравнение (3.120) является точным в приближении однородного внешнего гравитационного поля в окрестности Земли. Величина $\mathbf{g}$ одна и та же для всех тел. В случае, когда $\mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{F} = 0$, имеем $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, т. е. вектор $\mathbf{g}$ есть ускорение свободно падающей материальной точки (тела) относительно Земли при условии, что скорость точки в рассматриваемый момент равна нулю. Согласно (3.120) ускорение свободного падения состоит из двух слагаемых:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{абс} + \omega^2 \mathbf{R}, \qquad (3.122)$$

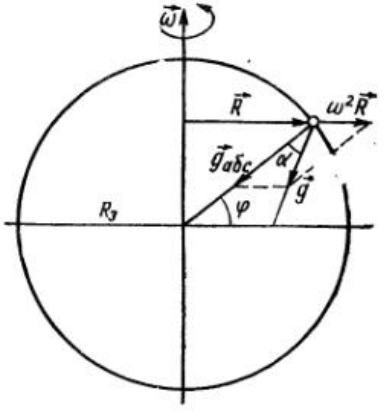


Рис. 3.14

где $\mathbf{g}_{абс} = \mathbf{F}_з/m$ — ускорение, вызванное силой гравитационного притяжения Земли, $\omega^2 \mathbf{R}$ — ускорение, сообщаемое центробежной силой инерции и связанное с вращением Земли (рис. 3.14). Величина g зависит от географической широты φ местоположения материальной точки и ее высоты h над уровнем моря. Ее можно вычислить по приближенной формуле

$$g = 9{,}78049\,(1 + 0{,}0052884\sin^2\varphi - 0{,}0000059\sin^2 2\varphi) - 0{,}000003086h - 0{,}00011, \qquad (3.123)$$

где $[h] = \text{м}$ и $[g] = \text{м/с}^2$.

Частные значения: на полюсе $g = 9{,}832$ м/с^2, на экваторе $g = 9{,}780$ м/с^2, стандартное значение $g = 9{,}80665$ м/с^2.

Сила тяжести $\mathbf{P}$ [3.8.3] с учетом суточного вращения Земли с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ равна геометрической сумме силы гравитационного притяжения Земли $\mathbf{F}_з$ и центробежной силы инерции $\mathbf{F}_{цб}$:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} = \mathbf{F}_з + \mathbf{F}_{цб}, \quad \mathbf{F}_з = m\mathbf{g}_{абс}, \quad \mathbf{F}_{цб} = m\omega^2 \mathbf{R}. \qquad (3.124)$$

Если тело подвешено на нити, то сила $\mathbf{P}$ направлена вдоль нити. Это направление называют *направлением отвеса*.

Вектор $\mathbf{g}_{абс}$ определяется размерами, формой и распределением вещества Земли. Если Землю представить в виде однородного шара,

то вектор $g_{абс}$ направлен к центру Земли (рис. 3.14). Направление отвеса определяет направление вектора $\mathbf{g}$. При этом

$$g \sin \alpha = \omega^2 R \sin \varphi, \tag{3.125}$$

где α — угол между векторами $\mathbf{g}_{абс}$ и $\mathbf{g}$, а φ — географическая широта.

Представление Земли в виде однородного шара приводит к одинаковым значениям $g_{абс}$ на полюсе и на экваторе. В действительности Земля сплюснута вдоль оси вращения и на экваторе $g_{абс}$ меньше, чем на полюсе. С точностью до членов второго порядка по α $g_{абс}$ можно вычислять по формуле

$$g_{абс} = g + \omega^2 R_3 \cos^2 \varphi, \tag{3.126}$$

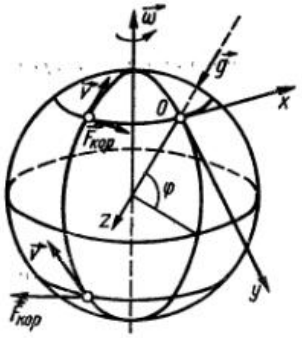


Рис. 3.15

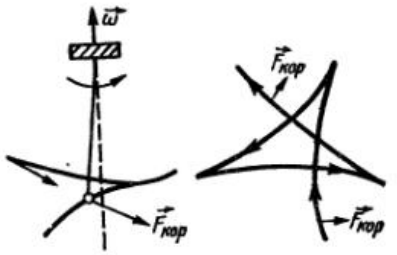


Рис. 3.16

где $\omega = 2\pi/T$, T — период суточного обращения Земли, $R_з$ — расстояние от тела на поверхности Земли до ее центра. На экваторе $T = 8{,}6164 \times \times 10^4$ с, $R_з = 6{,}378 \cdot 10^6$ м и $g_{абс} = 9{,}814$ м/с². На полюсе $g_{абс} = g = = 9{,}832$ м/с².

Сила Кориолиса $\mathbf{F}_{кор} = 2m\,(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$, как показывает решение уравнения движения тела в гравитационном поле Земли (3.116а), проявляется при свободном падении тела [3.10.5] и при его движении над поверхностью Земли. При движении на север тело будет отклоняться к востоку в северном полушарии и к западу — в южном (рис. 3.15). При движении тела вдоль меридиана в южном направлении отклонения будут противоположными. При движении вдоль экватора тело будет прижиматься силой Кориолиса к Земле, если оно движется в западном направлении и подниматься вверх при движении на восток.

Сила Кориолиса $\mathbf{F}_{кор}$ проявляется при качании маятника: плоскость его качаний медленно поворачивается относительно Земли в направлении часовой стрелки, совершая за сутки один оборот. С точки зрения системы Коперника плоскость качаний остается неизменной, а Земля поворачивается относительно нее. Массивный шар, подвешенный на длинной нити, служащий для доказательства суточного вращения Земли, называется *маятником Фуко* (1851). На рис. 3.16 показана траектория груза маятника, совершающего малые колебания на полюсе. Для маятника Фуко длиной 98 м и амплитудой колебаний 5 м боковое отклонение груза от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение равно 1 мм. Вращение плоскости качаний маятника Фуко является доказательством того, что система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной, а систему Коперника можно считать инерциальной.

3.10.5. Свободное падение тела с учетом вращения Земли. Уравнение свободного падения тела с учетом вращения Земли имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2\,(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}),\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}, \tag{3.127}$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{v}$ — ускорение и скорость тела относительно Земли, $\mathbf{g}$ — ускорение тела (3.122) относительно Земли при условии, когда его скорость равна нулю в данный момент времени, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость суточного вращения Земли.

Решение уравнения (3.127) легко найти методом последовательного приближения, рассматривая движение в небольшой области пространства, где $\mathbf{g}$ можно считать постоянным, а слагаемое $2\,(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$ — малым.

1. Нулевое приближение

$$\mathbf{a} = \mathbf{g},\quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t,\quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}t^2, \tag{3.128а}$$

где $\mathbf{v}_0$ — начальная скорость тела, $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор положения тела в момент времени $t = 0$.

2. Первое приближение

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + 2t\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}),$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2t\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + t^2\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}),$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}t^2 + t^2\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{t^3}{3}\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}). \tag{3.128б}$$

3. Второе приближение

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + 2t\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) + 2t\,((\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}) + 2t^2\,((\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}),$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2t\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + t^2\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) + 2t^2\,((\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{2}{3}\,t^3\,((\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}), \tag{3.128в}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}t^2 + t^2\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{3}\,t^3\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{2}{3}\,t^3\,((\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{6}\,t^4\,((\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}).$$

Смещение из начального положения определяется вектором $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. При свободном падении тела без начальной скорости, $\mathbf{v}_0 = 0$, вектор смещения

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\,\mathbf{g}t^2 + \frac{1}{3}\,t^3\,(\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{6}\,t^4\,((\mathbf{g} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega}), \tag{3.129}$$

или в проекциях на систему координат (рис. 3.15):

$$x = s_{вост} = \frac{1}{3}\,\omega t^3 g \cos \varphi,$$
$$y = s_{экв} = \frac{1}{12}\,\omega^2 t^4 g \sin 2\varphi,$$
$$z = \frac{1}{2}\,gt^2 - \frac{1}{6}\,\omega^2 t^4 g \cos^2 \varphi. \tag{3.130}$$

Решение (3.130) показывает, что сила Кориолиса (3.117), $\mathbf{F}_{кор} = 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega})$, обусловленная вращением Земли, приводит к отклонению свободно падающего тела без начальной скорости к востоку ($x = s_{вост}$) и к экватору ($y = s_{экв}$) от направления отвеса, задаваемого вектором $\mathbf{g}$. Координата z приближенно равна высоте, с которой падает тело:

$$z = h = \frac{1}{2} g t^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3.131}$$

Частные значения для $\varphi = 56°$ (широта Москвы):

$$h = 100 \text{ м}, \quad s_{вост} = 0{,}012 \text{ м}, \quad t = 4{,}5 \text{ с},$$
$$h = 500 \text{ м}, \quad s_{вост} = 0{,}138 \text{ м}, \quad t = 10{,}1 \text{ с}.$$

Отклонение

$$s_{экв} = \frac{1}{2} \omega t \sin \varphi \cdot s_{вост} \tag{3.132}$$

из-за малой величины $\omega t = 2\pi t/T = 7{,}27 \cdot 10^{-5} t$ очень мало и практически ненаблюдаемо.

4. СТАТИКА

4.1. Задачи статики и ее принципы

Статика — раздел механики, в котором изучают условия равновесия материальных тел под действием сил. К основным понятиям статики относятся понятия о силе [3.1.1], моменте силы относительно центра или относительно оси вращения и о паре сил.

Основная задача статики состоит в определении условий, при которых тело, на которое действуют силы, может оставаться в покое. Кроме того, статика дает указание о направлении движения тела, если его равновесие нарушено действием определенной силы.

В основе статики лежат принципы, которые являются следствием основных законов механики [3]. Они отражают свойства сил, действующих на материальную точку [2.1] и абсолютно твердое тело [8.1].

Принципы статики.

1. *Сила в механике является вектором.* Поэтому, если на тело действует несколько сил, то их можно заменить одной равнодействующей силой, равной геометрической сумме действующих сил [3.1.2].

2. *Силы можно складывать и вычитать в соответствии с правилами сложения и вычитания векторов* [3.1.2].

3. *Точку приложения силы можно переносить вдоль ее направления, не меняя действие силы на тело в целом* (рис. 3.4).

4. *Силу можно разложить на составляющие*, т. е. определить силы, равнодействующая которых известна. На рис. 4.1 сила $\mathbf{F}$ разложена на составляющие $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ вдоль заданных направлений AB и AC (см. также рис. 3.2 и формулу (3.3)).

5. *Правило рычага*: *если линии действия сил* $\mathbf{F}_1$ *и* $\mathbf{F}_2$ *не пересекаются, то их равнодействующая* $\mathbf{F}$ *делит расстояние между этими силами* $l = l_1 + l_2$ *в отношении, обратном отношению сил* (рис. 4.2):

$$F_1 : F_2 = l_2 : l_1. \tag{4.1}$$

6. *Момент силы*: *сила действующая на тело, закрепленное на оси, может вызвать его вращение только в том случае, когда направление силы не проходит через ось вращения.* Говорят, что сила, которая вызывает такое вращение тела, создает момент силы. *Момент силы* $\mathbf{N}$ равен векторному произведению вектора положения $\mathbf{r}$, проведенного из точки O на оси вращения до места приложения силы $\mathbf{F}$, на вектор этой силы (рис. 4.3):

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \tag{4.2}$$

Момент силы равен произведению модуля силы F на расстояние l от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила:

$$N = Fl = Fr \sin \alpha, \tag{4.3}$$

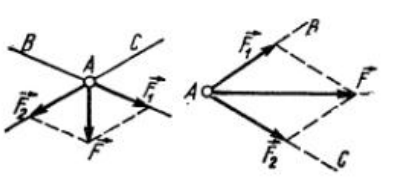


Рис. 4.1

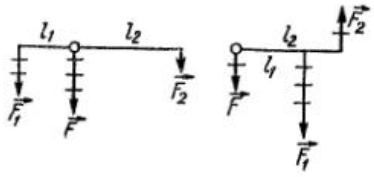


Рис. 4.2

α — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Расстояние l называется плечом силы. Момент силы есть аксиальный вектор, он направлен вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого винта (или правилом буравчика).

Единицей момента силы в СИ является ньютон на метр:

$$[N] = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

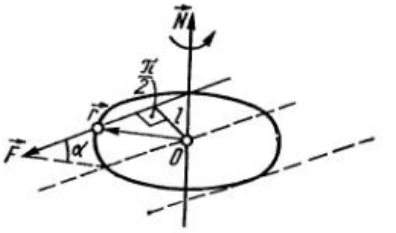


Рис. 4.3

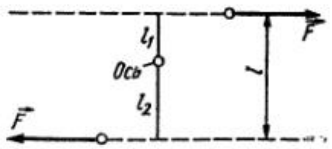


Рис. 4.4

Если на тело действует n сил, то результирующий момент равен геометрической сумме моментов составляющих сил:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \cdots + \mathbf{N}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i. \tag{4.4}$$

Сила, момент которой относительно данной оси равен нулю, не вызывает вращения вокруг этой оси.

7. *Действие момента силы аналогично действию пары сил. Парой сил* называются такие две силы, равнодействующая которых равна нулю, а результирующий момент относительно какой-либо оси не равен нулю. Если тело закреплено на оси, то при действии на него пары сил оно начнет вращаться вокруг этой оси. *Момент пары сил* N *отно-*

сительно любой оси, перпендикулярной плоскости пары (рис. 4.4), одинаков и определяется соотношением

$$N = Fl_1 + Fl_2 = Fl, \qquad (4.5)$$

где l — расстояние между линиями действия сил **F**, составляющих пару. Расстояние l называется *плечом пары сил*.

4.2. Условия равновесия тел

4.2.1. Условия равновесия тела под действием сил.

1. *Тело может находиться в равновесии, если сумма проекций всех приложенных к нему сил на любое направление равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i = 0, \qquad (4.6)$$

где n — число действующих сил, α_i — угол между силой $\mathbf{F}_i$ и произвольно выбранным направлением.

2. *Тело, закрепленное на оси, может находиться в равновесии, если алгебраическая сумма моментов сил, действующих на него, равна нулю:*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i l_i = 0, \qquad (4.7)$$

где n — число сил, l_i — плечо силы F_i.

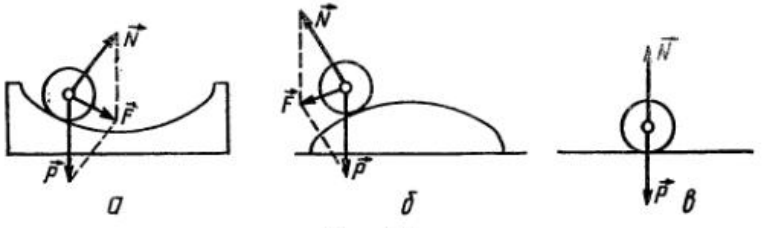


Рис. 4.5

4.2.2. Устойчивое и неустойчивое равновесие. Положение тела, в котором все силы, действующие на тело, взаимно уравновешиваются, называют *положением равновесия*. Равновесие называется *устойчивым* (рис. 4.5, *а*), если при отклонении тела от положения равновесия действующие на него в этом случае силы такие, что под их действием тело возвращается к положению равновесия. Если изменившиеся силы такие, что они вызывают дальнейшее отклонение тела от положения равновесия и тело не будет оставаться вблизи положения равновесия, то равновесие называется *неустойчивым* (рис. 4.5, *б*). Равновесие называется *безразличным* (рис. 4.5, *в*), если при отклонении тела от положения равновесия изменившиеся силы уравновешивают одна другую при любом новом положении тела.

Условие равновесия тел под действием силы тяжести определяется положением центра масс тела. Центр масс тела есть точка приложения равнодействующей силы тяжести, равной сумме сил тяжести, действующих на элементы его массы. Положение центра масс тела, состоящего из N дискретных масс m_i, определяется радиусом-вектором

$$\mathbf{R}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i, \qquad (4.8)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор i-й массы, $\sum m_i$ — полная масса тела. При непрерывном (однородном) распределении массы координаты его центра масс $R_c = (x_c, y_c, z_c)$ определяются формулами

$$x_c = \frac{1}{V}\int_V x\,dV, \qquad y_c = \frac{1}{V}\int_V y\,dV, \qquad z_c = \frac{1}{V}\int_V z\,dV, \qquad (4.9)$$

где $dV = dxdydz$ — элемент объема, интегрирование проводится по объему V, занимаемому телом.

Положение тела устойчиво, если опущенная из его центра масс вертикаль проходит внутри контура, образованного точками опоры. В противном случае положение тела неустойчивое. Мерой устойчивости тела является величина момента, приводящего к его опрокидыванию. Опрокидывающая сила F определяется равенством

$$F = Gl/h, \qquad (4.10)$$

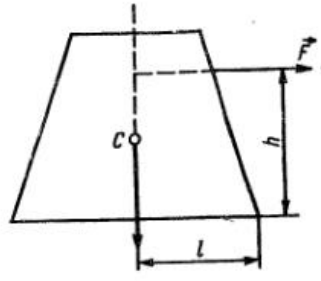


Рис. 4.6

где G — вес тела, l — расстояние от проекции центра масс на площадь опоры до оси опрокидывания, h — расстояние точки приложения опрокидывающей силы от плоскости опоры (рис. 4.6). Из (4.10) следует, что устойчивость тех тел выше, у которых: 1) больше вес ($F \sim G$); 2) больше площадь опоры ($F \sim l$); 3) к которым ниже приложена опрокидывающая сила ($F \sim 1/h$).

Общее условие устойчивого равновесия: если центр тяжести тела занимает наинизшее положение из всех возможных, то равновесие устойчиво.

4.3. Простые машины

Простыми машинами (механизмами) называют приспособления, которые изменяют величину или направление приложенных к телу сил. Они применяются там, где нужно переместить или поднять большие грузы с помощью небольших усилий. В соответствии **с золотым правилом механики**, согласно которому, выигрывая в силе, проигрываем в расстоянии, т. е. произведение силы на перемещение (работа) есть величина постоянная, простые машины не изменяют величину производимой над телом работы.

4.3.1. Рычаг. *Рычагом* называется тело, которое может вращаться вокруг неподвижной точки (оси вращения), проходящей через это тело. Пусть $\mathbf{F}_1$ — сила, уравновешивающая нагрузку $\mathbf{F}_2$, l_1 — плечо силы $\mathbf{F}_1$, l_2 — плечо нагрузки $\mathbf{F}_2$. Тогда условие равновесия имеет вид

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \qquad (4.11)$$

(Сравни с формулами (4.1) и (4.10)). Рычаг дает выигрыш в силе. Примеры рычагов показаны на рис. 4.2 и 4.7.

4.3.2. Неподвижный блок. Действие *неподвижного блока* (рис. 4.8) аналогично действию рычага с равными плечами: $l_1 = l_2 = r$. Поэтому в этом устройстве приложенная сила F_1 равна нагрузке F_2 и условие равновесия имеет вид

$$F_1 = F_2. \tag{4.12}$$

Неподвижный блок изменяет направление силы, не изменяя ее величину (рис. 4.8).

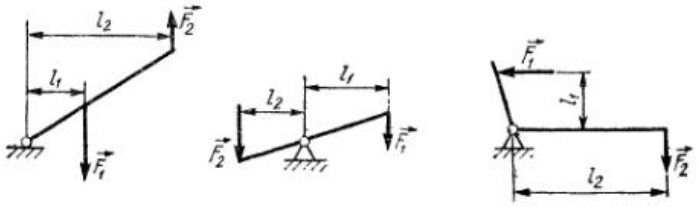


Рис. 4.7

4.3.3. Подвижный блок. Действие *подвижного блока* (рис. 4.9) аналогично действию рычага с плечами $l_2 = 2l_1 = r$. Условие равновесия имеет вид

$$F_1 = F_2/2, \tag{4.13}$$

где F_1 — приложенная сила, F_2 — нагрузка. Подвижный блок дает выигрыш в силе в 2 раза.

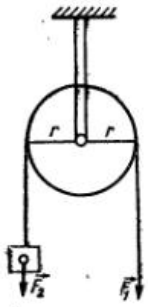


Рис. 4.8

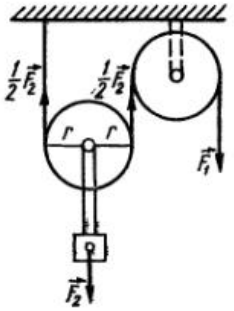


Рис. 4.9

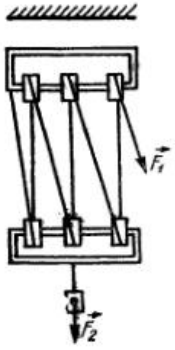


Рис. 4.10

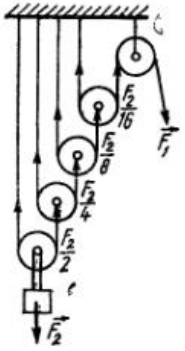


Рис. 4.11

4.3.4. Система блоков (полиспаст). Обычный *полиспаст* состоит из n подвижных и n неподвижных блоков (рис. 4.10). Он дает выигрыш в силе в $2n$ раз:

$$F_1 = F_2/2n. \tag{4.14}$$

Степенной полиспаст состоит из n подвижных и одного неподвижного блока (рис. 4.11). Он дает выигрыш в силе в 2^n раз:

$$F_1 = F_2/2^n. \tag{4.15}$$

4.3.5. Дифференциальный блок. *Дифференциальный блок* имеет вид, показанный на рис. 4.12. При равновесии

$$F_1 = F_2 \frac{R - r}{2R}, \tag{4.16}$$

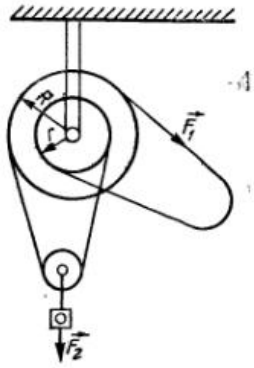


Рис. 4.12

где F_1 — приложенная сила, F_2 — нагрузка, R — радиус большого неподвижного блока, r — радиус малого неподвижного блока.

4.3.6. Наклонная плоскость. *Наклонной плоскостью* называется плоскость, расположенная под углом к горизонту. Условие равновесия тела, которое может без трения двигаться по наклонной плоскости, имеет вид

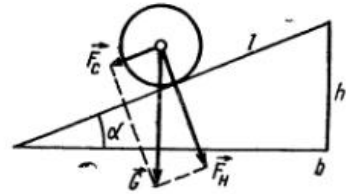


Рис. 4.13

$$F_c = \frac{Gh}{l} = G \sin\alpha, \qquad F_н = \frac{Gb}{l} = G \cos\alpha, \tag{4.17}$$

где F_c — скатывающая сила, G — сила тяжести тела, $F_н$ — сила, перпендикулярная наклонной плоскости, h, l, b, α — высота, длина, длина основания и угол наклонной плоскости (рис. 4.13).

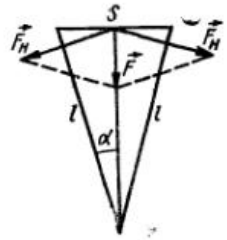


Рис. 4.14

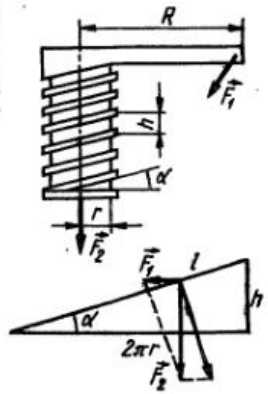


Рис. 4.15

4.3.7. Клин. Две одинаковые наклонные плоскости, основания которых соприкасаются, образуют *клин* (рис. 4.14). Составляющие $\mathbf{F}_н$ силы $\mathbf{F}$ перпендикулярны боковым граням клина. При равновесии

$$F_н = F \frac{l}{s} = \frac{F}{2 \sin\alpha}, \tag{4.18}$$

где F — сила, действующая на основания клина, $F_н$ — сила, действующая на боковую грань клина, s — ширина основания клина, l — длина боковой грани клина, α — половина угла при вершине клина.

4.3.8. Винт. Представляет собой наклонную плоскость, навитую на ось (рис. 4.15). Условие равновесия сил, действующих на *винт*, имеет вид

$$F_1 = F_2 \frac{h}{2\pi r} = F_2 \operatorname{tg}\alpha, \qquad F_1 = F_2 \frac{h}{2\pi R}, \tag{4.19}$$

где F_1 — внешняя сила, приложенная к винту и действующая на расстоянии r от его оси, F_2 — сила, действующая в направлении оси винта, h — шаг винта, r — средний радиус резьбы, α — угол наклона резьбы, R — длина рычага (гаечного ключа), вращающего винт с силой F_1.

5. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

5.1. Работа и мощность

5.1.1. Работа. Если сила, действующая на материальную точку, перемещает ее на некоторое расстояние, то говорят, что эта сила совершает над материальной точкой работу. *Элементарной работой* dA силы $\mathbf{F}$, которую можно считать постоянной (не зависящей от перемещения) на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$, называется скалярное произведение силы $\mathbf{F}$ на перемещение $d\mathbf{r}$:

$$dA = \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = F\cos\alpha \cdot ds = F_r\,ds, \tag{5.1}$$

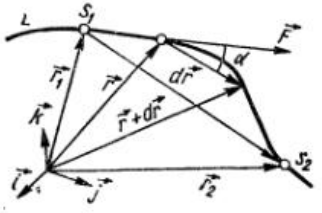


Рис. 5.1

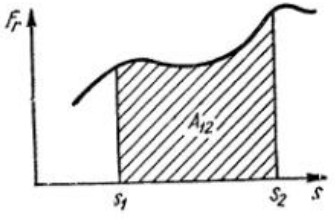


Рис. 5.2

где α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{r}$ (рис. 5.1), $ds = |d\mathbf{r}|$ — длина элементарного перемещения $d\mathbf{r}$, $F_r = F\cos\alpha$ — проекция силы $\mathbf{F}$ на направление перемещения $d\mathbf{r}$.

В декартовых координатах

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz, \tag{5.2}$$

где dx, dy, dz — приращения координат x, y, z радиуса-вектора $\mathbf{r}$, F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси. *Работа* A_{12} силы $\mathbf{F}$ *вдоль криволинейной траектории* L от точки s_1 до точки s_2 равна сумме всех элементарных работ dA, производимых силой $\mathbf{F}$ на этом отрезке траектории, и определяется криволинейным интегралом

$$A_{12} = \int_L \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\alpha \cdot ds = \int_{s_1}^{s_2} F_r\,ds. \tag{5.3}$$

Другие представления

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz, \tag{5.4}$$

$$A_{12} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,d\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,d\mathbf{p}, \qquad A_{12} = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv, \tag{5.5}$$

где x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 — декартовые координаты точек s_1 и s_2, v_1 — начальная, а v_2 — конечная скорости материальной точки. Работа A_{12} — скалярная величина. Она представляет собой площадь под кривой $F_r(s)$ между точками s_1 и s_2 (рис. 5.2).

Если сила $\mathbf{F}$ остается постоянной при перемещении материальной точки по траектории из точки s_1 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ в точку s_2 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_2$, то работа равна скалярному произведению силы $\mathbf{F}$ на перемещение $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$:

$$A_{12} = \mathbf{F}\,\Delta\mathbf{r} = F\,|\Delta\mathbf{r}|\cos\alpha, \tag{5.6}$$

где α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\Delta\mathbf{r}$.

Единицей работы в СИ является джоуль (Дж):

$$[A] = \text{Н}\cdot\text{м} = \text{Дж} = \text{Вт}\cdot\text{с} = \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^2.$$

Работа A *результирующей силы* $\mathbf{F}$ равна сумме работ всех действующих на материальную точку сил $\mathbf{F}_i$:

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i = \sum_{i=1}^{N} \int \mathbf{F}_i\,d\mathbf{r} = \int \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i\right) d\mathbf{r} = \int \mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{5.7}$$

5.1.2. Мгновенная и средняя мощность. *Средней мощностью* $\langle P\rangle$ называется работа ΔA за единицу времени Δt, затраченного на совершение этой работы:

$$\langle P\rangle = \Delta A/\Delta t. \tag{5.8}$$

Мгновенная мощность или просто *мощность* есть предел, к которому стремится средняя мощность $\langle P\rangle$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$P = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t} \equiv \frac{dA}{dt} \equiv \dot{A}. \tag{5.9}$$

Единицей мощности в СИ является ватт (Вт):

$$[P] = \text{Вт} = \text{Дж/с} = \text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}^3.$$

Для мощности справедлива формула

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = Fv\cos\alpha, \tag{5.10}$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — мгновенная скорость частицы, на которую действует мгновенная (постоянная на перемещении $d\mathbf{r}$) сила $\mathbf{F}$, α — угол между векторами $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$.

Если работа пропорциональна времени, то мощность постоянна. При равномерном ускоренном движении ($\mathbf{F} = \text{const}$)

$$\langle P\rangle = \mathbf{F}\langle\mathbf{v}\rangle, \tag{5.11}$$

где $\langle\mathbf{v}\rangle$ — средняя скорость частицы.

5.1.3. Коэффициент полезного действия. *Коэффициентом полезного действия* (КПД) η называется отношение полезной работы $A_{\text{пол}}$, совершаемой силами при перемещении тела, к общей работе $A_{\text{зат}}$ сил, приложенных к телу:

$$\eta = A_{\text{пол}}/A_{\text{зат}}. \tag{5.12}$$

КПД можно определить и как отношение отдаваемой (полезной) мощности $P_{\text{отд}}$ к подводимой мощности $P_{\text{подв}}$:

$$\eta = \frac{P_{\text{подв}} - P_{\text{потерь}}}{P_{\text{подв}}} = \frac{P_{\text{отд}}}{P_{\text{подв}}}. \tag{5.13}$$

Отдаваемая мощность $P_{\text{отд}}$ есть разность между подводимой мощностью $P_{\text{подв}}$ и мощностью $P_{\text{потерь}}$, идущей на преодоление сил трения, сопротивления воздуха, на нагревание и т. д. КПД принято выражать в процентах:

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A_{\text{зат}}} \cdot 100\ \%, \qquad \eta = \frac{P_{\text{отд}}}{P_{\text{подв}}} \cdot 100\ \%. \tag{5.14}$$

Если тело участвует в различных процессах, связанных с передачей или превращениями энергии, то общий КПД равен произведению КПД каждого из этих процессов

$$\eta = \eta_1\eta_2\eta_3 \cdots \tag{5.15}$$

5.2. Кинетическая и потенциальная энергии

5.2.1. Кинетическая энергия материальной точки и системы. *Кинетической энергией* называется величина

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}, \tag{5.16}$$

где m — масса материальной точки, v и $p = mv$ — ее скорость и импульс. Из второго закона Ньютона (3.16) следует, что

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}, \tag{5.17}$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая внешних сил, действующих на материальную точку. Для замкнутой системы ($\mathbf{F} = 0$) согласно (5.17) выполняется **закон сохранения кинетической энергии** (5.16)

$$T = \text{const}. \tag{5.18}$$

Из соотношений (5.3) и (5.17) следует **теорема 1**: *работа всех внешних сил, действующих на материальную точку, равна приращению кинетической энергии этой точки*:

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \equiv T_2 - T_1. \tag{5.19}$$

где v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости точки, T_1 и T_2 — соответствующие им кинетические энергии, A_{12} есть работа при перемещении материальной точки из начального положения 1 в конечное положение 2. Формула (5.19) позволяет дать следующее определение кинетической

энергии: *кинетическая энергия материальной точки есть мера ее механического движения, она измеряется работой, которую может совершить эта точка при ее торможении до полной остановки.* Если $A_{12} > 0$, то над материальной точкой производится работа и ее кинетическая энергия возрастает. Если $A_{12} < 0$, то точка отдает свою кинетическую энергию, совершая работу против внешних сил.

Кинетической энергией T системы N материальных точек называется сумма кинетических энергий T_i этих точек:

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}, \tag{5.20}$$

где m_i и v_i — масса и скорость i-й частицы.

Теорема 2: *работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.* Приращение кинетической энергии определяется работой как внешних, так и внутренних сил. В замкнутой системе приращение кинетической энергии в общем случае отлично от нуля и равно работе внутренних сил.

Кинетическая энергия имеет размерность работы. В системе СИ единицей энергии является джоуль:

$$[T] = \text{Дж}.$$

В атомной и ядерной физике используется единица энергии электронвольт (эВ) [64.6]:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.$$

Кинетическая энергия материальной точки зависит от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается ее движение. Пусть T — кинетическая энергия точки в системе отсчета S, T' — кинетическая энергия точки в системе отсчета S', движущейся относительно S поступательно со скоростью $\mathbf{V}$. Тогда

$$T = T' + \frac{1}{2}mV^2 + \mathbf{p}'\mathbf{V}, \tag{5.21}$$

где $\mathbf{p}' = m\mathbf{v}'$ — импульс материальной точки в системе S'. Формула (5.21) остается справедливой и для системы из N материальных точек, однако в этом случае m есть суммарная масса системы, $m = \sum m_i$, $\mathbf{p}'$ — ее полный импульс, $\mathbf{p}' = \sum m_i\mathbf{v}_i' = m\mathbf{v}_c'$, $\mathbf{v}_c'$ — скорость центра масс системы относительно S'.

Теорема 3 (теорема Кенига): *кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии движения ее центра масс и кинетических энергий движения материальных точек относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы* ($\mathbf{v}_c' = 0$):

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i'^2}{2} + \frac{1}{2}mV^2. \tag{5.22}$$

5.2.2. Виды механических сил. Все силы, встречающиеся в механике материальных точек принято разделять на консервативные и неконсервативные. *Консервативными* называются силы, работа которых не зависит от пути перехода системы материальных точек из на-

чального положения в конечное, а определяется только координатами этих положений. Сила тяжести и все центральные силы являются консервативными. *Центральной* называется сила, которая направлена к одной и той же точке в пространстве, называемой *силовым центром*, и зависит только от расстояния до этого центра. Работа центральных сил определяется выражением

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\, dr. \tag{5.23}$$

Работа (5.23) зависит только от вида функции $F(r)$, начального r_1 и конечного r_2 положений материальной точки, но не зависит от вида траектории. В соответствии с (5.23) работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю:

$$A_{12} + A_{21} = 0. \tag{5.24}$$

Все силы, которые не являются консервативными, называются *неконсервативными*. Диссипативные и гироскопические силы являются неконсервативными. *Диссипативными* называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна: $A < 0$. Диссипативными являются силы трения [3.7] и силы сопротивления, испытываемые телом при его движении в жидкости или газе [13]. Эти силы зависят от координат начальных и конечных положений тел и от их относительных скоростей.

Гироскопическими называются силы, которые зависят от скорости материальной точки и действуют всегда перпендикулярно этим скоростям. Работа этих сил равна нулю при любом перемещении материальной точки. Такими силами являются сила Лоренца [29.4.1] и сила Кориолиса [3.10.3].

5.2.3. Потенциальная энергия системы. Если на систему материальных точек действуют только консервативные и гироскопические силы, то для этой системы можно ввести понятие потенциальной энергии. Если на материальную точку в каждом месте пространства действует сила, то говорят, что эта точка находится в поле сил. Поле сил называется *потенциальным*, если его можно описать некоторой функцией $U = U(x, y, z, t) = U(\mathbf{r}, t)$, зависящей от координат и времени, такой, что ее частные производные по координатам определяют проекции F_x, F_y, F_z силы $\mathbf{F}$ на декартовые оси:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{5.25}$$

Функция U называется *потенциалом*. В случае потенциального силового поля сила

$$\mathbf{F} = -\nabla U \equiv -\operatorname{grad} U, \tag{5.26}$$

где ∇ есть оператор Гамильтона (62.17) или градиент, действие которого на функцию U определяется согласно правилу

$$\nabla U \equiv \operatorname{grad} U \equiv \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{k}, \tag{5.27}$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовых координат (см. (2.1) и рис. 2.2). Выражение (5.27) есть вектор. Для стационарных полей (т. е. не зависящих от времени t) потенциал U есть функция только пространственных координат: $U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$. В этом случае элементарная работа

dA (5.1) представляет собой полный дифференциал dU, взятый с обратным знаком:

$$dA = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz\right) \tag{5.28}$$

или

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -dU, \qquad U = -\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{5.29}$$

Потенциал U имеет размерность работы. Функция U называется **потенциальной энергией**. Единицей потенциальной энергии в СИ является джоуль:

$$[U] = \text{Дж} = \text{Вт} \cdot \text{с} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

5.2.4. Закон сохранения энергии невзаимодействующих частиц. Взаимодействие материальной точки с полем сил согласно (5.29) можно описать с помощью сил $\mathbf{F}$ либо потенциальной энергией U. Последний способ описания применим только тогда, когда силы, действующие на материальную точку, консервативны.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки при ее перемещении из положения 1 в положение 2:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} = -\int_{(1)}^{(2)} dU = U_1 - U_2. \tag{5.30}$$

В соответствии с (5.19) эта убыль потенциальной энергии идет на приращение кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2. \tag{5.31}$$

Из (5.31) следует **закон сохранения энергии в механике:** *если на материальную точку действуют только консервативные (и гироскопические) силы, то полная энергия E, равная сумме кинетической T и потенциальной U энергий,*

$$E = T + U, \tag{5.32}$$

сохраняется:

$$E_1 = E_2 = E = \text{const}. \tag{5.33}$$

Здесь $E_1 = T_1 + U_1$ и $E_2 = T_2 + U_2$ — полные энергии материальной точки в положениях 1 и 2. Согласно (5.30) работа может совершаться за счет запаса (при $U_1 > U_2$) потенциальной энергии. Суммарная работа всех приложенных к материальной точке сил затрачивается на приращение кинетической энергии этой точки (5.19), а работа консервативных сил идет на убыль ее потенциальной энергии (5.30).

Если на материальную точку кроме консервативных сил действуют и неконсервативные силы с равнодействующей $\mathbf{F}^*$, то работа неконсервативных сил A_{12}^* при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2 идет на приращение полной энергии материальной точки

$$A_{12}^* = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}^*\,d\mathbf{r} = E_2 - E_1. \tag{5.34}$$

Условие $E > U$ определяет область допустимых значений координат материальной точки. Если полная энергия точки положительна:

$E > 0$, то ее движение инфинитно, т. е. точка может уйти на бесконечность. Если полная энергия отрицательна: $E < 0$, то движение материальной точки финитно, т. е. она может двигаться только в ограниченной области пространства. На рис. 5.3 показан случай одномерного движения материальной точки (частицы) под действием потенциала $U(x)$.

1. Если полная энергия частицы равна E_1, то ее движение в области II будет финитным, а в области IV — инфинитным. В области II частица будет совершать колебательные движения между точками B и C, которые называются *точками поворота*, а в области IV, отразившись от точки D, частица уйдет на бесконечность. Области I и III запрещены для движения частицы с полной энергией E_1.

2. Если полная энергия частицы $E_2 > E_1$, то ее движение правее точки поворота A будет инфинитным, а левее точки A движение запрещено законами классической механики.

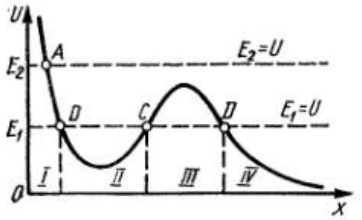


Рис. 5.3

Конкретный вид потенциальной энергии U зависит от характера силового поля. В общем случае потенциальная энергия материальной точки, находящейся в поле консервативных сил, определяется согласно (5.30) работой, совершаемой этими силами при перемещении точки из начального положения 1 в конечное положение 2. Начальное положение выбирается так, чтобы потенциал U_1 можно было принять равным нулю.

Примеры потенциальных энергий:

1) потенциальная энергия материальной точки с массой m в однородном поле тяготения на высоте h над уровнем моря

$$U = mgh,$$

где потенциал уровня моря принят равным нулю;

2) потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек с массами M и m на расстоянии r одна от другой:

$$U = -G_N \frac{Mm}{r},$$

где потенциал гравитационного поля на бесконечности принят равным нулю;

3) потенциальная энергия растянутой пружины с коэффициентом упругости k при растяжении x:

$$U = \frac{1}{2} kx^2,$$

где потенциал пружины в недеформированном состоянии принят равным нулю.

Полная энергия системы N невзаимодействующих частиц E, равная сумме всех кинетических T_i и потенциальных U_i энергий отдельных частиц $i = 1, 2, \ldots, N$, на которые действуют только внешние консервативные силы, остается постоянной

$$E = \sum_{i=1}^{N} (T_i + U_i) = \text{const}. \qquad (5.35)$$

Для полной энергии системы N невзаимодействующих частиц справедливо представление

$$E = T + U_{\text{внешн}}, \qquad (5.36)$$

где $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$ — кинетическая энергия системы, $U_{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^{N} U_i$ — потенциальная энергия частицы во внешнем поле сил. Сила, действующая на i-ю частицу со стороны внешнего поля, определяется формулой

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U_{\text{внешн}} \equiv -\left(\frac{\partial U_{\text{внешн}}}{\partial x_i}\,\mathbf{i} + \frac{\partial U_{\text{внешн}}}{\partial y_i}\,\mathbf{j} + \frac{\partial U_{\text{внешн}}}{\partial z_i}\,\mathbf{k}\right), \qquad (5.37)$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i-й частицы.

5.2.5. Энергия взаимодействия. В случае системы двух и большего числа взаимодействующих частиц вводят понятие потенциальной энергии взаимодействия или просто энергии взаимодействия $U_{\text{вз}}$.

Для замкнутой системы из двух частиц, взаимодействующих с силой $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на частицу 1 со стороны частицы 2, имеем

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 U_{\text{вз}}(r_{12}), \qquad \mathbf{F}_{21} = -\nabla_2 U_{\text{вз}}(r_{12}), \qquad (5.38)$$

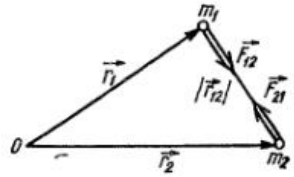


Рис. 5.4

где $U_{\text{вз}}(r_{12})$ называется *энергией взаимодействия* частиц 1 и 2. Она зависит от модуля радиуса-вектора $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (рис. 5.4). Оператор набла ∇_i в (5.38) имеет тот же вид, что и в выражении (5.37). Сила $\mathbf{F}_{12}$ есть внутренняя сила замкнутой системы двух частиц. Производимая ею работа

$$dA_{\text{внутр}} = -\mathbf{F}_{12}\,d\mathbf{r}_{12} = -dU_{\text{вз}}. \qquad (5.39)$$

В случае действия внешних сил $\mathbf{F}_1$ на частицу 1 и F_2 на частицу 2 имеем

$$dE = d(T + U_{\text{вз}}) = dA_{\text{внеш}} = \mathbf{F}_1\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2\,d\mathbf{r}_2, \qquad (5.40)$$

где T — кинетическая энергия двух частиц (5.20) с $N = 2$, dE — приращение полной энергии за время dt, $dA_{\text{внеш}}$ — работа внешних сил за то же время. В частном случае, если внешние силы не изменяют кинетическую энергию двух частиц T, работа внешних сил равна приращению потенциальной энергии взаимодействия:

$$dA_{\text{внеш}} = dU_{\text{вз}}.$$

Для замкнутой системы из трех попарно взаимодействующих частиц с силами $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$, где i и k пробегают значения 1, 2, 3 при условии $i < k$, работа внутренних сил

$$dA_{\text{внутр}} = (\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13})\,d\mathbf{r}_1 + (\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23})\,d\mathbf{r}_2 + (\mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32})\,d\mathbf{r}_3 = \\ = -\mathbf{F}_{12}d\mathbf{r}_{12} - \mathbf{F}_{13}d\mathbf{r}_{13} - \mathbf{F}_{23}d\mathbf{r}_{23} = -dU_{\text{вз}}, \qquad (5.41)$$

где

$$U_{\text{вз}} = U_{12}(r_{12}) + U_{13}(r_{13}) + U_{23}(r_{23}) \qquad (5.42)$$

— энергия взаимодействия системы трех частиц, равная сумме энергий взаимодействия пар, r_{ij} — расстояние между частицами i и j пары.

Для системы из N взаимодействующих частиц потенциальная энергия взаимодействия равна энергиям парных взаимодействий:

$$U_{\text{вз}} = \sum_{(i<k)} U_{ik}(r_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} U_{ik}(r_{ik}),$$
$$U_{ik}(r_{ik}) = U_{ki}(r_{ki}). \qquad (5.43)$$

5.2.6. Закон сохранения энергии для системы взаимодействующих частиц. *Полная энергия системы взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле консервативных сил, сохраняется:*

$$E = T + U_{\text{вз}} + U_{\text{внешн}} = \text{const}, \qquad (5.44)$$

где T — кинетическая энергия системы, $U_{\text{вз}}$ — энергия взаимодействия частиц системы, $U_{\text{внешн}}$ — потенциальная энергия внешних консервативных сил. В замкнутой системе $U_{\text{внешн}} = 0$, в которой действуют также и неконсервативные силы, полная энергия не сохраняется: приращение энергии dE за время dt равно работе неконсервативных сил dA^* за это время:

$$dE = d(T + U_{\text{вз}}) = dA^*. \qquad (5.45)$$

Полная работа A^*_{12} неконсервативных сил замкнутой системы при перемещении ее из положения 1 в положение 2 с полными энергиями E_1 и E_2 соответственно идет на приращение полной энергии системы и определяется формулой (5.34).

Закон сохранения энергии связан с фундаментальным свойством времени — однородностью. *Однородность* времени означает, что механические свойства замкнутой системы не зависят от выбора начала отсчета времени.

5.2.7. Теорема вириала. *Для системы N материальных точек с радиусами-векторами r_i, находящихся под действием сил F_i, справедливо соотношение* (Клаузиус, 1870)

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i\mathbf{r}_i \right\rangle, \qquad (5.46)$$

где T — полная кинетическая энергия системы: $T = \sum_{i=1}^{N} (m_i v_i^2/2)$, угловые скобки означают среднее по времени, определяемое выражением типа (2.20), (2.33):

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t')\,dt', \qquad (5.47)$$

где τ — временной интервал, на котором производится усреднение. Если $f(t)$ в (5.47) есть периодическая функция, то τ равно периоду. Если $f(t)$ — непериодическая функция, то в (5.47) следует перейти к пределу бесконечно больших значений τ.

5.3. Законы столкновения тел

Макроскопические тела при столкновении претерпевают деформации. Между ними происходит обмен энергией и импульсом. Часть первоначальной кинетической энергии переходит в потенциальную энергию упругой деформации, на преодоление сил внутреннего трения, на возбуждение в телах колебаний и волн и т. п. Часть кинетической энергии идет на увеличение внутренней энергии тел. Под внутренней энергией понимают кинетическую энергию и энергию взаимодействия атомов и молекул, из которых состоят макроскопические тела. Увеличение внутренней энергии тела сопровождается повышением его температуры.

5.3.1. Абсолютно упругий удар. Столкновение тел, при котором их внутренняя энергия не изменяется, называется *абсолютно упругим ударом*. Удар называется *центральным*, если скорости тел (шаров) до удара направлены вдоль линии, проходящей через их центры. Для системы из двух сталкивающихся шаров, на которые не действуют внешние силы, справедливы законы сохранения кинетической энергии и импульса

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}, \qquad (5.48)$$

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2', \qquad (5.49)$$

где m_1 и m_2 — массы шаров, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — начальные, $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ — конечные скорости шаров. Из законов сохранения (5.48) и (5.49) следует, что

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2^2 - v_2'^2),$$
$$m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1') = m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2'), \qquad (5.50)$$
$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2'$$

— сумма скоростей до и после соударения одинакова.

$$\mathbf{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2' = \frac{(m_2 - m_1)\mathbf{v}_2 + 2m_1\mathbf{v}_1}{m_1 + m_2},$$
$$\mathbf{v}_1' = -\mathbf{v}_1 + 2\frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2' = -\mathbf{v}_2 + 2\frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.51)$$

В лабораторной системе (л-системе) имеем

$$\mathbf{v}_1' = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{V}_c, \qquad \mathbf{v}_2' = -\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{V}_c,$$
$$\mathbf{V}_c = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \qquad (5.52)$$

где $\mathbf{V}_c$ — скорость движения центра масс системы. Согласно (5.50) в системе центра масс (ц-системе) $\mathbf{V}_c = 0$ и $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2'$, т. е. в системе центра масс столкновение приводит просто к изменению знаков скоростей.

При рассеянии частицы с массой m_1 на другой неподвижной частице (мишени) с массой m_2 из законов сохранения (5.48) и (5.49) находим (рис. 5.5)

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2,$$
$$m_1 v_1' \sin\alpha = m_2 v_2' \sin\beta,$$
$$m_1 v_1 = m_1 v_1' \cos\alpha + m_2 v_2' \cos\beta,$$

или

$$(m_1 + m_2)\, v_1^2 - 2m_1 v_1 v_1' \cos\alpha + (m_1 - m_2)\, v_1'^2 = 0, \qquad (5.53)$$

где α — угол между векторами начальной $\mathbf{v}_1$ и конечной $\mathbf{v}_1'$ скоростей падающей частицы, называемый *углом рассеяния*, β — угол между скоростью $\mathbf{v}_1$ и конечной скоростью $\mathbf{v}_2'$. Условие вещественности корней (значений v_1) уравнения (5.53) имеет вид $\sin\alpha \leqslant m_2/m_1$. Оно определяет величины допустимых значений угла рассеяния α.

Удар называется *нецентральным*, если в момент удара начальные скорости шаров не совпадают по направлению с линией их центров. В этом случае все скорости шаров раскладывают на две взаимно перпендикулярные составляющие: нормальную вдоль линии, соединяющей центры шаров, и тангенциальную — перпендикулярную этой линии. В приближении идеально гладких шаров при их столкновении не возникают тангенциальные силы (которые появляются, например, за счет сил трения скольжения шаров в момент удара) и тангенциальные скорости шаров не изменяются, а для нормальных скоростей справедливы соотношения, аналогичные (5.48), (5.49) или (5.51), если один из шаров до удара находился в покое.

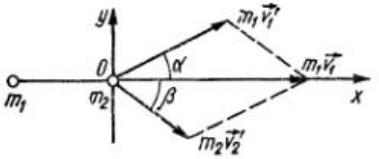


Рис. 5.5

Сохранение энергии при абсолютно упругом ударе тел предполагает, что возникающие в момент их соударения деформации после столкновения полностью исчезают.

5.3.2. Абсолютно неупругий удар. При неупругом соударении тела деформируются в месте их соприкосновения. Кинетическая энергия при этом не сохраняется — часть ее переходит во внутреннюю энергию тел. *Абсолютно неупругим ударом* называется столкновение, при котором тела после соударения движутся с одинаковой скоростью либо покоятся. При таком ударе выполняется только закон сохранения импульса. Для двух тел с массами m_1, m_2 и скоростями $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ скорость движения системы после соударения

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.54)$$

При абсолютно неупругом ударе потеря кинетической энергии макроскопического движения тел ΔT, равная работе, затрачиваемой на деформацию, определяется выражением

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2, \qquad (5.55)$$

где

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}, \qquad T_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v^2 \qquad (5.56)$$

— кинетические энергии двух тел до и после столкновения. Часть кинетической энергии ΔT (5.55) идет на разрушение тел при их столкновении. Остальная ее часть связана с движением центра масс системы. Эта энергия при столкновении не изменяется. При одной и той же затрате энергии наибольшее разрушение происходит тогда, когда центр масс сталкивающихся тел в лабораторной системе отсчета (л-системе) остается неподвижным.

5.3.3. Коэффициент восстановления. В реальных процессах при столкновении тел происходят небольшие деформации, которые не исчезают после удара. Тела приобретают неравные скорости, которые отличаются от первоначальных. В этом случае говорят о частично упругом ударе. Для характеристики такого соударения вводят так называемый *коэффициент восстановления* k, который можно рассматривать (в определенном смысле) как меру упругости тела. Вследствие потери кинетической энергии при частично упругом столкновении вместо соотношения (5.50) для двух тел записывают

$$(v_1 - v_2)\, k = v_2' - v_1', \qquad (5.57)$$

где v_1, v_2 — проекции начальных скоростей тел на линию, соединяющую их центры инерции, v_1', v_2' — проекции конечных скоростей тел на эту линию, k — коэффициент восстановления. В зависимости от направления скоростей величины v_1, v_1', v_2, v_2' могут быть как положительными, так и отрицательными.

Скорости v_1' и v_2' определяются соотношениями

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (v_1 - v_2)\, m_2 k}{m_1 + m_2},$$
$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - (v_1 - v_2)\, m_1 k}{m_1 + m_2}. \qquad (5.58)$$

Потеря кинетической энергии ΔT при частично упругом соударении

$$\Delta T = (T_1 - T_2) - (T_1 - T_2)\, k^2 =$$
$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 (1 - k^2), \qquad (5.59)$$

где T_1 и T_2 определяются формулами (5.56). Здесь $(T_1 - T_2)$ есть работа, затрачиваемая на деформацию тел при неупругом соударении, как в (5.55), а $(T_1 - T_2)k^2$ есть часть этой работы, которая снова превратилась в кинетическую энергию тел. Часть кинетической энергии ΔT (5.59) переходит во внутреннюю энергию системы двух тел.

Коэффициент восстановления k можно определить экспериментально по высоте подскока шарика, брошенного на массивную станину (плиту) из того же материала:

$$k = \sqrt{h_2/h_1},$$

где h_1 — высота, с которой падает шарик, h_2 — высота его подскока. Коэффициент k зависит от скорости шарика v_1.

В табл. 5.1 представлены значения k для $v_1 < 3$ м/с.

Таблица 5.1. **Коэффициент восстановления k при частично упругом ударе тел**

Вещество	k	Вещество	k
Дерево	1/2	Сталь	5/9
Пробка	5/9	Стекло	15/16
Слоновая кость	8/9		

Из формул (5.57)—(5.59) следуют предельные случаи: а) $k = 0$ — абсолютно неупругий удар; б) $k = 1$ — абсолютно упругий удар; в) $0 < k < 1$ — частично упругий удар.

6. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

6.1. Постулаты Эйнштейна

Классическая теория относительности основана на принципе относительности Галилея [3.2.3] и на законах Ньютона [3.2; 3.3; 3.4]. В ней рассматриваются пространство и время как независимые переменные, характеризующие движение тел. Сложение скоростей в теории производится в соответствии с правилом сложения векторов (3.11).

Законы классической теории относительности справедливы только для тел, движущихся со скоростями много меньшими скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, и соответствуют представлениям о пространстве и времени в макромире. Движение тел со скоростями сравнимыми со скоростью света: $v \sim c$ изучает *релятивистская механика*. В ее основу положены два *постулата специальной теории относительности*, сформулированные Эйнштейном (1905).

Постулат 1: *все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*. Это означает, что уравнения, являющиеся математическими выражениями законов природы, должны быть инвариантны (т. е. не изменять свой вид) по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой. Этот постулат является обобщением принципа относительности Галилея [3.2.3] на все без исключения физические явления. Преобразование координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой осуществляется с помощью преобразований Лоренца [6.2], которые в пределе малых скоростей $v \ll c$ переходят в преобразования Галилея [3.2.3]. Преобразования Лоренца находятся в соответствии с требованиями второго постулата Эйнштейна.

Постулат 2: *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета*. Это означает, что скорость света не зависит от движения источников и приемников света. Справедливость второго постулата подтверждает результат опыта Майкельсона и Морли (1881, 1887). В этом опыте исследовалась скорость света относительно Земли. В соответствии с представлением о том, что Земля движется в мировом пространстве, заполненном средой — эфиром, в котором свет распространяется с одинаковой скоростью в любом направлении, должен выполняться закон сложения скоростей нерелятивистской механики (3.11):

$$c_R = c \pm v, \tag{6.1}$$

где c_R — скорость света относительно приемника, движущегося с Землей, v — скорость Земли относительно эфира, знак (+) соответствует движению приемника навстречу источнику света, а знак (—) — движению от источника. Проверка справедливости равенства (6.1) есть проверка на опыте существования движения относительно эфира. Результат опыта Майкельсона — Морли показал, что $c_R = c$, т. е. скорость света одинакова во всех направлениях и не зависит от движения приемника или источника, а также от среды, в которой распространяется свет. Другими словами, на опыте нельзя обнаружить движение Земли относительно эфира.

Из многочисленных опытных данных следует, что скорость света является предельно допустимой скоростью движения материальных тел в природе. Никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не может быть передано со скоростью, превышающей скорость света. Эти два эквивалентные утверждения можно рассматривать как закон природы.

Объединение принципа причинности (постулат 1) с требованием конечной скорости распространения взаимодействия (постулат 2) называют *принципом относительности Эйнштейна*.

Для формулировки законов релятивистской механики, называемой также *специальной теорией относительности*, постулаты Эйнштейна следует дополнить постулатами классической механики об изотропности и однородности пространства [3.5.1; 3.5.2] и однородности времени [5.2.6]. Другими словами, в специальной теории относительности должны выполняться законы сохранения момента импульса, импульса и энергии замкнутой системы.

6.2. Преобразование Лоренца

6.2.1. Интервал в четырехмерном пространстве. Пусть материальная точка M (рис. 6.1) в некоторой инерциальной системе отсчета S характеризуется координатами x, y, z и временем t, а в другой системе отсчета S' — координатами x', y', z' и временем t'. Для удобства начало отсчета времени t' можно выбрать совпадающим с началом отсчета t и в момент времени $t = 0$ считать, что начала O' и O систем отсчета

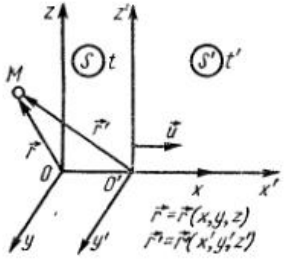


Рис. 6.1

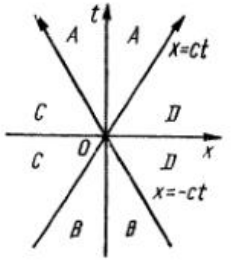


Рис. 6.2

S' и S совпадают. Из соображений наглядности вводят понятие четырехмерного пространства с тремя пространственными и одной временной координатами. Точку в этом пространстве называют *событием* или *мировой точкой*. Интервал между двумя событиями в системе отсчета S определяют равенством

$$s_{12} = [c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}, \tag{6.2}$$

где x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 — координаты первого и второго событий. Для двух бесконечно близких событий пишут

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{6.3}$$

Интервал называют *времениподобным*, если $s_{12}^2 > 0$, и *пространственноподобным*, если $s_{12}^2 < 0$. События, разделенные времениподобными интервалами, могут быть причинно связанными одно с другим. Для таких событий не существует системы отсчета, в которой они происходили бы

одновременно: $t_2 \neq t_1$. События, разделенные пространственноподобными интервалами, ни в какой системе отсчета не могут оказаться пространственно совмещенными: $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 \neq 0$. Математическим выражением постоянства скорости света является требование одинаковости интервала между двумя событиями во всех инерциальных системах отсчета, т. е. интервал должен быть инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета S к любой другой S':

$$s_{12} = s'_{12}, \qquad ds^2 = ds'^2, \tag{6.4}$$

где

$$s'_{12} = [c^2(t'_2-t'_1)^2-(x'_2-x'_1)^2-(y'_2-y'_1)^2-(z'_2-z'_1)^2]^{1/2},$$
$$ds'^2 = c^2dt'^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2 \tag{6.5}$$

— интервалы в системе отсчета S'.

6.2.2. Преобразование Лоренца. Световой конус. Пусть в начале координат O системы отсчета S находится источник, испускающий свет в момент времени $t = 0$. Уравнение фронта световой волны имеет вид сферической поверхности, радиус которой увеличивается со скоростью c:

$$x^2+y^2+z^2 = c^2t^2. \tag{6.6}$$

Уравнение (6.6) называют *световым конусом*. Внутренним полостям этой четырехмерной фигуры соответствуют области, называемые областями *абсолютно будущего* ($t > 0$) и *абсолютно прошедшего* ($t < 0$) по отношению к событию при $t = 0$. На рис. 6.2 показано сечение светового конуса в плоскости xOt, где A — область абсолютно будущего, B — область абсолютно прошедшего, абсолютно удаленным событиям C,D соответствуют пространственноподобные интервалы ($c^2t^2-x^2<0$).

В системе отсчета S', движущейся с постоянной скоростью u относительно системы отсчета S, уравнение сферического волнового фронта согласно принципу относительности Эйнштейна должно иметь вид

$$x'^2+y'^2+z'^2 = c^2t'^2. \tag{6.7}$$

Преобразование, оставляющее неизменной форму волнового фронта и соответственно интервал в четырехмерном пространстве, называется преобразованием Лоренца (1904). В случае, если система отсчета S' движется вдоль оси x системы отсчета S со скоростью u (рис. 6.1), *преобразование Лоренца* имеет вид

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}},$$
$$y' = y, \qquad y = y',$$
$$z' = z, \qquad z = z',$$
$$t' = \frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad t = \frac{t'+ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{6.8}$$

Оно линейно по x и t и переходит в преобразование Галилея при $u \ll c$.

6.2.3. Следствия из преобразования Лоренца. 1. *Собственное время и длительность событий в равных системах отсчета.* Время Δt_0, отсчитанное по часам, движущимся вместе с данной системой отсчета, называется ее *собственным временем*. Собственное время одинаково во всех системах отсчета.

Движущиеся часы идут медленнее неподвижных:

$$\Delta t = \Delta t_0 \sqrt{1-u^2/c^2}, \tag{6.9}$$

где $\Delta t_0 = t_2 - t_1$ — интервал времени в неподвижной системе отсчета S, $\Delta t = t'_2 - t'_1$ — интервал времени в движущейся системе отсчета S', u — скорость S' относительно S.

Порядок величин: $u = 0{,}5$ с, $\Delta t = 1$ с, $\Delta t_0 = 1{,}15$ с. Если события совпадают в некоторой системе отсчета S, то они будут совпадать и в другой системе отсчета S'.

2. Длина тела в разных системах отсчета. Длина тела $l = x'_2 - x'_1$, измеренная в системе S' в направлении ее движения относительно системы S со скоростью u, меньше длины $l_0 = x_2 - x_1$, измеренной в системе S, относительно которой тело движется:

$$l = l_0 \sqrt{1-u^2/c^2}. \tag{6.10}$$

Длина l_0 называется *собственной длиной* тела.

Сокращение линейных размеров тела в направлении их движения называется *лоренцевым* или *фитцджеральдовым сокращением*. Так как поперечные размеры тела при таком движении не изменяются, то объем его

$$V = V_0 \sqrt{1-u^2/c^2},$$

где V_0 — собственный объем тела.

3. Преобразование и сложение скоростей. Компоненты скоростей тела в неподвижной $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ и движущейся $v'_x = \dot{x}'$, $v'_y = \dot{y}'$, $v'_z = \dot{z}'$ системах отсчета S и S' связаны соотношениями

$$v_x = \frac{v'_x+u}{1+uv'_x/c^2}, \qquad v'_x = \frac{v_x-u}{1-uv_x/c^2},$$
$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv'_x/c^2}, \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2}, \tag{6.11}$$
$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1+uv'_x/c^2}, \qquad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-uv_x/c^2},$$

где u — скорость движения системы отсчета S' вдоль оси x системы координат, связанной с системой отсчета S. Если тело движется параллельно оси x, его скорость v в системе отсчета S равна $v = v_x$, а в системе S' — $v' = v'_x$. При этом

$$v = \frac{v'+u}{1+u\,v'/c^2}. \tag{6.12}$$

Соотношение (6.12) выражает **закон сложения скоростей в релятивистской механике.** Его следствия:

$$v = v'+u \quad \text{при} \quad u \ll c,$$
$$v = c \quad \text{при} \quad v' = c.$$

Релятивистский закон сложения скоростей (6.12) подтверждается результатами опыта Физо (1851). Идея опыта состояла в измерении скорости света в движущейся материальной среде (например, в воде). Согласно классической механике, если среда, в которой распространяется свет со скоростью $v' = c/n$, где n — показатель преломления среды, сама движется со скоростью u, то скорость света относительно покоящегося наблюдателя должна быть $v = v' \pm u$ в зависимости от того, одинаково или противоположно направлены скорости света и среды. Физо нашел, что классический закон сложения скоростей

в проведенном им опыте не выполняется. Результаты наблюдений при этом оказались в хорошем согласии с формулой

$$v = \frac{c}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u.$$

Эта формула следует из (6.12), если заменить в ней u на $\pm u$ и разложить знаменатель в ряд с учетом малости величины $u/c \ll 1$. Таким образом, опыт Физо дает экспериментальное подтверждение закона сложения скоростей (6.12).

4. *Преобразование ускорений.* Компоненты ускорения тела в неподвижной $a_x = \dot{v}_x$, $a_y = \dot{v}_y$, $a_z = \dot{v}_z$ и движущейся $a'_x = \dot{v}'_x$, $a'_y = \dot{v}'_y$, $a'_z = \dot{v}'_z$ системах отсчета S и S' связаны соотношениями

$$a_x = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2} a'_x, \qquad a_y = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) a'_y, \qquad a_z = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) a'_z, \tag{6.13}$$

где u — скорость движения системы отсчета S' вдоль оси x системы координат, связанной с S. Эти соотношения означают, что с движущимся со скоростью u телом можно связать инерциальную систему отсчета S', в которой это тело в данный момент покоится. Такую систему отсчета называют *сопровождающей*. Если в этой системе отсчета тело движется с ускорением, то в любой другой системе отсчета оно будет двигаться с меньшим ускорением. Это уменьшение пропорционально $(1 - u^2/c^2)^{3/2}$ для продольной составляющей ускорения и $(1 - u^2/c^2)$ — для поперечной составляющей.

6.3. Релятивистская динамика

6.3.1. Импульс, масса. Закон сохранения импульса. *Импульсом в релятивистской механике* называют следующую величину, преобразующуюся в соответствии с преобразованием Лоренца:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{6.14}$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6.15}$$

можно рассматривать как релятивистскую массу материальной точки (частицы), движущейся со скоростью v относительно неподвижной системы отсчета, которую можно связать с наблюдателем. Релятивистская масса m есть функция скорости v:

$$m = m(v) \tag{6.16}$$

и, следовательно, $m_0 = m(0)$ есть масса покоящейся частицы, называемая *массой покоя*. Она совпадает с инертной массой частицы в классической механике.

В релятивистской механике выполняется закон сохранения импульса замкнутой системы частиц во всех системах отсчета в соответствии с представлением об однородности пространства [3.5.1].

Математическое выражение закона сохранения импульса изолированной системы, состоящей, например, из двух взаимодействующих релятивистских частиц с массами покоя m_{01} и m_{02} и движущихся со скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, только формально совпадает с выражением классической механики (3.29). В явном виде имеем

$$\frac{m_{01}\mathbf{v}_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} + \frac{m_{02}\mathbf{v}_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \text{const}. \tag{6.17}$$

Порядок величины $\Delta m = m - m_0$:

1) космический корабль;

$$m_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ кг}, \quad v = 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}, \quad \Delta m = 3{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ кг};$$

2) электрон:

$$m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$
$$v = 0{,}1\,c = 3 \cdot 10^7 \text{ м/с}, \quad \Delta m = 4{,}6 \cdot 10^{-33} \text{ кг},$$
$$v = 0{,}5\,c = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \quad \Delta m = 1{,}4 \cdot 10^{-31} \text{ кг},$$
$$v = 0{,}9\,c = 2{,}7 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \quad \Delta m = 1{,}2 \cdot 10^{-30} \text{ кг}.$$

6.3.2. Работа и энергия. Закон сохранения энергии. В релятивистской механике *работа* A_{12} силы $\mathbf{F}$, действующей на частицу при перемещении ее из положения 1 в положение 2 вдоль криволинейной траектории L, определяется выражением (ср. с (5.3) — (5.5))

$$A_{12} = \int_L dA = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt}\, d\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\, d\mathbf{p} = c^2 \int_{m_1}^{m_2} dm, \tag{6.18}$$

где $\mathbf{F}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{v}$ есть инвариантные относительно преобразования Лоренц величины; m_1 и m_2 — масса частицы в начальном и конечном положениях.

Из (6.18) следует, что в релятивистской механике работа определяется приращением массы частиц:

$$dA = c^2\, dm,$$
$$A_{12} = c^2 (m_2 - m_1) \equiv c^2 \Delta m. \tag{6.19}$$

Полной или *релятивистской энергией* свободной частицы называют величину

$$E = mc^2. \tag{6.20}$$

Для покоящейся частицы величина

$$E_0 = m_0 c^2 \tag{6.21}$$

называется ее *энергией покоя*. Кинетическая энергия T есть часть релятивистской энергии E, обусловленная движением частицы. По определению

$$T = E - E_0 = (m - m_0)\, c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right). \tag{6.22}$$

По аналогии с классической механикой [5] работу можно записать в виде приращения кинетических энергий частицы:

$$A_{12} = E_2 - E_1 = T_2 - T_1, \tag{6.23}$$

где $E_1 = m_1 c^2$, $E_2 = m_2 c^2$, $T_1 = (m_1 - m_0)\, c^2$, $T_2 = (m_2 - m_0)\, c^2$ есть энергии частицы в положениях 1 и 2.

Из формул (6.14), (6.15) следует выражение для полной энергии (6.20):

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4, \tag{6.24}$$

связывающее ее с импульсом частицы p и ее массой покоя m_0. Это выражение инвариантно относительно преобразования Лоренца. Формула (6.24) справедлива как для элементарных (бесструктурных) частиц, так и для составных частиц или систем, состоящих из нескольких частиц. Формулы (6.20), (6.21) устанавливают взаимосвязь между энергией частицы и ее массой. Порядок величин: $m_0 = 1$ кг, $E_0 = 0{,}9 \times 10^{17}$ Дж. Импульс $\mathbf{p}$, энергия E и скорость $\mathbf{v}$ свободной частицы связаны соотношением

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}\frac{E}{c^2}. \tag{6.25}$$

Если частица имеет потенциальную энергию $E_{\text{пот}}$, то ее энергия

$$\mathcal{E} = mc^2 + E_{\text{пот}} = T + m_0c^2 + E_{\text{пот}}. \tag{6.26}$$

В релятивистской механике выполняется закон сохранения полной энергии замкнутой системы частиц во всех системах отсчета в соответствии с представлением об однородности времени [5.2.6]. В случае системы из двух частиц, например, имеем

$$E_1 + E_2 = \text{const}, \tag{6.27}$$

где E_1 и E_2 — релятивистские энергии частиц 1 и 2. Закон сохранения энергии выполняется как при упругих, так и при неупругих столкновениях частиц. В последнем случае потеря кинетической энергии (на «возбуждение» частиц) возмещается в виде энергии, связанной с приращением масс.

Для частицы с массой покоя, равной нулю: $m_0 = 0$ (фотон), полная энергия E и скорость v выражаются соотношениями

$$E = pc, \quad v = c, \tag{6.28}$$

т. е. частица с массой покоя, равной нулю, всегда движется со скоростью света, а ее импульс отличен от нуля и равен

$$p = E/c. \tag{6.29}$$

6.3.3. Преобразование импульса, энергии и скорости изменения импульса при переходе от одной системы отсчета к другой. Компоненты импульса частицы и ее энергия в неподвижной p_x, p_y, p_z, E и движущейся p'_x, p'_y, p'_z, E' системах отсчета S и S' (рис. 6.1) связаны соотношениями (ср. с (6.8))

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{p'_x + uE'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad p'_x = \frac{p_x - uE/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ p_y &= p'_y, \quad p'_y = p_y, \\ p_z &= p'_z, \quad p'_z = p_z, \\ E &= \frac{E' + p'_x u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad E' = \frac{E - p_x u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \end{aligned} \tag{6.30}$$

где u — скорость движения системы отсчета S' вдоль оси x относительно неподвижной системы отсчета S.

Сравнение (6.8) и (6.30) показывает, что компоненты импульса ведут себя при преобразованиях как координаты, а энергия — как время.

Пусть скорость изменения импульса в системе отсчета S есть $d\mathbf{p}/dt$, а в системе отсчета S' — $d\mathbf{p}'/dt'$. Формулы перехода имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \frac{dp'_x}{dt'}, \quad \frac{dp_y}{dt} = \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{dp'_y}{dt'}, \\ \frac{dp_z}{dt} &= \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}\frac{dp'_z}{dt'}, \quad dt' = dt\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{6.31}$$

где dt' есть собственное время в системе отсчета S', а dt — в системе S.

6.3.4. Переход к классической механике. При $v \ll c$ справедлива формула бинома Ньютона

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \tag{6.32}$$

Ограничиваясь двумя слагаемыми, получаем следующие формулы перехода от релятивистской механики к классической (нерелятивистской) механике:

полная энергия свободной частицы (6.20) —

$$E = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \ldots = m_0c^2 + \frac{p^2}{2m_0} + \ldots, \tag{6.33}$$

масса частицы (6.15) —

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0\frac{v^2}{c^2} + \ldots, \tag{6.34}$$

кинетическая энергия (6.22) —

$$T = \frac{1}{2}m_0v^2 + \ldots, \tag{6.35}$$

импульс (6.14) —

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{v} + \ldots \tag{6.36}$$

6.3.5. Уравнение движения. *Основное уравнение релятивистской динамики*, обобщающее второй закон Ньютона [3.3] на случай движения материальной точки со скоростью, сравнимой со скоростью света в вакууме, имеет вид, формально совпадающий с (3.20):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{6.37}$$

где $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, $\mathbf{p}$ — релятивистский импульс (6.14). В явном виде

$$\begin{aligned} m_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) &= \mathbf{F}, \\ m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dv}\frac{dv}{dt} &= \mathbf{F}, \\ \frac{m_0\mathbf{a}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} &= \mathbf{F}, \end{aligned} \tag{6.38}$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ — ускорение.

Пример. Пусть $\mathbf{F} = \text{const}$ и при $t = 0$ скорость частицы $\mathbf{v} = 0$, а ее масса $m = m_0$. Тогда решение уравнения (6.38) определяет величина скорости в момент времени t:

$$v = \frac{F}{m_0} t \frac{1}{\sqrt{1 + (Ft/m_0c)^2}}. \tag{6.39}$$

Ускорение

$$a = \frac{F}{m_0} \frac{1}{(1 + (Ft/m_0c)^2)^{3/2}}. \tag{6.40}$$

Предельные случаи:
1) время t мало

$$v \simeq \frac{Ft}{m_0}, \quad a \approx \frac{F}{m_0} \tag{6.41}$$

(движение нерелятивистской частицы);
2) время t велико

$$\begin{aligned} v &\simeq c\,(1 - (m_0c/Ft)^2/2) \simeq c, \\ a &\simeq (m_0/F)^{1/2}\,(c/t)^{3/2} \simeq 0 \end{aligned} \tag{6.42}$$

(движение ультрарелятивистской частицы).

Релятивистское уравнение Гамильтона—Якоби для функции S, называемой *действием* (7.16) [7.2; 7.5], имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m_0^2c^2. \tag{6.43}$$

Поскольку действие S связано с энергией E (6.24) выражением

$$E = -\partial S/\partial t, \tag{6.44}$$

то при переходе к классической механике вместо S вводят новое действие S' согласно соотношению

$$S = S' - m_0c^2t. \tag{6.45}$$

Уравнение для S' имеет вид

$$\frac{1}{2m_0c^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m_0}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0. \tag{6.46}$$

В пределе $c \to \infty$ оно переходит в классическое уравнение Гамильтона—Якоби [7.5]

7. ДИНАМИКА СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

7.1. Обобщенные координаты и скорости

Описать движение системы, состоящей из N материальных точек (частиц), в классической механике означает найти координаты и скорости всех N частиц в заданный момент времени t, т. е. нужно решить дифференциальные уравнения (3.32), описывающие каждую отдельную частицу системы. Положение в пространстве системы из N материальных точек определяется N радиусами-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ или $3N$ координатами. Движение системы может быть ограничено так, что перемещение частиц при заданных условиях не может быть каким угодно. В таком случае говорят, что на движение системы наложены *связи*. Если ограничение на движение частиц может быть выражено в виде равенств, связывающих координаты частиц и времени, вида

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \tag{7.1}$$

то такие связи называют *голономными*. Если связь не может быть представлена в виде (7.1), то ее называют *неголономной*. Связи, зависящие явно от времени, называют *реономными*, а независящие — *склерономными*.

В случае голономных связей не все $3N$ координат частиц являются независимыми. Если всего имеется k уравнений вида (7.1), то $s = 3N - k$ независимых координат системы называют ее *степенями свободы*. Любые s величин $q_1, q_2, \ldots, q_s$, вполне характеризующие положение системы, называют *обобщенными координатами*, а производные по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ — *обобщенными скоростями*. В отличие от декартовых координат обобщенные координаты не разделяются на группы по три координаты в каждой, позволяющие образовать векторы. Координаты $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ могут быть выражены через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и время t в виде параметрических представлений типа

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_s, t), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.2}$$

Скорости $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ при этом определяются выражением

$$\mathbf{v}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.3}$$

7.2. Уравнение Лагранжа

В случае голономных связей координаты q_j независимы и система из N частиц описывается *уравнением Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{7.4}$$

где $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ — полная кинетическая энергия системы, $Q_j = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$ — *обобщенные силы*, $\mathbf{F}_i$ — полная сила, действующая на i-ю частицу.

Для консервативных сил [5.2.2] согласно (5.37)

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U, \tag{7.5}$$

где ∇_i — оператор набла (5.27) для i-й частицы, U — потенциальная энергия системы, и

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{7.6}$$

Уравнение Лагранжа (1788) для консервативных сил имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{7.7}$$

Функция

$$L = T - U \tag{7.8}$$

называется *функцией Лагранжа* или *лагранжианом*. Каждая механическая система характеризуется определенным лагранжианом

$$L = L(q_1, q_2, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s; t).$$

Уравнение (7.7) есть уравнение движения системы. Если лагранжиан известен, то уравнение (7.7) устанавливает связь между ускорениями, скоростями и координатами системы. Уравнение (7.7) следует дополнить граничными условиями, определяющими значения всех s координат и s скоростей в начальный момент времени.

При движении системы ее обобщенные координаты и скорости в общем случае изменяются со временем. Существуют, однако, такие функции этих переменных и времени, называемые *интегралами движения*, которые остаются постоянными:

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s; t) = \text{const}, \quad \frac{dF}{dt} = 0. \tag{7.9}$$

С интегралами движения системы связаны законы сохранения. Для замкнутой системы материальных точек интегралами движения являются:

а) полная энергия системы E

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) = 0, \quad E = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L; \tag{7.10}$$

б) полный импульс системы $\mathbf{p}$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}\right) = 0, \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}; \tag{7.11}$$

в) полный момент импульса системы $\mathbf{M}$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = 0, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{N}(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i). \tag{7.12}$$

В случае замкнутой системы взаимодействующих N материальных точек лагранжиан (7.8) имеет вид

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N), \tag{7.13}$$

где потенциальная энергия U есть функция координат. В обобщенных координатах и скоростях в соответствии с (7.2) и (7.3) имеем

$$L = \frac{1}{2}\sum_{j,k} a_{jk}(q_1, \ldots, q_s)\,\dot{q}_j\dot{q}_k - U(q_1, \ldots, q_s), \tag{7.14}$$

где явный вид функции координат a_{jk} определяется видом функций параметрического представления (7.2).

Свойства лагранжиана. 1. Если механическая система состоит из двух частей A и B, каждая из которых будучи замкнутой характеризовалась бы функциями Лагранжа L_A и L_B, то в пределе при разведении этих частей настолько далеко, что их взаимодействием можно пренебречь, лагранжиан всей системы стремится к сумме $L_A + L_B$. Это свойство аддитивности лагранжиана устраняет неопределенность, связанную с возможностью умножения его на произвольную постоянную в соответствии с видом уравнения (7.7), и сводит ее к естественному произволу в выборе единиц. 2. Функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени $f'(q_1, \ldots, q_s; t)$:

$$L' = L + \frac{df'}{dt}. \tag{7.15}$$

Интеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_s; \dot{c}_1, \ldots, \dot{q}_s; t)\,dt \tag{7.16}$$

называется *действием*. Любая механическая система в промежутке времени от t_1 до t_2 движется таким образом, чтобы действие имело наименее возможное значение (точнее, экстремум). Это условие называется **принципом наименьшего действия** или **принципом Гамильтона.** Из принципа Гамильтона следует одно и то же уравнение Лагранжа для лагранжианов L и L' (7.15)

7.3. Уравнение Гамильтона

Формулировка законов механики системы материальных точек с помощью лагранжиана предполагает описание этой системы путем задания ее обобщенных координат и скоростей. Такое описание не является единственным. Система может быть описана и с помощью обобщенных координат и импульсов. Уравнения движения в независимых переменных — обобщенных координатах и импульсах — имеют вид

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad j = 1, 2, \ldots, s, \tag{7.17}$$

и называются *каноническими уравнениями Гамильтона* (1834—1835). Здесь s — число степеней свободы,

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad \dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} \tag{7.18}$$

— *обобщенные импульсы*, функция H называется *функцией Гамильтона* или *гамильтонианом*,

$$H = \sum_j \dot{q}_j p_j - L. \tag{7.19}$$

Полные дифференциалы гамильтониана H и лагранжиана L выражаются формулами

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$
$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{7.20}$$

Уравнения Гамильтона (7.17) эквивалентны уравнению Лагранжа (7.7). В случае консервативных сил потенциальная энергия U не зависит от скоростей $\dot{q}_i$ и

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \tag{7.21}$$

где T — полная кинетическая энергия системы. Если формулы преобразования (7.2) не зависят явно от времени, то кинетическая энергия T есть однородная квадратичная функция скоростей $\dot{q}_i$, и согласно теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T. \tag{7.22}$$

Для системы частиц, для которой справедливы равенства (7.15) и (7.16), гамильтониан H есть ее полная энергия:

$$H = T + U \tag{7.23}$$

Гамильтониан H есть интеграл движения (7.10). Уравнения Гамильтона (7.17) могут быть выведены из условия минимальности действия (7.16), если выразить лагранжиан L через гамильтониан H (7.19).

7.4. Скобки Пуассона

Скобками Пуассона в классической механике называют выражение

$$[f, g] = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right), \tag{7.24}$$

где f и g — некоторые функции обобщенных координат $q_1, \ldots, q_s$, обобщенных импульсов $p_1, \ldots, p_s$ и времени t.

Свойства скобок Пуассона:

$$[f, g] = -[g, f],$$
$$[f, c] = 0 \ (c \text{ — константа}),$$
$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g],$$
$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g],$$
$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0 \tag{7.25}$$

(тождество Якоби),

$$\frac{\partial}{\partial t} [f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right].$$

Примеры: 1)

$$f = q_i, \ g = q_k, \ [q_i, q_k] = 0,$$
$$f = p_i, \ g = p_k, \ [p_i, p_k] = 0, \tag{7.26}$$
$$f = p_i, \ g = q_k, \ [p_i, q_k] = -\delta_{ik}, \ \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k; \end{cases}$$

2)

$$g = q_k, \ [f, q_k] = -\frac{\partial f}{\partial p_k},$$
$$g = p_k, \ [f, p_k] = \frac{\partial f}{\partial q_k}. \tag{7.27}$$

Полная производная по времени некоторой функции $F = F(q_1, \ldots, q_s; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s; t)$ имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} - [H, F], \tag{7.28}$$

где H есть гамильтониан (7.19). Если F есть интеграл движения (7.9), то

$$\frac{\partial F}{\partial t} - [H, F] = 0. \tag{7.29}$$

Если интеграл движения F не зависит явно от времени, то

$$[H, F] = 0. \tag{7.30}$$

Теорема Пуассона: *если F_1 и F_2 есть интегралы движения, то составленные из них скобки Пуассона также являются интегралом движения:*

$$[F_1, F_2] = \text{const}. \tag{7.31}$$

Если интегралы движения F_1 и F_2 зависят явно от времени, то

$$\frac{d}{dt} [F_1, F_2] = \frac{\partial}{\partial t} [F_1, F_2] + [H, [F_1, F_2]]. \tag{7.32}$$

7.5. Уравнение Гамильтона — Якоби

Дифференциальное уравнение в частных производных, которому удовлетворяет действие S (7.16),

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t\right) = 0 \tag{7.33}$$

называется *уравнением Гамильтона — Якоби*. Здесь H — гамильтониан (7.19),

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \ j = 1, 2, \ldots, s, \tag{7.34}$$

— обобщенные импульсы (ср. с (7.18)). Независимыми переменными уравнения (7.33) являются обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и время t. *Полным интегралом* этого уравнения называют решение вида

$$S = f(t, q_1, \ldots, q_s; \alpha_1, \ldots, \alpha_s) + A, \tag{7.35}$$

содержащее $(s+1)$ произвольную постоянную $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, A$. Зная полный интеграл (7.35), зависимость координат $q_1, \ldots, q_s$ от времени находят из системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{7.36}$$

где β_j — некоторые новые постоянные. Зависимость импульсов $p_1, \ldots, p_s$ от времени определяют из уравнений (7.34).

Если гамильтониан H не зависит от времени явно, то уравнение Гамильтона — Якоби имеет простой вид

$$H\left(q_1, \ldots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E, \tag{7.37}$$

где E — энергия системы, S_0 — так называемое *укороченное действие:*

$$S_0 = S + Et = \int \sum_j p_j dq_j. \tag{7.38}$$

Укороченное действие S_0 является функцией координат: $S_0 = S_0(q_1, \ldots, q_s)$ Для лагранжиана (7.14) имеем

$$S_0 = \int \sqrt{2(E-U) \sum_{j,k} a_{jk} dq_j dq_k}. \tag{7.39}$$

7.6. Теорема Лиувилля

Механические явления можно трактовать геометрически. Для этого вводят понятие о фазовом пространстве. *Фазовым пространством* называют пространство $2s$ измерений, на координатных осях которого откладываются значения s обобщенных координат и s обобщенных импульсов данной системы материальных точек, имеющей s степеней свободы. Каждая точка этого пространства соответствует определенному состоянию системы. При движении системы эта точка описывает в фазовом пространстве линию, называемую *фазовой траекторией.* Равенство (7.37) есть уравнение гиперповерхности в фазовом пространстве. Произведение бесконечно малых приращений координат и импульсов:

$$d\Gamma = dq_1 \ldots dq_s\, dp_1 \ldots dp_s \tag{7.40}$$

называют *элементом фазового пространства.*

Теорема Лиувилля (1838): *при движении по законам классической механики величина фазового объема не изменяется:*

$$\int d\Gamma = \text{const}, \tag{7.41}$$

где интеграл представляет собой фазовый объем, который заполняет совокупность N_i точек фазового пространства, изображающих состояния N_i одинаковых систем, $i = 1, 2, \ldots, s$, и движущихся согласно классическим уравнениям движения. Указанную совокупность N_i точек называют ансамблем и характеризуют плотностью $W = W(q_1, \ldots, q_s; p_1, \ldots, p_s; t)$ (см. далее (7.42)). Согласно теореме Лиувилля эта

плотность остается постоянной при движении точек вдоль фазовых траекторий:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial W}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = 0.$$

Теорема Лиувилля является основной теоремой статистической механики. Статистическая механика дает метод вычисления средних величин, характеризующих движение большого числа одинаковых систем. Эти величины находят путем вычисления средних значений по всем системам ансамбля с плотностью W, не зависящей явно от времени t.

Пусть F — данная физическая величина, являющаяся функцией координат и импульсов: $F = F(q_1, \ldots, q_s; p_1, \ldots, p_s)$. Тогда *среднее по совокупности (по ансамблю)*

$$\overline{F}^s = \int W(q_1, \ldots, q_s; p_1, \ldots, p_s)\, F(q_1, \ldots, q_s; p_1, \ldots, p_s)\, d\Gamma, \tag{7.42}$$

где W — плотность вероятности попадания одной системы в единицу фазового объема, $W = N_i / N \Delta\Gamma_i$, N_i — число систем (точек) в элементе фазового пространства $\Delta\Gamma_i$, N — полное число систем. Плотность $W(q_1, \ldots, q_s; p_1, \ldots, p_s)$ есть интеграл движения. Числа N и N_i предполагаются достаточно большими. *Среднее по времени* $\overline{F}^t \equiv \langle F \rangle$ выражается формулой

$$\overline{F}^t = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} F(q_1(t), \ldots, q_s(t); p_1(t), \ldots, p_s(t))\, dt, \tag{7.43}$$

где период усреднения τ выбирается достаточно большим. Вычисление среднего по формуле (7.43) предполагает знание всех координат и импульсов как функций времени, т.е. требует решения уравнений движения для всех материальных точек данной макросистемы. В случае большого числа степеней свободы (например, для одного моля газа, содержащего 10^{23} молекул) такая задача практически не может быть решена. В статистической механике доказывается, что существует такая плотность W, при которой среднее по совокупности (7.42) равно среднему по времени (7.43): $\overline{F}^s = \overline{F}^t$, для произвольной функции состояния F. Это позволяет избежать нахождения траекторий движения всех материальных точек заданной макросистемы. Переход от вычисления средних $\overline{F}^t$ к вычислению средних $\overline{F}^s$ составляет суть так называемого *метода Гиббса* (1901).

Для замкнутой системы плотность W отлична от нуля только на гиперповерхности постоянной энергии (7.37). Из условия нормировки

$$\int W\, d\Gamma = 1 \tag{7.44}$$

следует *микроканоническое распределение Гиббса*

$$W = \frac{\delta(H-E)}{\Omega(E)}, \quad \Omega(E) = \frac{d\Gamma}{dE}, \tag{7.45}$$

где $\delta(H-E)$ — так называемая дельта-функция Дирака, которая определяется формулами

$$\delta(x) = 0, \; x \neq 0; \quad \delta(x) = \infty, \; x = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{7.46}$$

В случае незамкнутых, погруженных во внешнюю среду (термостат) систем для вычисления средних (7.42) служит *каноническое распределение Гиббса* (1901), которое имеет вид

$$W = \exp\left(\frac{\Psi - H}{\Theta}\right), \quad \Theta = kT, \tag{7.47}$$

где $\Psi = -\Theta \ln Z$ называется *свободной энергией системы*, H — ее гамильтониан, Θ — модуль канонического распределения, или статистическая температура, k — постоянная Больцмана, T — температура. Величина

$$Z = \int \exp\left(-\frac{H}{\Theta}\right) d\Gamma \tag{7.48}$$

называется *статистическим интегралом, интегралом состояний* или *статистической суммой.*

Глава II

Механика твердого тела

8. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

8.1. Степени свободы

Абсолютно твердым телом или просто *твердым телом* в механике называют идеализированную систему материальных точек, все расстояния между которыми остаются неизменными при движении этой системы как целого в пространстве и времени. Реальные тела можно приближенно рассматривать как идеально твердые, если деформации [10], возникающие под действием внешних сил, малы и при решении поставленной задачи о движении твердого тела не рассматриваются.

Для однозначного определения положения твердого тела в пространстве достаточно задать положение каких-либо трех его точек, не лежащих на одной прямой. Так как у твердого тела расстояния между этими точками не изменяются при движении тела, то из девяти координат, характеризующих выбранные три точки, независимыми являются только шесть. Следовательно, твердое тело, на движение которого не наложены никакие ограничения (связи), является механической системой, имеющей шесть степеней свободы: $s = 6$ [7.1]. Наличие связей уменьшает их число. Примеры: а) тело, имеющее одну закрепленную неподвижную точку, вокруг которой может вращаться, имеет три степени свободы: $s = 3$; б) тело, которое может вращаться вокруг закрепленной оси, имеет одну степень свободы: $s = 1$; в) вращающееся тело, которое может при этом двигаться вдоль закрепленной оси, имеет две степени свободы: $s = 2$.

8.2. Разложение движения твердого тела на составляющие

Всякое произвольное движение твердого тела под действием внешних сил можно представить как сумму поступательного и вращательного независимых движений [2].

При поступательном движении скорости и ускорения всех точек тела одинаковы. Поэтому такое движение тела полностью описывается движением одной из его точек. В качестве такой точки удобно выбрать центр масс тела [3.5.3].

При вращательном движении тела все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Такое движение тела полностью описывается

заданием положения в пространстве оси вращения и угловой скорости тела в каждый момент времени. Вращательное движение твердого тела является плоским. *Плоским* называется движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. Плоское движение характеризуется тремя степенями свободы.

Для описания движения твердого тела вводят две системы координат: неподвижную (инерциальную) систему xyz и движущуюся систему координат $x'y'z'$, которую жестко связывают с твердым телом. Центр O' движущейся системы координат удобно совместить с центром масс тела (рис. 8.1). Положение тела в пространстве относительно системы xyz определяется положением движущейся системы $x'y'z'$. Пусть положение произвольной точки M тела в системе xyz характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{r}$, а в системе $x'y'z'$ — радиусом-вектором $\mathbf{r}'$, радиус-вектор $\mathbf{R}$ указывает положение начала O' движущейся системы $x'y'z'$. Тогда

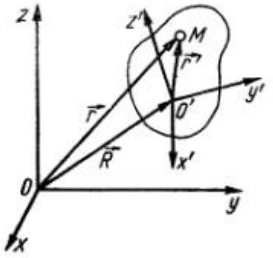


Рис. 8.1

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \qquad (8.1)$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{0'} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'),$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость движения точки M в неподвижной системе координат xyz, $\mathbf{v}_{0'} = \dot{\mathbf{R}}$ — скорость поступательного движения твердого тела, равная скорости движения его центра масс $\mathbf{V}_c$, если O' есть центр масс тела, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ характеризует угловую скорость точки M (2.75). Так как угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от положения точки O', к которой отнесено вращение, то $\boldsymbol{\omega}$ называют просто угловой скоростью вращения твердого тела. Из формулы (8.1) следует, что если скорости $\mathbf{v}_{0'}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в данный момент времени взаимно перпендикулярны при любом выборе точки O', то скорости $\mathbf{v}$ всех точек тела лежат в одной и той же плоскости (плоское движение), перпендикулярной $\boldsymbol{\omega}$. При плоском движении значение поступательной скорости зависит от положения оси вращения, проходящей через точку O' и перпендикулярной плоскости движения. Ось вращения, для которой поступательная скорость равна нулю, называется *мгновенной осью вращения*. Скорость всех точек в данный (фиксированный) момент времени может быть представлена как скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси. Скорости всех точек тела, лежащих на мгновенной оси, равны нулю в этот момент времени. Мгновенная ось служит для описания мгновенного распределения только скоростей точек твердого тела, но не ускорений. С течением времени положение мгновенной оси изменяется как относительно тела, так и относительно неподвижной системы координат.

Плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных элементарных вращений вокруг мгновенных осей. В случае неплоского движения, когда векторы $\mathbf{v}_{0'}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не являются взаимно перпендикулярными, элементарные перемещения тела нельзя представить как поворот вокруг мгновенной оси. В этом случае движение твердого тела в каждый момент времени есть сумма двух независимых движений — вращения вокруг некоторой оси и поступательного движения вдоль этой оси.

На рис. 8.2 показаны примеры нахождения мгновенных осей при плоском движении тел, где $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$, $\mathbf{v}_C$, $\mathbf{v}_M$ — скорости движения точек A, B, C, M. Мгновенная ось данного тела проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка, ω — угловая скорость вращения тела вокруг мгновенной оси.

На рис. 8.2 изображены: *а* — произвольное плоское тело; *б*—колесо, катящееся без скольжения по прямолинейному рельсу; *в* — шестерня *2*, приводящаяся в движение кривошипом CA, вращающимся вокруг оси неподвижной шестерни *1* с угловой скоростью ω_0; *г* — палица, занимающая в различные моменты времени положения AB и $A'B'$ при бесконечно малом перемещении.

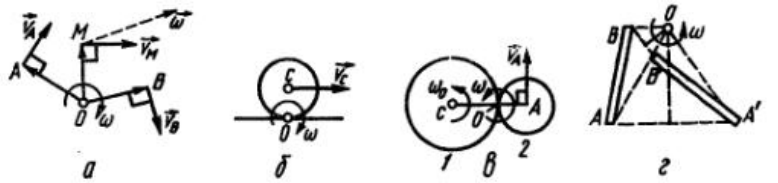


Рис. 8.2

8.3. Теорема Эйлера

Теорема Эйлера (1765): *твердое тело, имеющее одну неподвижную (закрепленную) точку, путем поворота на некоторый угол вокруг неподвижной оси, проходящей через эту точку, может быть переведено из одного положения в любое другое.* Эта теорема справедлива для бесконечно малых и конечных перемещений. Скорость движения твердого тела $\mathbf{v}$ в соответствии с теоремой Эйлера можно представить в виде суммы двух движений:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}, \qquad (8.2)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор движущейся точки тела относительно закрепленной, $\boldsymbol{\omega}_0$ — угловая скорость вращения относительно оси, неподвижной в системе координат xyz (рис. 8.1), $\boldsymbol{\omega}'$ — угловая скорость вращения вокруг оси, неподвижной в системе координат $x'y'z'$. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_0$ при движении тела изменяется лишь по величине, но не по направлению, а $\boldsymbol{\omega}'$ изменяется как по величине, так и по направлению.

8.4. Углы Эйлера

Ориентацию осей координат системы $x'y'z'$, связанной с движущимся твердым телом (рис. 8.1), относительно неподвижной системы xyz описывают с помощью *углов Эйлера* ψ, θ, φ (рис. 8.3). Эти углы отвечают следующим последовательным поворотам твердого тела из начального положения, в котором две системы координат совпадают: 1-й поворот на угол φ вокруг оси z; 2-й поворот на угол θ вокруг оси ON; 3-й поворот на угол ψ вокруг оси z'. Пределы изменения углов:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi. \qquad (8.3)$$

Линию ON называют линией узлов, ψ — углом прецессии, θ — углом нутации, φ — углом вращения. Углы ψ, θ, φ отсчитываются в направлениях, определяемых правилом правого винта.

Проекции $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ угловой скорости твердого тела ω на оси подвижной системы координат связаны с углами ψ, θ, φ и их производными по времени $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ соотношениями

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi,\\ \omega_{y'} &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi,\\ \omega_{z'} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ материальной точки твердого тела имеет вид

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}', \tag{8.5}$$

где x, y, z — координаты вектора $\mathbf{r}$ в неподвижной системе координат с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$; x', y', z' — координаты вектора $\mathbf{r}$ в движущейся системе координат, связанной с твердым телом и имеющей орты $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$. Координаты x, y, z и x', y', z' связаны между собой соотношениями

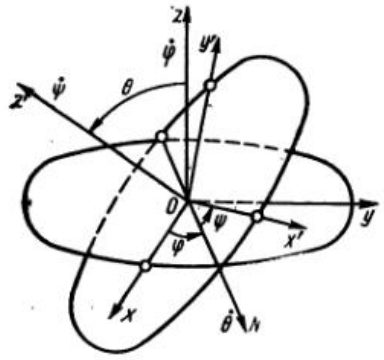


Рис. 8.3

$$\begin{aligned}x &= R_{11}x' + R_{12}y' + R_{13}z',\\ y &= R_{21}x' + R_{22}y' + R_{23}z',\\ z &= R_{31}x' + R_{32}y' + R_{33}z';\\ x' &= R_{11}x + R_{21}y + R_{31}z,\\ y' &= R_{12}x + R_{22}y + R_{32}z,\\ z' &= R_{13}x + R_{23}y + R_{33}z,\end{aligned} \tag{8.6}$$

где R_{ij} — элементы так называемой *матрицы преобразования*, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{3} R_{ij}R_{jk} = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases}1, & i = k,\\ 0, & i \neq k.\end{cases} \tag{8.7}$$

Явный вид элементов R_{ij} представлен в следующей таблице:

R_{ij}	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	$\cos\varphi\cos\psi -$ $-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi$	$-\cos\varphi\sin\psi -$ $-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi$	$\sin\varphi\sin\theta$
$i=2$	$\sin\varphi\cos\psi +$ $+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\varphi\sin\psi +$ $+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
$i=3$	$\sin\theta\sin\psi$	$\sin\theta\cos\psi$	$\cos\theta$

9. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

9.1. Уравнения движения

Уравнения движения твердого тела, рассматриваемого как систему материальных точек, имеют вид (3.51) и (3.43):

$$M\frac{d\mathbf{V}_c}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}, \tag{9.1}$$

где первое равенство описывает поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}_c$ центра инерции твердого тела с массой M под действием суммарной внешней силы $\mathbf{F}$, а второе является уравнением момента импульса тела $\mathbf{L}$, который изменяется со временем под влиянием суммарного момента внешних сил $\mathbf{N}$. Момент импульса $\mathbf{L}$ и момент внешних сил $\mathbf{N}$ можно брать относительно произвольной неподвижной точки или относительно центра инерции твердого тела. В уравнения (9.1) входят только внешние силы. Внутренние силы не влияют на движение абсолютно твердого тела. В случае, если $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{N} = 0$, то тело может как находиться в состоянии равновесия, так и перемещаться в пространстве таким образом, что его центр инерции будет двигаться прямолинейно и равномерно с произвольной скоростью $\mathbf{V}_c$, а само тело будет вращаться с сохранением момента импульса $\mathbf{L}$. В состоянии равновесия $\mathbf{F} = 0$ и согласно (3.45) момент этих сил $\mathbf{N}$ не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется. Произвол в выборе точки отсчета момента сил $\mathbf{N}$ значительно облегчает решение ряда практических задач механики твердого тела.

9.2. Момент инерции

9.2.1. Вращение вокруг неподвижной оси. *Моментом инерции твердого тела* относительно данной оси вращения называют величину I, равную сумме произведений масс материальных точек m_i, составляющих это тело, на квадраты расстояний их до оси вращения r_i:

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{9.2}$$

Момент инерции есть аддитивная величина. Момент импульса $\mathbf{L}$ однородного тела (т. е. тела, у которого плотность распределения массы в пределах объема, занимаемого телом, одинаковая), вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг своей оси симметрии, связан с моментом инерции I простой формулой

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \tag{9.3}$$

Из (9.1) и (9.3) следует *основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*

$$I\frac{d\omega}{dt} = N. \tag{9.4}$$

В случае твердого тела любой формы и с произвольным распределением массы, вращающегося вокруг заданной оси z, имеем

$$I\beta_z = N_z, \; L_z = I\omega, \tag{9.5}$$

где $\beta_z = \dot{\omega}$ есть проекция углового ускорения на ось вращения z, N_z, L_z — проекции момента внешних сил и момента импульса на эту ось, I — момент инерции относительно оси z.

В механике вращательного движения момент инерции I играет роль, аналогичную роли массы в механике поступательного движения, описываемого уравнением Ньютона (3.15). Каждое тело независимо от того, вращается оно или нет, обладает определенным моментом инерции. Для тела, распределение массы которого в каждой точке тела характеризуется плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ (3.4), момент инерции

$$I = \int r^2\,dm,$$
$$dm = \rho(x, y, z)\,dV, \quad dV = dx\,dy\,dz, \tag{9.6}$$

где dm — элемент массы тела, dV — элемент объема, r — расстояние от заданной оси до элемента объема, которое в общем случае является функцией координат точек тела: $r = r(x, y, z)$.

9.2.2. Вычисление момента инерции. Моменты инерции тела относительно выбранных осей x, y, z можно вычислить, воспользовавшись формулой (9.6) и задав форму тела и распределение массы.

Частные случаи: 1) момент инерции I_y относительно оси y плоской фигуры, например криволинейной трапеции (рис. 9.1), определяется формулой

$$I_y = \int_a^b x^2 \rho(x)\,(f_2(x) - f_1(x))\,dx, \qquad (9.7)$$

где $\rho(x)$ — линейная плотность, а функции $f_2(x)$ и $f_1(x)$ задают фигуру в плоскости xy; 2) моменты инерции I_x, I_y относительно осей x, y

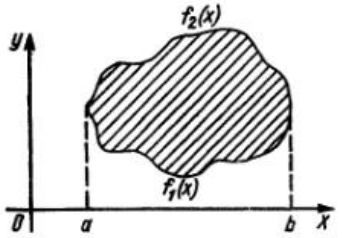


Рис. 9.1

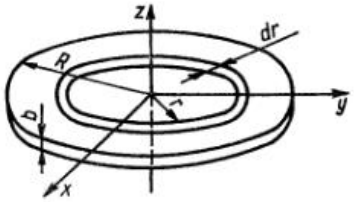


Рис. 9.2

плоского тела, занимающего область S с массой, распределенной с плотностью $\rho(x, y)$, равны соответственно

$$I_x = \int_S \rho(x, y)\, y^2\, dS, \quad I_y = \int_S \rho(x, y)\, x^2\, dS, \qquad (9.8)$$

где $dS = dx\,dy$ — элемент площади. Момент инерции относительно начала координат описывается формулой

$$I_0 = \int_S (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dS; \qquad (9.9)$$

3) моменты инерции I_x, I_y, I_z относительно осей x, y, z тела, занимающего объем V, с плотностью распределения массы $\rho(x, y, z)$, выражаются соотношениями

$$I_x = \int_V (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \int_V (z^2 + x^2)\, \rho(x, y, z)\, dV, \qquad (9.10)$$

$$I_z = \int_V (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dV,$$

где $dV = dx\,dy\,dz$ — элемент объема.

9.2.3. Моменты инерции простых тел. 1. *Однородный диск радиусом R и толщиной b.* Ось z проходит через центр масс перпендикулярно плоскости диска (рис. 9.2), оси x и y лежат в плоскости диска:

$$I_z = \rho \int r^2\, dV = \rho \int_0^R r^2 b 2\pi r\, dr = 2\pi b\rho \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2},$$

$$I_x = I_y = mR^2/4, \quad I_z = I_x + I_y,$$

где $m = \rho V = \rho \pi b R^2$ — масса диска.

2. *Однородный цилиндр длиной h с основанием радиусом R.* Ось z проходит через центр масс перпендикулярно плоскости оснований (рис. 9.3):

$$I_z = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\, dr = \rho h \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{mR^2}{2},$$

где $m = \rho \pi R^2 h$ — масса цилиндра.

3. *Однородный конус высотой h и основанием радиусом R.* Ось z проходит через центр масс перпендикулярно основанию (рис. 9.4):

$$I_z = \rho \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{Rz/h} r^3\, dr = \rho \frac{\pi R^4 h}{10} = \frac{3}{10} mR^2,$$

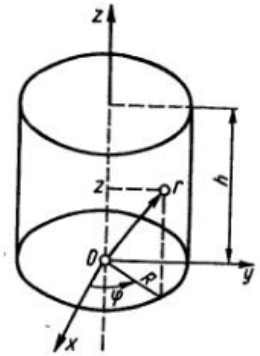


Рис. 9.3

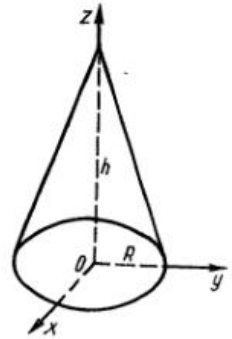


Рис. 9.4

где $m = \rho \pi R^2 h/3$ — масса конуса. Здесь учтено уравнение конуса $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ и соотношение $x^2 + y^2 = r^2$.

4. *Однородный стержень массой m и длиной l.* Ось z проходит через центр масс перпендикулярно стержню (рис. 9.5): $I_z = ml^2/12$.

5. *Однородная прямоугольная пластинка длиной a и шириной b.* Ось z перпендикулярна пластинке и проходит через ее центр масс, оси x и y лежат в плоскости пластинки (рис. 9.6):

$$I_x = \frac{mb^2}{12}, \quad I_y = \frac{ma^2}{12}, \quad I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2).$$

6. *Полый шар с бесконечно тонкими стенками:*

$$I = I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}\,mR^2,\quad I_x + I_y + I_z = 2mR^2,$$

где R — радиус шара, m — его масса.

7. *Однородный сплошной шар:*

$$I = I_x = I_y = I_z = \rho \int_0^R r^2 4\pi r^2\,dr = \frac{2}{5}\,mR^2$$

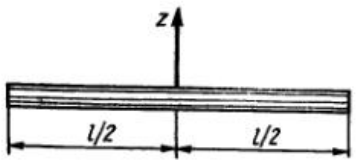


Рис. 9.5

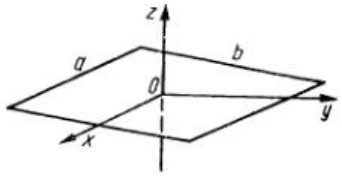


Рис. 9.6

где $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\,\pi R^3$ — масса шара. Здесь учтено, что момент инерции сферического слоя относительно диаметра, т. е. полого шара с бесконечно тонкими стенками радиусом r и массой dm, равен $dI = \frac{2}{3}\,r^2 dm = 2mr^4\,dr/R^3$.

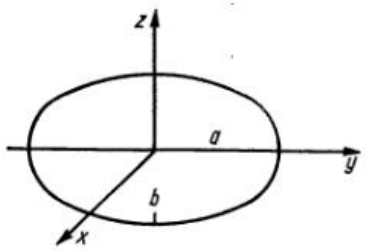


Рис. 9.7

8. *Однородный эллипс с полуосями a и b* (рис. 9.7):

$$I_x = \frac{1}{4}\,ma^2,\quad I_y = \frac{1}{4}\,mb^2,$$

$$I_z = \frac{m}{4}\,(a^2 + b^2),$$

где m — масса эллипса.

9. *Однородный трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c, направленными вдоль осей x, y, z, совпадающими с главными осями инерции:*

$$I_x = \frac{m}{5}\,(c^2 + b^2),\quad I_y = \frac{m}{5}\,(a^2 + c^2),\quad I_z = \frac{m}{5}\,(a^2 + b^2),$$

где m — масса эллипсоида.

9.2.4. Теорема Гюйгенса — Штейнера. *Момент инерции I относительно какой-либо заданной оси определяется формулой*

$$I = I_c + ma^2, \tag{9.11}$$

где I_c — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной заданной, m — масса тела, a — расстояние между осями.

Эта теорема сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

9.3. Тензор инерции

Если тело является однородным и имеет ось симметрии, то связь между моментом импульса **L** этого тела и угловой скоростью вращения **ω** вокруг его оси симметрии имеет вид (9.3), согласно которому направления векторов **L** и **ω** совпадают. В самом общем случае тел произвольной формы и с произвольным распределением массы направления этих векторов не совпадают, а связь между ними задается соотношениями

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z,\\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z,\\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z, \end{aligned} \tag{9.12}$$

где L_x, L_y, L_z и ω_x, ω_y, ω_z — проекции векторов **L** и **ω** на оси координат x, y, z соответственно. Коэффициенты пропорциональности между ними суть компоненты *тензора инерции* тела I, который принято записывать в виде

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz}\\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

Тензор (9.13) характеризует инертные свойства тела при его вращении. Компоненты тензора инерции I в случае непрерывного распределения массы определяются выражениями

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\,dm,\quad I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\,dm,\\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\,dm,\quad I_{yz} = I_{zy} = -\int xz\,dm,\\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\,dm,\quad I_{zx} = I_{xz} = -\int zx\,dm, \end{aligned} \tag{9.14}$$

где $dm = \rho\,(x, y, z)\,dV$, $dV = dx\,dy\,dz$ — элемент объема. Диагональные компоненты I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называют *осевыми моментами инерции*, а недиагональные компоненты I_{xy}, I_{yx}, I_{yz}, I_{zy}, I_{zx}, I_{xz} — *центробежными моментами инерции*. Для любой точки твердого тела существует декартова система координат, в которой тензор инерции является диагональным:

$$I = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0\\ 0 & I_y & 0\\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}. \tag{9.15}$$

Оси такой системы координат называют *главными осями инерции*, а диагональные компоненты I_x, I_y, I_z — *главными моментами инерции*. В общем случае главные оси для различных точек твердого тела имеют различное направление, а главные моменты — различные значения. Нахождение главных моментов инерции тела сводится к решению так называемого *векового уравнения*

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{zx}\\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz}\\ I_{zx} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0, \tag{9.16}$$

которое является кубическим относительно I. Три его корня определяют главные моменты инерции.

Если тело в отсутствие внешних сил вращается вокруг некоторой оси, положение которой в пространстве не изменяется со временем,

то такую ось называют *свободной осью тела*. Для любого тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс тела, которые являются его свободными осями. Эти оси также являются главными осями инерции тела, а моменты инерции относительно них — главными моментами инерции тела. Если тело вращается вокруг одной из своих главных осей, например оси z, то $\omega_z \neq 0$, а $\omega_x = \omega_y = 0$ и

$$L_x = L_y = 0, \quad L_z = I_z \omega_z; \quad \mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}, \tag{9.17}$$

т. е. направления момента импульса $\mathbf{L}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ совпадают (ср. с (9.3)), $I = I_z$ есть главный момент инерции относительно оси z.

Нахождение главных осей инерции тела сильно упрощается, если тело обладает симметрией. Примеры: 1. *Круглая плоская пластинка конечной толщины.* Одна главная ось перпендикулярна плоскости пластинки, другая лежит в средней плоскости пластинки и проходит через ее центр, третья — перпендикулярна первым двум. 2. *Шар.* Одна главная ось проходит через центр шара, а две другие ориентированы произвольным образом и лежат в плоскости, перпендикулярной первой оси.

Если все главные моменты инерции равны: $I_x = I_y = I_z$, то тело называют *шаровым волчком*. Если $I_x = I_y \neq I_z$, то твердое тело называют *симметричным волчком*. Если $I_x \neq I_y \neq I_z$, то тело называют *асимметричным волчком*. Тело, у которого $I_x = I_y$, а $I_z = 0$, называют *ротатором*. Ротатор имеет только две вращательные степени свободы.

9.4. Работа и энергия движущихся твердых тел

При вращении тела внутренние силы работы не совершают. Элементарная работа dA внешних сил при повороте тела на угол $d\varphi$ за время dt определяется формулой

$$dA = \boldsymbol{\omega}\mathbf{N}\,dt = \omega N_z\,dt = N_z d\varphi, \tag{9.18}$$

где ω — угловая скорость, $\mathbf{N}$ — суммарный момент внешних сил, $N_z = N\cos\alpha$ — проекция вектора $\mathbf{N}$ на ось вращения z, α — угол между векторами $\mathbf{N}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Работа A внешних сил при повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ определяется выражением

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} N_z d\varphi, \tag{9.19}$$

где φ_1 и φ_2 — значения угла в начальном и конечном положениях тела. Проекция момента сил на ось вращения N_z в общем случае зависит от угла поворота: $N_z = N_z(\varphi)$.

Мгновенная мощность P в случае вращательного движения находится по формуле

$$P = N_z \frac{d\varphi}{dt} = N_z\dot{\varphi} = N_z\omega. \tag{9.20}$$

Тело, вращающееся вокруг некоторой неподвижной оси z, обладает кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} I_z\omega^2, \tag{9.21}$$

где I_z — момент инерции относительно оси вращения, ω — угловая скорость. Изменение кинетической энергии этого тела ΔT при изменении угловой скорости от ω_1 до ω_2 определяется формулой

$$\Delta T = \frac{1}{2} I_z\,(\omega_2^2 - \omega_1^2). \tag{9.22}$$

Если тело вращается произвольным образом относительно неподвижной точки, совпадающей с его центром масс, то его кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=x,y,z} I_{ik}\,\omega_i\omega_k, \tag{9.23}$$

где суммирование производится независимо по трем значениям осей x, y, z декартовой системы координат с началом в центре масс тела и жестко связанной с телом, I_{ik} — компонента тензора инерции (9.13), ω_i и ω_k — угловые скорости вращения вокруг осей i и k соответственно.

Если оси декартовой системы координат совпадают с главными осями инерции тела, то

$$T = \frac{1}{2}\,(I_x\,\omega_x^2 + I_y\,\omega_y^2 + I_z\,\omega_z^2), \tag{9.24}$$

где I_x, I_y, I_z — его главные моменты инерции. Если тело вращается вокруг одной из главных осей, например оси z, с угловой скоростью $\omega_z = \omega$, то $\omega_x = \omega_y = 0$, и формула (9.24) переходит в (9.21).

В случае плоского движения [8.2] тела — поступательного со скоростью заданной точки тела O $\mathbf{v}_0$ и вращательного вокруг оси, проходящей через эту точку O, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ — его кинетическая энергия имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\,mv_0^2 + m\,\mathbf{R}_c\,(\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\,I_0\omega^2, \tag{9.25}$$

где m — масса тела, $\mathbf{R}_c$ — радиус-вектор его центра масс, I_0 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку O. Если в качестве точки O выбрать центр масс тела, то кинетическая энергия этого тела при плоском движении будет равна сумме кинетической энергии поступательного движения центра масс со скоростью, равной скорости движения центра масс $\mathbf{V}_c$, и энергии вращательного движения с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр масс тела с моментом инерции относительно этой оси I_c:

$$T = \frac{1}{2}\,mV_c^2 + \frac{1}{2}\,I_c\,\omega^2. \tag{9.26}$$

В случае произвольного движения тела имеем

$$T = \frac{1}{2}\,mV_c^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,k=x,y,z} I_{ik}\,\omega_i\omega_k, \tag{9.27}$$

где обозначения те же, что и в формуле (9.23).

9.5. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой

Уравнения (9.1) описывают движение твердого тела относительно неподвижной системы координат. В подвижной системе координат с осями, направленными по главным осям инерции, проекции L_x, L_y, L_z момента импульса $\mathbf{L}$ тела и проекции ω_x, ω_y, ω_z угловой скорости ω на эти оси, связаны соотношениями

$$L_x = I_x\omega_x, \quad L_y = I_y\omega_y, \quad L_z = I_z\omega_z, \tag{9.28}$$

где I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции тела. Уравнение движения (9.1) для $\mathbf{L}$ в этом случае сводится к уравнениям

$$\begin{aligned} I_x\frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\,\omega_y\omega_z &= N_x, \\ I_y\frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\,\omega_z\omega_x &= N_y, \\ I_z\frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\,\omega_x\omega_y &= N_z, \end{aligned} \tag{9.29}$$

которые называются *уравнениями Эйлера* (1765). Все величины в этих уравнениях отнесены к движущимся осям координат, жестко связанным с твердым телом. Они описывают движение тела с одной неподвижной точкой, в которой помещено начало координат. Свободному движению твердого тела соответствует случай, когда проекции N_x, N_y, N_z момента внешних сил $\mathbf{N}$ на главные оси инерции равны нулю, $N_x = N_y = N_z = 0$. *Следствия уравнений Эйлера*: 1) свободное вращение твердого тела возможно лишь вокруг главных осей, проходящих через центр масс тела; 2) вращение твердого тела устойчиво только относительно главной оси, проходящей через центр масс тела, которой соответствует максимальный или минимальный момент инерции. Вращение вокруг главной оси со средним моментом инерции неустойчиво; 3) свободное движение симметричного волчка ($I_x = I_y$) описывается формулами

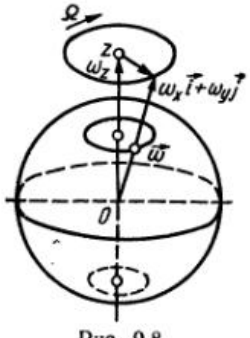


Рис. 9.8

$$\omega_x = A\cos\Omega t, \quad \omega_y = A\sin\Omega t, \quad \omega_z \approx \text{const}, \tag{9.30}$$

где A — постоянная, $\Omega = \omega_z(I_z - I_x)/I_x$. Согласно (9.30) вектор ω равномерно вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси волчка (оси z), его величина остается постоянной. В этом случае говорят, что угловая скорость ω прецессирует вокруг оси z (рис. 9.8). Примером такого движения является прецессия оси вращения Земли вокруг оси, проходящей через Северный полюс. Угловая скорость прецессии Земли равна

$$\Omega \simeq 0,0033\omega_z, \quad \omega_z \approx \omega.$$

Ось вращения Земли удаляется от Северного полюса на расстояние около 5 м. Расчетный период прецессии Земли равен 300 дней, а наблюдаемый — 427 дней. Расхождение связано с тем, что Земля является не твердым, а упругим телом.

9.6. Аналогия с поступательным движением

Между формулами механики поступательного движения материальной точки [1] и механики вращательного движения твердого тела существует формальная аналогия, позволяющая сопоставлять величины, используемые этими механиками:

Поступательное движение	Вращательное движение
$\mathbf{v}$ — линейная скорость	ω — угловая скорость
$\mathbf{a}=\mathbf{v}$ — линейное ускорение	$\beta=\omega$ — угловое ускорение
m — масса	I, I_z — момент инерции
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс	$L_z = I_z\omega$ — момент импульса
$\mathbf{F}$ — сила	$\mathbf{N}$, N_z — момент силы

Уравнения движения

$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$	$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N}$
$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$	$I\beta_z = N_z$

Кинетическая энергия

$T = \frac{1}{2}mv^2$	$T = \frac{1}{2}I_z\omega^2$

Работа

$dA = F_r ds$	$dA = N_z d\varphi$

Мощность

$P = \mathbf{F}\mathbf{v}$	$P = N_z\omega$

10. УПРУГИЕ ТЕЛА

10.1. Силы упругости. Типы деформаций

Все реальные твердые тела под действием внешних сил изменяют свои линейные размеры и объем. Такие изменения называют *деформацией твердого тела*. Твердые тела деформируются под действием пар противоположно направленных внешних сил. Деформации возникают при нагревании тел, при воздействии на них электромагнитных полей, при механических воздействиях на эти тела со стороны других тел. Различают упругие и пластические деформации. *Упругими* называют деформации, исчезающие после прекращения действия внешних сил. *Пластическими* называют деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил. Под действием внешних сил происходит смещение частиц (атомов), составляющих тело, из их равновесных положений. Возникающие при этом силы взаимодействия этих частиц препятствуют деформации тела. Эти внутренние силы называют *силами упругости*. Они уравновешивают внешние силы, приложенные к телу. Если внешние силы не превосходят некоторой величины, называемой *пределом упругости* твердого тела, то возникающие деформации будут упругими. Твердое тело, которое может претерпевать только упругие деформации, называют *абсолютно упругим телом*. Только для абсолютно упругих тел существует однозначная зависимость между внешними силами и вызываемыми ими деформациями [10.2.2].

По отношению к свойствам, характеризующим упругие деформации, твердые тела разделяют на изотропные и анизотропные. Тела называют *изотропными*, если их упругие свойства во всех направлениях одинаковы. Если эти свойства тела в разных направлениях различны, то такое тело называют *анизотропным*. Деформации, при которых все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково, называют *однородными* (сдвиг, [10.3]) Если деформации изменяются при переходе от одной точки тела к другой, то говорят об *неоднородных* деформациях (кручение, [10.4]).

10.2 Упругие деформации

10.2.1. Напряжение. Тензор упругих напряжений. Упругие деформации характеризуются напряжением. *Напряжением* σ_n в заданной точке O твердого тела называют силу упругости $d\mathbf{F}_{упр}$, с которой действуют одна на другую две части A и B этого тела на бесконечно малом участке dS поверхности их соприкосновения с центром в точке O, отнесенную к величине площадки dS (рис. 10.1):

$$\sigma_n = \frac{d\,\mathbf{F}_{упр}}{dS}. \qquad (10.1)$$

Проекция силы $d\mathbf{F}_{упр}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности dS задает нормальное напряжение, а проекция силы $d\mathbf{F}_{упр}$ на плоскость, касательную к площадке dS — тангенциальное напряжение. Если на некоторую поверхность S тела действует внешняя сила $\mathbf{F}$, то напряжение σ определяется формулой

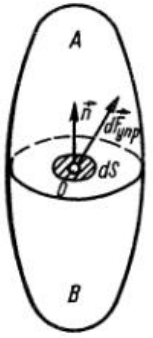


Рис. 10.1

$$\sigma = F/S. \qquad (10.2)$$

Теорема 1: *для однозначного определения напряжения σ_n в твердом теле (или в любой покоящейся или движущейся с ускорением непрерывной среде) на произвольно ориентированной площадке S в любой заданной точке O тела достаточно задать напряжения σ_x, σ_y, σ_z на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку O:*

$$\sigma_n = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z, \qquad (10.3)$$

где n_x, n_y, n_z — проекции внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к площадке S на оси декартовой системы координат с центром в точке O (см. рис. 10.2, где элемент объема $OABC$ предполагается бесконечно малым). Совокупность девяти величин, являющихся проекциями векторов σ_x, σ_y, σ_z на три координатные оси x, y, z называют *тензором упругих напряжений* и записывают в виде матрицы

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (10.4)$$

Тензор упругих напряжений симметричен:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (i,\ j = x,\ y,\ z).$$

Теорема 2: *для любой точки абсолютно упругого тела существует декартова система координат, в которой тензор упругих напряжений является диагональным:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}. \qquad (10.5)$$

Координатные оси такой декартовой системы называют *главными осями тензора* упругих напряжений.

10.2.2. Закон Гука. Упругие деформации называют малыми, если для них справедлив **закон Гука** (1660): *напряжение σ при упругой деформации тела пропорционально относительной деформации ε:*

$$\sigma = K\varepsilon, \qquad (10.6)$$

где K — модуль упругости, равный напряжению при относительной деформации, равной единице.

В случае линейного растяжения или сжатия стержня относительная деформация

$$\varepsilon = \Delta l / l_0, \qquad (10.7)$$

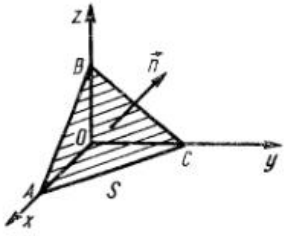


Рис. 10.2

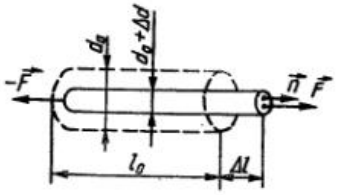


Рис. 10.3

где l_0 — длина недеформированного стержня, $l = l_0 + \Delta l$ — длина деформированного стержня. Модуль упругости $K = E$ называют *модулем Юнга* (1807). Изменение длины стержня Δl под действием силы F, приложенной перпендикулярно площади поперечного сечения стержня S (рис. 10.3), описывается формулой

$$\Delta l = \sigma l_0 / E,\ \sigma = F/S,\ \Delta l \sim F \qquad (10.8)$$

— изменение длины Δl пропорционально приложенной силе F.

В случае всестороннего (объемного) растяжения или сжатия тела напряжение

$$\sigma = K\varepsilon,\ \varepsilon = \frac{\Delta V}{V_0},\ K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \qquad (10.9)$$

где V_0 — объем недеформированного тела, $V = V_0 + \Delta V$ — объем деформированного тела, E — модуль Юнга. Величина μ называется *коэффициентом Пуассона* (1810),

$$\frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad (10.10)$$

где d_0, l_0 — поперечный размер и длина недеформированного тела, $d = d_0 + \Delta d$, $l = l_0 + \Delta l$ — поперечный размер и длина деформированного тела (рис. 10.3). Коэффициент Пуассона μ отражает тот факт, что с изменением длины тела изменяется и его поперечное сечение. Для твердых тел $\mu < 0{,}5$.

Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропных тел. Числовые значения E и μ для ряда твердых тел приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1. Модуль Юнга E, коэффициент Пуассона μ, модуль сдвига G для некоторых веществ

Вещество	$E \cdot 10^{10}$, Н/м²	μ	$G \cdot 10^{10}$, Н/м²
Каучук	0,0008	0,46	0,0003
Плексиглас	0,52	0,35	0,15
Бетон	1,5—4	0,32—36	0,7—1,7
Свинец	1,62	0,45	0,56
Гранит, мрамор	3,5—5,0	0,1—0,15	1,4—2,4
Стекло	4,9—7,8	0,2—0,3	1,75—2,9
Кадмий	4,99	0,3	1,9
Фарфор	5,8	0,23	—
Алюминий	7,1	0,34	2,6
Дуралюмин	7,3	0,34	2,7
Кварцевое стекло	7,5	0,17	3,2
Серебро	7,9	0,37	2,8
Золото	7,9	0,42	2,9
Германий	8,1	0,31	3,1
Латунь	9,8	0,35	3,6
Серый чугун	10,8	0,22	4,4
Титан	11,6	0,32	4,4
Медь	12,3	0,35	4,55
Манганин	12,4	0,33	4,6
Платина	14,7	0,39	6,1
Константан	16,3	0,33	6,2
Кобальт	19,6—20,8	—	—
Никель	20,5	0,3	7,7
Сталь	20,6	0,28	8
Вольфрам	34,2—40	0,29	8,8—21,5
Молибден	45,8	0,32	—
Иридий	52,8	0,26	—

Коэффициентом упругости k называется величина, обратная модулю упругости K:

$$k = 1/K. \qquad (10.11)$$

Для реальных тел закон Гука (10.6) справедлив, если величина внешних сил, действующих на тело, значительно меньше величины силы, определяющей предел упругости твердого тела, при которой силы упругости не могут уже уравновесить действие внешних сил. В общем случае напряжение σ определяется разложением по степеням относительной деформации ε:

$$\sigma = K\varepsilon + A\varepsilon^2 + B\varepsilon^3 + \ldots, \qquad (10.12)$$

где постоянные K, A, B, ... зависят от материала тела и его физического состояния. На рис. 10.4 показана зависимость напряжения σ от относительной деформации ε при растяжении реальных тел. Участок OA соответствует области упругих деформаций, где справедлив закон Гука (10.6). Величина σ_A определяет предел упругости тела. Точка B соответствует пределу текучести, определяемому напряжением σ_B.

На участке BC увеличение длины тела происходит без увеличения напряжения, равного σ_B. Точка D соответствует относительной деформации ε_1, при которой после медленного прекращения действия внешних сил, вызывающих растяжение тела, оно возвратится в некоторое деформированное состояние с деформацией ε_0. Деформация ε_0 называется *остаточной деформацией* твердого тела. Точка E соответствует пределу прочности тела, определяемому напряжением σ_E. В этой точке происходит разрушение тела.

10.2.3. Упругая энергия. Единицы энергии. Деформируемое тело обладает запасом потенциальной энергии, которая называется *упругой энергией*, и может совершать работу. Упругая энергия равна работе сил, затраченной на деформацию тела, при условии, что его кинетическая энергия не изменяется. Последнее возможно только в том случае, если деформация осуществляется так медленно, что в любой момент времени каждая часть тела практически находится в состоянии равновесия, т. е. внешние силы уравновешиваются силами упругости. Процесс деформации, при котором выполняется это условие, называют *квазистационарным процессом*.

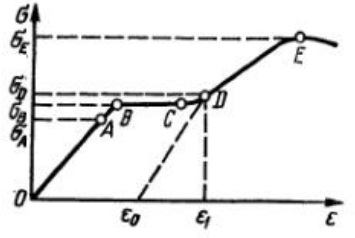


Рис. 10.4

Упругая энергия растянутого стержня определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} F\Delta l = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2, \qquad (10.13)$$

где k — коэффициент упругости, внешняя сила F согласно закону Гука (10.8) равна $F = k\Delta l$, где Δl — удлинение стержня [5.2.3]. Плотность упругой энергии u, т. е. энергии U, приходящейся на единицу объема V деформированного тела, имеет вид

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{F\Delta l}{S l} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (10.14)$$

Для напряжения σ, модуля Юнга E, коэффициента упругости k и упругой энергии U в системе СИ приняты следующие единицы:

$$[\sigma] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}, \quad [E] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}, \quad [k] = \text{м}^2/\text{Н}, \quad [U] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

10.3. Сдвиг, кручение и изгиб

Примером однородной деформации является сдвиг. *Сдвигом* называется деформация, при которой все слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости, называемой *плоскостью сдвига*, перемещаются в одном и том же направлении, параллельном плоскости сдвига. Для однородного и изотропного куба (рис. 10.5) основание AD есть плоскость сдвига, а внешняя сила F, вызывающая деформацию, направлена по касательной к грани BC. По закону Гука *касательное напряжение*

$$\tau = \frac{F}{S} = G\gamma, \qquad (10.15)$$

где S — площадь поверхности (грани AB), нормально к которой действует внешняя сила F, γ — угол между поверхностями (гранями AB и AB') до и после деформации, который предполагается малым ($\gamma \ll 1$). Постоянная G называется *модулем сдвига*. Значение G зависит

от материала, из которого сделан куб (табл. 10.1). Модуль сдвига G связан с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (10.16)$$

Сдвиг эквивалентен растяжению тела в одном направлении и сжатию в другом направлении, перпендикулярном первому. При деформациях, при которых выполняется закон Гука (10.6), объем тела практически не изменяется.

Плотность упругой энергии при сдвиге определяется формулой

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1+\mu}{E}\tau^2 = \frac{\tau^2}{2G}, \qquad (10.17)$$

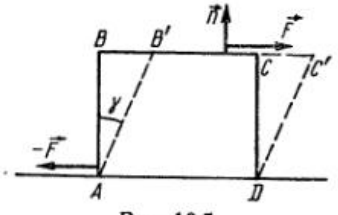


Рис. 10.5

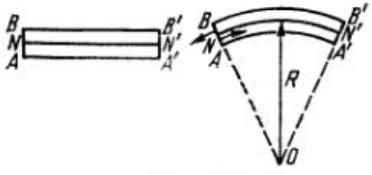


Рис. 10.6

где μ — коэффициент Пуассона, E и G — модули Юнга и сдвига, τ — касательное напряжение (10.15).

Примером неоднородных деформаций являются кручение и изгиб. *Кручением* называют деформацию твердого тела, при которой под действием внешней силы происходит относительный поворот параллельных сечений тела вокруг некоторой оси. Внешняя сила F при кручении создает вращательный момент $M = FR$, где R — расстояние до оси поворота. Согласно закону Гука для деформации кручения имеем

$$M = f\varphi, \qquad (10.18)$$

где f — постоянная, называемая *модулем кручения*, φ — угол поворота одного сечения относительно другого соседнего ему сечения тела. Модуль кручения f зависит от физических свойств тела и его геометрических размеров. Для сплошной проволоки радиусом r и длиной l

$$f = \frac{\pi G}{2l} r^4, \qquad (10.19)$$

где G — модуль сдвига из (10.15).

Изгибом называют деформацию твердого тела, при которой одни части тела претерпевают сжатие, а другие растяжение в параллельных направлениях. На рис. 10.6 показан изгиб однородной балки $ABB'A'$, имеющей поперечное сечение, одинаковое вдоль всей длины. Линия NN', длина которой не изменяется при изгибе, называется *нейтральной линией*. Волокна балки выше этой линии будут растянуты, а ниже — сжаты. Пусть R — радиус кривизны нейтральной линии, $R = ON = ON'$. Тогда согласно закону Гука напряжение σ любого волокна, находящегося на расстоянии ξ от линии NN', определится формулой

$$\sigma = E\xi/R, \qquad (10.20)$$

где E — модуль Юнга. Выше линии NN' напряжение $\sigma > 0$, ниже линии NN' $\sigma < 0$. Напряжение σ действует вдоль рассматриваемого волокна.

Глава III

Механика жидкости и газа

11. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

11.1. Задачи гидроаэромеханики

Механика жидкости и газа или *гидроаэромеханика* — раздел механики, в котором изучают равновесие и движение жидких и газообразных сред, а также их взаимодействие между собой и с погруженными в них телами. Основные задачи гидроаэромеханики состоят в определении сил, действующих на твердое тело, движущееся в жидкости или газе (для определения его оптимальной формы), в определении параметров жидкости или газа вблизи поверхности твердых тел (для учета воздействия на них со стороны потока жидкости или газа), в исследовании движения воды в морях и океанах, а также движения воздуха в атмосфере, в исследовании движения жидкости или газа внутри каналов различной формы (для определения оптимальной формы каналов газовых и паровых турбин, реактивных двигателей).

Гидроаэромеханика разделяется на *гидро- и аэростатику* [12], *гидро- и аэродинамику* [13].

11.2. Жидкость и газ

Жидкостью называют агрегатное состояние вещества, промежуточное между твердым и газообразным. Жидкость характеризуется следующими свойствами: 1) сохраняет объем; 2) образует поверхность; 3) обладает прочностью на разрыв; 4) принимает форму сосуда; 5) обладает текучестью. Свойства 1)—3) подобны свойствам твердых тел, а 4) — свойству газа. Главным отличительным свойством жидкости является *текучесть*. Она обусловлена подвижностью молекул, составляющих жидкость. Вследствие этого поверхность покоящейся жидкости, находящейся в равновесии под действием силы тяжести, всегда горизонтальна.

По физической природе различают несколько типов жидкостей. Жидкости, макроскопически однородные и изотропные в отсутствие внешних сил, имеющие одно жидкое состояние (фазу), называют *нормальными* или *обычными*. Кроме них существуют так называемые *квантовые жидкости* — жидкий гелий ^{3}He, имеющий одну нормальную и две сверхтекучие фазы, и жидкий гелий ^{4}He, имеющий нормальную и сверхтекучую фазы, и *жидкие кристаллы* —жидкокристаллические

вещества, имеющие нормальную и одну или несколько анизотропных фаз.

Газом называют агрегатное состояние вещества, в котором все его частицы (атомы, молекулы) слабо взаимодействуют между собой и, двигаясь, заполняют весь предоставляемый ему объем. Основным свойством газа является его способность полностью заполнить сосуд, в котором он находится.

Механические свойства газов и жидкостей имеют много сходных черт и изучаются параллельно. Конкретное строение жидкости или газа в гидроаэромеханике не учитывается. Они рассматриваются как сплошные среды, т. е. среды, непрерывно распределенные в пространстве. Это означает, что любой элемент объема жидкости или газа содержит очень большое число молекул. Этот элемент объема мал лишь по сравнению со всем объемом, занимаемым жидкостью или газом, но велик по сравнению с межмолекулярными расстояниями.

12. ГИДРОСТАТИКА И АЭРОСТАТИКА

12.1. Давление. Закон Паскаля

В гидро- и аэростатике изучают равновесие жидкости и газа, а также их воздействие на погруженные в них тела. При сжатии жидкости или газа в них возникают силы упругости, которые уравновешивают приложенные внешние силы. В жидкостях и газах при изменении их формы силы упругости не возникают. Эти силы возникают при изменении их объема, т. е. жидкость и газ обладают только объемной упругостью. В состоянии равновесия (покоя) напряжение σ_n, возникающее в жидкости или газе, при их сжатии всегда перпендикулярно площадке, на которую оно действует

$$\sigma_n = -P\,\mathbf{n}, \qquad (12.1)$$

где P называется *давлением*, которое определяется как сила $\mathbf{F}$, приходящаяся на единицу площади поверхности S, на которую действует эта сила:

$$P = F/S, \qquad (12.2)$$

$\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к этой поверхности. Основная задача гидро- и аэростатики состоит в изучении распределения давления (12.2) в жидкости или газе.

Единицей давления в СИ является паскаль (Па):

$$[P] = \text{Па} = \text{Н/м}^2 = \text{кг/(м} \cdot \text{с}^2).$$

Давление — скалярная величина.

Закон Паскаля (1653): *в состоянии равновесия давление P не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует.* В соответствии с этим законом жидкости и газы передают оказываемое на них давление равномерно по всем направлениям.

В жидкости, находящейся в поле силы тяжести, существует давление, обусловленное ее весом. Давление P на произвольной глубине h несжимаемой жидкости определяется формулой (рис. 12.1)

$$P = P_0 + \rho g h, \qquad (12.3)$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, P_0 — давление на поверхность жидкости. Оно равно атмосферному

давлению окружающего жидкость воздуха или давлению со стороны поршня:

$$P_0 = (Mg + F)/S, \qquad (12.4)$$

где M, S — масса и площадь поверхности поршня, F — приложенная к нему сила (рис. 12.1). При этом $\rho = m/Sh$, где m — масса столба жидкости высотой h. Давление P (12.3) на глубине h одинаково во всех направлениях — формула (12.3) определяет давление на любую площадку, помещенную на глубине h независимо от того, будет ли эта

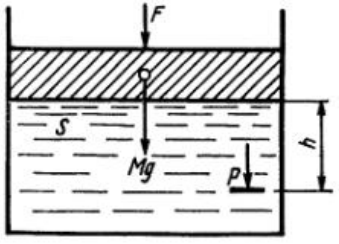


Рис. 12.1

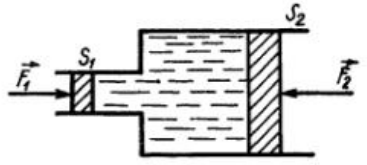


Рис. 12.2

площадка горизонтальна, вертикальна или расположена под каким-либо углом к горизонту.

Давление, обусловленное весом столба жидкости, называется *гидростатическим давлением.*

Если несжимаемая жидкость находится в сосуде, который равномерно вращается вокруг некоторой вертикальной оси с угловой скоростью ω, то давление P на глубине h выражается формулой

$$P = P_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2, \qquad (12.5)$$

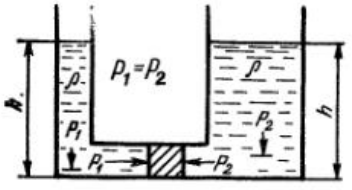


Рис. 12.3

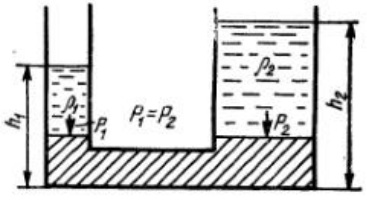


Рис. 12.4

где r — расстояние от рассматриваемой точки жидкости до оси вращения сосуда.

Следствия закона Паскаля.

1. *Действие гидравлического пресса.* Выигрыш в силе равен отношению площадей поршней:

$$F_1/F_2 = S_1/S_2, \qquad (12.6)$$

где F_1 и F_2 — силы, действующие на поршни с площадями S_1 и S_2 (рис. 12.2).

2. *«Гидростатический парадокс».* Давление на дно сосуда, заполненного жидкостью, не зависит от формы сосуда и определяется уровнем жидкости.

3. *Закон сообщающихся сосудов.* Однородная жидкость в сообщающихся сосудах устанавливается на одном и том же уровне (рис. 12.3).

Разнородные жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 в сообщающихся сосудах устанавливаются на высотах h_1 и h_2, обратно пропорциональных ρ_1 и ρ_2 (рис. 12.4):

$$h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1. \qquad (12.7)$$

12.2. Сжимаемость

Упругие свойства жидкости по отношению к малым изменениям объема (деформациям) характеризуются *коэффициентом сжимаемости*

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)_{T=\text{const}}, \qquad (12.8)$$

где V — объем жидкости, P — давление, T — температура жидкости, которая при сжатии поддерживается постоянной.

Единицей коэффициента сжимаемости в СИ является:

$$[\varkappa] = 1/\text{Па} = \text{м}^2/\text{Н}.$$

Знак минус в (12.8) указывает на то, что увеличение давления сопровождается уменьшением объема.

Коэффициент $\varkappa$ слабо зависит от температуры и давления. Значения $\varkappa$ для различных жидкостей приведены в табл. 12.1. Жидкости обладают очень малой сжимаемостью. *Абсолютно несжимаемой жидкостью* называют жидкость, объем которой при сжатии не изменяется. Абсолютно несжимаемая жидкость — это предел реальных жидкостей, когда бесконечно малые сжатия приводят к бесконечно большим давлениям.

Таблица 12.1. **Коэффициент сжимаемости $\varkappa$ жидкостей при $T = 20$ °С**

Жидкость	$\varkappa$, ГПа$^{-1}$	Жидкость	$\varkappa$, ГПа$^{-1}$
Ртуть	0,038	Бензол	0,97
Глицерин	0,22	Этиловый спирт	1,17
Вода	0,47	Ацетон	1,27
Керосин	0,82	Эфир	1,43

12.3. Закон Архимеда

Закон Архимеда (ок. 200 г. до н. э.): *на тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая (подъемная) сила, численно равная весу жидкости (газа) в объеме, вытесненном телом*:

$$F_в = V\rho g, \qquad (12.9)$$

где $F_в$ — выталкивающая сила, V — объем вытесненной телом жидкости (газа), ρ — плотность жидкости (газа), g — ускорение свободного падения. Выталкивающая сила направлена вверх и проходит через центр масс жидкости (газа), вытесненной телом. Центр масс вытесненной жидкости называют *центром плавучести тела*. Его положение определяет *условия равновесия и устойчивости плавающего тела*:

1) плавающее тело будет находиться в равновесии, если его вес равен весу вытесненной им жидкости, а центр плавучести и центр масс тела лежат на одной вертикали;

2) если тело полностью погружено в жидкость, то равновесие будет устойчиво, если центр масс тела лежит ниже его центра плавучести, и неустойчиво — в противном случае;

3) если тело погружено в жидкость частично, то равновесие будет устойчиво, если его центр масс находится ниже метацентра, и неустойчиво — в противном случае. *Метацентром* называется точка тела, в которой пересекаются линии действия выталкивающих сил в равновесном и наклоненном на малый угол положениях тела.

Если на тело весом G действует выталкивающая сила $F_в$, то при $G < F_в$ тело плавает на поверхности жидкости, частично погрузившись в нее; при $G = F_в$ тело полностью погружается в жидкость и находится в ней во взвешенном состоянии; при $G > F_в$ тело тонет. Условие плавания тела в жидкости можно записать также в виде

$$\rho_т \leqslant \rho, \qquad (12.10)$$

где $\rho_т$ — плотность тела, ρ — плотность жидкости.

12.4. Определение плотности твердых тел и жидкостей

Закон Архимеда (12.9) позволяет измерять плотности тел, имеющих неправильную форму, объем которых трудно найти с помощью простых измерений их линейных размеров. Пусть вес тела в воздухе равен $G_т$, а вес этого же тела, полностью погруженного в жидкость или газ, равен $G = G_т - F_в$, где $F_в$ — выталкивающая сила. Тогда

$$\rho_т = \rho\frac{G_т}{G_т - G}, \qquad (12.11)$$

где $\rho_т$ и ρ — плотности тела и жидкости. Если тело неоднородно, то $\rho_т$ есть его средняя плотность.

Закон Архимеда (12.9) позволяет определить плотность одной жидкости, если известна плотность другой. Для измерения можно использовать любое твердое тело, которое не плавает на поверхности одной из жидкостей. Пусть вес этого тела в воздухе равен $G_т$, а его веса при полном погружении в жидкость 1 и жидкость 2 будут соответственно равны G_1 и G_2. Тогда

$$\rho_1 = \rho_2\frac{G_т - G_1}{G_т - G_2}, \qquad (12.12)$$

где ρ_1 — неизвестная плотность жидкости 1, ρ_2 — известная плотность жидкости 2 (например, воды).

12.5. Закон Бойля — Мариотта

Давление газа определяется формулой (12.2). Чем сильнее сжат газ, тем с большим давлением действует он на соприкасающиеся с ним тела. Если газ покоится, то давление всегда перпендикулярно поверхности соприкасающихся с ним тел. В обычных условиях плотность газов примерно в 10^3 раз меньше плотности жидкостей. Так, массы кубического метра воздуха и воды равны соответственно 1,3 кг и 10^3 кг. Если на газ не действуют никакие внешние силы, в том числе

сила тяжести, то нет предела для увеличения его объема. Газы в 10^3 раз сильнее сжимаемы, чем жидкости. Давление газа при постоянной температуре пропорционально числу молекул газа, заключенного в данном объеме, т. е. давление пропорционально массе газа.

Закон Бойля—Мариотта (1661, 1676): *при постоянной температуре произведение давления газа P на его объем V есть постоянная величина*:

$$PV = \text{const}. \qquad (12.13)$$

Следствия закона Бойля—Мариотта:

1) при постоянной температуре давление газа P, находящегося в замкнутом сосуде, пропорционально его плотности ρ, т. е. $P \sim \rho$;

2) при изотермическом процессе, т. е. процессе, при котором температура газа остается все время постоянной, давление P_1 и объем газа V_1 в некотором начальном состоянии 1 связаны с давлением P_2 и объемом газа V_2 в конечном состоянии 2 соотношением

$$P_1V_1 = P_2V_2. \qquad (12.14)$$

12.6. Атмосферное давление

Давление воздуха вблизи поверхности Земли обусловлено его собственным весом и равно приблизительно 10^5 Па, т. е. на 1 м² поверхности Земли воздух давит с силой 10^5 Н. Такое давление называют *атмосферным*. Оно уменьшается по мере удаления от поверхности Земли: при подъеме на каждые 8 м давление падает на 100 Па.

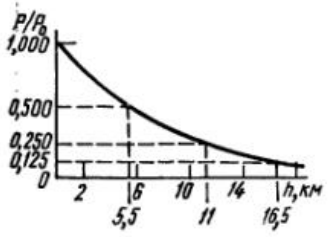


Рис. 12.5

Атмосфера называется *изотермической*, если она находится в механическом и тепловом равновесиях. Под механическим равновесием понимают такое состояние атмосферы, при котором она остается неподвижной с течением времени, т. е. в атмосфере отсутствуют воздушные течения (ветры и т. п.). Тепловое равновесие означает, что температура T одна и та же в любой точке атмосферы: $T = \text{const}$. Изотермическая атмосфера является идеализацией. Для изотермической атмосферы давление уменьшается с высотой по экспоненциальному закону (рис. 12.5)

$$P = P_0 \exp\left\{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}\right\}, \qquad (12.15)$$

где P_0 — атмосферное давление у поверхности Земли, определяемое *уравнением Клапейрона — Менделеева* (17.2):

$$P_0 = \frac{RT}{\mu}\rho_0, \qquad (12.16)$$

R — универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}31$ Дж/(К · моль) [16.1], μ — молекулярная масса воздуха; $\mu = 28{,}8$, ρ_0 — плотность воздуха у поверхности Земли; g — ускорение свободного падения; P — атмосферное давление на высоте h.

Аналогично плотность воздуха ρ на высоте h определяется формулой

$$\rho = \rho_0 \exp\left\{-\frac{\rho_0 g h}{P_0}\right\}. \qquad (12.17)$$

Соотношения (12.15) и (12.17) называются *барометрическими формулами* давления и плотности.

При точных вычислениях атмосферного давления на высоте h следует учитывать понижение температуры воздуха с увеличением высоты. При $P_0 = 101{,}325$ кПа $= 760$ мм рт. ст. (нормальное давление) и $t = 15$ °С (среднегодовая температура) до высот в 11 000 м (тропосфера) давление и плотность вычисляются по следующим формулам:

$$P = 101{,}325\left(1 - \frac{6{,}5h}{288}\right)^{5{,}255}, \quad \rho = 1{,}2255\left(1 - \frac{6{,}5h}{288}\right)^{4{,}255}, \qquad (12.18)$$

где $[P] = $ кПа, $[h] = $ км, $[\rho] = $ кг/м³.

12.7. Опыт Торричелли

Наличие атмосферного давления впервые было показано и измерено Торричелли (1643). В этом опыте стеклянная трубка длиной около одного метра, запаянная с одного конца, наполняется ртутью и открытым концом помещается в сосуд с ртутью (рис. 12.6). Часть ртути выливается из трубки и устанавливается на уровне, при котором столбик ртути в трубке оказывается выше уровня ртути в сосуде. Высота этого столбика ртути 760 мм определяет атмосферное давление (P) в миллиметрах ртутного столба. Если стеклянную трубку наполнить другой жидкостью, то и высота установившегося уровня этой жидкости в трубке после помещения ее в сосуд, заполненный такой же жидкостью, будет иной. В случае воды высота уровня будет равна 10 332 мм и определяет нормальное атмосферное давление в миллиметрах водного столба. Таким образом, атмосферное давление $P = 760$ мм рт. ст. $=$ $= 10332$ мм вод. ст. $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Другими словами, атмосферное давление равно давлению столба воды длиной 10,332 м. Прибор, служащий для измерения атмосферного давления, называется *барометром*. Простейший ртутный барометр представляет собой трубку с ртутью, как в опыте Торричелли, с прикрепленной к ней шкалой для отсчета высоты ртутного столба.

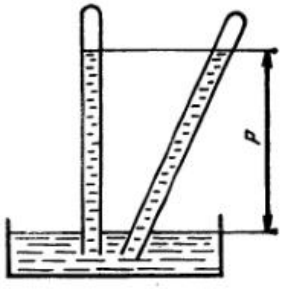


Рис. 12.6

12.8. Основное уравнение гидростатики

Это уравнение устанавливает связь между силой f, действующей в жидкости (или газе) и приходящейся на единицу ее объема, и изменением давления P в состоянии равновесия:

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} P,$$

$$f_x = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad (12.19)$$

где f_x, f_y, f_z — проекции силы $\mathbf{f}$ на оси декартовой системы координат, градиент скаляра P определяется формулой (5.27). В случае силы тяжести

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}, \qquad (12.20)$$

где ρ — плотность жидкости (газа), $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Уравнение (12.19) является частным случаем уравнения Эйлера [13.2.2], описывающего движение идеальной жидкости [13.2.1]. Из уравнения (12.19) следует, что равновесие жидкости (газа) возможно только в том случае, если поле силы $\mathbf{f}$ является консервативным [5.2.2].

Уравнение (12.19) может быть решено (проинтегрировано), если известна сила $\mathbf{f}$. Формулы (12.3) и (12.9), описывающие давление жидкости на произвольной глубине и величину выталкивающей силы, являются решениями уравнения (12.19) с силой $\mathbf{f}$ (12.20). Барометрическая формула (12.15) также следует из уравнения (12.19).

13. ГИДРОДИНАМИКА И АЭРОДИНАМИКА

13.1. Уравнения движения идеальной жидкости

13.1.1. **Поле скоростей, линии потока.** Гидро- и аэродинамика изучают движение жидкости и газов. Законы движения жидкостей справедливы и для газов, если их скорости меньше скорости звука. В этом случае газы, как и жидкости, можно считать практически несжимаемыми.

В гидродинамике изучают движение не отдельной молекулы жидкости, а целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого как частица жидкости или точка. Такая идеализация позволяет сформулировать уравнения движения. Для полного описания состояния жидкости достаточно задать пять величин: три компоненты скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$, давление $P = P(x, y, z, t)$ и плотность $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Переменные этих функций x, y, z и t характеризуют координаты и время не отдельных молекул жидкости, а определенную точку пространства, заполненную жидкостью. Поэтому $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, $P(x, y, z, t)$ и $\rho(x, y, z, t)$ есть скорость, давление и плотность жидкости в данной точке пространства x, y, z в момент времени t.

При фиксированном времени $t = t_0$ функция $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t_0)$ описывает так называемое *поле скоростей*, т. е. дает мгновенную картину распределения скоростей жидкости в каждой точке пространства. В этих точках указан вектор скорости той частицы жидкости, которая проходит через нее в момент времени t_0. Линия, касательная к которой в любой точке пространства дает направление скорости частицы в рассматриваемый момент времени, называется *линией тока*. С помощью линий тока поле скоростей изображают графически (рис. 13.1, *а*): линии тока проводят так, чтобы касательные к ним в каждой точке совпадали с направлением вектора скорости $\mathbf{v}$, а их густота, т. е. число линий тока ΔN, приходящихся на единицу перпендикулярной им и проходящей через них площадки ΔS, была пропорциональна величине скорости в данном месте. Где скорость $\mathbf{v}$ больше, там линии тока расположены гуще.

Часть жидкости, ограниченную со всех сторон линиями тока, называют *трубкой тока* (рис. 13.1, *б*). Частицы жидкости при своем движении не пересекают боковую поверхность (стенки) трубки тока. Все пространство, занимаемое жидкостью (поток), можно разбить на трубки тока. Если трубка тока имеет бесконечно малое поперечное сечение, то можно считать, что скорость жидкости одна и та же во всех точках этой трубки и направлена вдоль ее оси. Масса жидкости

dm, протекающей через поперечное сечение трубки тока площадью S за время dt, определяется формулой

$$dm = \rho v S dt, \tag{13.1}$$

где ρ — плотность v — скорость жидкости.

13.1.2. **Теорема о неразрывности струи.** Движение жидкости называют *стационарным*, если поле скоростей не изменяется с течением времени, и *нестационарным*, если оно со временем изменяется. В случае стационарного течения масса dm (13.1) одна и та же для всех сечений трубки тока и

$$\rho v S = \text{const}, \tag{13.2}$$

т. е. *произведение плотности жидкости на ее скорость и поперечное сечение, через которое протекает жидкость, есть величина постоянная.* Для несжимаемой жидкости

$$vS = \text{const} \tag{13.3}$$

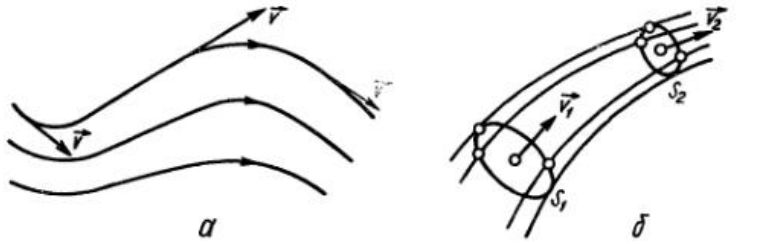


Рис. 13.1

Соотношения (13.2) и (13.3) называют **теоремой о неразрывности струи.** Она справедлива для реальной жидкости и газа, если сжимаемостью последнего можно пренебречь. Формулы (13.2) и (13.3) описывают движение жидкости по трубам с переменным сечением S.

При стационарном течении жидкости линии тока совпадают с траекториями ее частиц. В случае нестационарного течения линии тока характеризуют направления движения бесконечного множества частиц, которые в рассматриваемый момент находятся на данной линии тока.

13.1.3. **Уравнение Эйлера.** При движении жидкости в ней наряду с нормальным напряжением (12.1) может возникать тангенциальное напряжение, обусловленное касательными силами или силами вязкости. Другими словами, при перемещении одних частей жидкости относительно других возникают силы трения, которые в общем случае содержат тангенциальную (или касательную) и нормальную (или объемную) составляющие. От обычных сил, вызывающих давление P (12.2), они отличаются тем, что определяются не степенью сжатия жидкости, а скоростью изменения сжатия во времени.

Жидкость, в которой полностью отсутствует внутреннее трение (т. е. вязкость), называют *идеальной*. В такой жидкости отсутствует теплообмен между различными ее участками, а тангенциальные и нормальные силы внутреннего трения не возникают. В идеальной жидкости существуют только силы нормального давления P (12.2), однозначно определяемые плотностью жидкости и ее температурой. Идеальная жидкость — абстракция, которой можно пользоваться на практике, если скорости изменения деформаций в жидкости малы. Движение идеальной жидкости в поле сил, характеризуемых объемной плотно-

стью f, т. е. силой, приходящейся на единицу объема жидкости, описывается *уравнением Эйлера*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{f} - \nabla P), \tag{13.4}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{v}$ — скорость, P — давление жидкости. Величина $-\nabla P dV$ есть сила, действующая на элемент объема dV жидкости со стороны окружающей его жидкости. Градиент $\nabla P \equiv \mathbf{grad} P$ определяется формулой (5.27), а слагаемое $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ имеет вид

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \tag{13.5}$$

Левая часть уравнения (13.4) есть ускорение частицы жидкости $d\mathbf{v}/dt$, а не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства. Это ускорение выражено через величины, относящиеся к этой неподвижной точке:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}. \tag{13.6}$$

Если жидкость находится в поле тяготения, то объемная плотность силы f имеет вид (12.20).

Уравнение Эйлера (13.4) определяет скорость жидкости v. Для полного описания состояния движущейся жидкости его необходимо дополнить двумя уравнениями, позволяющими определить ее плотность ρ и давление P. В качестве таких уравнений можно взять уравнение непрерывности для плотности потока жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \tag{13.7}$$

и уравнение непрерывности для плотности энтропии s, т. е. энтропии [21.3], отнесенной к единице массы жидкости:

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho s\, \mathbf{v}) = 0. \tag{13.8}$$

Здесь вектор j направлен вдоль направления движения жидкости, а его абсолютная величина равна количеству жидкости, протекающей в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно вектору скорости: $\rho s \mathbf{v}$ представляет собой *плотность потока энтропии*; операция дивергенции в уравнениях (13.7) и (13.8) определяется формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \tag{13.9}$$

где $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\nabla \cdot \mathbf{a}$ — скалярное произведение оператора набла (62.17) и вектора **a**.

Уравнение (13.7) выражает **закон сохранения вещества в гидродинамике**. Уравнение (13.8) связано с пренебрежением теплообменом между отдельными частями жидкости и учитывает постоянство энтропии для каждого участка идеальной жидкости при перемещении его в пространстве. Если энтропия одинакова во всех точках пространства, то уравнение (13.8) сводится к простому соотношению

$$s = \text{const}.$$

Уравнения движения в дифференциальной форме (13.4), (13.7) и (13.8) должны быть дополнены граничными условиями, которые накладывают ограничения на движение жидкости на ее границах. Так, идеальная жидкость не может проникнуть за границы занимаемого жидкостью объема, т. е. нормальная к неподвижной поверхности границы составляющая скорости жидкости должна обращаться в нуль: $v_n = 0$.

13.2. Стационарное движение идеальной жидкости

13.2.1. Уравнение Бернулли. При стационарном течении идеальной жидкости в поле консервативных сил вдоль любой линии тока выполняется условие

$$\rho\varepsilon + P = \text{const}, \tag{13.10}$$

где ρ — плотность, P — давление, ε — полная энергия, приходящаяся на единицу массы жидкости. Соотношение (13.10) называется *уравнением Бернулли* (1738). Оно справедливо как для сжимаемых, так и несжимаемых жидкостей. Это уравнение выполняется и для реальных жидкостей с малым внутренним трением. Константа в равенстве (13.10), вообще говоря, различна для разных линий тока. При движении жидкости в поле сил земного тяготения уравнение Бернулли (13.10) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}, \tag{13.11}$$

где v — скорость, h — высота данной точки на линии тока относительно некоторого произвольно выбранного уровня. Величину $\rho v^2/2$, равную кинетической энергии движущейся жидкости, называют *динамическим напором*. Согласно уравнению Бернулли (13.11) сумма динамического напора, давления, обусловленного весом столба жидкости высотой h, и давления, обусловленного сжатием жидкости, остается постоянной вдоль линии тока.

Следствия уравнения Бернулли (13.11).

1. Пусть P_1, v_1, h_1 и P_2, v_2, h_2 — давление, скорость и высота, относящиеся к двум различным точкам 1 и 2 одной и той же линии тока. Тогда

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2. \tag{13.12}$$

Если жидкость течет по наклонной трубе (рис. 13.2), то в соотношении (13.12) P_1, v_1, h_1 — давление, скорость потока жидкости и высота сечения S_1 относительно произвольно выбранного уровня, а P_2, v_2, h_2 — те же величины, но относящиеся к сечению S_2.

2. Для горизонтальных линий тока, соответствующих случаю, когда жидкость течет на одной и той же высоте, имеем

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2. \tag{13.13}$$

Отсюда следует, что давление там больше, где меньше скорость течения жидкости.

3. При вытекании струи жидкости из небольшого отверстия широкого открытого сосуда, считая скорость перемещения открытой поверхности сосуда равной нулю, получаем

$$\rho g h_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_2, \quad v = \sqrt{2gh}, \tag{13.14}$$

где h_1— высота открытой поверхности сосуда, h_2— высота отверстия, $h = h_1 - h_2$— высота поверхности сосуда над отверстием, v — ско-

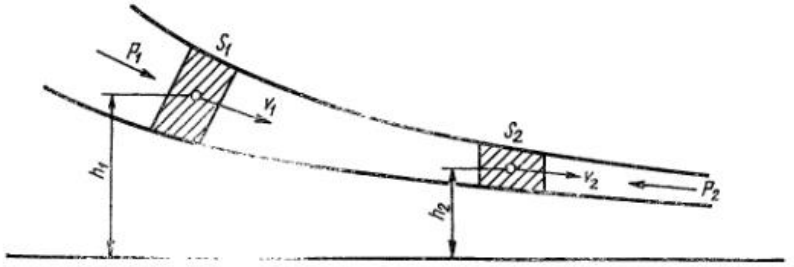


Рис. 13.2

рость истечения жидкости из отверстия. На рис. 13.3 штрихами выделена трубка тока, имеющая своими сечениями открытую поверхность в сосуде S_1 и отверстие S_2, через которое вытекает жидкость.

Формула (13.14), определяющая скорость вытекания жидкости из отверстия, называется **формулой Торричелли.** Согласно этой формуле скорость вытекания жидкости равна по величине скорости свободного падения тела с высоты, равной высоте столба жидкости [2.3.3].

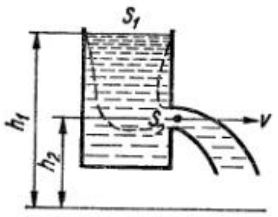


Рис. 13.3

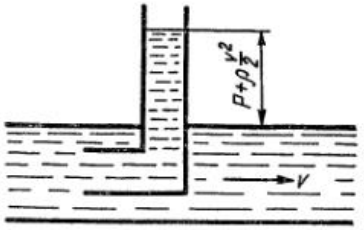


Рис. 13.4

Для реальных жидкостей скорость истечения меньше скорости v, определяемой формулой Торричелли. Она зависит от вязкости жидкости и от формы (обтекаемости) краев отверстия. При вытекании жидкости из сосуда на него действует сила, называемая *реакцией вытекающей струи*:

$$F = 2gh\rho S, \tag{13.15}$$

где S — площадь отверстия, через которую в единицу времени вытекает масса жидкости $m = \rho v S$.

13.2.2. Трубка Пито. Величина $P + \rho v^2/2$ называется *полным напором*. Для его измерения используют трубку Пито (1732), представляющую собой изогнутую под прямым углом трубку. Ее помещают

в жидкость открытым концом навстречу потоку (рис. 13.4). Высота столба жидкости, устанавливающаяся в трубке, определяет максимальное давление в жидкости, равное полному напору.

13.3. Ламинарное течение жидкости

13.3.1. Вязкость. *Ламинарным (слоистым)* называется такое течение жидкости, при котором частицы жидкости движутся вдоль прямолинейных траекторий, не перемешиваясь. При ламинарном течении жидкость может быть представлена в виде слоев, которые скользят один относительно другого. Такое течение стационарно. При движении слоев жидкости с различными скоростями между ними возникают касательные силы, называемые *силами внутреннего трения* $F_{тр}$ или *силами вязкости*:

$$F_{тр} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta d} S, \quad F_{тр} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S, \tag{13.16}$$

где Δv — относительная скорость слоев жидкости, Δd — расстояние между ними, S — площадь соприкосновения слоев. Коэффициент η называется *коэффициентом внутреннего трения* или *динамической вязкостью*. Величина $|dv/dz|$ представляет собой модуль градиента модуля скорости и характеризует изменение скорости в направлении z, перпендикулярном слоям жидкости (рис. 13.5). Физический смысл η дан в [15.5.4].

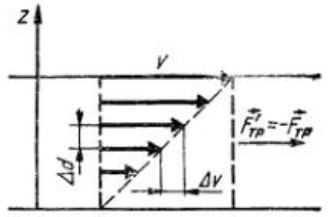


Рис. 13.5

Единицей вязкости η в СИ является паскаль на секунду:

$$[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

Динамическая вязкость η жидкостей уменьшается с повышением температуры, а газов увеличивается. Это указывает на различие механизма внутреннего трения в этих средах.

13.3.2. Формула Пуазейля. При ламинарном течении отдельные слои жидкости движутся с различными скоростями. У стенок прямолинейной трубы скорость течения жидкости равна нулю, а в центре трубы (на оси) она максимальна. С расстоянием r от оси трубы эта скорость изменяется по параболическому закону

$$v(r) = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \tag{13.17}$$

где R — радиус трубы, v_0— скорость жидкости на оси трубы, определяемая формулой

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l} R^2. \tag{13.18}$$

Здесь $(P_1 - P_2)$ — разность давлений на концах трубы, l — длина трубы, η — динамическая вязкость жидкости. Поток жидкости Q, т. е. объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени, определяется **формулой Пуазейля** (1840)

$$Q = \frac{(P_1 - P_2)\,\pi R^4}{8\eta l}. \tag{13.19}$$

Количество жидкости (массы), протекающее за единицу времени через поперечное сечение трубы:

$$m = \rho Q, \tag{13.20}$$

где ρ — плотность жидкости.

Кинетическая энергия, переносимая потоком жидкости через поперечное сечение трубы за единицу времени:

$$T = \frac{1}{4} Q v_0^2, \tag{13.21}$$

где скорость v_0 определяется формулой (13.18).

Работа сил внутреннего трения

$$A = -\frac{4\eta v_0 l}{\rho R^2} Q. \tag{13.22}$$

Силами внутреннего трения (вязкостью) можно пренебречь, если выполняется условие

$$|A| \ll T \text{ или } \frac{v_0 R^2}{16 \nu l} \gg 1, \tag{13.23}$$

где величина $\nu = \eta/\rho$ называется *кинематической вязкостью*. Формулу Пуазейля используют для определения динамической вязкости η. В табл. 13.1 приведены значения динамической вязкости для некоторых жидкостей и газов.

Таблица 13.1. **Динамическая вязкость η некоторых жидкостей и газов при $T = 20$ °C и $P = 101{,}3$ кПа**

Жидкость	η, мПа · с	Газ	η, мПа · с
Ацетон	0,322	Водород	0,0088
Бензол	0,648	Аммиак	0,00995
Бензин	0,649	Метан	0,0108
Вода	1,005	Оксид углерода (IV)	0,0147
Этиловый спирт	1,20	Азот	0,0175
Ртуть	1,554	Оксид углерода (II)	0,0177
Масло техническое	30—5000	Воздух	0,0182
Глицерин	830—1480	Гелий	0,0196
Смола	$3 \cdot 10^{10}$	Кислород	0,0202

13.3.3. Закон Стокса. При движении тела шарообразной формы в жидкости возникает сила внутреннего трения (сила вязкости) $F_{тр}$, которая в предположении ламинарного обтекания тела жидкостью определяется законом Стокса (1851)

$$F_{тр} = 6\pi\eta R v, \tag{13.24}$$

где R — радиус шара, v — скорость шара относительно жидкости. Сила вязкости (13.24) есть испытываемая шаром сила сопротивления при его движении в жидкости

13.4. Турбулентное течение

Турбулентным называется такое течение жидкости (газа), при котором ее (его) скорость и давление быстро и нерегулярно изменяются со временем. При турбулентном течении газа нерегулярным образом изменяются также его плотность и температура. Жидкость (газ) при этом интенсивно перемешивается, течение является нестационарным. При определенных условиях ламинарное течение становится неустойчивым. Оно переходит в турбулентное при увеличении скорости движения жидкости (газа) или при увеличении поперечных размеров потока. Характер течения жидкости (газа) зависит от значения безразмерной величины

$$\mathrm{Re} = \rho v_0 l/\eta = v_0 l/\nu, \tag{13.25}$$

называемой *числом Рейнольдса* (1883). Здесь ρ — плотность жидкости (газа), v_0 — средняя или характерная скорость потока, l — характерный размер, указывающий поперечный размер трубы, по которой течет жидкость, или размер обтекаемого жидкостью тела, η — динамическая вязкость, ν — кинематическая вязкость.

При малых значениях числа Рейнольдса течение является ламинарным, а при больших — турбулентным. Значение числа Re, при котором течение становится турбулентным, называется критическим значением. Так, для трубы круглого сечения с l, равным его радиусу, $\mathrm{Re} \simeq 1000$.

13.5. Законы гидродинамического подобия

13.5.1. Физический смысл чисел Рейнольдса и Фруда. Характер течения различных жидкостей (газов) в трубах различных сечений, или обтекающих различные тела, зависит от значения числа Рейнольдса (13.25). Одинаковые по характеру течения имеют одинаковые значения Re.

При стационарном движении несжимаемой жидкости согласно **закону подобия для скорости потока** $\mathbf{v}$ при двух различных течениях одного и того же типа (например, обтекании тел заданной формы) величины $\mathbf{v}/v_0$ являются одинаковыми функциями отношения $\mathbf{r}/l$, если число Рейнольдса (13.25) для этих течений одинаковое:

$$\frac{\mathbf{v}}{v_0} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{Re}\right), \tag{13.26}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор заданной точки жидкости, l — характерный размер, v_0 — характерная скорость потока. Течения, которые могут быть получены одно из другого изменением масштаба скоростей и координат, называются *подобными*. **Закон подобия для давления в жидкости (газе)** P имеет вид, аналогичный (13.26):

$$P = \rho v_0^2 f\left(\frac{\mathbf{r}}{l}, \mathrm{Re}\right), \tag{13.27}$$

где ρ — плотность жидкости (газа).

Закон подобия для силы сопротивления F, действующей на обтекаемое тело с характерным размером l, описывается соотношением

$$F = \rho v_0^2 l^2 f(\mathrm{Re}). \tag{13.28}$$

Здесь обозначения те же, что и в (13.26), (13.27).

Формулы (13.26) — (13.28) справедливы, если влиянием силы тяжести на движение жидкости можно пренебречь. В противном случае законы подобия имеют вид

$$\frac{\mathbf{v}}{v_0} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{F}\right),\quad \frac{P}{\rho v_0^2} = f\left(\frac{\mathbf{r}}{l},\ \mathrm{Re},\ \mathrm{F}\right),\qquad (13.29)$$

$$\frac{F}{\rho v_0^2 l^2} = f\,(\mathrm{Re},\ \mathrm{F}),$$

где безразмерная величина

$$\mathrm{F} = \frac{v_0^2}{gl} \qquad (13.30)$$

называется *числом Фруда* (1870). Здесь g — ускорение свободного падения. Согласно (13.29) течения подобны, если они имеют одинаковые числа Re и F.

Физический смысл чисел Рейнольдса и Фруда:

1) по порядку величины число Re равно отношению кинетической энергии жидкости, $T \sim \frac{1}{2}\rho v_0^2 l^3$, к потере этой энергии, равной работе A сил вязкости на характерной длине l, $A \sim \eta v_0 l^2$:

$$\mathrm{Re} \sim T/A \sim \rho l v_0/\eta; \qquad (13.31)$$

2) по порядку величины число F равно отношению кинетической энергии жидкости T к ее приращению, равному работе A' сил тяжести на характерной длине l, $A' \sim \rho g l^4$:

$$\mathrm{F} \sim T/A' \sim \frac{v_0^2}{gl}. \qquad (13.32)$$

Согласно (13.31) при больших числах Рейнольдса главную роль играет инерция, а при малых — вязкость. Согласно (13.32) при больших числах Фруда главную роль играет инерция, а при малых — тяготение. Если число Re велико, а число F мало, то движение жидкости в основном определяется инерцией и тяготением, т. е малыми вариациями Re в различных течениях можно пренебречь и считать их подобными. При малых числах Re и больших числах F движение жидкости в основном определяется инерцией и вязкостью. В этом случае влияние тяготения можно не учитывать.

Следует иметь в виду, что числа Re (13.25) и F (13.30) выражаются через характерные величины, которые определяются недостаточно четко и однозначно. Поэтому сами числа Re и F определены лишь по порядку величины.

13.5.2. Числа Маха и Струхаля. В случае нестационарного движения жидкости ее течение характеризуется двумя дополнительными безразмерными величинами

$$\mathrm{M} = v_0/c,\ \mathrm{S} = v_0\tau/l, \qquad (13.33)$$

где v_0— характерная скорость потока, l — характерный размер, c — скорость звука в данной жидкости, τ —характерный интервал времени, за который происходит изменение течения. Число M называется *числом Маха*, а число S — *числом Струхаля*. В общем случае подобие движений справедливо при равенстве чисел Re, F, M и S.

Законы подобия дают возможность проводить экспериментальные исследования сложных процессов обтекания тел жидкостями или газами, используя их уменьшенные геометрически подобные модели.

13.6. Лобовое сопротивление

13.6.1. Парадокс Даламбера. Задача о силовом воздействии потока жидкости (газа) на находящееся в ней тело эквивалентна задаче нахождения силы, действующей на тело, движущееся в неподвижной жидкости (газе). Эту силу можно разложить на две составляющие: в направлении потока $\mathbf{F}_\parallel$ и перпендикулярную потоку $\mathbf{F}_\perp$. Сила $\mathbf{F}_\parallel$ называется *лобовым сопротивлением*, а $\mathbf{F}_\perp$ — *подъемной силой*. Подъемная сила $\mathbf{F}_\perp$ может быть направлена как в сторону увеличения высоты тела над заданным уровнем, так и в сторону ее уменьшения (как, например, при взлете и посадке самолета). Лобовое сопротивление равно сумме двух сил: силы вязкости и силы, обусловленной разностью давлений потока на переднюю и заднюю поверхность тела. Для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости имеет место **парадокс Даламбера** (1744): *при равномерном движении тела в идеальной несжимаемой жидкости, или, что эквивалентно, при ее стационарном течении, лобовое сопротивление равно нулю*: $\mathbf{F}_\parallel = 0$. Этот результат справедлив только для идеальных жидкостей. В реальных жидкостях сила $\mathbf{F}_\parallel$ отлична от нуля. Движущееся тело всегда увлекает за собой часть жидкости. Это легко обнаружить при ускоренном движении: для сообщения ускорения телу в жидкости требуется большая сила, чем для сообщения ему такого же ускорения в пространстве без жидкости. Разность этих сил идет на ускорение увлекаемой телом массы жидкости.

13.6.2. Коэффициент лобового сопротивления. Пусть S — площадь наибольшего сечения неподвижного тела в плоскости, перпендикулярной направлению потока, движущегося со скоростью v_0 (на бесконечно большом расстоянии от тела). Тогда лобовое сопротивление $F_\parallel$ в случае стационарного потока несжимаемой жидкости (газа) определяется формулой

$$F_\parallel = c\,\frac{\rho S}{2}\,v_0^2, \qquad (13.34)$$

где ρ — плотность жидкости, безразмерный коэффициент c называется *коэффициентом лобового сопротивления*.Он является функцией числа Рейнольдса (13.25): $c = c\,(\mathrm{Re})$ и зависит как от формы тела, так и его ориентации по отношению к потоку. Числовые значения коэффициентов лобового сопротивления определяют экспериментально. В табл. 13.2 приведены значения c для некоторых тел.

Мощность P, необходимая телу при его движении против потока, определяется формулой

$$P = F_\parallel v_0 = c\,\frac{\rho S}{2}\,v_0^3. \qquad (13.35)$$

Она пропорциональна кубу скорости стационарного потока жидкости (газа) v_0. При больших числах Re (13.25) лобовое сопротивление обусловлено главным образом разностью давлений перед телом и за ним. При малых числах Re (13.25), $\mathrm{Re} \ll 1$, лобовое сопротивление определяется в основном вязкостью и коэффициент лобового сопротивления c обратно пропорционален числу Re:

$$c = A/\mathrm{Re}, \qquad (13.36)$$

Таблица 13.2. Коэффициент лобового сопротивления c для некоторых тел

Тело	c
Тело обтекаемой формы	0,05
Шар	0,1—0,4
Автомобиль	0,4
Тонкая пластинка, перпендикулярная направлению потока	1,11

где A — безразмерная константа, которая зависит от формы тела и его ориентации.

Одной из физических причин появления лобового сопротивления при стационарном течении жидкости является нарушение непрерывности потока. Для непрерывного потока жидкости, обтекающей цилиндр или шар, линии тока имеют вид, предетавленный на рис. 13.6. На рис. 13.7 показан случай отрыва течения от тела. В области, ограниченной условной линией $BCDE$, где поддерживаетея постоянное давление P_0, жидкость покоится. Давление на поверхности тела вдоль линии CD, называемой линией отрыва, равно P_0. Оно меньше давления в точке A. Неравная нулю равнодействующая этих сил давления и приводит к появлению лобового сопротивления [13.8].

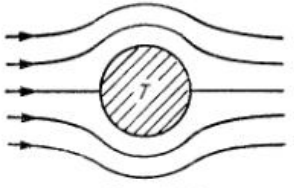


Рис. 13.6

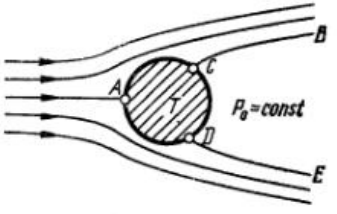


Рис. 13.7

13.7. Потенциальное и вихревое движения

Движение жидкости называется *потенциальным*, если интеграл

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \oint_C v_r ds \qquad (13.37)$$

равен нулю: $\Gamma = 0$, и *вихревым*, если $\Gamma \neq 0$. Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ — поле скоростей [13.1.1] в фиксированный момент времени, $d\mathbf{r}$ — элемент пути, касательный в любой точке к замкнутой кривой C, $ds = |d\mathbf{r}|$ — длина бесконечно малого элемента пути $d\mathbf{r}$, v_r — проекция скорости $\mathbf{v}$ на направление вектора $d\mathbf{r}$ (рис. 13.8). Интегрирование в (13.37) выполняется вдоль замкнутой кривой (контура) C, проведенной в пространстве, заполненном текущей жидкостью таким образом, что непрерывной деформацией эта кривая может быть стянута в точку. Криволинейный интеграл (13.37) называется *циркуляцией вектора скорости* $\mathbf{v}$ *вдоль замкнутой кривой* C. Если замкнутый контур C проведен вокруг тела, обтекаемого жидкостью, то в общем случае $\Gamma \neq 0$. При потенциальном течении циркуляция Γ будет одна и та же для всех контуров, обходящих тело один раз. Потенциальное течение с $\Gamma \neq 0$ в этом случае называется *потенциальным течением с циркуляцией*.

Если движение жидкости потенциально, то скорость потока $\mathbf{v}$ может быть представлена в виде градиента (см. (5.27)) некоторой функции φ, называемой *потенциалом скоростей*:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi. \qquad (13.38)$$

Всякое течение идеальной жидкости под действием консервативных сил является потенциальным.

Вихревое движение жидкости характеризуют *ротором* (или *вихрем*) скорости $\mathbf{v}$, определяемым формулой [25.4.2]

$$\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{v} = \lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{\Gamma}{\Delta S}\right), \quad \operatorname{rot}\mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v}, \qquad (13.39)$$

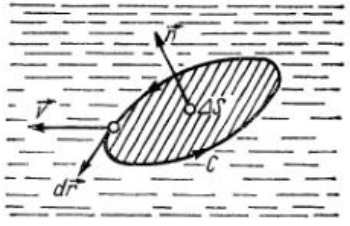


Рис. 13.8

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к площадке ΔS, охваченной контуром C, вдоль которого вычисляется циркуляция Γ (13.37) (рис. 13.8). Выражение $\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{v}$ есть проекция вектора $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ на направление $\mathbf{n}$. В частности, если $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — поле скоростей точек жидкости, вращающихся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \omega(\mathbf{n} \times \mathbf{r}), \qquad (13.40)$$

то $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ имеет в каждой точке направление оси вращения, а длина его равна удвоенной угловой скорости ω:

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\omega\mathbf{n}. \qquad (13.41)$$

Величина $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ является вектором. Линии тока векторного поля $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ называют *линиями вихря*. Если в некоторой области G ротор скорости равен нулю: $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$, то поле скоростей является безвихревым в G.

Теорема Стокса: *циркуляция* Γ (13.37), *записанная в виде криволинейного интеграла от вектора* $\mathbf{v}$, *может быть представлена в виде поверхностного интеграла от ротора* $\mathbf{v}$:

$$\oint_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \qquad (13.42)$$

где $d\mathbf{S}$ есть элемент площади S, ограниченной замкнутой кривой C. Согласно (13.42) циркуляция Γ описывает вихревое движение жидкости (газа) вокруг тела, обтекаемого потоком.

13.8. Подъемная сила

13.8.1. Формула Жуковского—Кутта. Вблизи поверхности тела, обтекаемого потоком жидкости, силы вязкости играют существенную роль даже при больших числах Рейнольдса (13.25) [13.5.1]. Эти силы вызывают прилипание жидкости к поверхности тела. Вблизи его поверхности по величине они оказываются примерно равными (одного порядка) силам разности давлений на переднюю и заднюю поверхности

тела (относительно направлению потока). Приповерхностный слой жидкости называется *пограничным слоем*. Его толщина δ определяется формулой

$$\delta \simeq \sqrt{\frac{\eta l}{\rho v_0}} = \frac{l}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \qquad (13.43)$$

где l — характерный размер тела, Re — число Рейнольдса (13.25). При $l = 0{,}1$ м, $v_0 = 30$ м/с, $\nu = 0{,}15 \cdot 10^{-4}$ м²/с (кинематическая вязкость воздуха при $t = 20$ °С) имеем $\mathrm{Re} = 2 \cdot 10^5$ и $\delta \simeq 0{,}2 \times \times 10^{-3}$ м $= 0{,}2$ мм.

Вследствие действия сил вязкости частицы жидкости движутся в пограничном слое медленнее, чем в потоке за его пределами. Скорость жидкости здесь изменяется от нуля до скорости невозмущенного потока. В пограничном слое, как и во всем потоке, существует разность давлений, обусловливающая ускорение (замедление) потока. В передней части тела скорости частиц жидкости в пограничном слое увеличиваются, и они движутся по

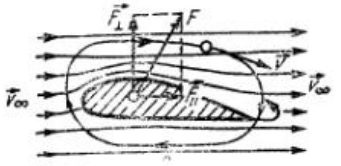


Рис. 13.9

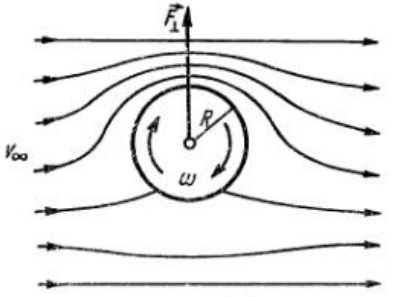


Рис. 13.10

поверхности тела, несмотря на действие сил вязкости. В задней части тела в пограничном слое частицы жидкости движутся медленнее, чем за его пределами, и при малых скоростях потока могут остановиться и начать движение в обратном направлении по отношению к основному потоку жидкости. Возникнув, возвратное движение захватывает все большие и большие массы жидкости. Происходит отрыв течения от тела [13.6.2], появляются вихри [13.7].

Возникновение подъемной силы [13.6] связано с явлением отрыва течения от тела и возникновением вихрей вблизи его задней поверхности. Зависимость величины подъемной силы $F_\perp$ от циркуляции скорости Γ (13.37) для крыла бесконечного размаха и длины l, движущегося равномерно в идеальной жидкости, описывается **формулой Жуковского — Кутта** (1904)

$$F_\perp = -l\rho\Gamma v_\infty, \qquad (13.44)$$

где Γ — циркуляция вектора скорости жидкости $\mathbf{v}$ относительно крыла по контуру C, охватывающему это крыло, v_∞ — горизонтальная составляющая невозмущенного потока, ρ — плотность жидкости (рис. 13.9).

Круговое движение потока вокруг тела ускоряет движение жидкости над крылом и замедляет его под крылом. В результате согласно уравнению Бернулли (13.13) давление над крылом уменьшается, а под крылом возрастает. Перепад этих давлений и обеспечивает возникновение силы $\mathbf{F}$ (рис. 13.9). Выбором профиля крыла добиваются наибольшей величины подъемной силы $\mathbf{F}_\perp$ и возможно меньшей силы лобового сопротивления $\mathbf{F}_\parallel$.

13.8.2. Эффект Магнуса. На неподвижный цилиндр, обтекаемый равномерным потоком, действует только лобовое сопротивление. *При вращении цилиндра вокруг его оси симметрии возникает подъемная сила* $\mathbf{F}_\perp$, *перпендикулярная направлению потока* (рис. 13.10). Этот эффект называется **эффектом Магнуса** (1852). Физическое объяснение эффекта Магнуса состоит в следующем. В результате вращения цилиндра образуется пограничный слой, движение жидкости (газа) в котором является вихревым. Отрывающиеся части пограничного слоя приводят к возникновению циркуляции скорости в направлении вращения цилиндра. Другими словами, вращающийся цилиндр увлекает за собой прилегающие к его поверхности частицы жидкости. В пограничном слое жидкость получает вращательное движение, дополнительное к поступательному движению потока. Там, где эти два движения складываются, скорость потока возрастает, а где вычитаются — уменьшается. В соответствии с уравнением Бернулли (13.13) при этом в первом случае давление падает, а во втором — увеличивается. Разность этих давлений и сообщает вращающемуся цилиндру силу $F_\perp$, перпендикулярную потоку.

Для цилиндра длиной l и радиусом R, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω в жидкости (газе) с постоянной плотностью ρ и скоростью течения v_∞, подъемная сила $F_\perp$ (13.44) равна

$$F_\perp = l\rho v_\infty (2\pi\omega R^2), \qquad (13.45)$$

где $\Gamma = -2\pi\omega R^2$ — циркуляция скорости.

Подъемная сила возникает при вращении не только цилиндра, но и тела произвольной формы.

ЧАСТЬ II

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Глава IV

Молекулярная физика

14. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

14.1. Задачи молекулярной физики

Молекулярная физика есть наука о строении, физических свойствах и агрегатных состояниях вещества, рассматриваемого как совокупность большого количества молекул, которые взаимодействуют между собой и находятся в тепловом движении. *Молекулой* называется наименьшая частица вещества, сохраняющая все его химические свойства. *Тепловым движением* молекул называют их хаотическое движение, т. е. беспорядочное движение, не имеющее какого-либо преимущественного направления. Интенсивность хаотического движения молекул зависит от температуры тела [14.2.4]. Молекула может состоять из одного или нескольких атомов [XV] одинаковых или различных химических элементов. Молекула электрически нейтральна. Она содержит равное количество положительно и отрицательно заряженных частиц [21 1.1]. Примеры молекул: H_2, O_2, CO, CO_2, NO, NH_3, H_2SO_4, NaOH, $Ca(OH)_2$, CH_3COOH, $C_6H_4(COOH)_2$, HCN, H_2O и др.

Основными задачами молекулярной физики являются: 1) исследование строения вещества и его изменения под влиянием внешних воздействий; 2) изучение явлений переноса —диффузии, теплопроводности, внутреннего трения; 3) изучение фазовых превращений — испарения и конденсации, плавления и кристаллизации; 4) исследование критических состояний вещества; 5)исследование поверхностных явлений на границах раздела фаз.

Макроскопические свойства вещества, которые описывает молекулярная физика, считаются независящими от внутреннего строения молекул.

14.2. Основные физические величины

Состояние данного вещества характеризуют физическими величинами, которые называют *параметрами состояния*. К ним относятся: давление, объем, удельный объем, температура, молекулярная масса и др.

14.2.1. Давление. *Давлением* P называют нормальную составляющую силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которую эта сила действует:

$$P = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S} = \frac{dF_n}{dS}, \qquad (14.1)$$

где ΔF_n — сила, перпендикулярная участку поверхности вещества площадью ΔS [12.1].

14.2.2. Удельный объем. *Удельным объемом* v называют величину, обратную плотности ρ [3.2]:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{dV}{dm}, \qquad (14.2)$$

где dV — бесконечно малый элемент объема, содержащий массу вещества dm. Если вещество однородно, то удельный объем равен объему тела, приходящемуся на единицу его массы:

$$v = \frac{V}{m}, \qquad (14.3)$$

где V — объем тела, m — масса его вещества.

14.2.3. Моль. *Молекулярной массой* μ вещества называется безразмерная величина, равная отношению массы его молекулы к 1/12 массы атома ^{12}C. Масса, равная 1/12 массы ядра атома ^{12}C, называется *атомной единицей массы* (а. е. м.). Количество вещества, содержащее столько молекул, сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода ^{12}C, называется *молем*. По определению в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул. Это число называется *числом Авогадро* [64.2]

$$N_A = 6{,}022045\,(31) \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}. \qquad (14.4)$$

Масса моля называется *молярной массой* M. Она равна (в кг)

$$M = N_A \mu \cdot 1\ \text{а. е. м.} \equiv N_A m_0, \qquad (14.5)$$

где N_A — число Авогадро, μ — молекулярная масса. Атомная единица массы, выраженная в килограммах:

$$1\ \text{а. е. м.} = 1{,}6605655\,(86) \cdot 10^{-27}\ \text{кг},\quad 1\ \text{кг} = 6{,}022045 \cdot 10^{26}\ \text{а. е. м.} \qquad (14.6)$$

Величина $m_0 = \mu \cdot 1$ а. е. м. есть масса молекулы вещества, выраженная в килограммах. Молярная масса M, выраженная в граммах, численно равна молекулярной массе μ:

$$M = 0{,}001\ \mu\ \text{кг/моль} = \mu\ \text{г/моль}, \qquad (14.7)$$

так как $N_A \cdot 1$ а. е. м. $= 0{,}001$ кг/моль $= 1$ г/моль.

Моль есть единица количества вещества, используемая в молекулярной физике. Так как отдельные молекулы различных веществ имеют разную массу, то масса в данном случае не является мерой количества вещества.

Объем одного моля называется *молярным объемом*

$$V_M = M/\rho, \qquad (14.8)$$

где M — молярная масса, ρ — плотность вещества. Число молей ν вещества с массой m и число его молекул N определяются формулами

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{V}{V_M},\quad N = \nu N_A = \frac{V}{V_M} N_A = V N_L, \qquad (14.9)$$

где N_L — число Лошмидта (16.2).

Единицами молярной массы M и молярного объема V_M в СИ являются:

$$[M] = \text{кг/моль}, \quad [V_M] = \text{м}^3/\text{моль}.$$

14.2.4. Температура. *Температурой* называется физическая величина, которая характеризует степень нагретости вещества. Мерой температуры является средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул. Если соприкасающиеся тела не обмениваются энергией путем теплообмена, т. е. находятся в состоянии теплового равновесия, то говорят, что эти тела имеют одинаковую температуру. Если привести в соприкосновение два или больше тел с различными значениями средней кинетической энергии молекул, то через некоторое время эти значения станут одинаковыми. При этом происходит переход энергии от тела с более высоким значением средней энергии к телу с более низким ее значением. Телу, которое отдает свою энергию, приписывают более высокую температуру по сравнению с температурой тела, которое эту энергию принимает.

Физические свойства тел зависят от температуры. Те из них, которые можно непосредственно измерить, могут быть использованы для количественного определения температуры (объем тела, электрическое сопротивление и т. д.). В основе процесса измерения температуры лежит свойство установления состояния теплового равновесия системы тел. Тело, которое служит для измерения температуры, называют *термометрическим телом*. Термометрическое тело, снабженное проградуированной по определенному правилу шкалой температур, называют *термометром*. Физическая величина, служащая индикатором температуры, называется *термометрической величиной*. В ртутных термометрах, например, ртуть является термометрическим телом, а объем — термометрической величиной. Правила, по которым проводится градуировка шкалы термометра, определяются соображениями простоты. Температурная шкала строится по двум реперным точкам, разности температур которых приписывают определенное (произвольное) значение. В качестве реперных точек принимают температуры перехода химически чистых веществ из одного агрегатного состояния [15.2] в другое, например, температуры плавления льда t_0 и кипения воды $t_к$. По определению разность $t_к - t_0 = 100^\circ$ (градусам). Если термометрической величиной является объем, то температура t определяется формулой (в градусах Цельсия)

$$t = \frac{V - V_0}{V_к - V_0} \cdot 100^\circ, \qquad (14.10)$$

где V, V_0, $V_к$ — объемы термометрического тела при измеряемой температуре, температурах плавления льда и кипения воды соответственно. Для однозначного определения температурной шкалы необходимо кроме выбора правила градуировки условиться также о выборе термометрического тела и термометрической величины. Шкалу температур, установленную с использованием уравнения состояния идеального газа (17.3), где в качестве термометрического тела выбран идеальный газ, называют *идеальной газовой шкалой температур*. Шкала называется *эмпирической шкалой температур*, если она проградуирована в соответствии с уравнением состояния идеального газа (17.3) с водородом в качестве термометрического тела.

14.3. Шкалы температур

В настоящее время различают две температурные шкалы: *термодинамическую температурную шкалу и международную практическую температурную шкалу* 1968 г. (МПТШ — 1968). Обе эти шкалы можно градуировать и в кельвинах (К) и в градусах Цельсия (°С). Соотношение между температурами по любой из этих шкал

$$T = t + 273{,}15, \qquad (14.11)$$

где T — абсолютная температура, К; t — температура, °С. Размер кельвина и градуса Цельсия один и тот же для разности температур.

В термодинамической температурной шкале или абсолютной в качестве одной из реперных точек взята температура

$$T = T_0 \equiv 0\text{К} = -273{,}15\ ^\circ\text{С}, \qquad (14.12)$$

названная *абсолютным нулем*. Абсолютный нуль есть такая температура, при которой в веществе полностью отсутствует тепловое движение молекул. Никакое вещество нельзя охладить до температуры ниже $T_0 = 0$К. Второй реперной точкой принята тройная точка равновесия воды (в твердой, жидкой и газообразной фазах) [22.1.2]. Для этой точки температура составляет 273,16 К. При таком выборе реперных точек разность температур между точкой кипения воды (при нормальном давлении) и точкой плавления льда с достаточной точностью равна 100 К. Единицу *абсолютной температуры*, т. е. температуры, отсчитанной от абсолютного нуля (14.12), называют *кельвином*.

Иногда для измерения температуры используют шкалы Фаренгейта: $t_0 = 32\ ^\circ\text{F}$, $t_к = 212\ ^\circ\text{F}$ и Реомюра: $t_0 = 0\ ^\circ\text{R}$, $t_к = 80\ ^\circ\text{R}$. Здесь t_0 и $t_к$ — реперные точки, t_0 — температура плавления льда, $t_к$ — температура кипения воды. Между температурами, выраженными в градусах Цельсия (°С), Фаренгейта (°F) и Реомюра (°R), существует простая связь:

$$t(^\circ\text{F}) = \frac{9}{5}\, t(^\circ\text{C}) + 32, \quad t(^\circ\text{R}) = \frac{4}{5}\, t(^\circ\text{C}). \qquad (14.13)$$

Единицей температуры в СИ является кельвин (К):

$$[T] = \text{К}.$$

Абсолютная шкала температур является основной температурной шкалой в физике [21.2.3].

14.4. Уравнение состояния вещества

Состояние заданной массы вещества определяется тремя параметрами: давлением P, объемом V и температурой T. Между этими параметрами существует закономерная связь.

Уравнением состояния вещества называют соотношение, определяющее связь между P, V и T. В общем случае оно может быть записано в виде условия

$$F(P, V, T) = 0. \qquad (14.14)$$

Явный вид функции F зависит от свойств вещества (силы взаимодействия молекул, плотности и т. п.) [17.2].

14.5. Методы молекулярной физики

При теоретическом исследовании вещества различают два метода — статистический и термодинамический. В основу *статистического метода* изучения законов теплового движения молекул вещества положены методы математической статистики.

Термодинамический метод не связан с конкретным представлением о внутреннем строении вещества и характере движения составляющих его частиц. Этот метод использует макроскопические характеристики изучаемых веществ и основан на количественных соотношениях, описывающих превращения энергии в данной массе вещества. Эти соотношения установлены эмпирическим путем и называются началами термодинамики [20; 21]. Термодинамическим методом можно пользоваться при анализе самых общих закономерностей разнообразных явлений.

15. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

15.1. Молекулярно-кинетическая теория и статистическая физика

Молекулярно-кинетическая теория объясняет непосредственно наблюдаемые на опыте свойства макроскопических тел: давление, температуру, распределение кинетической энергии по степеням свободы, броуновское движение, теплоемкость, законы распределения молекул по скоростям, явления переноса и др. Эти свойства она объясняет как результат движения и взаимодействия большого числа молекул, из которых состоят все тела. В основе теории лежат **три основных положения:** 1. *Все вещества состоят из огромного количества частиц — молекул, атомов и ионов.* Линейные размеры этих частиц имеют порядок 10^{-10} м. Ранее это значение использовалось в качестве единицы длины и называлось ангстремом:

$$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \text{м}. \qquad (15.1)$$

2. *Молекулы (атомы и ионы) находятся в тепловом движении* [14.1]. Средняя кинетическая энергия этого движения определяет температуру тела. 3. *Между молекулами (атомами и ионами) действуют силы взаимодействия, которые в зависимости от расстояния между частицами будут силами притяжения или отталкивания.*

Молекулярно-кинетическая теория использует статистические методы, которые описывают движения в терминах средних величин. Она изучает вероятностные закономерности макроскопических тел. В классической теории считается, что отдельные молекулы движутся в соответствии с законами механики Ньютона [3.2; 3.3; 3.4]. При взаимодействии молекул выполняются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса [3.5.1; 3.5.2; 5.2.6].

Молекулы считаются различными, т. е. в принципе можно проследить за траекторией движения отдельной молекулы, изменением ее импульса и т. д.

Молекулярно-кинетическая теория, дополненная законами механики (классической или квантовой), составляет существо *статистической физики* (классической или квантовой). В статистической физике изучают равновесные состояния и обратимые процессы, т. е. процессы, при которых система проходит последовательно через равновесные состояния [15.5.1].

15.2. Агрегатные состояния вещества

Под *агрегатным состоянием* веществ понимают их физическое состояние. Вещества могут находиться в трех агрегатных состояниях: *твердом, жидком, газообразном*. Агрегатное состояние характеризуется вполне определенной внутренней структурой вещества и его определенными свойствами. В газообразном состоянии вещество заполняет любой предоставленный ему объем и называется *газом*. В жидком состоянии вещество принимает форму сосуда, в который оно помещено, образуя поверхность, или форму капли, и называется *жидкостью* [11.2]. В твердом состоянии вещество сохраняет любую форму и объем (без воздействия внешних сил) и называется *твердым телом*. Возможные переходы из одного агрегатного состояния в другое показаны на рис. 15.1. Физическую природу изменения агрегатного состояния вещества объясняет термодинамика [22].

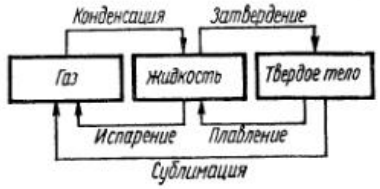


Рис. 15.1

15.3. Силы межмолекулярного взаимодействия

15.3.1. Силы Ван-дер-Ваальса. Силы взаимодействия молекул по своей природе являются электрическими силами, действующими между электрически заряженными частицами (электронами, атомными ядрами), входящими в состав атомов, из которых состоят молекулы. Межмолекулярное взаимодействие возникает как эффективное взаимодействие этих заряженных частиц. Так как молекулы содержат много заряженных частиц, то силы взаимодействия их можно вычислить лишь приближенно. Для различных веществ эти силы различны.

Приближенно можно считать, что силы взаимодействия молекул зависят от расстояния r между центрами масс молекул. На расстояниях r порядка 10^{-9} м действуют силы притяжения, а на расстояниях порядка 10^{-10} м — силы отталкивания. Принято считать силы притяжения отрицательными, а силы отталкивания — положительными. Сила межмолекулярного взаимодействия F является равнодействующей сил притяжения и отталкивания (рис. 15.2). Из опыта и теории следует, что сила $F(r)$ имеет вид

$$F(r) = -\frac{a}{r^3} \text{ при } r > r_0,$$
$$F(r) = 0 \text{ при } r = r_0, \qquad (15.2)$$
$$F(r) = \frac{b}{r^m},\ 9 < m < 15 \text{ при } r < r_0.$$

Значение $r = r_0$, при котором силы притяжения и отталкивания взаимно уравновешиваются, определяет наиболее устойчивое расположение взаимодействующих молекул. Значения коэффициентов a и b в (15.2) зависят от структуры молекул. Согласно (15.2) силы отталкивания ($r < r_0$) убывают быстрее сил притяжения ($r > r_0$) и могут играть роль только при непосредственном сближении молекул. По этой причине простая модель, в которой молекулы считаются твердыми шарами, в ряде практических случаев дает верные результаты. Силы притяже-

ния, убывающие обратно пропорционально седьмой степени расстояния ($F(r) \sim r^{-7}$ при $r > r_0$), называют *силами Ван-дер-Ваальса*.

15.3.2. Потенциальная энергия. Взаимодействующие молекулы обладают *потенциальной энергией* $U(r)$ [5.2.3], которая определяется работой [5], совершаемой силой $F(r)$ (15.2) при изменении расстояния между молекулами от заданного значения r до бесконечности. Так как на бесконечности молекулы не взаимодействуют между собой, то потенциал $U(r)$ на бесконечности, т. е. при $r \to \infty$, полагается равным нулю: $U(\infty) = 0$. Если две молекулы сближаются под действием сил притяжения $F(r)$ на расстояние Δr, то совершаемая при этом работа $\Delta A = F(r)\Delta r$ положительна и увеличение кинетической энергии молекул сопровождается уменьшением их потенциальной энергии (в соответствии с законом сохранения энергии (5.31)). При этом в силу принятого соглашения $U(\infty) = 0$ потенциальная энергия является отрицательной (рис. 15.3). Если две молекулы сближаются на расстояние Δr в области действия силы отталкивания, то система совершает отрицательную работу $\Delta A < 0$, затрачиваемую на преодоление сил отталкивания. Кинетическая энергия уменьшается, а потенциальная — увеличивается и является положительной величиной. Когда вся кинетическая энергия уйдет на совершение работы против сил отталкивания, молекулы сблизятся на самое малое допустимое для них расстояние $r = d$ (рис. 15.3), и потенциальная энергия будет равна полной энергии E системы из двух молекул: $U(d) = E$. Чем больше кинетическая энергия молекул, тем меньше d. В точке $r = r_0$, соответствующей силе $F(r)$ (15.2), равной нулю, потенциальная энергия $U(r)$ имеет минимум, и система из двух молекул при $r = r_0$ находится в состоянии устойчивого равновесия. Соотношение между значением $U(r_0)$ и средней кинетической энергией молекулы $\langle \mathscr{E}_{\text{пост}} \rangle$ (16.29) различно для разных агрегатных состояний вещества:

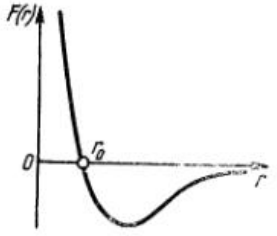


Рис. 15.2

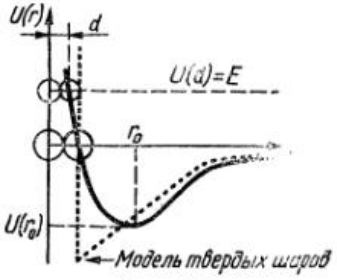


Рис. 15.3

$$\langle \mathscr{E}_{\text{пост}} \rangle \gg U(r_0) \text{ для газа; } \langle \mathscr{E}_{\text{пост}} \rangle \approx U(r_0) \text{ для жидкости;}$$
$$\langle \mathscr{E}_{\text{пост}} \rangle < U(r_0) \text{ для твердого тела.} \qquad (15.3)$$

Расстояние d (рис. 15.3) определяет размеры области, в которую не может проникнуть другая молекула, и называется *эффективным диаметром молекулы*. Значения d для некоторых газов приведены ниже.

Газ	Азот	Аргон	Кислород	Водород	Гелий
$d \cdot 10^{8}$, м	3,75	3,64	3,61	2,74	2,18

15.4. Движение молекул

15.4.1. Движение молекул в газах, жидкостях и твердых телах. Молекулы всех веществ находятся в постоянном тепловом движении [14.1] и обладают кинетической энергией. Характер этого движения зависит от агрегатного состояния вещества.

В газах между молекулами нет взаимодействия и они обладают большой кинетической энергией. В промежутках между взаимными столкновениями и столкновениями с другими препятствиями (например, со стенками сосуда, заполненного газом) молекулы движутся прямолинейно.

В жидкостях кинетическая энергия молекул соизмерима с их потенциальной энергией (см. (15.3)) и движение молекул очень сложное. Они совершают колебательные движения относительно мгновенных равновесных положений, изменяющихся со временем. В результате сильного межмолекулярного взаимодействия молекулы располагаются близко одна к другой. При этом в жидкости имеет место ближний порядок, т. е. упорядоченное относительное расположение или ориентация только соседних молекул. Колебания молекул около мгновенных положений равновесия ограничены некоторым объемом, равным свободному пространству до соседних молекул. Расстояние, на которое перемещается за некоторое среднее время $\bar{\tau}$ положение равновесия, равно среднему расстоянию между молекулами ($\sim 10^{-10}$ м). Эти перемещения скачкообразные. Затрачиваемая при этом энергия молекул идет на преодоление сил ее взаимодействия (связей) с соседними молекулами. С увеличением температуры время $\bar{\tau}$ уменьшается.

Большинство встречающихся в природе твердых тел является кристаллами, т. е. имеет упорядоченное, периодически повторяющееся в пространстве расположение частиц, из которых они состоят (молекул, атомов, ионов). Эти частицы образуют в пространстве кристаллическую решетку.

В твердом теле большие силы притяжения молекул не дают им удалиться на значительное расстояние от положений равновесия, расположенных в узлах кристаллической решетки.

В кристаллах реализуется дальний порядок, т. е. упорядоченное расположение частиц по отношению к любой частице в пределах большого объема по сравнению с расстоянием между частицами. Так как кривая потенциальной энергии $U(r)$ (рис. 15.3) вблизи минимума, т. е. при $r = r_0$, не является строго симметричной, то колебания молекул вокруг положения равновесия не являются строго гармоническими [35, 36].

15.4.2. Броуновское движение. Доказательством существования теплового движения молекул вещества служит броуновское движение. *Броуновским движением* (Броун, 1827) называют непрерывные хаотические движения очень малых частиц, взвешенных в жидкости или газе. Малые частицы, помещенные в жидкость или газ и совершающие броуновское движение, называют *броуновскими частицами*. Броуновские частицы должны быть достаточно малы, чтобы сила тяжести не влияла на их движение.

Из опыта и теории следует, что броуновское движение не зависит от внешних причин и оказывается проявлением внутреннего движения вещества. Причиной броуновского движения являются беспорядочные удары (толчки) молекул вещества со всех сторон о броуновские частицы. Эти удары являются случайными. Если броуновская частица мала, то толчки не уравновешиваются и частица приобретает импульс, величина и направление которого имеют случайный характер. Траектория ее движения представляет собой сложную ломаную кривую (рис. 15.4).

В силу случайного характера перемещения броуновской частицы ее смещения x могут быть как положительными, так и отрицательными. Среднее значение смещения

$$\langle x \rangle = 0.$$

Поэтому движение броуновской частицы характеризуют средним значением квадрата смещения $\langle x^2 \rangle$. Величина x^2 всегда положительна и ее среднее значение $\langle x^2 \rangle \neq 0$. Уравнение движения для $\langle x^2 \rangle$ имеет вид

$$m \frac{d^2}{dt^2} \langle x^2 \rangle + \frac{1}{B} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle - 2m \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = 0, \qquad (15.4)$$

где m — масса броуновской частицы, t — время. Коэффициент B называется *подвижностью частицы*. Он связывает скорость движения частицы $v = \dot{x}$ с силой сопротивления вещества $F_{тр}$ (силой вязкости [13.3.1]), в котором движется частица:

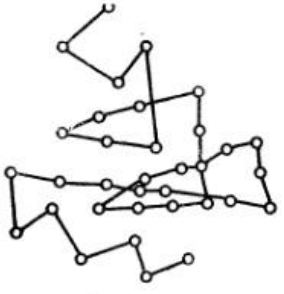


Рис. 15.4

$$v = \dot{x} = BF_{тр}. \qquad (15.5)$$

Если частица имеет форму сферы радиусом R, то подвижность B определяется законом Стокса (13.24):

$$B = \frac{1}{6\pi\eta R}. \qquad (15.6)$$

Подвижность частицы зависит от ее линейных размеров и формы, а также от вязкости вещества η. Величина $\langle (dx/dt)^2 \rangle$ в (15.4) есть среднее значение квадрата скорости частицы $\langle v^2 \rangle$ вдоль выбранной оси x. В молекулярной физике доказывается, что

$$m \left\langle \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{m\langle v^2 \rangle}{2} = kT, \qquad (15.7)$$

где $m\langle v^2 \rangle/2$ есть средняя кинетическая энергия броуновской частицы. Так как система находится в тепловом равновесии, то эта энергия равна средней кинетической энергии молекул вещества, в котором эта частица движется. Коэффициент k называется постоянной Больцмана [16.1] и равен

$$k = (1{,}380622 \pm 0{,}000059)10^{-23} \text{ Дж/К}. \qquad (15.8)$$

Решение уравнения (15.4) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2kTB \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{mB} \right) \right]. \qquad (15.9)$$

В обычных условиях величина $\exp\left(-\frac{t}{mB}\right)$ пренебрежимо мала. Если время t между последовательными наблюдениями за броуновской частицей больше 10^{-5} с, то экспоненту в (15.9) можно не учитывать. Для конечных промежутков времени Δt смещение

$$\Delta \langle x^2 \rangle = 2kTB\,\Delta t. \qquad (15.10)$$

Среднее значение квадрата смещения броуновской частицы $\Delta \langle x^2 \rangle$ за промежуток времени Δt вдоль произвольной оси пропорционально Δt. Формула (15.10) называется **формулой Эйнштейна** (1905).

Заметим, что уравнение (15.4) описывает квадрат смещения броуновской частицы, усредненный по всем одинаковым частицам, участвующим в броуновском движении. Это усреднение практически выполняется так. Сначала записывают уравнения движения для смещений x^2 каждой отдельной броуновской частицы (эти уравнения просто следуют из второго закона Ньютона (3.20) для смещения x). Затем эти уравнения складывают и делят на число частиц. Ввиду хаотичности движения частиц среднее от произведения x на F равно нулю:

$$\langle xF \rangle = 0, \qquad (15.11)$$

где F — проекция равнодействующей силы, вызванной ударами молекул вещества о частицу, на направление смещения x. В силу условия (15.11) сила F в уравнение движения не входит.

Из формулы Эйнштейна (15.10) следуют **закономерности броуновского движения** для среднего значения квадрата смещения броуновской частицы $\langle x^2 \rangle$: 1) *смещение $\langle x^2 \rangle$ не зависит от вещества частицы*; 2) *оно определяется ее геометрической формой и линейными размерами*; 3) *смещение $\langle x^2 \rangle$ увеличивается с ростом температуры T, увеличением подвижности B или уменьшением вязкости вещества, в котором движется частица*.

15.5. Явления переноса

15.5.1. Физическая кинетика. *Физической кинетикой* называется микроскопическая теория процессов, происходящих в статистически неравновесных системах [15.1]. Методами статистической физики она изучает процессы, возникающие в системе при нарушении равновесия. Это такие процессы, как перенос вещества, энергии и импульса. Физическая кинетика изучает необратимые процессы, т. е. процессы, которые сопровождаются возрастанием энтропии [21.3.2].

При нарушении состояния равновесия предоставленная самой себе система стремится вернуться в равновесное состояние. В ней возникают потоки молекул, тепла, электрических зарядов и т. п. Поэтому явления, которыми сопровождается переход системы к равновесному состоянию, называют *явлениями переноса*. К явлениям переноса относят: диффузию, теплопроводность, внутреннее трение (вязкость) и др.

Важной характеристикой явления переноса является понятие потока. *Потоком* называют количество какой-либо величины (числа молекул, тепла, света и т. п.), проходящее через единицу времени через некоторую заданную поверхность. Эта поверхность может иметь любую форму. Она может быть замкнутой. Поток характеризуется величиной и направлением [15.5.2].

15.5.2. Диффузия. *Диффузией* называется явление проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ одного в другое. Диффузия наблюдается и в одном веществе, если оно неоднородно. При этом происходит процесс выравнивания *концентраций* (числа частиц в единице объема) в различных частях вещества. Физическая причина явления диффузии состоит в тепловом движении молекул (атомов, ионов) вещества [14.1]. Диффузия наблюдается в газах, жидкостях и твердых телах. Ее скорость зависит от температуры.

При диффузии молекулы перемещаются из тех частей вещества, где их концентрация больше, в те ее части, где она меньше. Такое перемещение молекул называют *диффузионным потоком*. Этот поток направлен в сторону уменьшения концентрации.

Основной закон диффузии — закон Фика (1855): *плотность диффузионного потока I пропорциональна градиенту концентрации n, взятому с противоположным знаком.* Если концентрация n изменяется вдоль оси x, то

$$I = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \qquad (15.12)$$

где D называется *коэффициентом диффузии*. Коэффициент диффузии D численно равен диффузионному потоку через единицу площади при градиенте концентрации, равном единице.

Плотность диффузионного потока I определяется как количество молекул данного типа, проходящих при диффузии через единицу площади за единицу времени, перпендикулярно градиенту концентрации n. Из опыта следует, что масса молекул M, переносимых при диффузии за единицу времени в сторону убывания плотности вещества ρ через площадку S, определяется формулой

$$M = -D\frac{\partial \rho}{\partial x}S. \qquad (15.13)$$

Основная задача при исследовании диффузии состоит в вычислении коэффициента диффузии D.

Единицами диффузионного потока I, коэффициента диффузии D и концентрации n в СИ являются:

$$[I] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}, \quad [D] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \quad [n] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Диффузию, приводящую к выравниванию концентраций, называют *нестационарной диффузией*. При такой диффузии градиент концентрации изменяется со временем. В случае *стационарной диффузии* градиент концентрации со временем не изменяется. При этом постоянен и диффузионный поток.

Уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial n}{\partial z}\right) \qquad (15.14)$$

и определяет изменение концентрации n с течением времени t в случае диффузии в трех направлениях (вдоль координатных осей x, y, z). Если коэффициент диффузии не зависит от концентрации, то уравнение (15.14) упрощается:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n, \qquad (15.15)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\Delta n \equiv \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2}$.

15.5.3. Теплопроводность. Если различные части вещества (среды) имеют различную температуру, то в такой среде возникает *тепловой поток*. Из опыта следует, что величина этого потока определяется **законом Фурье**

$$q = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}S, \qquad (15.16)$$

где q — тепловой поток через поверхность с площадью S, расположенную перпендикулярно оси x, вдоль которой *градиент температуры* $\partial T/\partial x$ отличен от нуля. Коэффициент пропорциональности $\varkappa$ называют

коэффициентом теплопроводности. Согласно (15.16) тепловой поток течет в направлении убывания температуры. Единицами теплового потока и коэффициента теплопроводности в СИ являются:

$$[q] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}, \quad [\varkappa] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

В табл. 15.1 приведены теплопроводности некоторых веществ. Теплопроводность, приводящую к выравниванию температур, называют *нестационарной теплопроводностью*, так как градиент температуры изменяется со временем. Если за счет энергии внешних источников градиент температуры поддерживается постоянным, то теплопроводность называется *стационарной*.

Таблица 15.1. Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ некоторых веществ

Вещество	$\varkappa$, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Вещество	$\varkappa$, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Вещество	$\varkappa$, $\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$
Серебро	407	Ртуть	8,2	Асбест	0,4 — 0,8
Медь	384	Накипь	3	Кожа	0,15
Золото	308	Мрамор	2,8	Дерево	0,1 — 0,2
Алюминий	209	Лед (0 °С)	2,23	Древесный уголь	0,1—0,17
Латунь	111	Песчаник	2	Пробка	0,05
Платина	70	Фарфор	1,4	Стекловата	0,05
Олово	65	Стекло (кварц.)	1,36	Шамот	0,04
Серый чугун	50	Бетон	0,7 — 1,2	Пенопласт	0,04
Бронза	47 — 58	Стекло	0,7	Воздух	0,034
Сталь	47	Кирпич	~ 0,7	Перо	0,02
Свинец	35	Вода	0,58	Вакуум	0,00

Плотность теплового потока $j = q/S$ численно равна количеству теплоты, проходящей в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению потока:

$$j = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (15.17)$$

Направление плотности потока j совпадает с направлением распространения теплоты.

Уравнение теплопроводности в случае распространения теплоты вдоль одного направления x в среде без источников теплоты имеет вид

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}, \qquad (15.18)$$

где j определяется формулой (15.17), ρ — плотность среды, c_V — ее удельная теплоемкость [20.1]. Если среда однородна и коэффициент теплопроводности $\varkappa$ не зависит от температуры, то уравнение теплопроводности (15.18) сводится к соотношению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \qquad (15.19)$$

где $\chi = \varkappa / \rho_{cV}$ называется *коэффициентом температуропроводности* среды.

Уравнения (15.18) и (15.19) следует дополнить граничным условием, согласно которому по обе стороны границы раздела двух произвольных сред нормальные составляющие вектора плотности теплового потока j должны быть одинаковыми (условие непрерывности нормальной составляющей вектора j).

С математической точки зрения теория распространения теплоты и теория, описывающая течение жидкости, подобны [20.2.2].

15.5.4. Внутреннее трение. С внутренним трением (вязкостью) [13.3.1] связано явление переноса импульса от одного слоя вещества к другому. Перенос импульса характерен для жидкостей и газов. При движении слоев жидкости (газа) с различной скоростью между ними возникает сила внутреннего трения $F_{тр}$, определяемая формулой (13.16). Согласно второму закону Ньютона [3.3] при взаимодействии двух слоев за единицу времени происходит передача импульса, равного силе $F_{тр}$. Поэтому импульс K, передаваемый за единицу времени от одного слоя к другому через поверхность S (т. е. *поток импульса* через эту поверхность), определяется формулой

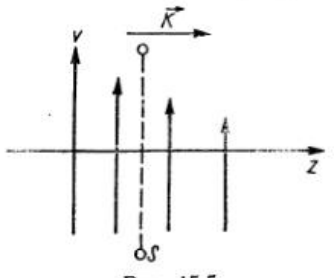


Рис. 15.5

$$K = -\eta \frac{dv}{dz} S, \qquad (15.20)$$

где η — динамическая вязкость, dv/dz — величина (*градиент скорости*), показывающая быстроту изменения скорости жидкости (газа) v в направлении z, перпендикулярном направлению движения ее слоев (рис. 15.5). Согласно (15.20) импульс распространяется в сторону убывания скорости v.

Единицей потока импульса K является:

$$[K] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}.$$

Физический смысл динамической вязкости η: она численно равна импульсу, переносимому от слоя к слою в единицу времени через единичную площадку при градиенте скорости, равном единице.

16. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

16.1. Параметры газа в нормальном состоянии

Нормальным состоянием газа называют его физические условия, определяемые давлением $P_0 = 101{,}325$ кПа (760 мм рт. ст.) и температурой $T_0 = 273{,}15$ К (0 °С), при которых молярный объем газа (14.8) равен $V_M = 22{,}41383 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль.

В одном моле любого газа [14.2.3] в нормальном состоянии содержится одинаковое число молекул. Это число называется числом Авогадро. Если N — число молекул газа, а n — количество газа, выраженное в молях, то число Авогадро (14.4)

$$N_A = \frac{N}{n} = 6{,}022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} \qquad (16.1)$$

число

$$N_L = \frac{N_A}{V_M} = 2{,}686754 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}, \qquad (16.2)$$

где N_A — число Авогадро (16.1), V_M — молярный объем, называется *числом Лошмидта*. Число Лошмидта равно числу молекул газа в 1 м^3. В нормальном состоянии в 1 м^3 любого газа содержится одинаковое число молекул.

Универсальной или *молярной газовой постоянной* R называют число

$$R = \frac{P_0 V_M}{T_0}, \quad R = 8{,}31441 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}, \qquad (16.3)$$

где P_0, T_0 — давление и температура газа в нормальном состоянии, V_M — его молярный объем.

Постоянной Больцмана называется число

$$k = \frac{R}{N_A}, \quad k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}. \qquad (16.4)$$

Постоянная Больцмана k не зависит от количества вещества и является одной из фундаментальных физических постоянных.

Масса отдельной молекулы газа m_0 (любого вещества) определяется отношением молярной массы M к числу Авогадро N_A:

$$m_0 = M/N_A. \qquad (16.5)$$

16.2. Столкновение молекул

Молекулы газа взаимодействуют между собой посредством сил, которые на больших расстояниях между молекулами являются силами притяжения, быстро убывающими с увеличением расстояния [15.3]. На малых расстояниях эти силы являются силами отталкивания, быстро возрастающими при сближении молекул. В газах в нормальных состояниях средние расстояния между молекулами велики по сравнению с их размерами и молекулярные силы очень слабы. Они проявляются лишь при сближении молекул на расстояния порядка их размеров. Взаимодействие молекул на таких малых расстояниях сводится к *столкновениям*, при которых молекула газа почти мгновенно меняет направление своего движения. Если газ находится в покое, то в нем в результате столкновений устанавливается тепловое движение. Среднее число соударений молекул газа z определяется как число соударений за единицу времени. Оно равно

$$z = \pi \sqrt{2}\, d^2 \langle v \rangle n = \pi \sqrt{2}\, d^2 \langle v \rangle \rho \frac{N_A}{M} = \frac{\pi \sqrt{2}\, d^2 \langle v \rangle P}{kT}, \qquad (16.6)$$

где d — эффективный диаметр молекулы [15.3], $\langle v \rangle$ — средняя скорость молекул [16.4], n — число молекул в единице объема, $n = N/V$ (концентрация), N_A — число Авогадро (16.1), ρ — плотность газа, M — молярная масса, T — температура, P — давление газа, k — постоянная Больцмана (16.4). Среднее число соударений для большинства газов в нормальном состоянии равно $z = 10^9 - 10^{10}$ с$^{-1}$.

До и после столкновений молекулы движутся практически прямолинейно и равномерно. Расстояние, проходимое молекулой в среднем между двумя последовательными соударениями, называется *средней*

длиной свободного пробега λ. Оно равно пути, пройденному молекулой за время Δt, отнесенному к числу соударений за это время:

$$\lambda = \frac{\langle v\rangle \Delta t}{z\,\Delta t} = \frac{1}{\pi \sqrt{2}\, d^2 n}, \qquad (16.7)$$

где $\langle v\rangle$ — средняя скорость молекул, z — среднее число соударений (16.6). Для большинства газов в нормальном состоянии $\lambda \sim 10^{-7}$ м.

Если газ состоит из смеси двух различных газов с концентрациями n_1 и n_2 с массами молекул m_1 и m_2, движущимися со средними скоростями $\langle v_1\rangle$ и $\langle v_2\rangle$, то среднее число соударений z_{12} молекул газа 1 с молекулами газа 2 и средняя длина свободного пробега λ_{12} молекул газа 1 до столкновения с молекулами газа 2 выражается формулой

$$z_{12} = \sigma_{12} n_2 \sqrt{\langle v_1\rangle^2 + \langle v_2\rangle^2},$$
$$\lambda_{12} = \left(\sigma_{12} n_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\langle v_2\rangle}{\langle v_1\rangle}\right)^2}\right)^{-1} = \left(\sigma_{12} n_2 \sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}\right)^{-1}, \qquad (16.8)$$

а общее среднее число столкновений z_1 и z_2 молекул газов (между собой и с молекулами другого газа) и общие средние длины свободного пробега λ_1 и λ_2 этих газов определяются формулами

$$z_1 = n_1\sigma_{11}\langle v_1\rangle \sqrt{2} + n_2\sigma_{12}\sqrt{\langle v_1\rangle^2 + \langle v_2\rangle^2},$$
$$z_2 = n_1\sigma_{21}\sqrt{\langle v_1\rangle^2 + \langle v_2\rangle^2} + n_2\sigma_{22}\langle v_2\rangle\sqrt{2}, \qquad (16.9)$$
$$\lambda_1 = \frac{1}{n_1\sigma_{11}\sqrt{2} + n_2\sigma_{12}\sqrt{1 + (m_1/m_2)}},$$
$$\lambda_2 = \frac{1}{n_1\sigma_{21}\sqrt{1 + (m_2/m_1)} + n_2\sigma_{22}\sqrt{2}}.$$

Величины

$$\sigma_{11} = \pi d_1^2, \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{\pi}{4}(d_1 + d_2)^2, \quad \sigma_{22} = \pi d_2^2 \qquad (16.10)$$

называют *эффективными газокинетическими поперечными сечениями* (они имеют размерность площади), d_1 и d_2 — эффективные диаметры молекул газов 1 и 2 [15.3]. Формулы (16.8) и (16.9) учитывают максвелловское распределение молекул по скоростям [16.4.2]. Поперечные сечения σ_{11}, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ и σ_{22} зависят от энергии соударения частиц [15.3] и характера их столкновения.

Если средняя длина свободного пробега λ по величине сравнима с характерным размером сосуда a, в котором он находится, то состояние газа называют *вакуумом*. Если λ меньше a, но близко к нему, то это низкий вакуум, если $\lambda \approx a$ — средний вакуум, если $\lambda \gg a$ — высокий вакуум. В плотных газах $\lambda \ll a$.

Пусть при постоянной температуре, т. е. $T = \text{const}$, давление газа в двух различных состояниях равно соответственно P и P'. Тогда средние длины свободного пробега λ и λ' молекул газа в этих состояниях связаны с давлениями P и P' соотношением

$$P\lambda = P'\lambda'.$$

16.3. Давление газа

Давление газа есть результат соударений большого числа молекул газа о стенки сосуда, в котором он находится. При соударении со стенкой сосуда молекула действует на эту стенку с определенной силой

и отражается от нее под действием силы, действующей на молекулу со стороны стенки. При большом числе соударений сила действия молекулы на стенку практически постоянна. Усредненная по времени и отнесенная к единице поверхности она и определяет давление газа.

Число соударений молекул ν_c о стенку сосуда с площадью ΔS за время Δt описывается формулой

$$\nu_c = \frac{1}{4}\Delta S\,\Delta t\, n\langle v\rangle, \qquad (16.11)$$

где $n = N/V$ — концентрация молекул, $\langle v\rangle$ — средняя скорость молекул [16.4]. Если молекулы отражаются от стенки зеркально и величина их скорости не изменяется при этом (что справедливо в среднем для большого числа соударений), то сообщаемый стенке сосуда полный импульс

$$\Delta K = \frac{1}{3} nm\langle v^2\rangle \Delta S\,\Delta t, \qquad (16.12)$$

где m — масса молекулы, $\langle v^2\rangle$ — средний квадрат скорости [16.4]. Давление P газа определяется формулой

$$P = \frac{\Delta K}{\Delta S\,\Delta t} = \frac{1}{3} nm\langle v^2\rangle = \frac{1}{3}\rho\langle v^2\rangle = nkT, \qquad (16.13)$$

где ρ — плотность газа, $\rho = nm$, k — постоянная Больцмана (16.4). Если массы всех молекул одинаковы, то

$$P = \frac{2}{3} n\langle \mathscr{E}_{\text{пост}}\rangle, \qquad (16.14)$$

где $\langle \mathscr{E}_{\text{пост}}\rangle = \langle mv^2/2\rangle$ — среднее значение кинетической энергии поступательного движения молекул.

Согласно (16.13) в замкнутой системе давление газа пропорционально среднему квадрату скорости $\langle v^2\rangle$ или температуре T. Формулы (16.13) и (16.14) применимы к нерелятивистским и релятивистским движениям молекул. Поскольку давление P определяется только величиной передаваемого стенкам импульса ΔK, то эффекты структуры молекул, внутримолекулярных движений, а также вращательных движений их как целого оказываются несущественными при вычислении P.

Единицей давления P в СИ является паскаль (Па) [12.11].

16.4. Скорость молекул

16.4.1. **Средние скорости молекул.** Молекулы газа движутся с различными скоростями. Поскольку движение молекул подчиняется законам статистической физики, средние скорости всех молекул одинаковые. Представление о скоростях движения молекул дают следующие средние величины.

1. *Средняя арифметическая скорость* или просто *средняя скорость*

$$\langle v\rangle = \frac{1}{N}(v_1 + v_2 + \ldots + v_N), \quad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \qquad (16.15)$$

где v_i — скорость i-й молекулы, N — число молекул газа, R — универсальная газовая постоянная (16.3), T — температура газа, M — молярная масса (14.5), m — масса молекулы.

2. *Средняя квадратичная скорость*

$$\bar{v}_{кв} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3RT}{m}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3\frac{P}{\rho}}, \qquad (16.16)$$

где

$$\langle v^2 \rangle \equiv \frac{1}{N}(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_N^2), \quad \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} \qquad (16.17)$$

— средний квадрат скорости движения молекул. Здесь обозначения такие, как в (16.15), P — давление газа (16.13), ρ — плотность газа. Скорость $\bar{v}_{кв}$ по порядку величины равна скорости звука в газе. Некоторые числовые значения $\bar{v}_{кв}$:

для водорода (H_2) $\quad \bar{v}_{кв} = 1838$ м/с;

для азота (N_2) $\quad \bar{v}_{кв} = 493$ м/с;

для кислорода (O_2) $\quad \bar{v}_{кв} = 461$ м/с.

16.4.2. Закон распределения молекул по скоростям. Распределение Максвелла. В состоянии статистического равновесия все направления скоростей молекул газа при тепловом движении равновероятны, а их абсолютные значения распределены в соответствии с **законом Максвелла** (1859): *число молекул dN, имеющих значения скоростей в интервале между v и $v + dv$, где dv — бесконечно малое приращение скорости, определяется формулой*

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \qquad (16.18)$$

где N — общее число молекул газа, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана (16.4), T — температура газа. Формула (16.18) определяет распределение молекул газа по абсолютным значениям их скоростей и называется *распределением Максвелла*. Функция

$$F(v) \equiv \frac{1}{N}\frac{dN}{dv} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \qquad (16.19)$$

называется *функцией распределения по скоростям*. Поскольку общее число молекул газа N сохраняется, она удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^\infty F(v)\, dv = 1. \qquad (16.20)$$

Функция $F(v)$ представлена на рис. 16.1. Ее график асимметричен. С повышением температуры, или уменьшением массы молекулы, максимум распределения сдвигается в сторону больших скоростей (рис. 16.2). Кривая при этом становится плоской. Площадь под кривой, однако, согласно (16.20) остается постоянной и равной единице.

Скорость, при которой функция $F(v)$ максимальна, называется *наиболее вероятной скоростью* v_m:

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \qquad (16.21)$$

Средняя скорость $\langle v \rangle$ (16.15) и квадрат средней скорости $\langle v^2 \rangle$ (16.17) **определяются функцией** $F(v)$:

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v\, F(v)\, dv, \quad \langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 F(v)\, dv. \qquad (16.22)$$

Средняя квадратичная скорость $\bar{v}_{кв}$ (16.16) и средняя скорость $\langle v \rangle$ **связаны с наиболее вероятной скоростью простыми соотношениями**

$$\bar{v}_{кв} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, v_m \simeq 1{,}225 v_m, \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\, v_m \simeq 1{,}128 v_m. \qquad (16.23)$$

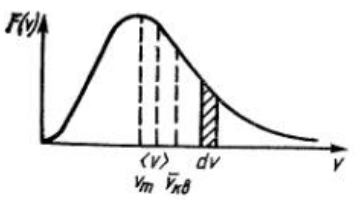


Рис. 16.1

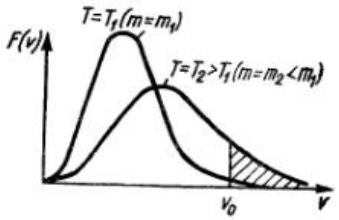


Рис. 16.2

Между этими скоростями выполняется неравенство

$$\bar{v}_{кв} > \langle v \rangle > v_m. \qquad (16.24)$$

Из (16.23) следует, что все эти три величины дают общее представление о скоростях теплового движения молекул газа.

Пользуясь кривой распределения $F(v)$ (рис. 16.1), можно графически определить число молекул, скорости которых лежат в заданном интервале между v и $v + dv$. Это число равно площади заштрихованной криволинейной трапеции с основанием dv и высотой $F(v)$.

Число молекул ΔN, скорости которых больше некоторой величины v_0, определяется формулой

$$\Delta N = N \int_{v_0}^\infty F(v)\, dv.$$

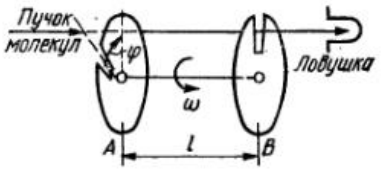


Рис. 16.3

Число ΔN растет с повышением температуры (рис. 16.2). Расчеты показывают, что 70 % молекул газа имеют скорости, которые отличаются от v_m не более чем на 50 %. Скорость, большую чем $3v_m$, имеют в среднем только 0,04 % молекул.

Если по какой-либо причине газ не находится в состоянии равновесия, то распределение молекул по скоростям отличается от максвелловского. Поскольку тепловое движение молекул является хаотичным, столкновения между ними не могут нарушить установившееся распределение по скоростям. С другой стороны, справедливо обратное утверждение: движение молекул хаотично, если они распределены по скоростям в соответствии с законом Максвелла (16.18).

Закон Максвелла (16.18) был подтвержден экспериментально в опытах Ламперта (1929). Схема опыта показана на рис. 16.3.

Меняя скорость вращения ω дисков A и B или угол между щелями в дисках φ, можно выделить из пучка молекул те из них, которые обладают средней скоростью $v = \omega l/\varphi$. Накапливая эти молекулы в ловушке, можно определить их относительное количество $\Delta N/N$ в пучке.

16.5. Молекулы в силовом поле

16.5.1. Распределение Больцмана. Если на молекулы газа не действуют внешние силы, то их концентрация $n = N/V$ в состоянии равновесия одинакова во всем объеме, занимаемом газом. При наличии силового поля молекула приобретает потенциальную энергию $\mathscr{E}_p$ и распределение молекул по концентрации n определяется законом **Больцмана** (1868—1871)

$$n = n_0 e^{-\frac{\mathscr{E}_p}{kT}}, \tag{16.25}$$

где n_0 — концентрация молекул в том месте, где $\mathscr{E}_p = 0$, k — постоянная Больцмана (16.4), T — температура. Количество молекул dN, находящихся в пределах объема $dV = dx\,dy\,dz$, расположенного в точке с координатами x, y, z, определяется формулой

$$dN = n_0 \exp\left(-\frac{\mathscr{E}_p(x, y, z)}{kT}\right) dx\,dy\,dz. \tag{16.26}$$

Формула (16.26) определяет число молекул, имеющих заданную потенциальную энергию $\mathscr{E}_p$, и называется *распределением Больцмана*.

В случае газа, находящегося в поле силы тяжести, $\mathscr{E}_p = mgh$ и формула (16.25) переходит в барометрическую формулу для концентрации [12.6].

16.5.2. Распределение Максвелла—Больцмана. Закон Максвелла (16.18) и закон Больцмана (16.26) можно объединить в одно соотношение, называемое **распределением** или **законом Максвелла — Больцмана:**

$$dN = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mathscr{E}_p + mv^2/2}{kT}\right) dv_x\,dv_y\,dv_z\,dx\,dy\,dz, \tag{16.27}$$

где dN — число молекул газа, компоненты скорости которых (т. е. проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на оси координат x, y, z) лежат в пределах от v_x, v_y, v_z до $v_x + dv_x$, $v_y + dv_y$, $v_z + dv_z$, а координаты — в пределах от x, y, z до $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Потенциальная энергия во внешнем поле зависит от координат: $\mathscr{E}_p = \mathscr{E}_p(x, y, z)$, а $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Полная энергия молекулы $\mathscr{E} = \mathscr{E}_p + mv^2/2$. Если полная энергия молекулы (атома) может принимать только дискретный ряд значений $\mathscr{E}_i$, то число частиц N_i, находящихся в состоянии с энергией $\mathscr{E}_i$, определяется формулой

$$N_i = Ne^{-\mathscr{E}_i/kT} / \left(\sum_i e^{-\mathscr{E}_i/kT}\right), \tag{16.28}$$

где N — полное число молекул (атомов), а сумма берется по всем возможным значениям полной энергии.

16.6. Энергия молекул

16.6.1. Распределение энергии по степеням свободы. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул одинаковой массы

$$\langle \mathscr{E}_{\text{пост}} \rangle = m\frac{\langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2}kT, \tag{16.29}$$

где $\langle v^2 \rangle$ — средний квадрат скорости молекулы (16.17), m — ее масса, k — постоянная Больцмана (16.4), T — температура. Согласно (16.29) абсолютная температура газа является *мерой средней кинетической энергии* его *молекул*. Температура в единицах k равна 2/3 средней кинетической энергии молекул газа. Абсолютному нулю, т. е. $T = 0$ К, отвечает кинетическая энергия молекул, равная нулю.

Наиболее вероятная кинетическая энергия отдельной молекулы

$$\mathscr{E}_m = \frac{mv_m^2}{2} = kT.$$

Формула (16.29) дает *среднюю энергию одноатомной молекулы*. Если молекула состоит из нескольких атомов, то она может совершать поступательное, вращательное и колебательное движения. Все виды движения молекулы связаны с некоторым запасом энергии. Движение молекулы, как и любой механической системы, характеризуют числом степеней свободы. Количество независимых величин (координат), однозначно задающих положение молекулы, называют *числом* ее *степеней свободы*.

Из опытов по измерению теплоемкости газов [16.6.2] следует, что при определении числа степеней свободы молекулы атомы, из которых она состоит, нужно рассматривать как материальные точки. В соответствии с этим одноатомной молекуле приписывают три поступательные степени свободы (как у материальной точки). Двухатомная молекула имеет три поступательные, две вращательные и одну колебательную степени свободы (как у твердого тела).

Колебательная степень свободы характеризует смещение атомов от их равновесного положения в молекуле, отвечающего минимуму ее потенциальной энергии. Эта степень свободы имеет место в системе из двух материальных точек, связанных между собой упругой связью. При такой связи при всяком смещении точек из равновесного положения возникает сила, стремящаяся вернуть эти точки в равновесное положение. В качестве переменной, характеризующей колебательную степень свободы, берут расстояние между атомами. Если атомы молекулы связаны жесткой связью, колебательная степень свободы отсутствует. В трехатомной и многоатомной молекулах с жесткой связью между атомами имеется три поступательные и три вращательные степени свободы.

В газе выполняется **закон равнораспределения (принцип равнораспределения Клаузиуса—Максвелла):** *энергия молекулы равномерно распределяется между всеми степенями свободы.*

В статистической физике доказывается, что на каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковая кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$. Средняя энергия молекулы

$$\langle \mathscr{E} \rangle = \frac{i}{2}kT, \tag{16.30}$$

где

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}. \qquad (16.31)$$

Здесь $i_{\text{пост}}$, $i_{\text{вращ}}$, $i_{\text{колеб}}$ — числа поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекулы. На каждую колебательную степень свободы приходится в среднем энергия kT, равная сумме кинетической $\left(\frac{1}{2}kT\right)$ и потенциальной $\left(\frac{1}{2}kT\right)$ энергий колебательного движения.

16.6.2. Внутренняя энергия и теплоемкость газа. Если газ находится в состоянии термодинамического равновесия, то его можно характеризовать внутренней энергией. *Внутренней энергией* вещества U называют полную энергию его молекул. Она включает в себя кинетическую энергию движения молекул, кинетическую энергию движения атомов внутри молекул и ядер и электронов внутри атомов, потенциальную энергию взаимодействия атомов внутри молекулы и ядер и электронов внутри атомов. Полная энергия газа

$$E = U + K + U', \qquad (16.32)$$

где U – внутренняя энергия, K — кинетическая энергия движения газа как целого, U' — потенциальная энергия газа в поле внешних сил.

Внутренняя энергия U является функцией состояния, т. е. данному состоянию газа соответствует вполне определенная внутренняя энергия [20.3.1]. Изменение внутренней энергии газа ΔU при переходе из одного состояния с U_1 в другое с U_2 равно разности

$$\Delta U = U_2 - U_1 \qquad (16.33)$$

и не зависит от промежуточных состояний газа в процессе такого перехода.

Внутренняя энергия U есть функция температуры T и объема V:

$$U = U(T, V). \qquad (16.34)$$

Уравнение такого типа называют *калорическим уравнением состояния*. Величина

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\frac{dV}{dT} \qquad (16.35)$$

называется теплоемкостью газа [20.1; 20.3.2]. Здесь P — давление, а производные по T и V берутся при постоянных значениях V и T соответственно.

Внутренняя энергия газа, молекулы которого не взаимодействуют между собой (идеальный газ [17]), не зависит от объема и определяется только его температурой: $U = U(T)$. Для одного моля идеального газа внутренняя энергия

$$U_M = N_A\langle\mathscr{E}\rangle = \frac{i}{2}N_AkT = \frac{i}{2}RT, \qquad (16.36)$$

где $\langle\mathscr{E}\rangle$ — средняя энергия молекулы (16.30), N_A — число Авогадро (16.1), k — постоянная Больцмана (16.4), R — универсальная газовая постоянная (16.3). Теплоемкость одного моля идеального газа при постоянном объеме [20.1; 20.3.2]

$$C_V = \left(\frac{\partial U_M}{\partial T}\right)_V = \frac{dU_M}{dT} \qquad (16.37)$$

связана с универсальной газовой постоянной R соотношением

$$C_V = \frac{i}{2}R, \qquad (16.38)$$

где i определено формулой (16.31). Поэтому внутренняя энергия одного моля газа

$$U_M = C_VT. \qquad (16.39)$$

Внутренняя энергия произвольной массы газа m определяется формулой

$$U = \frac{m}{M}C_VT, \qquad (16.40)$$

где M — молярная масса, C_V — *молярная теплоемкость*.

Отношение

$$\gamma = C_P/C_V, \qquad (16.41)$$

где C_V — теплоемкость при постоянном объеме (16.37), а

$$C_P = C_V + R \qquad (16.42)$$

— теплоемкость при постоянном давлении [20.1; 20.3.2], является величиной, характерной для каждого газа (табл. 20.2). Значение γ определяется числом и характером степеней свободы молекулы i (16.31):

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \qquad (16.43)$$

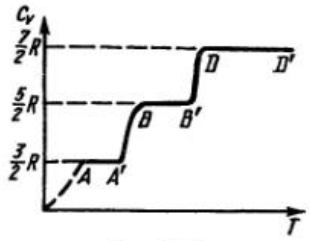


Рис. 16.4

Формула (16.40) получена в предположении постоянства C_V в широком интервале температур. Она верна для водорода, гелия, аргона, неона, азота и кислорода при температурах от 100 до 1000 К. На рис. 16.4 показана экспериментальная зависимость C_V от T для водорода. Объяснение такого поведения теплоемкости дает квантовая механика [XIV]. Скачкообразное изменение функции $C_V(T)$ связано со скачкообразным изменением энергии в системе, связанным с включением новых степеней свободы (вращательных и колебательных) по мере увеличения температуры. Горизонтальный участок AA' соответствует только поступательному движению молекул, участок BB' — поступательному и вращательному движениям. На участке DD' все молекулы имеют еще и колебательные степени свободы. На участках AA', BB' и DD' классическая теория теплоемкости приблизительно верна.

16.7. Основное уравнение кинетической теории газов

Основное уравнение кинетической теории газов связывает давление P и объем V газа с полной кинетической энергией поступательного движения N его молекул $W_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i^2$, где m_i и v_i — масса и ско-

рость i-й молекулы. Оно имеет вид

$$PV = \frac{2}{3} W_k. \qquad (16.44)$$

Для однородного газа ($m = m_i$)

$$PV = \frac{1}{3} Nm\langle v^2\rangle, \quad P = \frac{1}{3}\rho\langle v^2\rangle, \quad P = nkT, \qquad (16.45)$$

где $\langle v^2\rangle$ — средняя квадратичная скорость (16.17), $\rho = Nm/V$ — плотность газа, $n = N/V$ — концентрация, k — постоянная Больцмана T — температура.

16.8. Явления переноса в газах

В газах наблюдается диффузия [15.5.2], теплопроводность [15.5.3] и внутреннее трение [15.5.4].

16.8.1. Диффузия газа. Плотность диффузионного потока газа I определяется формулой (15.12). Согласно кинетической теории коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle, \qquad (16.46)$$

где λ — средняя длина свободного пробега молекул газа (16.7), $\langle v\rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул (16.15). Масса газа, переносимого при диффузии, определяется формулой (15.13).

Так как $\lambda \sim 1/P$, где P — давление, а $\langle v\rangle \sim \sqrt{T}$, где T — температура, то коэффициент диффузии D прямо пропорционален $\sqrt{T}$ и обратно пропорционален P.

Для кислорода при атмосферном давлении $\lambda \simeq 10^{-7}$ м, $\langle v\rangle \simeq 5 \cdot 10^2$ м/с и $D \simeq 1{,}67 \cdot 10^{-5}$ м^2/с.

Между коэффициентом диффузии D и подвижностью молекул B из (15.5) существует однозначная связь **(формула Эйнштейна)**

$$D = kTB, \qquad (16.47)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура.

Рассмотрим смесь двух газов с концентрациями n_1 и n_2 при условии, что общая концентрация $n = n_1 + n_2$ остается постоянной во всем газе. Давление и температура смеси также постоянные. Тогда для диффузионных потоков I_1 и I_2 газов 1 и 2 вдоль оси x имеем соотношения

$$I_1 = -D_{12}\frac{\partial n_1}{\partial x}, \quad I_2 = -D_{21}\frac{\partial n_2}{\partial x}, \qquad (16.48)$$

где D_{12} и D_{21} — коэффициенты диффузии газа 1 в газ 2 и газа 2 в газ 1 Эти коэффициенты равны между собой:

$$D_{12} = D_{21} = \frac{kT}{\mu n \sigma_{12}\sqrt{\langle v_1\rangle^2 + \langle v_2\rangle^2}}, \qquad (16.49)$$

где σ_{12} — поперечное сечение (16.10), $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса молекул, m_1 и m_2 — массы молекул газов 1 и 2, $\langle v_1\rangle$ и $\langle v_2\rangle$ — средние скорости их молекул. Согласно (16.49) коэффициенты диффузии $D_{12} = D_{21}$ не зависят от концентрации газов n_1 и n_2 в смеси. Для D_{12} и D_{21} справедливо представление

$$D_{12} = D_{21} = \frac{1}{3}\left[\frac{\rho_2}{\rho}\lambda_1\langle v_1\rangle + \frac{\rho_1}{\rho}\lambda_2\langle v_2\rangle\right], \qquad (16.50)$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности газов 1 и 2, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ и λ_1, $\langle v_1\rangle$, λ_2, $\langle v_2\rangle$ — средние длины пробегов и средние скорости молекул в газах 1 и 2. Коэффициент D_{12} (D_{21}) называют также *коэффициентом взаимной диффузии*. Значения D_{12} для некоторых смесей газов приведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1. **Коэффициент взаимной диффузии D_{12} для некоторых смесей газов**

Смесь газов	$D_{12}\cdot 10^5$, м^2/с	Смесь газов	$D_{12}\cdot 10^5$, м^2/с
$H_2 - O_2$	6,79	$O_2 - N_2$	1,74
$CO - H_2$	6,49	$CO_2 - CO$	1,36
$CO_2 - H_2$	5,38	$H_2 - D_2$	1,20
$CO - O_2$	1,83	$H_2O - CO_2$	0,98

При нестационарной диффузии [15.5.2] процесс выравнивания концентраций со временем t подчиняется экспоненциальному закону

$$\Delta n = \Delta n_0\, e^{-t/\tau}. \qquad (16.51)$$

где Δn — разность концентраций в момент времени t, Δn_0 — разность концентраций в начальный момент времени $t = 0$, величина τ называется *постоянной времени процесса диффузии*.

Пусть при выравнивании концентрации газ из сосуда с объемом V_1 и концентрацией n_1 переходит в объем V_2 с концентрацией n_2 через трубку длиной l и сечением S. Тогда в предположении малой концентрации $dn/dx = \Delta n/l$, $\Delta n = n_2 - n_1$, постоянная процесса τ обратно пропорциональна коэффициенту диффузии D:

$$\tau = \frac{1}{D}\frac{V_0 l}{S},$$

где $V_0 = V_1V_2/(V_1 + V_2)$ — так называемый *приведенный объем*.

Диффузия в газах в нормальном состоянии [16.1] является медленным процессом. Время τ здесь равно нескольким десяткам часов. Это обусловлено большим числом межмолекулярных столкновений, приводящих к тому, что молекула в процессе диффузии проходит длинный зигзагообразный путь.

16.8.2. Теплопроводность. Тепловой поток в газе определяется формулой (15.16). Кинетическая теория газов дает для коэффициента теплопроводности $\varkappa$ следующее выражение:

$$\varkappa = \frac{1}{3} mn\lambda c_V\langle v\rangle = \frac{1}{3}\rho\lambda c_V\langle v\rangle = \frac{\langle v\rangle C_V}{3\pi\sqrt{2}\, d^2 N_A}, \qquad (16.52)$$

где m — масса молекулы, n — концентрация, λ — средняя длина свободного пробега молекулы, $\langle v\rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, c_V — удельная теплоемкость, равная C_V/μ, μ — молекулярная масса, C_V — теплоемкость газа при постоянном объеме (16.38), ρ — плотность газа, d — эффективный диаметр молекулы, N_A — число Авогадро.

Так как $\langle v\rangle \sim \sqrt{T}$ и λ увеличивается с ростом температуры T, то коэффициент теплопроводности $\varkappa$ растет с увеличением T быстрее чем $\sqrt{T}$. Это подтверждается на опыте.

Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ различен для разных газов. Так как размер молекул d приблизительно одинаков для разных газов [15.3.2], то различие в значениях $\varkappa$ объясняется различием значений средних скоростей молекул $\langle v\rangle$. У легких газов $\varkappa$ больше, чем у тяжелых (табл. 16.2).

Таблица 16.2. **Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ некоторых газов**

Газ	$\varkappa$, Вт/м · К	Газ	$\varkappa$, Вт/м · К
Водород	0,176	Азот	0,0236
Гелий	0,142	Кислород	0,0239
Водяной пар	0,024	Углекислый газ	0,0142

Процесс выравнивания температуры со временем подчиняется экспоненциальному закону

$$\Delta T = (\Delta T)_0 e^{-t/\tau}, \qquad (16.53)$$

где ΔT — разность температур в момент времени t, $(\Delta T)_0$ — разность температур при $t = 0$. Величина τ называется *постоянной времени теплопроводности*. Она обратно пропорциональна коэффициенту температуропроводности газа ([15.5.3], уравнение (15.19)) $\chi = \dfrac{\varkappa}{\rho c_V}$, где $\varkappa$ равно (16.52), ρ — плотность газа, c_V — его удельная теплоемкость, и зависит от геометрии системы, в которой наблюдается теплопроводность. Пусть имеются два сосуда с объемами V_1 и V_2, заполненные однородным по составу газом при одинаковом давлении. Температура в первом из них T_1, а во втором T_2. Пусть $T_1 > T_2$. Тогда $\Delta T = T_1 - T_2$. Если оба сосуда соединены между собой трубкой длиной l и сечением S, то при равномерном изменении температуры вдоль трубки: $\partial T/\partial x = \Delta T/l$, постоянная времени теплопроводности

$$\tau = \frac{\rho c_V}{\varkappa}\frac{lV_0}{S} = \frac{lV_0}{\chi S},$$

где $V_0 = V_1V_2/(V_1 + V_2)$ — приведенный объем.

16.8.3. Внутреннее трение. Поток импульса в газе K определяется формулой (15.20). Коэффициент внутреннего трения (динамическая вязкость) η зависит от свойств газа. В кинетической теории газов доказывается, что динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} mn\lambda\langle v\rangle = \frac{1}{3}\rho\lambda\langle v\rangle, \qquad (16.54)$$

где обозначения те́ же, что и в формуле (16.52). Согласно (16.54) η не зависит от давления газа. Это подтверждается на опыте.

Сравнение формул (16.52) и (16.54) показывает, что между тепловыми явлениями (коэффициентом теплопроводности $\varkappa$) и чисто механическими явлениями (коэффициентом внутреннего трения η) должна существовать простая связь

$$\varkappa = \eta c_V, \qquad (16.55)$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Значения η для некоторых газов приведены в табл. 13.1. Из опыта, однако, следует, что величина $\varkappa/\eta c_V$ отлична от единицы и колеблется от 1,9 (для азота и кислорода) до 1,4 (у аммиака). Это отличие объясняется приближениями вычислений, приводящими к выражениям для $\varkappa$ и η в форме (16.52) и (16.54).

С увеличением температуры средняя скорость $\langle v\rangle$ увеличивается как $\sqrt{T}$. Кроме того, увеличивается длина свободного пробега λ (16.7) за счет уменьшения эффективного диаметра молекул d. Поэтому с ростом температуры вязкость η увеличивается быстрее, чем $\sqrt{T}$.

16.8.4. Связь между коэффициентами переноса. Согласно (16.46), (16.52) и (16.54) между коэффициентами переноса D, $\varkappa$ и η существует связь

$$D = \frac{\eta}{\rho}, \quad D = \frac{\varkappa}{\rho c_V}, \qquad (16.56)$$

т. е. коэффициент диффузии D равен кинематической вязкости ν [13.4.1] и равен коэффициенту температуропроводности χ [15.5.3]. Поэтому явления переноса в газах можно трактовать как процессы диффузии вещества, температуры и скорости. Зная коэффициенты D, $\varkappa$ и η, можно определить среднюю длину свободного пробега молекулы λ и, следовательно, ее размер d.

17. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Идеальным газом называется газ, в котором собственным объемом молекул и межмолекулярным взаимодействием можно пренебречь. Другими словами, идеальный газ — это большая совокупность невзаимодействующих материальных точек, которые при своем движении сталкиваются между собой и со стенками сосуда, в котором они заключены. Весь объем, в котором находится идеальный газ, доступен для движения его молекул.

При определенных условиях некоторые реальные газы ведут себя как идеальный газ, например гелий при комнатной температуре и атмосферном давлении.

17.1. Давление идеального газа

Давление идеального газа P в замкнутой системе согласно (16.13) описывается формулой

$$P = \frac{1}{3} mn\langle v^2\rangle, \quad P = nkT, \qquad (17.1)$$

где m — масса молекулы, $n = N/V$ — концентрация, $\langle v^2\rangle$ — средний квадрат скорости молекул, k — постоянная Больцмана (16.4), T — температура. *Давление идеального газа* определяется средней кинетической энергией его молекул. Оно пропорционально температуре T.

17.2. Уравнение состояния идеального газа

Уравнение состояния идеального газа [14.4] устанавливает связь между его давлением P, объемом V и температурой T. Оно следует из (17.1) и имеет вид

$$PV = NkT, \qquad (17.2)$$

где N — число молекул, содержащихся в объеме V. Если известна масса газа m, то

$$PV = \frac{m}{M} N_A kT, \quad PV = \frac{m}{M} RT, \tag{17.3}$$

где M — молярная масса (14.5), N_A — число Авогадро (16.1), k — постоянная Больцмана (16.4), R — универсальная газовая постоянная (16.3). Уравнение состояния идеального газа в форме (17.3) называют *уравнением Клапейрона — Менделеева* (1834, 1874).

Для одного моля газа имеем

$$PV_M = RT, \tag{17.4}$$

где V_M — молярный объем (14.8).

Справедливо утверждение: если состояние данного газа описывается уравнением Клапейрона — Менделеева (17.3) или одним из его следствий [17.3], то такой газ является идеальным.

17.3. Законы идеального газа

17.3.1. Число молекул в единице объема. Число молекул в единице объема $n = N/V = N_A/V_M$ (концентрация) и плотность ρ идеального газа в соответствии с уравнением состояния (17.2) определяются формулами

$$n = \frac{PN_A}{RT} = \frac{P}{kT}, \quad \rho = \frac{MP}{RT}. \tag{17.5}$$

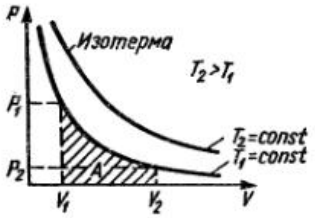


Рис. 17.1

17.3.2. Закон Бойля — Мариотта. Для идеального газа выполняется закон Бойля — Мариотта (12.13), согласно которому при постоянной массе газа и постоянной температуре произведение давления P на объем V газа постоянно

$$PV = \text{const при } T = \text{const}, \ m = \text{const} \tag{17.6}$$

Это уравнение называется *уравнением изотермы*.

На $P-V$ диаграмме состояния газа изотерма представляет собой гиперболу, положение которой зависит от температуры газа (рис. 17.1). Процесс, при котором $T = \text{const}$, называется *изотермическим*. При $T = \text{const}$ внутренняя энергия газа U (16.40) остается постоянной При изотермическом расширении газа вся теплота переходит в работу. Работа, совершаемая газом при изотермическом расширении, равна количеству теплоты Q [20.1], которое необходимо подвести газу для совершения этой работы:

$$\delta A = dQ = PdV, \tag{17.7}$$

где δA — элементарная работа, dV — элементарный объем, P — давление [20.3.1].

Пусть V_1 и P_1 — начальные, а V_2 и P_2 — конечные объем и давление идеального газа. Тогда согласно (17.6)

$$P_1V_1 = P_2V_2. \tag{17.8}$$

Полная работа A_{12} равна объему криволинейной трапеции (рис. 17.1):

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} \ln \frac{P_1}{P_2} =$$
$$= P_1V_1 \ln (P_1/P_2) = P_2V_2 \ln (P_1/P_2). \tag{17.9}$$

При $V_1 > V_2$ или $P_1 < P_2$ происходит сжатие газа и работа отрицательна: $A < 0$. Отметим, что для реализации условия $T = \text{const}$, изменения давления P и объема V должны происходить бесконечно медленно. Кроме того, газ должен находиться в среде с очень большой теплоемкостью. Формулы (17.9) справедливы и в том случае, когда к системе подводится тепловая энергия.

Свойство газа изменять свой объем при изменении давления называется *сжимаемостью*. *Изотермическим коэффициентом сжимаемости* любого вещества называют величину

$$\chi = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dP}\right)_T, \tag{17.10}$$

где производная берется при $T = \text{const}$. Он характеризует относительное изменение объема при изменении давления. В случае идеального газа

$$\chi = -\frac{1}{P}. \tag{17.11}$$

Единицей измерения изотермического коэффициента сжимаемости χ в СИ является:

$$[\chi] = \text{м}^2/\text{Н}.$$

17.3.3. Закон Гей-Люссака. Формулировка **закона Гей-Люссака** (1802): *при постоянном давлении газа и постоянной массе отношение объема газа V к его температуре T постоянно*:

$$\frac{V}{T} = \frac{m}{M} \frac{R}{P} = \text{const при } P = \text{const}, \ m = \text{const}. \tag{17.12}$$

Это уравнение называется *уравнением изобары*. На $P-V$ диаграмме состояния газа изобара параллельна оси V (рис. 17.2). Процесс, при котором $P = \text{const}$, называется *изобарическим*.

Пусть V_1 и T_1 — начальные, V_2 и T_2 — конечные объем и температура газа. Тогда

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \tag{17.13}$$

Работа газа A, совершаемая при его расширении, равна площади прямоугольника на $P-V$ диаграмме:

$$A_{12} = P\Delta V = \frac{m}{M} R\Delta T, \tag{17.14}$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ — изменение объема, $\Delta T = T_2 - T_1$ — изменение температуры. На $V-T$ диаграмме изобара имеет вид прямой, выходящей из начала координат (рис. 17.3).

Закон Гей-Люссака (17.12) можно представить в виде

$$V = V_0 (1 + \alpha_V t), \tag{17.15}$$

где V — объем при температуре t, отсчитанной от 0 °С, V_0 — объем идеального газа при температуре $T_0 = 273{,}16$ К. Величина

$$\alpha_V = \frac{V}{V_0 T} = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273{,}16}\ \text{К}^{-1}$$

называется *коэффициентом объемного расширения*. В общем случае любого вещества коэффициентом объемного расширения при постоянном давлении называют величину

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dT}\right)_P, \qquad (17.16)$$

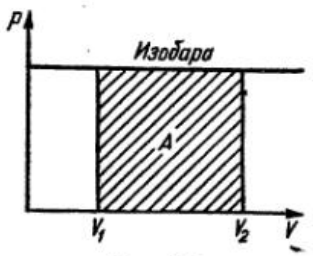


Рис. 17.2

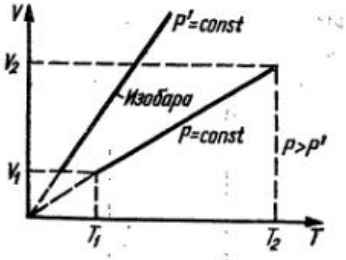


Рис. 17.3

где V — первоначальный объем, а производная берется при $P = \text{const}$. Для идеального газа

$$\alpha = \frac{1}{T}. \qquad (17.17)$$

При 0 °С имеем $\alpha = \alpha_V$. При низких температурах (вблизи $T = 0$ К) для реальных газов закон Гей-Люссака не выполняется. Все газы (кроме гелия) при сильном охлаждении переходят в жидкое состояние.

17.3.4. Закон Шарля. Формулировка **закона Шарля** (1787): *при постоянных объеме и массе газа отношение давления газа к его температуре постоянно*:

$$\frac{P}{T} = \frac{m}{M}\,\frac{R}{V} = \text{const при } V = \text{const},\ m = \text{const}. \qquad (17.18)$$

Это уравнение называется *уравнением изохоры*. На P—V диаграмме состояния газа изохора параллельна оси P (рис. 17.4), а на P—T диаграмме изохора имеет вид прямой, выходящей из начала координат (рис. 17.5). Процесс, при котором $V = \text{const}$, называется *изохорическим*. При изохорическом процессе газ работы не совершает. Подводимая к газу тепловая энергия расходуется на увеличение его внутренней энергии U (16.40). Пусть P_1 и T_1 — начальные, P_2 и T_2 — конечные давление и температура. Тогда

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \qquad (17.19)$$

а изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T, \qquad (17.20)$$

где M — молярная масса, C_V — молярная теплоемкость, $\Delta T = T_2 - T_1$ — изменение температуры.

Закон Шарля (17.18) можно представить в виде

$$P = P_0 (1 + \alpha_P t), \qquad (17.21)$$

где P — давление при температуре t, отсчитанной от 0 °С, P_0 — давление газа при температуре $T_0 = 273{,}16$ К. Величина

$$\alpha_P = \frac{P}{P_0 T} = \frac{1}{T_0}$$

называется *температурным коэффициентом изменения давления* или просто *термическим коэффициентом давления*. Отметим, что $\alpha_P = \alpha_V$, где α_V — коэффициент объемного расширения в (17.15). Закон Шарля иногда называют **вторым законом Гей-Люссака.**

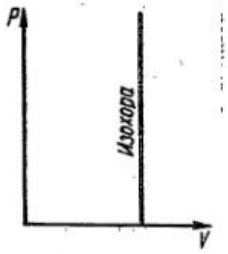


Рис. 17.4

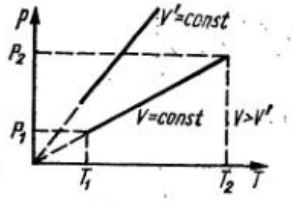


Рис. 17.5

17.3.5. Закон Авогадро. Формулировка **закона Авогадро** (1811): *при одинаковых давлениях и температурах в равных объемах любого газа содержится одинаковое число молекул*. Этот закон непосредственно следует из уравнения состояния газа в форме (17.2).

17.4. Смесь идеальных газов

17.4.1. Парциальное давление и объем. *Смесью газов* называют совокупность нескольких различных газов, которые не вступают в химические реакции между собой. *Парциальным давлением* P_i i-го газа в смеси называется давление

$$P_i = N_i k T / V,\ i = 1, 2, \ldots, r, \qquad (17.22)$$

где r — число газов в смеси, N_i — число молекул i-го газа, V — объем смеси, k — постоянная Больцмана, T — температура. Парциальное давление P_i есть давление i-го газа, которое оказывал бы этот газ, если бы он один занимал объем V.

Парциальным объемом V_i i-го газа в смеси называют объем

$$V_i = N_i k T / P,\ i = 1, 2, \ldots, r, \qquad (17.23)$$

где обозначения такие, как в формуле (17.22), а P — полное давление смеси r идеальных газов. Парциальный объем V_i есть объем, который занимал бы i-й газ, если бы все остальные газы были удалены, а давление P и температура T остались неизменными.

17.4.2. Закон Дальтона. Формулировка **закона Дальтона** (1801): *давление смеси r идеальных газов равно сумме их парциальных давлений*:

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_r = NkT/V, \qquad (17.24)$$

где $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_r$ — число молекул в смеси r газов. Согласно (17.24) молекулы каждого из r идеальных газов оказывают давление, не зависящее от того, какое давление оказывают молекулы других газов. Это обусловлено тем, что в идеальном газе молекулы не взаимодействуют.

Из опыта следует, что при высоких давлениях (порядка 10^8 Па) в реальных газах наблюдаются отклонения от закона Дальтона.

Из (17.24) и (17.23) следует **закон Амага:** *объем смеси идеальных газов равен сумме их парциальных объемов*:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_r. \qquad (17.25)$$

18. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

18.1. Отклонение свойств газов от идеальности

В реальных газах между молекулами действуют межмолекулярные силы [15.3], которые на расстояниях порядка 10^{-9} м и больше являются силами притяжения, а на расстояниях порядка 10^{-10} м и меньше — силами отталкивания. Молекулы такого газа обладают потенциальной энергией $U(r)$, где r — расстояние между двумя молекулами, которая во многих практических задачах может быть аппроксимирована функцией

$$U(r) = \frac{a_1}{r^{12}} - \frac{a_2}{r^6}, \qquad (18.1)$$

где a_1 и a_2 — постоянные. Функция (18.1) называется *потенциалом Ленарда-Джонса* (1924). Первое слагаемое соответствует силам отталкивания, а второе — силам притяжения Ван-дер-Ваальса.

Молекулы реального газа имеют размеры порядка 10^{-10} м. Это означает, что не весь объем сосуда V, в котором находится газ, доступен для движения молекул. При давлении $\sim 10^5$ Па среднее расстояние между молекулами в 10 раз больше их собственных размеров, а отношение объема сосуда V к объему, занимаемому молекулами V', равно ~ 2000. При таких условиях свойства реального газа близки к свойствам идеального газа. При давлении $\sim 10^7$ Па молекулы в среднем находятся на расстоянии одна от другой только в 2 раза большем их размеров, а отношение объемов $V/V' \simeq 20$. В этом случае свойства реального и идеального газов различаются как количественно, так и качественно.

18.2. Уравнения состояния

18.2.1. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Свойства реальных газов хорошо описываются уравнением (17.4) только при малых плотностях ρ, т. е. согласно уравнению (17.5) при малых давлениях P и высоких температурах T. С увеличением P или с уменьшением T наблюдается отклонение от этого уравнения. Для описания реальных газов в широком интервале изменений плотности ρ имеется много различных уравнений, явный вид которых зависит от используемых в теории этих уравнений, т. е. при их получении, моделей межмолекулярного взаимодействия. Наиболее известным из них является уравнение Ван-дер-Ваальса (1873). В теории этого уравнения используется аппроксимация межмолекулярного движения моделью твердых упругих шаров, между которыми действуют силы притяжения. Силы отталкивания учитываются только тем, что размеры шаров считаются конечными. Потенциальная энергия двух таких шаров показана точечной кривой на рис. 15.3.

Уравнением Ван-дер-Ваальса называется соотношение

$$\left(P + \frac{a}{V_M^2}\right)(V_M - b) = RT, \quad \left(P + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT, \qquad (18.2)$$

где P — давление, $V_M = \frac{V}{\nu}$ — молярный объем газа (14.8), V — полный объем газа, ν — число его молей (14.9), R — универсальная газовая постоянная (16.3), T — температура, m — масса газа, M — молярная масса (14.5), a и b — *константы Ван-дер-Ваальса*, характерные для каждого газа.

Единицами констант a и b являются:

$$[a] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^6}{\text{моль}^2}, \quad [b] = \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}.$$

Теоретический вывод уравнения в модели твердых упругих шаров предполагает, что выполняются условия

$$P \gg a/V_M^2, \quad V_M \gg b, \qquad (18.3)$$

где a/V_M^2 — поправка к уравнению состояния идеального газа (17.4), учитывающая внутреннее давление, обусловленное силами притяжения между молекулами, b — поправка на собственный объем молекул, обусловленная силами отталкивания. Константы a и b вычисляются по формулам

$$a = -2\pi N_A^2 \int_d^\infty U(r)\, r^2 dr, \quad b = \frac{2}{3} N_A \pi d^3, \qquad (18.4)$$

где N_A — число Авогадро (14.4), d — диаметр молекулы, $U(r)$ — потенциальная энергия притяжения двух молекул. Они связаны с параметрами критического состояния газа $P_к$, $V_к$, $T_к$ [18.3] следующим образом:

$$a = \frac{9}{8} RT_к V_к, \quad b = \frac{1}{3} V_к, \quad P_к = \frac{a}{27b^2}, \quad T_к = \frac{8a}{27Rb}. \qquad (18.5)$$

Реальные газы количественно описываются уравнением (18.2) лишь приближенно. Опыт показывает, что величины a и b зависят от температуры T. Уравнение Ван-дер-Ваальса только качественно правильно описывает свойства плотных газов. Тем не менее это уравнение применяют для объяснения свойств газов в широком диапазоне давлений и температур, рассматривая его уже как приближенное полуэмпирическое, в котором константы a и b определяются не теоретическим, а опытным путем.

Газ, который точно подчиняется уравнению (18.2), называют *газом Ван-дер-Ваальса*. Внутренняя энергия [16.6.2] одного моля такого газа определяется формулой

$$U_M = C_V T - \frac{a}{V_M},$$

где C_V — молярная теплоемкость.

18.2.2. Уравнение Дитеричи. Уравнение (18.2) не учитывает влияния пристеночного молекулярного слоя на состояние газа. В этом слое на молекулы действует результирующая сила, направленная внутрь газа. Кроме того, эти молекулы испытывают дополнительное притяжение со стороны стенок сосуда, что приводит к уплотнению пристеночного слоя и увеличению давления газа на стенку. Из опыта следует, что это давление не зависит от материала стенки. Уравнение состояния газа, учитывающее указанные эффекты, имеет вид

$$P(V_M - b) = RT \exp\left(-\frac{a}{RTV_M}\right) \qquad (18.6)$$

и называется *уравнением Дитеричи*. В пределе $b \ll V_M$ и $a \ll RTV_M$ оно переходит в уравнение Ван-дер-Ваальса (18.2). Уравнение (18.6) является полуэмпирическим. Теоретически оно доказано лишь при выполнении условий (18.3).

Уравнение Дитеричи непригодно для описания газа при высоких давлениях, но оно лучше, чем уравнение (18.2), описывает его свойства при умеренных давлениях.

18.2.3. Уравнения Бертло и Клаузиуса. Эти уравнения чисто эмпирически учитывают зависимость внутреннего давления газа от температуры и имеют вид

$$\left(P + \frac{a}{TV_M^2}\right)(V_M - b) = RT \qquad (18.7)$$

— *уравнение Бертло* и

$$\left(P + \frac{a}{T(V_M + c)^2}\right)(V_M - b) = RT \qquad (18.8)$$

— *уравнение Клаузиуса* (1808). Здесь константы a, b и c определяются опытным путем. Уравнение Бертло точнее уравнения Ван-дер-Ваальса при умеренных давлениях P, а уравнение Клаузиуса — для всех P за счет наличия дополнительной подгоночной константы c.

18.2.4. Вириальные коэффициенты. Наиболее точное описание состояния реального газа дают уравнения, учитывающие его отклонения от идеальности в виде разложения в ряд по плотности ρ (или по степеням $1/V_M$ (14.8)):

$$PV_M = RT\left[1 + \frac{B_2(T)}{V_M} + \frac{B_3(T)}{V_M^2} + \cdots\right]. \qquad (18.9)$$

Уравнение вида (18.9) называют *уравнением Камерлинга-Оннеса* (или *уравнением Вукаловича — Новикова*, 1948), а коэффициенты $B_2(T)$, $B_3(T)$, ... — вторым, третьим и т. д. *вириальными коэффициентами*. Теоретическое определение этих коэффициентов как функций температуры является сложной задачей. Если известна потенциальная энергия пары молекул, то вириальные коэффициенты $B_l(T)$ могут быть определены с помощью формулы Майера (1837)

$$B_l(T) = -\frac{(N_A)^{l-1}}{l!(l-2)!V_M}\int\int\cdots\int\sum_{l>i>j>1}\prod f_{ij}\,d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_l,$$

где $l = 2, 3, \ldots$,

$$f_{ij} = \exp\left(-\frac{U_{ij}}{kT}\right) - 1, \quad d\tau_s = dq_{s1} \cdots dq_{sn},$$

U_{ij} — потенциальная энергия молекул i и j, взаимодействующих с помощью центральных сил и зависящая только от расстояния между ними, $q_{s1}, \ldots, q_{sn}$ — обобщенные координаты s-й молекулы, имеющей n степеней свободы, $d\tau_s$ — ее фазовый объем.

18.3. Критические параметры газа

18.3.1. Изотермы Ван-дер-Ваальса. В отличие от изотермы идеального газа [17.3.2], описываемой уравнением (17.6) и представляющей собой гиперболу, *изотерма Ван-дер-Ваальса* описывается уравнением (18.2), которое является уравнением третьей степени относительно молярного объема V_M. Эта изотерма имеет вид, представленный на рис. 18.1. Три значения объемов V_1, V_2 и V_3 соответствуют трем корням уравнения (18.2). Им отвечают точки пересечения изобары $P_1 = \text{const}$ с изотермой. Изотерма Ван-дер-Ваальса при некоторой температуре T имеет минимум и максимум. При повышении температуры эта изотерма становится более пологой и переходит в гиперболу при некоторой температуре $T_2 > T$. *Температура* $T = T_к$, при которой $V_1 = V_2 = V_3$ (точка K на рис. 18.1) называется *критической*. Соответствующую этой температуре *изотерму* также называют *критической*,

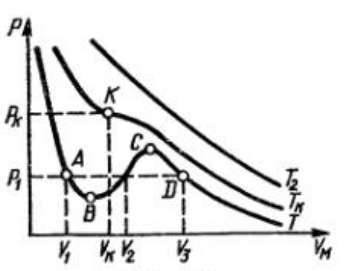


Рис. 18.1

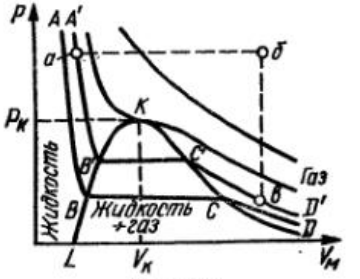


Рис. 18.2

а точку перегиба кривой K — *критической точкой*. Параметры газа в критической точке — давление $P_к$, молярный объем $V_к$ и температура $T_к$ — называются *параметрами критического состояния газа*. Они связаны с постоянными a и b уравнения (18.2) формулами (18.5). Отношение

$$K_к = \frac{RT_к}{P_к V_к} = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

называется *критическим коэффициентом*. В действительности для реальных газов $K_к > 8/3$.

18.3.2. Изотермы реальных газов. Опытным путем было установлено, что *изотермы реальных газов* отличаются от изотерм Ван-дер-Ваальса. При некоторых температурах они имеют горизонтальные участки (рис. 18.2) там, где изотермы Ван-дер-Ваальса имеют минимум и максимум (рис. 18.1). Ветви AB, $A'B'$ изотерм рис. 18.2 соответствуют жидкому состоянию вещества (малый объем, большая плотность),

а ветви CD, $C'D'$ — газообразному состоянию вещества (большой объем, малая плотность). Горизонтальные участки BC, $B'C'$ соответствуют переходной области между этими состояниями [22.1.2]. По мере удаления вправо от точек B, B' увеличивается количество вещества в газообразной фазе и уменьшается его количество в жидкой фазе. В точках C, C' все вещество переходит в газообразное состояние. Кривая $LBB'KC'C$, соединяющая концы горизонтальных участков изотерм, делит плоскость PV_M на две области: область двухфазного состояния вещества [22] — между кривыми $LBB'KC'C$ и изобарой $P = 0$, и область однофазного состояния — область над кривой $LBB'KC'C$ и ниже изобары $P = 0$. В двухфазной области вещество не является физически однородным и состоит из жидкости и ее насыщенного пара.

В однофазной области вещество однородно. Точка K, в которую в пределе переходят горизонтальные участки изотерм при повышении температуры до критической: $T = T_к$, называется критической. Давление $P_к$, объем $V_к$ и температура в этой точке $T_к$ определяют критическое состояние вещества. Газ можно превратить в жидкость сжатием только тогда, когда его температура T ниже критической: $T < T_к$, например, двигаясь вдоль изотермы по кривой $вC'B'а$ (рис. 18.2). Газ можно превратить в жидкость, минуя двухфазную область, например, двигаясь в точку $а$ из точки $в$ по кривой $вба$, где $V_M = \text{const}$ на участке $вб$ и $P = \text{const}$ на участке $ба$. При таком переходе из газообразной фазы в жидкую вещество все время будет оставаться физически однородным, его свойства будут изменяться непрерывно вне зависимости от пути перехода из начальной точки ($в$) в конечную точку ($а$), не проходящего через двухфазную область.

18.4. Эффект Джоуля — Томсона

Изменение температуры газа при стационарном его течении через пористую пробку под действием давления называется **эффектом Джоуля — Томсона** (1852, 1862). При медленном течении можно пренебречь кинетической энергией газа и считать, что в каждый момент времени по обе стороны от пробки газ находится в термодинамически равновесном состоянии. Пусть газ при давлении P_1, занимавший до прохождения через пробку $MNN'M'$ (рис. 18.3) объем V_1, после прохождения через нее займет объем V_2 при некотором давлении P_2. Полная работа, совершенная газом, определяется формулой

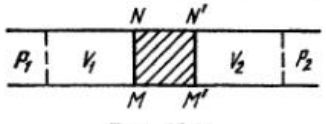


Рис. 18.3

$$A = P_2V_2 - P_1V_1 = U_1 - U_2, \qquad (18.10)$$

где U_1 и U_2 — внутренняя энергия газа до и после прохождения через пористую пробку. Величина $I = U + PV$ называется *энтальпией*. Согласно (18.10) в рассматриваемом процессе энтальпия не изменяется: $I_1 = I_2$.

Пусть по разные стороны пробки поддерживается малая разность давлений ΔP и возникает малая разность температур ΔT. Тогда справедливо соотношение

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_I = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_P - V}{C_P}, \qquad (18.11)$$

где $C_P = (\partial I/\partial T)_P$ — теплоемкость газа в изобарном процессе ($P = \text{const}$), T — температура, V — объем газа. Эффект Джоуля — Томсона, который описывается уравнением (18.11), называют *дифференциальным*. Эффект, при котором разность давлений и изменения температур велики, называют *интегральным* эффектом Джоуля — Томсона. Он описывается формулой

$$T_2 - T_1 = \int_{P_1}^{P_2} \left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_T dP. \qquad (18.12)$$

Эффект Джоуля — Томсона называется *положительным*, если $(\Delta T/\Delta P)_T > 0$, и *отрицательным* при $(\Delta T/\Delta P)_T < 0$. В первом случае газ охлаждается, а во втором — нагревается, так как он течет от большего давления к меньшему: $\Delta P = P_2 - P_1 < 0$.

Для вандерваальсового газа с уравнением состояния (18.2) имеем

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_I = \frac{\frac{bRT}{(V_M - b)^2} - \frac{2a}{V_M^2}}{C_P\left(\frac{\partial P}{\partial V_M}\right)_T}. \qquad (18.13)$$

В случае разреженного газа из (18.13) следует формула

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta P}\right)_I = \frac{2a - bRT}{RTC_P}, \qquad (18.14)$$

из которой видно, что при $a \neq 0$ и $b = 0$ газ всегда будет охлаждаться, а при $a = 0$, $b \neq 0$ — всегда нагреваться. Температура $T_i = 2a/Rb = (27/4)T_к$, при которой $\Delta T = 0$, называется температурой инверсии дифференциального эффекта Джоуля — Томсона. При $T < T_i$ газ будет охлаждаться, при $T > T_i$ — нагреваться. Для большинства газов температура T_i значительно выше комнатной.

Для идеального газа эффект Джоуля — Томсона отсутствует.

Эффект Джоуля — Томсона используется в технике для получения низких температур.

Глава V

Термодинамика

19. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ТЕЛ

19.1. Задачи и методы теории теплоты

Теорией теплоты или *термодинамикой* называется раздел физики, изучающий общие свойства вещества, связанные с тепловым движением в условиях термодинамического равновесия. Под термодинамическим равновесием понимают такое состояние системы, при котором макроскопические величины — параметры [19.2], определяющие ее состояние, остаются со временем постоянными и равными своим средним значениям. Здесь под системой понимается совокупность рассматриваемых тел и полей. Понятие о термодинамическом равновесии является идеализацией. Параметры состояния при равновесии, строго говоря, испытывают самопроизвольные небольшие колебания вблизи своих равновесных значений, равных их средним. Такие беспорядочные изменения значений параметров называют *флуктуациями*. Понятие термодинамического равновесия имеет смысл лишь по отношению к системе, состоящей из очень большого числа частиц. При таком равновесии происходят процессы на молекулярном уровне, а все макроскопические процессы прекращаются.

Термодинамика изучает также медленные *процессы*, называемые *квазистатическими*, которые могут рассматриваться как непрерывная последовательность практически равновесных состояний [20.3.1]. Она изучает общие закономерности перехода систем в состояния термодинамического равновесия. Исследованием флуктуаций занимается статическая термодинамика. Все термодинамические процессы сопровождаются обменом или превращением энергии.

В основе теоретических построений термодинамики положены аксиомы или начала термодинамики, которые являются обобщением опытных данных [20; 21].

Систему, состоящую из макроскопических тел и полей, которые могут обмениваться энергией как между собой, так и с внешними телами и полями (с внешней средой), называют *термодинамической системой*. Обмен энергией в термодинамической системе и между ней и внешней средой осуществляется в форме работы и теплоты.

Общее начало термодинамики: *вне зависимости от начального состояния изолированной (замкнутой) термодинамической системы в ней через некоторое конечное время всегда установится термодинамическое равновесие.* Под изолированной (замкнутой) системой в термодинамике понимают систему, которая не обменивается энергией с окружающей ее внешней средой. Если отсутствует теплообмен между системой и внешней средой, то говорят об адиабатически изолированной системе [20.3.1]. Если *система* обменивается энергией с внешней средой только путем теплообмена, то такая система называется *изолированной* в механическом отношении.

19.2. Термодинамические параметры состояния системы

Из опыта следует, что некоторые свойства вещества могут быть исследованы с помощью макроскопических величин, характеризующих вещество в целом. Знание детального механизма молекулярного движения при этом не требуется. Такие макроскопические величины в термодинамике называют *термодинамическими параметрами состояния*. К ним относятся: *давление, температура, плотность, концентрация, объем системы* и др. Состояние вещества, описываемое макроскопическими параметрами, называют *макроскопическим состоянием* или *макросостоянием*. Термодинамические параметры состояния имеют смысл средних значений некоторых функций за большой промежуток времени, полностью характеризующих состояние системы. Так, плотность вещества и давление постоянно беспорядочно изменяются со временем (флуктуируют). Физическая причина этому — тепловое движение молекул. В случае плотности $\rho = m/V$ тепловое движение приводит к изменению числа молекул в малой области с объемом V и, следовательно, к изменению плотности в этой области. Аналогично давление $P = F/S$ также флуктуирует за счет изменения числа молекул, ударяющих в малую поверхность S. Опыт показывает, однако, что за промежуток времени $t \gg t_c$, где t_c — время одного столкновения, при неизменных внешних условиях величины ρ и P приближаются к определенным пределам $\overline{\rho}$ и $\overline{P}$, которые и принимаются при макроскопическом описании состояния вещества за его плотность и давление. Подобным образом ведут себя и другие термодинамические параметры.

В термодинамике различают *внутренние* и *внешние макроскопические параметры* состояния вещества. Внутренние параметры описывают внутреннее состояние системы. Они зависят от (обобщенных) координат внешней среды и от средних значений координат и скоростей молекул системы. Внешние параметры характеризуют внешнюю среду, воздействующую на термодинамическую систему. Эти параметры определяются (обобщенными) координатами внешней среды.

Одни и те же параметры в различных термодинамических системах могут быть как внешними, так и внутренними. Так, для газа, заключенного в некоторый постоянный объем V, давление P — внешний параметр, а объем V — внутренний. Для газа, помещенного в цилиндр с подвижным поршнем, на который действует сила F, давление $P = F/S$ — внутренний параметр, а объем V — внешний параметр.

Из опытных данных следует, что в состоянии термодинамического равновесия каждый внутренний параметр однозначно определяется внешними параметрами и температурой системы. Функцию, описывающую такую связь, называют *обобщенным уравнением состояния* системы.

20. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое начало термодинамики есть закон сохранения энергии для изолированной термодинамической системы. Оно устанавливает однозначную связь между количеством теплоты, сообщенной замкнутой системе, и изменениями ее внутренней энергии и выполненной за счет этой теплоты работы [20.3.1] над внешней средой.

20.1. Количество теплоты. Теплоемкость тела

Количеством теплоты Q называется энергия, которую передает одно тело другому непосредственно при контакте или путем излучения. Процесс передачи теплоты связан с работой, которую совершают молекулы вещества при хаотическом движении.

Единицей количества теплоты в СИ является джоуль (Дж):

$$[Q] = \text{Дж}.$$

Ранее использовалась единица теплоты калория:

$$1 \text{ кал} = 4{,}1868 \text{ Дж}.$$

Подобно другим видам энергии количество теплоты подчиняется закону сохранения. Если тело участвует в процессе, в котором оно получает и отдает теплоту, то количеству теплоты, которое получает это тело, приписывают знак плюс, а количеству теплоты, которое оно отдает,— знак минус.

Элементарное количество теплоты δQ, сообщаемое телу для изменения его температуры от T до $T + dT$, определяется формулой

$$\delta Q = C dT, \qquad (20.1)$$

где C характеризует вещество, из которого сделано тело, и называется теплоемкостью тела [20.3.2]. Из (20.1) следует, что

$$C = \delta Q / dT, \qquad (20.2)$$

т. е. теплоемкость какого-либо тела есть величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один кельвин. Теплоемкость C зависит от массы тела, его химического состава и термодинамического состояния.

Различают удельную и молярную теплоемкости. *Удельной теплоемкостью* c называется теплоемкость единицы массы вещества. Если тело однородно, то $c = C/m$, где m — масса тела. Более удобной в термодинамике является *молярная* или *молекулярная теплоемкость*. Так называют теплоемкость одного моля вещества и обозначают C. Между молярной и удельной теплоемкостями существует простая связь: $c = C/M$, где M — молярная масса вещества.

Единицами удельной c и молярной C теплоемкости в СИ являются:

$$[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \quad [C] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot K}.$$

Из опыта следует, что количество теплоты, а значит, и теплоемкость зависит от вида термодинамического процесса, изменяющего состояние системы. Теплота (как и работа) не является функцией состояния. Математически это выражается в том, что элементарное количество теплоты не является полным дифференциалом, и обозначается δQ, т. е. δQ есть бесконечно малая величина, но не приращение функции Q.

С физической точки зрения различают два типа теплоемкости: при постоянном объеме и при постоянном давлении. Теплоемкостью при постоянном объеме V называют теплоемкость (удельную и молярную), которую определяют при нагревании тела при постоянном объеме: $V = \text{const}$ (обозначают c_V и C_V). Теплоемкостью при постоянном давлении P называют теплоемкость (удельную и молярную), которую определяют при нагревании тела при постоянном давлении: $P = \text{const}$ (обозначают c_P и C_P) [20.3.2].

Таблица 20.1. **Удельная теплоемкость c_P некоторых веществ в твердом и жидком состояниях**

Твердое состояние	T, °С	c_P, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$	Жидкое состояние	T, °С	c_P, $\frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$
Алюминий	20	0,896	Азотная кислота	20	1,72
Бериллий	20	1,750	Алюминий	660,4—1000	1,084
Бетон	0	0,84	Анилин	0	2,018
Бетон	20	0,88	Анилин	20	2,641
Ванадий	20	0,502	Анилин	50	2,144
Висмут	20	0,123	Ацетон	0	2,114
Вольфрам	20	0,134	Ацетон	20	2,160
Дерево (дуб)	0—100	2,39	Бензин	10	1,42
Железо	20	0,452	Бензин	50	2,09
Золото	20	0,129	Вода	20	4,182
Кремний	0	0,678	Глицерин	20	2,43
Магний	0	1,001	Золото	1065—1300	0,142
Медь	20	0,383	Керосин	20—100	2,085
Натрий	0	1,189	Литий	200—1000	4,19
Никель	0	0,442	Магний	651	1,327
Ниобий	0	0,268	Масло (подсолн.)	20	1,775
Олово	0	0,225	Мед	20	2,428
Песок	0—100	0,79	Молоко (цельн.)	20	3,936
Платина	0	0,133	Олово	250	0,243
Свинец	0	0,128	Ртуть	0	0,1465
Сера	0	0,699	Ртуть	20	0,1390
Серебро	0	0,233	Ртуть	100	0,1373
Слюда	20	0,88	Ртуть	300	0,1359
Соль (NaCl)	25	0,87	Свинец	327,4	0,163
Тантал	0	0,137	Серебро	961—1300	0,289
Текстолит	20	1,47	Серная кислота	20	1,38
Титан	20	0,611	Сероуглерод	20	1,00
Углерод (алмаз)	20	0,502	Скипидар	20	1,800
Углерод (графит)	0	0,641	Спирт метиловый	0	2,43
Уран	25	0,134	Спирт этиловый	0	2,30
Хром	0	0,427	Спирт этиловый	20	2,47
Цезий	20	0,230	Спирт этиловый	50	2,81
Цинк	20	0,385	Топливо Т-1	20	2,01
Цирконий	20	0,289	Топливо ТС-Т	20	0,84
			Фреон-12	20	2,01

Общее количество теплоты Q, необходимое для повышения температуры тела от T_1 до T_2, определяется формулой

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C dT. \qquad (20.3)$$

Зная Q, можно найти среднюю теплоемкость

$$\bar{C} = Q/\Delta T, \qquad (20.4)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$ — изменение температуры тела.

Теплоемкости твердых тел, жидкостей и газов зависят от их температуры. В диапазонах температур от —40 °С до + 100 °С для ряда твердых тел и от 0 °С до 40 °С для жидкостей, однако, удельные теплоемкости остаются практически постоянными, равными своим средним значениям. В табл. 20.1 приведены теплоемкости некоторых веществ в твердом и жидком состояниях.

Удельная теплоемкость любого вещества увеличивается с повышением температуры. В диапазоне температур от T_1 до T_2, где она слабо изменяется, количество теплоты Q, необходимое для нагревания тела от T_1 до T_2, определяется формулой

$$Q = cm\Delta T, \qquad (20.5)$$

Таблица 20.2. Удельные теплоемкости c_P и c_V некоторых газов при $T = 20$ °С, $P = 101{,}325$ кПа

Газ	c_P, кДж/(кг·К)	c_V, кДж/(кг·К)	c_P/c_V
Азот	1,051	0,745	1,40
Аммиак	2,244	1,675	1,31
Аргон	0,523	0,322	1,67
Ацетилен	1,683	1,352	1,25
Водород	14,269	10,132	1,41
Воздух	1,009	0,720	1,40
Гелий	5,296	3,182	1,66
Кислород	0,913	0,653	1,40
Криптон	0,251	0,151	1,67
Ксенон	0,159	0,096	1,70
Метан	2,483	1,700	1,31
Неон	1,038	0,620	1,68
Оксид азота (I)	0,913	0,715	1,27
Оксид азота (II)	0,976	0,695	1,40
Оксид серы (IV)	0,645	0,502	1,29
Оксид углерода (II)	1,047	0,754	1,40
Оксид углерода (IV)	0,837	0,653	1,30
Пропан	1,863	1,650	1,13
Сероводород	1,026	0,804	1,34
Хлор	0,520	0,356	1,36
Этан	1,729	1,444	1,20
Этилен	1,528	1,222	1,25

где c — удельная теплоемкость, m — масса тела, $\Delta T = T_2 - T_1$. Количества теплоты Q_V и Q_P, необходимые для нагрева газа в диапазоне температур от T_1 до T_2 при постоянных объеме V и давлении P, где удельные теплоемкости c_V и c_P остаются практически постоянными, выражаются соотношениями

$$Q_V = c_V m\Delta T, \; Q_P = c_P m\Delta T, \qquad (20.6)$$

где $\Delta T = T_2 - T_1$, c_V и c_P — удельные теплоемкости газа при постоянном объеме V и давлении P, m — масса газа. При нагреве газа при постоянном давлении P его объем увеличивается. Количества теплоты Q_V и Q_P связаны между собой соотношением

$$Q_P = Q_V + A, \; A = P\Delta V, \qquad (20.7)$$

где A — работа, совершаемая газом при увеличении его объема на ΔV при нагревании при постоянном давлении P. Из (20.7) следует, что всегда $c_P > c_V$ [16.6.2; 20.3.2]. Удельные теплоемкости некоторых газов приведены в табл. 20.2.

20.2. Теплообмен

20.2.1. Уравнение теплового баланса. Из опыта следует, что если два или несколько тел с различными температурами привести в соприкосновение, то между ними будет происходить процесс передачи теплоты от более нагретого тела к менее нагретому, который приведет к выравниванию температур. Под теплообменом или *теплопередачей* в термодинамике понимают самопроизвольный необратимый процесс переноса определенного количества теплоты между телами, или частями одного тела, имеющими различную температуру. Физически строгое определение теплообмена может быть дано с помощью понятия внутренней энергии тела [16.6.2; 20.3.1]: *теплообменом* называется процесс обмена внутренними энергиями соприкасающихся тел или частей одного тела, который не сопровождается выполнением макроскопической работы. Количественной характеристикой этого процесса является количество теплоты Q [20.1].

При теплообмене выполняется **закон сохранения количества теплоты:** *количество теплоты, отдаваемое телом с более высокой температурой, Q_1, равно количеству теплоты Q_2, которое получает тело с более низкой температурой*: $Q_1 = Q_2$. Если c_1, m_1, T_1, и c_2, m_2, T_2 — удельная теплоемкость, масса, температура тел 1 и 2, то согласно **закону Рихмана**

$$c_1 m_1 (T_1 - T) = c_2 m_2 (T - T_2), \qquad (20.8)$$

где для определенности выбрано $T_1 > T > T_2$, T — конечная температура обоих тел после установления теплового равновесия. Уравнение (20.8) называется *уравнением теплового баланса*. В случае, если в процессе теплообмена участвует N тел с массами m_i, удельными теплоемкостями c_i и температурами T_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, агрегатное состояние которых при этом не изменяется, то уравнение теплового баланса имеет вид

$$c_1 m_1 (T_1 - T) + c_2 m_2 (T_2 - T) + \cdots + c_N m_N (T_N - T) = 0, \qquad (20.9)$$

где T — конечная температура системы N тел. Если агрегатное состояние какого-то тела или нескольких тел изменяется в процессе теплообмена [22.2], то к уравнению (20.9) следует добавить высвобожда-

ющееся при этом количество теплоты в одном случае и отнять поглощающееся количество теплоты в другом. Пусть, например, три жидкости обмениваются теплотой и при этом первая жидкость не изменяет своего агрегатного состояния, вторая частично затвердевает, а третья частично испаряется. Тогда уравнение теплового баланса можно записать в виде

$$c_1 m_1 (T_1 - T) + c_2 m_2 (T_2 - T_{пл}) + Q_{пл} + c_3 m_3 (T_3 - T_{кип}) - Q_{кип} = 0, \quad (20.10)$$

где $T_2 > T_{пл} > T$, $T_{пл}$ — температура затвердевания жидкости 2, $Q_{пл} = \lambda m_2'$ — количество теплоты, необходимое для плавления твердого тела в жидкость 2 с массой m_2', λ — удельная теплота плавления [22.2.1], $T > T_{кип} > T_3$, $T_{кип}$ — температура кипения жидкости 3, $Q_{кип} = r m_3'$ — количество теплоты, необходимое для превращения массы m_3' жидкости 3 в пар, r — удельная теплота парообразования [22.2.2]. В процессе, описываемом уравнением (20.10), тело 2 отдает теплоту ($T_2 > T_{пл}$), тело 3 — принимает теплоту ($T_3 < T_{кип}$), а тело 1 может как отдавать ($T_1 > T_3 > T$), так и принимать ($T_2 > T > T_1$) теплоту.

20.2.2. Процессы передачи теплоты. Различают три вида теплопередачи. 1. *Теплопроводность* [15.5.3] — передача теплоты от одного тела к другому при их контакте или от одной, более нагретой части тела к другой, менее нагретой, без переноса молекул. Физическая природа теплопроводности состоит в том, что молекулы тела (или его части) с более высокой температурой обладают большей кинетической энергией и передают ее соседним молекулам другого тела (или его части), обладающим меньшей кинетической энергией и, следовательно, меньшей температурой. Количество теплоты Q, передаваемое при теплопроводности за время τ:

$$Q = q\tau, \quad (20.11)$$

где q — тепловой поток (15.16). В случае, если проводник теплоты имеет конечную длину l, поперечное сечение S, а разность температур на его концах равна ΔT, то передаваемое количество теплоты Q можно определить по формуле

$$Q = \varkappa \frac{\Delta T}{l} S\tau, \quad (20.12)$$

где τ — продолжительность процесса теплопроводности, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Вступая в контакт с твердым телом, имеющим другую температуру, жидкость (газ) либо отдает ему теплоту, либо получает теплоту от него. Такое явление называют *теплоотдачей*. Пусть разность температур поверхности твердого тела и жидкости (газа) равна ΔT. Тогда количество теплоты Q, проходящее через поверхность соприкосновения площадью S за время τ, определяется формулой

$$Q = \alpha S\tau \Delta T, \quad (20.13)$$

где α называется *коэффициентом теплоотдачи*. Числовое значение α зависит от состава жидкости (газа), от скорости ее (его) движения v, от чистоты обработки поверхности твердого тела, но не зависит от его состава. Опытным путем найдены следующие эмпирические соотношения для определения α:

конденсирующийся водяной пар, $\alpha = 10500$;

воздух — гладкая поверхность, $\alpha = 5{,}6 + 4v$;

текущая вода — металлическая стенка, $\alpha = 350 + 2100\sqrt{v}$;

спокойная вода — металлическая стенка, $350 \leqslant \alpha \leqslant 580$, где

$$[\alpha] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}, \quad [v] = \text{м/с}.$$

В процессе теплоотдачи разность температур остается постоянной: $\Delta T = \text{const}$. В месте теплоотдачи происходит скачок температуры (рис. 20.1).

Величину $1/\alpha S$ иногда называют *тепловым сопротивлением*. Теплота может передаваться от одного вещества другому через третье тело. Если две жидкости (газа), имеющие различную температуру, разделены твердым телом (перегородкой), то сначала происходит теплоотдача из первой жидкости (газа) твердому телу через поверхность перегородки в соответствии с формулой (20.13), затем идет процесс теплопроводности через перегородку (формула (20.12)) и, наконец, теплоотдача

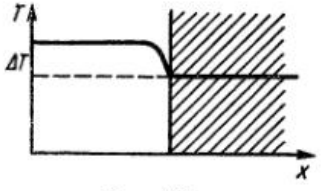


Рис. 20.1

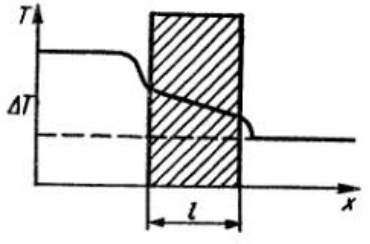


Рис. 20.2

с поверхности перегородки ко второй жидкости (газу) (формула (20.13)). Из закона сохранения количества теплоты Q следует формула, описывающая процесс теплопередачи:

$$Q = kS\tau\Delta T, \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{l}{\varkappa}, \quad (20.14)$$

где k называется *коэффициентом теплопередачи*, α_1, α_2 — коэффициенты теплоотдачи на двух сторонах перегородки, $\varkappa$ — теплопроводность перегородки, S — площадь перегородки, l — ее толщина, ΔT — разность температур, τ — время протекания процесса (рис. 20.2). Коэффициент k зависит от толщины перегородки l и ее теплопроводности $\varkappa$. Единицами измерения коэффициентов $\varkappa$, α, k являются:

$$[\varkappa] = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad [\alpha] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}, \quad [k] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

2. *Конвекция* — перенос теплоты потоком жидкости или газа. Передача теплоты при конвекции осуществляется путем перемешивания и перемещения холодных и теплых слоев жидкого или газообразного веществ. Свободная конвекция (без внешних воздействий) осуществляется вследствие того, что теплые слои жидкостей и газов имеют меньшую плотность, чем холодные, и поэтому поднимаются вверх, перенося при таком движении теплоту. При низком давлении газа его плотность мала и конвекция отсутствует. Это свойство используется в термосах (сосудах Дьюара, 1892). При конвекции теплота передается вместе с потоком нагретой жидкости (газа).

3. *Тепловое излучение* — перенос теплоты с помощью электромагнитных волн [23].

20.3. Первое начало термодинамики

20.3.1. Работа, внутренняя энергия, энтальпия. *Элементарная работа* δA, совершаемая системой при бесконечно малом квазистатическом расширении, сопровождающимся увеличением ее объема на dV, выражается так [5.1]:

$$\delta A = Fdx = PSdx = PdV, \qquad (20.15)$$

где $dV = Sdx$ — приращение объема, S — площадь поверхности, перпендикулярно которой действует сила F, P — давление.

Квазистатическим или *квазиравновесным процессом* называют такой идеализированный процесс, при котором система непрерывно переходит из одного равновесного состояния в другое близлежащее состояние равновесия. В случае квазистатических процессов внутреннее давление газа P всегда равно внешнему давлению P', $P = P'$, и $\delta A' = -\delta A$, где $\delta A' = -P'dV$ — работа внешних сил. Полная работа для конечного процесса между состояниями 1 и 2 определяется формулой

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} PdV. \qquad (20.16)$$

Так как в общем случае давление P является функцией не только объема V, но и температуры T, т. е. $P = P(V, T)$ [17, 18], то работа A_{12} (20.16) не определяется заданием начального и конечного состояний системы и зависит от способа (пути) перехода системы из одного состояния в другое. Работа A_{12} не является функцией состояния. Поэтому для обозначения элементарной работы используют символ δA (а не dA), подчеркивая тем самым тот факт, что она не есть полный дифференциал функции A. Используя уравнение состояния вещества, работу A_{12} можно найти в явном виде [17.3.2; 17.3.3].

Если система имеет много степеней свободы, а ее внутреннее состояние описывается внешними параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и температурой T, то элементарная работа δA, совершаемая системой над внешними телами, по определению имеет вид

$$\delta A = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n, \qquad (20.17)$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — функции внешних параметров состояния системы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называемые *обобщенными силами*. В случае, например, прямоугольного параллелепипеда из однородного изотропного вещества $n = 3$ и $X_1 = P_1 S_1$, $X_2 = P_2 S_2$, $X_3 = P_3 S_3$, где P_1, P_2, P_3 — нормальные давления, действующие на грани параллелепипеда с площадями S_1, S_2, S_3, а dx_1, dx_2, dx_3 — удлинения его ребер.

Систему называют *адиабатически изолированной*, если любые изменения температуры внешней среды не влияют на ее состояние. Состояние такой системы можно изменить, только изменяя внешние параметры. Для адиабатически изолированной системы ее внутреннюю энергию [16.6.2] можно определить как некоторую функцию состояния U, приращение которой равно работе внешних сил A'_{12} над системой при переходе ее из начального состояния 1 в конечное состояние 2 по любому пути:

$$A_{12} = U_2 - U_1, \qquad (20.18)$$

где U_1 и U_2 — внутренние энергии системы в состояниях 1 и 2. Для квазистатического процесса $A'_{12} = -A_{12}$ и

$$A_{12} = U_1 - U_2 \qquad (20.19)$$

— работа системы над внешней средой при адиабатических процессах совершается за счет уменьшения внутренней энергии. Определение внутренней энергии системы в форме (20.18) позволяет измерить эту величину на опыте.

Согласно **первому началу термодинамики** *количество теплоты* δQ, *сообщенное системе, равно сумме изменения ее внутренней энергии* dU *и работы, совершаемой системой над внешней средой* δA:

$$\delta Q = dU + \delta A, \qquad (20.20)$$

или в интегральной форме

$$Q = \Delta U + A_{12} \qquad (20.21)$$

— полное количество теплоты Q, полученное системой, идет на приращение ее внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и на совершение работы над внешней средой A_{12}.

Следствие первого начала термодинамики: если $U_2 = U_1$, то $Q = A_{12}$ — при круговом или циклическом процессе вся теплота, полученная системой, идет на производство работы над внешней средой. Отсюда следует, что невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы производство работы системой без изменения ее внутренней энергии.

Первое начало термодинамики эквивалентно утверждению о невозможности создания *вечного двигателя первого рода* — устройства, которое при циклическом процессе совершало бы работу неограниченно долго во времени, не получая энергию (количество теплоты) из внешней среды.

Для процесса, происходящего в системе при постоянном объеме, согласно (20.16), работа $A_{12} = 0$ и

$$Q = \Delta U \quad (V = \text{const}). \qquad (20.22)$$

Для процесса, происходящего в системе при постоянном давлении, работа A_{12} (20.16) определяется формулой $A_{12} = P(V_2 - V_1) = P\Delta V = \Delta(PV)$ и

$$Q = \Delta I \quad (P = \text{const}), \qquad (20.23)$$

где $\Delta I = I_2 - I_1$ — приращение энтальпии системы при переходе ее из состояния 1 в состояние 2. *Энтальпией* или *тепловой функцией* I называется величина

$$I = U + PV, \qquad (20.24)$$

где U — внутренняя энергия, P — давление, V — объем системы. Энтальпия I есть функция соетояния, приращение которой ΔI при изобарическом процессе ($P = \text{const}$) определяет количество теплоты Q, полученное системой.

Внутренняя энергия U есть функция состояния, приращение которой ΔU при изохорическом процессе ($V = \text{const}$) определяет количество теплоты Q, полученное системой. Согласно (20.22) и (22.23) величина Q имеет различный физический смысл для различных термодинамических процессов [20.4].

Таким образом, внутренняя энергия системы U, энтальпия I, давление P, объем V и температура T являются функциями состояния, а их бесконечно малые изменения dU, dI, dP, dV и dT представляют собой полные дифференциалы от соответствующих функций. Количество теплоты Q и работа A не являются функциями состояния, а их бесконечно малые изменения δQ и δA не есть приращения определенных функций.

20.3.2. Уравнение Майера. Первое начало термодинамики (20.20) позволяет дать строгое определение понятия теплоемкости системы (20.2), связав его с внутренней энергией U, давлением P, объемом V, температурой T и энтальпией I:

$$C = \frac{dU + \delta A}{dT} = \frac{dU + PdV}{dT}, \tag{20.25}$$

или в явном виде

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\frac{dV}{dT}, \tag{20.26}$$

где использовано представление для полного дифференциала вида

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV. \tag{20.27}$$

Величину

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{20.28}$$

называют *теплоемкостью системы при постоянном объеме* ($V = \text{const}$), а величину

$$C_P = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P \tag{20.29}$$

называют *теплоемкостью системы при постоянном давлении* ($P = \text{const}$). В случае идеального газа элементарное изменение внутренней энергии dU одного моля газа определяется соотношением [16.6.2]

$$dU = C_V dT = \delta Q \ (V = \text{const}), \tag{20.30}$$

а между молярными теплоемкостями C_V и C_P существует простая связь [20.1]

$$C_P - C_V = R, \tag{20.31}$$

где R — универсальная газовая постоянная (16.3). Соотношение (20.31) называется *уравнением Майера* (1937). Для любого вещества можно определить характерную для него величину

$$\gamma = C_P/C_V = c_P/c_V, \tag{20.32}$$

называемую *показателем адиабаты*. Здесь C_P и C_V — молярные, а c_P и c_V — удельные теплоемкости при $P = \text{const}$ и $V = \text{const}$ соответственно. Из уравнения Майера (20.31) следуют соотношения

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \ c_V = \frac{R}{(\gamma - 1)M}, \ C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \ c_P = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M}, \tag{20.33}$$

где M — молярная масса (14.5). Показатель адиабаты γ однозначно связан с числом степеней свободы молекулы вещества ([16.6.2], формула (16.43)).

20.3.3. Тепловой эффект. Уравнение Кирхгофа. *Тепловым эффектом* $\mathscr{Q}$ равновесного процесса называют величину

$$\mathscr{Q} = -\Delta U - \int_{(1)}^{(2)} PdV = -\Delta I + \int_{(1)}^{(2)} VdP, \tag{20.34}$$

где $\Delta U = U_2 - U_1$ — изменение внутренней энергии системы при ее переходе из состояния 1 в состояние 2, $\Delta I = I_2 - I_1$ — соответствующее этому изменение энтальпии. Тепловой эффект $\mathscr{Q}$ процесса есть сумма количества теплоты, отданного системой в результате процесса, и теплового эквивалента работы, равного разности полной работы и работы системы при ее расширении. При изохорическом процессе $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}_V$,

$$\mathscr{Q}_V = -\Delta U \ (V = \text{const}), \tag{20.35}$$

при изобарическом процессе $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}_P$,

$$\mathscr{Q}_P = -\Delta I \ (P = \text{const}). \tag{20.36}$$

Эти соотношения называют законом Гесса. Из них следуют *уравнения Кирхгофа* для изохорического и изобарического тепловых эффектов $\mathscr{Q}_V$ и $\mathscr{Q}_P$:

$$\left(\frac{\partial \mathscr{Q}_V}{\partial T}\right)_V = C_{V1} - C_{V2}, \ \left(\frac{\partial \mathscr{Q}_P}{\partial T}\right)_P = C_{P1} - C_{P2}, \tag{20.37}$$

где C_{V1}, C_{P1} и C_{V2}, C_{P2} — теплоемкости системы (20.28), (20.29) в начальном (1) и конечном (2) состояниях.

20.4. Термодинамические процессы в идеальных газах

20.4.1. Адиабатический процесс. *Адиабатическим процессом* называется такой термодинамический процесс, при котором система не поглощает и не отдает теплоту: $\delta Q = 0$. Первое начало термодинамики (20.20) при $\delta Q = 0$,

$$C_V dT + PdV = 0, \tag{20.38}$$

с учетом выражения

$$dT = (PdV + VdP)/R,$$

приводит к дифференциальному уравнению процесса

$$\frac{dP}{P} = -\gamma\frac{dV}{V}, \tag{20.39}$$

где γ — показатель адиабаты (20.32), P — давление, V — объем. Решение уравнения (20.39) имеет вид

$$PV^\gamma = \text{const}. \tag{20.40}$$

Это соотношение называется *уравнением Пуассона*. В соответствии с уравнением Клапейрона — Менделеева (17.3) формулу (20.40) можно записать в другой форме:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \ T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{const}. \tag{20.41}$$

Уравнения (20.40), (20.41) применимы только для описания квазистатических адиабатических процессов. Так как $\gamma > 1$, то при адиабатическом сжатии газ нагревается, а при адиабатическом расширении охлаждается. Уравнения Пуассона (20.40) и (20.41) справедливы лишь в интервале давлений, где величина γ постоянна. В общем случае нужно

учитывать, что γ есть функция давления P, объема V и температуры T, т. е. $\gamma = \gamma(P, V, T)$.

Работа A_{12}, совершаемая газом при адиабатическом изменении объема от V_1 до V_2, определяется формулой

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} PdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] =$$

$$= \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{m}{M}\,\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = c_V m (T_1 - T_2), \tag{20.42}$$

где P_1, T_1 — давление и температура в начальном состоянии 1, T_2 — температура в конечном состоянии 2, c_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, m — масса газа M — молярная масса газа, R — универсальная газовая постоянная (16.3).

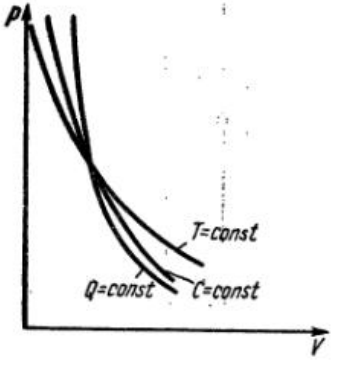


Рис. 20.3

При адиабатическом процессе с увеличением объема газа давление уменьшается быстрее, чем при изотермическом [17.3.2] (рис. 20.3), а совершаемая работа при одном и том же изменении объема A_{12} меньше. Работа при адиабатическом процессе существенно зависит от показателя адиабаты γ (20.32). При $\gamma \to 1$ она стремится к значению работы при изотермическом процессе (17.9). В пределе $\gamma \to 1$ адиабата ($Q = \text{const}$) переходит в изотерму ($T = \text{const}$) (рис. 20.3).

20.4.2. Политропический процесс. *Политропическим процессом* называется термодинамический процесс, при котором теплоемкость $C = \delta Q/dT$ (20.2) остается постоянной: $C = \text{const}$. Первое начало термодинамики (20.20) в этом случае имеет вид

$$(C - C_V)\,dT = PdV \tag{20.43}$$

и с учетом $dT = (PdV + VdP)/R$ приводит к уравнению процесса

$$n\frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P},\quad n = \frac{C - C_P}{C - C_V}, \tag{20.44}$$

где n — показатель политропы. Решение дифференциального уравнения (20.44) имеет вид

$$PV^n = \text{const}, \tag{20.45}$$

где P — давление газа, V — объем газа. При политропическом процессе происходит частичный теплообмен системы со средой. Он занимает промежуточное положение между изотермическим ($T = \text{const}$) и адиабатическим ($Q = \text{const}$) процессами. Кривая, описываемая уравнением (20.45), называется *политропой*. На $P - V$ диаграмме она располагается между изотермой и адиабатой (рис. 20.3).

В соответствии с уравнением Клапейрона — Менделеева (17.3) уравнение политропы (20.45) можно представить в другой, эквивалентной (20.45), форме

$$TV^{n-1} = \text{const},\quad T^n P^{1-n} = \text{const}. \tag{20.46}$$

Работа A_{12}, совершаемая газом при политропическом процессе, определяется формулой

$$A_{12} = \frac{m}{M}\,\frac{R}{n-1}(T_1 - T_2), \tag{20.47}$$

где m — масса газа, M — молярная масса газа, R — универсальная газовая постоянная (16.3), n — показатель политропы (20.44), T_1 и T_2 — начальная и конечная температура. Если $T_2 > T_1$, то $A_{12} < 0$ — работа совершается над газом и он сжимается.

Числовое значение показателя политропы n определяется опытным путем. Зависимость теплоемкости C от n для идеального газа показана на рис. 20.4.

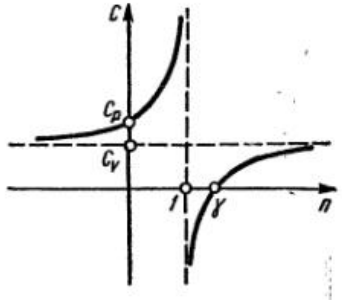


Рис. 20.4

Предельные случаи политропического процесса:

1) адиабатический процесс [20.4.1]

$$C = 0,\quad n = \gamma = C_P/C_V$$

и

$$PV^\gamma = \text{const},\quad dU = C_V dT = -\delta A,\quad dI = C_P dT = -\gamma\delta A;$$

2) изотермический процесс [17.3.2]

$$C = \infty,\quad n = 1$$

и

$$PV = \text{const},\quad T = \text{const},\quad \delta A = PdV,\quad dU = 0,\quad dI = 0,\quad \delta Q = \delta A;$$

3) изобарический процесс [17.3.3]

$$C = C_P,\quad n = 0$$

и

$$V/T = \text{const},\quad P = \text{const},\quad \delta A = PdV,\quad dU = C_V dT,\quad dI = dU + PdV = \delta Q = C_P dT;$$

4) изохорический процесс [17.3.4]

$$C = C_V,\quad n = \infty$$

и

$$P/T = \text{const},\quad V = \text{const},\quad \delta A = 0,\quad dU = C_V dT = \delta Q,\quad dI = dU + VdP = C_P dT.$$

Здесь использованы обозначения: P, V, T — давление, объем, температура газа; C — теплоемкость (20.2); C_P и C_V — молярные теплоемкости

газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно dU, dT, δA, δQ, dI — бесконечно малые изменения внутренней энергии U, температуры T, работы над внешней средой A, количества теплоты Q и энтальпии I для одного моля газа.

21. ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ

Второе и третье начала термодинамики устанавливают жесткие ограничения на протекание в изолированных системах обратимых и необратимых термодинамических процессов. Второе начало позволяет сделать вывод о направлении процесса и записать точные количественные соотношения между различными макроскопическими параметрами системы в состоянии термодинамического равновесия [19.1].

21.1. Обратимые и необратимые процессы

Обратимым термодинамическим процессом называется такое изменение состояния системы, при котором она может возвращаться в начальное состояние без остаточных изменений в системе и во внешней среде. При этом предполагается прохождение системой в обратном порядке тех же промежуточных состояний, что и в прямом процессе. Процесс, в результате которого система не может возвратиться в начальное состояние без возникновения остаточных изменений в системе или окружающей среде, называется *необратимым процессом*. Переход теплоты от более нагретого тела к менее нагретому телу при их контакте является примером необратимого процесса.

Бесконечно медленный процесс, состоящий из непрерывной последовательности состояний равновесия или состояний, бесконечно мало отличающихся от равновесных, называется *квазистатическим* или *равновесным процессом*. Равновесные процессы являются обратимыми.

Реальные процессы могут приближаться сколь угодно близко к равновесному, если они протекают достаточно медленно. Необратимость процессов в природе не вытекает из первого начала термодинамики [20.3].

Самопроизвольный, т. е. без внешних воздействий, процесс перехода системы из неравновесного состояния в равновесное называется *процессом релаксации* или просто *релаксацией*. Время такого перехода называют *временем релаксации*. Каждый параметр системы имеет свое время релаксации.

21.2. Циклические процессы

21.2.1. Тепловой двигатель. Второе начало термодинамики. *Циклическим* или *круговым процессом* называется такая последовательность термодинамических процессов, в результате которых система возвращается в начальное состояние. На диаграммах этот процесс изображается замкнутой кривой. На рис. 21.1 показана $P-V$ диаграмма кругового процесса. В процессе, происходящем по направлению часовой стрелки (*1a2b1*), теплота превращается в механическую энергию. В процессе, происходящем против часовой стрелки (*1b2a1*), механическая энергия превращается в теплоту. Точки *1* и *2* соответствуют начальным и конечным значениям давлений (P_1 и P_2) и объемов (V_1 и V_2) системы. Кривая *1a2* описывает переход системы из начального состояния 1 в конечное состояние 2, а кривая *2b1* — обратный процесс. Система после получения в начальном состоянии 1 определенного количества теплоты Q_1 от нагревателя совершает положительную работу $A_{12} > 0$ и переходит в конечное состояние 2. Затем после теплового контакта с холодильником она отдает ему часть количества теплоты Q_2 и за счет совершения над системой работы A'_{21} возвращается в начальное состояние. Систему, которая совершает круговой процесс, обмениваясь энергией (теплотой) с внешней средой (другими системами), называют *рабочим телом* или *веществом*. Устройство, которое совершает механическую работу за счет подводимой к нему теплоты называется *тепловым двигателем* или *машиной*. Рабочим телом в тепловых двигателях является вещество, к которому подводится теплота. Часто таким веществом является газ. Под *холодильником* понимают тело, температура которого ниже температуры рабочего тела в конечном состоянии при совершении циклического процесса. Холодильник — это тело, которому рабочее вещество передает теплоту. Тело, от которого рабочее вещество получает теплоту, называют *нагревателем*.

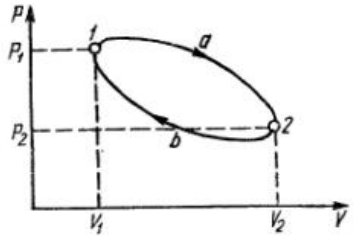


Рис. 21.1

При прямом и обратном процессах (рис. 21.1) выполняется закон сохранения энергии, который согласно первому началу термодинамики (20.21) приводит к соотношениям

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_{12}, \quad -Q_2 = U_1 - U_2 - A'_{21},$$
$$Q_1 - Q_2 = A_{12} - A'_{21}, \qquad (21.1)$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, Q_2 — количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику, U_1 и U_2 — внутренняя энергия рабочего тела в начальном и конечном состояниях, A_{12} — работа, совершаемая тепловой машиной, A'_{21} — работа внешних сил над ней. Таким образом, при совершении тепловым двигателем кругового процесса, нагреватель отдал теплоту Q_1, а холодильник получил теплоту Q_2. Их разность $Q_1 - Q_2$ затрачена на совершение работы $A = A_{12} - A'_{21}$. Отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \qquad (21.2)$$

называется *коэффициентом полезного действия* (КПД) теплового двигателя или *термическим КПД*. Тепловой двигатель характеризуют также коэффициентом

$$\zeta = Q_2/A, \qquad (21.3)$$

который равен количеству теплоты Q_2 (в джоулях), полученному холодильником, при выполнении рабочим телом работы в один джоуль. Коэффициент полезного действия η определяет работу, совершенную тепловым двигателем за один цикл и приходящуюся на единицу затраченного на этот цикл количества теплоты Q_1, подводимого от нагревателя. При этом всегда $\eta < 1$, а $\zeta < -1$.

Принцип Томсона: *невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы превращение теплоты, получаемой системой от внешней среды, в работу без изменений в окружающей среде.*

Эквивалентные формулировки принципа Томсона:

1) невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет охлаждения рабочего тела;

2) невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счет уменьшения внутренней энергии рабочего тела.

Принцип Томсона является обобщением большого числа опытных данных. Его называют также *постулатом второго начала термодинамики* или просто **вторым началом термодинамики.**

Справедливость этого постулата подтверждают многочисленные его следствия, также согласующиеся с опытом. Этот принцип является фундаментальным. Он накладывает дополнительные строгие ограничения на возможности тепловых двигателей. Так, создание тепловой машины с $Q_2 = 0$, т. е. $\eta = 1$, не противоречит первому началу термодинамики, но запрещено принципом Томсона, согласно которому нельзя

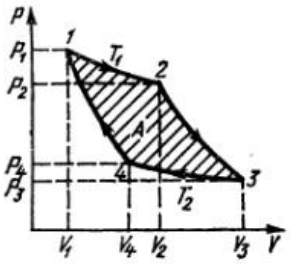


Рис. 21.2

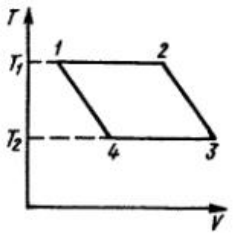


Рис. 21.3

совершать работу только за счет внутренней энергии рабочего тела. Тепловой двигатель с $\eta = 1$ называют *вечным двигателем второго рода.*

Эквивалентные формулировки второго начала термодинамики:

1) невозможен процесс, единственным результатом которого было бы превращение в работу всего количества теплоты, полученного системой;

2) нельзя построить вечный двигатель второго рода [21.3.2].

21.2.2. Цикл Карно. Теоремы Карно. *Циклом Карно* (1824) называется такой круговой процесс, при котором работа, совершаемая тепловым двигателем за счет подводимой к нему теплоты, максимальна. PV и TV диаграммы цикла Карно показаны на рис. 21.2 и 21.3. Они состоят из двух изотерм *1—2*, *3—4* и двух адиабат *2—3*, *4—1*. Для осуществления процесса необходимо иметь нагреватель (тело с температурой T_1, отдающее теплоту), холодильник (тело с более низкой температурой T_2, $T_1 > T_2$, которому теплота передается) и рабочее тело (вещество, посредством которого осуществляется передача теплоты и совершается сама работа).

Цикл Карно — квазистатический процесс. В начальном состоянии 1 рабочее тело с массой m, молярной массой M и температурой T_1 приводят в тепловой контакт с нагревателем, имеющим постоянную температуру, равную T_1. Переход из состояния 1 в состояние 2 по изотерме *1—2* ($T_1 = \text{const}$) (рис. 21.2, 21.3) соответствует бесконечно медленному уменьшению давления от P_1 до P_2 ($P_1 > P_2$) за счет квазистатического увеличения объема рабочего тела от V_1 до V_2 ($V_1 < V_2$). При этом оно получает от нагревателя количество теплоты $Q_{12} = (m/M) \times RT_1 \ln (V_2/V_1)$ и производит работу $A_{12} = Q_{12}$ против сил внешнего давления. В состоянии 2 рабочее вещество адиабатически изолируют

($Q_{23} = 0$), и далее увеличение его объема от V_2 до V_3 ($V_2 < V_3$) происходит по адиабате 2—3 до температуры холодильника T_2 ($T_2 < T_1$) и давления P_3 ($P_3 < P_2$). На участке 2—3 рабочее тело также совершает работу против сил внешнего давления, равную $A_{23} = (m/M)(R/(\gamma - 1))(T_1 - T_2)$. В состоянии 3 рабочее вещество приводят в тепловой контакт с холодильником и, непрерывно увеличивая давление от P_3 до P_4 ($P_3 < P_4$), изотермически ($T_2 = \text{const}$) сжимают его до состояния 4 с объемом рабочего тела V_4 ($V_4 < V_3$). На участке *3—4* рабочее тело отдает холодильнику количество теплоты $Q_{34} = (m/M)RT_2 \ln (V_4/V_3)$, над рабочим телом производится работа $A_{34} = Q_{34} < 0$. Состояние 4 выбирается так, чтобы из него можно было вернуть рабочее тело в состояние 1 с помощью квазистатического сжатия по адиабате *4—1* ($V_1 < V_4$, $P_1 > P_4$, $T_1 > T_2$). При таком переходе над рабочим телом также совершается работа $A_{41} = -A_{23}$, а теплота не подводится, т. е. $Q_{41} = 0$. В результате цикла Карно полная работа $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_{12} + Q_{34}$. Графически работа A представляется площадью, ограниченной кривой *12341* (заштрихованная область на рис. 21.2). Превращение теплоты в механическую энергию происходит не полностью, а лишь частично. При этом обязательно должно выполняться условие $|Q_{12}| > |Q_{34}|$. Коэффициент полезного действия по определению равен $\eta = A/Q_{12}$.

Первая теорема Карно (1824): *коэффициент полезного действия η_k теплового двигателя, работающего по циклу Карно, зависит только от температур нагревателя T_1 и холодильника T_2, но не зависит от свойств рабочего тела и конструкции двигателя*:

$$\eta_k = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \eta_k < 1. \tag{21.4}$$

Вторая теорема Карно: *из всех циклических процессов в термодинамике наибольшим коэффициентом полезного действия обладает цикл Карно*: $\eta_k \geqslant \eta$, где η определяется формулой (21.2). Из этой теоремы следует, что КПД любой тепловой машины не может превосходить КПД идеального теплового двигателя, работающего по циклу Карно при одинаковых температурах нагревателя и холодильника. При этом для процесса, рассматриваемого с точки зрения изменений состояния рабочего тела, справедливо неравенство Клаузиуса [21.3.1]

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0, \tag{21.5}$$

где Q_1 — теплота, полученная рабочим телом от нагревателя, $Q_1 > 0$, Q_2 — теплота, отданная рабочим телом холодильнику, T_1 и T_2 — температура нагревателя и холодильника. Знак равенства относится к обратимому круговому процессу. Вторая теорема Карно дает оценку для верхнего предела КПД любой реальной тепловой машины.

Теоремы Карно позволяют получать важные соотношения между физическими величинами, характеризующими систему в состоянии термодинамического равновесия. Приведем некоторые из этих соотношений для физически однородного тела, характеризуемого объемом V, температурой T и давлением P.

1. Зависимость внутренней энергии $U = U(T, V)$ от объема V:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P. \tag{21.6}$$

2. Зависимость энтальпии $I = I(T, P)$ от давления P:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V. \qquad (21.7)$$

3. Для идеального газа

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0,\ \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial U}{\partial V} = 0,\ \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = 0,\ \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = 0,$$

т. е. внутренняя энергия U и теплоемкость C_V (20.28) не зависят от объема, а энтальпия I и теплоемкость C_P (20.29) не зависят от давления. В случае идеального газа все эти величины являются функциями только температуры.

Цикл Карно, происходящий по часовой стрелке (*прямой цикл Карно*) лежит в основе работы тепловых двигателей. Цикл Карно, который выполняется против часовой стрелки (*обратный цикл Карно*), лежит в основе работы холодильных машин.

21.2.3. Термодинамическая температурная шкала. Теоремы Карно позволяют с помощью цикла Карно установить термодинамическую температурную шкалу, которая не зависит от выбора термометрического тела [14.2.4]. В случае идеальной тепловой машины $\eta = \eta_k$, где η и η_k определяются формулами (21.2) и (21.4), а отношение полученного рабочим телом от нагревателя количества теплоты Q_1 к количеству теплоты Q_2, полученного холодильником от рабочего тела, равно отношению температур нагревателя T_1 и холодильника T_2:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \qquad (21.5а)$$

Отсюда следует, что для количественного сравнения температур T_1 и T_2 тел 1 и 2 нужно с их помощью осуществить цикл Карно, в котором тело 1 будет нагревателем, а тело 2 — холодильником. Измерив соответствующие им количества теплоты Q_1 и Q_2, найдем отношение их температур.

Для построения абсолютной *термодинамической температурной шкалы* необходимо зафиксировать произвольным (наиболее удобным с практической точки зрения) образом две или одну реперные точки. В первом случае за T_1 берут нормальную точку кипения воды, $T_1 = T_{\text{кип}}$, а за T_2 — точку плавления льда, $T_2 = T_{\text{пл}}$. Их разность полагают равной $T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}} = 100$ К. Путем косвенных измерений было найдено, что в этом случае $T_{\text{кип}} \simeq 373{,}15$ К, а $T_{\text{пл}} \simeq 273{,}15$ К. Во втором случае, который является более точным, одной реперной точке приписывают определенное значение T_1 и по формуле (21.5а) находят T_2 любого другого тела. В соответствии с решением X Генеральной конференции по мерам и весам (1954) в качестве этой реперной точки берут температуру тройной точки воды, равную по определению точно 273,16 К [22.1.2].

Температуру, измеренную по абсолютной термодинамической температурной шкале, называют *абсолютной термодинамической температурой*. Абсолютная термодинамическая температура, как следует из ее определения, не может принимать отрицательных значений. Самая низкая температура, допустимая постулатом второго начала термодинамики, есть $T = 0$. Эта температура называется *абсолютным нулем температур*. Абсолютный нуль лежит на 273,16 К ниже тройной точки

воды. Согласно второму началу термодинамики нельзя охладить тело ниже абсолютного нуля. Второе начало термодинамики лишь устанавливает существование абсолютного нуля, но не отвечает на вопрос о том, можно ли его достичь.

21.3. Энтропия

21.3.1. Неравенство Клаузиуса. Пусть какая-либо термодинамическая система совершает произвольный круговой процесс, который может быть как обратимым, так и необратимым. Пусть между ней и внешней средой осуществляется теплообмен. Бесконечно малое количество теплоты, переданное системе одной или несколькими областями внешней среды, имеющими температуру T, равно δQ, а отданное системой во внешнюю среду при той же температуре T, равно $-\delta Q$. При этом температура T различных областей внешней среды может быть разной. Тогда для такого кругового процесса справедливо условие

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \equiv \int\limits_{1a2} \frac{\delta Q}{T} + \int\limits_{2b1} \frac{\delta Q}{T} < 0, \qquad (21.8)$$

где интегрирование проводится по замкнутому пути *1a2b1* (рис. 21.1). Соотношение это является фундаментальным и называется *неравенством Клаузиуса* (1854).

Для квазистатических процессов [19.1], которые являются обратимыми, условие (21.8) переходит в равенство

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0,\ \int\limits_{1a2} \frac{\delta Q}{T} = \int\limits_{1b2} \frac{\delta Q}{T}. \qquad (21.9)$$

Из этого соотношения следует, что при всяком обратимом некруговом процессе значение интеграла $\int \delta Q/T$ не зависит от пути, по которому происходит процесс.

21.3.2. Закон возрастания энтропии. По определению (Клаузиус, 1865) величина

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} \qquad (21.10)$$

называется *энтропией*. Здесь интеграл вычисляется для любого квазистатического процесса, переводящего систему из некоторого начального состояния в рассматриваемое (конечное) состояние. Из (21.10) следует, что энтропия системы есть функция ее состояния, а величина $\delta Q/T$ представляет собой ее полный дифференциал

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \qquad (21.11)$$

Энтропия определена лишь с точностью до произвольной постоянной. Физический смысл имеет не сама энтропия, а лишь разность энтропий. Разность энтропий S_2 и S_1 в двух равновесных состояниях 2 и 1 определяется необходимым количеством теплоты, приходящимся на единицу абсолютной температуры T, при котором оно было получено системой

для перевода ее из состояния 1 в состояние 2 по любому квазистатическому пути:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}. \qquad (21.12)$$

Если система переходит из равновесного состояния 1 в равновесное состояние 2 в результате необратимого процесса, то выполняется условие

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geqslant \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}. \qquad (21.13)$$

В формуле (21.13) величина T есть температура окружающей среды, при которой она отдает системе количество теплоты δQ. Из (21.13) следует **закон возрастания энтропии:** *для адиабатически изолированной системы* ($\delta Q = 0$) *энтропия может либо возрастать, либо оставаться постоянной.* В соответствии с этим законом второе начало термодинамики можно сформулировать в виде условия

$$\Delta S \geqslant 0, \qquad (21.14)$$

где ΔS есть изменение энтропии системы при ее переходе из одного состояния в другое. Неравенство (21.14) устанавливает направление протекания процессов в замкнутых системах: *все самопроизвольные процессы в замкнутых системах протекают в направлении увеличения энтропии.* При $\Delta S = 0$ процесс может осуществляться как в прямом, так и обратном направлениях (обратимый процесс). При $\Delta S > 0$ процесс самопроизвольно протекает только в одном направлении — в сторону увеличения энтропии (необратимый процесс). Если $\Delta S < 0$, то такой процесс в адиабатически изолированной системе осуществляться самопроизвольно не может, необходимо подводить энергию (теплоту) извне.

21.3.3. Энтропия и вероятность. Согласно второму началу термодинамики (21.14) энтропия макроскопической системы при необратимых процессах растет. Максимальное значение она достигает тогда, когда система приходит в состояние равновесия. Переход к состоянию равновесия является более вероятным по сравнению со всеми другими переходами. Поэтому в предоставленной самой себе (замкнутой) системе наблюдаются только те изменения состояния, при которых система переходит из менее вероятного состояния в более вероятное. Отсюда следует, что между энтропией системы S в каждом макросостоянии [19.2] и вероятностью этого состояния W существует однозначная связь, которую удобно записать в виде

$$S = k \ln W, \qquad (21.15)$$

где k — постоянная Больцмана. Соотношение (21.15) называется **формулой Больцмана** (1872). С точки зрения термодинамики всякое макросостояние системы может быть реализовано с помощью различных микросостояний. Под микросостоянием понимают такое состояние макроскопической системы, которое задается с помощью параметров, характеризующих ее отдельные молекулы. Согласно эргодической гипотезе все микросостояния равновероятны. Поэтому вероятность данного макросостояния W можно представить в виде

$$W = \Omega/\Omega_{\text{микро}}, \qquad (21.16)$$

где Ω — число равновероятных микросостояний, реализующих данное макросостояние, $\Omega_{\text{микро}}$ — полное число микросостояний макросистемы. Величину Ω называют *статистическим весом* или *термодинамической вероятностью состояния.* Так как энтропия системы определяется с точностью до произвольной постоянной, то в качестве ее определения берут соотношение

$$S = k \ln \Omega, \qquad (21.17)$$

где Ω — статистический вес макросостояния системы с энтропией S.

Пример вычисления Ω и S. Пусть идеальный газ из N одинаковых молекул, которые можно перенумеровать, находится в закрытом сосуде объемом V. Разобьем объем V на m частей (ячеек) с объемами V_1, V_2, ..., V_m так, что в каждой из этих ячеек будет находиться N_1, N_2, ..., N_m молекул соответственно. Состояние газа, характеризуемое указанием числа молекул и их номеров в каждой ячейке, будем называть *микросостоянием*, а состояние, в котором указано только общее число молекул в каждой ячейке независимо от их номеров,— *макросостоянием.* Перестановки молекул в пределах одной ячейки не изменяют микросостояния газа. При переходах молекул из одних ячеек в другие микросостояние газа изменяется Однако если при этом общее распределение по числу молекул в каждой ячейке остается прежним, то не изменяется и макросостояние. Статистический вес макросостояния с заданным числом молекул в каждой ячейке N_1, N_2, ..., N_m определяется формулой

$$\Omega = \frac{N!}{N_1! N_2! \cdots N_m!}, \quad N_1 + N_2 + \cdots + N_m = N, \qquad (21.18)$$

где введено обозначение $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots N$. Если целые числа N, N_1, N_2, ..., N_m очень велики, то они могут быть аппроксимированы непрерывно меняющимися аргументами. Для вычисления факториалов можно воспользоваться формулой Стирлинга (1703)

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{\theta}{12N}} \simeq \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (21.19)$$

Для энтропии (21.17) имеем

$$S = -k \sum_{i=1}^{m} \left(N_i + \frac{1}{2}\right) \ln N_i + \text{const}. \qquad (21.20)$$

Пусть некоторому состоянию 1 системы соответствует статистический вес Ω_1, а состоянию 2 — статистический вес Ω_2. Тогда изменение энтропии ΔS при переходе из состояния 1 в состояние 2 имеет вид

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1}. \qquad (21.21)$$

Изменение статистического веса при таком переходе определяется формулой

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = e^{\frac{\Delta S}{k}} = \exp\left(\frac{1}{k}\int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta Q}{T}\right). \qquad (21.22)$$

Связь энтропии и вероятности позволяет трактовать **второе начало термодинамики** в форме (21.14) как вероятностное, но не абсолютное условие: *если система находится в каком-то макросостоянии с данной энтропией S_1, то с подавляющей вероятностью следует ожидать, что она перейдет в состояние с энтропией S_2*, где $S_2 > S_1$. Изменение энтропии в сторону ее увеличения является вероятностным. В принципе возможны процессы (например, флуктуации), сопровождающиеся уменьшением энтропии. Такие процессы, однако, соответствуют самопроизвольному удалению системы от равновесного состояния, поэтому маловероятны.

Согласно (21.20) и (21.18) энтропия S является мерой беспорядка системы: состояние с большим беспорядком характеризуется большим статистическим весом, чем более упорядоченное состояние. Физическая причина необратимости тепловых процессов состоит в том, что такие процессы в замкнутой системе всегда протекают так, что система переходит из состояния с меньшим беспорядком в состояние с бо́льшим беспорядком. Так, газы сами собой перемешиваются, а температуры тел, обменивающихся теплотой, выравниваются.

21.3.4. Энтропия идеального газа. Бесконечно малое изменение энтропии S идеального газа массой m согласно первому началу термодинамики (20.20), формуле (16.40) для внутренней энергии U и уравнению состояния (17.3) определяется соотношением

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}(dU + PdV) = c_V m \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V}, \qquad (21.23)$$

где $c_V = C_V/M$ — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме [20.1; 20.3.2], M — молярная масса, T — температура, V — объем газа, R — универсальная газовая постоянная (16.3). *Энтропия идеального газа* определяется выражением

$$S = \int dS = c_V m \ln T + \frac{m}{M} R \ln V + S_0, \qquad (21.24)$$

где S_0 — произвольная константа.

Изменение энтропии идеального газа ΔS и отношение статистических весов Ω_2/Ω_1 при переходе из состояния 1 в состояние 2 имеют вид

$$\Delta S = \int_{S_1}^{S_2} dS = c_V m \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} =$$

$$= c_V m \ln (T_2/T_1) + \frac{m}{M} R \ln (V_2/V_1), \qquad (21.25)$$

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \exp\left(\frac{c_V m}{k} \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mR}{kM} \ln \frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (21.26)$$

Адиабатический процесс

$$\delta Q = 0, \ \Delta S = 0, \ \Omega_2/\Omega_1 = 1. \qquad (21.27)$$

Изотермический процесс

$$T_1 = T_2, \ \Delta S = \frac{m}{M} R \ln\left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right), \ \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right)^N. \qquad (21.28)$$

Изохорический процесс

$$V_1 = V_2, \ \Delta S = c_V m \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right), \ \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right)^{c_V m}. \qquad (21.29)$$

Здесь использованы следующие обозначения. В начальном состоянии 1: температура T_1, объем V_1, энтропия S_1, статистический вес Ω_1. В конечном состоянии 2: температура $T_2 = T_1 + \Delta T$, объем $V_2 = V_1 + \Delta V$, энтропия $S_2 = S_1 + \Delta S$, статистический вес Ω_2. Число молекул газа $N = mR/Mk$ (14.9).

21.4. Термодинамические потенциалы

Термодинамическими потенциалами называют функции независимых переменных — макроскопических параметров системы, которые полностью описывают ее термодинамическое состояние. Бесконечно малое приращение $d\mathcal{F}$ термодинамического потенциала $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляется его полным дифференциалом

$$d\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}\right)_{x_i'} dx_i, \qquad (21.30)$$

где индекс x_i' означает, что при дифференцировании по x_i все другие независимые переменные $x_j \neq x_i$ считаются постоянными. В статистической физике все термодинамические потенциалы определяются однозначно.

21.4.1. Система с двумя степенями свободы. Главными термодинамическими потенциалами являются следующие функции состояния системы:

1) *внутренняя энергия* U (16.32), (20.22)

$$U = U(S, V), \ dU = TdS - PdV,$$
$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V, \ P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S; \qquad (21.31)$$

2) *свободная энергия Гельмгольца* F *(изотермический потенциал*

$$F = F(T, V), \ F = U - TS,$$
$$dF = -SdT - PdV, \qquad (21.32)$$
$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \ P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T;$$

3) *энтальпия (теплосодержание)* I (20.23), (20.24)

$$I = I(S, P), \ I = U + PV, \ dI = TdS + VdP,$$
$$T = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_P, \ V = \left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_S; \qquad (21.33)$$

4) *термодинамический потенциал Гиббса* Φ или просто *термодинамический потенциал*

$$\Phi = \Phi(T, P), \ \Phi = U - TS + PV = F + PV = I - TS,$$
$$d\Phi = -SdT + VdP, \ S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P, \ V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T. \qquad (21.34)$$

Здесь и далее S — энтропия, V — объем, T — температура, P — давление рассматриваемой термодинамической системы. (Физический смысл функций U, I, F и Φ см. [20.3.1; 21.4.5], формулы (20.22), (20.23), (21.60) и (21.63).)

Исследование термодинамических систем с помощью термодинамических потенциалов является наиболее удобным методом решения задач термодинамики. Зная любой из термодинамических потенциалов (21.31) — (21.34) в своих переменных, можно найти все параметры, характеризующие свойства системы, включая уравнение состояния:

1) теплоемкости [20.1; 20.3.2]

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V,$$

$$C_P = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = -T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_P, \qquad (21.35)$$

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 = -T\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)^2;$$

2) адиабатическая $\varkappa_S$ и изотермическая $\varkappa_T$ сжимаемости физически однородного и изотропного вещества

$$\frac{1}{\varkappa_S} = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S, \quad \frac{1}{\varkappa_T} = -V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V^2}\right)_S, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)_T; \qquad (21.36)$$

3) изобарический α_P и адиабатический α_S коэффициенты теплового расширения газа

$$\alpha_P = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \alpha_S = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T \partial P}\right)_S; \qquad (21.37)$$

4) изохорический β_V и адиабатический β_S термические коэффициенты давления

$$\beta_V = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad \beta_S = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V\,\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V\,\partial T}\right)_S. \qquad (21.38)$$

В случае, когда термодинамические потенциалы известны в переменных, одна из которых «чужая», задача описания всех свойств системы сводится к решению *уравнений Гиббса — Гельмгольца*

$$U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V, \quad U = I - P\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_S,$$

$$F = \Phi - P\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P}\right)_T, \quad F = U - S\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V,$$

$$I = U - V\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S, \quad I = \Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_P, \qquad (21.39)$$

$$\Phi = F - V\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T, \quad \Phi = I - S\left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_P.$$

Эти уравнения следует дополнить граничными условиями, которые следуют из теоремы Нернста [21.5] при $T \to 0$: $S = 0$, $F = 0$, $\Phi = I$.

21.4.2. Термодинамические соотношения. Между макроскопическими параметрами, функциями состояния и их частными производными существует однозначная связь

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = C_P - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_V = C_V + V\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P,$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V, \qquad (21.40)$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = -\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{C_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = -\frac{C_P}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \frac{T}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T - \frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2.$$

Формулы (21.31) — (21.34), связывающие параметры T, V, P, S с функциями состояния U, F, I, Φ, а также *соотношения взаимности*

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V = \frac{\partial^2 U}{\partial S\,\partial V} \qquad (21.41)$$

называют *соотношениями Максвелла.*

21.4.3. Система со многими степенями свободы. Пусть внутреннее состояние системы определяется температурой T, энтропией S и внешними параметрами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда:

1) *внутренняя энергия* $U = U(S, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$dU = TdS - \sum_i X_i dx_i,$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{x_i}, \quad X_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_{S, x_i'}; \tag{21.42}$$

2) *свободная энергия* $F = F(T, x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$F = U - TS, \quad dF = -SdT - \sum_i X_i dx_i,$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{x_i}, \quad X_i = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{T, x_i'}; \tag{21.43}$$

3) *энтальпия* $I = I(S, X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$I = U + \sum_i X_i x_i, \quad dI = TdS + \sum_i x_i dX_i,$$

$$T = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)_{X_i}, \quad x_i = \left(\frac{\partial I}{\partial X_i}\right)_{S, X_i'}; \tag{21.44}$$

4) *термодинамический потенциал* $\Phi = \Phi(T, X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$$\Phi = F + \sum_i X_i x_i, \quad d\Phi = -SdT + \sum_i x_i dX_i,$$

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{X_i}, \quad x_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X_i}\right)_{T, X_i'}. \tag{21.45}$$

Здесь X_i — обобщенные силы, а суммирование проводится по всем значениям i от 1 до n, как в (20.17).

21.4.4. Системы с переменным числом частиц. Примерами систем с переменным числом частиц могут служить тела, в которых происходят химические превращения (изменяется количество химических соединений), или системы, в которых происходят фазовые превращения (плавление, кристаллизация, испарение и т. д. [15.2; 22]), сопровождающиеся изменением количества вещества в определенной фазе.

Внутренняя энергия такой системы U является функцией энтропии S, объема V и числа молей вещества N:

$$U = U(S, V, N), \quad dU = TdS - PdV + \mu dN, \tag{21.46}$$

где величина μ называется *химическим потенциалом* вещества. По определению

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S, V}. \tag{21.47}$$

Единицей химического потенциала μ в СИ является джоуль на моль:

$$[\mu] = \text{Дж/моль}.$$

Из определения термодинамических потенциалов F, I, Φ (21.32) — (21.34)

$$F = U + TS, \quad I = U + PV, \quad \Phi = U - TS + PV \tag{21.48}$$

следует, что все они являются функциями числа молей N:

$$F = F(T, V, N), \quad I = I(S, P, N), \quad \Phi = \Phi(T, P, N), \tag{21.49}$$

а их полные дифференциалы имеют вид, аналогичный (21.46):

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN, \quad dI = TdS + VdP + \mu dN,$$
$$d\Phi = -SdT + VdP + \mu dN. \tag{21.50}$$

Отсюда

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T, V} = \left(\frac{\partial I}{\partial N}\right)_{S, P} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)_{T, P} = \Phi(T, P, 1) \tag{21.51}$$

и

$$\mu = \mu(T, P) = \frac{\Phi}{N}, \tag{21.52}$$

т. е. *химический потенциал* μ *есть термодинамический потенциал* Φ, *отнесенный к одному молю вещества*. Полный дифференциал функции $\mu = \mu(T, P)$ равен

$$d\mu = -\frac{S}{N}dT + \frac{V}{N}dP,$$
$$\frac{S}{N} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_P, \quad \frac{V}{N} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_T. \tag{21.53}$$

Условия того, что правая часть выражения (21.46) для dU представляет собой полный дифференциал, имеют вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S, N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V, N}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S, V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{N, V},$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{S, V} = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S, N}. \tag{21.54}$$

Термодинамическое определение химического потенциала μ неоднозначно. Это связано с тем, что величины U и S определены с точностью до произвольных аддитивных постоянных U_0 и S_0, зависящих от N. Из (21.48), (21.52) следует, что F, Φ и μ определены с точностью до функции $\varphi(T, N) = U_0 - S_0 T$, линейной по T. Для однозначности определения μ нужно фиксировать начало отсчета внутренней энергии U и энтропии S.

21.4.5. Экстремальные свойства термодинамических потенциалов. Термодинамические функции U, F, I, Φ обладают *экстремальными свойствами*, подобными закону возрастания энтропии (21.13):

$$\delta Q \leqslant TdS. \tag{21.55}$$

Из первого начала термодинамики (20.20)

$$dU = \delta Q - PdV, \tag{21.56}$$

условия (21.13) и определений термодинамических потенциалов U, F, I, Φ (21.48) следует система неравенств

$$dU \leqslant TdS - PdV, \quad dF \leqslant -SdT - PdV,$$
$$d\Phi \leqslant -SdT + VdP, \quad dI \leqslant TdS + VdP, \tag{21.57}$$

откуда

$$dF < 0 \quad \text{при} \quad V = \text{const}, \ T = \text{const},$$
$$d\Phi < 0 \quad \text{при} \quad P = \text{const}, \ T = \text{const} \tag{21.58}$$

для необратимого процесса приближения к равновесию и

$$dF = 0 \quad \text{при} \quad V = \text{const}, \ T = \text{const},$$
$$d\Phi = 0 \quad \text{при} \quad P = \text{const}, \ T = \text{const} \tag{21.59}$$

вблизи от равновесного состояния. Таким образом, при приближении к состоянию равновесия убывает либо свободная энергия F, либо термодинамический потенциал Φ. В состоянии равновесия либо свободная энергия F, либо термодинамический потенциал Φ принимает свои минимальные значения: $F = F_{min}$ либо $\Phi = \Phi_{min}$. Следует иметь в виду, что соотношения (21.57) справедливы только для тех неравновесных состояний, в которых величины P, V и T имеют определенное значение. В таких состояниях отсутствуют градиенты давления и температуры.

Физический смысл внутренней энергии U и энтальпии I содержится в формулах (20.22) и (20.23) [20.3.1]. Из соотношений (21.55) — (21.57) следует физический смысл свободной энергии F: изменение свободной энергии $\Delta F = F_2 - F_1$ системы с $T = T_0$, где T_0 — температура внешней среды, $T_0 = \text{const}$, при обратимом процессе перехода из состояния 1 в состояние 2 есть взятая с обратным знаком максимальная работа A_{max}, которую может совершить система:

$$A_{max} = -\Delta F. \tag{21.60}$$

Из уравнения Гиббса — Гельмгольца для U (21.39) следует уравнение для максимальной работы

$$A_{max} = U_1 - U_2 + T\left(\frac{\partial A_{max}}{\partial T}\right)_V. \tag{21.61}$$

Для необратимых процессов с $T = T_0 = \text{const}$

$$A_{max} < -\Delta F \tag{21.62}$$

— совершаемая системой работа не может превзойти убыли свободной энергии F.

Термодинамический потенциал Φ связан с понятием полезной работы. Под полезной работой $A^{пол}$ в термодинамике понимают работу, которую термодинамическая система, помещенная в среду с температурой $T_0 = \text{const}$ и давлением $P_0 = \text{const}$, совершает над другими телами. Полная работа при этом $A = A^{пол} + A^P$, где $A^P = P_0(V_2 - V_1)$ работа против давления внешней среды P_0.

Физический смысл термодинамического потенциала Φ: изменение термодинамического потенциала $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ системы с $T = T_0 = \text{const}$, $P = P_0 = \text{const}$ при обратимом процессе перехода из состояния 1 в состояние 2 есть взятая с обратным знаком максимальная полезная работа

$$A^{пол}_{max} = -\Delta\Phi. \tag{21.63}$$

Она удовлетворяет уравнению

$$A^{пол}_{max} = I_1 - I_2 + T\left(\frac{\partial A^{пол}_{max}}{\partial T}\right)_P. \tag{21.64}$$

При $T = T_0 = \text{const}$, $P = P_0 = \text{const}$ для необратимых процессов

$$A^{пол} < -\Delta\Phi \tag{21.65}$$

— совершаемая системой полезная работа не может превзойти убыли термодинамического потенциала Φ.

21.5. Третье начало термодинамики

21.5.1. Теорема Нернста. Энтропия S как функция состояния системы при обратимом процессе задается согласно (21.10) лишь с точностью до произвольной постоянной. Поэтому второе начало термодинамики (21.13) не определяет однозначно разность энтропий двух состояний, относящихся к разным системам. Задачу об определении энтропии в таких случаях решает фундаментальная **теорема Нернста** (1906), установленная опытным путем. Теорема Нернста не может быть выведена из первого и второго начал термодинамики. Поэтому ее называют *третьим началом термодинамики*. Эта теорема относится только к термодинамически равновесным состояниям систем

Существует *несколько формулировок теоремы*, которые эквивалентны между собой:

1) энтропия S любой системы при абсолютном нуле температуры: $T = 0$, является универсальной постоянной S_0, не зависящей ни от каких переменных параметров (давления, объема и т. п.);

2) при приближении к абсолютному нулю, $T \to 0$, энтропия S стремится к определенному конечному пределу S_0, не зависящему от конечного состояния системы, т. е. при $T \to 0$ интеграл в правой части равенства (21.10) существует (сходится) и равен одному и тому же числу S_0 для любых конечных состояний;

3) при приближении к абсолютному нулю, $T \to 0$, приращение энтропии ΔS (21.12) не зависит от конкретных значений термодинамических параметров состояния системы и стремится к вполне определенному конечному пределу;

4) все процессы при абсолютном нуле, $T = 0$, при которых система переходит из одного равновесного состояния в другое, происходят без изменения энтропии.

Выбор универсальной постоянной S_0, равной энтропии при $T = 0$, произволен. Условились энтропию всякой равновесной системы при абсолютном нуле температур считать равной нулю: $S_0 = 0$.

Справедливость теоремы Нернста может быть доказана лишь опытной проверкой следствий этой теоремы.

21.5.2. Следствия третьего начала термодинамики.

1. При приближении к абсолютному нулю температур теплоемкости C (20.2) всех веществ должны стремиться к нулю:

$$C(T) \to 0 \text{ при } T \to 0, \tag{21.66}$$

где $C(T) = C_V$ при $V = \text{const}$ и $C(T) = C_P$ при $P = \text{const}$ [20.3.2]. Это соотношение подтверждено экспериментально для всех систем, исследованных до сих пор.

2. При приближении к абсолютному нулю температур для всех тел должны стремиться к нулю изобарический коэффициент теплового расширения α_P (21.37) и изохорический термический коэффициент давления β_V (21.38):

$$\alpha_P = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \to 0 \text{ при } T \to 0,$$
$$\beta_V = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \to 0 \text{ при } T \to 0. \tag{21.67}$$

3. При очень низких температурах $T \simeq 0$ уравнение Менделеева — Клапейрона (17.3) не выполняется даже в тех случаях, когда силы взаимодействия молекул газа пренебрежимо малы (из уравнения (17.3)

следует, что при $T \to 0$ коэффициенты α_P и β_V стремятся к константам, отличным от нуля).

4. Из (21.67) следует, что вблизи абсолютного нуля, $T \simeq 0$, давление газа P практически не зависит от температуры и является функцией только плотности ρ, т. е. $P = P(\rho)$. Газы, для которых давление $P = P(\rho)$, называют *вырожденными*, а состояние газа, в котором такое условие выполняется, называют *состоянием вырождения*. Внутренняя энергия газа U в состоянии вырождения не зависит от его температуры и определяется только его плотностью ρ, т. е. $U = U(\rho)$:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \to -P(\rho) \text{ при } T \to 0. \qquad (21.68)$$

Это свойство внутренней энергии подтверждено экспериментально. Например, найдено, что электронный газ в металлах уже при обычных температурах не дает заметного вклада в теплоемкость C. Согласно определению теплоемкости C (20.26), это может быть, если выполняется условие (21.68) и U не зависит от T.

5. С помощью конечных изменений термодинамических параметров невозможно охладить систему до абсолютного нуля. Из соотношения

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dP} = \frac{V\alpha_P}{C_P} \to \text{const при } T \to 0 \qquad (21.69)$$

следует, что изменение давления dP должно неограниченно возрастать при $T \to 0$ для изменения температуры на конечную величину dT.

Третье начало термодинамики является макроскопическим проявлением квантовых свойств термодинамических систем. Оно противоречит представлениям классической механики, согласно которым даже при абсолютном нуле температур система может находиться в непрерывном множестве динамических состояний. Теорему Нернста можно объяснить с помощью формулы Больцмана для энтропии в форме (21.17), рассчитав статистический вес Ω на основе представления о дискретном (квантовом) характере состояний системы [XIV].

22. ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ И РАВНОВЕСИЕ

22.1. Фазы и фазовые превращения первого и второго рода

В термодинамике *фазой* называют физически однородную часть системы, физические свойства которой отличаются от других ее частей, и отделенную от них четко выраженной границей. Последнее условие подразумевает, что физически однородная часть системы — фаза — может быть в принципе удалена из системы механическим путем без нарушения свойств других ее частей. Примерами фаз вещества являются его агрегатные состояния [15.2]. Система может состоять из двух или большего числа фаз. На границах соприкосновения различных фаз наблюдается переход некоторого количества вещества (поток) из одной фазы в другую. Такие процессы называют *фазовыми переходами* или *превращениями*. Если фазы обмениваются между собой равным количеством вещества, то говорят, что такие фазы находятся в *равновесии*.

Фазовые превращения могут сопровождаться поглощением или выделением некоторого количества теплоты (фазовые переходы первого рода), но могут происходить и без выделения или поглощения теплоты (фазовые переходы второго рода).

22.1.1. Равновесие двух фаз. Рассмотрим однородную в химическом отношении систему, состоящую из двух фаз.

Строгое определение фазовых переходов и условий равновесия различных фаз может быть дано на основе исследования потока вещества из одной фазы в другую. Характеристикой такого потока выступает химический потенциал [21.4.4]. В процессе перехода из неравновесного состояния фаз в равновесное химический потенциал играет ту же роль, какую температура играет для потока теплоты или концентрация для потока молекул в процессах теплопроводности [15.5.3; 16.8.2] и диффузии [15.5.2; 16.8.1].

Термодинамический потенциал Φ двухфазной системы зависит от температуры T, давления P и числа молей N_1 и N_2 в каждой фазе [21.4.4]:

$$\Phi = \Phi(T, P, N_1, N_2),\ d\Phi = \\ = -SdT + VdP + \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2, \qquad (22.1)$$

где

$$\mu_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_1}\right)_{T,P,N_2},\quad \mu_2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_2}\right)_{T,P,N_1} \qquad (22.2)$$

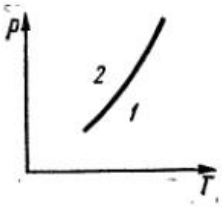


Рис. 22.1

— химические потенциалы первой и второй фаз системы. Если в системе отсутствуют градиенты давления и температуры, т. е. по параметрам P и T система находится в состоянии равновесия, то при переходе к состоянию равновесия по числу молей N_1 и N_2 термодинамический потенциал Φ уменьшается: $d\Phi < 0$ [21.4.5] и при постоянном числе молей всей системы $N_1 + N_2 = \text{const}$, $dN_1 = -dN_2$, выполняется условие

$$(\mu_1 - \mu_2)\, dN_1 \leqslant 0 \qquad (22.3)$$

— поток вещества направлен от фазы с бо́льшим химическим потенциалом к фазе с меньшим химическим потенциалом:

$$dN_1 \leqslant 0 \text{ при } \mu_1 \geqslant \mu_2,\ dN_2 \geqslant 0 \text{ при } \mu_1 \leqslant \mu_2. \qquad (22.4)$$

В состоянии термодинамического равновесия $d\Phi = 0$ [21.4.5]. Это справедливо при условии

$$\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P) \qquad (22.5)$$

— *равновесие двух фаз при равных температурах и давлениях достигается при равенстве их химических потенциалов*. Уравнение (22.5) задает в неявном виде кривую равновесия фаз $P = P(T)$.

Графически состояние вещества изображается точкой на PT плоскости (рис. 22.1). Каждая такая точка соответствует однофазному состоянию вещества. Исключения составляют точки линии $P = P(T)$, задаваемой уравнением (22.5). Каждая точка этой линии изображает либо фазу 1, либо фазу 2, либо их смесь в любых пропорциях. Каждому значению температуры T соответствует вполне определенное значение давления P, при котором возможно равновесие.

Фазовый переход, при котором химический потенциал изменяется непрерывно без скачка $\mu_1 = \mu_2$, а его производные по температуре T

и давлению P (21.54) изменяются скачком:

$$\left(\frac{\partial(\mu_2-\mu_1)}{\partial T}\right)_P=-\left(\frac{S_2}{N_2}-\frac{S_1}{N_1}\right)<0,$$
$$\left(\frac{\partial(\mu_2-\mu_1)}{\partial P}\right)_T=\frac{V_2}{N_2}-\frac{V_1}{N_1}>0, \qquad (22.6)$$

называется *фазовым переходом первого рода*. Здесь S_1, V_1, N_1 и S_2, V_2, N_2 — энтропия, объем и число молей первой и второй фаз. Поведение функций $\mu_1(T, P)$ и $\mu_2(T, P)$ качественно показано на рис. 22.2. Значения T_0 и P_0 соответствуют температуре и давлению фазового перехода. Фазовые переходы первого рода сопровождаются скачкообразным изменением объема и энтропии. Зависимость давления P от температуры T

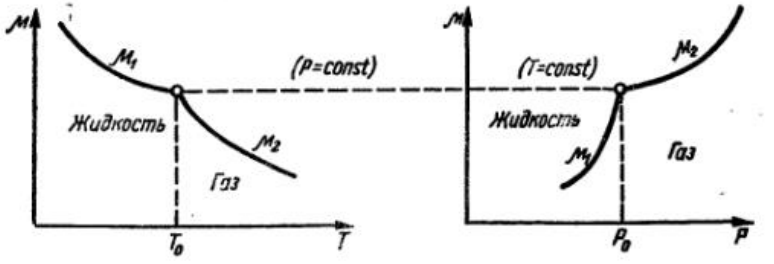


Рис. 22.2

при любом фазовом переходе первого рода определяется уравнением Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT}=\frac{\lambda}{T}\left(\frac{V_2}{N_2}-\frac{V_1}{N_1}\right)^{-1}, \qquad (22.7)$$

где λ называется *молярной* или *скрытой теплотой перехода*. Она связана со скачком энтропии соотношением

$$\lambda=T\left(\frac{S_2}{N_2}-\frac{S_1}{N_1}\right). \qquad (22.8)$$

Дифференциальное уравнение (22.7) есть уравнение кривой равновесия на PT плоскости.

Пример. Равновесие жидкости (фаза 1) и пара (фаза 2) при температурах, меньших критической: $T<T_k$. При таких температурах $V_2/N_2 \gg V_1/N_1$, $V_2/N_2 \simeq RT/P$ (уравнение состояния для одного моля идеального газа) и $\lambda=\text{const}$. Решение уравнения (22.7) с учетом этих приближений имеет вид

$$P=P_0\exp\left(\frac{\lambda}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)\right), \qquad (22.9)$$

где P_0 — давление при температуре T_0.

Следствия уравнения Клапейрона — Клаузиуса:

1) переход с поглощением теплоты, $\lambda>0$

$$\frac{dP}{dT}>0 \text{ при } \frac{V_2}{N_2}>\frac{V_1}{N_1}$$

— при переходе с увеличением объема температура перехода возрастает с увеличением давления (например, кипение жидкости),

$$\frac{dP}{dT}<0 \text{ при } \frac{V_2}{N_2}<\frac{V_1}{N_1}$$

— при переходе с уменьшением объема температура понижается с увеличением давления (например, плавление льда при сильном сжатии);

2) переход с выделением теплоты, $\lambda<0$

$$\frac{dP}{dT}>0 \text{ при } \frac{V_2}{N_2}<\frac{V_1}{N_1}$$

— при уменьшении объема давление увеличивается с ростом температуры,

$$\frac{dP}{dT}<0 \text{ при } \frac{V_2}{N_2}>\frac{V_1}{N_1}$$

— при увеличении объема давление уменьшается с ростом температуры;

3) производные по давлению и температуре некоторой физической величины $A=A(P, T)$:

$$\left(\frac{dA}{dP}\right)_\mu=\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_T+\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_P\frac{T}{\lambda}\left(\frac{V_2}{N_2}-\frac{V_1}{N_1}\right),$$
$$\left(\frac{dA}{dT}\right)_\mu=\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_P+\left(\frac{\partial A}{\partial P}\right)_T\frac{\lambda}{T}\left(\frac{V_2}{N_2}-\frac{V_1}{N_1}\right)^{-1}.$$

Фазовый переход, при котором первые производные химического потенциала не имеют скачка (в точке перехода $S_1/N_1=S_2/N_2$, $V_1/N_1=V_2/N_2$), а вторые производные

$$\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial P^2}\right)_T=\left(\frac{\partial}{\partial P}\frac{V}{N}\right)_T,\quad \left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_P=-\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{S}{N}\right)_P=-\frac{C_P}{T},$$
$$\frac{\partial^2\mu}{\partial P\,\partial T}=\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{V}{N}\right)_P \qquad (22.10)$$

имеют в точке фазового перехода конечные скачки, называется *фазовым переходом второго рода*. При таких переходах не происходит скачкообразного изменения объема и выделения или поглощения теплоты перехода. Однако сжимаемость $\varkappa_T$ (21.36), (22.10), коэффициент теплового расширения α_P (21.37), (22.10) и теплоемкость C_P (22.10) изменяются при этом скачком. Зависимость давления от температуры вдоль кривой равновесия при фазовом переходе второго рода описывается *уравнением Эренфеста*

$$\frac{dP}{dT}=\frac{C_{P_2}-C_{P_1}}{T\left[\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{V_2}{N_2}\right)_P-\left(\frac{\partial}{\partial T}\frac{V_1}{N_1}\right)_P\right]}, \qquad (22.11)$$

где C_{P_1} и C_{P_2} — теплоемкости при постоянном давлении фаз 1 и 2.

22.1.2. Равновесие трех фаз. Рассмотрим однородную систему, состоящую из трех и большего числа фаз. Если в системе имеется три фазы при одинаковых температурах T и давлениях P, то *условие*

их *термодинамического равновесия* описывается тремя кривыми на PT плоскости, задаваемыми уравнениями

$$\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P),\ \mu_2(T, P) = \mu_3(T, P),\ \mu_3(T, P) = \mu_1(T, P). \quad (22.12)$$

Точка $T = T_T$, $P = P_T$, в которой пересекаются все три кривые, называется тройной точкой. Она определяется условием

$$\mu_1(T_T, P_T) = \mu_2(T_T, P_T) = \mu_3(T_T, P_T) \quad (22.13)$$

— три фазы могут находиться в равновесии одна с другой лишь в тройной точке. Кривые равновесия (22.12) делят PT плоскость на три части, в каждой из которых вещество находится в одной фазе. Совокупность всех точек на PT-диаграмме вместе с изображенными на ней

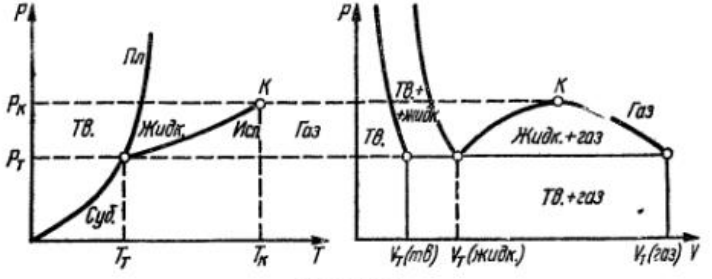


Рис. 22.3

кривыми равновесия называют *диаграммой состояния*. Диаграмма позволяет судить о том, какие фазовые превращения будут происходить в системе при том или ином процессе.

На рис. 22.3 показаны PT- и PV-диаграммы состояний некоторой типичной системы газообразной, жидкой и твердой или кристаллической фаз. Кривая равновесия *Исп* называется кривой испарения, кривая *Суб* — кривой сублимации, а *Пл* — кривой плавления. Кривая испарения заканчивается в критической точке K [18.3.1], в которой исчезает разница между жидким и газообразным состоянием вещества. Кривая сублимации для всех веществ, кроме гелия, подходит к началу координат. Кривая плавления уходит в бесконечность, так как различие между твердой и жидкой фазами, характеризуемыми разными свойствами симметрии, не может исчезнуть [22.2].

Если система имеет четыре и большее число фаз химически однородного вещества, то ни при каких давлениях и температурах эти фазы не могут находиться в равновесии между собой. Максимальное число фаз вещества, которые могут находиться в равновесии, равно трем. На рис. 22.4 показана детальная диаграмма состояния воды при больших давлениях. Цифрами I, II, III, V и VI обозначены пять кристаллических модификаций льда. Фаза I — обычный лед. Фазы II, III, V и VI устойчивы при давлениях порядка 10^9 Па. Область газообразного состояния на рисунке не показана, она соответствует очень малым давлениям.

На рис. 22.5 показана диаграмма состояний жидкого гелия. Для гелия равновесие твердой, жидкой и газообразной фаз невозможно. Кривая, разделяющая области существования двух жидких модификаций He I и He II, есть линия фазового перехода второго рода [22.1.1].

22.1.3. Метастабильные состояния. К кривым равновесия двух фаз вещества примыкают области метастабильных состояний. Вблизи кривой испарения *Исп* (рис. 22.3) со стороны газа — это перегретая жидкость, а со стороны жидкости — перенасыщенный пар. В области, где устойчива твердая (кристаллическая) фаза, вблизи кривой плавления *Пл* при некоторых условиях может существовать в метастабильном состоянии жидкость — переохлажденная жидкость.

Перегретой жидкостью называют физически однородную жидкость, температура которой при заданном внешнем давлении больше температуры кипения [22.2.2]. На изотерме Ван-дер-Ваальса (рис. 18.1) перегретая жидкость изображается отрезком кривой AB. Перегретая жидкость устойчива и может существовать как физически однородное тело, если нет зародышей — инородных включений в виде пузырьков пара. Однако при наличии таких зародышей (что наблюдается в реальной ситуации) перегретая жидкость неустойчива — она переходит в более устойчивое при данной температуре состояние — пар.

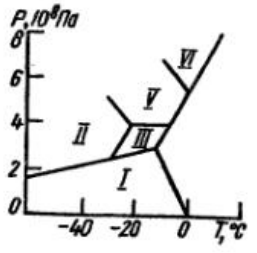


Рис. 22.4

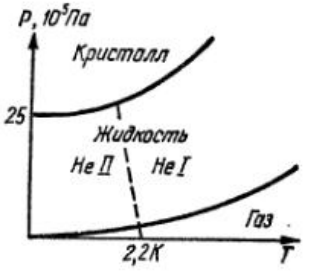


Рис. 22.5

Перенасыщенным паром называют физически однородный пар, находящийся под давлением выше давления его конденсации в жидкость при заданной температуре [22.2.2] (участок CD изотермы Ван-дер-Ваальса на рис. 18.1). Пар с параметрами T и P на кривой испарения (рис. 22.3) при адиабатическом расширении охлаждается и становится перенасыщенным.

Переохлажденной жидкостью называют жидкость, охлажденную до температуры ниже температуры кристаллизации [22.2.1]. Она менее устойчива, чем твердая (кристаллическая) фаза при одинаковых температуре и давлении. Если жидкость не очищена от посторонних включений (пыли, пузырей газа и т. п.), то явление переохлаждения не наблюдается — при охлаждении жидкость кристаллизуется при температуре плавления. Скорость кристаллизации переохлажденной жидкости сильно зависит от температуры T: при понижении T за точку кристаллизации скорость кристаллизации сначала растет, достигает максимума, а затем падает. Если жидкость очень сильно переохлаждена, то скорость кристаллизации практически равна нулю. Примеры переохлажденной жидкости: расплавленный сахар, мед, асфальт, стекло.

Физическая причина существования метастабильных состояний связана с характером движения молекул в тонком слое с размерами порядка радиуса межмолекулярного взаимодействия у поверхности, разделяющей две фазы. Опыт показывает, что свободная энергия F системы вблизи поверхности раздела двух фаз не является аддитивной

величиной, равной сумме свободных энергий F_1 и F_2, фаз 1 и 2, а содержит дополнительное слагаемое $\alpha\sigma$:

$$F = F_1 + F_2 + \alpha\sigma, \qquad (22.14)$$

где σ — площадь граничной поверхности, величина α называется *коэффициентом поверхностного натяжения*. При фазовом переходе в веществе, хорошо очищенном от посторонних включений (пыли, пузырей газа в жидкости или капель жидкости в газе и т. п.), новая фаза возникает в форме мелких кристаллов, мелких капель жидкости или пузырей пара. В результате наличия сил поверхностного натяжения рост мелкого зародыша новой фазы оказывается термодинамически невыгодным (в этом случае $dF > 0$ за счет увеличения поверхности σ, что противоречит условию (21.58)) и фазовый переход осуществляется очень медленно. В реальном случае вещество всегда содержит инородные включения, которые являются эффективными центрами конденсации новой фазы вещества. Размер этих включений, как правило, велик и роль $\alpha\sigma$ пренебрежимо мала из-за большого количества вещества в обеих соприкасающихся фазах.

22.1.4. Правило фаз Гиббса. Рассмотрим систему, состоящую из нескольких компонентов. Под компонентами понимают химически различные части системы, из которых состоят ее фазы. Предполагается, что количество каждого компонента не зависит от наличия других компонентов. Например, раствор соли в воде — двухкомпонентная однофазная система, насыщенный раствор соли в воде, из которого выпали на дно сосуда кристаллики соли,— двухкомпонентная двухфазная система.

Между числом степеней свободы термодинамической системы, т. е. числом свободных параметров f, количеством сосуществующих (в равновесии) фаз r и числом компонентов системы n существует простая связь

$$f = 2 + n - r, \quad r \leqslant n + 2,$$

называемая **правилом фаз Гиббса** (1875). (22.15)

Частные случаи:

1. Однокомпонентная система, $n = 1$

$$f = 3 - r, \quad r \leqslant 3.$$

При $r = 1$ (однофазное состояние) имеем $f = 2$, и свободными параметрами будут температура T и давление P. При $r = 2$ (состояние равновесия двух фаз) имеем $f = 1$, и только одна из переменных T или P может быть задана произвольно: $P = P(T)$ или $T = T(P)$. При $r = 3$ три фазы находятся в равновесии в тройной точке, $T = T_T$, $P = P_T$ и здесь $f = 0$.

2. Двухкомпонентная система, $n = 2$

$$f = 4 - r, \quad r \leqslant 4.$$

При $r = 1$ имеем $f = 3$, и независимыми переменными будут три параметра T, P и x, где x — концентрация (например, соли в воде). При $r = 2$ имеем $f = 2$, и независимы только два из трех параметров: $P_{нас} = f_1(T, x)$ — **закон Рауля** (в равновесии пар и раствор), $T_{пл} = f_2(P, x)$ (в равновесии раствор и кристаллы льда), $x_{нас} = f_3(T, P)$ (в равновесии раствор и кристаллы соли), где $P_{нас}$ — давление насыщенного пара, $T_{пл}$ — температура плавления, $x_{нас}$ — концентрация насыщенного раствора. При $r = 3$ имеем $f = 1$, и независимым является только один из трех параметров T, P и x в зависимости от того, какие фазы находятся в равновесии: $P_{нас} = f_1(T, x_{нас})$, $x_{нас} = f_2(T, P_{нас})$ (в равновесии пар, раствор соли и кристаллы соли); $T_{пл} = f_2(P, x_{нас})$, $x_{нас} = f_3(T_{пл}, P)$ (в равновесии раствор, кристаллы соли и кристаллы льда); $P_{нас} = f_1(T_{пл}, x)$, $T_{пл} = f_2(P_{нас}, x)$ (в равновесии пар, раствор и кристаллы льда). При $r = 4$ имеем $f = 0$. Такое равновесие возможно только в одной точке, при фиксированных $T = T_0$, $P = P_0$ и $x = x_0$:

$$P_0 = f_1(T_0, x_0), \quad T_0 = f_2(P_0, x_0), \quad x_0 = f_3(T_0, P_0).$$

Состояние равновесия пяти фаз ($r = 5$) запрещено правилом фаз Гиббса (22.15).

22.2. Изменение агрегатного состояния вещества

22.2.1. Плавление и кристаллизация. В твердом теле, находящемся в кристаллическом состоянии, молекулы вещества колеблются относительно своих положений равновесия. Если такому телу сообщить некоторое количество теплоты, то колебания усиливаются и кристаллическая решетка может разрушиться. Фазовый переход кристаллического тела в жидкое состояние происходит при определенной для каждого вещества температуре $T_{пл}$, называемой *температурой плавления*. Затраченное при этом переходе количество теплоты $Q_{пл}$ называется *теплотой плавления*.

Процесс кристаллизации сопровождается выделением такого же количества теплоты $Q_{пл}$, которое поглощается при плавлении. Температура плавления $T_{пл}$ совпадает с *температурой кристаллизации*. В процессе плавления или кристаллизации температура тела не изменяется (рис. 22.6). Теплота плавления $Q_{пл}$ определяется формулой

$$Q_{пл} = \lambda m, \qquad (22.16)$$

где m — масса расплавленного тела, λ — *удельная теплота плавления*. Единицей удельной теплоты плавления λ в СИ является:

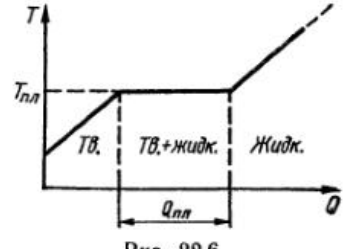


Рис. 22.6

$$[\lambda] = \text{Дж/кг}.$$

Удельная теплота плавления представляет собой количество теплоты, которое нужно передать 1 кг твердого вещества, чтобы перевести его в жидкое состояние при постоянной температуре:

$$\lambda = Q_{пл}/m.$$

Температура плавления $T_{пл}$ зависит от давления. Обычно (кроме льда) $T_{пл}$ возрастает с увеличением давления. Совокупность значений температур T и давлений P, при которых происходит фазовый переход из твердой фазы в жидкую (плавление), на PT плоскости образует кривую плавления (кривая *Пл* на рис. 22.3). Точки кривой плавления — это точки равновесия твердой и жидкой фаз вещества [22.1.2]. В табл. 22.1 приведены значения $T_{пл}$ и λ для некоторых веществ.

Таблица 22.1. Температура плавления $T_{пл}$ и удельная теплота плавления λ при $P = 101{,}325$ кПа для некоторых веществ

Вещество	$T_{пл}$, °С	λ, кДж/кг	Вещество	$T_{пл}$, °С	λ, кДж/кг
Азот	—210,0	—	Медь	1083	205
Алюминий	660,1	397	Метиловый спирт	—97,7	92
Аммиак	—77,7	—	Никель	1453	303
Ацетон	—94,9	98	Оксид углерода (II)	—205,1	—
Бензол	5,53	128	Олово	231,9	59,6
Висмут	271,3	52,2	Парафин	54	—
Вода	0	333,7	Платина	1769,3	111
Водород	—259,2	58,6	Ртуть	—38,87	11,8
Вольфрам	3380	192	Свинец	327,4	23,0
Глицерин	18,4	201	Серебро	960,8	104,5
Диоксид углерода	—56,6	—	Серый чугун	1200	—
Железо	1535	277	Сталь	1500	—
Золото	1063	65,7	Углерод	3650	—
Иридий	2454	117	Цезий	28,64	16,4
Кислород	—218,8	—	Цинк	419,5	111
Кремний	1420	164			
Латунь	920	—			

22.2.2. Испарение и конденсация. Пар. Переход жидкости в газообразное состояние называется *испарением*. Переход твердого тела в газообразное состояние называется *сублимацией*. Совокупность молекул, покинувших жидкость (твердое тело) при испарении (сублимации), называют *паром* этой жидкости (тела). При испарении (сублимации) наиболее быстрые молекулы, преодолев притяжение других молекул вещества, покидают его. Вследствие этого уменьшается средняя кинетическая энергия оставшихся молекул и температура тела понижается [16.6.1]. Для поддержания процесса испарения (сублимации) необходимо сообщать телу определенное количество теплоты. Это количество теплоты называется *теплотой испарения* или *парообразования* (сублимации).

Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью, называется *насыщенным паром*. Давление насыщенного пара зависит только от его химического состава и температуры, но не зависит от объема, в котором он находится. С ростом температуры T плотность ρ насыщенного пара и его давление P быстро возрастают (рис. 22.7). Кривые зависимости $\rho(T)$ насыщенного пара и жидкости пересекаются в критической точке K [18.3.2]. В критической точке плотность жидкости равна плотности насыщенного пара.

Процесс конденсации — обратный процессу испарения (сублимации). При конденсации теплота, затраченная при испарении (сублимации), отдается обратно: *теплота испарения (сублимации) равна теплоте конденсации*. Образующаяся при конденсации жидкость (твердое тело) нагревается. В процессе испарения (сублимации) и конденсации температура вещества не изменяется (рис. 22.8).

Температура $T_{кип}$, при которой происходит фазовый переход, из жидкого (твердого) состояния в газообразное, называется *температурой кипения*. Температура кипения равна температуре конденсации. Температура $T_{кип}$ растет с увеличением давления P.

Совокупность значений температур T и давлений P, при которых происходит фазовый переход из жидкого состояния в газообразное, на PT плоскости образует кривую испарения (кривая *Исп* на рис. 22.3). Для фазового перехода из твердого состояния в газообразное — это кривая сублимации (кривая *Суб* на рис. 22.3). Точки кривой испарения (сублимации) — это точки равновесия жидкой и газообразной (твердой и газообразной) фаз вещества [22.1.2; 18.3.2].

Теплота испарения $Q_{кип}$ определяется формулой

$$Q_{кип} = rm, \qquad (22.17)$$

где r — *удельная теплота испарения*, m — масса испарившегося вещества.

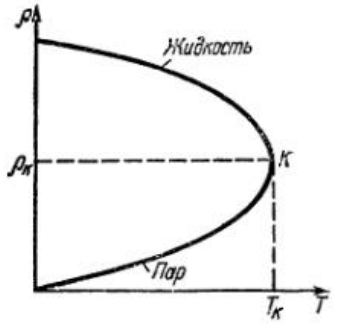


Рис. 22.7

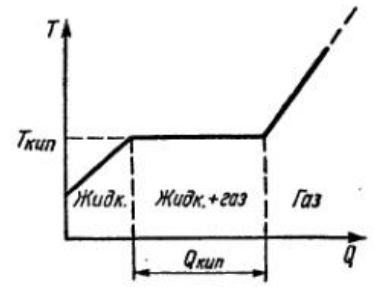


Рис. 22.8

Единицей удельной теплоты испарения r в СИ является:

$$[r] = \text{Дж/кг}.$$

Удельная теплота испарения численно равна количеству теплоты, которое необходимо передать 1 кг жидкости, чтобы перевести ее в газообразное состояние при постоянной температуре:

$$r = Q_{кип}/m.$$

Удельная теплота испарения r зависит от давления и температуры. Она уменьшается с повышением давления. В табл. 22.2 приведены значения $T_{кип}$ и r для некоторых веществ.

22.2.3. Влажность воздуха. В реальных условиях в воздухе всегда присутствует некоторое количество водяного пара. Для его количественной характеристики вводят три величины: максимальную влажность, абсолютную влажность и относительную влажность воздуха.

Максимальная влажность f_{max} — это максимальное количество водяного пара, которое может находиться в 1 м^3 воздуха при данной температуре:

$$f_{max} = m_{max}/V, \qquad (22.18)$$

где m_{max} — максимально возможная масса водяного пара в воздухе, V — объем влажного воздуха.

Таблица 22.2. **Температура кипения $T_{кип}$ и удельная теплота испарения r при $P = 101{,}325$ кПа для некоторых веществ**

Вещество	$T_{кип}$, °С	r, кДж/кг	Вещество	$T_{кип}$, °С	r, кДж/кг
Азот	—195,82	198	Метиловый спирт	64,6	1100
Алюминий	2450	10900	Никель	2800	6480
Аммиак	—33,4	1370	Олово	2430	2450
Ацетон	56,25	525	Пентан	36,1	360
Бензол	80,1	394	Пропиловый спирт	97,2	750
Вода	100	2256	Ртуть	356,58	285
Водород	—252,77	454	Свинец	1750	8600
Гелий	—268,94	20,6	Сера	444,6	290
Глицерин	290,5	—	Толуол	110,62	364
Диоксид серы	—10,02	390	Углерод	4350	$5 \cdot 10^4$
Диэтилэфир	34,5	384	Фосфор	280	400
Железо	2735	6340	Фреон-12	—24,9	162
Золото	2700	1650	Хлороформ	61,3	279
Кислород	—182,97	213	Цинк	907	1755
Криптон	—153,4	108	Этиловый спирт	78,33	840
Медь	2590	4790			
Метан	—161,5	510			

Абсолютной влажностью f называют количество водяного пара, фактически содержащегося в 1 м^3 влажного воздуха:

$$f = m/V = \rho_{пар}, \qquad (22.19)$$

где m — масса водяного пара, содержащегося в воздухе с объемом V, $\rho_{пар}$ — плотность водяного пара в воздухе. Абсолютную влажность оценивают по давлению водяного пара, выраженному в миллиметрах ртутного столба: $f = P$.

Отношение абсолютной влажности воздуха f к максимально возможной f_{max} при данной температуре называется *относительной влажностью* воздуха:

$$\tau = f/f_{max} = P/P_н, \qquad (22.20)$$

где P — давление водяного пара, $P_н$ — давление насыщенного пара при данной температуре.

Единицами измерения максимальной f_{max} и абсолютной f влажности воздуха являются:

$$[f_{max}] = \frac{кг}{м^3}, \quad [f] = \frac{кг}{м^3}.$$

Обычно абсолютную влажность f измеряют в г/м^3, а относительную τ — в процентах:

$$\tau = (f/f_{max}) \cdot 100\ \%.$$

Максимальная f_{max} и относительная τ влажность зависят от температуры воздуха. Температура, при охлаждении до которой начинается конденсация в воду пара, содержащегося в воздухе, называется *точкой росы*. При наличии твердых тел конденсирующийся пар осаждается в виде росы — капель жидкости на поверхности тел. В отсутствие центров конденсации в воздухе образуется туман — капли жидкости, взвешенные в воздухе. Если нет центров конденсации и твердых тел, то водяной пар может переохлаждаться до температуры ниже точки росы.

Прибор для измерения влажности воздуха называется *гигрометром* или *психрометром* в зависимости от принципа действия. В гигрометрах используются обезжиренные волоски, длина которых изменяется при изменении влажности воздуха. Психрометр состоит из двух одинаковых термометров, один из которых поддерживается все время влажным. Разность показаний этих термометров служит мерой относительной влажности. Так, при $\tau = 100\ \%$ разность температур $\Delta T = 0$.

23. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Феноменологическая термодинамика изучает проблему равновесного теплового излучения в самом общем виде [23.3.3; 23.3.4]. В рамках классической статистической физики возможно более детальное исследование без модельного представления о механизмах испускания и поглощения энергии [23.3.5]. Последовательное и полное решение задачи возможно только на основе учета квантовых свойств вещества и излучения [23.3.6].

23.1. Равновесное излучение. Основные понятия

Тепловым излучением называется перенос теплоты с помощью электромагнитных волн. Это излучение является одним из видов передачи теплоты от одного тела к другому [20.2.2], при котором теплообмен между телами происходит путем испускания и поглощения теплового излучения.

Из опыта следует, что все нагретые тела излучают электромагнитные волны [43]. Физическая природа такого излучения заключается в преобразовании энергии теплового движения молекул и атомов вещества в энергию излучения. В термодинамике изучают равновесное тепловое излучение, т. е. электромагнитное излучение, находящееся в состоянии термодинамического равновесия [19.1] с веществом.

Рассмотрим замкнутую полость, стенки которой имеют постоянную температуру T. При равновесном излучении стенки полости будут излучать и поглощать электромагнитные волны так, что в единицу времени количество излученной энергии в среднем равно количеству поглощенной энергии. Равновесное излучение характеризуется следующими свойствами: 1) оно однородно, т. е. имеет одинаковую плотность во всех точках внутри полости; 2) оно изотропно, т. е. все возможные направления распространения излучения внутри полости равновероятны; 3) оно неполяризовано, т. е. направление векторов напряженностей электрического **E** и магнитного **H** полей хаотически меняется во времени во всех точках пространства полости. Так как излучение распространяется с конечной скоростью, то внутри полости будет существовать электромагнитное поле с постоянной (объемной)

плотностью энергии u, т. е. количеством энергии в единице объема пространства [30.3.2]:

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2), \tag{23.1}$$

где E и H — напряженности электрического и магнитного полей.

Единицей плотности энергии в СИ является:

$$[u] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

Плотность энергии u можно представить в виде разложения по частоте ω или длине волны λ:

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda, \tag{23.2}$$

где $u_\omega d\omega$ и $u_\lambda d\lambda$ есть объемная плотность энергии излучения, приходящейся на интервал частот $[\omega, \omega + d\omega]$ или интервал длин волн $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

Единицами частоты и длины волны в СИ являются:

$$[\omega] = \frac{1}{\text{с}}, \quad [\lambda] = \text{м}.$$

Коэффициенты u_ω и u_λ называются *спектральными плотностями лучистой энергии*.

Единицами спектральных плотностей лучистой энергии в СИ являются:

$$[u_\omega] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}, \quad [u_\lambda] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^4}.$$

Между коэффициентами u_ω и u_λ существует простая связь

$$u_\lambda = \frac{\omega}{\lambda} u_\omega, \quad u_\omega = \frac{\lambda}{\omega} u_\lambda, \tag{23.3}$$

которая следует из определения длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$, где c — скорость света в вакууме. Поэтому достаточно изучать свойства функции u_ω. В случае равновесного излучения спектральная плотность u_ω зависит от частоты ω, температуры излучения T и свойств среды, занимающей полость. Если в полости вакуум, то u_ω будет универсальной функцией только ω и T, $u_\omega = u_\omega(\omega, T)$, а плотность энергии u — универсальной функцией только температуры T, $u = u(T)$. Температура излучения T отражает свойство самого излучения. В случае теплового равновесия она по определению равна температуре стенок полости. Внутренняя энергия излучения U связана с плотностью энергии $u(T)$ соотношением

$$U = u(T)V, \tag{23.4}$$

где V — объем полости.

Основная задача теории теплового излучения состоит в нахождении функции $u_\omega = u_\omega(\omega, T)$.

Тепловое излучение характеризуют *потоком лучистой энергии* $d\Phi$, который равен количеству энергии, проходящей за время dt через малую площадку dS, заключенную в пределах телесного угла $d\Omega$, ось которого составляет с нормалью к площадке угол θ (рис. 23.1):

$$d\Phi = I dS \cos\theta \, d\Omega \, dt. \tag{23.5}$$

Величина I называется *удельной интенсивностью излучения*.

Единицами потока лучистой энергии и удельной интенсивности излучения в СИ являются:

$$[d\Phi] = \text{Дж}, \quad [I] = \text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}).$$

Полный поток излучения за единицу времени определяется формулой

$$\frac{d\Phi}{dt} = dS \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I \cos\theta \sin\theta \, d\theta. \tag{23.6}$$

В случае изотропного источника удельная интенсивность излучения I не зависит от углов θ и φ

$$\frac{d\Phi}{dt} = \pi I \, dS. \tag{23.7}$$

Единицей полного потока излучения за единицу времени в СИ является:

$$\left[\frac{d\Phi}{dt}\right] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}.$$

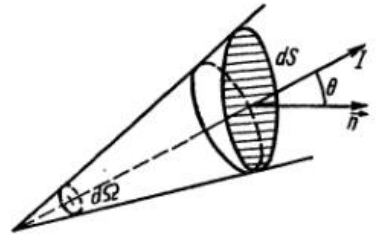


Рис. 23.1

Удельную интенсивность I можно представить в виде интеграла от *удельной интенсивности излучения частотой* ω:

$$I = \int_0^\infty I_\omega d\omega. \tag{23.8}$$

Единицей удельной интенсивности излучения частотой ω в СИ является:

$$[I_\omega] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

Между величинами u, u_ω и I, I_ω существует простая связь

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \quad u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega. \tag{23.9}$$

В случае, если полость заполнена однородной изотропной и непоглощающей средой (а не вакуумом), под c следует понимать групповую скорость света в этой среде.

23.2. Закон Кирхгофа

Если на тело падает излучение с потоком $d\Phi_0$, то одна его часть $d\Phi_{\text{отр}}$ отражается от поверхности тела, другая часть $d\Phi_{\text{погл}}$ проникает внутрь тела и поглощается, переходя в теплоту, и третья часть $d\Phi_{\text{пр}}$

проходит сквозь тело после одного или нескольких внутренних отражений. В силу закона сохранения потока $d\Phi_0 = d\Phi_{отр} + d\Phi_{погл} + d\Phi_{пр}$. Если тело непрозрачно для излучения, то $d\Phi_{пр} = 0$.

Для характеристики процесса теплового излучения тела вводят понятия об излучательной и поглощательной способности поверхности тела. Поток лучистой энергии $d\Phi$ (с частотами между ω и $\omega + d\omega$), излучаемой за время dt площадкой dS поверхности тела внутрь телесного угла $d\Omega$, по определению равен

$$d\Phi = E_\omega dS \cos\theta \, d\Omega \, d\omega \, dt, \qquad (23.10)$$

где θ — угол между направлением излучения (осью телесного угла $d\Omega$) и нормалью к площадке dS. Величина E_ω называется *излучательной способностью* поверхности тела в направлении угла θ (рис. 23.1).

Единицей излучательной способности в СИ является:

$$[E_\omega] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2}.$$

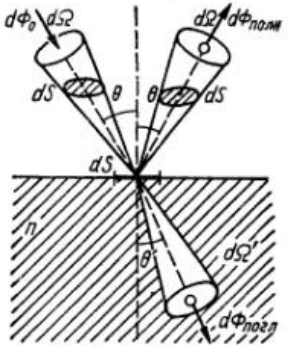


Рис. 23.2

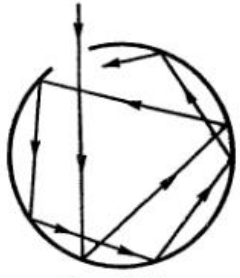


Рис. 23.3

Доля падающего потока $d\Phi_0$ излучения в данном интервале частот $[\omega, \omega + d\omega]$, которая поглощается телом и превращается в теплоту, называется *поглощательной способностью* A_ω поверхности тела:

$$A_\omega = d\Phi_{погл}/d\Phi_0.$$

Величина A_ω — безразмерное число, $0 \leqslant A_\omega \leqslant 1$. Полный поток лучистой энергии $d\Phi_{полн}$, испускаемый поверхностью dS непрозрачного тела, состоит из потока собственного излучения тела $d\Phi$ (23.10) и потока отраженного излучения $d\Phi_{отр}$ (рис. 23.2):

$$d\Phi_{полн} = d\Phi + d\Phi_{отр}, \; d\Phi_{отр} = (1 - A_\omega)\, d\Phi_0.$$

В состоянии теплового равновесия

$$d\Phi_{полн} = d\Phi_0,$$

где

$$d\Phi_0 = I_\omega dS \cos\theta \, d\Omega \, d\omega \, dt$$

— поток падающего излучения. Из этого условия следует, что излучательная E_ω и поглощательная A_ω способность тела для равновесного излучения частотой ω связаны с удельной интенсивностью I_ω соотношением

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = I_\omega = \frac{c}{4\pi} u_\omega, \qquad (23.11)$$

называемым **законом Кирхгофа** (1859). Так как величина $I_\omega(u_\omega)$ не зависит от вещества, из которого изготовлено тело, а является функцией только частоты ω и температуры тела T, то согласно закону Кирхгофа отношение излучательной способности тела к поглощательной одинаковое для всех тел. Это отношение является универсальной функцией ω и T.

Закон Кирхгофа (23.11) дает количественное описание **правила Прево:** *если поглощательные способности двух тел различны, то будут различны и их излучательные способности.* Зная I_ω для какого-либо тела, можно определить излучательную способность E_ω другого тела, если известна его поглощательная способность A_ω.

Наибольшее значение E_ω имеет тело, у которого для всех частот ω поглощающая способность равна единице: $E_\omega^{max} = I_\omega$ при $A_\omega = 1$. Тело, которое поглощает все падающее на него тепловое излучение ($A_\omega = 1$), называют *абсолютно черным телом.*

Из закона Кирхгофа (23.11) следует, что:

1) излучательная способность абсолютно черного тела I_ω является универсальной функцией частоты ω и температуры тела T:

$$I_\omega = I_\omega(\omega, T);$$

2) излучательная способность абсолютно черного тела при данной частоте ω и температуре T максимальна: $E_\omega^{max} = I_\omega$;

3) излучательная способность любого (серого) тела E_ω равна произведению его поглощательной способности A_ω и излучательной способности абсолютно черного тела I_ω: $E_\omega = A_\omega I_\omega$. Зная I_ω, можно вычислить распределение энергии E_ω по частотам ω для любого тела, если известна его поглощательная способность A_ω;

4) всякое тело при данной температуре излучает электромагнитные волны той частоты, которые оно поглощает при этой же температуре.

Абсолютно черное тело — идеализация. Ни одно тело в природе не может считаться абсолютно черным. Наилучшее приближение к абсолютно черному телу дает замкнутая полость, окруженная равномерно нагретыми непрозрачными стенками. Для выхода излучения полость должна иметь малое отверстие. Если это отверстие достаточно мало, то в полости устанавливается практически равновесное тепловое излучение, а из отверстия будет выходить излучение, равное излучению абсолютно черного тела с поверхностью, равной площади отверстия. Другим примером абсолютно черного тела может служить замкнутая сферическая полость с малым отверстием, через которое внутрь полости проникает луч света. После многократного отражения и поглощения луч света практически не выйдет наружу через отверстие. Такая полость ведет себя как тело с $A_\omega = 1$ (рис. 23.3).

В случае равновесного излучения спектральные плотности лучистой энергии в вакууме u^0_ω и в среде u_ω с показателем преломления $n = \sin\theta/\sin\theta'$ (рис. 23.2), а также соответствующие удельные интен-

сивности излучения частотой ω, I^0_ω и I_ω, связаны между собой формулами Кирхгофа — Клаузиуса

$$u_\omega = n^2 \frac{c}{v_{гр}} u^0_\omega, \quad I_\omega = n^2 I^0_\omega, \tag{23.12}$$

где $v_{гр}$ — групповая скорость света в среде. Если среда недиспергирующая, то $v_{гр} = c/n$.

Из формул (23.12) следует, что

$$\lambda^2 I_\omega = \lambda_0^2 I^0_\omega, \ \lambda_0 = n\lambda,$$
$$\lambda^3 u_\omega = \lambda_0^3 u^0_\omega$$

— поток лучистой энергии в единичном телесном угле в направлении нормали к квадратной площадке со стороной, равной длине волны λ в данной среде, через эту площадку, есть величина, одинаковая для всех сред и зависящая только от их температур, или (эквивалентное утверждение) тепловая энергия, локализованная в кубе с ребром λ, одинакова для всех изотропных недиспергирующих сред и определяется только их температурой.

23.3. Законы излучения абсолютно черного тела

23.3.1. Закон Стефана — Больцмана. Закон Стефана — Больцмана (1879, 1884) устанавливает зависимость плотности энергии u (23.9), характеризующей излучательную способность нагретых тел, от температуры T: *для абсолютно черных тел излучательная способность пропорциональна четвертой степени температуры*:

$$u(T) = aT^4, \ I(T) = \frac{ca}{4\pi} T^4 \equiv \frac{\sigma}{\pi} T^4, \tag{23.13}$$

где σ и a — универсальные постоянные, $I(T)$ — удельная интенсивность излучения. Экспериментальные значения σ и a равны

$$a = 7{,}56 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{К}^{-4}, \ \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}. \tag{23.14}$$

Величина σ называется *постоянной Стефана — Больцмана*. Она может быть вычислена на основе термодинамических представлений [23.3.4].

Выражение (23.13) для $u(T)$ является решением дифференциального уравнения

$$T(du/dT) = 4u, \tag{23.15}$$

которое следует из выражения (21.6),

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \tag{23.16}$$

где U — внутренняя энергия излучения (23.4), $P = \frac{1}{3} u(T)$ — давление излучения, падающего изотропно, т. е. под всевозможными углами, на любую поверхность.

Энтропия S (21.11) равновесного излучения определяется формулой

$$dS = \frac{1}{T}(dU + PdV) = \frac{4}{3}\sigma T^3 dV + 4\sigma V T^2 dT, \ S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V + \text{const}. \tag{23.17}$$

Уравнение адиабаты [20.4.1] для равновесного излучения имеет вид

$$TV^{\frac{1}{3}} = \text{const}, \ PV^{\frac{4}{3}} = \text{const}, \ uV^{\frac{4}{3}} = \text{const}, \tag{23.18}$$

где показатель адиабаты (20.32) $\gamma = \frac{4}{3}$.

Удельная теплоемкость при постоянном объеме c_V (21.35) равна

$$c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = 4\sigma T^3 V.$$

Теплоемкость при постоянном давлении c_P здесь не имеет смысла (формально $c_P = \pm\infty$).

23.3.2. Теорема Вина. Закон смещения Вина. Опытные данные позволяют сделать ряд общих заключений о свойствах спектральной плотности $u_\omega = u_\omega(\omega, T)$ (23.2) без использования модельных представлений.

В термодинамике излучения доказывается **теорема Вина:** *равновесное излучение в оболочке с идеально отражающими внутренними поверхностями стенок остается равновесным при квазистатическом, т. е. бесконечно медленном адиабатическом увеличении или уменьшении ее объема.*

Следствия теоремы Вина.

1. Величины

$$\omega^3 V = \text{const}, \ \omega^4/u = \text{const}, \ \omega/T = \text{const} \tag{23.19}$$

являются адиабатическими инвариантами. Здесь V — объем полости, в которой заключено излучение с частотой ω, u — плотность энергии излучения с температурой T (23.13).

2. Объемные u, u' и спектральные u_ω, $u_{\omega'}$ плотности лучистой энергии в начальном и конечном (после квазистатического изменения объема равновесного излучения) состояниях с частотами ω и ω′ соответственно связаны формулами

$$\frac{u}{\omega^4} = \frac{u'}{\omega'^4}, \ \frac{u_\omega d\omega}{\omega^4} = \frac{u'_{\omega'} d\omega'}{\omega'^4}. \tag{22.20}$$

3. **Закон смещения Вина** (1893): *длина волны* λ_{max}, *соответствующая максимальной энергии в спектре излучения, обратно пропорциональна абсолютной температуре* T:

$$\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}\right)_{\substack{T=\text{const} \\ \lambda=\lambda_{max}}} = 0, \ \lambda_{max} T = b = \text{const}. \tag{23.21}$$

Экспериментальное значение константы

$$b = 0{,}2898 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}. \tag{23.22}$$

Ее можно вычислить теоретически [23.3.4]. При повышении температуры максимум функции u_λ при $T = \text{const}$ смещается в сторону более коротких волн так, что выполняется условие (23.21). Спектральная плотность $u_\omega(\omega, T)$ также имеет максимум при некотором значении $\omega = \omega_{max}$ и $T = \text{const}$. Если температура излучения T изменяется,

то изменение положения максимума функции $u_\omega(\omega, T)$ происходит так, что выполняется условие

$$\omega_{max}/T = \text{const}.$$

4. Из соотношений (23 20) следует, что объемная плотность энергии излучения $u_\omega d\omega$ в интервале частот $[\omega, \omega + d\omega]$ в самом общем виде выражается через некоторую универсальную функцию f одного аргумента $\frac{\omega}{T}$:

$$u_\omega d\omega = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega, \quad u_\omega = \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right). \tag{23.23}$$

Это соотношение называют **формулой Вина** (1893). Если известно спектральное распределение u_{ω_1} равновесного излучения при одной температуре T_1, то согласно формуле (23.23) можно найти распределение u_{ω_2} при другой температуре T_2:

$$u_{\omega_2}(\omega_2, T_2) = \omega_2^3 f\left(\frac{\omega_2}{T_2}\right) = \omega_2^3 f\left(\frac{\omega_1}{T_1}\right) = \frac{T_2^3}{T_1^3}\omega_1^3 f\left(\frac{\omega_1}{T_1}\right) = \frac{T_2^3}{T_1^3} u_{\omega_1}(\omega_1, T_1).$$

В переменных λ, T формула Вина (23.23) имеет вид

$$u_\lambda(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{1}{\lambda^5}\varphi(\lambda T)\, d\lambda, \quad u_\lambda = \frac{\varphi(\lambda T)}{\lambda^5}, \tag{23.24}$$

где $\varphi(\lambda T)$ — другая универсальная функция аргумента λT. В рамках термодинамики явный вид функций $f\left(\frac{\omega}{T}\right)$ и $\varphi(\lambda T)$ не может быть найден. Эту задачу решают методами статистической физики.

23.3.3. Формула Рэлея — Джинса. С точки зрения классической физики равновесное излучение в полости представляет собой систему стоячих волн [39.4] с разными частотами ω, направлениями распространения и поляризациями. Согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы при равновесии между стенками полости и электромагнитным полем на каждую колебательную степень свободы (т. е. на каждую элементарную волну) приходится средняя энергия, равная kT, где k — постоянная Больцмана (16.4), T — температура излучения [16.6.1]. Эта энергия складывается из средней кинетической и средней потенциальной энергий электромагнитного поля, каждая из которых равна $kT/2$. Количество энергии поля для данного интервала частот $[\omega, \omega + d\omega]$ в полости с объемом V, равное $Vu_\omega\, d\omega$, где u_ω — спектральная плотность лучистой энергии (23.2), равно числу степеней свободы излучения dN в полости с объемом V (числу стоячих волн с частотами в указанном интервале), умноженному на kT. Расчет показывает, что

$$dN = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} V\, d\omega, \tag{23.25}$$

и объемная плотность энергии излучения $u_\omega d\omega$ определяется **формулой Рэлея — Джинса** (1900, 1905—1909)

$$u_\omega d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega, \quad u_\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2. \tag{23.26}$$

Распределение энергии по длинам волн λ дается выражением

$$u_\lambda d\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} d\lambda, \quad u_\lambda = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}, \tag{23.27}$$

эквивалентным (23.26). Эти соотношения согласуются с формулой Вина (23.23) или (23.24), если положить

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{k}{\pi^2 c^3}\,\frac{T}{\omega}, \quad \varphi(\lambda T) = 8\pi k \lambda T.$$

Формула Рэлея — Джинса (23.26) или (23.27) описывает эксперимент только в области малых частот ω или больших длин волн λ (рис. 23.4). На рис. 23.5 показаны экспериментальные кривые распределения энергии в спектре абсолютно черного тела для различных температур; E_λ — плотность энергии, приходящаяся на одну длину волны: $E_\lambda = u/\lambda$. Эти кривые имеют резко выраженный максимум, который смещается в сторону меньших длин волн с повышением температуры в соответствии с законом смещения Вина (23.21), но не обращается в бесконечность при $\lambda \to 0$, как того требует формула Рэлея — Джинса. Плотность энергии u (23.2), вычисленная с использованием формул (23.26) или (23.27), оказывается равной бесконечности:

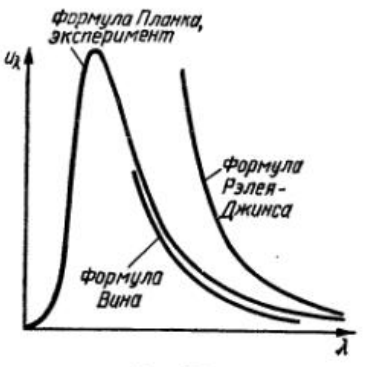


Рис. 23.4

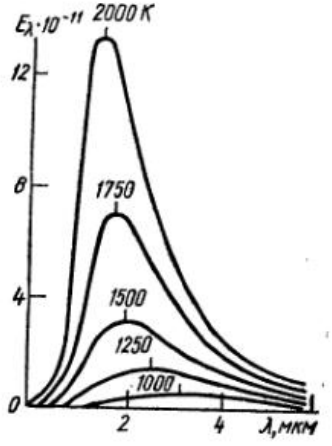


Рис. 23.5

$$u = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \omega^2 d\omega = \infty, \tag{23.28}$$

т. е. тепловое равновесие между веществом и излучением должно наступить только при бесконечной плотности излучения. Так как согласно формуле Рэлея — Джинса в спектре теплового излучения бóльшая часть энергии должна приходиться на коротковолновую часть спектра, то эффект обращения u в бесконечность получил название *ультрафиолетовой катастрофы* (Эренфест).

С точки зрения классической физики равновесие между веществом, имеющим конечное число степеней свободы, и излучением, имеющим бесконечное число степеней свободы, невозможно. Закон о равномер-

ном распределении энергии по степеням свободы с необходимостью приводит к тому, что при тепловом равновесии вся энергия должна была бы перейти к излучению. Это следствие теории Рэлея — Джинса противоречит опытным данным. Оно указывает на то, что распределение энергии по степеням свободы при тепловом излучении отличается от закона равнораспределения, установленного в рамках классической статистической физики.

23.3.4. Формула Планка. Формула для спектральной плотности энергии u_ω равновесного излучения, которая правильно описывает всю совокупность экспериментальных данных (рис. 23.4, 23.5), была предложена Планком (1900). Ее теоретический вывод существенно опирается на гипотезу о том, что излучение и поглощение электромагнитных волн веществом происходит не непрерывно, как этого требует классическая физика, а конечными порциями энергии, называемыми *квантами энергии* или *квантами света*, равными $\mathscr{E}_0 = \hbar\omega = h\nu$, где $\omega = 2\pi\nu$, h — универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка*. Ее числовое значение

$$h = 6{,}626176\,(36)\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с},\quad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0545887\,(57)\cdot 10^{-34}\ \text{Дж}\cdot\text{с}. \tag{23.29}$$

Формула Планка, в переменных ω, T имеет вид

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\,\frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}, \tag{23.30}$$

в переменных ν, T

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{\nu h/kT}-1}, \tag{23.31}$$

в переменных λ, T

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}. \tag{23.32}$$

Следствия формулы Планка.

1. При низких частотах, $\hbar\omega/kT \ll 1$, формула (23.30) переходит в формулу Рэлея — Джинса (23.26), которая правильно описывает излучение в инфракрасной области спектра.

2. При высоких частотах, $\hbar\omega/kT \gg 1$, из (23.30) получаем формулу Вина

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\,e^{-\hbar\omega/kT}, \tag{23.33}$$

которая правильно описывает излучение абсолютно черного тела в ультрафиолетовой области спектра.

3. Формула Планка устраняет ультрафиолетовую катастрофу (23.28). Она позволяет теоретически вычислить постоянные σ и a в законе Стефана — Больцмана (23.13):

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1},$$
$$u = aT^4,\quad a = \frac{\pi^2k^4}{15c^3\hbar^3} = \frac{8\pi^5k^4}{15c^3h^3}, \tag{23.34}$$
$$K = \pi B = \pi I = \sigma T^4,\quad \sigma = \frac{\pi^2k^4}{60c^2\hbar^3} = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3}.$$

Величина K называется *энергетической светимостью излучающей абсолютно черной поверхности*, B — *яркость* излучающей поверхности.

Числовые значения постоянной Стефана — Больцмана σ и постоянной a:

$$\sigma = 5{,}67032\,(71)\cdot 10^{-8}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-4},\quad a = 7{,}56\cdot 10^{-16}\ \text{Дж}\cdot\text{м}^{-3}\cdot\text{К}^{-4}. \tag{23.35}$$

4. Для закона Вина (23.21) теоретическое значение константы

$$b = 2{,}897790(90)\cdot 10^{-3}\ \text{м}\cdot\text{К}, \tag{23.36}$$

найденное со спектральной плотностью u_ω (23.30), хорошо согласуется со значением (23.22), полученным опытным путем.

5. Измерив на опыте величины c, σ и b, можно вычислить фундаментальные физические константы: постоянную Планка h, число Авогадро N_A, электрический заряд $e = F/N_A$, где F — число Фарадея.

6. Средняя энергия $\langle\mathscr{E}\rangle$, приходящаяся на одну степень свободы излучения, неодинакова для стоячих волн с различными частотами. Из формул (23.30) и (23.25) следует, что

$$\langle\mathscr{E}\rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \tag{23.37}$$

— с ростом ω величина $\langle\mathscr{E}\rangle$ быстро убывает.

Формула Планка может быть получена теоретически в рамках модели, рассматривающей равновесное излучение в полости как фотонный газ с переменным числом фотонов, подчиняющийся статистике Бозе — Эйнштейна [67.1.1] и имеющий химический потенциал $\mu = 0$ [21.4.4].

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Глава VI

Электричество

24. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

24.1. Основные понятия и определения

24.1.1. Электрический заряд. *Электродинамикой* называется раздел физики, в котором изучаются свойства электромагнитного поля и электромагнитные процессы в различных средах. Опыт показывает, что в природе существует особый вид сил, называемых электромагнитными. Электромагнитные силы действуют на расстоянии между покоящимися и движущимися частицами или телами, обладающими электрическим зарядом. К понятию электрического заряда можно прийти, изучая элементарные законы взаимодействия наэлектризованных тел. Для того чтобы наэлектризовать тело, т. е. зарядить его определенным количеством электричества, необходимо сообщить ему или отобрать у него то или иное количество электрических зарядов. Наэлектризовать тело можно простым трением его о шелк, мех или шерсть.

Из опыта следует, что если на покоящееся наэлектризованное тело 1, находящееся в данной точке M силового поля, действует сила F_1, а на покоящееся наэлектризованное тело 2 в той же точке действует сила F_2, то отношение этих сил F_1/F_2 не зависит от выбора точки M и характеристик силового поля. Оно определяется только свойствами самих тел. По определению отношение F_1/F_2 полагают равным отношению q_1/q_2:

$$F_1/F_2 = q_1/q_2, \tag{24.1}$$

где величины q_1 и q_2 называют *электрическими зарядами* тел 1 и 2 соответственно. Электрический заряд не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, в которой он измеряется, т. е. заряд инвариантен относительно перехода из одной инерциальной системы отсчета к другой.

Существует два вида электрических зарядов: *положительные* и *отрицательные*. Существование электрического заряда в двух видах является его фундаментальным свойством. Заряды, возникающие на стекле, потертом о мех, называют положительными, а заряды, возникающие на поверхности эбонита, потертом о шелк,— отрицательными зарядами. Силы взаимодействия электрических зарядов таковы, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Во всех телах всегда содержатся как положительные, так и отрицательные заряды. В обычных условиях в каждой макроскопической части объема тела содержится одинаковое количество положительных и отрицательных зарядов. О таком теле говорят, что оно не заряжено или электрически нейтрально.

Установлено опытным путем, что электрические заряды существуют в природе в виде свободных заряженных частиц. Наименьший отрицательный заряд имеет частица, получившая название электрон, а наименьший положительный заряд имеет частица, называемая протоном. Заряды электрона и протона имеют одинаковую по модулю, но разную по знаку величину [64.1; 66.1].

Если линейные размеры электрически заряженных тел значительно меньше расстояний между этими телами, то с высокой степенью точности эти тела и заряды можно рассматривать как точечные. Наиболее простой вид законы взаимодействия наэлектризованных тел имеют в случае точечных зарядов.

24.1.2. Закон сохранения заряда. Фундаментальным свойством взаимодействия заряженных частиц и тел является **закон сохранения заряда:** *в изолированной системе полный электрический заряд остается постоянным* [26.1.2]. Под изолированной системой здесь понимают систему, в которую из внешней среды через ее границы не проникают электрически заряженные частицы (тела). Полный электрический заряд q системы равен алгебраической сумме ее положительных и отрицательных зарядов q_1, q_2, ...:

$$q = q_1 + q_2 + \cdots = \sum_i q_i.$$

Из закона сохранения заряда следует, что положительные и отрицательные заряды могут рождаться и уничтожаться (аннигилировать) в системе только парами, состоящими из одного положительного и одного отрицательного заряда (например, электрона e^- и позитрона e^+ [XVII]). Рождение таких пар возможно только при взаимодействии частиц больших энергий, превышающих массу покоя рождающейся пары. При низких энергиях такие процессы невозможны и выполняется закон сохранения отдельно для положительных и отрицательных зарядов.

24.1.3. Квантование электрического заряда. Опыт показывает, что все встречающиеся в природе в свободном виде заряды состоят из дискретных зарядов постоянной величины, равной заряду электрона: $e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ Кл [64.1]. Это универсальное свойство называют **законом квантования электрического заряда.** В соответствии с ним заряд неизолированной системы может увеличиться или уменьшиться только на целое число, кратное заряду электрона. Все элементарные частицы [XVII] имеют одинаковые по величине заряды. Современная теория электромагнитных явлений не может исходя из начальных принципов объяснить факт квантования заряда и принимает его как постулат.

24.1.4. Напряженность электрического поля. Взаимодействие неподвижных электрически заряженных частиц и тел осуществляется через материального посредника, называемого *электрическим полем*. Независящее от времени поле называют *электростатическим*. Количественно электрическое поле характеризуют напряженностью. *Напряженностью электрического поля* **E** называется сила **F**, действующая на единичный неподвижный электрический заряд:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \tag{24.2}$$

где q — заряд, на который в точке поля с напряженностью **E** действует сила **F**.

Величина E отражает свойства материальной среды, передающей взаимодействие покоящихся электрических зарядов на расстояние. Она не зависит от величины этих зарядов. Напряженность электрического поля E есть вектор. Он определяет направление и величину действия поля на помещенный в нем электрический заряд q. Электрическое поле создается электрическими зарядами. Вокруг электрического заряда всегда существует свое электрическое поле. Точечный заряд любой величины, помещенный в электрическое поле, не изменяет (не искажает) это поле. В более сложных случаях объемного распределения заряда он может вызвать перераспределение внешних зарядов, создающих поле, и тем самым вызвать искажение самого поля.

Основное свойство электрического поля заключается в том, что на всякий другой заряд, помещенный в это поле, всегда действует сила. Это свойство лежит в основе количественного определения зарядов и напряженности электрического поля.

Понятие электрического поля связано с неподвижными электрическими зарядами. В случае движения зарядов между ними возникают новые силы магнитного взаимодействия. С этими силами связано понятие магнитного поля [29]. Электрическое и магнитное поле могут превращаться одно в другое [31]. Они суть одного единого поля, называемого электромагнитным. Электромагнитное поле может существовать независимо от породивших их зарядов, оно имеет импульс и массу, может переносить энергию [32]. Эти свойства электромагнитного поля и позволяют рассматривать его как особую форму материи, обладающую вполне определенными физическими свойствами.

24.1.5. Проводники и диэлектрики. Тела, в которых электрические заряды могут свободно перемещаться на значительные расстояния, называют *проводниками*. Примеры проводников: металлы в твердом и жидком состояниях, водные растворы солей и кислот, ионизированные газы, электролиты. Тела, в которых заряды не могут перемещаться от одной части тела к другой (связанные заряды), называют *диэлектриками*. Примеры диэлектриков: кварц, янтарь, эбонит, газы в нормальных условиях. Связанными зарядами являются заряды, входящие в состав атомов и молекул диэлектрика, заряды ионов в кристаллах с ионной решеткой. Свободными зарядами, существующими в проводниках, являются электроны проводимости в металлах, ионы в газах и электролитах. Деление на проводники и диэлектрики условно. Во всех веществах в большей или меньшей степени возможно перемещение зарядов на расстояния, превышающие их отклонения от равновесных положений. Является тело диэлектриком или проводником, зависит от постановки задачи или проводимого опыта. Если заряд, прошедший через некоторое тело, мал по сравнению с зарядами, прошедшими через другие тела при тех же условиях, то такое тело с хорошей степенью точности можно рассматривать как диэлектрик.

24.1.6. Диэлектрическая проницаемость вещества. Опыт показывает, что взаимодействие зарядов зависит от среды, в которой они находятся, и определяется напряженностью электрического поля согласно (24.2). Если напряженность поля, создаваемого в вакууме системой зарядов, равна $\mathbf{E}_0$, то эти же заряды в однородной и изотропной среде (диэлектрике) создадут электрическое поле с напряженностью

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\varepsilon, \tag{24.3}$$

где величина ε называется *относительной диэлектрической проницаемостью* вещества или просто *диэлектрической проницаемостью* диэлектрика. Относительная диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз уменьшается напряженность электрического поля в однородном и изотропном диэлектрике при заданном распределении заряда по сравнению с вакуумом. Физическая причина этого явления состоит в том, что в диэлектрике возникают поляризационные заряды (25.50), уменьшающие электрическое поле. Диэлектрическая проницаемость ε определяется свойствами диэлектрика и, в частности его поляризуемостью [25.2.4].

25. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Электростатикой называется раздел физики, в котором изучают свойства и взаимодействие неподвижных электрических зарядов и создаваемых ими электрических полей.

25.1. Закон Кулона

Основным количественным законом электростатики является **закон Кулона** (1785): *сила F взаимодействия двух точечных электрических зарядов 1 и 2 прямо пропорциональна их величинам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними r_{12}:*
для вакуума

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \tag{25.1}$$

для диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^2}, \tag{25.2}$$

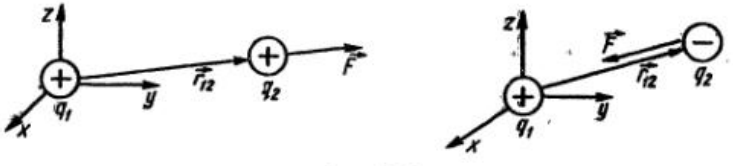


Рис. 25.1

или в векторной форме

$$\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}, \quad \mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}, \tag{25.3}$$

где k — числовой коэффициент, который зависит от выбора единиц заряда, расстояния и силы; $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — радиус-вектор, направленный от заряда 1 к заряду 2. Сила $\mathbf{F}$ в (25.3) есть сила, действующая на заряд 2 со стороны заряда 1 (рис. 25.1).

В системе СГСЭ единицей длины является сантиметр (см), $[L]$ = см, единицей силы — дина (дин), $[F]$ = дин $= \frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}^2}$, а единица заряда не определена и является произвольной. В этой системе полагают $k = 1$. Тогда единица заряда однозначно определяется законом Кулона:

$$1\ \text{СГСЭ}_q = 1\ \text{см}\cdot\text{дин}^{1/2} = 1\ \text{см}^{3/2}\cdot\text{г}^{1/2}\cdot\text{с}^{-1}, \tag{25.4}$$

Эту единицу называют электростатической единицей заряда или СГСЭ-единицей заряда и обозначают $СГСЭ_q$. Она равна величине такого точечного заряда, который действует на такой же точечный заряд в вакууме с силой в 1 дин при относительном расстоянии между зарядами в 1 см.

В Международной системе единиц СИ единицей длины является метр (м), $[l] = м$, единицей силы — ньютон (Н), $[F] = Н = \frac{кг \cdot м}{с^2}$ а единицей заряда — кулон (Кл), $[q] = Кл$.

Кулоном называется заряд, проходящий за одну секунду (с) через сечение проводника, в котором течет постоянный ток силой в один ампер (А):

$$1\ Кл = 1\ А \cdot с.$$

Определение ампера основано на законах магнитного взаимодействия упорядоченного движения зарядов (токов) [26.1.1; 29.2]. По определению

$$1\ Кл = 0{,}1 \cdot c = 2{,}99792458 \cdot 10^{10}\ СГСЭ_q \simeq 3 \cdot 10^9\ СГСЭ_q, \quad (25.5)$$

где c — скорость света в вакууме. Кулон — очень большая единица заряда. Так, два точечных заряда $q_1 = q_2 = q = 1$ Кл, удаленных на расстояние $r = 1$ м, взаимодействуют в вакууме с силой $F = kq^2/r^2$, $F = 9 \cdot 10^{14}$ дин $= 9 \cdot 10^9$ Н.

При таком выборе единицы заряда коэффициент пропорциональности k в формулах (25.1) — (25.3) равен

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad (25.6)$$

где коэффициент 4π выделен из соображений удобства записи уравнений Максвелла [31.2], а величину ε_0 называют *электрической постоянной*. Ее числовое значение

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2},\ \varepsilon_0 \simeq 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ Ф/м = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ Кл^2/(м^2 \cdot Н). \quad (25.7)$$

Электрическая постоянная ε_0 не имеет физического смысла. Ее введение обусловлено только выбором системы единиц (СИ). В СИ единицей электрической постоянной является фарад на метр (Ф/м):

$$[\varepsilon_0] = Ф/м = Кл^2/м^2 \cdot Н.$$

Для ее определения используют понятие электрической емкости [25.6]. Единица электрической постоянной ε_0 в системе СГСЭ обозначается $СГСЭ_{\varepsilon_0}$. Она безразмерна и связана с фарад на метр соотношением

$$1\ СГСЭ_{\varepsilon_0} = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ Ф/м. \quad (25.8)$$

С учетом выбора системы единиц закон Кулона (25.2) в СИ записывают в виде

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}, \quad (25.9)^*$$

где для вакуума $\varepsilon = 1$.

Согласно (25.9) силы электростатического взаимодействия центральны, т. е. они зависят только от расстояния между зарядами и направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды (рис. 25.1). Для

одноименных зарядов ($q_1 > 0$, $q_2 > 0$ или $q_1 < 0$, $q_2 < 0$) сила $F > 0$ — взаимное отталкивание зарядов. Для разноименных зарядов ($q_1 < 0$, $q_2 > 0$ или $q_1 > 0$, $q_2 < 0$) сила $F < 0$ — взаимное притяжение зарядов.

Если имеется несколько фиксированных в пространстве зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то результирующая сила $\mathbf{F}$, действующая на некоторый (пробный) заряд q_0, помещенный в электрическое поле этих зарядов, равна векторной сумме сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, приложенных к нему со стороны каждого из полей зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_0 q_i \mathbf{r}_{i0}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_{i0}^3}, \quad (25.10)$$

где $\mathbf{r}_{i0}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q_i к заряду q_0. На рис. 25.2 показан случай $n = 2$.

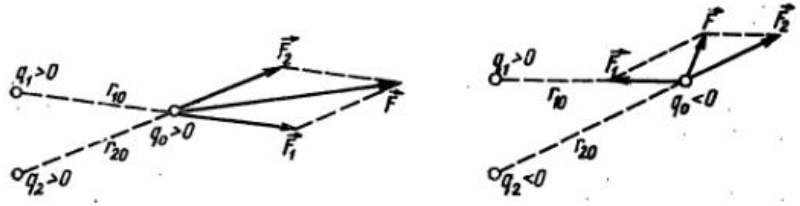


Рис. 25.2

25.2. Электростатическое поле

25.2.1. Вектор напряженности. Количественной характеристикой электрического поля является его напряженность [24.1.4]. Напряженность электрического поля точечного заряда q в данной точке пространства с координатами x, y, z дается формулой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\mathbf{r}, \quad (25.11)^*$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q в рассматриваемую точку с координатами x, y, z среды с относительной диэлектрической проницаемостью ε (для вакуума $\varepsilon = 1$).

Принцип суперпозиции электростатических полей: *напряженность электрического поля* $\mathbf{E}$, *создаваемого неподвижными точечными зарядами* $q_1, q_2, \ldots, q_n$, *в точке* (x, y, z) *равна векторной сумме напряженностей полей* $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots, \mathbf{E}_n$, *которые создали бы эти заряды по отдельности в той же точке*:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_i^3}\mathbf{r}_i, \quad (25.12)$$

где $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор, проведенный из i-го заряда q_i в точку пространства с координатами (x, y, z), в которой измеряется напряженность поля. Поле в точке (x, y, z) является векторной суммой полей каждого из зарядов системы.

Если заряды распределены неравномерно на поверхности или в объеме тела, то напряженность поля в заданной точке пространства определяется интегралом

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}, \qquad (25.13)$$

где $d\mathbf{E}$ — напряженность поля, создаваемого зарядами элемента поверхности или объема, а интегрирование производится по области распределения зарядов.

Заряды, распределенные непрерывно вдоль некоторой линии, характеризуют *линейной плотностью*

$$\varkappa = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}, \quad dq = \varkappa dl, \qquad (25.14)$$

где dq— заряд элемента длиной dl. Заряды, распределенные по поверхности, характеризуются *поверхностной плотностью*

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}, \quad dq = \sigma dS, \qquad (25.15)$$

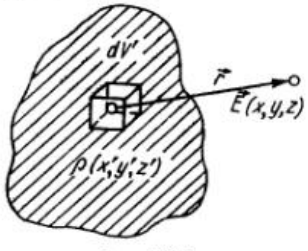


Рис. 25.3

где dq — заряд элемента площади dS. При объемном распределении заряда имеем

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad dq = \rho dV, \qquad (25.16)$$

где dq — заряд элемента объема dV, ρ называется *объемной плотностью* или просто *плотностью заряда*.

Если источник электрического поля характеризуется непрерывным объемным распределением заряда, то напряженность электрического поля в точке (x, y, z) определяется формулой

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,\hat{\mathbf{r}}}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2} dx'dy'dz', \qquad (25.17)$$

где $\rho(x', y', z')\,dx'dy'dz'$ — заряд, содержащийся в объеме $dV' = dx'dy'dz'$, расположенном в точке (x', y', z'), $\hat{\mathbf{r}}$ — единичный вектор: $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$, направленный от точки (x', y', z') к точке (x, y, z) (рис. 25.3), а интегрирование производится по всему пространству, содержащему заряд, $r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$. Компонента E_x вектора $\mathbf{E}$ согласно формуле (25.17) определяется выражением

$$E_x(x, y, z) = \iiint \frac{(x - x')\,\rho(x', y', z')\,dx'dy'dz'}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}.$$

Аналогично записываются компоненты E_y и E_z.

Напряженность электростатического поля — векторная величина. Она не зависит от времени и является функцией координат. Электростатическое поле называется *однородным*, если его напряженность $\mathbf{E}$ во всех точках пространства одинакова. У неоднородного поля напряженность $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ изменяется от точки к точке.

Для графического изображения электростатических полей используют понятие силовых линий поля. *Силовыми линиями поля* называют кривые, касательные к которым в любой точке поля совпадают с направлением его вектора напряженности $\mathbf{E}$ в этой точке. За положительное направление силовой линии условились считать направление самого вектора $\mathbf{E}$. При таком соглашении силовые линии электрического поля начинаются у положительных зарядов и заканчиваются на отрицательных. По густоте силовых линий можно судить о величине напряженности электрического поля (рис. 25.4). Единицей напряженности электрического поля в СИ является:

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

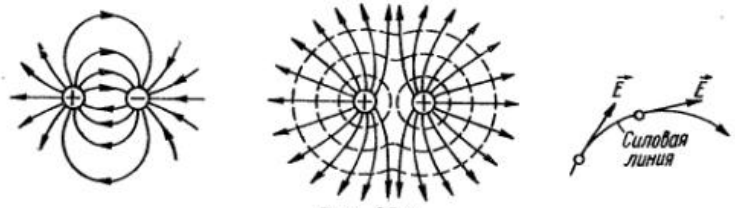


Рис. 25.4

в системе СГСЭ

$$[E] = \frac{\text{дин}^{1/2}}{\text{см}} = \frac{\text{дин}}{\text{СГСЭ}_q} = \frac{\text{г}}{\text{см}^{1/2} \cdot \text{с}} \equiv \text{СГСЭ}_E.$$

За единицу напряженности электрического поля принимается напряженность такого поля в вакууме, которое действует на единичный точечный заряд с силой в одну дину (в СГСЭ) или в один ньютон (в СИ).

Единица $\mathbf{E}$ не получила специального названия. В системе СИ ее называют вольт на метр, а в системе СГСЭ — электростатической единицей напряженности электрического поля (обозначается СГСЭ_E).

Соотношение между единицами В/м и СГСЭ_E имеет вид

$$1\ \text{СГСЭ}_E = 3 \cdot 10^4\ \text{В/м}. \qquad (25.18)$$

25.2.2. Электрический диполь. *Электрическим диполем* называется система из двух жестко связанных одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов $+q$ и $-q$, смещенных один относительно другого на вектор $\mathbf{l}$, направленный от отрицательного заряда к положительному (рис. 25.5). Вектор

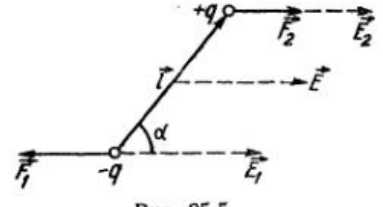


Рис. 25.5

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l} \qquad (25.19)$$

называется *электрическим моментом диполя* или *дипольным моментом*. На диполь, помещенный во внешнее электрическое поле $\mathbf{E}$, действует сила $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$— силы, действующие на заряды диполя: $\mathbf{F}_1 = -q\mathbf{E}_1$, $\mathbf{F}_2 = q\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$— напряженности полей в точках нахождения зарядов $-q$ и $+q$. Для однородного поля $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$ и результирующая сила $\mathbf{F} = 0$. Если угол α между направлением векторов смещения $\mathbf{l}$ и напряженности внешнего поля $\mathbf{E}$ отличен от нуля, то к диполю приложен вращательный момент (момент пары сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$)

$$\mathbf{N} = \mathbf{l} \times \mathbf{F}_2 = q(\mathbf{l} \times \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad N = pE \sin\alpha, \qquad (25.20)$$

который стремится повернуть ось диполя в направлении поля **E**. Направление момента пары сил **N** совпадает с направлением оси вращения диполя — оно перпендикулярно **p** и **E**.

В однородном электрическом поле **E** диполь обладает потенциальной энергией

$$U = -\mathbf{pE}. \qquad (25.21)$$

Если поле неоднородно, то результирующая сила **F** отлична от нуля: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)$. Если размеры диполя значительно меньше расстояния от диполя до точки наблюдения, $r \gg l$, то такой диполь называют *точечным*. Для точечного диполя сила **F** описывается выражением

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\,\mathbf{E} \equiv p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}, \qquad (25.22)$$

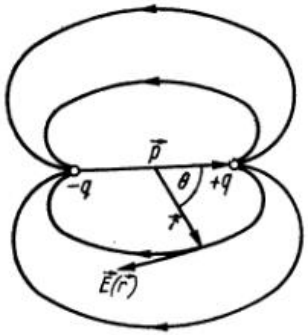


Рис. 25.6

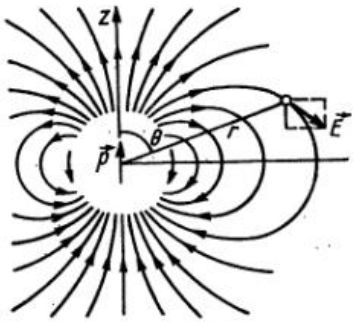


Рис. 25.7

где p_x, p_y, p_z — компоненты дипольного момента **p**. Электрическое поле диполя в точке, расположенной на расстоянии r, значительно большем размеров диполя, $r \gg l$, определяется соотношением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{pr})}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^5}\,\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^3}, \qquad (25.23)^*$$

где **r** — радиус-вектор, проведенный из любой точки диполя в точку наблюдения, ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится диполь (для вакуума $\varepsilon = 1$) (рис. 25.6). На рис. 25.7 показано электрическое поле диполя в вакууме с компонентами

$$E_x = \frac{3p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sin\theta\cos\theta, \quad E_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(3\cos^2\theta - 1). \qquad (*)$$

Единицей электрического дипольного момента в СИ является:

$$[p] = \text{Кл} \cdot \text{м} = \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м};$$

она связана с соответствующей единицей в системе СГСЭ соотношением

$$1\ \text{Кл} \cdot \text{м} = 2{,}998 \cdot 10^{11}\ \text{см}^{5/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1}. \qquad (25.24)$$

Иногда используют единицу дебай, которая по определению равна

$$1\ \text{дебай} = 10^{-18}\ \text{см}^{5/2} \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{с}^{-1} \simeq 0{,}2 \cdot e \cdot 10^{-10}\ \text{м},$$

где e — заряд электрона, $e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ Кл.

В атоме (состоящем из Z электронов и атомного ядра с зарядом $+Ze$), помещенном в однородное электрическое поле **E**, возникает индуцированный электрический дипольный момент, обусловленный смещением отрицательно заряженного облака электронов относительно положения заряженного ядра этого атома (рис. 25.8).

Индуцированный дипольный момент атома

$$\mathbf{p}_{\text{инд}} = Ze\,\mathbf{l} = \frac{1}{f}(Ze)^2\,\mathbf{E} \equiv \alpha\mathbf{E}, \qquad (25.25)$$

где α называется *поляризуемостью*, а f — коэффициентом жесткости. Он определяется формулой для силы **F**, действующей на атомное ядро:

$$\mathbf{F} = Ze\,\mathbf{E} \equiv f\,\mathbf{l}.$$

Единицей поляризуемости атома в СИ является:

$$[\alpha] = \text{Кл} \cdot \text{м}^2/\text{В} = \Phi \cdot \text{м}^2,$$
$$1\ \Phi \cdot \text{м}^2 = 1 \cdot \text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{В}^{-1} = 9 \cdot 10^{15}\ \text{см}^3. \qquad (25.26)$$

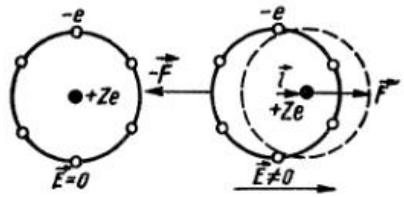


Рис. 25.8

В табл. 25.1 приведены значения α для ряда атомов с заполненными (I) и незаполненными (II) оболочками.

Потенциальная энергия U индуцированного диполя в однородном электрическом поле E определяется формулой

$$U = \frac{\alpha}{2}E^2 = \frac{p_{\text{инд}}^2}{2\alpha} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\mathbf{p}_{\text{инд}}. \qquad (25.27)$$

Таблица 25.1. **Поляризуемость α атомов некоторых веществ**

Атом (I)	He	Ne	Xe	CCl_4	Li^+	K^+	O^{2-}	Cl^-	I^-
$\alpha \cdot 10^{40}$, $\Phi \cdot м^2$	0,2	0,4	3,5	10	0,03	0,9	3,5	4	7

Атом (II)	H	Li	K	Cs	Na	Be	C
$\alpha \cdot 10^{40}$, $\Phi \cdot м^2$	0,7	13	38	46	27	9,3	1,5

25.2.3. Электростатические поля простых систем.

1. Напряженности электростатического поля *точечного заряда* q и *системы точечных зарядов* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ определяются формулами (25.11) и (25.12).

2. Напряженность поля *точечного диполя* описывается формулой (25.23).

3. *Поле шара.* Шар, равномерно заряженный по поверхности или объему, создает во внешнем пространстве поле, равное полю, создава-

емому точечным зарядом, равным заряду шара и помещенным в его центр. Напряженность $\mathbf{E}$ этого поля

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^3}\,\mathbf{r},\ r > a, \qquad (25.28)^*$$

где q — полный заряд шара, a — его радиус, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку M (рис. 25.9), где измеряется поле, ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещен шар. В случае объемного распределения заряда (рис. 25.9, *а*) с плотностью ρ (25.16) полный заряд равен $q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$, а в случае поверхностного распределения (рис. 25.9,*б*) с плотностью σ (25.15) имеем $q = 4\pi a^2\sigma$. Электрическое поле внутри сферической полости, равномерно заряженной по поверхности, равно нулю: $\mathbf{E}_1 = 0$. Поле внутри

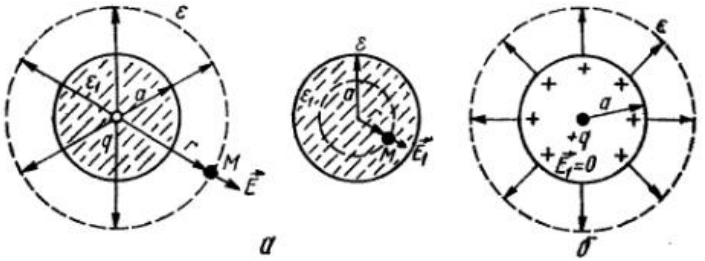


Рис. 25.9

шара, равномерно заряженного по объему, отлично от нуля. Его напряженность $\mathbf{E}_1$ определяется объемной плотностью ρ (25.16):

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon_1}\,\mathbf{r} \text{ при } r < a, \qquad (25.29)^*$$

где учтено, что $q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$, r — расстояние от центра шара до точки наблюдения M (рис. 25.9), находящейся внутри шара, ε_1 — диэлектрическая проницаемость вещества шара.

При отсутствии свободных зарядов на поверхности шара, при $r = a$, должно выполняться граничное условие

$$\varepsilon E = \varepsilon_1 E_1,$$

обеспечивающее непрерывность вектора напряженности поля при его переходе через границу раздела двух диэлектриков.

4. *Поле плоскости.* Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной пластинки

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad (25.30)^*$$

где σ — поверхностная плотность зарядов (25.15). Векторы $\mathbf{E}$ по обе стороны пластинки равны по величине и противоположны по направлению (рис. 25.10). Напряженность поля бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее. При переходе через пластинку она изменяется скачком на величину $2\sigma/\varepsilon_0\varepsilon$. Если пластинка имеет конечные размеры, то формула (25.30) описывает напряженность

поля только вблизи ее поверхности на расстояниях, значительно меньших размеров пластинки. Если эти расстояния сравнимы с размерами пластинки, то формула (25.30) неприменима. Если размеры пластинки значительно меньше расстояния до точки, где измеряется поле, то пластинка действует как точечный заряд и поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния согласно (25.11).

5. *Поле плоскопараллельной пластинки.* Если толщина бесконечной пластинки равна $2a$, а объемная плотность электричества внутри пластинки равна ρ, то напряженность поля при равномерном распределении заряда определяется формулой:
внутри пластинки

$$E_1 = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_1}x, \qquad (25.31а)^*$$

вне пластинки

$$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}a, \qquad (25.31б)^*$$

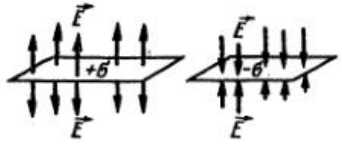


Рис. 25.10

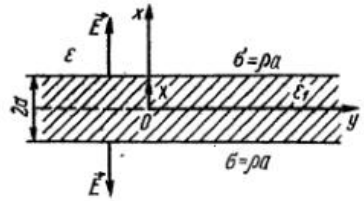


Рис. 25.11

где ε_1, ε — диэлектрические проницаемости вещества пластинки и внешней среды, x — расстояние от средней плоскости пластинки до плоскости, где измеряется напряженность поля (рис. 25.11). На границе двух сред при $x = a$, если там нет свободных зарядов, должно выполняться условие непрерывности напряженности поля

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon E_n,\ E_{1t} = E_t,$$

где E_{1n}, E_n и E_{1t}, E_t — нормальные (перпендикулярные поверхности) и тангенциальные (вдоль поверхности) составляющие напряженностей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}$.

Если на поверхности имеются заряды с плотностью σ, то граничное условие имеет вид

$$E_{1t} = E_t,$$
$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (*)$$

6. *Поле между разноименно заряженными параллельными пластинками.* Две равномерно и с одинаковой плотностью σ, но разноименно заряженные бесконечные параллельные плоскости создают в пространстве между плоскостями однородное электростатическое поле с напряженностью

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (25.32)^*$$

В остальном пространстве поле $E = 0$ (рис. 25.12). Формула (25.32) описывает напряженность плоского конденсатора [25.6.2] в средней

его части. Она не учитывает искажения поля, вносимые краями его пластин.

7. *Поле вблизи поверхности заряженного проводника.* Напряженность поля вблизи поверхности произвольного заряженного металлического проводника в случае, когда заряды на нем находятся в равновесии (т. е. отсутствует электрический ток, а значит, и поле внутри него равно нулю), не зависит явно от формы проводника, распределения зарядов на нем и расположения соседних проводников:

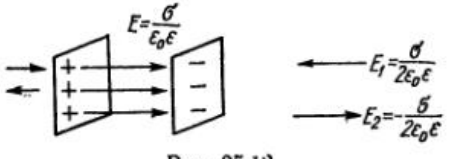


Рис. 25.12

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (25.33)^*$$

где σ — поверхностная плотность заряда, т. е. заряд, сместившийся внутрь проводника в расчете на единицу поверхности (рис. 25.13).

8. *Поле цилиндра и длинной прямой линии.* Поле вне бесконечно длинного кругового цилиндра, равномерно заряженного по объему или по поверхности, так же, как и поле бесконечной равномерно заряженной прямой линии, направлено радиально к цилиндру (линии) или от него (нее) в зависимости от знака заряда, а его величина на расстоянии r от цилиндра (линии) определяется формулой

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\varkappa}{r}, \quad (25.34)^*$$

где $\varkappa$ — линейная плотность заряда (25.14), т. е. заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра (линии). Если цилиндр полый и равномерно заряжен по поверхности, то поле внутри него равно нулю. Если

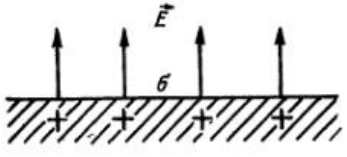


Рис. 25.13

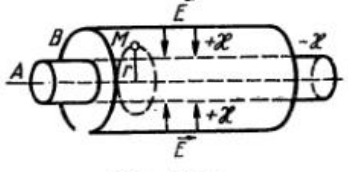


Рис. 25.14

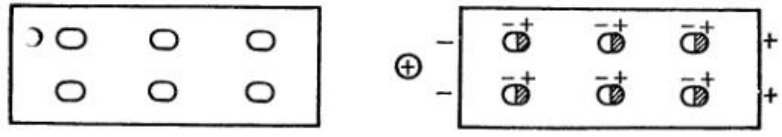
цилиндр равномерно заряжен по объему с постоянной плотностью заряда ρ (25.16), то на расстоянии r от его оси

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} r, \quad (25.35)^*$$

где ε_1 — диэлектрическая проницаемость вещества цилиндра.

9. *Поле цилиндрического конденсатора.* Систему из двух коаксиальных металлических цилиндров называют *цилиндрическим конденсатором* (рис. 25.14). Пусть внутреннему цилиндру A сообщен заряд q, линейная плотность которого $\varkappa = q/l$, где l — длина цилиндра. Тогда на внешнем заземленном цилиндре B со стороны, обращенной к цилиндру A, появится заряд с той же плотностью $\varkappa$, но противоположного знака. Если длина цилиндров много больше их радиусов то напряженность поля между ними в точке M, отстоящей на расстоянии r от оси цилиндров, определяется формулой (25.34), где ε — диэлектрическая проницаемость вещества между цилиндрами A и B. Эта формула справедлива для участков конденсатора, расположенных на расстояниях от его края, бо́льших диаметра внешнего цилиндра. Напряженность поля E (25.34) конденсатора не зависит от диаметра внешнего цилиндра. Если диаметр внешнего цилиндра (электрода) значительно больше диаметра внутреннего цилиндра, то напряженность поля вблизи него не зависит от формы внешнего электрода.

25.2.4. Вектор электрической индукции. В диэлектриках заряды могут смещаться из своих положений равновесия только на малые


Рис. 25.15

расстояния порядка размеров атомов. Если диэлектрик состоит из электрически нейтральных молекул (рис. 25.15), то под действием приложенного к нему электрического поля E центр тяжести электронов в молекуле смещается относительно центра тяжести атомных ядер. Молекулы становятся электрическими диполями [25.2.2], ориентированными по полю **E**. В этом случае говорят, что диэлектрик поляризован, т. е. положительные и отрицательные заряды смещаются в противоположные стороны. Такое смещение зарядов называют *электрической поляризацией*.

Количественно поляризацию диэлектрика описывают *вектором поляризации* **P**, который по определению равен дипольному моменту единицы объема диэлектрика, возникающему при его поляризации:

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma S}{V}\mathbf{l}, \quad P_n = \mathbf{Pn} = \sigma. \quad (25.36)$$

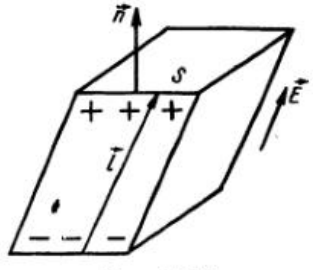


Рис. 25.16

Здесь $\sigma S\mathbf{l}$ — дипольный момент, приобретенный куском диэлектрика с площадью сечения S, на котором возникают поляризационные заряды с поверхностной плотностью σ, **l** — вектор, проведенный от отрицательно заряженной стороны сечения к положительно заряженной стороне параллельно боковым поверхностям, **n** — внешний единичный вектор (нормаль) к стороне сечения, заряженной положительно (рис. 25.16), $V = S(\mathbf{ln})$ — объем куска диэлектрика.

Если кусок диэлектрика представляет собой прямоугольный параллелепипед, то $P = \sigma$. В случае, когда напряженности макроскопических электрических полей, приложенных к диэлектрику, малы по сравнению с напряженностями микрополей внутри атомов и молекул (что, как правило, имеет место в действительности), то связь между векторами **P** и **E** линейна и однородна. Для изотропной среды

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}, \quad (25.37)^*$$

где α — безразмерный коэффициент, называемый *поляризуемостью диэлектрика*; он зависит от его плотности $\rho_{\text{диэл}}$ и температуры $T_{\text{диэл}}$, $\alpha = \alpha(\rho_{\text{диэл}}, T_{\text{диэл}})$. Относительная диэлектрическая проницаемость

диэлектрика ε [24.1.4] связана с поляризуемостью α простым соотношением

$$\varepsilon = 1 + \alpha. \qquad (25.38)^*$$

Для вакуума полагают $\alpha = 0$ и $\varepsilon = 1$.

Вектор

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad (25.39)^*$$

характеризующий поле в диэлектрике, называют *вектором электрической индукции* или *электрическим смещением*. Основная задача электростатики состоит в нахождении векторов **E** и **D** в каждой точке электрического поля, созданного заданной системой зарядов.

В случае диэлектрика с кристаллической структурой направления вектора поляризации **P** и напряженности поля **E** не совпадают. Связь между ними описывают с помощью тензора диэлектрической проницаемости вещества

$$P_i = \varepsilon_0 \sum_j \alpha_{ij} E_j, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \qquad (25.40)$$

где ($i, j = x, y, z$), P_i — компоненты P_x, P_y, P_z вектора **P**, E_j — компоненты E_x, E_y, E_z вектора **E**. Величину

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \qquad (25.41)$$

называют *тензором диэлектрической проницаемости вещества*, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ (символ Кронекера). Вектор электромагнитной индукции **D** задается своими компонентами

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_j \varepsilon_{ij} E_j, \qquad (25.42)$$

где $i, j = x, y, z$.

Область применения этих соотношений ограничена. Они не применимы к ионным кристаллам и электретам. *Ионными кристаллами* называются диэлектрические кристаллы, построенные из двух кристаллических решеток, встроенных одна в другую и состоящих из ионов противоположного знака (например, кристаллы NaCl). *Электретами* называют диэлектрики, подобные постоянным магнитам. Примером электрета может служить смесь воска и смолы, помещенная в электрическое поле с $E \sim 10^6$ В/м. Ее поляризация сохраняется в течение нескольких часов после прекращения действия поля.

25.3. Теорема Гаусса для электрических полей

Вычисление характеристик электрического поля во многих случаях сильно упрощается, если воспользоваться **теоремой Гаусса:** *поток Φ_e электрического смещения* **D** *через замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме всех зарядов q_i, расположенных внутри поверхности*:

$$\Phi_e = \oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \sum_i q_i, \qquad (25.43)^*$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$ — вектор, равный по величине площади элементарной площадки dS и направленный вдоль вектора внешней нормали **n** к этой площадке (рис. 25.17), D_n — проекция вектора электрической индукции (смещения) **D** на направление вектора нормали **n**, $D_n = \mathbf{Dn} = D\cos\theta$. Интегрирование в (25.43) проводится по замкнутой поверхности S. Величина

$$d\Phi_e = \mathbf{Dn}\, dS = \mathbf{D}\, d\mathbf{S} = D\cos\theta dS = D_n dS = D dS_n \qquad (25.44)$$

представляет собой элементарный поток смещения через участок поверхности dS. Полный поток через любую замкнутую или не замкнутую (рис. 25.18) поверхность S равен поверхностному интегралу

$$\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S}, \qquad (25.45)$$

который равен сумме всех скалярных произведений (25.44) по поверхности S при стремлении элемента dS к нулю.

В дифференциальной форме теорема Гаусса имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \qquad (25.46)^*$$

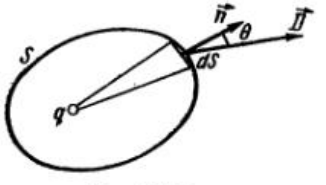


Рис. 25.17

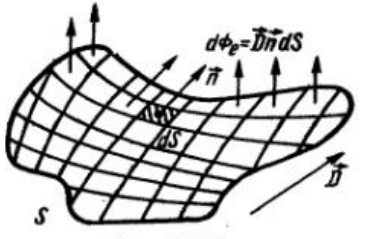


Рис. 25.18

где ρ — объемная плотность свободных зарядов (25.16), являющаяся непрерывной функцией пространственных координат: $\rho = \rho(x, y, z)$, дивергенция вектора **D** определяется соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}, \qquad (25.47)$$

где D_x, D_y, D_z — компоненты вектора **D**. Строгое математическое определение дивергенции (любой) векторной величины **D** дается выражением

$$\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{D}\, d\mathbf{S}, \qquad (25.48)$$

где V — стремящийся к нулю объем, ограниченный поверхностью S, в котором находится точка (x, y, z), где вычисляется дивергенция. Из (25.48) следует физический смысл дивергенции вектора **D**: div**D** *есть поток наружу из объема V, приходящийся на единицу объема*. Этот поток является скалярной функцией пространственных координат x, y, z и может изменяться от точки к точке. Согласно уравнению (25.46) источником электрического смещения являются электрические заряды.

Теорема Гаусса является следствием закона Кулона (25.2). Ее дифференциальная форма (25.46) имеет смысл только в том случае, когда электрический заряд распределен с конечной плотностью ρ. Выражение (25.46) связывает дивергенцию электрического смещения **D** с плотностью распределения зарядов ρ, взятыми в одной и той же точке пространства. Поэтому говорят, что теорема Гаусса в форме (25.46) является локальной теоремой. В интегральной форме (25.43) теорема

устанавливает связь между физическими величинами в сколь угодно удаленных точках пространства в один и тот же момент времени. Ее физическое содержание сводится к утверждению, что с электрическим зарядом $q = \sum_i q_i$ всегда связано электрическое поле, которое является кулоновским, если этот заряд покоится сколь угодно долго.

Из опыта следует, что теорема Гаусса справедлива и в электродинамике [VIII]. Поэтому ее рассматривают как один из основных постулатов теории электричества. Она входит в систему основных уравнений Максвелла [31.2].

Уравнение (25.46), переписанное для напряженности поля **E**, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_{\text{пол}}), \qquad (25.49)^*$$

где величина $\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ называется *плотностью поляризационных зарядов* $q_{\text{пол}}$, определяемых формулой

$$q_{\text{пол}} = -\oint_S \mathbf{P}\, d\mathbf{S} = -\oint_S P_n dS. \qquad (25.50)$$

Здесь **P** — вектор поляризации (25.36). Влияние среды в уравнении (25.49) учитывается введением поляризационных зарядов.

В различных приложениях теории электричества возникает необходимость поток некоторого вектора **A** (например, **D**, **E** и др.) через произвольную замкнутую поверхность S выразить через объемный интеграл по области, ограниченной этой поверхностью. Эту задачу решают с помощью **формулы Остроградского — Гаусса**

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{S}, \qquad (25.51)$$

где V — объем, ограниченный поверхностью S.

25.4. Потенциальность электрического поля

25.4.1. Работа перемещения заряда в электрическом поле. Так как на заряд q, помещенный в электрическое поле напряженностью **E**, действует сила **F** (24.2), то при его перемещении будет производиться работа против силы **F** [5.1]. *Элементарная работа* dA определяется выражением (5.1), которое в данном случае принимает вид

$$dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{s} = F\cos\theta\, ds = qE\cos\theta ds = q\mathbf{E}\, d\mathbf{s}, \qquad (25.52)$$

где θ — угол между направлениями вектора **F** и элементарного перемещения $d\mathbf{s}$. *Полная работа при конечном перемещении заряда* q из положения 1 в положение 2 определяется формулой

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} dA = \int_{(1)}^{(2)} q\mathbf{E}\, d\mathbf{s} = q\int_{(1)}^{(2)} E\cos\theta\, ds. \qquad (25.53)$$

Если положительный заряд q перемещается в однородном поле **E** против направления вектора **E**, то работа

$$A_{12} = -qE(s_2 - s_1),$$

где $(s_2 - s_1)$ есть пройденный зарядом q путь.

Если поле **E** создается неподвижным точечным зарядом Q, то согласно (25.12)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{r^3}\mathbf{r} \qquad (*)$$

и работа A_{12} может быть легко вычислена:

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{(1)}^{(2)}\frac{\mathbf{r}\,d\mathbf{r}}{r^3} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad (25.54)^*$$

где r_1 и r_2 — расстояния точек 1 и 2 от заряда Q (рис. 25.19).

Следствия из (25.54): 1. Если заряды q и Q имеют один знак, то работа электрических сил отталкивания $A_{12} > 0$ при удалении зарядов одного от другого, и $A_{12} < 0$ при их сближении. 2. Если заряды q и Q имеют разные знаки, то работа электрических сил притяжения $A_{12} > 0$ при сближении зарядов и $A_{12} < 0$ при их относительном удалении.

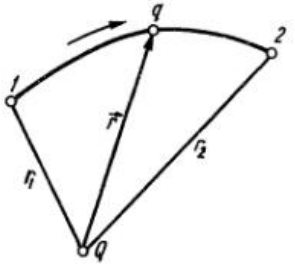


Рис. 25.19

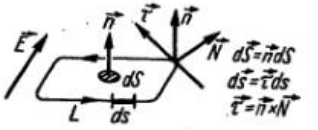


Рис. 25.20

3. Работа A_{12} не зависит от выбора (формы) пути и определяется только положением начальной 1 и конечной 2 точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является полем консервативных сил и может быть охарактеризовано потенциалом [5.2.3]. 4. Любую систему зарядов (свободных, поляризационных или индуцированных в проводниках или диэлектриках) можно рассматривать как совокупность большого числа точечных зарядов. Из принципа суперпозиции электростатических полей (25.12) следует, что всякое электростатическое поле является полем потенциальным.

25.4.2. Циркуляция вектора напряженности. Потенциал. *Циркуляцией* напряженности электрического поля **E** называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L [13.7]

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{s}, \qquad (25.55)$$

где $d\mathbf{s}$ — элементарное перемещение вдоль контура L, т. е. бесконечно малый вектор, касательный к кривой L в любой ее точке. Поле, для которого циркуляция его напряженности равна нулю, называют *потенциальным*. Электростатическое поле потенциально, так как из независимости работы A_{12} (25.54) от формы пути следует, что $A_{12} = -A_{21}$ и

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = 0. \qquad (25.56)$$

Уравнение (25.56) является *фундаментальным уравнением электростатики*. Из него, в частности, следует, что силовые линии электроста-

тического поля не могут быть замкнуты. Уравнение (25.56) в дифференциальной форме имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \text{ или } \nabla \times \mathbf{E} = 0, \qquad (25.57)$$

где операция ротора вектора напряженности $\mathbf{E}$ определяется пределом, к которому стремится его циркуляция (25.55), приходящаяся на единицу площади S, охватываемой контуром L, при уменьшении этой площади до нуля:

$$\mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv \operatorname{rot}_n \mathbf{E} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{s}. \qquad (25.58)$$

Здесь $\operatorname{rot}_n\mathbf{E}$ есть проекция ротора $\mathbf{E}$ на направление единичного вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного плоскости, охваченной бесконечно малым контуром L. Формула (25.58) является следствием **теоремы Стокса**, согласно которой

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}, \qquad (25.59)$$

где интеграл слева берется по произвольному замкнутому контуру L, а справа — по произвольной поверхности S, охваченной этим контуром. Теорема Стокса (25.59) позволяет интеграл по замкнутому контуру свести к интегралу по поверхности (рис. 25.20).

Ротор $\mathbf{E}$ является векторной функцией координат x, y, z, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{E} = (\operatorname{rot}\mathbf{E})(x, y, z)$. Его направление в любой точке (x, y, z) перпендикулярно плоскости, проходящей через эту точку, для которой циркуляция Γ максимальна. Величина ротора является *предельным значением циркуляции*, приходящейся в этой плоскости на единицу площади, вокруг рассматриваемой точки (x, y, z).

Векторное уравнение (25.57) эквивалентно трем уравнениям для компонент ротора напряженности $\mathbf{E}$ по координатным осям

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,\quad (\operatorname{rot}\mathbf{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0. \qquad (25.60)$$

Так как $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0$ для любой функции f, то напряженность поля $\mathbf{E}$ может быть представлена в виде градиента некоторой скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$, называемой *потенциалом* [5.2.3]:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi \text{ или } E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \qquad (25.61)$$

Градиент функции $\varphi(x, y, z)$ по определению есть вектор, направленный вдоль вектора $\mathbf{n}$ в сторону возрастания потенциала $\varphi(x, y, z)$, а его модуль равен производной этой функции в том же направлении $\mathbf{n}$:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{n},\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathbf{n}\nabla\varphi. \qquad (25.62)$$

Вектор $\boldsymbol{n}$ есть нормаль к эквипотенциальной поверхности. Поэтому напряженность $\mathbf{E}$ всегда перпендикулярна поверхности равных потенциалов φ, называемой *эквипотенциальной поверхностью*.

Работу против сил поля A_{12} (25.53) при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 можно определить как разность потенциалов φ_1 и φ_2 полей в этих точках:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2),\ \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}\,d\mathbf{s}. \qquad (25.63)$$

Потенциал поля φ определен лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Электрические поля описываются разностью потенциалов, взятых в различных точках, и поэтому не зависят от этой постоянной. В теоретической физике за нулевое значение φ принимают потенциал бесконечно удаленной точки пространства: $\varphi \to 0$ при $r \to \infty$.

При решении задач теории электричества использование потенциала φ обладает рядом преимуществ по сравнению с напряженностью $\mathbf{E}$. Для задания φ требуется одна величина, а не три, как в случае вектора $\mathbf{E}$. Значение разности потенциалов может быть непосредственно и просто измерено на опыте.

В системе СГСЭ за единицу потенциала принимается потенциал такой точки пространства, для перемещения в которую из бесконечности заряда в 1 СГСЭ$_q$ нужно совершить работу в 1 эрг. Эта единица называется СГСЭ-единицей потенциала φ и обозначается СГСЭ$_\varphi$.

В системе СИ за единицу потенциала принимается вольт (В):

$$[\varphi] = \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}. \qquad (25.64)$$

Вольтом называют потенциал в точке, при перемещении в которую заряда 1 Кл из бесконечности совершается работа в 1 Дж.

Формула (25.63) позволяет выражать работу (и энергию) в электрических единицах — электронвольтах. *Электронвольт* — это энергия, которую приобретает частица с зарядом, равным заряду электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, преодолев разность потенциалов в 1 В:

$$1\ \text{эВ} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}. \qquad (25.65)$$

Если известен потенциал $\varphi(x, y, z)$, то напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ определяется путем дифференцирования φ по координатам x, y, z согласно (25.61). Обратная задача нахождения φ по заданному $\mathbf{E}$ решается интегрированием выражения (25.63).

25.4.3. Потенциалы электростатических полей простых систем.

1. *Потенциал* поля *точечного заряда* q в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \qquad (25.66)^*$$

где положено $\varphi(r = \infty) = 0$, r — расстояние от заряда q до точки измерения потенциала.

2. *Потенциал* поля *системы точечных зарядов* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в однородном диэлектрике

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}, \qquad (25.67)^*$$

где $\varphi(\infty) = 0$, r_i — расстояние от заряда q_i до точки измерения потенциала.

3. *Потенциал непрерывно распределенных электрических зарядов в однородном диэлектрике*

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}')\,dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}')\,dS'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \qquad (25.68)^*$$

где dV' — элемент объема с центром в точке $\mathbf{r}'$, по которому заряд распределен с плотностью $\rho(\mathbf{r}')$, dS' — элемент поверхности с центром в точке $\mathbf{r}'$ и плотностью распределения заряда по ней $\sigma(\mathbf{r}')$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, где измеряется потенциал. Интегрирование ведется по всей области распределения свободных зарядов.

4. *Потенциал непрерывно распределенных электрических зарядов в неоднородном диэлектрике*

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\frac{\rho(\mathbf{r}') + \rho_{\text{пол}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S'}\frac{\sigma(\mathbf{r}') + \sigma_{\text{пол}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dS', \qquad (25.69)^*$$

где $\rho_{\text{пол}}(\mathbf{r}')$ и $\sigma_{\text{пол}}(\mathbf{r}')$ — объемная и поверхностная плотности поляризационных зарядов (25.50) в точке $\mathbf{r}'$. Остальные обозначения, как в (25.68).

5. *Потенциал* поля *шара* с радиусом a и *зарядом* q, *равномерно распределенным по* его *поверхности*, в однородном диэлектрике. Вне шара

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r}, \qquad (25.70)^*$$

где r — расстояние от центра шара до точки наблюдения, $r > a$, ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика, в котором находится шар. Внутри шара

$$\varphi(a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a} = \text{const}. \qquad (25.71)^*$$

6. *Потенциал поля шара* радиусом a, *равномерно заряженного по объему* с плотностью ρ. Внутри шара

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0\varepsilon_1}(3a^2 - r^2), \qquad (25.72)^*$$

где $r < a$, ε_1 — диэлектрическая проницаемость вещества шара. Вне шара $\varphi(r)$ определяется формулой (25.70), где $q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$.

7. *Потенциал* поля *шарового конденсатора*. Шаровым конденсатором называют систему из двух электродов, имеющих форму концентрических сфер. Пусть a — радиус внутренней сферы, b — радиус внешней сферы. Тогда разность потенциалов между внутренней сферой и любой точкой внутри конденсатора, отстоящей на расстоянии r от центра сфер, определяется формулой

$$\varphi(a) - \varphi(r) = (\varphi(a) - \varphi(b))\frac{(r-a)\,b}{(b-a)\,r}, \quad a < r < b, \qquad (25.73)$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Измеряя разность потенциалов $\varphi(a) - \varphi(b)$ между электродами a и b, можно определить потенциал поля в любой точке внутри конденсатора.

8. *Потенциал* поля равномерно заряженной *бесконечной плоскопараллельной пластинки* толщиной $2a$ (рис. 25.11). Внутри пластинки

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon_1}(x^2 + a^2) + C, \qquad (25.74)^*$$

вне пластинки

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\rho a x}{\varepsilon_0\varepsilon} + C & \text{при } x > a, \\ \dfrac{\rho a x}{\varepsilon_0\varepsilon} + C & \text{при } x < a, \end{cases} \qquad (25.75)^*$$

где x — расстояние от средней плоскости пластинки до плоскости, где измеряется потенциал φ; C — произвольная постоянная, ρ — объемная плотность заряда внутри пластинки, ε_1 и ε — диэлектрические проницаемости веществ.

9. *Потенциал* поля *бесконечно длинного цилиндра* радиусом a, *равномерно* (с плотностью ρ) *заряженного по объему*

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0\varepsilon_1}(a^2 - r^2) + C & \text{при } r \leqslant a, \\ -\dfrac{a^2\rho}{2\varepsilon_0\varepsilon}\ln\dfrac{r}{a} + C & \text{при } r \geqslant a, \end{cases} \qquad (25.76)^*$$

где ε_1, ε — диэлектрические проницаемости вещества цилиндра и среды, C — постоянная.

10. *Потенциал* поля *бесконечно длинного цилиндра* радиусом a, *равномерно* (с плотностью σ) *заряженного по поверхности*

$$\varphi(r) = \begin{cases} C & \text{при } r \leqslant a, \\ -\dfrac{a\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}\ln\dfrac{r}{a} + C & \text{при } r \geqslant a. \end{cases} \qquad (25.77)^*$$

11. *Потенциал* поля *бесконечно длинного и бесконечно тонкого прямолинейного проводника*, равномерно заряженного с линейной плотностью $\varkappa$

$$\varphi(r) = -\frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln r + C. \qquad (25.78)^*$$

12. *Потенциал цилиндрического конденсатора* (рис. 25.14) [25.2.3]

$$\varphi(a) - \varphi(r) = (\varphi(a) - \varphi(b))\frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}, \qquad (25.79)$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{b}{a},$$

где r — расстояние от рассматриваемой точки до оси цилиндра, a и b — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, $\varkappa$ — линейная плотность заряда.

13. *Потенциал плоского конденсатора* (рис. 25.12) [25.2.3]. Внутри конденсатора для разности потенциалов имеем

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}x, \qquad (25.80)^*$$

где x — расстояние от положительно заряженной пластины с потенциалом $\varphi(0)$ до рассматриваемой точки, или

$$\varphi(x) - \varphi(0) = (\varphi(d) - \varphi(0))\frac{x}{d},$$

где d — расстояние между пластинами. Зная разность потенциалов между пластинами конденсатора $\varphi(d) - \varphi(0)$, можно найти потенциал в любой точке. Формула (25.80) не учитывает влияние краев пластин конденсатора и справедлива только в его внутренней области.

25.4.4. Уравнения Пуассона и Лапласа. Применяя теорему Гаусса в дифференциальной форме (25.46) к уравнению, описывающему потенциальное (безвихревое) электрическое поле, легко получить уравнение для потенциала φ:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\varphi) = -\rho \qquad (25.81)$$

или в явном виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\rho,$$

где ρ — объемная плотность свободных зарядов, ε — диэлектрическая проницаемость среды (диэлектрика). Если диэлектрик однороден, то ε не зависит от координат и уравнение (25.81) переходит в *уравнение Пуассона*

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad (25.82)^*$$

где по определению

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (25.83)$$

и представляет собой действие оператора Лапласа (62.18) $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ на скалярную функцию φ.

Если в среде нет свободных зарядов, то $\rho = 0$ и уравнение (25.82) переходит в *уравнение Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (25.84)$$

В теории электричества доказывается, что уравнения (25.82) и (25.84) имеют единственное решение. Зная потенциал φ как функцию координат: $\varphi = \varphi(x, y, z)$, можно решать задачи электростатики.

Задача 1. Определить σ и ρ по известному φ. Из уравнения (25.61) простым дифференцированием находят напряженность поля $\mathbf{E}$. Если известна диэлектрическая проницаемость диэлектрика, то формула (25.39) позволяет определить и вектор электрической индукции $\mathbf{D}$. Воспользовавшись теоремой Гаусса (25.46), определяют плотность свободных зарядов ρ. Поверхностную плотность свободных зарядов σ находят по изменению (скачку) нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$ при его переходе через границу двух сред 1 и 2:

$$D_{2n} - D_{1n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad (25.85)^*$$

где D_{1n} и D_{2n} — значение нормальной составляющей вектора $\mathbf{D}$ в средах 1 и 2. Выражение (25.85) есть граничное условие, которому должен удовлетворять вектор электрического смещения $\mathbf{D}$. Оно является следствием теоремы Гаусса в интегральной форме (25.43).

Задача 2. Определить $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и φ по известным ε, ρ и σ. Эта задача решается последовательным интегрированием уравнений (25.46) и (25.61) с учетом (25.85) и (25.39).

Реальные задачи электростатики представляют собой различные комбинации этих двух задач. В качестве начальных данных могут быть заданы: 1) форма и расположение всех зарядов; 2) распределение зарядов по объему или поверхности; 3) потенциалы всех проводников системы; 4) заряды на одних, а потенциалы на других и т. д. Теорема Гаусса (25.46), (25.43), условие потенциальности электростатического поля (25.56), (25.57) и уравнение Пуассона (25.82) позволяют в принципе решить любую задачу электростатики.

25.5. Электростатическая энергия

25.5.1. Потенциальная энергия. *Электростатической энергией* называют энергию, запасенную электростатическим полем. К понятию энергии поля можно прийти, как и в механике, рассматривая работу, которую нужно совершить против электрических сил при перенесении электрического заряда из одной точки поля в другую. Так как электростатическое поле есть поле консервативных сил [25.4.1], то работа A_{12} (25.63), совершаемая против этих сил при перемещении точечного заряда q из точки поля 1 с потенциалом φ_1 в точку 2 с потенциалом φ_2, равна убыли его потенциальной энергии U:

$$A_{12} = U_1 - U_2, \qquad (25.86)$$

где

$$U_1 = q\varphi_1, \quad U_2 = q\varphi_2 \qquad (25.87)$$

— потенциальная энергия заряда q в точках поля 1 и 2 соответственно, которые приобретают заряд при перенесении его из бесконечности (где потенциал поля принят равным нулю) в данную точку поля. Если в пространстве, заполненном диэлектриком, при перемещении заряда не происходит изменения его диэлектрических свойств, не выделяется и не поглощается теплота, то потенциальная энергия U заряда в данной точке поля определяется работой, которую нужно затратить для перемещения этого заряда из бесконечности в рассматриваемую точку.

Потенциальная энергия системы неподвижных зарядов, создающих электростатическое поле, равна энергии взаимодействия этих зарядов. В случае двух зарядов согласно (25.87) и (25.66) имеем

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{1}{r_{12}}, \qquad (25.88)^*$$

где r_{12} — расстояние между зарядами. Формулу (25.88) можно трактовать как потенциальную энергию заряда q_1 в поле заряда q_2 с потенциалом в точке расположения заряда q_1, равным $\varphi_2(r_{12}) = q_2/4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_{12}$, или, наоборот, как потенциальную энергию заряда q_2 в поле заряда q_1. С другой стороны, формула (25.88) описывает энергию взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r_{12} один от другого.

Потенциальная энергия системы неподвижных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$ может быть представлена в виде суммы

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i, \qquad (25.89)$$

где

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq i)}}^{n} \frac{q_j}{r_{ij}} \qquad (25.90)$$

— потенциал в точке нахождения заряда q_i, созданный всеми другими зарядами, r_{ij} — расстояние между зарядами q_i и q_j.

В случае непрерывного распределения свободных зарядов по элементу объема dV с плотностью ρ и по элементу поверхности dS с плотностью σ потенциальная энергия электрически заряженных тел определяется выражением

$$U = \frac{1}{2}\int_V \varphi\rho dV + \frac{1}{2}\int_S \varphi\sigma dS, \qquad (25.91)$$

где интегрирование проводится по всем свободным зарядам, а φ — электрический потенциал всей системы в точке, где сосредоточен элементарный заряд ρdV или σdS. Формула (25.91) справедлива при любом распределении проводников и диэлектриков в пространстве. Если каждый элемент объема dV' содержит в себе элементарный заряд $\rho dV'$, а каждый элемент поверхности dS' содержит в себе элементарный заряд $\sigma dS'$, то потенциал φ определяется формулами (25.68) или (25.69) в зависимости от вида диэлектрика, где r — радиус-вектор точки, где находится заряд ρdV или σdS из выражения (25.91).

Пример 1. Потенциальная энергия однородно заряженного шара радиусом a:

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}, \qquad (25.92)^*$$

где $Q = \frac{4}{3}\pi a^3\rho$ — полный заряд, ρ — объемная плотность распределения заряда.

Пример 2. Потенциальная энергия тонкого сферического слоя с полным зарядом Q и радиусом a:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a}, \qquad (25.93)^*$$

где $Q = 4\pi a^2\sigma$, σ — поверхностная плотность распределения заряда.

25.5.2. Собственная энергия заряда. Величину U (25.91) интерпретируют как полную электрическую энергию системы заряженных тел. Кроме потенциальной энергии взаимодействия совокупности элементарных зарядов (25.89) она содержит также *собственные энергии* этих зарядов, равные потенциальным энергиям взаимного отталкивания бесконечно малых частей одного и того же элементарного заряда $dq = \rho\, dV$ и $dq = \sigma dS$. Если элементарный заряд представляет собой сферическую поверхность с конечным радиусом a, то его собственная энергия определяется формулой (25.93). Из этого выражения следует известная *трудность классической электродинамики*: при стремлении a к нулю энергия U стремится к бесконечности, т. е. собственная энергия точечного заряда равна бесконечности. Физическая причина такого результата состоит в том, что выражение (25.91) учитывает эффект взаимодействия заряда с самим собой через собственное поле. Один из путей преодоления этой трудности состоит в предположении, что все существующие в природе элементарные заряды представляют

собой небольшие зарядовые распределения конечного радиуса. Однако эта гипотеза не подтверждается современными данными, свидетельствующими в пользу представления об электроне как точечной (бесструктурной) частице. Другая возможность преодоления трудности, связанной с собственной энергией точечного заряда, состоит в предположении, что на предельно малых расстояниях взаимодействие точечных зарядов не описывается законом Кулона [25.1]. Такая гипотеза выходит за рамки классической теории электричества и может быть исследована только в рамках квантовой теории.

Теория электричества, построенная без учета самодействия электрона, запрещает электрону излучать электромагнитные волны в пустом пространстве при его ускоренном движении. Это противоречит эффекту радиационного сопротивления, подтвержденному опытным путем: ускорение заряда требует совершения большей работы, чем ускорение нейтральной частицы с той же массой, разность этих работ равна потере энергии заряженной частицы на излучение.

Имеются и другие варианты электродинамики с конечными значениями энергии и импульса электромагнитного поля. Однако все они, как правило, приводят к ненаблюдаемым на опыте эффектам [32.3].

25.5.3. Объемная плотность энергии. Формула (25.91) определяет электростатическую энергию через заряды и потенциалы. Из опыта следует, что *электромагнитное поле может существовать самостоятельно, независимо от создавших его электрических зарядов*, а энергия заключена в том пространстве, где имеется электрическое и магнитное поля. Это указывает на то, что энергия электрического поля может быть выражена только через характеристики поля, не содержащие явной зависимости от заряда. В теории электричества доказывается, что электростатическая энергия U (25.91) в случае однородного диэлектрика может быть представлена в виде

$$U = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{2}\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\, dV, \qquad (25.94)^*$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, а $\mathbf{D}$ — электрическое смещение в центре элемента объема dV. Согласно (25.94) *энергия электрического поля подобно веществу распределена в пространстве с объемной плотностью* u_e, т. е. энергией, приходящейся на единицу объема, в котором сосредоточено поле:

$$u_e = \frac{\mathbf{ED}}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (25.95)^*$$

Если диэлектрик неоднороден, то электрическое смещение $\mathbf{D}$ изменяется от точки к точке и объемная плотность энергии u_e в этом случае определяется выражением

$$u_e = \int \mathbf{E}\, d\,\mathbf{D}. \qquad (25.96)^*$$

Полная энергия электрического поля U равна сумме всех элементарных энергий $u_e dV$ в объеме пространства, заполненного полем:

$$U = \int u_e dV. \qquad (25.97)$$

Пример. Электрическая энергия системы двух бесконечно малых заряженных шаров неизменных размеров в вакууме. Если

шары изолированы один от другого, то их собственные энергии

$$U_1 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_1^2\,dV,\ U_2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E_2^2\,dV. \qquad (25.98)$$

Если шары не изолированы, то энергия системы определяется соотношением

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2\,dV = U_1 + U_2 + U_{12}, \qquad (25.99)$$

где

$$U_{12} = \varepsilon_0 \int \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\,dV \qquad (25.100)$$

— потенциальная энергия взаимодействия шаров.

25.5.4. Различие между потенциальной энергией и потенциалом. Между потенциальной энергией неподвижной системы зарядов U и электрическим потенциалом φ имеется существенное различие. Потенциальная энергия U характеризует систему в целом. Она равна работе, необходимой для создания данной системы из отдельных заряженных частей, т. е. равна энергии, запасенной в созданной системе. Электрический потенциал φ данного распределения зарядов является функцией положения в пространстве. Разность потенциалов в двух точках пространства $\varphi_1 - \varphi_2$ согласно (25.63) равна работе, требуемой для перенесения единичного заряда из одной точки в другую. Между U и φ существует связь

$$U = -\frac{\varepsilon_0 e}{2}\int \varphi\Delta\varphi dV, \qquad (25.101)$$

где $\Delta\varphi$ определяется формулой (25.83).

Пример. Потенциальная энергия двух диполей. Напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля точечного диполя [25.2.2] определяется формулой (25.23). Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{(\mathbf{pr})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{p\cos\theta}{r^2}, \qquad (25.102)^*$$

где $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ — дипольный момент, $\mathbf{l}$ — вектор, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному, q — величина заряда, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от центра диполя до исследуемой точки поля, θ — угол между осью диполя и вектором $\mathbf{r}$ (рис. 25.6). Потенциальная энергия двух произвольно ориентированных взаимодействующих диполей определяется выражением

$$U = \frac{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3} - \frac{3(\mathbf{rp}_1)(\mathbf{rp}_2)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^5}, \qquad (25.103)^*$$

где $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — дипольные моменты диполей, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра одного диполя к центру другого. Потенциальная энергия U одного диполя в однородном электрическом поле $\mathbf{E}$ определяется по формуле (25.21).

25.5.5. Термодинамика диэлектрика. Энергия электростатического поля U (25.91), (25.96), (25.97) равна работе A, затрачиваемой на создание этого поля, только для вакуума ($\varepsilon = 1$) или же диэлектрика, в котором часть работы, расходуемой на выделение или поглощение теплоты Q диэлектриком, мала по сравнению с энергией поля U. В этом

случае электростатическая энергия трактуется как потенциальная энергия, запасенная полем.

Если сообщаемое диэлектрику количество теплоты Q, приходящееся на единицу его объема, сравнимо с плотностью энергии u_e (25.96), то физический смысл последней можно установить термодинамическим методом [20.3].

Приращение полной работы δA при создании электрического поля в диэлектрике объемом V равно сумме ее электрической (за счет источника тока) и механической (за счет внешнего давления) частей:

$$\delta A = V\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + P\,dV, \qquad (25.104)$$

где P — внешнее давление, $\mathbf{E}$ — напряженность поля в диэлектрике, $\mathbf{D}$ — электрическое смещение. Эта работа расходуется на изменение внутренней энергии диэлектрика dU и сообщение ему количества теплоты δQ:

$$\delta A = dU + \delta Q.$$

Количество теплоты, полученное единицей объема диэлектрика ($V = 1$) при постоянном объеме ($V = \text{const}$), определяется формулой

$$\delta Q = dU - EdD. \qquad (25.105)$$

Диэлектрик можно характеризовать термодинамическими потенциалами: *свободной энергией*

$$F = U - TS, \qquad (25.106)$$

где T — температура диэлектрика, S — энтропия системы; *термодинамическим потенциалом*

$$\Phi = F - ED \qquad (25.107)$$

и *энтальпией*

$$I = U + ED. \qquad (25.108)$$

Для квазистатических процессов $\delta Q = TdS$ и из соотношений (25.105)—(25.108) следуют основные уравнения термодинамики диэлектриков

$$\begin{aligned} dF &= -S\,dT + E\,dD, \\ d\Phi &= -S\,dT - D\,dE, \\ dI &= T\,dS - D\,dE. \end{aligned} \qquad (25.109)$$

Эти соотношения следует дополнить уравнением состояния диэлектрика вида

$$D = D(E, T, \tau), \qquad (25.110)$$

где τ — плотность вещества диэлектрика. Уравнения (25.109), (25.110) полностью описывают термодинамику диэлектриков. Явный вид D как функции напряженности поля E, температуры T и плотности τ может быть найден в рамках термодинамики эмпирическим путем либо рассчитан теоретически на основе молекулярной теории.

Следствия уравнений (25.109), (25.110).

1. Интегрирование уравнения для dF при $T = \text{const}$ и $\tau = \text{const}$ приводит к следующему выражению для свободной энергии диэлектрика:

$$F = \int EdD + F_0(T, \tau), \qquad (25.111)$$

где $F_0(T, \tau)$ — свободная энергия диэлектрика при отсутствии в нем электрического поля. Из формулы (25.111) следует, что объемная плотность энергии электрического поля u_e (25.96) есть часть свободной

энергии диэлектрика, зависящая от напряженности электрического поля E. Для уравнения состояния (25.110) в виде $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ имеем

$$F = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + F_0 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + F_0 = u_e + F_0. \qquad (25.112)$$

2. Внутренняя энергия диэлектрика

$$U = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{D,\tau}$$

при постоянной плотности $\tau = \text{const}$ определяется формулой

$$U = \left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + U_0(T, \tau) = \left(\varepsilon + T\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + U_0(T, \tau) =$$
$$= \left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right) u_e + U_0(T, \tau), \qquad (25.113)$$

где $U_0(T, \tau)$— внутренняя энергия диэлектрика при отсутствии в нем электрического поля, u_e — объемная плотность электрической энергии (25.95). Если диэлектрическая проницаемость ε не зависит от температуры, то внутренняя энергия диэлектрика U равна электрической части u_e свободной энергии (25.112).

Если в процессе совершения работы над диэлектриком он поляризуется, то полная свободная энергия F содержит дополнительное слагаемое, связанное с возникающими в системе механическими силами и упругими напряжениями.

Электрокалорическим эффектом называется изменение температуры диэлектрика при квазистатическом и адиабатическом изменении его поляризации. При конечном изменении напряжения внешнего поля от E_1 до E_2 температура диэлектрика изменяется на величину

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\int_{E_1}^{E_2} \varepsilon_0 \frac{TE}{C_E}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\, dE, \qquad (25.114)$$

где введено обозначение $C_E = (\delta Q/\partial T)_E$ для теплоемкости единицы объема диэлектрика при постоянной напряженности электрического поля E.

25.6. Емкость электрического поля

25.6.1. Емкость проводника. Из опыта следует, что потенциал уединенного заряженного проводника в неподвижном диэлектрике, на который не действует внешнее электрическое поле, пропорционален его заряду q:

$$\varphi = \frac{q}{C}, \quad C = \frac{q}{\varphi}, \qquad (25.115)$$

где коэффициент C называется *емкостью уединенного проводника.* Она численно равна заряду, изменяющему потенциал проводника на единицу. Электрическая емкость C не зависит от материала проводника. Она прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости среды ε, в которой находится проводник, и определяется его геометрической формой и линейными размерами.

Пример. Емкость уединенного шара радиусом a в однородном диэлектрике

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon a. \qquad (25.116)^*$$

Единицей емкости в СИ является фарад (Ф):

$$[C] = \Ф.$$

Фарад — это емкость такого уединенного проводника, потенциал которого увеличивается на 1 вольт (В) при сообщении ему заряда 1 кулон (Кл)

$$1\,\Ф = 1\,\frac{\text{Кл}}{\text{В}}. \qquad (25.117)$$

В системе СГСЭ единицей емкости является сантиметр (см):

$$1\text{ см} = 1\,\frac{\text{СГСЭ}_q}{\text{СГСЭ}_\varphi}. \qquad (25.118)$$

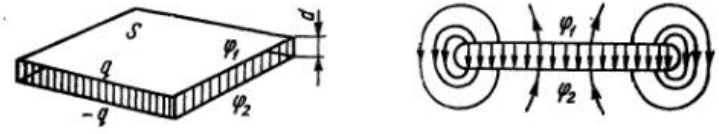


Рис. 25.21

Между этими единицами существует связь

$$1\,\Ф = \frac{1\text{ Кл}}{1\text{ В}} = \frac{3 \cdot 10^9\ \text{СГСЭ}_q}{\frac{1}{300}\ \text{СГСЭ}_\varphi} = 9 \cdot 10^{11}\text{ см}. \qquad (25.119)$$

Емкость в 1 Ф — это большая величина. Ею обладает уединенный шар в вакууме с радиусом $a = 9 \cdot 10^6$ км. На практике используют доли фарада — микрофарад (1 мкФ $= 10^{-6}$ Ф) и пикофарад (1 пФ $= 10^{-12}$ Ф). Емкость в 1 пФ имеет в вакууме шар с радиусом 0,9 см.

25.6.2. Емкость конденсатора. *Конденсатором* называют систему из двух металлических обкладок (электродов), расположенных на небольшом расстоянии одна от другой и разделенных слоем диэлектрика. Если одному из электродов сообщить заряд $+q$, а другому — заряд $-q$, то между ними установится разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}, \quad C = q/(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (25.120)$$

где C — постоянная, называемая *емкостью конденсатора.* Она зависит от размеров и формы конденсатора, а также свойств диэлектрика. Формула (25.120) предполагает,что поле внутри конденсатора однородное и не зависит от внешних электрических полей. Это справедливо только в случае, когда электродами являются бесконечные параллельные плоскости (25.32) (рис. 25.12) или бесконечно длинные коаксиальные цилиндры (25.34) (рис. 25.14). В реальных конденсаторах поле вблизи его краев неоднородно (рис. 25.21). Практическая независимость поля внутри конденсатора от краевых эффектов достигается его особой конструкцией, при которой расстояние между электродами значительно меньше других линейных размеров конденсатора.

Если емкость конденсатора, между обкладками которого находится вакуум (его называют воздушным конденсатором), равна C_0, то емкость такого же конденсатора, но с диэлектриком, определяется простым соотношением

$$C = \varepsilon C_0, \quad \varepsilon = C/C_0, \tag{25.121}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость диэлектрика. Измеряя емкости воздушного конденсатора и такого же конденсатора с диэлектриком, можно опытным путем определить ε.

В табл. 25.2 приведены диэлектрические проницаемости ε некоторых веществ

Таблица 25.2. Относительная диэлектрическая проницаемость ε некоторых веществ

Вещество	ε	Вещество	ε
Вакуум	1	Фарфор	5,7—6,3
Воздух (при нормальных условиях)	1,000594	Поваренная соль	5,9
		Слюда	6—7
Керосин	2	Воск	7,8
Парафин	2,1	Кремний	12
Эбонит	2,6	Германий	16
Сера	4	Спирт этиловый	27
Кварц	4,5	Вода	81
Стекло	5—10	Сегнетова соль	10000

Пример 1. Емкость плоского конденсатора. Разность потенциалов на обкладках конденсатора (25.80) и заряд q на положительной обкладке выражаются формулами

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad q = \sigma S, \tag{25.122}*$$

где d — расстояние между пластинами, S — площадь каждой пластины, E — напряженность поля (25.32), σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке. Емкость плоского конденсатора определяется формулой

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \tag{25.123}*$$

Эта формула не учитывает искажение поля на краю пластин.

Пример 2. Емкость шарового конденсатора. Разность потенциалов на обкладках конденсатора, состоящего из двух концентрических сфер с радиусами a и b, $a < b$, равна (25.73):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right),$$

где q — заряд, равномерно распределенный по сфере. Емкость такого конденсатора определяется формулой

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{1/a - 1/b}. \tag{25.124}*$$

Если расстояние между сферами $d = b - a$ мало по сравнению с радиусами a и b, то формула (25.124) переходит в формулу (25.123), где $S \simeq 4\pi a^2 \simeq 4\pi b^2 \simeq 4\pi ab$. Если радиус внешней сферы b значительно больше радиуса внутренней сферы a, $b \gg a$, то формула (25.124) переходит в (25.116) для емкости уединенного шара. Уединенный шар представляет собой также конденсатор, где роль внешней обкладки играют удаленные от шара предметы, имеющие одинаковый потенциал.

Пример 3. Емкость цилиндрического конденсатора. Разность потенциалов цилиндрического конденсатора, состоящего из двух коаксиальных цилиндров с радиусами a и b, $a < b$ (рис. 25.14), равна (25.79)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \ln \frac{b}{a},$$

где $\varkappa = q/l$ — линейная плотность распределения заряда q по длине конденсатора l. Емкость конденсатора определяется формулой

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln (b/a)}. \tag{25.125}*$$

Если расстояние между цилиндрами $d = b - a$ мало по сравнению с радиусами a и b, то формула (25.125) переходит в (25.123), где $S = 2\pi a$. Формула (25.125) описывает емкость коаксиального кабеля. В этом случае l — длина кабеля, ε — диэлектрическая проницаемость изолятора между его коаксиальными металлическими проводниками.

Пример 4. Емкость двухпроводной линии. Двухпроводная линия — это система из двух цилиндрических проводников. Если расстояние между проводниками d значительно больше их радиусов a и b, $d \gg a$, $d \gg b$, а длина проводников l больше расстояния d между ними, $l \gg d$, то потенциал каждого из них равен потенциалу бесконечно длинного и бесконечно тонкого прямолинейного проводника, равномерно заряженного с линейной плотностью $\varkappa = q/l$. Полный потенциал двухпроводной линии согласно (25.78) определяется формулой

$$\varphi = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \ln r_1 + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \ln r_2 + \text{const},$$

где r_1 и r_2 — расстояния от проводников до точки наблюдения. Разность потенциалов φ_1 (при $r_1 = a$, $r_2 = d$) и φ_2 (при $r_1 = d$, $r_2 = b$) имеет вид

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \ln \frac{d^2}{ab}$$

и емкость системы определяется формулой

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln (d^2/ab)}. \tag{25.126}*$$

25.6.3. Энергия конденсатора. Энергия заряженного конденсатора определяется работой, затраченной на его зарядку, т. е. на перенесение заряда с одной обкладки конденсатора на другую для создания заданной разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Эту разность принято называть *напряжением* V между обкладками конденсатора:

$$V = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{25.127}$$

Работа, требуемая для переноса элементарного заряда dq или, что эквивалентно, для создания разности напряжений dV, имеет вид

$$\delta A = V dq = \frac{q}{C} dq = CV dV, \tag{25.128}$$

где C — емкость конденсатора. Вообще говоря, зарядка конденсатора сопровождается выделением или поглощением теплоты и изменением плотности диэлектрика. Однако если емкость конденсатора C не зависит от напряжения V, то вся работа δA идет на увеличение энергии конденсатора dU, т. е. $\delta A = dU$. Интегрируя выражение (25.128) от начального значения $q = 0$ до конечного $q = Q$, или от $V = 0$ до конечного значения V, получаем следующие эквивалентные представления для энергии заряженного конденсатора U:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}, \qquad (25.129)$$

где Q — полный заряд на одной из обкладок, V — напряжение, C — емкость конденсатора.

Так как емкость плоского конденсатора с площадью пластинки S и зазором d между пластинками определяется формулой (25.123),

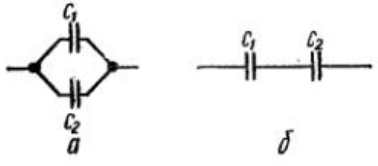


Рис. 25.22

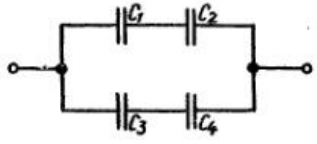


Рис. 25.23

а напряженность электрического поля $E = V/d$ (25.32), (25.80), то уравнение (25.129) эквивалентно выражению

$$U = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}(Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd, \qquad (25.130)$$

где Sd — объем, занятый полем. Формула (25.130) согласуется с общей формулой для энергии электрического поля (25.97), (25.95). Вследствие возможности накоплять в себе электрическую энергию конденсаторы нашли широкое применение в различных радиотехнических и электронных устройствах.

25.6.4. Соединение конденсаторов. Для того чтобы обеспечить требуемую емкость при заданном рабочем напряжении (25.127), конденсаторы собирают в батареи. Необходимость этого заключается в том, что при достаточно большом напряжении происходит «пробой» конденсатора, т. е. диэлектрик становится проводником электричества, и конденсатор не может больше служить накопителем электрической энергии.

Все типы соединения конденсаторов в батареи можно разбить на две группы: параллельное соединение (рис. 25.22,*а*) и последовательное соединение (рис. 25.22,*б*). При *параллельном соединении n конденсаторов* напряжение V на обкладках всех конденсаторов одно и то же, а суммарный заряд батареи q равен сумме зарядов на каждом из них: $q = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$. Поэтому емкость батареи C равна сумме емкостей составляющих ее конденсаторов $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i. \qquad (25.131)$$

При *последовательном соединении n конденсаторов* одинаковым для них является заряд q, равный полному заряду батареи, а напряженности определяются емкостями:

$$V_1 = q/C_1,\ V_2 = q/C_2,\ \ldots,\ V_n = q/C_n.$$

Напряжение батареи V равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} = \frac{q}{C}.$$

Поэтому емкость батареи C определяется соотношением

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \qquad (25.132)$$

На рис. 25.23 показан пример смешанного соединения конденсаторов. Емкость такой батареи легко подсчитать, пользуясь для каждого отдельного участка цепи формулами (25.131) и (25.132).

При расчетах электрических схем, содержащих конденсаторы, следует иметь в виду, что все реальные конденсаторы имеют утечку, так как диэлектрик любого конденсатора не является идеальным изолятором. Такой конденсатор представляется в виде эквивалентной схемы из идеального (без утечки) конденсатора C и параллельно соединенного большого сопротивления R (рис. 25.24).

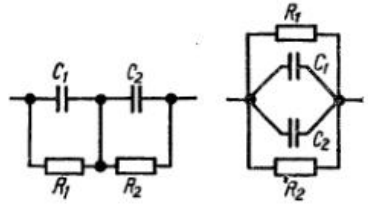


Рис. 25.24

При параллельном соединении конденсаторов утечки не играют особой роли, так как напряжение на их обкладках практически не изменяется, оставаясь равным полному напряжению на батарее (в сети). При последовательном соединении неодинаковая утечка электричества через некоторое время приведет к полному разряду одного из конденсаторов так, что другой окажется под напряжением сети, а это может вызвать его пробой. Поэтому в цепях с постоянным напряжением последовательное соединение конденсаторов не применяют.

26. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

26.1. Электрический ток

26.1.1. Сила и плотность тока. *Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. Носителями тока (зарядами, движение которых в данном веществе образует ток) в металлах и полупроводниках являются электроны, в электролитах — положительные и отрицательные ионы, в ионизованных газах — ионы и электроны.

Направлением электрического тока условились считать то направление, в котором движутся положительные заряды. В металлах ток направлен против движения электронов. Движение зарядов в веществе изображают непрерывными кривыми, называемыми *линиями тока*. За направление линий тока принято направление движения положительных зарядов. Линии тока образуют замкнутые цилиндрические поверхности — *трубки тока* (рис. 26.1). Заряженные частицы при своем движении не пересекают боковые поверхности трубок тока. При таком рассмотрении имеется полная аналогия с движением частиц жидкости, которое изучают в гидродинамике [13.1].

Тело, проводящее электрический ток, называют *проводником*. Для количественной характеристики электрического тока вводят понятие о силе и плотности тока.

Силой тока называется заряд, проходящий через полное поперечное сечение проводника за единицу времени. Если за время Δt через проводник прошел заряд Δq, то сила тока по определению

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{26.1}$$

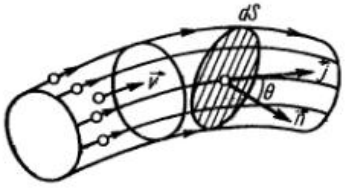


Рис. 26.1

Сила тока — скалярная величина. Если за равные конечные промежутки времени Δt через проводник проходят равные заряды Δq и направление тока при этом не изменяется со временем, то такой ток называют постоянным. Если величина и направление тока изменяются со временем, то силу тока определяют как предел, к которому стремится величина (26.1) при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \dot{q}. \tag{26.2}$$

Бесконечно малый заряд dQ, переносимый заряженными частицами за время dt через элементарную площадку dS, перпендикулярную направлению средней скорости v этих частиц, определяется формулой

$$dQ = envdSdt, \tag{26.3}$$

где e — заряд отдельной частицы, n — концентрация носителей, т. е. их число в единице объема. Сила тока dI через площадку dS определяется соотношением

$$dI = envdS, \tag{26.4}$$

согласно которому за единицу времени через единицу площади проходит электрический ток

$$j = env. \tag{26.5а}$$

Вектор j, величина которого определяется формулой (26.5а), а направление совпадает с направлением средней скорости v носителей электричества, называется *плотностью электрического тока*:

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v}. \tag{26.5б}$$

На практике за направление вектора j выбирают направление упорядоченного движения положительных зарядов. Модуль j есть заряд, переносимый в единицу времени через единицу площадки, перпендикулярной току (рис. 26.1). Необходимость характеризовать электрический ток векторной величиной связана с трехмерным характером движения носителей.

Если в проводнике имеется несколько типов зарядов, то плотность тока определяется выражением

$$\mathbf{j} = \sum_i e_i n_i \mathbf{v}_i, \tag{26.6}$$

где суммирование проводится по всем типам носителей электричества. Сила постоянного тока в проводнике с площадью поперечного сечения S имеет вид

$$I = envS = jS. \tag{26.7}$$

Вектор плотности тока j определяет электрический ток в данной точке проводника, где заряженные частицы движутся со скоростью v. Зная плотность тока j в каждой точке проводника, можно найти силу тока в этом проводнике по формуле

$$I = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}\mathbf{n}\, dS = \int_S j_n dS, \tag{26.8}$$

где интегрирование проводится по поперечному сечению проводника, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, n — вектор нормали к элементу площади dS, $j_n = \mathbf{j}\mathbf{n} = j\cos\theta$ — проекция вектора j на направление нормали n, θ — угол между j и n (рис. 26.1). Согласно (26.8) сила тока I есть поток электричества через поверхность S. Единицей силы тока в СИ является ампер (А):

$$[I] = \text{А}.$$

Сила тока в 1А соответствует переносу через поперечное сечение проводника заряда в 1 Кл за 1 с:

$$1\ \text{А} = 1\ \text{Кл/с}.$$

В системе СГСЭ силу тока выражают в единицах СГСЭ$_q$/с,

$$1\ \text{А} = 3 \cdot 10^9\ \text{СГСЭ}_q/\text{с} = 6{,}24 \cdot 10^{18}\ \frac{\text{электрон}}{\text{с}}. \tag{26.9}$$

При подсчете силы тока всегда имеется в виду перенос полного заряда с учетом знаков. Так, при движении нейтрального тела переносится огромный заряд порядка 10^5 Кл на 1 г вещества. Однако сила тока в этом случае равна нулю, так как с одинаковой средней скоростью переносится равное количество положительных и отрицательных зарядов.

26.1.2. Уравнение непрерывности. Пусть в объеме V, ограниченном замкнутой поверхностью S, содержится заряд q с объемной плотностью ρ:

$$q = \int_V \rho dV. \tag{26.10}$$

Для количества электричества, вытекающего из этого объема, справедливо соотношение

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S}, \tag{26.11}$$

где левая часть равенства описывает изменение положительного заряда за единицу времени (сила тока (26.2)), а правая — поток положитель-

ного заряда через замкнутую поверхность S (26.8). Это выражение с помощью формулы Остроградского — Гаусса (25.51) для плотности тока $\mathbf{j}$ преобразуется к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \qquad (26.12)$$

Соотношения (26.11) и (26.12) называются *уравнениями непрерывности* в интегральной и дифференциальной формах. Эти уравнения выражают фундаментальный закон природы — **закон сохранения заряда** в макроскопической электродинамике [24.1.2].

Если вектор плотности тока $\mathbf{j}$ повсюду остается постоянным с течением времени, то говорят о системе стационарных (постоянных) токов. В этом случае уравнения непрерывности имеют вид

$$\oint_S \mathbf{j}\, d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \qquad (26.13)$$

т. е. поток вектора $\mathbf{j}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю. Это означает, что для постоянных токов линии тока непрерывны

26.2. Закон Ома

26.2.1. Закон Ома для плотности постоянного тока. Для возникновения и поддержания постоянного тока на заряды должны действовать внешние силы. Заряды могут быть приведены в движение механическим их перемещением (как в электростатическом генераторе Ван де Граафа (1931), рис. 26.2), так и с помощью внешнего электрического поля.

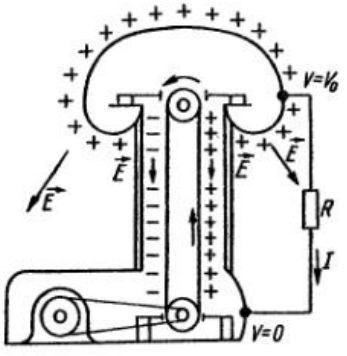


Рис. 26.2

Если на электрический заряд e со стороны внешнего силового поля действует регулярная сила $\mathbf{F}$, то из уравнения движения для носителя тока

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - m\frac{\mathbf{v}}{\tau}, \qquad (26.14)$$

где m — масса носителя, $\mathbf{v}$ — его средняя скорость движения вдоль проводника, следует уравнение для плотности тока $\mathbf{j}$ (26.5):

$$\mathbf{j} + \tau\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \lambda\frac{\mathbf{F}}{e}, \quad \lambda \equiv \frac{ne^2\tau}{m}. \qquad (26.15)$$

Второе слагаемое правой части уравнения (26.14) описывает среднюю силу, действующую на носитель тока при его столкновении с ионами кристаллической решетки проводника. Так как при $\mathbf{v} = 0$ эта сила отсутствует, то в первом приближении ее можно считать зависящей от скорости $\mathbf{v}$. Величину τ называют *инерционным временем*. Она характеризует уменьшение средней скорости $\mathbf{v}$ с течением времени за счет столкновения с ионами решетки. По порядку величины τ равно половине времени свободного пробега носителя тока между двумя последовательными столкновениями с ионами решетки.

Решение уравнения (26.15) при $\mathbf{F} = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$ имеет вид

$$\mathbf{j} = \lambda\frac{\mathbf{F}}{e} + \mathbf{j}_0 e^{-t/\tau}, \qquad (26.16)$$

где $\mathbf{j}_0$ — плотность тока в начальный момент времени $t = 0$. Если за время $t = \tau$ электрический ток изменяется мало, то при $t \gg \tau$

$$\mathbf{j} = \lambda\frac{\mathbf{F}}{e}. \qquad (26.17)$$

Величина λ называется *удельной проводимостью* или *электропроводностью*, а величина ρ, обратная λ,

$$\rho = \frac{1}{\lambda} \qquad (26.18)$$

называется *удельным сопротивлением* материала. Эти величины являются постоянными, характерными для данного вещества. Они зависят от температуры проводника и других его физических характеристик. Связь λ с концентрацией носителей n, массой m и зарядом e дается формулой (26.15). Измеряя опытным путем λ, можно определить инерционное время τ. Для электрона в меди $\lambda = 5{,}3 \cdot 10^{17}\,\text{с}^{-1}$ и $\tau \simeq 2{,}5 \times \times 10^{-14}$ с.

Величину $b = e\tau/m$ называют подвижностью. Если носитель тока под действием постоянного электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}$ приобрел скорость $\mathbf{v}$, то по определению

$$\mathbf{v} = b\mathbf{E}. \qquad (26.19)$$

Для электрона $b = 44\ \text{см}^2/\text{с} \cdot \text{В}$. Электропроводность λ связана с подвижностью простой формулой

$$\lambda = b\,|e|\,n, \qquad (26.20)$$

где n — концентрация носителей тока данного сорта.

Уравнение (26.15) не зависит от природы силы $\mathbf{F}$. Если ток возбуждается электрическим полем с напряженностью $\mathbf{E}$, то $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E} \qquad (26.21)$$

— плотность электрического тока $\mathbf{j}$ пропорциональна напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Соотношение (26.21) называется **законом Ома** в *дифференциальной форме*. Оно содержит величины $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, характеризующие электрическое состояние среды в одной и той же точке.

Из уравнения непрерывности (26.13), закона Ома (25.21) и теоремы Гаусса (25.46) следует, что в случае стационарных токов в однородных проводниках макроскопические заряды могут находиться только на поверхности: $\rho = 0$ при $\lambda = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$, где ρ — объемная плотность распределения заряда. При стационарных токах плотность электрических зарядов в каждой точке пространства не изменяется со временем: на место ушедших зарядов непрерывно поступают новые. Как показывает опыт, электрическое поле стационарных токов является потенциальным. В этом отношении оно аналогично электростатическому полю. Однако электростатическое поле есть кулоновское поле неподвижных зарядов. Внутри проводника при равновесии зарядов оно равно нулю. Электрическое поле стационарных токов (также кулоновское по своей природе) есть поле движущихся зарядов. Внутри проводника такое поле не равно нулю. Наличие тока в проводнике означает, что вдоль проводника потенциал электрического поля изме-

няется. Напряженность поля **E** у поверхности проводника с током, а следовательно, и линии напряженности уже не перпендикулярны поверхности проводника, поскольку существует тангенциальная составляющая поля E_t, направленная в сторону движения тока (рис. 26.3). Для поддержания постоянного тока на носитель тока с зарядом e необходимо действовать с постоянной силой, равной eE_t. Физическая причина этого состоит в том, что носители тока в проводнике движутся с трением, т. е. обладают электрическим сопротивлением.

26.2.2. Сторонние силы. Поскольку под действием кулоновских электрических сил происходит уравнивание положительных и отрицательных электрических зарядов, то с течением времени электрическое поле в проводнике исчезает и согласно закону Ома (26.21) исчезает и электрический ток. Для поддержания плотности тока j постоянной необходимо на носители тока действовать дополнительной силой неэлектрической природы. Такие силы называют *сторонними*. Сторонние силы также можно характеризовать напряженностью поля $\mathbf{E}_{стор}$, равной силе, приходящейся на единицу заряда, которая поддерживает плотность тока j неизменной с течением времени. В этом случае регу-

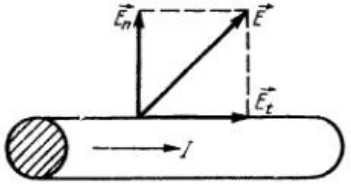


Рис. 26.3

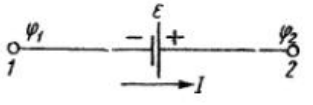


Рис. 26.4

лярная сила **F** в (26.15) и плотность тока j (26.17) имеют вид

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{стор}), \quad \mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{стор}), \tag{26.22}$$

где **E** — напряженность поля электрических сил. $\mathbf{E}_{стор}$ — напряженность поля сторонних сил.

Напряженность $\mathbf{E}_{стор}$ создается подключением к проводнику источника тока. Таким источником могут быть гальванические элементы, аккумуляторы, электрические генераторы постоянного тока. В гальванических элементах электрические токи поддерживаются за счет химических реакций между электродами, к которым подсоединяется проводник тока, и электролитом, заполняющим пространство между электродами. За счет сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока в направлении, противоположном действию сил электрического поля. Если проводник подключен к электродам источника, то на его концах поддерживается постоянная разность потенциалов и в проводнике возникает постоянный электрический ток. При этом работа против сил электрического сопротивления совершается за счет энергии, запасенной в источнике тока.

26.2.3. Законы Ома для силы тока. ЭДС источника тока. Из закона Ома в дифференциальной форме с учетом сторонних сил (26.22) и формулы (26.7) для силы постоянного тока I следует соотношение

$$IR = V + \mathcal{E}, \quad IR = U, \quad U = V + \mathcal{E}, \tag{26.23}$$

называемое **законом Ома** *для участка цепи* 1—2 (рис. 26.4). Величина V в (26.23) есть разность потенциалов φ_1 и φ_2 между точками *1* и *2*,

называемая *напряжением* на концах *1* и *2* проводника:

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} E\,dl, \tag{26.24}$$

где E — напряженность поля стационарного тока, dl — элемент длины участка *1—2*. Формула (26.24) отражает тот факт, что электрическое поле E, стационарных токов потенциально. Величина

$$\mathcal{E} = \int_{(1)}^{(2)} E_{стор}\,dl, \tag{26.25}$$

где $E_{стор}$ — напряженность поля сторонних сил, dl — элемент длины участка 1—2, называется *электродвижущей силой* (ЭДС) источника тока, действующей на участке цепи *1—2*. ЭДС $\mathcal{E}$ характеризует свойства источника тока. Она численно равна работе, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки *1* проводника в точку *2*.

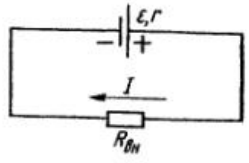


Рис. 26.5

Величина R в (26.23) называется *электрическим сопротивлением*. Оно равно сумме сопротивлений проводника $R_{вн}$ и внутреннего сопротивления источника тока r:

$$R = R_{вн} + r. \tag{26.26}$$

Величину U в (26.23) называют *падением напряжения* на участке цепи *1—2*. Оно равно работе, совершаемой кулоновскими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда из точки *1* в точку *2* (рис. 26.4).

Если участок цепи *1—2* не содержит ЭДС, то **закон Ома** (26.23) принимает простой вид (Ом, 1826)

$$IR = V. \tag{26.27}$$

Сопротивление

$$R = \int_{(1)}^{(2)} \rho \frac{dl}{S}, \tag{26.28}$$

где ρ — удельное сопротивление (26.18), S — площадь поперечного сечения проводника, dl — элемент его длины. Если проводник изготовлен из однородного вещества, то

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{26.29}$$

где l — длина участка проводника 1—2.

Если электрическая цепь замкнута (рис. 26 5), то $V = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$, и **закон Ома** *для замкнутого участка цепи* имеет вид

$$\mathcal{E} = IR, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R_{вн} + r}, \tag{26.30}$$

где R — полное сопротивление всей цепи (26.26), I — сила тока в цепи, $\mathscr{E}$ — ЭДС источника тока. Падение напряжения $U_{вн}$ на внешней цепи с сопротивлением $R_{вн}$, т. е. на клеммах источника тока, определяется формулой

$$U_{вн} = IR_{вн} = \frac{\mathscr{E}R_{вн}}{R_{вн}+r} = \mathscr{E} - Ir, \qquad (26.31)$$

где Ir — падение напряжения внутри источника тока. Из (26.31) следует, что

$$\frac{U_{вн}}{R_{вн}} = \frac{\mathscr{E}}{R_{вн}+r}, \quad \mathscr{E} = \frac{R_{вн}+r}{R_{вн}}U_{вн} \qquad (26.32)$$

— ЭДС $\mathscr{E}$ есть разность потенциалов $U_{вн}$ между полюсами разомкнутого ($R_{вн} \to \infty$) источника тока.

Падение напряжения на концах участка цепи *1* и *2* (рис. 26.4) равно разности потенциалов (напряжению V) в точках *1* и *2* только в том случае, если на этом участке не приложена ЭДС: $U = V$ при $\mathscr{E} = 0$.

Единицами сопротивления R, напряжения V и ЭДС $\mathscr{E}$ в СИ являются:

$$[R] = \text{Ом}, \quad [V] = \text{В}, \quad [\mathscr{E}] = \text{В}.$$

По определению 1 В равен разности потенциалов, при прохождении которой над зарядом в 1 Кл совершается работа в 1 Дж. Сопротивление в 1 Ом есть сопротивление такого проводника, по которому течет ток силой в 1 А при разности потенциалов в 1 В.

Единицами удельного сопротивления ρ и удельной проводимости λ являются:

$$[\rho] = \text{Ом} \cdot \text{м}, \quad [\lambda] = \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \text{ (в СИ)},$$
$$[\rho] = \text{с}, \quad [\lambda] = \text{с}^{-1} \text{ (в СГСЭ)}.$$

Единицы сопротивления, напряжения и ЭДС в системе СГСЭ не имеют названий и обозначаются соответственно СГСЭ_R, СГСЭ_V, $\text{СГСЭ}_{\mathscr{E}}$:

$$1\ \text{Ом} = \frac{1\ \text{В}}{1\ \text{А}} = \frac{1/300}{3\cdot 10^9} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11}\ \text{СГСЭ}_R; \quad 1\ \text{В} = \frac{1}{300}\ \text{СГСЭ}_{V,\mathscr{E}} \qquad (26.33)$$

(см. [25.4.2], формула (25.64)).

26.2.4. Зависимость сопротивления от температуры. Сверхпроводимость. Удельное сопротивление проводника ρ зависит не только от вещества, из которого он изготовлен, но и от его температуры. Если диапазон изменения температуры достаточно мал, то зависимость ρ от t описывается формулой

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \qquad (26.34)$$

где ρ_0 — удельное сопротивление при $t = 0$ °С. Величина

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT} \qquad (26.35)$$

называется *температурным коэффициентом сопротивления* данного вещества. Он определяет относительное приращение сопротивления при увеличении температуры на один кельвин. Так как удельное сопротивление ρ, вообще говоря, изменяется с температурой T не по линейному закону, то α является также функцией T. Однако для всех металлов при изменении T в небольшом интервале коэффициент α практически постоянен и $\alpha > 0$. Для электролитов $\alpha < 0$. Для всех чистых металлов коэффициент $\alpha \approx 1/273$.

Зависимость сопротивления металлов от температуры находит широкое применение в различных радиотехнических устройствах (например, в термометрах сопротивления).

При очень низких температурах у некоторых веществ наблюдается *явление сверхпроводимости* (Камерлинг-Оннес, 1911): при температурах ниже некоторой критической T_k, называемой *температурой перехода в сверхпроводящее состояние*, удельное сопротивление проводника электрического тока становится ничтожно малым. Значения T_k для некоторых чистых металлов и сплавов приведены в табл. 26.1.

Таблица 26.1. **Температура T_k перехода некоторых веществ в сверхпроводящее состояние**

Вещество	T_k, К	Вещество	T_k, К	Вещество	T_k, К
W	0,01	Sn	3,7	Bi_2 Pt	0,155
Hf	0,35	Hg	4,1	Ba—Bi—Pb—O	13
Ti	0,4	Ta	4,5	Nb_3 Sn	18
Cd	0,5	La	4,71	Nb_3Ge	23,2
Zn	0,88	V	5,3	$La_{2-x}Sr_xCuO_4$	40
Al	1,2	Pb	7,2	$Y_1Ba_2Cu_3O_{7-x}$	100
In	3,37	Nb	9,22	Ca—Bi—Sr—O	120

Явление сверхпроводимости наблюдается у сплавов висмута с золотом, карбидов молибдена и вольфрама. В лантановых и иттриевых (с включением меди, бария и стронция) образцах наблюдается так называемая *высокотемпературная сверхпроводимость* с $T_k \simeq 40 - 105$ К. Физическая природа этого явления пока остается неизвестной.

Согласно современным представлениям сверхпроводимость при низких температурах — это макроскопический квантовый эффект. Теория этого явления, предложенная Бардином, Купером, Шриффером и Н. Н. Боголюбовым (1957), подобна теории сверхтекучести гелия II, созданной Л. Д. Ландау (1941). Теория сверхпроводимости исходит из того, что между электронами металла существует кулоновское отталкивание, ослабленное влиянием (экранировкой) положительных ионов кристаллической решетки. Взаимодействие электронов с колебаниями решетки приводит к тому, что между электронами возникает слабое притяжение, которое при условиях, определяемых состоянием вещества проводника, может превысить кулоновское отталкивание. В этом случае электроны группируются в пары, называемые куперовскими парами. Эти пары обладают нулевым спином и ведут себя подобно бозечастицам, для которых возможно явление сверхтекучести. Куперовские пары являются носителями тока в сверхпроводниках.

Явление сверхпроводимости используется в настоящее время для получения очень сильных магнитных полей в электромагнитах, обмотка которых сделана из сверхпроводника, в элементах памяти ЭВМ и других устройствах.

26.3. Электрическая цепь

Под *электрической цепью* понимают систему из сопротивлений, конденсаторов и источников ЭДС, соединенных проводниками. В электрической цепи электроны движутся вне источника от отрицательного полюса к положительному, а внутри источника — в обратном направлении. Во всех точках неразветвленной электрической цепи сила тока остается постоянной. В разветвленной цепи сумма токов по отдельным ветвям равна полному току.

26.3.1. Соединение сопротивлений. При *последовательном соединении сопротивлений* (рис. 26.6) сопротивление всей цепи R равно сумме отдельных сопротивлений R_1, R_2, ...:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \qquad (26.36)$$

Ток I, проходящий по этой цепи, равен токам I_1, I_2, I_3, ..., проходящим через каждое отдельное сопротивление R_1, R_2, R_3, ...:

$$I = I_1 = I_2 = I_3 = \ldots \qquad (26.37)$$

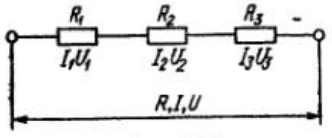


Рис. 26.6

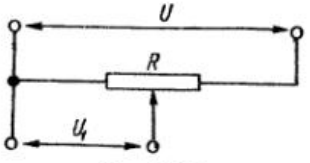


Рис. 26.7

Падение напряжения U во всей цепи при последовательном соединении сопротивлений равно сумме падений напряжений U_1, U_2, U_3, ... на каждом отдельном сопротивлении R_1, R_2, R_3, ...:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots \qquad (26.38)$$

а падения напряжений на отдельных сопротивлениях пропорциональны величинам этих сопротивлений:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{U_1}{U_3} = \frac{R_1}{R_3}, \quad \frac{U_2}{U_3} = \frac{R_2}{R_3}, \ \ldots \qquad (26.39)$$

Из (26.39) следует, что если на сопротивлении R падает напряжение U, то с части R_1 этого сопротивления можно снять часть U_1 полного напряжения (рис. 26.7):

$$U_1 = U\frac{R_1}{R}.$$

Устройство, показанное на рис. 26.7, называют *делителем напряжений*. При *параллельном соединении сопротивлений* (рис. 26.8) величина, обратная полному сопротивлению R, равна сумме величин, обратных сопротивлениям ветвей R_1, R_2, R_3, ...:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \qquad (26.40)$$

Сила тока I в такой цепи равна сумме токов на каждом отдельном участке I_1, I_2, I_3, ...:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots, \qquad (26.41)$$

а падение напряжения U во всей цепи равно падениям напряжений на каждом отдельном сопротивлении:

$$U = U_1 = U_2 = U_3 = \ldots \qquad (26.42)$$

Токи I_1, I_2, I_3, ..., проходящие через сопротивления R_1, R_2, R_3, ... (рис. 26.8), обратно пропорциональны этим сопротивлениям:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}, \quad \frac{I_1}{I_3} = \frac{R_3}{R_1}, \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2}, \ \ldots \qquad (26.43)$$

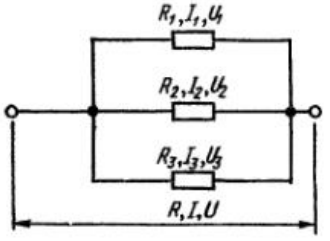


Рис. 26.8

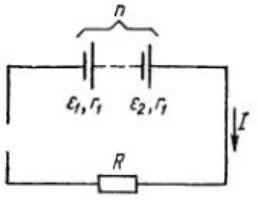


Рис. 26.9

26.3.2. Соединение источников тока. При *последовательном соединении n одинаковых источников* ЭДС $\mathscr{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 (рис. 26.9) ЭДС батареи $\mathscr{E}$ и ее внутреннее сопротивление r в n раз больше, чем у одного источника:

$$\mathscr{E} = n\mathscr{E}_1, \ r = nr_1. \qquad (26.44)$$

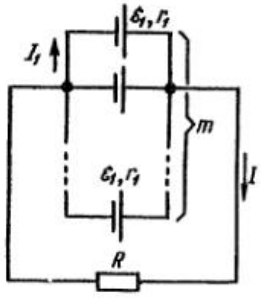


Рис. 26.10

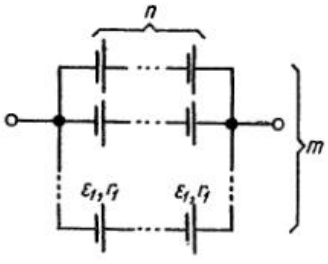


Рис. 26.11

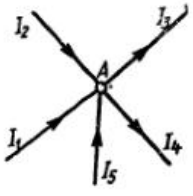


Рис. 26.12

При *параллельном соединении m одинаковых источников* (рис. 26.10) ЭДС $\mathscr{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 ЭДС батареи $\mathscr{E}$ равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление батареи в m раз меньше, чем у одного источника:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1, \ r = r_1/m. \qquad (26.45)$$

При смешанном соединении одинаковых источников тока в батарею, состоящую из m параллельных звеньев, в каждом из которых n источников соединены последовательно (рис. 26.11), ЭДС батареи $\mathscr{E}$ и ее внутреннее сопротивление r определяются формулами

$$\mathscr{E} = n\mathscr{E}_1, \ r = r_1 n/m, \qquad (26.46)$$

где $\mathscr{E}_i$ и r_i — ЭДС и внутреннее сопротивление отдельного источника.

Различные соединения источников тока позволяют получать в данной цепи источник с требуемыми ЭДС и внутренним сопротивлением.

26.3.3. Правила Кирхгофа. Для расчета сложных цепей, содержащих много разветвлений, пользуются правилами Кирхгофа (1847).

Первое правило Кирхгофа: *алгебраическая сумма токов* I_1, I_2, ..., I_n, *сходящихся в узле* A, *равна нулю* (рис. 26.12):

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i = 0. \qquad (26.47)$$

Токи, подходящие к узлу A, считаются положительными (I_1, I_2, I_5), а выходящие из узла — отрицательными (I_3, I_4).

Второе правило Кирхгофа: *в неразветвленной цепи или в каждом произвольно выбранном замкнутом контуре разветвленной цепи алгебраическая сумма* ЭДС *всех источников равна алгебраической сумме всех падений напряжения в этом контуре*:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathscr{E}_k, \qquad (26.48)$$

где I_i — сила тока, проходящего через сопротивление R_i, $\mathscr{E}_k$ — ЭДС k-го источника тока. Суммирование в (26.48) производится по всем i сопротивлениям контура и по всем k источникам тока.

Токи I_i считаются положительными, если их направления совпадают с направлением обхода выбранного замкнутого контура и отрицательными — в противном случае. ЭДС $\mathscr{E}_k$ считаются положительными, если они создают токи, направленные в сторону обхода контура.

Правила Кирхгофа (26.47) и (26.48) приводят к системе алгебраических уравнений первого порядка. Ее решение позволяет определить любую неизвестную величину (силу тока, сопротивление или ЭДС источника на любом участке цепи).

Первое правило Кирхгофа есть условие стационарности тока, а второе вытекает из условия равенства нулю электрического напряжения по замкнутому контуру.

26.3.4. Измерение тока, напряжения, сопротивления и ЭДС источника. В электроизмерительных приборах используются различные действия электрического тока. Изменение длины проводника при нагревании за счет протекающего по нему тока используется в тепловых приборах. В электромагнитных приборах используется вращение постоянного магнита, закрепленного на оси, под действием поля электромагнита, через катушку которого пропускается ток. В основе работы магнитоэлектрических приборов лежит явление вращения вокруг своей оси катушки с током, помещенной в поле постоянного магнита. Угол поворота катушки пропорционален силе тока, прошедшего через нее.

Прибор, служащий для измерения силы тока, называется *амперметром*. Амперметр включается в цепь последовательно (рис. 26.13). Его внутреннее сопротивление R_A должно быть мало, так как должно быть мало падение напряжения на приборе. Для измерения силы тока I, превышающего максимально допустимый ток I_A, на который рассчитан амперметр, параллельно ему подключают добавочное сопротивление $R_ш$, называемое *шунтом*. Сопротивление $R_ш$ определяется по формуле

$$R_ш = \frac{I_A R_A}{I - I_A}. \qquad (26.49)$$

Прибор, служащий для измерения напряжения, называется *вольтметром*. Вольтметр подключают параллельно измеряемому напряжению (рис. 26.14). Его внутреннее сопротивление должно быть по возможности велико, чтобы ток, проходящий через прибор, не приводил к уменьшению измеряемого напряжения. Для измерения напряжения, превышающего максимально допустимое для данного прибора, последовательно с вольтметром включают дополнительное сопротивление

$$R_{доп} = \frac{U}{I_B} - R_B = \left(\frac{U}{U_B} - 1\right) R_B, \qquad (26.50)$$

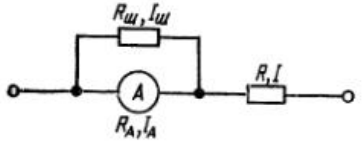


Рис. 26.13

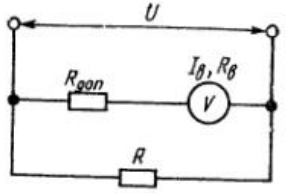


Рис. 26.14

где I_B — сила тока, протекающего через вольтметр, U — измеряемое напряжение, R_B — внутреннее сопротивление вольтметра, $U_B = I_B R_B$ — максимально допустимое напряжение для данного вольтметра.

Сопротивление измеряют с помощью моста Уитстона (рис. 26.15). Изменением положения подвижного контакта D на сопротивлении R, называемого *реостатом*, добиваются равенства нулю силы тока, текущего через гальванометр. Тогда по известным сопротивлениям R_1, R_2 и R_3 находят R_x по формуле

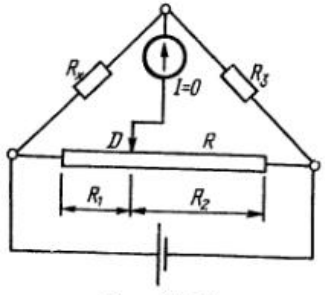


Рис. 26.15

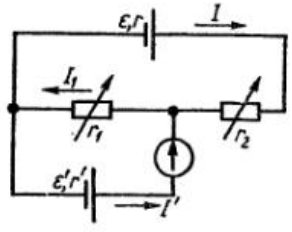


Рис. 26.16

$$R_x = R_3 \frac{R_1}{R_2}, \quad R_1 + R_2 = R. \qquad (26.51)$$

Если сопротивление R изготовлено из однородного материала, то

$$R_x = R_3 \frac{l_1}{l_2}, \quad l_1 + l_2 = l,$$

где l_1 и l_2 — длины сопротивлений R_1 и R_2, l — длина сопротивления R.

Величину ЭДС источника тока можно измерить *компенсационным методом*. Схема этого метода показана на рис. 26.16. Два источника

тока с ЭДС $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ и внутренними сопротивлениями r и r' связаны между собой так, что всегда выполняется условие $r_1 + r_2 = R = \text{const}$. Выбирая направления токов I, I_1 и I', как на рис. 26.16, и используя правила Кирхгофа (26.47) и (26.48), приходим к системе уравнений

$$I_1 - I - I' = 0,$$
$$Ir + I(R - r_1) + I_1 r_1 = \mathscr{E}, \quad I'r' + I_1 r_1 = \mathscr{E}', \qquad (26.52)$$

решение которой позволяет определить любые три величины по известным остальным. Например, зная $\mathscr{E}$, r, R, r', r_1, I', можно определить $\mathscr{E}'$, I и I_1. При компенсационном методе сопротивления r_1 и r_2 подбирают так, чтобы в цепи гальванометра ток был равен нулю: $I' = 0$. В этом случае ЭДС неизвестного источника определяется формулой

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}\frac{r_1}{R + r}. \qquad (26.53)$$

Если на место источника ЭДС $\mathscr{E}'$ поставить другой источник ЭДС $\mathscr{E}''$, то на основе формулы (26.53) можно сравнивать значения $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$:

$$\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}''} = \frac{r_1}{r_1''}, \qquad (26.54)$$

где r_1'' — новое значение сопротивления r_1, при котором ток, проходящий через гальванометр, также равен нулю.

26.4. Работа и мощность электрического тока

26.4.1. Работа и мощность. Кулоновские и сторонние силы [26.2.2] при перемещении заряда q вдоль электрической цепи совершают *работу* A. Из определения работы (25.63) и обозначения (25.127) для напряжения V между точками цепи 1 и 2 следует формула для работы A электрического тока:

$$A = qV,$$

где q — переносимый на этом участке заряд. При постоянном токе силой I переносимый за время t заряд $q = It$, и работа электрического тока A определяется выражением

$$A = IVt = \frac{V^2 t}{R} = I^2 Rt, \qquad (26.55)$$

где V — падение напряжения на концах участка цепи, имеющего сопротивление R, через которое проходит ток I. Это выражение справедливо для постоянного тока в любом случае и для любого участка цепи.

Под *мощностью* электрического тока понимают работу A, которую совершает ток за единицу времени [5.1.2]:

$$P = \frac{A}{t} = IV = \frac{V^2}{R} = I^2 R, \qquad (26.56)$$

где обозначения такие, как в (26.55).

Единицей работы в СИ является джоуль (Дж), а единицей мощности — ватт (Вт):

$$[A] = \text{Дж}, \quad [P] = \text{Вт}.$$

Между этими единицами и единицами тока, напряжения и сопротивления [26.1.1; 26.1.3] существует простая связь

$$1\ \text{Дж} = 1\ \text{Вт} \cdot \text{с} = 1\ \text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с} = 1\ \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}}\,\text{с} = 1\ \text{А}^2 \cdot \text{Ом} \cdot \text{с},$$
$$1\ \text{Вт} = 1\ \text{А} \cdot \text{В} = 1\ \frac{\text{В}^2}{\text{Ом}} = 1\ \text{А}^2 \cdot \text{Ом} = 1\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}. \qquad (26.57)$$

Формула (26.56) используется в СИ для определения единицы напряжения — вольта: вольт есть электрическое напряжение вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 А при мощности 1 Вт.

26.4.2. Закон Джоуля — Ленца. При прохождении тока по сопротивлению происходит рассеяние энергии. Источник электрического тока при перемещении заряда со скоростью $\mathbf{v}$ совершает работу и отдает мощность

$$P = n\mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{j}\frac{\mathbf{F}}{e}, \qquad (26.58)$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на носитель тока с зарядом e, n — концентрация носителей, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока (26.6). В металле эта мощность идет на увеличение его внутренней энергии, так как прохождение электрического тока через металлы не сопровождается изменением их внутренней структуры. Расходуемая источником тока энергия проявляется в конечном счете в виде теплоты. Действительно, при своем движении носители тока испытывают действие силы трения, на преодоление которой расходуется энергия источника тока. Сила трения вызывается столкновениями носителей тока между собой и с любыми другими частицами среды. В металлах носителями тока являются электроны проводимости, а в качестве частиц среды выступают ионы кристаллической решетки. При столкновениях электронов между собой и с узлами решетки все время происходит переход энергии упорядоченного движения электронов в энергию хаотического движения ионов и электронов. Энергия, приобретаемая электроном под действием силы $\mathbf{F}$, не сразу рассеивается, а сначала накапливается до некоторой средней величины, при которой средняя потеря энергии электроном при столкновении с ионом будет равна энергии, полученной им между столкновениями. В результате работа источника тока передается электронам и кристаллической решетке в виде кинетической энергии хаотического движения или согласно молекулярно-кинетической теории вещества [15] в виде теплоты.

Количество теплоты, выделяющееся в проводнике при протекании постоянного тока, определяется **законом Джоуля — Ленца**: *количество теплоты Q в единице объема, выделяющееся за единицу времени* (мощность теплоты), *прямо пропорционально квадрату плотности электрического тока* $\mathbf{j}$ (26.6) *и обратно пропорционально электропроводности среды* λ (26.15):

$$Q = \frac{1}{\lambda}\mathbf{j}^2 = \frac{1}{e}\mathbf{j}\mathbf{F} = \frac{\lambda}{e^2}\mathbf{F}^2 \qquad (26.59)$$

(закон Джоуля — Ленца *в дифференциальной форме*); или количество теплоты Q, выделяющееся за единицу времени в данном участке проводника, пропорционально квадрату силы тока I и сопротивлению этого участка:

$$Q = \int \frac{j^2}{\lambda}\,dV = \int \frac{j^2}{\lambda} S dl = I^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = I^2 R \qquad (26.60)$$

(закон Джоуля — Ленца *в интегральной форме*). Полное количество теплоты $Q_{пол}$, выделяющееся в проводнике за время t согласно закону Джоуля — Ленца (26.60) описывается формулой (Джоуль, 1841; Ленц, 1842)

$$Q_{пол} = I^2Rt = \frac{V^2}{R}\,t = IVt \qquad (26.61)$$

и равно работе A (26.55), произведенной электрическим током. В форме (26.59) закон Джоуля — Ленца является наиболее общим и не зависит от природы силы $\mathbf{F}$, вызывающей электрический ток. В частном случае электрических сил с напряженностью поля $\mathbf{E}$ сила $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ и

$$Q = \mathbf{E} = \lambda E^2. \qquad (26.62)$$

Из формулы (26.60) следует, что только сторонние силы [26.2.2] являются источниками джоулевой теплоты. Так, для замкнутой цепи из (26.60), закона Ома (26.30) и определения ЭДС (26.25) имеем

$$Q = I\mathscr{E} = I\oint E_{стор}\,dl. \qquad (26.63)$$

Поле электрических сил $\mathbf{E}$ в (26.22), (26.59) перераспределяет джоулеву теплоту по различным участкам цепи. Нагревание проводников током находит широкое применение в технике. Наиболее известным примером могут служить осветительные лампы накаливания.

26.4.3. Закон сохранения энергии для электрического поля. В электрических явлениях выполняется **закон сохранения энергии**: *энергия источника тока W равна механической работе A сил электрического поля, совершаемой над проводником, увеличению энергии электрического поля ΔU и количества джоулевой теплоты Q*:

$$W = A + \Delta U + Q, \qquad (26.64)$$

или в дифференциальной форме

$$dW = \delta A + dU + \delta Q, \qquad (26.65)$$

где

$$dW = \mathscr{E}I\,dt,\quad \delta Q = I^2R\,dt,$$

$$\delta A = -(dF)_{q,T},\quad dU = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}(E^2 - E_0^2)\,dV. \qquad (26.66)$$

Здесь $\mathscr{E}$ — ЭДС источника тока (26.25), I — сила тока, R — сопротивление цепи, E_0 и E — напряженности электростатического поля до и после подключения в цепь источника тока, ε — диэлектрическая проницаемость однородного проводника тока, dV — элемент объема, где сосредоточены поля E_0 и E, dt — время перемещения заряда $dq = I\,dt$ за счет энергии, запасенной источником ЭДС, F — свободная энергия вещества проводника (25.106), приращение которой берется при неизменном заряде $q = \text{const}$ и температуре $T = \text{const}$.

Механическая работа δA совершается за счет сил, действующих на тела, находящиеся в электрическом поле. Эти силы отличны от сил неэлектростатического происхождения, действующих на заряды внутри этих тел, и называются *пондеромоторными силами*. Такие силы возникают всегда, когда телу сообщается некоторое количество зарядов. Величину пондеромоторных сил $\mathbf{f}$ можно вычислить по известной работе

$$\delta A = \mathbf{f}\,d\mathbf{s},$$

где $d\mathbf{s}$ — элементарное перемещение тела под действием силы $\mathbf{f}$.

Связь работы δA с приращением свободной энергии тела dF устанавливает термодинамика, которая, таким образом, дает общий метод вычисления пондеромоторных сил. Пондеромоторные силы f, действующие на незаряженной границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, описываются следующими формулами:

для абсолютно несжимаемых диэлектриков

$$f = u_2 - u_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{D_2^2}{\varepsilon_2} - \frac{D_1^2}{\varepsilon_1}\right), \qquad (26.67)$$

где u_1 и u_2 — плотности энергии электрического поля (25.95) в диэлектриках 1 и 2, D_1 и D_2 — соответствующие электрические смещения;

для сжимаемых диэлектриков

$$f = \mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2 + \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\left(\varepsilon_2 + \tau_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2}\right) - \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\left(\varepsilon_1 + \tau_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1}\right), \qquad (26.68)$$

где $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ — гидростатическое давление в средах 1 и 2, имеющих плотности τ_1 и τ_2 соответственно, E — электрическое поле, параллельное границе раздела диэлектриков. Слагаемое $(\mathscr{P}_1 - \mathscr{P}_2)$ учитывает упругие силы, возникающие в сжимаемой среде, а два других слагаемых — изменения ее диэлектрической проницаемости при изменении плотности. Формулы (26.67) и (26.68) справедливы для стационарных электрических полей и полей, медленно меняющихся со временем. Дополнительные силы $f_{ст}$, возникающие в средах, диэлектрическая проницаемость которых ε зависит от плотности диэлектрика τ, называются *электрострикционными силами*: $f_{ст} = \tau\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\left(\dfrac{\varepsilon_0E^2}{2}\right)$. Изменение гидростатического давления и плотности под действием электрострикционных сил называется *электрострикцией*. Для несжимаемого диэлектрика в равновесии

$$\mathscr{P} - \tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T\frac{\varepsilon_0E^2}{2} = \text{const}, \qquad (26.69)$$

где $\mathscr{P}$ — гидростатическое давление.

Следствия закона сохранения энергии (26.65):

1) если все проводники и диэлектрики неподвижны, то

$$\delta A = dU = 0 \text{ и } dW = \delta Q \qquad (26.70)$$

— вся работа источника тока превращается в джоулеву теплоту;

2) если заряды проводников не изменяются, то

$$dW = \delta Q = 0 \text{ и } \delta A = -dU \qquad (26.71)$$

— механическая работа сил электрического поля равна убыли энергии электрического поля.

26.5. Квазистационарные токи

Законы постоянного тока можно применять также для расчета электрических схем с силой тока, изменяющейся во времени, если это изменение происходит достаточно медленно. Последнее означает, что мгновенное значение силы тока одно и то же во всех поперечных сечениях проводников схемы, а мгновенное электрическое поле равно

электростатическому полю с таким же зарядом. Если за время установления электрического равновесия в цепи относительные изменения токов, ЭДС и электрических полей малы, то такие токи и поля называют *квазистационарными*. Все технические переменные токи являются квазистационарными. Применение законов постоянного тока для мгновенных значений электрических величин приводит к соотношениям между ними в виде дифференциальных уравнений, решение которых дает зависимость искомых величин от времени.

26.5.1. Разряд конденсатора. При разряде конденсатора мгновенные значения силы тока I, заряда положительной обкладки q и разности потенциалов между обкладками V подчиняются следующим законам:

$$I = -\frac{dq}{dt},\quad IR = V,\quad q = CV, \tag{26.72}$$

где R — сопротивление провода, соединяющего обкладки конденсатора, по которому течет ток при разрядке, C — емкость конденсатора, или

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0. \tag{26.73}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = q_0\, e^{-t/\tau},\quad \tau = RC, \tag{26.74}$$

где q_0— заряд конденсатора в момент времени $t = 0$, величина τ называется *временем релаксации*. Ее размерность: $[\tau] = с$. Закон изменения тока во времени описывается формулой

$$I = I_0\, e^{-t/\tau},\quad I_0 = q_0/\tau, \tag{26.75}$$

где I_0— начальное значение тока.

26.5.2. Зарядка конденсатора. При зарядке конденсатора от источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$ для мгновенных значений электрических величин имеем соотношения

$$I = \frac{dq}{dt},\quad IR = \mathscr{E} - V,\quad q = CV, \tag{26.76}$$

где обозначения такие, как в (26.72), или

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathscr{E}}{R}. \tag{26.77}$$

Решение уравнения (26.77) имеет вид

$$q = \mathscr{E}C\,(1 - e^{-t/\tau}),\quad \tau = RC. \tag{26.78}$$

Для тока находим

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\, e^{-t/\tau}. \tag{26.79}$$

Ток максимален при $t = 0$, $I_0 = \mathscr{E}/R$, а заряд q — при $t \to \infty$, $q_\infty = \mathscr{E}C$. С течением времени ток убывает, а заряд возрастает по экспоненциальному закону.

27. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

27.1. Прохождение электрического тока через жидкости

27.1.1. Электролиты. Ряд жидкостей, таких, как водные растворы неорганических кислот, солей и оснований, являются проводниками электрического тока. Носителями тока в таких жидкостях, как показывает опыт, являются ионы — атомы (молекулы), обладающие избытком или недостатком электронов по сравнению с соответствующими нейтральными атомами (молекулами). Ион с избытком электронов имеет отрицательный заряд и называется *катионом*, а с недостатком электронов имеет положительный заряд и называется *анионом*.

Упорядоченное движение ионов в жидкости (электрический ток) возникает под действием электрического поля, которое создается электродами (проводниками), опущенными в жидкость и соединенными с разноименными полюсами источника тока.

Положительный электрод принято называть *анодом*, а отрицательный — *катодом*.

При прохождении электрического тока через водные растворы веществ последние разлагаются на составные части, которые выделяются на электродах в виде продуктов первичных реакций. Если эти продукты вступают в химические реакции с растворителем или электродами, то говорят о вторичных реакциях. Явление разложения вещества на его составные части под действием электрического тока называется *электролизом*, а вещества, в которых электролиз происходит, называют *электролитами*. Кроме водных растворов кислот, солей и оснований электролитами являются соединения металлов с металлоидами в расплавленном состоянии, ионные кристаллы и ряд других веществ.

Опыт показывает, что для электролитов выполняется закон Джоуля —Ленца [26.4.2]. Химическое разложение электролита на ионы приложенным к нему электрическим полем не производится, так как вся энергия тока выделяется в виде джоулевой теплоты. Ионы образуются в электролите в результате расщепления (диссоциации) молекул на ионы противоположного знака. Диссоциация обусловлена действием растворителя, который ослабляет силы притяжения между отдельными частями молекулы вещества так, что энергии теплового движения ее атомов оказывается достаточной для диссоциации этой молекулы. Вообще говоря, в электролите существует статистическое равновесие, при котором число диссоциированных молекул в среднем равно числу вновь созданных (рекомбинированных) нейтральных молекул. Электрическое поле разделяет существующие катионы и анионы и собирает их у анода и катода.

Пример 1. Раствор серной кислоты H_2SO_4 в воде H_2O. При диссоциации молекулы серной кислоты имеем

$$H_2SO_4 \rightleftarrows 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Положительный ион водорода H^+ нейтрализуется электронами катода, у которого выделяется водород H_2. Отрицательные ионы SO_4^{2-} отдают два электрона аноду, превращаются в радикалы SO_4, затем вступают в реакцию с водой

$$2SO_4 + 2H_2O = 2H_2SO_4 + O_2,$$

и на аноде выделяется кислород O_2. Количество серной кислоты в растворе не изменяется в результате электролиза.

Пример 2. Водный раствор медного купороса $CuSO_4$. Если анод сделан из меди, а катод из угля, то при диссоциации

$$CuSO_4 \rightleftarrows Cu^{2+} + SO_4^{2-}$$

на катоде выделится чистая медь, а на аноде — медный купорос:

$$Cu + SO_4 = CuSO_4,$$

количество которого в результате электролиза не изменится. Такой процесс применяется для очистки меди.

Диссоциацию характеризуют коэффициентом (степенью) диссоциации α, который равен отношению числа диссоциировавших на ионы молекул n к общему числу n_0 молекул растворенного вещества:

$$\alpha = n/n_0. \tag{27.1}$$

В условиях статистического равновесия при малых концентрациях n ионов в растворе выполняется **закон разведения Оствальда** (1888)

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{\text{const}}{n}. \tag{27.2}$$

27.1.2. Законы электролиза. Первый закон Фарадея (1833—1834): *масса m вещества, выделяющаяся на каком-либо из электродов, прямо пропорциональна электрическому заряду q, прошедшему через электролит*:

$$m = Kq = KIt, \tag{27.3}$$

где I — сила тока, протекающего через раствор за время t. Коэффициент K называется *электрохимическим эквивалентом вещества*. Он численно равен массе данного вещества, выделяемой при электролизе единичным зарядом. Коэффициент K различный для разных веществ.

Единицей электрохимического эквивалента вещества K в СИ является:

$$[K] = \text{кг/Кл}.$$

Второй закон Фарадея (1833, 1834): *электрохимический эквивалент вещества K прямо пропорционален его химическому эквиваленту, равному отношению молярной массы вещества M (14.5) к валентности Z его химического элемента или соединения*:

$$K = \frac{1}{F}\frac{M}{Z} = \frac{1}{F}\frac{N_A m_0}{Z}, \tag{27.4}$$

где N_A — число Авогадро (14.4), m_0 — масса иона. Величину F называют *постоянной (числом) Фарадея*. Объединяя оба закона (27.3) и (27.4), получаем

$$m = \frac{M}{Z}\frac{q}{F} = \frac{M}{ZF}It. \tag{27.5}$$

При $q = F$ масса m выделившегося вещества равна его химическому эквиваленту: $m = M/Z$, т. е. если через электролит проходит заряд q, равный числу Фарадея F, то на каждом из электродов выделяется $1/Z$ молей вещества. Из опыта следует, что

$$F = 9{,}64845 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}. \tag{27.6}$$

Представление об ионной проводимости электролитов позволяет качественно объяснить явление электролиза и законы Фарадея. Число Фарадея F и число Авогадро N_A (14.4) связаны между собой простым соотношением

$$F = N_A e, \tag{27.7}$$

где e — заряд электрона. Это равенство является следствием кратности зарядов ионов между собой. Заряд отдельного иона равен eZ, где Z — целое число, равное валентности данного химического соединения или элемента.

Физический смысл числа Фарадея заключается в том, что оно представляет собой электрический заряд, переносимый при электролизе количеством вещества, масса которого в граммах равна молекулярной массе μ (14.7), деленной на валентность Z. Формула (27.7) позволила Стонею (1874) и независимо от него Гельмгольцу (1881) впервые вычислить значение элементарного заряда, равного, как показало дальнейшее развитие физики, заряду электрона: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл [64.1].

Законы Фарадея (27.3) и (27.4) позволяют определять заряды ионов

$$q = \pm ZF/N_A, \tag{27.8}$$

где Z — валентность иона, F — число Фарадея, N_A — число Авогадро. В формуле (27.8) учтен в явном виде тот факт, что ионы могут быть как катионами, так и анионами.

27.1.3. Закон Ома для тока в жидкости. Плотность тока $\mathbf{j}$ в электролите определяется выражением

$$\mathbf{j} = \alpha n_0 (e^+\mathbf{v}^+ + e^-\mathbf{v}^-), \tag{27.9}$$

где α — степень диссоциации (27.1), n_0 — концентрация нейтральных молекул растворенного вещества, $\mathbf{v}^+$ и $\mathbf{v}^-$ — скорости анионов и катионов, e^+ и e^- — их заряды соответственно. Зависимость плотности тока в жидкости $\mathbf{j}$ от напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля, приложенного к электродам, имеет вид

$$\mathbf{j} = \frac{F}{N_A} Zn (b^+ + b^-)\mathbf{E}, \tag{27.10}$$

где F — число Фарадея, N_A — число Авогадро, Z — валентность иона, n — концентрация ионов в растворе, которая одинакова для катионов и анионов, b^- и b^+ — подвижности этих ионов, связанные со скоростями $\mathbf{v}^-$ и $\mathbf{v}^+$ соотношениями (26.19): $\mathbf{v}^+ = b^+\mathbf{E}$, $\mathbf{v}^- = -b^-\mathbf{E}$, которые справедливы, если длина свободного пробега ионов газа значительно меньше расстояния между электродами. Согласно (27.10) и закону Ома (26.21) электропроводность электролита определяется выражением

$$\lambda = \frac{F}{N_A} Zn (b^+ + b^-). \tag{27.11}$$

Для определения подвижностей ионов b^+ и b^- нужно знать распределение концентрации растворенного вещества внутри электролита. Эти данные могут быть получены опытным путем. Опыты показали, что для электролитов справедлив **закон Кальрауша**: *подвижность иона в электролите не зависит от присутствия других ионов в растворе.*

С увеличением концентрации подвижность ионов уменьшается. Отношение подвижностей

$$\frac{b^+}{b^-} = \frac{\Delta N^+}{\Delta N^-}, \qquad (27.12)$$

где ΔN^+ и ΔN^- — увеличение числа анионов и катионов в областях электролита, прилегающих к электродам, за одно и то же время.

27.2. Прохождение электрического тока через газы

27.2.1. Ионизация и рекомбинация. Газы в нормальных условиях являются диэлектриками. Они состоят из электрически нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных носителей тока. Проводниками тока газы становятся при их ионизации. *Ионизацией* газа называют процесс отделения электронов от его атомов и молекул. Ионизация газа возникает под действием высоких температур и различных излучений как результат столкновений быстрых частиц или атомов с атомами и молекулами газа. Образовавшиеся в результате ионизации электроны остаются свободными или, частично соединяясь с нейтральными атомами и молекулами, образуют с ними отрицательные ионы. Ионы и свободные электроны делают газ проводником электричества.

Источником свободных электронов в газе могут служить находящиеся в нем тела, которые имеют высокую температуру или же облучаются коротковолновым электромагнитным излучением. В первом случае электроны покидают тело в результате термоэлектронной эмиссии [27.4.2], а во втором — в результате фотоэлектрического эффекта [57.1].

Положительные ионы газа, соединяясь с электронами или отрицательными ионами, образуют нейтральные молекулы и атомы. Этот процесс называется *рекомбинацией*. При рекомбинации положительного иона и электрона или двух ионов разных знаков освобождается энергия, равная энергии, затраченной на ионизацию. Проводимость газа при этом уменьшается.

Уравнение баланса ионов в газе, в котором отсутствует ток, имеет вид

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2, \qquad (27.13)$$

где n — концентрация пар ионов разных знаков (в момент времени t), α — коэффициент рекомбинации ионов разных знаков, q — число пар ионов разных знаков, создаваемых источником ионизации в единицу времени в единице объема. Слагаемое αn^2 описывает убыль числа пар ионов в результате рекомбинации. Решение дифференциального уравнения с граничным условием $n = 0$ при $t = 0$ может быть записано следующим образом:

$$n = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}\,\mathrm{th}\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{q\alpha}}, \quad q - \alpha n^2 > 0. \qquad (27.14)$$

В стационарном состоянии $dn/dt = 0$ и $n = \sqrt{q/\alpha}$. Если источник ионизации отсутствует, то $q = 0$ и решение уравнения (27.13) дается формулой

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n_0} = \alpha t, \qquad (27.15)$$

где n_0 — начальная (при $t = 0$) концентрация пар положительных и отрицательных ионов в газе. Концентрация n уменьшается в 2 раза через время $t = 1/n_0\alpha$.

Плотность тока в ионизованном газе

$$j = j_+ + j_-, \qquad (27.16)$$
$$j_+ = n^+e^+b^+E - e^+D^+\frac{\partial n^+}{\partial x}, \quad j_- = -n^-e^-b^-E - e^-D^-\frac{\partial n^-}{\partial x},$$

где j_+ и j_- — плотности тока положительных и отрицательных ионов, n^+ и n^- — концентрации ионов разных знаков, b^+ и b^- — их подвижности, e^+ и e^- — заряды ионов, E — напряженность электрического поля, под действием которого в газе возникает упорядоченное движение ионов, D^+ и D^- — коэффициенты диффузии (15.12) ионов. Если через газ, имеющий одинаковые концентрации ионов разных знаков: $n = n^+ = n^-$, проходит электрический ток с плотностью j (27.16), то уравнение баланса пар ионов имеет вид

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2 - \frac{j}{el}. \qquad (27.17)$$

Здесь l — длина камеры, в которой находится газ, а другие обозначения такие, как в (27.13). Для стационарных токов концентрация пар ионов разных знаков q, образовавшихся в газе под действием ионизатора, определяется формулой

$$q = \alpha n^2 + \frac{j}{el}. \qquad (27.18)$$

Если плотность тока мала, то $n = \sqrt{q/\alpha}$ и из (27.16) следует, что в слабых электрических полях плотность тока j пропорциональна электрическому полю E, т. е. выполняется закон Ома. В случае сильных электрических полей ток не зависит от приложенного напряжения E. Это соответствует малым концентрациям n, при которых слагаемым αn^2 в (27.18) можно пренебречь, и, следовательно, $j = qel$. Если площадь электрода равна S, то в этом случае через газ течет ток с силой $I_s = qelS$, называемый *током насыщения*.

В общем случае зависимость тока в газе от напряженности приложенного к нему электрического поля является сложной нелинейной и закон Ома не выполняется. Это связано с тем, что в ионизованном газе число носителей тока — ионов и электронов — может изменяться в результате дополнительной ионизации газа электрон-атомными и электрон-молекулярными столкновениями. Кроме того, концентрации n^+ и n^- могут быть неодинаковыми, что приводит к появлению объемных зарядов в газах при наличии тока. Эти заряды обусловливают сложное распределение электрического поля между электродами.

27.2.2. Самостоятельный и несамостоятельный газовые разряды. *Газовым разрядом* называют процесс прохождения электрического тока через газ. Разряды, вызванные действием внешнего ионизатора, называются *несамостоятельными* газовыми разрядами. Плотность электрического тока при таких разрядах описывается формулой (27.16), а уравнение баланса ионов разного знака имеет вид (27.17). Вольт-амперная характеристика (зависимость силы тока I от напряжения V, приложенного к электродам) показана на рис. 27.1. В области напряжений от нуля до V_1 справедлив закон Ома, в области от V_1 до V_2 ток I изменяется с напряжением нелинейно. При напряжении V_2 ток достигает насыщения и не изменяется в области напряжений от V_2 до V_3. При $V > V_3$

ток I снова начинает возрастать за счет появления в газе новых носителей тока. Сила тока в газовом разряде увеличивается в сотни и тысячи раз, а в самом газе появляются сильные световые и тепловые эффекты. Ионы, необходимые для поддержания высокой электропроводности, создаются самим разрядом в результате внутренних процессов, происходящих в газе. Если в этих условиях прекратить действие ионизатора, то газовый разряд будет поддерживаться самостоятельно. Газовый разряд, который продолжается после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным* газовым разрядом.

Напряжение $V_з$, при котором возникает самостоятельный разряд, называется *напряжением пробоя* газа.

Закон Пашена: *разность потенциалов $V_з$ между электродами трубки, наполненной газом, при которой начинается пробой газа, есть функция произведения давления газа P на расстояние d между электродами*:

$$V_з = V_з(Pd). \qquad (27.19)$$

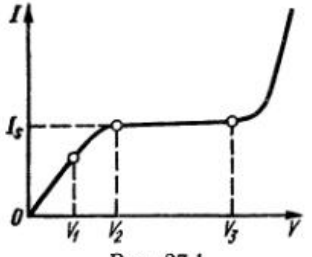


Рис. 27.1

При давлениях порядка сотен атмосфер закон Пашена не выполняется.

В зависимости от процессов образования ионов в разряде различают несколько типов самостоятельных разрядов: тлеющий, искровой, коронный, дуговой.

27.2.3. Тлеющий разряд. Самостоятельный разряд, в котором электроны испускаются катодом под воздействием положительных ионов газа, называют *тлеющим* разрядом. Такой разряд характеризуется большой напряженностью электрического поля и большой разностью потенциалов вблизи катода, связанной с большой концентрацией положительных ионов. Если давление в трубке мало, то испускаемые катодом электроны движутся от катода до стенок трубки, в которой заключен газ, практически свободно. Такие пучки электронов называются *катодными лучами*. Катодные лучи используются в ионных рентгеновских трубках для получения рентгеновских лучей. Если в катоде имеется малое отверстие, то положительные ионы, пройдя через это отверстие, будут распространяться прямолинейно в виде потока положительно заряженных частиц, называемого *каналовыми лучами*. Каналовые лучи в трубке видны как слабо светящиеся пучки. Катодные и каналовые лучи, попадая на стенки стеклянной трубки, вызывают свечение стекла. В каналовых лучах происходят процессы перезарядки. Поэтому эти лучи состоят из положительных и отрицательных ионов, а также нейтральных молекул и атомов.

На рис. 27.2 показаны основные области тлеющего разряда: 1 — астоново темное пространство, где энергия покинувших катод электронов недостаточна для возбуждения атомов и молекул газа; 2 — катодный слой, где атомы и молекулы возбуждаются электронами, но их ионизация не происходит; 3 — темное катодное пространство, где начинается ионизация атомов и молекул, нарастает лавина электронов и образуются положительные ионы, обеспечивающие необходимую эмиссию электронов с катода; 4 — тлеющее свечение, возникающее из-за рекомбинации электронов с положительными ионами и вследствие квантовых эффектов — переходов возбужденных атомов на нижележащие энергетические уровни, характеризующие возможные состояния атома; 5 — фарадеево темное пространство, куда не долетают

быстрые электроны из электронных лавин; 6 — положительное свечение, простирающееся до самой поверхности анода и разделяющееся иногда на светлые и темные полосы — страты. Область 6 характеризуется высокой проводимостью газа. Здесь свечение вызвано в основном рекомбинацией электронов с положительными ионами. Области 1—5 называют катодными частями разряда. Здесь происходят все процессы, поддерживающие тлеющий разряд. Наибольшее значение потенциал имеет в области 3. В областях 5 и 6 он остается практически постоянным, незначительно возрастая лишь вблизи анода.

Тлеющий разряд используется как источник света в различных газоразрядных трубках для рекламных и декоративных целей. Подходящим подбором люминофоров — веществ, светящихся под действием поглощенного излучения и которые наносятся на внутреннюю поверхность трубки, можно получить источник света, близкий к дневному.

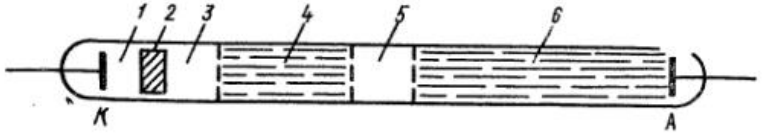


Рис. 27.2

27.2.4. Искровой разряд. Самостоятельный разряд, соединяющий электроды и имеющий вид тонкого изогнутого канала с множеством разветвлений, называется *искровым* разрядом. Такой разряд сопровождается выделением большого количества теплоты и ярким свечением газа. Он возникает между двумя электродами, находящимися в атмосфере при постепенном увеличении напряжения между ними до значения, при котором происходит пробой воздуха и появляется электрическая искра. Для воздуха при нормальных условиях значение напряженности поля, необходимое для пробоя, равно $E_k \simeq 3 \cdot 10^6$ В/м. Это значение понижается при наличии в воздухе (газе) внешнего ионизатора. Качественное объяснение механизма искрового разряда дает *стримерная теория*. Согласно этой теории электронная лавина, зародившаяся вблизи катода, ионизирует и возбуждает атомы и молекулы газа, которые испускают световые кванты, распространяющиеся к аноду со скоростью света. Эти кванты на своем пути ионизируют газ и порождают таким образом новую лавину электронов. Во всем объеме газа появляются *стримеры* — слабо светящиеся скопления ионизованного газа. Соединяясь, стримеры образуют пути, по которым движутся электронные лавины, нагоняя одна другую и, сливаясь вместе, образуют в конечном счете накал искрового разряда.

Наряду с отрицательными стримерами, распространяющимися от катода к аноду, существуют положительные стримеры, движущиеся в обратном направлении.

Примером искрового разряда является *молния*. Сила тока в молниях огромна — от 10 до 10^3 кА. Напряжение между электродами (облаком и Землей) перед возникновением молнии достигает 10^8—10^9 В. Длительность одного разряда порядка микросекунды. Поэтому заряд, переносимый молнией, невелик и равен 0,1—10 Кл.

Очень сильные молнии могут рождать через несколько секунд после разряда так называемые *шаровые молнии* — светящиеся шары диаметром от 10 до 20 см. Эти шары либо прикрепляются к неподвижным предметам, либо медленно движутся в атмосфере. Время их жизни

порядка минут. Они исчезают с сильным взрывом. Количественной теории этого явления в настоящее время не существует.

27.2.5. **Коронный разряд.** Разряды, которые наблюдаются при давлениях, близких к атмосферному, в сильно неоднородном электрическом поле, называют *коронными* разрядами. Для получения сильно неоднородного поля электроды должны иметь очень неодинаковые (один очень большую, а другой очень малую) поверхности. В качестве таких электродов можно взять тонкую проволоку и металлический цилиндр, радиус которого значительно больше радиуса проволоки (рис. 27.3). Коронный разряд наблюдается около тонкой проволочки или острия и без второго электрода. Его роль в этом случае играют заземленные окружающие единственный электрод тела. Между проволокой и цилиндром при атмосферном давлении и комнатной температуре возникает разряд, когда напряженность поля возле проволоки достигнет значения $3 \cdot 10^6$ В/м. Разряд имеет вид оболочки или короны, окружающей проволоку. Если корона возникает вокруг отрицательного электрода, то она называется отрицательной, а вокруг положительного электрода — положительной. Толщина светящегося слоя короны увеличивается по мере увеличения напряжения между электродами.

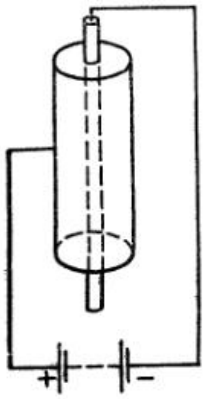


Рис. 27.3

В случае отрицательной короны у поверхности катода образуются электронные лавины, которые ускоряясь в сильно неоднородном электрическом поле, движутся к аноду, порождая положительные ионы. Попадая на катод, эти ионы выбивают из него новые электроны, из которых образуются новые электронные лавины. Так как напряженность поля уменьшается при удалении от катода, то на некотором расстоянии лавины обрываются. Это расстояние определяет размеры (толщину) короны. При коронном разряде происходит неполный пробой газового промежутка между электродами. В темной области этого промежутка электроны могут прилипать к нейтральным молекулам газа. Образующийся в таком случае пространственный отрицательный заряд вблизи анода ограничивает разрядный ток между электродами. В газах, у которых отрицательные ионы не образуются, носителями тока вблизи анода являются электроны.

В случае положительной короны электронные лавины зарождаются на внешней поверхности светящейся части разряда и движутся по направлению к аноду, обладающему большей кривизной. Электрическое поле у катода слабое. Поэтому электронные лавины не могут формироваться вблизи катода из выбитых электронов. Электронные лавины рождаются за счет так называемой объемной ионизации газа фотонами, излучаемыми поверхностью короны. Положительные ионы движутся через темную область разряда к катоду, образуя пространственный заряд, ограничивающий ток через газ.

Внутри короны всегда имеются ионы обоих знаков. При отрицательной короне отрицательные ионы движутся к аноду и выходят за пределы короны, а положительные движутся к катоду.

При увеличении напряжения между электродами темная область коронного разряда уменьшается и в конце концов возникает искровой разряд [27.2.4] с полным пробоем газового промежутка.

Коронные разряды встречаются в природе. Они возникают на верхушках деревьев, корабельных мачт (огни святого Эльма) под влиянием атмосферного электричества. Коронные разряды являются источником радиопомех. Возможность их возникновения необходимо учитывать в технике высокого напряжения. Коронный разряд используется в электрофильтрах, используемых для очистки промышленных газов от примесей твердых и жидких частиц.

27.2.6. **Дуговой разряд.** *Дуговым разрядом* называют разряд, который характеризуется большой силой тока (десятки и сотни ампер) и малой напряженностью поля (несколько десятков вольт) на разрядном промежутке между электродами. Наибольшую температуру при дуговом разряде имеет углубление (кратер дуги), образующееся на положительном электроде. Если углероды угольные, то при атмосферном давлении $P = 101{,}3$ кПа температура кратера дуги $T = 4000$ К, а при $P = 2026$ кПа $T = 7000$ К, т. е. больше температуры на внешней поверхности Солнца, равной приблизительно 6000 К. При металлических электродах $T \simeq 2000$—2500 К.

По имеющимся данным дуговой разряд поддерживается за счет термоэлектронной эмиссии с поверхности катода [27.4.2]. Вылетевшие из катода электроны ускоряются электрическим полем и ионизируют молекулы газа при столкновениях с ними. При этом сильно увеличивается проводимость газа и между электродами возникает столб ярко светящегося газа. В такой дуге с увеличением силы тока I напряжение на разрядном промежутке $V = IR$ убывает, так как сильно уменьшается сопротивление дуги R за счет увеличения термоэлектронной эмиссии и ионизации газа.

Наблюдаются дуговые разряды другого (нетермоэлектронного) типа. Например, в ртутной лампе электрическая дуга возникает в ртутном паре и, как показывает опыт, источником эмиссии электронов является яркое светящееся пятно малых размеров, возникающее на катоде. Плотность тока в этом пятне достигает $\sim 10^{10}$—10^{11} А/м^2.

Температура электродов, в качестве которых выступают столбики жидкой ртути, здесь невелика (порядка сотен градусов). Такие дуги называют *электрическими дугами с холодным катодом* или *автоэлектронными дугами*. Второе название связано с тем, что пятно на катоде возникает из-за сильного увеличения концентрации положительных ионов на нем, что приводит к очень сильному локальному увеличению электрического поля, которое в свою очередь приводит к мощной эмиссии электронов из поверхности катода.

Дуговые разряды нашли широкое применение в технике. Они используются как мощные источники света (в проекционных киноаппаратах, прожекторах). Расходуемая такими источниками света удельная мощность меньше, чем у ламп накаливания.

27.3. Плазма

27.3.1. **Четвертое состояние вещества.** Сильно ионизированный газ, в котором концентрация электронов приблизительно равна концентрации положительных ионов, называют *электронно-ионной плазмой* или просто *плазмой*. Плазма — особое агрегатное состояние вещества, характеризующееся высокой степенью ионизации его частиц. Под степенью ионизации α понимают отношение концентрации заряженных частиц n_a к общей концентрации нейтральных частиц n_0: $\alpha = n_a/n_0$. Плазма — это ионизованный квазинейтральный газ. Для того чтобы газ был квазинейтральным, он должен занимать достаточно большой объем, при котором тепловые флуктуации не могут нарушить его квазинейтральность. Размеры этого объема даются дебаевской длиной

или *дебаевским радиусом*

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{ne^2}}, \qquad (27.20)^*$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура, n — концентрация частиц одного знака, e — их заряд. На расстоянии D кулоновское поле любого заряда плазмы экранируется зарядом противоположного знака, который переносят окружающие данный заряд частицы. Чтобы плазма была квазинейтральной, ее линейные размеры L должны быть намного больше дебаевского радиуса D (27.20), $L \gg D$. Если плазма квазинейтральна, то ее можно рассматривать как связанный коллектив заряженных частиц. Главной его особенностью является новый тип взаимодействия частиц этого коллектива через электрические и магнитные поля. Вследствие дальнодействия сил, соответствующих этим полям, коллектив заряженных частиц образует единое целое вместе с создаваемым им электромагнитным полем, которое взаимодействует с этими же частицами и потому называется *самосогласованным*. Квазинейтральность плазмы не является присущей ей изначальной характеристикой, а только отражает свойство взаимодействия ее частиц через самосогласованное поле. Единство частиц и электромагнитных полей обусловливает многообразие и сложность протекающих в плазме явлений. Из-за дальнодействия кулоновских сил в плазме происходят различные коллективные процессы — шумы и колебания, делающие плазму неустойчивой. Решение комплекса задач, связанных с неустойчивостью плазмы, имеет большое практическое значение для осуществления управляемого термоядерного синтеза [73.3.6].

При изучении свойств плазмы пользуются различными теоретическими моделями. Так, большое различие масс электронов и ионов плазмы позволяет характеризовать плазму двумя температурами, одна из которых относится к электронному газу, а другая — к ионному. Если плазма предоставлена сама себе, то сначала установится максвелловское распределение [16.4.2] электронов по скоростям, а затем ионов. Возникает квазиравновесное состояние, в котором электроны имеют температуру T_e, а ионы — температуру T_i. Если $T_i \neq T_e$, то плазму называют *неизотермической*. Через определенное время в результате обмена энергиями между электронами и ионами (через взаимные столкновения) устанавливается максвелловское распределение для всей плазмы, характеризуемой одной температурой для электронов и ионов. Такую плазму называют *изотермической*.

В плазме, находящейся в электрическом поле, течет ток и выделяется джоулева теплота [26.4.2]. Энергию поля получают в основном более легкие электроны. Ионы получают энергию главным образом только за счет кулоновского взаимодействия с высокоэнергетичными электронами. При низких давлениях число соударений ионов с электронами мало. Это приводит к тому, что средняя кинетическая энергия электронов оказывается больше средней кинетической энергии ионов, а значит, и температура электронного газа T_e выше температуры ионного газа T_i, т. е. $T_e > T_i$. При увеличении давления увеличивается число соударений и разность температур между этими газами уменьшается. При достаточно высоком давлении плазма становится изотермической.

Примеры. Основная масса вещества во Вселенной практически полностью ионизирована вследствие высокой температуры и действия различных излучений. Вещество горячих звезд, Солнца и ряда межзвездных облаков представляет собой полностью ионизированную плазму.

Примером слабо ионизованной плазмы может служить вещество ионосферы (верхних слоев Земли). Плазма создается в газовых разрядах [27.2], в электропроводящих твердых телах (металлах и полупроводниках). На рис. 27.4 показана зависимость концентрации n электронов от температуры T в области значений n и T, наблюдаемых в природе.

27.3.2. Удельная проводимость плазмы. *Удельная проводимость* полностью ионизованной *плазмы* определяется формулой (26.15):

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{m}, \qquad (27.21)$$

где n — концентрация электронов, e — заряд электрона, m — его масса, τ — инерционное время:

$$\tau \simeq l/\bar{v}, \qquad (27.22)$$

где l — средняя длина свободного пробега электрона:

$$l = \frac{Z}{\sigma n}, \qquad (27.23)$$

$\bar{v}$ — средняя скорость электрона, $m\bar{v}^2 = 3kT$, k — постоянная Больцмана. Величина Z — положительное целое число, определяющее заряд положительного иона, равный Ze, и концентрацию этих ионов n/Z, σ — эффективное поперечное сечение столкновения электрона с ионом:

$$\sigma = \pi L \left(\frac{Ze^2}{m\bar{v}^2}\right)^2 \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}. \qquad (27.24)^*$$

Величина L называется *кулоновским логарифмом*. Он учитывает дальнодействующий характер электрон-ионного взаимодействия и слабо зависит от температуры и плотности плазмы. Обычно для оценок принимают, что $L = 15$. Это соответствует полностью ионизованному дейтерию (плазма состоит из электронов, протонов и нейтронов) при $kT \simeq 10$ кэВ и $n \simeq 10^{12} - 10^{15}$ см$^{-3}$. Удельная проводимость плазмы согласно (27.21) — (27.24) определяется формулой

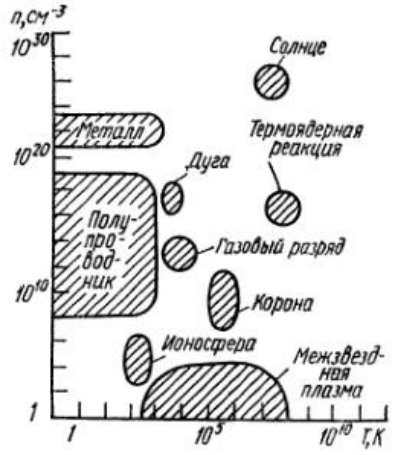


Рис. 27.4

$$\lambda = \frac{(3kT)^{3/2}}{\pi Ze^2 L\sqrt{m}}(4\pi\varepsilon_0)^2. \qquad (27.25)$$

Проводимость плазмы растет пропорционально абсолютной температуре T в степени 3/2.

27.3.3. Метод кинетических уравнений. Плазма как сильно ионизованный газ имеет некоторое сходство с обычными газами и подчиняется многим газовым законам. Наибольшее отличие плазмы от обычного газа заключается в кулоновском взаимодействии ее частиц и в поведении плазмы в магнитном поле [29]. Большая электропроводность ве-

щества и дальнодействующий характер взаимодействия электронов и ионов приводят к уравнениям движения плазмы, сильно отличающимся от уравнений газовой динамики. Изучение законов движения плазмы, рассматриваемой как особую жидкость с указанными свойствами, составляет предмет магнитной гидродинамики плазмы.

Свойства плазмы можно исследовать *методом кинетических уравнений*. Условие применимости этого метода требует, чтобы плазма была достаточно разрежена. В этом случае, ее, как и газ, можно рассматривать как систему, слабо отклоняющуюся от идеальной. Условие разреженности плазмы

$$kT \gg l^2/\bar{r} \sim e^2 N^{1/3}, \tag{27.26}$$

где $\bar{r} \sim N^{-1/3}$ — среднее расстояние между частицами, N — полное число частиц в единице объема, k — постоянная Больцмана, T — температура плазмы. Оно означает малость средней энергии взаимодействия двух частиц по сравнению с их средней кинетической энергией.

Кинетическое уравнение для частиц сорта a (электронов, $a = e$, и ионов, $a = i$) в плазме имеет вид

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_r f_a + \dot{\mathbf{p}}\nabla_p f_a = \left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_{sc}, \tag{27.27}$$

где $f_a = f_a(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ — функция распределения частиц сорта a в момент времени t, характеризуемых радиусом-вектором $\mathbf{r}$ (с координатами x, y, z), импульсом $\mathbf{p}$ (с проекциями на координатные оси p_x, p_y, p_z) и скоростью $\mathbf{v}$ (с проекциями v_x, v_y, v_z):

$$\mathbf{v}\nabla_r f_a \equiv v_x \frac{\partial f_a}{\partial x} + v_y \frac{\partial f_a}{\partial y} + v_z \frac{\partial f_a}{\partial z}, \quad \dot{p}\nabla_p f_a \equiv \dot{p}_x \frac{\partial f_a}{\partial x} + \dot{p}_y \frac{\partial f_a}{\partial y} + \dot{p}_z \frac{\partial f_a}{\partial z}.$$

Производная импульса $\mathbf{p}$ по времени t определяется силой $\mathbf{F}_a$, действующей на частицы сорта a со стороны других частиц [3.3]:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}_a. \tag{27.28}$$

Величина $(\partial f_a/\partial t)_{sc}$ называется *интегралом столкновения* частиц сорта a между собой и с частицами всех других сортов, присутствующих в плазме.

Зная функцию распределения f_a, можно определить все характеристики плазмы. Так, среднее число частиц $\bar{n}_a$, обладающих значениями координат радиуса-вектора $\mathbf{r}$ и импульсом $\mathbf{p}$ в заданных интервалах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{p}$, определяется равенством

$$\bar{n}_a = f_a d\mathbf{r} d\mathbf{p}.$$

Нахождение интеграла столкновения по функциям распределения f_a является сложной задачей. В самом простом случае интеграл столкновения может быть записан в виде

$$\left(\frac{\partial f_a}{\partial t}\right)_{sc} = -\frac{f_a - f_a^0}{\tau}, \tag{27.29}$$

где $\tau = 1/\nu$ называется *временем релаксации*, ν — частота столкновений, f_a^0 — равновесная, не возмущенная электромагнитным полем, функция распределения. Плазма, у которой $(\partial f_a/\partial t)_{sc} = 0$, называется *бесстолкновительной*, а уравнение (27.27) в этом случае называется *уравнением Власова* (1938).

Кинетическое уравнение следует дополнить уравнениями Максвелла [31.2]

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0, \tag{27.30}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}, \ \mathrm{div}\ \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

определяющими усредненные величины — напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{B}$ полей плазмы — по заданным плотностям зарядов ρ и тока $\mathbf{j}$, которые связаны с функциями распределения электронов f_e и ионов f_i равенствами

$$\rho = e \int (Z f_i - f_e) d\mathbf{p}, \tag{27.31}$$

$$\mathbf{j} = e \int (Z f_i - f_e)\, \mathbf{v} d\mathbf{r},$$

где e — заряд электрона, Ze — заряд иона.

Решение уравнений (27.27) — (27.31) с учетом явного вида интеграла столкновения $(\partial f_a/\partial t)_{sc}$ и силы $\mathbf{F}_a$ позволяет найти функции распределения f_e, f_i и напряженности самосогласованного поля [27.3.1] $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

27.3.4. **Термодинамические величины.** Пусть заряды полностью ионизованной плазмы равны $Z_a e$ (e — заряд электрона, Z_a — положительные или отрицательные числа, индекс a нумерует различные сорта ионов), число ионов a-го сорта в единице объема равно n_a. Тогда условие электрической квазинейтральности плазмы имеет вид

$$\sum_a Z_a n_a = 0, \tag{27.32}$$

где суммирование проводится по всем сортам заряженных частиц. Если плазма представляет собой газ, слабо отклоняющийся от идеального, то должно выполняться условие типа (27.26), где e следует заменить на $Z_a e$. При выполнении условия (27.32) среднее значение энергии кулоновского взаимодействия ионов обращается в нуль, если ионы равномерно распределены в пространстве независимо один от другого. Отличная от нуля поправка $E_{кор}$ в энергии плазмы появляется при учете корреляции между положениями различных частиц. *Поправки* такого типа называют *корреляционными*. *Корреляционная поправка к энергии плазмы*

$$E_{кор} = -\frac{e^3}{8\pi\varepsilon_0^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{kTV}} \left(\sum_a N_a Z_a^2\right)^{3/2}, \tag{27.33}$$

где $N_a = n_a V$ — полное число ионов сорта a в газе с объемом V, k — постоянная Больцмана, T — температура плазмы. *Свободная энергия* F [21.4.1] *плазмы* имеет вид

$$F = F_{ид} - \frac{e^3}{12\pi\varepsilon_0^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{kTV}} \left(\sum_a N_a Z_a^2\right)^{3/2}, \tag{27.34}$$

где $F_{ид}$ — свободная энергия идеального газа. *Уравнение состояния плазмы* дается выражением

$$P = \frac{NkT}{V} - \frac{e^3}{24\pi\varepsilon_0^{3/2} V^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{kT}} \left(\sum_a N_a Z_a^2\right)^{3/2}, \tag{27.35}$$

где P — давление плазмы, $N = \sum_a N_a$. *Термодинамический потенциал Гиббса* Φ [21.4.1] определяется формулой

$$\Phi = \Phi_{\text{ид}} - \frac{e^3}{12\pi\varepsilon_0^{3/2} kT} \left(\frac{P}{N}\right)^{1/2} \left(\sum_a N_a Z_a^2\right)^{3/2}, \qquad (27.36)$$

где $\Phi_{\text{ид}}$ — термодинамический потенциал Гиббса для идеального газа. Плазму, которая описывается выражениями (27.33) — (27.36), называют *классической*.

27.4. Электрический ток в вакууме

27.4.1. Скорость свободных электронов. На электроны, движущиеся от катода к аноду в электрическом поле E, согласно (24.2) действует сила $F = eE$, где e — заряд электрона.

Приобретаемое электроном ускорение

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{eE}{m_e}, \qquad (27.37)$$

где m_e — масса (покоя) электрона. Так как кинетическая энергия электронов равна работе, затраченной на их ускорение, то

$$\frac{m_e v^2}{2} = eV, \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}, \qquad (27.38)$$

где v — скорость электрона, V — ускоряющее напряжение (разность потенциалов между анодом и катодом). С учетом числовых значений $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл и $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг имеем

$$v = 594\sqrt{V}, \qquad (27.39)$$

где $[v]$ = км/с, а $[V]$ = В. Формулы (27.38), (27.39) нерелятивистские. Если $v \geqslant 0{,}2\,c$, где c — скорость света в вакууме, то следует учитывать релятивистское увеличение массы электрона [6.3.1]. Тогда

$$eV = m_e c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right), \quad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{eV}{m_e c^2} + 1\right)^2}} \qquad (27.40)$$

или после подстановки числовых значений для m_e, e и $c = 2{,}998 \times \times 10^8$ м/с

$$v = 2{,}998 \cdot 10^5 \sqrt{1 - \frac{1}{1 + 1{,}957 \cdot 10^{-6} V}}, \qquad (27.41)$$

где $[v]$ = км/с, $[V]$ = В.

Если электрон движется перпендикулярно направлению электрического поля, то его траектория имеет вид параболы. Движение электрона в этом случае подобно движению тела, брошенного горизонтально [2.3.5]. В качестве ускорения свободного падения следует взять величину a (27.37).

Пусть электрон со скоростью v влетает в конденсатор, как показано на рис. 27.5, напряженность электрического поля конденсатора E, напряжение между пластинами V, длина пластин l, расстояние между пластинами d, расстояние от экрана $Э$ до середины конденсатора s, отклонение электрона после выхода из конденсатора b. Тогда электрон после выхода из конденсатора характеризуется следующими величинами:

$$v_x = v, \; v_y = al = \frac{eEl}{m_e}, \; s_x = s, \; s_y = \frac{al^2}{2} = \frac{eEl^2}{2m_e},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eEl}{m_e v}, \; b = s_y + \left(s - \frac{l}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi = \frac{eVl}{m_e dv^2}\left(s + \frac{l}{2}\right),$$
$$t = \frac{l}{v}, \qquad E = \frac{V}{d}, \qquad (27.42)$$

где t — время, φ — угол отклонения от горизонтального движения, m_e — масса электрона.

27.4.2. Термоэлектронная эмиссия. Вакуум не содержит носителей зарядов и является изолятором. Электрический ток может протекать только тогда, когда в вакуум введены носители зарядов. Источником таких зарядов (электронов) могут служить твердые тела.

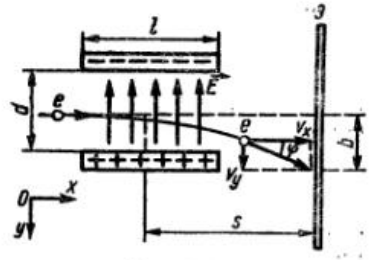


Рис. 27.5

Электроны проводимости твердых тел участвуют в тепловом движении. Вблизи поверхности на электрон действуют силы, направленные внутрь металла. Эти силы возникают как результат притяжения между электронами и положительными ионами решетки. Чтобы покинуть металл, электрон должен совершить некоторую работу, называемую работой выхода [28.2]. Физическая причина этого состоит в следующем. Электроны, участвуя в тепловом движении, могут выходить из металла и удаляться на некоторое малое расстояние от его поверхности порядка размеров атома. Над поверхностью металла возникает электронная атмосфера, плотность которой быстро убывает при удалении от металла, а под поверхностью остается слой положительно заряженных ионов. На преодоление электрического поля между этими двумя слоями, действующими как пластины конденсатора, и требуется производство работы выхода.

При комнатных температурах практически все электроны твердых тел (металлов, полупроводников) имеют кинетическую энергию меньшую, чем их работа выхода. Поэтому они остаются в пределах твердого тела. Если электронам сообщить дополнительную энергию, достаточную для преодоления разности потенциалов двойного приповерхностного электрического слоя, то они смогут покинуть твердое тело и будет наблюдаться явление испускания электронов. Это явление называют *электронной эмиссией*.

Термоэлектронной эмиссией называется испускание электронов веществом при его нагревании. Электроны, испускаемые нагретым телом, называют *термоэлектронами*, а само тело — *эмиттером*. При термоэлектронной эмиссии электроны вылетают за счет тепловой энергии. Число термоэлектронов зависит от свойств эмиттера и его температуры.

Если напряжение между анодом и катодом так велико, что все испускаемые катодом электроны уходят к аноду, то плотность термо-

электронного тока j определяется **формулой Ричардсона—Дэшмана** (1901)

$$j = BT^2 e^{-\frac{A}{kT}}, \qquad (27.43)$$

где A — работа выхода материала катода, T — его температура, k — постоянная Больцмана, величина B называется *постоянной Ричардсона*. Значение B определяется экспериментально. Для молибдена $B = 55 \frac{A}{см^2 \cdot K^2}$, $A = 4{,}43$ эВ; для вольфрама $B = 60 \frac{A}{см^2 \cdot K^2}$, $A = 4{,}53$ эВ. Модель идеального электронного газа приводит к выражению для постоянной Ричардсона

$$B = \frac{4\pi m_e e k^2}{h^3}, \quad B = 120 \frac{A}{см^2 \cdot K^2}, \qquad (27.44)$$

где e — заряд электрона, m_e — масса электрона, h — постоянная Планка (23.29). Согласно (27.44) величина B одинакова для всех металлов, что не согласуется с опытом.

Если бы все электроны, испущенные катодом, достигали бы анода, то сила термоэлектронного тока I не зависела бы от напряжения V между электродами. Однако из опыта следует, что ток I растет с увеличением V. Это объясняется образованием отрицательного пространственного заряда между катодом и анодом, создающего электрическое поле, направленное противоположно приложенному электрическому полю. Плотность термоэлектронного тока j подчиняется **закону трех вторых Ленгмюра** (1913)

$$j = CV^{3/2}, \qquad (27.45)$$

где C — постоянная, определяемая формой электродов. Для плоских электродов

$$C = \frac{4\varepsilon_0}{9l^2}\sqrt{\frac{2e}{m_e}}, \qquad (27.46)$$

где l — расстояние между ними. Формулы (27.45) и (27.46) являются решением уравнения Пуассона для потенциала электрического поля φ:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (27.47)$$

где поле направлено перпендикулярно поверхности анода вдоль оси x с началом на поверхности катода, $\rho = -ne = -j/v = -j\sqrt{\frac{m_e}{2e\varphi}}$ — объемная плотность заряда. Граничное условие имеет вид

$$\lim_{x\to 0}\varphi = \lim_{x\to 0}\frac{d\varphi}{dx} = 0. \qquad (27.48)$$

После интегрирования уравнения (27.47) в результате следует положить $\varphi = V$ и $x = l$.

27.4.3. Вторичная электронная эмиссия. *Вторичной электронной эмиссией* называется явление испускания вторичных электронов при облучении поверхности тел (металлов, полупроводников и диэлектриков) пучком

электронов. Количественно это явление описывают *коэффициентом вторичной эмиссии*

$$\gamma = N/N_0,$$

где N — полное число термоэлектронов, испущенных поверхностью тела, N_0 — число первичных электронов в падающем пучке. Коэффициент γ зависит от природы вещества тела, состояния его поверхности,

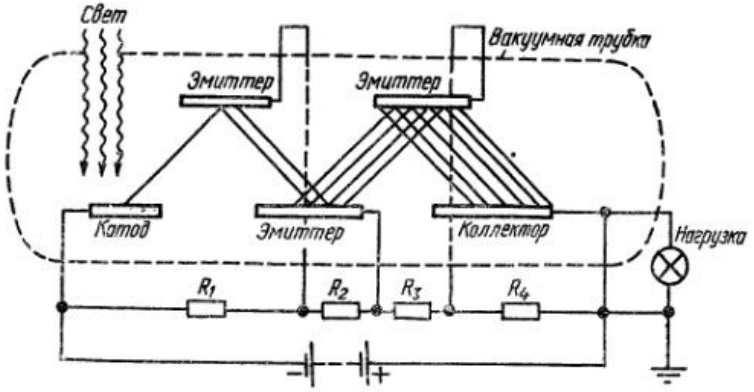


Рис. 27.6

скорости первичных электронов и угла их падения на поверхность. Вторичная электронная эмиссия из толстых слоев металла больше, чем из тонких металлических пленок. Она не зависит от интенсивности пучка падающих электронов. С увеличением их скорости коэффициент γ сначала возрастает, достигая размытого максимума, затем снова уменьшается. Энергия первичных электронов, соответствующих максимуму γ, порядка сотен электронвольт. Для чистых металлов $\gamma \leqslant 2$, для ряда полупроводников $\gamma \leqslant 10$.

Вторичная электронная эмиссия используется в *электронных умножителях*, предназначенных для усиления слабых токов (рис. 27.6). Электронные умножители могут усиливать токи в миллионы раз. Величина этих токов ограничена теми токами, которые самопроизвольно могут возникать внутри умножителя. Вторичная эмиссия возникает также при бомбардировке катода тяжелыми частицами — ионами обоих знаков.

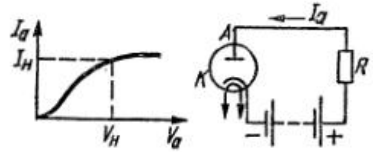


Рис. 27.7

27.4.4. Автоэлектронная эмиссия. При напряженности электрического поля более 10^9 В/м создаваемых им сил достаточно для вырывания электронов с поверхности металла. Это явление называется *автоэлектронной (холодной) эмиссией*. Его объяснение дает квантовая механика.

27.4.5. Электронные лампы. *Электронными лампами* называются вакуумные приборы, работа которых основана на явлении термоэлектронной эмиссии. Двухэлектродная лампа называется *диодом*. На рис. 27.7 показана вольт-амперная характеристика диода и его схематическое изображение в электрических схемах. Сила анодного тока I_a

растет с увеличением анодного напряжения V_a до значения $I_н$, называемого *током насыщения*, которое достигается начиная с некоторого напряжения $V_a = V_н$. Вольт-амперная характеристика диода нелинейна. Это объясняется образованием электронного облака между анодом A и катодом K, препятствующего движению электронов к аноду. При увеличении V это облако рассасывается и сила тока I растет. Ток насыщения $I_н$ равен $I_n = ne$, где n — число электронов, испускаемых катодом в единицу времени, e — величина заряда электрона.

Диоды обладают односторонней проводимостью. Ток в лампе возможен, если потенциал анода выше потенциала катода, так как только в этом случае напряжение $V_a > 0$. В противном случае ток через лампу не идет. Это свойство диода используется для выпрямления переменного тока, при котором напряжение V_a меняет свой знак с течением времени.

Для управления термоэлектронным током в лампы вводят дополнительные электроды. В зависимости от общего числа электродов такие

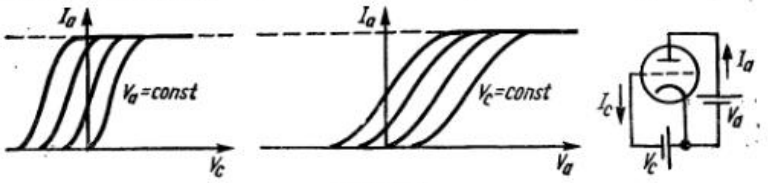


Рис. 27.8

лампы называют *триодами* (анод, катод и управляющая сетка), *тетродами* (анод, катод и две сетки), *пентодами* (анод, катод и три сетки).

В триоде управляющая сетка располагается вблизи катода (рис. 27.8). При таком ее расположении даже при малом напряжении V_c между сеткой и катодом вблизи последнего создается сильное электрическое поле, изменяя которое, можно регулировать движение электронов в лампе. Когда $V_c = 0$, сетка практически не влияет на ток. Если $V_c > 0$, то сила электрического тока увеличится, если $V_c < 0$, то уменьшится. Это свойство триода позволяет использовать его в качестве устройства, управляющего силой тока в цепи.

Анодный ток I_a является функцией сеточного V_c и анодного V_a напряжений: $I_a = I_a(V_c, V_a)$. Его характеризуют двумя семействами кривых, называемых сеточными ($V_a = \text{const}$) и анодными ($V_c = \text{const}$) характеристиками (рис. 27.8). Сеточные характеристики поднимаются вверх круче, чем анодные. При увеличении V_a (V_c) сеточные (анодные) характеристики смещаются влево. Триоды характеризуют крутизной S и внутренним сопротивлением лампы R_i:

$$S = \left(\frac{\partial I_a}{\partial V_c}\right)_{V_a=\text{const}}, \quad R_i = \left(\frac{\partial V_a}{\partial I_a}\right)_{V_c=\text{const}}. \qquad (27.49)$$

На прямолинейных участках

$$S = \left(\frac{\Delta I_a}{\Delta V_c}\right)_{V_a=\text{const}}, \quad R_i = \left(\frac{\Delta V_a}{\Delta I_a}\right)_{V_c=\text{const}}, \qquad (27.50)$$

где ΔI_a — приращение анодного тока, ΔV_c и ΔV_a — приращение сеточного и анодного напряжений. Крутизна S и сопротивление R_i связаны между собой *уравнением Баркгаузена*

$$SDR_i = 1, \qquad (27.51)$$

где $D < 1$ — положительная постоянная, называемая *проницаемостью сетки*. Она зависит от устройства лампы. Анодный ток I_a является фактически функцией одной переменной V_y, т. е. $I_a = I_a(V_y)$, которая имеет вид

$$V_y = V_c + DV_a \qquad (27.52)$$

и называется *управляющим напряжением*. Полный ток лампы $I = I_a + I_c$, где I_c называется *сеточным током* (рис. 27.8). Увеличение сеточного тока приводит к потерям электрической энергии в цепи. За счет конструкции управляющей сетки добиваются таких малых значений I_c, которыми можно пренебречь и считать, что $I = I_a$.

Триоды служат для усиления электрических сигналов и электрических токов. Напряжение, которое нужно усилить, прикладывается между сеткой и катодом. Принципиальная схема усилителя с триодом показана на рис. 27.9. Здесь R_a — сопротивление нагрузки, $\mathcal{E}$ — ЭДС источника тока. Изменение анодного напряжения ΔV_a при изменении сеточного напряжения ΔV_c определяется формулой

$$\Delta V_a = -\frac{R_a}{R_a + R_i} R_i S \Delta V_c. \qquad (27.53)$$

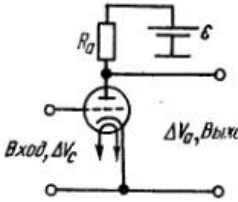


Рис. 27.9

Если к сетке триода подводится напряжение ΔV_c, то действие лампы в анодной цепи подобно действию генератора переменного тока (с ЭДС, равной $R_i S \Delta V_c$, и внутренним сопротивлением R_i), включенного во внешнюю цепь с сопротивлением R_a.

Величина

$$K = \frac{1}{D} = SR_i, \quad K = \left(\frac{\partial V_a}{\partial V_y}\right)_{V_c=\text{const}}, \quad K = \left(\frac{\Delta V_a}{\Delta V_y}\right)_{V_c=\text{const}} \qquad (27.54)$$

называется *коэффициентом усиления* лампы.

При $R_a \gg R_i$ (режим холостого хода) происходит усиление напряжения:

$$\Delta V_a = -K\Delta V_c. \qquad (27.55)$$

При $R_a \ll R_i$ (режим короткого замыкания) происходит усиление тока, а изменения напряжения ΔV_a и тока ΔI_a определяются формулами

$$\Delta V_a = -\frac{R_a K}{R_i} = -SR_a, \quad \Delta I_a = S\Delta V_c = Sr\Delta I_c, \qquad (27.56)$$

где ΔI_c — изменение тока сетки, r — сопротивление между сеткой и катодом. Знак минус в (27.55) и (27.56) показывает, что фазы колебаний сеточного и анодного напряжений противоположны, т. е. увеличение положительного потенциала сетки вызывает уменьшение потенциала на аноде, и т. д.

Подавая последовательно напряжение с выхода одного усилителя на вход другого, можно добиться многократного усиления напряжения, подаваемого на сетку первого усилителя. Общий коэффициент усиления такого лампового усилителя может быть очень велик. Следует, однако, иметь в виду, что при увеличении общего коэффициента усиления на выходе усилителя появляются электрические шумы, т. е. быстрые непериодические неправильные (хаотические) колебания напряжения, которые затушевывают полезный усиливаемый сигнал. Электрические шумы обусловлены атомарной природой электрического заряда. Они

возникают во всех элементах электрической цепи — внутри электронных ламп, сопротивлениях и т. д. В лампах шумы возникают из-за того, что число электронов, вылетающих из катода, является постоянным только в среднем. В каждый отдельный момент времени это число различно. Эта неравномерная термоэлектронная эмиссия, называемая *дробовым эффектом*, является одной из причин появления электрических шумов. Когда лампа работает в режиме насыщения, т. е. когда все термоэлектроны достигают анода, то дробовой эффект является максимальным.

В сопротивлениях шумы возникают вследствие неравномерности в каждый отдельный момент времени диффузионных потоков электронов в прямом и обратном направлениях, возникающих из-за беспорядочного теплового движения электронов и приводящих к существованию слабых токов, направление и сила которых беспорядочно изменяются. Последнее приводит и к беспорядочному изменению напряжения на концах сопротивления.

Шумы в сопротивлениях и дробовой эффект представляют собой электрические флуктуации. Минимальный сигнал, который может быть заметен на фоне шумов в современных ламповых усилителях, имеет порядок 10^{-7} В.

Электроны, прошедшие через сетку электронной лампы, попадают на анод и выбивают из него (вторичные) электроны. Это явление называется *динатронным эффектом*. Этот эффект на нормальной работе лампы практически не сказывается, так как вторичные электроны под действием поля возвращаются в анод. В тетроде, имеющем дополнительную (экранную) сетку, на которую подается положительное напряжение, динатронный эффект приводит к уменьшению анодного тока и появлению провалов на характеристиках лампы. В пентоде, имеющем еще одну защитную (противодинатронную) сетку, на которую подается отрицательное напряжение (она соединяется с катодом), характеристики гладкие, без провалов. Поэтому пентоды имеют высокий коэффициент усиления.

28. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ

28.1. Эффект Холла

Опыт показывает, что носителями тока в металлах являются электроны, которые слабо связаны с ионами кристаллической решетки и могут свободно перемещаться. Ионы в металлах не участвуют в процессе переноса электричества. Удельная проводимость металлов при комнатной температуре изменяется от $6 \cdot 10^3$ до $6 \cdot 10^5$ Ом$^{-1}$ · см$^{-1}$. Твердые тела с удельной проводимостью $\lambda \sim 10^{-10}$—10^4 Ом$^{-1}$ · см$^{-1}$ называют *полупроводниками*, а с $\lambda \sim 10^{-20}$—10^{-10} Ом$^{-1}$ · см$^{-1}$ — диэлектриками (изоляторами). В отличие от металлов носителями тока в полупроводниках и диэлектриках могут быть как электроны, так и ионы. Если через металлическую пластинку, помещенную в магнитное поле с индукцией **B** [29.1.2], пропустить постоянный ток плотностью $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ (26.21), направление которого перпендикулярно вектору **B** (рис. 28.1), то на ее плоскостях в направлении, перпендикулярном векторам **j** и **B**, возникнет разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Появление поперечной разности потенциалов в магнитном поле называется **эффектом Холла** (1879). В слабых магнитных полях разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ пропорциональна индукции магнитного поля B:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = jBdR, \qquad (28.1)$$

где d — расстояние между плоскостями с потенциалами φ_1 и φ_2, величина R называется *постоянной Холла*. Она определяется формулой

$$R = \frac{1}{ne}, \qquad (28.2)^*$$

где e и n — заряд и концентрация носителей тока. По знаку постоянной Холла можно судить о знаках носителей тока ($e > 0$ или $e < 0$). Ее можно определить по формуле (28.1), измеряя разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ при заданных значениях j и B. Зная R, можно рассчитать концентрацию n электронов проводимости в металле по формуле (28.2), подвижность b электронов по формуле

$$\lambda = enb, \qquad (28.3)$$

где λ — электропроводность металла, и число электронов z, приходящихся на один атом металла:

$$z = \frac{A}{R\rho F}, \qquad (28.4)^*$$

где A — атомная масса, ρ — плотность металла, F — число Фарадея (27.6). Для обычных металлов подвижность b изменяется от 10^{-3} до 10^{-4} м^2/с · В. Малое значение b указывает на то, что электроны в металлах испытывают много соударений с ионами кристаллической решетки. Для элементов первой группы периодической системы элементов Д. И. Менделеева $z \approx 1$ и совпадает с числом валентных электронов. Для алюминия $z \approx 3$. Для обычных металлов $R \sim 10^{-3}$ см^3/Кл, а концентрация $n \sim 10^{22}$ см$^{-3}$ близка к концентрации атомов. Опыт показывает, что в металлах концентрация электронов практически не зависит от температуры. Это свидетельствует о том, что тепловое движение не играет существенной роли в образовании электронов проводимости в металлах.

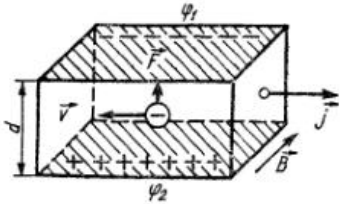


Рис. 28.1

В полупроводниках наблюдается сильная зависимость концентрации носителей заряда от температуры. Так, в чистом кремнии при $t = 20$ °С концентрация электронов $n \lesssim 10^{17}$ м$^{-3}$, а его удельное сопротивление $1/\lambda \gtrsim 10^3$ Ом · м. При $t \approx 700$ °С концентрация электронов в кремнии $n \approx 10^{24}$ м$^{-3}$, а $1/\lambda \approx 0{,}001$ Ом · м.

Существуют вещества, которые при низких температурах имеют большое удельное сопротивление и практически являются изоляторами. Однако с увеличением температуры их удельное сопротивление сильно уменьшается и при достаточно высоких температурах становится очень малым. Такие вещества называют *электронными полупроводниками*.

28.2. Работа выхода электрона из металла

Для выхода электрона из металла в вакуум он должен совершить работу против сил, действующих на поверхностном слое, разделяющем металл и вакуум [27.4.2]. Эту работу A называют *работой выхода*. Если значения электрического потенциала в металле и в вакууме равны соответственно φ_i и φ_e, то работа выхода

$$A = e(\varphi_e - \varphi_i) + \mu, \qquad (28.5)$$

где e — абсолютное значение заряда электрона, μ — химический потенциал [21.4.4] электронного газа в металле, определяемый формулой

$$\mu = E_F\left(1 - \frac{\pi^2 (kT)^2}{12E_F}\right), \qquad (28.6)$$

E_F — *энергия Ферми*, равная граничному значению полной энергии электронного газа, при котором все квантовые состояния электронов с энергией меньше E_F оказываются занятыми, а с энергией больше E_F — свободными. Формула (28.5) учитывает квантовую природу электронного газа в металле. Пренебрегая зависимостью μ от температуры T и отсчитывая работу выхода A от энергии Ферми E_F, приходим к выражению классической электронной теории

$$A = e(\varphi_e - \varphi_i) = e\Delta\varphi, \qquad (28.7)$$

где $\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_i$ — скачок потенциала на поверхности металла, называемый *потенциалом выхода*.

Работу A (28.7) против сил в поверхностном слое электрон может совершить за счет запаса кинетической энергии. Условие, при котором электрон может вылететь из металла, имеет вид

$$\frac{mv_n^2}{2} \geqslant e\Delta\varphi. \qquad (28.8)$$

где m — масса электрона, v_n — нормальная (перпендикулярная поверхности) составляющая его скорости. Если условие (28.8) не выполняется, то электрон не может проникнуть через поверхностный слой и остается в металле.

Единицей работы выхода является электронвольт (эВ) (25.65). Работа выхода зависит от вещества и состояния поверхности металла [65.2.2].

28.3. Закон Вольты

При контакте двух различных металлов между ними возникает разность потенциалов. Ее называют *контактной разностью потенциалов*. Она зависит от химического состава соприкасаемых металлов и их температуры. Опыт показывает, что разность потенциалов на концах цепи, состоящей из нескольких (больше двух) последовательно соединенных металлических проводников, имеющих одинаковую температуру, не зависит от химического состава промежуточных проводников и равна разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников. Это явление называется **законом последовательных контактов Вольты**. Он является следствием закона сохранения энергии.

Возникновение контактной разности потенциалов можно объяснить тем, что при соприкосновении двух незаряженных проводников, имеющих разные работы выхода: $A_1 > A_2$ [28.7], электроны из второго проводника будут преимущественно переходить в первый. При этом первый проводник получит отрицательный заряд, а второй — положительный, и в окружающем пространстве возникнет электрическое поле. При приведении металлов в контакт их химические потенциалы μ_1 и μ_2 не изменяются. Условие равновесия имеет вид

$$e\varphi_{i_1} + \mu_1 = e\varphi_{i_2} + \mu_2, \qquad (28.9)$$

где φ_{i_1} и φ_{i_2} — значения потенциалов первого и второго проводников после установления состояния равновесия в системе. Величина

$$\Delta\varphi_i = \varphi_{i_2} - \varphi_{i_1} = \frac{1}{e}(\mu_1 - \mu_2) \qquad (28.10)$$

называется *внутренней контактной разностью потенциалов*.

При $\mu_1 = \mu_2$ имеем $\Delta\varphi_i = 0$. Классическая электронная теория металлов, рассматривающая возникновение $\Delta\varphi_i \neq 0$ как следствие различия концентраций n_{0_1} и n_{0_2} электронов проводимости в контактирующих металлах, приводит к выражению

$$\Delta\varphi_i = \frac{kT}{e}\ln\frac{n_{0_1}}{n_{0_2}}, \qquad (28.11)$$

которое только качественно описывает явление. Правильное поведение $\Delta\varphi_i$ как функции температуры T дает формула (28.10), где в качестве химических потенциалов μ_1 и μ_2 используется выражение (28.6), полученное в рамках квантовой теории.

Внешняя контактная разность потенциалов определяется равенством

$$\Delta\varphi_e = \varphi_{e_2} - \varphi_{e_1} = \frac{1}{e}(A_2 - A_1), \qquad (28.12)$$

где A_1 и A_2 — работа выхода электронов из первого и второго соприкасающихся металлов, φ_{e_1} и φ_{e_2} — потенциалы вблизи поверхностей вне этих металлов

Если температуры в местах контактов проводников различные, то в замкнутой цепи, состоящей из нескольких металлов, возникает электрический ток. Этот ток называется *термоэлектрическим*. Причина появления термоэлектрического тока состоит в зависимости от температуры химических потенциалов μ_1 и μ_2, определяющих внутреннюю контактную разность потенциалов на границе двух металлов $\Delta\varphi_i$ (28.10). Если температуры на этих границах разные, то неодинаковые и соответствующие им разности потенциалов $\Delta\varphi_i$. Это нарушает электрическое равновесие и в цепи возникает электрический ток.

Опыт показывает, что термоэлектрические токи в полупроводниках больше, чем в металлах. Термоэлектричество используется для генерации электрического тока. Для получения значительного напряжения *термоэлементы* (называемые *термопарами*) соединяют последовательно в батареи. КПД термопар из металлов очень мал: $\eta \sim 0{,}1$ %, а КПД термопар из полупроводников $\eta \approx 15$ % и в принципе может быть увеличен.

Сопротивление термоэлемента, состоящего из двух металлов, полупроводников или металла с полупроводником, зависит от направления протекания тока через него. В одном направлении оно велико, и ток практически не проходит через контакт, в другом — мало́, и ток беспрепятственно проходит через весь термоэлемент. Такое свойство контактов позволяет использовать термоэлементы в качестве выпрямителей переменного тока.

Глава VII

Магнетизм

29. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

29.1. Основные понятия

29.1.1. Магнитные свойства веществ. Опыт показывает, что некоторые железные руды обладают способностью притягивать к себе находящиеся вблизи них небольшие железные предметы (металлические опилки, гвозди и т. п.). Куски такой руды называют *естественными магнитами*. Железные бруски сами приобретают способность притягивать к себе железные предметы, если они подвергаются воздействию со стороны естественного магнита. В этом случае говорят, что железо намагничивается. Если намагничивание прекращается при удалении железа от магнита, то оно называется *временным намагничиванием*. Если магнитные свойства железа остаются, то говорят об *остаточном намагничивании*, а само железо называют *постоянным искусственным магнитом*. Временное и остаточное намагничивание зависит от свойств намагничиваемого вещества (от сорта железа или стали). Так, остаточное намагничивание стали, содержащей примесь кобальта, значительно больше, чем остаточное намагничивание мягкого железа. Постоянные искусственные магниты всегда изготавливают из специальных сортов стали.

Различные части искусственного и естественного магнитов притягивают железные предметы по-разному. На концах магнита это притяжение максимально, а в средней его части оно практически отсутствует. Концы магнита называют *полюсами*, а среднюю часть — *нейтральной зоной*. Если магниту придать форму стрелки и дать ей возможность свободно вращаться вокруг оси, проходящей через нейтральную зону, то она всегда установится так, что один из полюсов магнита будет обращен на север, а другой на юг. Тот полюс магнита, который поворачивается к северу, называют *северным* (N), а другой — *южным* (S). Опыт показывает, что северный и южный полюсы нельзя разделить, т. е. нельзя получить магнит с одним полюсом.

29.1.2. Индукция магнитного поля. В пространстве, окружающем проводник с током, действуют силы, подобные тем, которые действуют вблизи естественных и искусственных магнитов. В фундаментальных опытах Эрстеда (1820) магнитная стрелка и проводник располагались в направлении север — юг (вдоль меридиана). При пропускании тока через проводник магнитная стрелка поворачивалась и устанавливалась перпендикулярно проводнику. При отключении тока стрелка возвращалась в исходное положение. Взаимодействие электрического тока, т. е. движущихся зарядов, с магнитной стрелкой осуществляется через материального посредника, называемого *магнитным полем*. Опыты Эрстеда доказывают, что магнитное поле создается движущимися электрическими зарядами. Количественно магнитное поле характеризуют *магнитной индукцией*. Магнитная индукция — векторная величина. Ее абсолютное значение B равно силе $F_{m\perp}$, действующей на единичный электрический заряд q, движущийся с единичной скоростью $\mathbf{v}$ в направлении, перпендикулярном направлению магнитной индукции $\mathbf{B}$:

$$F_{m\perp} = qvB. \qquad (29.1)^*$$

В общем случае на заряд q, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$, действует сила $\mathbf{F}_m$, направленная перпендикулярно векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ и определяемая соотношением

$$\mathbf{F}_m = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \qquad (29.2)^*$$

Модуль этой силы

$$F_m = qvB\sin\varphi, \qquad (29.3)^*$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$.

Формула (29.2) определяет абсолютное значение магнитной индукции $\mathbf{B}$ и ее направление по известным векторам — силе $\mathbf{F}_m$ и скорости заряда $\mathbf{v}$.

Направление любого из трех векторов $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}_m$ и $\mathbf{B}$ можно легко определить, воспользовавшись **правилом левой руки:** *если четыре вытянутых пальца левой руки указывают направление скорости движения положительного заряда q, а большой палец, отогнутый на 90°, указывает направление действия на этот заряд силы $\mathbf{F}_m$ со стороны магнитного поля, то вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ будет входить в ладонь.*

Опыт показывает, что для магнитного поля, как и электрического [24.1.4], в широкой области изменения магнитной индукции $\mathbf{B}$ справедлив **принцип суперпозиции:** *индукция магнитного поля, создаваемого магнитными полями с индукциями $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ... , $\mathbf{B}_n$, равна их сумме*:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \cdots + \mathbf{B}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i\,. \qquad (29.4)$$

29.1.3. Магнитное поле в среде. Магнетики. Для описания магнитного поля в какой-либо точке среды наряду с магнитной индукцией $\mathbf{B}$ используется другая физическая величина — напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \qquad (29.5)^*$$

где

$$\mu = 1 + \varkappa. \qquad (29.6)^*$$

Величина $\varkappa$ называется *магнитной восприимчивостью* среды, а μ — ее магнитной проницаемостью, μ_0 — магнитная постоянная. Среды, для которых $\varkappa > 0$ и $\mu > 1$, называются *парамагнитными* или *парамагнетиками*. К парамагнетикам относятся: кислород, алюминий, платина, хлорид железа ($FeCl_3$) и др. (табл. 29.1). Среды, для которых $\varkappa < 0$ и $\mu < 1$, называются *диамагнитными* или *диамагнетиками*. К диамагнетикам относятся: азот, углекислота, вода, серебро, висмут и др. Парамагнетики намагничиваются вдоль магнитного поля, а диамагнетики — противоположно ему. В вакууме $\varkappa = 0$ и $\mu = 1$.

Среды, способные намагничиваться в магнитном поле, т. е. создавать собственное магнитное поле, называют *магнетиками*. К магнети-

Таблица 29.1. Магнитная проницаемость μ некоторых веществ

Ферромагнетик	μ_{max}	Парамагнетик	$(\mu-1)10^6$	Диамагнетик	$(1-\mu)10^6$
Алмазная сталь	$1{,}5\cdot10^4$	Азот	0,013	Бензол	7,5
Никель	$3\cdot10^2$	Алюминий	21	Висмут	176
Пермаллой	$5\cdot10^4$	Вольфрам	176	Вода	9,0
Полосовое железо	$5\cdot10^3$	Железа хлорид (III)	2500	Водород	0,063
Супермаллой	$1\cdot10^6$	Кислород	1,8	Каменная соль	12,6
Твердая сталь	$2\cdot10^2$	Кислород (жидк.)	3400	Кварц	15,1
Чугунное литье	$6\cdot10^2$	Платина	360	Медь	10,3
		Эбонит	14	Углекислота	5,3

кам относят парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики. *Ферромагнетиками* называются среды, в которых собственное магнитное поле значительно превосходит (в 10^2—10^3 раз) вызвавшее его внешнее магнитное поле. *Собственным* или *внутренним магнитным полем* среды называют магнитное поле, создаваемое ее молекулами, атомами или ионами. В табл. 29.1 приведены магнитные проницаемости μ некоторых ферро-, пара- и диамагнетиков.

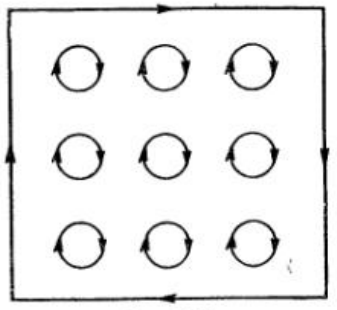


Рис. 29.1

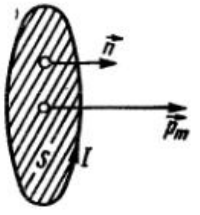


Рис. 29.2

Во всех веществах существуют мельчайшие электрические токи, замыкающиеся в пределах каждого атома молекулы или иона [68.2.4]. Эти токи называют *молекулярными токами*. Если магнетик не намагничен, то он не создает магнитного поля, т. е. магнитные токи расположены в нем беспорядочно, так что создаваемое ими суммарное магнитное поле равно нулю. При намагничивании магнетика расположение молекулярных токов становится частично или полностью упорядоченным, возникает внутреннее магнитное поле, которое можно представить как сумму мельчайших магнитных полей, создаваемых молекулярными токами (рис. 29.1). Магнитное действие замкнутых токов характеризуют их *магнитным моментом*

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, \qquad (29.7)^*$$

где I — сила тока, S — площадь, охватываемая током, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости витка с током (рис. 29.2). Единицей

магнитного момента тока $\mathbf{p}_m$ в СИ является ампер-квадратный метр:

$$[p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2.$$

Магнитное состояние среды можно полностью описать, задав магнитный момент каждой единицы ее объема. Эта величина называется *вектором намагничивания* **I**. Она определяется формулой

$$\mathbf{I} = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_{mi}, \qquad (29.8)$$

где N — число частиц (атомов, молекул и ионов), содержащихся в объеме V магнетика, $\mathbf{p}_{m_i}$ — магнитный момент i-й частицы. Зависимость между вектором намагничивания **I** и вектором напряженности магнитного поля **H** в общем случае очень сложная. Она нелинейна и зависит от предшествующего состояния магнетика (явление гистерезиса). В изотропных магнетиках, находящихся в слабых магнитных полях,

$$\mathbf{I} = \varkappa \mathbf{H}, \qquad (29.9)$$

где $\varkappa$ — магнитная восприимчивость магнетика. Согласно (29.9) направления векторов **I** и **H** совпадают. Намагниченность таких веществ не зависит от направления намагничивающего поля, и они называются *изотропными магнетиками*. Согласно (29.5) и (29.9) направления векторов **B** и **H** также одинаковы.

В ряде магнитных кристаллов направления векторов **I** и **H** не совпадают. В таких кристаллах намагниченность зависит от направления поля относительно осей кристалла. Эти вещества получили название *анизотропных магнетиков*. Для них направления векторов **B** и **H** могут различаться.

29.1.4. Система единиц Гаусса и СИ. Единицами напряженности магнитного поля **H** и магнитной индукции **B** в СИ являются:

$$[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}, \quad [B] = \text{Тл}.$$

Тесла (Тл) есть магнитная индукция **B** такого однородного магнитного поля, при которой на 1 м длины прямого проводника, перпендикулярного вектору **B**, с током в 1 А действует сила в 1 Н:

$$1\ \text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{Кл}\cdot\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2}.$$

Магнитная постоянная μ_0 в СИ измеряется в генри на метр (Гн/м). Она равна

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м} \simeq 1{,}2566\cdot 10^{-6}\ \text{Гн/м}. \qquad (29.10)$$

Постоянная μ_0 не имеет физического смысла. Электрическая ε_0 и магнитная μ_0 постоянные связаны соотношением

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \qquad (29.11)$$

где c — скорость света в метрах на секунду.

В физической литературе часто используют *систему единиц Гаусса*. Она построена из трех основных единиц СГС (сантиметр, грамм, секунда) и дополнена единицами электрических и магнитных величин. Единицы электрических величин (заряд, напряженность электрического поля, электрический потенциал, сила электрического тока, сопротив-

ление проводника, электрическая индукция и др.) совпадают с единицами СГСЭ [25, 26], а магнитных величин (напряженность и индукция магнитного поля, магнитный момент и др.) — с единицами СГСМ. В системе СГСМ единицей индукции **B** магнитного поля является гаусс (Гс):

$$1\ \text{Гс} = 1\,\frac{\text{дин}\cdot\text{с}}{\text{см}\cdot\text{СГСМ}_q} = 1\,\frac{\text{г}}{\text{с}\cdot\text{СГСМ}_q} = 1\,\frac{\text{г}\cdot\text{см}}{\text{с}^2\cdot\text{СГСЭ}_q} = 1\,\frac{\text{г}^{1/2}}{\text{см}^{1/2}\cdot\text{с}}.$$

Это определение непосредственно следует из выражения для силы $\mathbf{F}_m$ (29.2) (см. Приложение), действующей на точечный заряд q, движущийся в магнитном поле **B**.

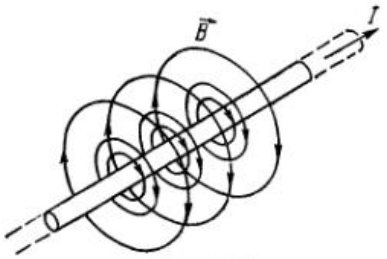


Рис. 29.3

Единицей напряженности **H** в системе СГСМ является эрстед (Э):

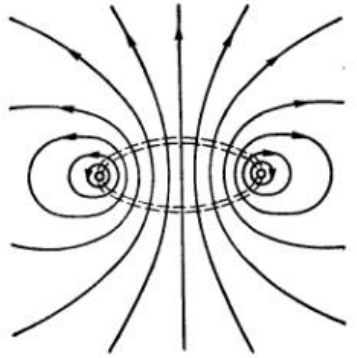
$$1\text{Э} = 1\text{см}^{-1/2}\cdot\text{г}^{1/2}\cdot\text{с}^{-1} = 1\,\frac{\text{дин}}{\text{см}\cdot\text{СГСМ}_q}.$$

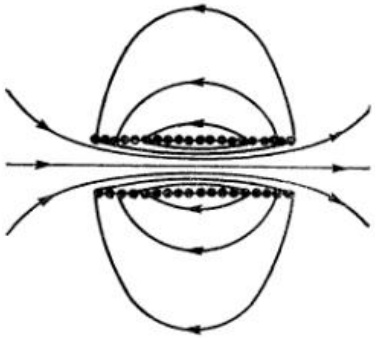
В системе единиц Гаусса, таким образом,

$$[\mathbf{H}] = \text{Э},\quad [\mathbf{B}] = \text{Гс}.$$

Единицы напряженности **H** и магнитной индукции **B** в СИ и системе Гаусса связаны между собой соотношениями

$$1\,\frac{\text{А}}{\text{м}} = 4\pi\cdot 10^{-3}\text{Э},\quad 1\text{Тл} = 10^4\ \text{Гс}. \qquad (29.13)$$


Рис. 29.4


Рис. 29.5

Как следует из (29.5), в системе Гаусса размерности величин **H** и **B** совпадают, а в СИ связь между ними дает магнитная постоянная μ_0.

29.1.5. Линии индукции магнитного поля. Магнитные поля, как и электрические, можно изображать графически линиями индукции. *Линиями индукции* называют линии, касательные к которым в каждой точке линии направлены так же, как и вектор магнитной индукции **B**. Через каждую точку магнитного поля можно провести линию индукции. Линии индукции проводят так, чтобы их густота соответствовала величине вектора магнитной индукции. На рис. 29.3 показаны линии индукции магнитного поля прямого тока, на рис. 29.4 — кольца с током, на рис. 29.5 — внутри и вокруг соленоида (проволочной катушки с током). В случае прямого тока линии индукции — это концентрические окружности. В случае соленоида в средней его части линии индукции — это прямые параллельные линии, т. е. индукция одинакова во всех точках вдали от краев соленоида. У краев линии искривляются и расходятся. Поле здесь неоднородно. Линии индукции всегда непрерывны. Они не имеют ни начала, ни конца. Это существенно отличает их от силовых линий электрического поля [25.2.1], которые всегда начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Векторное поле, имеющее непрерывные силовые линии, называется *вихревым полем*. Магнитное поле есть вихревое поле [13.7; 25.4.2].

29.2. Свойства магнитного поля

29.2.1. Магнитное взаимодействие движущихся зарядов. Из опыта следует, что если заряд q движется равномерно в вакууме со скоростью **v**, то в точке пространства с радиусом-вектором **r** он создает магнитное поле с индукцией

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 q}{r^3}(\mathbf{v}\times\mathbf{r}), \qquad (29.14)^*$$

где μ_0 — магнитная постоянная. Для зарядов q, движущихся со скоростью $v \ll c$, c — скорость света, существует простая связь между создаваемыми ими электрическим и магнитным полями: с напряженностью **E** и индукцией **B**:

$$\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c^2}(\mathbf{v}\times\mathbf{E}), \qquad (29.15)^*$$

где **E** определяется формулой (25.12).

Два точечных заряда q_1 и q_2, движущихся со скоростями $v_1 \ll c$ и $v_2 \ll c$, взаимодействуют между собой с силами

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{r_{12}^3}(\mathbf{v}_2\times(\mathbf{v}_1\times\mathbf{r}_{12})),\quad \mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{r_{21}^3}(\mathbf{v}_1\times(\mathbf{v}_2\times\mathbf{r}_{21})), \qquad (29.16)^*$$

где $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд q_2 со стороны поля $\mathbf{B}_1$, созданного зарядом q_1 в точке нахождения заряда q_2, $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, проведенный от заряда q_1 к заряду q_2; $\mathbf{F}_{21}$ — сила, действующая на заряд q_1 со стороны поля $\mathbf{B}_2$, созданного зарядом q_2. Если векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ параллельны между собой и одинаково направлены, но перпендикулярны вектору $\mathbf{r}_{12}$, то

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{r_{12}^2} v_1 v_2,$$

а направление силы зависит от знаков зарядов q_1 и q_2 — притяжение для одноименных зарядов и отталкивание для разноименных. Так как взаимодействие зарядов осуществляется через поле, то силы $\mathbf{F}_{12}$ и $\mathbf{F}_{21}$ не удовлетворяют третьему закону Ньютона [3. 4] о равенстве действия и противодействия.

29.2.2. Закон Ампера. Силу, действующую со стороны магнитного поля на проводник с током, называют *силой Ампера*. Если ток создается движущимися со скоростью **v** одинаковыми частицами с зарядом e

и концентрацией n, то сила Ампера $d\mathbf{F}$, действующая на элемент объема проводника dV, определяется формулой

$$d\mathbf{F} = e\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,dN = ne\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})\,dV = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\,dV, \qquad (29.17)^*$$

где $dN = ndV$ — число частиц в объеме dV, $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$ — плотность тока.

Силу Ампера $d\mathbf{F}$ принято выражать через линейный элемент тока $Id\mathbf{l}$, проходящего через сечение S проводника:

$$Id\mathbf{l} = jSd\mathbf{l} = \mathbf{j}dV. \qquad (29.18)$$

Здесь I — сила тока, $d\mathbf{l}$ — вектор, модуль которого равен элементу длины dl проводника, а направление совпадает с направлением электрического тока I. Тогда

$$d\mathbf{F} = I\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \qquad (29.19)^*$$

Сила Ампера $\mathbf{F}$, действующая на проводник конечной длины, определяется интегрированием выражения (29.19) по

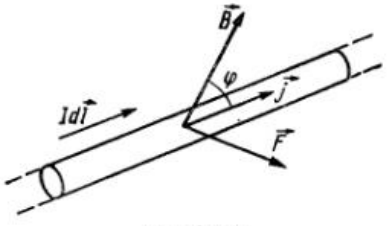


Рис. 29.6

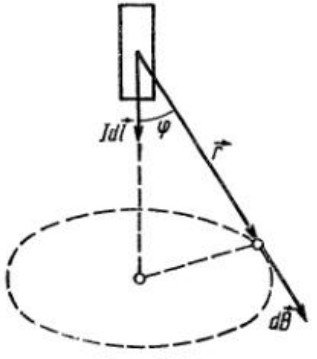


Рис. 29.7

всей длине проводника:

$$\mathbf{F} = \int I\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}). \qquad (29.20)^*$$

Для прямолинейного проводника длиной l сила

$$\mathbf{F} = I\,(\mathbf{l} \times \mathbf{B}),\ F = IlB\sin\varphi, \qquad (29.21)^*$$

где φ — угол между направлением тока и вектором $\mathbf{B}$ (рис. 29.6). Формулы (29.19) и (29.20) называются **законами Ампера** для линейного элемента тока и для проводника конечной длины. В отличие от кулоновских сил, которые являются центральными, сила Ампера направлена перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

29.2.3. Закон Био — Савара — Лапласа. Опыт показывает, что правильные значения сил магнитного взаимодействия в вакууме получаются в том случае, если определить магнитную индукцию $d\mathbf{B}$ элемента тока в виде

$$d\mathbf{B} = K\frac{I}{r^3}\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{r}),\ dB = K\frac{I}{r^2}\,dl\sin\varphi, \qquad (29.22)$$

где $Id\mathbf{l}$ — линейный элемент тока (29 18), I — сила тока, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из элемента тока в рассматриваемую точку поля (рис. 29.7), φ — угол между векторами $d\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$, K — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц:

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi}\ (\text{в СИ}),\ K = \frac{1}{c}\ (\text{в гауссовой системе}). \qquad (29.23)$$

Формула (29.22) называется законом Био — Савара — Лапласа (1820). Полное поле постоянных токов находится путем интегрирования по всем токам:

$$\mathbf{B} = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{r})}{r^3}\,dV, \qquad (29.24)^*$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока в элементе объема dV (29.18). Интегрирование по замкнутому контуру означает, что постоянные токи всегда замкнуты. Формула (29.24) допускает экспериментальную проверку, в то время как выражение (29.22) не может быть непосредственно подтверждено опытным путем, так как в принципе нельзя на практике выделить один элемент тока $Id\mathbf{l}$ так, чтобы он был независим от других элементов.

29.2.4. Магнитные поля простейших систем. Закон Био — Савара — Лапласа (29.22) позволяет вычислять индукцию магнитного поля любой системы.

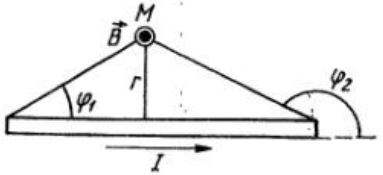


Рис. 29.8

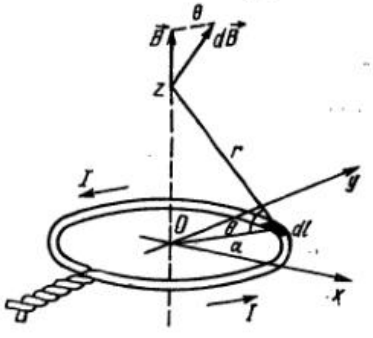


Рис. 29.9.

1. *Бесконечно длинный проводник* с током I, находящийся в среде с магнитной проницаемостью μ, создает на расстоянии r от себя магнитное поле с индукцией

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{r}. \qquad (29.25)^*$$

2. *Проводник конечной длины* с током I создает на расстоянии r от себя в произвольной точке M поле с индукцией (рис. 29.8)

$$B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I}{r}\,(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2). \qquad (29.26)^*$$

3. *Круговой ток* (рис. 29.9) силой I на оси, проходящей через центр O круга перпендикулярно плоскости, в которой он расположен, создает поле с индукцией

$$dB_z = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\cos\theta,\ B = B_z = \frac{\mu_0\mu}{2}\frac{a^2I}{r^3}, \qquad (29.27)^*$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2\mathbf{p}_m}{r^2}, \qquad (29.28)^*$$

где $r^2 = a^2 + z^2$, a — радиус контура кругового тока, θ — угол между осью витка и вектором $d\mathbf{B}$, z — проекция на ось радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из элемента dl в точку на оси, dB_z — осевая составляющая поля $d\mathbf{B}$, $\mathbf{p}_m$ — магнитный момент кругового тока (29.7). Радиальная составляющая $dB_r = d\mathbf{B} - dB_z$ не дает вклада в поле $\mathbf{B}$.

4. *Цилиндрическая катушка* длиной L (соленоид), состоящая из N витков проволоки (круговых токов), образующих винтовую линию, в произвольной точке M, лежащей на ее оси, создает поле с индукцией (рис. 29.10)

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} nI (\cos\theta_1 - \cos\theta_2), \qquad (29.29)^*$$

где $n = N/L$ — число витков на единицу длины катушки, θ_1 и θ_2 — углы, под которыми из точки M видны концы катушки ($\theta_2 > \theta_1$).

Из (29.29) следует, что поле на оси соленоида бесконечной длины ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$) определяется формулой

$$B = \mu_0 \mu In. \qquad (29.30)^*$$

Поле соленоида показано на рис. 29.5. В точке, равноудаленной от краев соленоида, поле максимально:

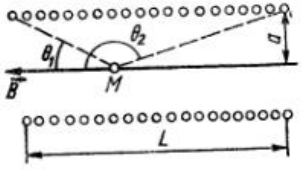


Рис. 29.10

$$B = \frac{\mu_0 \mu n I L}{\sqrt{4a^2 + L^2}}, \qquad (29.31)^*$$

где a — радиус витка с током. Поле на концах оси длинного соленоида ($\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$)

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} nI. \qquad (29.32)^*$$

5. *Кольцевая катушка* из проволоки (тороид), намотанная на сердечник в форме тора (рис. 29.11), создает поле, локализованное внутри ее объема, с индукцией

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{NI}{r}, \qquad (29.33)^*$$

где N — общее число витков тороида, r — расстояние от центра O до точки M внутри тора.

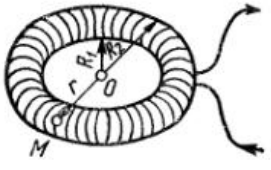


Рис. 29.11

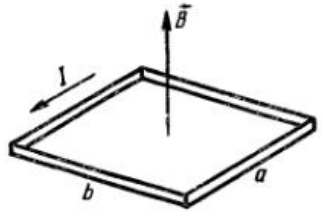


Рис. 29.12

Поле максимально при $r = R_2$ и минимально при $r = R_1$, где R_1 и R_2 — внешний и внутренний радиусы тора. Поле на осевой линии тороида имеет вид

$$B = \frac{NI}{2\pi R},$$

где $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

6. *Прямоугольный виток* с током I и сторонами a, b создает в центре поле с индукцией (рис. 29.12)

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{8I\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}. \qquad (29.34)^*$$

7. *Контур с током и магнитным моментом* $\mathbf{p}_m$ (29.7) на расстояниях r, значительно превышающих его размеры, создает поле с индукцией

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\,\mathbf{r} - \mathbf{p}_m r^2}{r^5}. \qquad (29.35)^*$$

Формула (29.35) аналогична формуле (25.23) для напряженности электрического поля E, создаваемого диполем с моментом $\mathbf{p}$. В теории магнетизма магнитный момент $\mathbf{p}_m$ играет такую же роль, как дипольный момент $\mathbf{p}$ в электростатике. Магнитный момент является элементарной характеристикой магнитных взаимодействий из-за отсутствия в природе свободных магнитных зарядов.

29.2.5. Действие магнитного поля на проводники с током. Законы Ампера (29.19) и Био — Савара — Лапласа (29.22) определяют особенности взаимодействия проводников, по которым течет постоянный ток.

1. Силы взаимодействия двух элементов тока (29.18) $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $I_2 d\mathbf{l}_2$, произвольно ориентированных один относительно другого, определяются формулами (Ампер, 1820)

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} (d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})), \qquad (29.36)^*$$

$$d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r_{21}^3} (d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})),$$

где $d\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на элемент dl_2 со стороны элемента dl_1, $\mathbf{r}_{12}$ — радиус-вектор, проведенный из dl_1 в dl_2, $d\mathbf{F}_{21}$ — сила, действующая на элемент dl_1 со стороны элемента dl_2, $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$. Формулы (29.36) следуют из формул (29.16).

Взаимодействие двух бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2, находящихся на расстоянии r один от другого, определяется соотношением

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{r} l, \qquad (29.37)^*$$

где l — участок проводника, на который действует сила F со стороны магнитного поля, создаваемого другим проводником. Формула (29.37) позволяет определить константу c, называемую фундаментальной электродинамической постоянной. Опыт показывает, что величина c совпадает со скоростью света в вакууме. Этот факт является подтверждением электромагнитной природы света.

2. Сила взаимодействия двух одинаковых квадратных контуров с токами I_1 и I_2, плоскости которых параллельны, а центры лежат на одной прямой (рис. 29.13), записывается в виде

$$F = \frac{2\mu_0 \mu}{\pi} I_1 I_2 \left[\frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1 \right], \qquad (29.38)^*$$

где a — сторона квадрата, d — расстояние между контурами. Контуры притягиваются при одинаковых направлениях токов (как на рис. 29.13) и отталкиваются в случае разных направлений токов.

3. Сила взаимодействия двух длинных соленоидов, находящихся на одной оси с расстоянием d между их ближними концами значительно большем радиусов соленоидов R_1 и R_2, $d \gg R_1$, $d \gg R_2$, определяется формулой

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{1}{d^2} I_2 n_2 S_2 I_1 n_1 S_1, \qquad (29.39)^*$$

где $S_1 = \pi R_1^2$, $S_2 = \pi R_2^2$, I_1 и I_2 — токи в соленоидах с числами витков на единицу их длины n_1 и n_2. Если токи в соленоидах текут в одном направлении, то они притягиваются, а если в противоположных, то отталкиваются.

4. Сила, действующая на замкнутый контур с током, определяется формулой (29.20) и для однородного магнитного поля с индукцией **B** равна нулю, так как

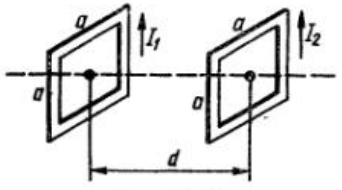


Рис. 29.13

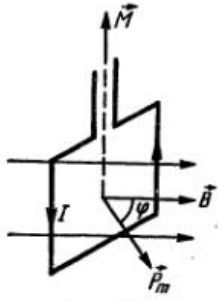


Рис. 29.14

в этом случае **B** можно вынести за знак интеграла, а $\oint d\mathbf{l} = 0$. Однако момент этой силы **M** не равен нулю и определяется формулой

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}, \quad M = p_m B \sin\varphi, \qquad (29.40)$$

где $\mathbf{p}_m$ — магнитный момент контура (29.7). Направление **M** показано на рис. 29.14. Под действием момента **M** контур поворачивается так, чтобы векторы $\mathbf{p}_m$ и **B** стали параллельными и одинаково направленными. Это соответствует положению устойчивого равновесия. Состояние, при котором векторы $\mathbf{p}_m$ и **B** направлены противоположно один другому, неустойчиво. Формула (29.40) применима и для неоднородного поля с индукцией B, если размеры контура малы и влиянием неоднородности поля на вращающий момент можно пренебречь. Формула (29.40) справедлива для соленоида, представляющего собой систему кольцевых токов. Его магнитный момент определяется формулой (29.7), где I — полный ток, текущий по боковым поверхностям соленоида, а S — площадь его поперечного сечения. Если шаг спирали мал, то $I = NI_b$, где N — число витков соленоида, I_b — ток, текущий по одному витку.

На виток с током, находящийся в неоднородном магнитном поле **B**, действует сила

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \nabla)\,\mathbf{B} = p_{m_x} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = (\mathbf{p}_m \operatorname{grad})\,\mathbf{B}, \qquad (29.41)$$

где p_{mx}, p_{my}, p_{mz} — проекции магнитного момента $\mathbf{p}_m$ на оси координат. Если векторы $\mathbf{p}_m$ и **B** параллельны, то виток с током будет втягиваться в область более сильного поля, а если $\mathbf{p}_m$ и **B** антипараллельны, то будет выталкиваться в область более слабого поля.

29.2.6. Механическая работа в магнитном поле. Магнитный поток. Так как на проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера [29.2.2], то при его перемещении совершается работа. В случае произвольного (поступательного или вращательного) движения проводника с током I в магнитном поле с индукцией **B** *элементарная работа* δA, совершаемая силами поля, определяется формулой

$$\delta A = I B_n dS = I d\Phi_m, \qquad (29.42)^*$$

где B_n — составляющая вектора **B**, перпендикулярная элементарной площадке dS, заметаемой проводником с током при его движении (рис. 29.15). Величина

$$d\Phi_m = B_n dS = B \cos\alpha\, dS = \mathbf{B} d\mathbf{S} \qquad (29.43)$$

называется *потоком вектора магнитной индукции* **B** сквозь площадку dS, α — угол между нормалью к площадке dS и направлением вектора магнитной индукции **B** (рис. 29.15) [25.3]. *Полный магнитный поток* Φ_m через всю поверхность S равен интегралу по этой поверхности

$$\Phi_m = \int_S B_n dS = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \qquad (29.44)$$

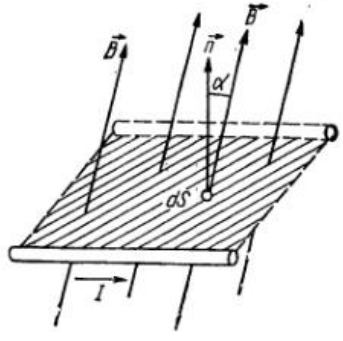


Рис. 29.15

В случае плоской поверхности с площадью S очевидно, что

$$\Phi_m = B_n S = BS \cos\alpha.$$

Магнитный поток Φ_m характеризуется величиной и знаком, зависящим от выбора отсчета угла α, т. е. направления нормали **n** к площадке S. За положительное направление нормали выбрано направление, показанное на рис. 29.15. Единицей магнитного потока Φ_m в СИ является вебер (Вб):

$$[\Phi_m] = \text{Вб}.$$

Вебер представляет собой магнитный поток поля с индукцией в 1 Тл (тесла), проходящего через площадку S в 1 м^2, перпендикулярную полю.

В гауссовой системе за единицу магнитного потока принят максвелл (Мкс):

$$1\ \text{Мкс} = 10^{-8}\ \text{Вб}. \qquad (29.45)$$

Работа, совершаемая силами Ампера *при перемещении проводника конечной длины* с постоянным током $I = \text{const}$, согласно (29.42) находится из соотношения

$$A = I\Phi_m, \qquad (29.46)^*$$

где Φ_m — магнитный поток через поверхность, которую заметает проводник при своем движении.

Работа замкнутого контура с $I = \text{const}$, совершаемая им при конечном перемещении в магнитном поле, имеет вид

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (29.47)^*$$

где Φ_1 и Φ_2 — магнитные потоки сквозь контур в начале и в конце перемещения.

Работа перемещения проводника с постоянным током *в магнитном поле* совершается за счет энергии, затрачиваемой источником тока. Формула (29.42) справедлива и для случая неоднородного магнитного поля, когда его неоднородностью в пределах элементарной площадки dS можно пренебречь. Если магнитный поток Φ_m выражен в веберах (Вб), а сила тока I в амперах (А), то работа A будет измеряться в джоулях (Дж).

29.3. Соленоидальность и вихревой характер магнитного поля

29.3.1. Теорема Гаусса для магнитных полей. Индукция магнитного поля **B**, создаваемого движущимся зарядом q, в заданной точке пространства определяется формулой (29.14). При этом магнитный поток Φ_m через некоторую поверхность S выражается интегралом (29.44).

Теорема Гаусса для магнитного поля: *магнитный поток через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю*:

$$\oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0 \qquad (29.48)$$

или *в дифференциальной форме*

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (29.49)$$

где $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ — вектор, равный по величине площади элементарной площадки dS и направленный вдоль вектора внешней нормали **n** к этой площадке; операция дивергенции определяется формулами (25.47) и (25.48), остальные обозначения, как в [25.3]. Сравнение формул (29.48), (29.49) с соответствующими формулами (25.43), (25.46) указывает на отсутствие в природе магнитных зарядов. Опыт показывает, что уравнения (29.48) и (29.49) справедливы не только для постоянных, но и для любых переменных магнитных полей. Они входят в фундаментальную систему уравнений Максвелла [31.2]. Векторные поля, дивергенция которых всюду обращается в нуль, называют *соленоидальными полями*. Магнитное поле есть поле соленоидальное. Его источником являются электрические токи.

На границе раздела двух магнетиков 1 и 2 [29.1.3] нормальные составляющие B_{1n} и B_{2n} вектора индукции **B** в этих средах непрерывны:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Это равенство дает граничное условие уравнений (29.48), (29.49).

29.3.2. Теорема о циркуляции магнитных полей. *Циркуляцией вектора индукции* **B** *магнитного поля* называется криволинейный интеграл по замкнутому контуру L:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{B}d\mathbf{s}, \qquad (29.50)$$

где $d\mathbf{s}$ — элементарное перемещение вдоль контура L [25.4.2].

Теорема о циркуляции: *циркуляция вектора индукции* **B** *магнитного поля постоянных токов равна сумме токов I, пронизывающих контур L циркуляции* (рис. 29.16):

$$\oint_L \mathbf{B}d\mathbf{s} = \mu_0 I. \qquad (29.51)^*$$

Так как

$$I = \int_S j_n dS = \int_S \mathbf{j}d\mathbf{S}, \qquad (29.52)$$

где S — любая поверхность, натянутая на контур; **j** — объемная плотность тока, то согласно теореме Стокса (25.59), записанной для вектора **B**, теорема о циркуляции (29.51) может быть преобразована к *дифференциальной форме*

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{B}, \qquad (29.53)^*$$

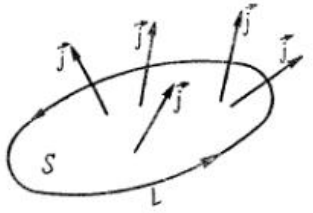


Рис. 29.16

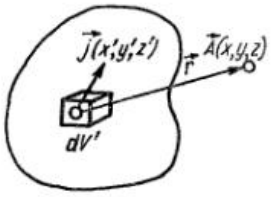


Рис. 29.17

эквивалентной (29.51), где операция ротора определена формулами (25.58), (25.60), а остальные обозначения такие, как в [25.4.2].

Векторные поля, ротор которых не равен нулю, называются *вихревыми полями*. Магнитное поле является вихревым там, где течет электрический ток, и безвихревым, где ток отсутствует.

Магнитную индукцию **B** можно представить в виде ротора векторной функции **A**:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad (29.54)$$

называемой *векторным потенциалом* (ср. с формулой (25.61) для электростатического поля **E**). Векторный потенциал **A** определен с точностью до градиента некоторого скалярного поля ψ:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi. \qquad (29.55)$$

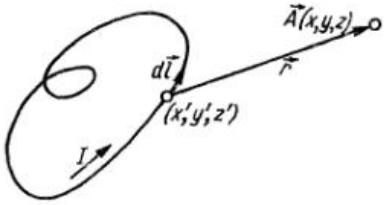


Рис. 29.18

Согласно тождеству $\operatorname{rot}(\nabla\psi) = \nabla \times \nabla\psi = 0$ векторные потенциалы **A** и **A'** приводят к одному и тому же полю **B**. В магнитостатике векторный потенциал выбирают так, чтобы

$$\operatorname{div}\mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \qquad (29.56)$$

Это условие называют *кулоновской калибровкой*. С учетом (29.56) уравнение (29.53) принимает вид *уравнения Пуассона* (25.82):

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}, \qquad (29.57)^*$$

где $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ — оператор Лапласа (62.18). Решение уравнения Пуассона (29.57) имеет вид

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(x', y', z')}{r}dV', \qquad (29.58)^*$$

где $\mathbf{j}(x', y', z')\,dV'$ — ток в объеме $dV' = dx'dy'dz'$, $r = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$ — расстояние от элемента объема dV' до точки (x, y, z), где измеряется векторный потенциал $\mathbf{A}$ (рис. 29.17). Интегрирование в (29.58) осуществляется по всем элементам тока $\mathbf{j}dV'$.

Формулы (29.58), (29.54) позволяют находить магнитную индукцию $\mathbf{B}$ по заданному распределению плотности тока $\mathbf{j}$ в каждой точке пространства.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ магнитного поля, создаваемого проводником, диаметр которого очень мал по сравнению с размерами всей системы, согласно (29.18) определяется формулой

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\mathbf{l}}{r}, \qquad (29.59)$$

где I — сила тока в проводнике, $d\mathbf{l}$ — вектор, модуль которого равен элементу длины в точке (x', y', z'), а направление совпадает с направлением течения тока I (рис. 29.18).

29.4. Сила Лоренца

29.4.1. Определение силы Лоренца. На элементарный заряд q, движущийся в электромагнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \qquad (29.60)^*$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля. Сила (29.60) называется *силой Лоренца*. Первое слагаемое силы Лоренца есть сила (24.2), действующая на заряд в электрическом поле, а второе — сила (29.2), которая действует на движущийся заряд в магнитном поле. Скорость $\mathbf{v}$ есть скорость заряда относительно магнитного поля $\mathbf{B}$.

В нерелятивистском приближении ($v \ll c$) сила $\mathbf{F}$ не зависит от выбора инерциальной системы отсчета. Так как второе слагаемое в (29.60) изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой, то для сохранения силы $\mathbf{F}$ неизменной необходимо потребовать, чтобы в разных системах отсчета первое слагаемое в (29.60) было различным. Отсюда следует принципиально важное утверждение: разделение полной силы $\mathbf{F}$ на электрическую и магнитную составляющие зависит от выбора системы отсчета; без указания системы отсчета такое разделение не имеет смысла.

Магнитная составляющая силы Лоренца перпендикулярна вектору скорости $\mathbf{v}$ заряда, поэтому не совершает работы.

29.4.2. Преобразование электромагнитного поля. Пусть электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{B}$ поля в некоторой системе отсчета S характеризуются компонентами E_x, E_y, E_z и B_x, B_y, B_z, а в системе отсчета S', движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси x относительно системы S — компонентами E'_x, E'_y, E'_z и B'_x, B'_y, B'_z. Тогда формулы преобразования полей при переходе от системы S к системе S' имеют вид

$$E'_x = E_x,\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z),\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y),$$
$$B'_x = B_x,\ B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2),\ B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2), \qquad (29.61)^*$$

где $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$, $\beta \equiv v/c$, c — скорость света в вакууме [6.2].

Значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в некоторой пространственно-временной точке в одной системе координат однозначно определяют компоненты поля, наблюдаемого в любой другой системе координат в той же пространственно-временной точке. Из (29.61) следует, что электрические и магнитные поля являются компонентами единого поля, называемого *электромагнитным*. Одно и то же поле, наблюдаемое в различных системах отсчета, будет характеризоваться различными наборами своих шести компонент. Из (29.61) следует, что если $\mathbf{B} = 0$ или $\mathbf{E} = 0$ в любой точке системы отсчета S, то в системе отсчета S' справедливы соотношения

$$\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}'\times\mathbf{E}');\ \mathbf{E} = 0,\ \mathbf{E}' = -(\mathbf{v}'\times\mathbf{B}'), \qquad (29.62)^*$$

где $\mathbf{v}'$ — скорость системы координат S, наблюдаемая из системы S'. В уравнения (29.62) входят величины, измеряемые в одной и той же системе отсчета S'.

30. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

30.1. Явление электромагнитной индукции

30.1.1. Закон электромагнитной индукции. Электрические токи создают вокруг себя магнитное поле [29]. Существует и обратный эффект: магнитное поле вызывает появление электрических токов. Это явление получило название *электромагнитной индукции*. Оно было открыто Фарадеем (1831).

Электрический ток возникает в проводнике при его движении в магнитном поле. Возбуждение тока объясняется действием силы Лоренца (29.60) на электрические заряды. Эта сила играет роль сторонней силы [26.2.2]. Поле сторонних сил создает ЭДС, называемую в данном случае ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$. Согласно Максвеллу

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \qquad (30.1)^*$$

где Φ_m — магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную проводящим контуром. Формула (30.1) выражает **основной закон электромагнитной индукции**: *ЭДС электромагнитной индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$, возбуждаемая в движущемся замкнутом проводнике, пропорциональна скорости приращения магнитного потока Φ_m, пронизывающего поверхность, ограниченную этим проводником.* Знак минус в (30.1) соответствует **закону (или правилу) Ленца** (1833): *индукционный ток всегда имеет такое направление, при котором его действие (через создаваемый им магнитный поток) противоположно действию причины, вызывающей этот ток.*

Сила тока I в движущемся в магнитном поле проводящем контуре, к которому подсоединен гальванический элемент с ЭДС $\mathscr{E}$ [26.2.3], определяется формулой

$$I = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_{\text{инд}}}{R}, \qquad (30.2)$$

где R — сопротивление контура. Опыт показывает, что $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ не зависит от $\mathscr{E}$. Формула (30.2) есть **закон сохранения энергии**: *работа гальванического элемента $\mathscr{E}Idt$ равна сумме джоулевой теплоты I^2Rdt и работы силы Ампера $Id\Phi_m$.*

Индукционные токи возникают и в неподвижных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Для возбуждения индукционного тока существенным является изменение магнитного потока

через контур проводника, но не способ, каким это изменение достигну то — движением контура в постоянном магнитном поле или изменением магнитного поля внутри неподвижного контура.

Согласно теории Максвелла причиной возникновения индукционного тока в проводнике является то, что всякое переменное магнитное поле **B** возбуждает в окружающей среде электрическое поле **E**. Индукция вектора напряженности **E** электрического поля по любому неподвижному замкнутому контуру L определяется формулой

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{s} = -\frac{\partial \Phi_m}{dt}, \qquad (30.3)^*$$

где Φ_m — магнитный поток сквозь контур L, или в дифференциальной форме

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (30.4)^*$$

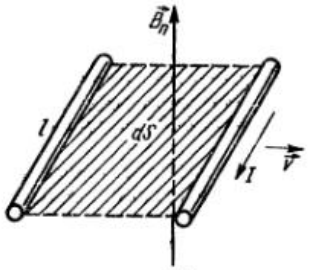


Рис. 30.1

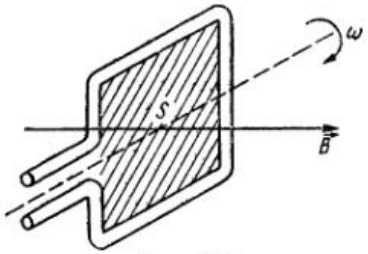


Рис. 30.2

где операция ротора определена формулами (25.58) и (25.60), а **B** — индукция магнитного поля. Выражения (30.3) и (30.4) являются эквивалентными (30.1) формулировками закона электромагнитной индукции. В таком виде они являются фундаментальными и входят в систему уравнений Максвелла [31.2] как основные, отражающие взаимосвязь электрического и магнитного полей. Следует отметить, что замкнутый контур L в (30.3) может быть проведен не только в проводнике, но и в диэлектрике. Согласно (30.3) электромагнитная индукция может наблюдаться не только в виде появления тока в замкнутом проводнике, но и в поляризации диэлектрика, в ускорении или замедлении движения электрических зарядов и частиц, в появлении электрического тока в незамкнутом проводнике и других явлениях. Индукционные токи, возникающие в массивных проводниках (например, в медной пластинке), называются *вихревыми токами* или *токами Фуко*. Вихревые токи образуют замкнутые цепи в толще проводника. Они приводят к потерям энергии в виде теплоты. Этот эффект используется в индукционных печах.

30.1.2. ЭДС электромагнитной индукции в простых системах.

1. Отрезок проводника длиной l движется со скоростью **v** в магнитном поле с индукцией **B** (рис. 30.1). Возникающая ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -vB_n l, \qquad (30.5)$$

где B_n — составляющая магнитной индукции, перпендикулярная площади dS, заметаемой проводником. При этом площадка dS и поток $d\Phi_m$ за время dt определяются формулами

$$dS = lvdt, \quad d\Phi_m = B_n lvdt.$$

2. Плоский виток вращается в однородном магнитном поле **B** с угловой скоростью ω (рис. 30.2). Ось вращения лежит в плоскости витка и перпендикулярна вектору магнитной индукции **B**. ЭДС индукции витка

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = BS\omega \sin \omega t - \frac{\partial \Phi_c}{\partial t}, \qquad (30.6)$$

где S — площадь, ограниченная витком, Φ_c — поток самоиндукции витка [30.2.1].

30.2. Явления самоиндукции и взаимной индукции

30.2.1. Самоиндукция. Во всех случаях, когда изменяется магнитный поток Φ_m через замкнутый контур, наблюдается явление электромагнитной индукции. Всякое изменение силы тока I в таком контуре

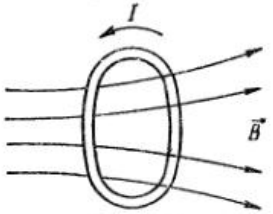


Рис. 30.3

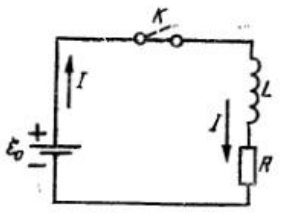


Рис. 30.4

приводит к возникновению в нем ЭДС индукции, которая в свою очередь вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление называют *самоиндукцией*.

Так как магнитный поток Φ_m (29.44) пропорционален индукции магнитного поля **B**, а **B** (29.24) пропорциональна току I, то

$$\Phi_m = LI, \qquad (30.7)^*$$

где коэффициент L не зависит от силы тока I и называется *индуктивностью контура*, ограничивающего поверхность, через который проходит поток Φ_m, или *коэффициентом самоиндукции* этого *контура* (рис. 30.3). Величина L зависит от размеров и конфигурации контура с током.

Единицей индуктивности L в СИ является генри (Гн), а в гауссовой системе — сантиметр (см):

$$[L] = \text{Гн}, \quad [L] = \text{см},$$
$$1\ \text{см} = 10^{-9}\ \text{Гн}.$$

Генри (Гн) есть индуктивность такого проводника, в котором при силе тока в 1 ампер (А) возбуждается магнитный поток в 1 вебер (Вб):

$$1\ \text{Гн} = 1\ \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = \frac{10^8\ \text{Мкс}}{\frac{1}{10}\ \text{СГСЭ}_I} = 10^9\ \text{см}.$$

Один сантиметр (см) есть индуктивность такого витка проводника, в котором ток силой в одну СГСМ-единицу (СГСЭ$_I$) создает магнитный поток в один максвелл (Мкс):

$$1\ \text{см} = 1\ \frac{\text{Мкс}}{\text{СГСЭ}_I} = \frac{10^{-8}\ \text{Вб}}{10\ \text{А}} = 10^{-9}\ \text{Гн}.$$

Основной закон электромагнитной индукции (30.1) с учетом (30.7) принимает вид

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -L\frac{dI}{dt} \qquad (30.8)^*$$

— ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в контуре. Формула (30.8) справедлива, если контур является жестким (не деформируемым) и находится в вакууме или среде, магнитные свойства которой не зависят от магнитного поля. В случае контура, находящегося в ферромагнитной среде, ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ определяется формулой

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{d}{dt}(LI). \qquad (30.9)$$

Согласно (30.7) индуктивность контура L равна потоку самоиндукции контура Φ_m при силе тока $I = 1$А (в СИ) или $I = c$ (в гауссовой системе). Индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению тока. По правилу Ленца индукционный ток противодействует изменению тока в цепи, он замедляет его увеличение или уменьшение.

30.2.2. Индуктивность простых систем.

1. Индуктивность соленоида длиной l, площадью поперечного сечения S и с общим числом витков N выражается формулой

$$L = k\mu_0\mu N^2 S/l,$$

где $k \simeq 1$ при $l \geqslant 10d$ (d — диаметр витков соленоида). При $l \simeq d$ или $l < d$ коэффициент $k < 1$ и определяется опытным путем. Например, при $l = 0{,}1d$ имеем $k = 0{,}2$ и $k = 0{,}6$ при $l = d$.

2. Индуктивность длинного коаксиального кабеля

$$L = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} l \ln\frac{b}{a},$$

где l — длина кабеля, b и a — радиусы внешнего и внутреннего цилиндров.

3. Индуктивность длинной двухпроводной линии

$$L = \frac{\mu_0\mu}{\pi} l \ln\frac{d}{a},$$

где l — длина линии, d — расстояние между осями проводов, a — радиус сечения проводов такой, что $a \ll d$.

30.2.3. Явления при замыкании и размыкании постоянного тока. На рис. 30.4 показан элементарный контур с индуктивностью L, сопротивлением R и источником тока с ЭДС $\mathscr{E}_0$. При замыкании ключа K ток в цепи не сразу достигает предельного значения $I_0 = \mathscr{E}_0/R$, а нарастает постепенно. Явления, происходящие при этом в цепи, описываются дифференциальным уравнением

$$\mathscr{E}_0 = L\frac{dI}{dt} + RI, \qquad (30.10)$$

где первое слагаемое в правой части есть ЭДС индукции, возникающая в цепи при подключении источника тока. Решение уравнения (30.10) имеет вид

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \qquad (30.11)$$

где $\tau = L/R$ — постоянная, имеющая размерность времени t. Она называется *временем установления тока*. Если L измеряется в генри (Гн), а сопротивление R в омах (Ом), то τ измеряется в секундах (с).

Процесс в контуре при размыкании ключа K описывается уравнением (30.10) с $\mathscr{E}_0 = 0$ и начальными условиями $I = I_0$ при $t = 0$. Это дает

$$I = I_0 e^{-t/\tau}. \qquad (30.12)$$

ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -L\frac{dI}{dt} = \frac{L}{\tau} I_0 e^{-t/\tau} = \frac{R}{r}\mathscr{E}_0 e^{-t/\tau}, \qquad (30.13)$$

где учтено, что внутреннее сопротивление источника тока мало и $I_0 = \mathscr{E}_0/r$, где r — сопротивление катушки с индуктивностью L. Если $R \gg r$, то $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ может значительно превзойти $\mathscr{E}_0$. В этом случае в цепи может произойти пробой зазора между контактами выключателя с появлением дугового разряда [27.2.6]. Это явление необходимо учитывать в электрических цепях, содержащих большие индуктивности. Для гашения дугового разряда применяется параллельное включение конденсатора в цепь.

30.2.4. Взаимная индукция. Явлением *взаимной индукции* называется наведение ЭДС индукции в одном проводнике под действием магнитного поля другого проводника, в котором течет переменный ток. Если I_2 — ток во втором проводнике, то наведенная ЭДС индукции $\mathscr{E}_{12}$ в первом проводнике определяется формулой

$$\mathscr{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{12}I_2), \qquad (30.14)^*$$

где величина L_{12} называется *коэффициентом взаимной индукции*, Φ_{12} — магнитный поток поля тока I_2 через поверхность, ограниченную контуром первого проводника:

$$\Phi_{12} = L_{12}I_2. \qquad (30.15)^*$$

Аналогично $\Phi_{21} = L_{21}I_1$, где I_1 — ток в первом контуре, Φ_{21} — поток через второй контур, L_{21} — взаимная индукция.

Согласно **теореме взаимности** *в неферромагнитных средах для любых двух контуров* $L_{12} = L_{21}$. Если среда ферромагнитная, то L_{12} и L_{21} зависят от характеров изменения токов I_2 и I_1 в контурах.

Если два витка (или две катушки), по которым текут токи I_1 и I_2, находятся вблизи один от другого в неферромагнитной среде, то магнитные потоки через эти витки Φ_1 и Φ_2 могут быть представлены в виде

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2, \quad \Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2, \qquad (30.16)$$

где L_{11} и L_{22} — индуктивности первого и второго контуров.

Пример. Взаимная индукция двух концентрических колец C_1 и C_2 с радиусами R_1 и R_2 при условии $R_1 \gg R_2$ (рис. 30.5) описывается выражением

$$L_{21} = 2\pi^2 \cdot 10^{-9} R_2^2/R_1, \qquad (30.17)$$

где L_{21} в генри, R_2, R_1 в метрах.

Формулы потока Φ_{21} сквозь малое кольцо C_2 и ЭДС $\mathscr{E}_{21}$, индуцированной в C_2, имеют вид

$$\Phi_{21} = \frac{2\pi^2 I_1 R_2^2}{10^9 R_1}, \quad \mathscr{E}_{21} = -\frac{2\pi^2 R_2^2}{10^9 R_1}\frac{dI_1}{dt}, \tag{30.18}$$

где I_1 — ток в кольце C_1, $\mathscr{E}_{21}$ выражена в вольтах, I_1 — в амперах.

Если контур C_1 состоит из N_1 витков, а C_2 из N_2 витков, то

$$L_{21} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1 N_2 R_2^2}{R_1}. \tag{30.19}$$

Явление взаимной индукции используется в трансформаторах [42.5] для повышения или понижения напряжения переменного тока.

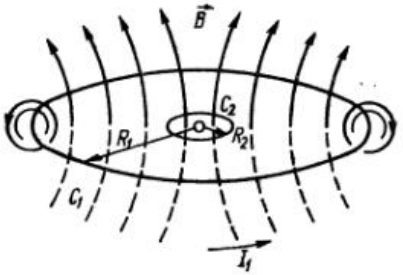


Рис. 30.5

Если N_1 и N_2 — число витков в первичной и вторичной обмотках трансформатора, а R_m — магнитное сопротивление сердечника, то взаимная индукция

$$L_{21} = \frac{N_1 N_2}{R_m}. \tag{30.20}$$

Если S — площадь поперечного сечения сердечника длиной l с магнитной проницаемостью μ, то

$$R_m = \int_0^l \frac{dl}{\mu_0 \mu S}. \tag{30.21}$$

Коэффициентом трансформации k называется отношение абсолютных значений напряжений U_2 и U_1 на концах вторичной и первичной обмоток. При холостом ходе

$$k = \left|\frac{U_2}{U_1}\right| = \frac{N_2}{N_1}. \tag{30.22}$$

30.3. Энергия магнитного поля

30.3.1. Магнитная энергия. *Магнитной энергией* U_m называется энергия, которой обладает электрический ток. Она зависит от величины токов, их распределения и магнитных свойств среды, в которой эта энергия запасена. Если среда является пара- или диамагнитной, то элементарная работа δA, совершаемая внешними силами (например, источником тока против ЭДС индукции) и определяемая формулой (29.42), идет на увеличение магнитной энергии U_m, так что приращение

$$dU_m = I d\Phi_m, \tag{30.23}*$$

а магнитная энергия U_m имеет вид

$$U_m = \int I d\Phi_m. \tag{30.24}*$$

Пример. Неподвижный проводник с самоиндукцией L, по которому течет ток силой I, обладает магнитной энергией

$$U_m = \frac{L}{2}(I^2) = \frac{I\Phi_m}{2} = \frac{\Phi_m^2}{2L}. \tag{30.25}$$

Энергия, запасенная в магнитном поле индуктивности, так же, как и энергия заряженного конденсатора, запасена в его электрическом поле.

Формулы (30.23) — (30.25) определяют магнитную энергию через токи и магнитные потоки. Это соответствует представлению о магнитной энергии как потенциальной энергии токов, взаимодействующих по закону Ампера [29.2.2] на расстоянии.

30.3.2. Объемная плотность магнитной энергии. Подобно представлению об энергии электростатического поля как энергии, заключенной в пространстве с объемной плотностью u_e (25.95) [25.5.3], магнитную энергию можно рассматривать как энергию, локализованную в пространстве с объемной плотностью

$$u_m = \int \mathbf{H}d\mathbf{B}. \tag{30.26}*$$

Полная магнитная энергия U_m равна сумме всех элементарных энергий $u_m dV$ в объеме V пространства, заполненного магнитным полем:

$$U_m = \int u_m dV. \tag{30.27}$$

В случае пара-и диамагнитных сред $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ имеем

$$u_m = \frac{1}{2}\mu_0 \mu H^2 = \frac{1}{2}\mathbf{HB} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}, \tag{30.28}*$$

где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ — индукция и напряженность магнитного поля в данной точке пространства.

Согласно (25.95) и (30.28) объемная плотность энергии электромагнитного поля u в рассматриваемой точке пространства описывается формулой

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \mu_0 \mu H^2) \tag{30.29}*$$

и определяется только характеристиками поля и среды.

Глава VIII

Элементы электродинамики сплошных сред

31. ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА

31.1. Феноменологический и макроскопический характер теории

Теория Максвелла (1860—1865) является обобщением основных законов электрических и магнитных явлений [VI, VII]. Она устанавливает глубокую внутреннюю связь между электрическими и магнитными полями и показывает, что всякое изменение магнитного поля всегда сопровождается возникновением электрического поля и наоборот. Существование электромагнитных волн является одним из главных предсказаний теории, подтвержденных опытным путем.

Теория Максвелла дает полную картину электромагнитного поля. Следует, однако, иметь в виду, что она является феноменологической и макроскопической. *Феноменологичность* теории состоит в том, что электрические и магнитные свойства среды описываются тремя параметрами: диэлектрической проницаемостью ε, магнитной проницаемостью μ и удельной электропроводностью λ (26.17), которые считаются заданными. Зависимость ε, μ и λ от свойств среды и физические процессы, вызывающие появление электрических и магнитных полей, теория Максвелла не рассматривает. *Макроскопический характер* теории состоит в том, что она применима к полям, создаваемым макроскопическими зарядами и токами, которые сосредоточены в объеме пространства, значительно большем объемов, занимаемых отдельными атомами и молекулами. При этом расстояние r от источника поля до рассматриваемой точки пространства значительно больше характерных линейных размеров d атомов и молекул: $r \gg d$. Характерные времена t изменений электромагнитного поля значительно превышают времена τ внутриатомных и внутримолекулярных процессов: $t \gg \tau$, т. е. в теории Максвелла электромагнитные поля мало изменяются на протяжении межатомных и межмолекулярных расстояний и за время порядка собственных периодов внутриатомных и внутримолекулярных колебаний.

Теория Максвелла оперирует с усредненными полями, которые создаются микроскопическими зарядами и токами. Усреднение проводится по интервалу времени $t \gg \tau$ для полей в макроскопическом объеме.

Теория Максвелла основана на представлении о поле как физической реальности и концепции близкодействия, при которой скорость распространения электрических и магнитных взаимодействий равна скорости света в рассматриваемой среде.

31.2. Уравнения Максвелла

31.2.1. Дифференциальная форма уравнений. *Уравнениями Максвелла в дифференциальной форме* называют следующую систему четырех уравнений в частных производных:

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{31.1}*$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{31.2}*$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho, \tag{31.3}*$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0, \tag{31.4}*$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\mathbf{D}$ — электрическое смещение, $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, ρ — объемная плотность свободных зарядов, $\mathbf{j}$ — плотность тока проводимости.

Уравнение (31.1) представляет собой закон индукции Фарадея (30.4) [30.1.1]. Уравнение (31.2) выражает зависимость магнитного поля от плотности *тока смещения*

$$\mathbf{j}_{см} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{31.5}*$$

и отражает тот факт, что всякое изменение электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля.

Переменное во времени электрическое поле $\mathbf{D}$ вызывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с плотностью $\mathbf{j}_{см}$ (31.5). Если в каком-либо проводнике имеется переменный ток, то внутри этого проводника существует переменное электрическое поле. Поэтому плотность полного тока $\mathbf{j}_{пол}$ внутри проводника определяется суммой токов проводимости $\mathbf{j}$ и смещения $\mathbf{j}_{см}$:

$$\mathbf{j}_{пол} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}. \tag{31.6}$$

Согласно (31.2) величина $\mathbf{j}_{пол}$ определяет величину магнитного поля $\mathbf{H}$. Введение понятия тока смещения необходимо для обеспечения совместимости уравнения непрерывности, выражающего закон сохранения электрического заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \tag{31.7}$$

с выражением, связывающим ток и магнитное поле $\mathbf{H}$.

Если $\mathbf{j}_{см}$ (31.5) в (31.2) положить равным нулю, то получим

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathrm{div}\mathbf{j} = 0,$$

что верно только для стационарных токов, $\partial\rho/\partial t = 0$. В общем случае

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{см}) = 0, \tag{31.8}$$

т. е. полный ток всегда соленоидален [29.3.1], — в природе все электрические токи замкнуты.

Уравнение (31.3) эквивалентно закону Кулона и представляет собой теорему Гаусса для электрических полей (25.46) [25.3]. Из уравнения (31.4) следует, что кроме токов нет других источников магнитного поля. Уравнение (31.4) есть теорема Гаусса для магнитных полей

(29.49) [29.3.1]. Если бы в природе существовали изолированные магнитные полюса (магнитные заряды), то из области пространства, где находился бы этот заряд, вытекал бы конечный поток магнитной индукции **B**. Существование магнитного заряда можно было бы обнаружить по многим характерным признакам: 1) поле магнитного заряда убывает с расстоянием r как r^{-2}; 2) на магнитный заряд, помещенный в однородное магнитное поле, действует некоторая сила; 3) сила, действующая на магнитный заряд, помещенный в соленоид, максимальна в центре катушки, а не на ее концах; 4) сила, действующая на неподвижный северный полюс, направлена не перпендикулярно полю, как в случае движущегося электрического заряда в магнитном поле, а параллельно. Поиски частиц-носителей магнитных зарядов, называемых *магнитными монополями Дирака*, пока не увенчались успехом. Даже если такие частицы будут обнаружены, это не изменит классической электродинамики и, в частности, уравнения (31.4), так как обычное вещество содержит только электрические заряды.

В пространстве, где нет свободных зарядов и токов, $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, согласно уравнениям (31.1), (31.2) возможно появление электромагнитных волн.

При решении конкретных задач электродинамики уравнения (31.1)—(31.4) следует дополнить материальными уравнениями, связывающими величины **D**, **E**, **H** и **B**, характеризующие электромагнитное поле, с величинами ε, μ, λ, описывающими электрические и магнитные свойства среды, где ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость, λ — удельная электропроводность.

В простейшем случае слабых электромагнитных полей и изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред *материальные уравнения* имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}. \tag{31.9}*$$

На границе раздела двух сред 1 и 2 должны выполняться граничные условия для нормальных (с индексом n) и касательных (с индексом t) составляющих векторов **D**, **E**, **B** и **H**:

$$\begin{gathered} D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma, \\ B_{n_1} = B_{n_2}, \\ E_{t_1} = E_{t_2}, \\ (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_2) = \mathbf{i}, \end{gathered} \tag{31.10}*$$

где σ — поверхностная плотность свободных зарядов, **i** — поверхностная плотность тока проводимости на рассматриваемой границе раздела, **n** — вектор нормали к границе раздела, проведенный из среды 2 в среду 1. Если $\mathbf{i} = 0$, то $H_{t_1} = H_{t_2}$.

При заданных начальных значениях **E** и **H** в момент времени $t = 0$ система уравнений Максвелла (31.1)—(31.4) имеет единственное решение. Эти уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца [29.4.2].

Уравнение непрерывности (31.7) является следствием уравнений (31.2) и (31.3). Принципиальный способ вывода материальных уравнений типа (31.9) дает молекулярная теория поляризации, намагничивания и электропроводности среды. Связь между величинами **E**, **B** и векторами поляризации **P** (25.36), намагничивания **I** (29.8) и плотностью тока **j** (26.6) устанавливается с помощью модельных представлений о среде и уравнений классической или квантовой механики с применением методов статистической физики.

31.2.2. Интегральная форма уравнений. *Уравнениями Максвелла в интегральной форме* называют следующую систему четырех соотношений:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \tag{31.11}*$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}, \tag{31.12}*$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \tag{31.13}*$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \tag{31.14}*$$

где S — поверхность, ограниченная контуром L, $d\mathbf{l}$ — элемент контура L, $d\mathbf{S}$ — элемент поверхности S, как в (29.48), остальные обозначения такие, как в формулах (31.1)—(31.4).

Уравнение (31.11) есть закон индукции Фарадея в интегральной форме (30.3) [30.1.1]. Уравнение (31.12) отражает положение Максвелла о магнитном поле тока смещения [31.2.1]. Уравнение (31.13) есть теорема Гаусса для потока электрического смещения (25.43) [25.3], а уравнение (31.14) — теорема Гаусса для магнитного потока через замкнутую поверхность S (29.48) [29.3.1].

Переход от интегральных уравнений (31.11)—(31.14) к дифференциальным (31.1)—(31.4) и наоборот осуществляется с помощью теорем Остроградского — Гаусса (25.51) [25.3] и Стокса (25.59) [25.4.2].

31.3. Решение уравнений Максвелла

Магнитную индукцию **B** удобно представить в виде ротора *векторного потенциала* **A** (29.54):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{31.15}$$

Тогда согласно закону Фарадея (31.1) напряженность электрического поля **E** может быть записана как

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{31.16}*$$

где φ — *скалярный потенциал*. Векторный **A** и скалярный φ потенциалы определены неоднозначно. Соотношения (31.15), (31.16) не изменятся, если вместо **A** и φ выбрать

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \psi, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{31.17}$$

где ψ — произвольная скалярная функция. Вместо условия (29.56), удобного в магнитостатике, в электродинамике используется *условие нормировки (калибровки) Лоренца*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{31.18}*$$

Подстановка в (31.18) вместо **A** и φ потенциалов **A′** и φ′ (31.17) приводит к уравнению для функции ψ:

$$\Delta\psi - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\operatorname{div}\mathbf{A} - \varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (31.19)^*$$

Если потенциалы **A** и φ не удовлетворяют калибровке Лоренца, то потенциалы **A′** и φ′ (31.17), где ψ есть решение уравнения (31.19), будут совместимы с этой калибровкой.

Векторный **A** и скалярный φ потенциалы удовлетворяют *уравнениям Даламбера*

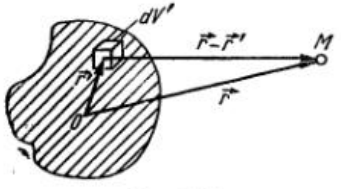


Рис. 31.1

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mu\mathbf{j}, \qquad (31.20)^*$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad (31.21)^*$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ — скорость распространения электромагнитных волн в рассматриваемой среде, ρ — объемная плотность свободных зарядов, **j** — плотность тока проводимости, Δ — оператор Лапласа (62.18). Решение уравнений (31.20) и (31.21) имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t \pm \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \qquad (31.22)^*$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\frac{\rho\left(\mathbf{r}', t \pm \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \qquad (31.23)^*$$

где интегрирование проводится по объему, в котором заданы распределения ρ и **j**, **r** — радиус-вектор точки, в которой в момент t рассматриваются потенциалы **A** и φ, **r′** — радиус-вектор расположения объема dV', $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ — расстояние от элемента dV' до точки наблюдения M (рис. 31.1). Знак плюс соответствует *опережающим*, а знак минус *запаздывающим потенциалам* **A** и φ. Эти потенциалы в точке **r** в момент времени t определяются величинами ρ и **j** в момент времени $t \pm |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v$. Запаздывающие потенциалы **A** и φ удовлетворяют **принципу причинности:** *причина (движение зарядов в точке* **r′***) предшествует следствию (появлению поля в точке* **r***) на время* $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v$, *необходимое для передачи сигнала со скоростью* v *(электромагнитной волны) из точки* **r′** *в* **r**. Если система способна излучить электромагнитные волны, то запаздывающие потенциалы **A** и φ на больших расстояниях r от системы будут иметь вид расходящихся сферических волн. Опережающие потенциалы **A** и φ описывают сходящиеся сферические волны, которые создаются каким-то источником, находящимся на бесконечности, но не заданной системой зарядов.

32. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

32.1. Закон сохранения энергии

Электромагнитные явления, как и любые другие процессы в природе, подчиняются **закону сохранения энергии.** Если в контуре имеется источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$, то *производимая им работа* $\mathscr{E}Idt$ *за время* dt *идет на совершение механической работы* δA *силами электромагнитного поля, увеличение энергий электрического* dU *и магнитного* dU_m *полей и на теплоту Джоуля — Ленца* RI^2dt:

$$\mathscr{E}Idt = \delta A + dU + dU_m + RI^2dt, \qquad (32.1)$$

где R — сопротивление контура, I — сила тока в нем [26.4.3].

Если среда, в которой возбуждается электромагнитное поле, неподвижна, то при прохождении через нее электрического тока плотностью **j** и изменении электромагнитного поля в единице объема совершается элементарная работа

$$\delta A' = \mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B} + \mathbf{j}\mathbf{E}dt, \qquad (32.2)^*$$

т. е. работа $\delta A'$ идет на приращение внутренней энергии поля за вычетом теплоты, выделяемой единицей объема среды вследствие ее теплопроводности. Отсюда следует **закон сохранения энергии электромагнитного поля** в *дифференциальной форме*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{j}\mathbf{E}, \qquad (32.3)$$

где u — объемная плотность энергии электромагнитного поля,

$$u = \int\mathbf{E}d\mathbf{D} + \int\mathbf{H}d\mathbf{B}, \qquad (32.4)^*$$

имеющая в случае пара- и диамагнитных сред простой вид (30.29), **γ** — плотность потока электромагнитной энергии,

$$\boldsymbol{\gamma} = u\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}, \qquad (32.5)^*$$

называемая *вектором Пойнтинга* (1884), **v** — скорость распространения энергии. В *интегральной форме* **закон сохранения энергии** имеет вид

$$-\frac{dW}{dt} = \oint_S\boldsymbol{\gamma}d\mathbf{S} - \int_V\mathbf{j}\mathbf{E}dV, \qquad (32.6)$$

где

$$W = \int_V udV \qquad (32.7)$$

— полная энергия электромагнитного поля в объеме V. В случае пара- или диамагнитных сред

$$W = \frac{1}{2}\int(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2)\,dV. \qquad (32.8)^*$$

Согласно (32.6) полная энергия W в отсутствие заряженных частиц ($\mathbf{j} = 0$) изменяется только за счет потока вектора Пойнтинга через поверхность S, охватывающую объем V. Первый интеграл справа

в уравнении (32.6) есть поток энергии через замкнутую поверхность S, а второй описывает работу электрических сил над заряженными частицами. Работа электрических сил над частицами уменьшает энергию поля и поэтому входит в уравнение (32.6) со знаком минус. Магнитные силы не производят работы [33], а только изменяют направление движения частиц. Формально энергия поля течет в пространстве подобно жидкости, плотность потока которой равна $\boldsymbol{\gamma}$ (32.5).

32.2. Закон сохранения импульса. Масса электромагнитного поля

Электромагнитное поле характеризуется импульсом. Это подтверждается наличием *давления электромагнитной волны* [43.2.5]. *Плотностью потока импульса* $\mathbf{g}$ *для электромагнитного поля* в вакууме называют величину

$$\mathbf{g} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{c^2} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}), \qquad (32.9)^*$$

где $\boldsymbol{\gamma} = u\mathbf{v}$ — плотность потока электромагнитной энергии (32.5), u — плотность электромагнитной энергии, $\mathbf{v}$ — скорость ее распространения. Полный импульс поля $\mathbf{G}$ в объеме V определяется формулой

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g}\,dV = \int_V \frac{\boldsymbol{\gamma}}{c^2}\,dV. \qquad (32.10)$$

Этот результат позволяет обобщить законы механики Ньютона на электромагнитные явления.

Закон сохранения импульса электромагнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = -(\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m) + \oint_S \mathbf{F}_{вн}\,dS, \qquad (32.11)$$

где $\mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F}_m$ — силы, действующие на заряды и токи, находящиеся в объеме V, а интеграл есть импульс, передаваемый за единицу времени через замкнутую поверхность S, охватывающую объем V, $\mathbf{F}_{вн}$ — сила, действующая извне на единицу поверхности вдоль внешней нормали к ней.

Если в объеме V присутствуют заряженные частицы, то выполняется закон сохранения полного импульса системы. В случае, когда частицы при своем движении не пересекают границу объема, этот закон может быть представлен в форме

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P} + \mathbf{G}) = \int_V \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \rho\mathbf{E} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})\right] dV, \qquad (32.12)$$

где $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ — полный импульс частиц, находящихся в объеме V; ρ и $\mathbf{j}$ — объемные плотности зарядов и тока проводимости. Очевидно, что в данном случае

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int_V [\rho\mathbf{E} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})]\,dV, \qquad (32.13)$$

где правая часть равна полной силе, действующей на заряженные частицы в объеме V.

Импульс какого-либо движущегося тела есть произведение его массы на скорость [6.3.1]. Так как электромагнитное поле имеет импульс и распространяется с конечной скоростью, то ему присуща вполне определенная масса. Из определения плотности потока импульса $\mathbf{g}$ (32.9) следует, что в вакууме ($v = c$) $g = uc = c^3\rho$ и

$$u = \rho c^2, \qquad (32.14)$$

где u — плотность электромагнитной энергии, ρ — масса единицы объема (плотность электромагнитного поля). Откуда для полной энергии поля W (32.7) в объеме V следует соотношение

$$W = Mc^2, \qquad (32.15)$$

где M — *масса поля*, c — скорость света в вакууме, совпадающее по форме с полной или релятивистской энергией свободной частицы (6.20). Так как скорость света c велика, то даже значительной энергии поля W соответствует малая масса поля. Пусть источник электромагнитных волн [43] излучает мощность $P = 5 \cdot 10^5$ Вт в течение времени $t = 1$ ч $= 3600$ с. Тогда электромагнитное поле будет иметь энергию $W = Pt = 18 \cdot 10^8$ Дж и массу $M = 2 \cdot 10^{-8}$ кг.

32.3. Границы применимости классической электродинамики

Границы применимости классической электродинамики можно установить, рассмотрев изменение массы движущейся частицы, имеющей электрический заряд. При движении в пространстве такая частица создает вокруг себя электромагнитное поле [44]. Так как это поле обладает определенным импульсом (и массой) [32.2], то полный импульс движущейся заряженной частицы и ее масса будут больше, чем в случае движения такой же, но незаряженной частицы. Эта дополнительная масса, связанная с электромагнитным полем, называется *электромагнитной массой частицы*.

Из второго закона Ньютона [6.3.5] и соотношения (32.15) имеем

$$d(Mv) = Fdt = \frac{dW}{v} = \frac{c^2}{v}\,dM, \qquad (32.16)$$

откуда следует дифференциальное уравнение для определения электромагнитной массы M заряженной частицы, движущейся со скоростью v:

$$\frac{dM}{M} = \frac{d(v^2/c^2)}{2(1 - v^2/c^2)}. \qquad (32.17)$$

Его решение дается формулой

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (32.18)$$

где M_0 — электромагнитная масса покоящейся частицы.

Пусть заряженная частица является электроном. Предположим, что вся масса электрона имеет электромагнитную природу. Тогда $m_0 = M_0$, где m_0 — масса покоя электрона. Рассматривая электрон в вакууме как шарик с радиусом a и зарядом e, распределенным рав-

номерно по поверхности, находим полную энергию W электрического поля, созданного такой частицей:

$$W = \int_V u dV = \int_a^\infty \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \int_a^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \quad (32.19)$$

(см. формулу (25.93)). Если W есть собственная энергия электрона: $W = m_0 c^2$, то

$$m_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 a}. \quad (32.20)^*$$

Отсюда для величины $r_0 = 2a$, называемой *классическим радиусом электрона*, имеем выражение

$$r_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{m_0 c^2}. \quad (32.21)^*$$

Так как $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $\varepsilon_0 = (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)^{-1}$ Ф/м, то

$$r_0 = 2{,}82 \cdot 10^{-15} \text{ м} \sim 10^{-13} \text{ см} = 1 \text{ фм}. \quad (32.22)$$

Классический радиус электрона определяет минимальное расстояние $r_{min} = r_0$, при котором еще применима классическая электродинамика. При $r < r_0$ классическая электродинамика несправедлива в принципе. Максимальная напряженность электрического поля $E = E_{max}$, при которой законы классической электродинамики еще справедливы, определяется формулой

$$E_{max} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} = 1{,}8 \cdot 10^{20} \frac{\text{В}}{\text{м}} \simeq 10^{20} \frac{\text{В}}{\text{м}}. \quad (32.23)$$

Оценки (32.22) и (32.23) границ применимости классической электродинамики не учитывают квантовые эффекты, которые возникают при движении заряженных частиц при больших энергиях. Учет этих эффектов приводит к увеличению r_{min} и уменьшению E_{max} так, что по порядку величины $r_{min} \sim 10^{-13}$ м $= 10^2$ фм, а $E_{max} \sim 10^{18}$ В/м.

Величина r_0 (32.21) получена в предположении, что вся собственная масса электрона m_0 имеет электромагнитную природу. Последнее утверждение является чисто теоретическим. Поэтому величину r_0 нельзя отождествлять с размерами электрона.

33. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

33.1. Уравнение движения точечной заряженной частицы

Характер движения заряженных частиц в электромагнитных полях позволяет судить о закономерностях и свойствах этих полей, а также о распределении зарядов и токов в пространстве. Исследование движения заряженных частиц является существенным для инженерной практики и теоретического изучения строения вещества на атомарном и молекулярном уровнях.

На заряженную частицу, размерами которой можно пренебречь при ее движении в электромагнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$ (много меньшей скорости света в вакууме), действует сила Лоренца (29.60). Формула (29.60) справедлива, если частица не имеет собственного магнитного момента [67.4.2] и движется с небольшим ускорением, при котором можно пренебречь силой лучистого трения. Согласно второму закону Ньютона [3.3] движение такой точечной нерелятивистской частицы в электромагнитном поле описывается уравнением

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -e\mathbf{E} - e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (33.1)^*$$

где $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс частицы с зарядом $q = -e$, m — ее масса, $\mathbf{v}$ — скорость, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — напряженность электрического и индукция магнитного полей.

Из уравнения движения (33.1) следует, что:

1) изменение кинетической энергии обусловлено действием на заряженную частицу только электрического поля

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -e \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (33.2)$$

где v_1, v_2 — скорости частицы в точках 1 и 2 траектории, вдоль которой берется интеграл, $d\mathbf{l}$ — элемент траектории. Магнитная составляющая силы Лоренца перпендикулярна скорости $\mathbf{v}$ и никакой работы не производит;

2) если электрическое и магнитное поля стационарные или квазистационарные, то

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \ \varphi = \varphi(x, y, z), \quad (33.3)$$

где φ — скалярный потенциал электрического поля, и

$$\frac{mv^2}{2} - e\varphi = \text{const} \quad (33.4)$$

— сумма потенциальной ($-e\varphi$) и кинетической ($mv^2/2$) энергий заряженной частицы при ее движении в стационарных электромагнитных полях остается постоянной.

Пусть v_1, φ_1 и v_2, φ_2 — скорость и потенциал в точках 1 и 2 траектории. Тогда при $v_1 = 0$, $v_2 = v$ и $U = \varphi_2 - \varphi_1$ из (33.4) следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \quad v = \sqrt{2eU/m} \quad (33.5)$$

— кинетическая энергия заряженной частицы определяется пройденной разностью потенциалов U. Так как заряд каждой частицы кратен заряду электрона, то энергию частицы удобно выражать в электронвольтах (25.65).

33.2. Заряженная частица в электростатическом поле

33.2.1. Электрон в продольном однородном электростатическом поле. Пусть направление движения электрона совпадает с направлением напряженности $\mathbf{E}$ однородного электрического поля. Тогда, выбирая

направление движения электрона за направление оси x, в момент времени $t = 0$ в точке $x = y = z = 0$, получаем $E_x = E$, $E_y = E_z = 0$, $\mathbf{B} = 0$, $v_x = v_0$, $v_y = v_z = 0$. Уравнение движения в этом случае является одномерным:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE. \tag{33.6}$$

Его решение имеет вид

$$x(t) = v_0 t - \frac{e}{2m}Et, \quad v_x(t) = v_0 - \frac{e}{m}Et,$$
$$y(t) = z(t) = 0, \qquad v_y(t) = v_z(t) = 0. \tag{33.7}$$

Согласно (33.7) заряженная частица будет двигаться либо равноускоренно, либо равнозамедленно в зависимости от направления вектора $\mathbf{E}$.

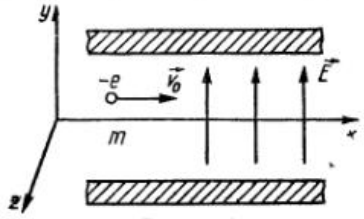


Рис. 33.1

33.2.2. Электрон в поперечном однородном электростатическом поле. Пусть в момент времени $t = 0$ скорость электрона $\mathbf{v}_0$ перпендикулярна вектору напряженности $\mathbf{E}$ (рис. 33.1). Тогда в системе координат, показанной на рис. 33.1, уравнение движения (33.1) в $\mathbf{B} = 0$ эквивалентно трем уравнениям

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -eE, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0, \tag{33.8}$$

решение которых с учетом начальных условий имеет вид

$$v_x(t) = v_0, \qquad v_y(t) = -\frac{e}{m}Et, \qquad v_z(t) = 0,$$
$$x(t) = v_0 t, \qquad y(t) = -\frac{e}{2m}Et^2, \qquad z(t) = 0. \tag{33.9}$$

Траектория электрона описывается параболой

$$y(t) = -\frac{e}{2m}E\frac{x^2}{v_0^2}. \tag{33.10}$$

Движение заряженной частицы в поперечном однородном электростатическом поле аналогично движению материальной точки в поле силы тяжести [2.3.5]. Траектория частиц зависит от v_0 и e/m. Поэтому действие электростатического поля на движущуюся частицу аналогично действию призмы на световой луч. Это свойство используется в электронных устройствах для отклонения электронных пучков.

33.2.3. Аксиально-симметричное электрическое поле. *Аксиально-симметричным электрическим полем* называется поле, которое удовлетворяет условию

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \neq 0, \qquad E_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0, \qquad E_\varphi = 0, \tag{33.11}$$

где U — скалярный потенциал электрического поля, E_r, E_z, E_φ — координаты вектора напряженности $\mathbf{E}$ в цилиндрической системе (2.3),

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad z = z, \tag{33.12}$$

x, y, z — координаты точки в декартовой системе (2.1). Уравнение движения электрона в таком поле имеет вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -eE_r, \; m\ddot{z} = -eE_z, \; m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{33.13}$$

Из последнего равенства следует, что электрон будет все время двигаться в одной плоскости $\varphi(t) = 0$, $\dot{\varphi}(t) = 0$.

Пусть электроны движутся на небольшом расстоянии от оси z и под малыми углами к ней так, что можно считать их скорость $v \approx v_z$, где v_z — скорость вдоль оси z. Пучки таких электронов называют *параксиальными*. Уравнение движения для таких пучков следует из (33.13) и имеет вид

$$U\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{1}{2}U'\frac{dr}{dz} + \frac{r}{4}U'' = 0, \tag{33.14}$$

где $U' = \partial U/\partial z$, $U'' = \partial^2 U/\partial z^2$. Его называют *основным уравнением электронной оптики для параксиальных пучков*. Оно задает траекторию движения частиц $r = r(z)$. Уравнение может быть решено, если задан потенциал $U(r, z) \simeq U(0, z) = U(z) = U$.

Из уравнения (33.14) следует, что:

1) частицы с различными массами m и зарядами e движутся в аксиально-симметричном поле по одинаковым траекториям, если для всех этих частиц потенциал $U(z)$ имеет одно и то же значение. Скорости движения частиц v будут разными, зависящими от e/m согласно (33.5);

2) пропорциональное изменение потенциалов с $U(z)$ на $kU(z)$, где k — постоянная, не изменяет траектории движения заряженных частиц, т. е. уравнение траектории (33.14) однородно относительно потенциала $U(z)$;

3) уравнение траектории (33.14) однородно относительно r и z. Оно не изменяется при заменах r или z на kr или kz, где k — постоянная.

Уравнение (33.14) решают путем численного интегрирования. Оно является основой расчета тонких электронных линз. Если линейные размеры области, где сосредоточено электростатическое поле, много меньше расстояний a и b от центра этой области до источника электронов и его изображения, то решение уравнения (33.14) приводит к равенству

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad \frac{1}{f} = \frac{1}{4\sqrt{U_0}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,dz, \tag{33.15}$$

где f — фокусное расстояние, U_0 — потенциал поля вне линзы, который считается постоянным; $E = 0$. Формула (33.15) совпадает с формулой (47.20) для оптически тонкой линзы. Величину $1/f$ называют *оптической силой электронной линзы*.

33.3. Заряженная частица в магнитном поле

33.3.1. Движение частицы в постоянном однородном магнитном поле. Движение нерелятивистской частицы с массой m и зарядом q в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ описывается уравнением

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{33.16}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость частицы. Из него следует, что если $\mathbf{B}$ не зависит от времени: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$, то

$$\frac{mv^2(t)}{2} = \text{const} \tag{33.17}$$

— кинетическая энергия частицы в магнитном поле не изменяется. Магнитное поле, постоянное во времени, не совершает работы. Это связано с тем, что сила, действующая на частицу со стороны поля, всегда перпендикулярна скорости ее движения.

Если поле $\mathbf{B}$ постоянно и однородно ($\mathbf{B} = \text{const}$), то уравнение (33.16) эквивалентно двум уравнениям

$$m\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q(\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{B}), \quad m\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = q(\mathbf{v}_\parallel\times\mathbf{B}), \tag{33.18}$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp$, $\mathbf{v}_\parallel$ и $\mathbf{v}_\perp$ — составляющие скорости $\mathbf{v}$, параллельные и перпендикулярные полю $\mathbf{B}$, $(\mathbf{v}_\parallel\times\mathbf{B}) = 0$. В этом случае

$$\mathbf{v}_\parallel = \text{const}, \quad \frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = 0, \quad v_\perp^2 = \text{const}. \tag{33.19}$$

Ускорение частицы $d\mathbf{v}_\perp/dt$ постоянно по абсолютной величине и все время направлено перпендикулярно составляющей $\mathbf{v}_\perp$ скорости $\mathbf{v}$. Это означает, что частица движется по окружности равномерно с линейной скоростью $\mathbf{v}_\perp$. Радиус этой окружности

$$R = \frac{mv_\perp}{qB}. \tag{33.20}*$$

Величина R называется *ларморовым радиусом*, а сама окружность — *ларморовой окружностью* (Лармор, 1895). Угловая частота ω вращения частицы по этой окружности определяется формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v_\perp}{R} = \frac{qB}{m} \tag{33.21}*$$

и не зависит от скорости частицы $v_\perp$. Траектория движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле показана на рис. 33.2. Частица описывает винтовую линию с постоянным шагом $l = v_\parallel T$, постоянным радиусом R, постоянной угловой скоростью ω и постоянной по величине скоростью v. Величина ω (33.21) называется *ларморовой* или *циклотронной частотой*.

Если $\mathbf{v} \parallel \mathbf{B}$, то $\mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v}$ и частица движется вдоль поля, которое не оказывает на нее никакого влияния. Если $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$, то $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_\parallel = 0$ и частица движется перпендикулярно полю, вращаясь вокруг силовой линии с линейной скоростью $v_\perp$ по окружности радиусом R (33.20).

Однородное магнитное поле обладает фокусирующим действием как по отношению к пучкам заряженных частиц, лежащим в плоскости, перпендикулярной полю, так и по отношению к пучкам, образующим малый угол α с направлением силовой линии (рис. 33.3). Любая частица спустя время T после выхода из точки O под малым углом α вновь пересечет силовую линию, проходящую через эту точку (ось x, точка x_0 на рис. 33.3). Расстояние l, на которое она продвинется вдоль оси (шаг винтовой линии):

$$l = v_\parallel T = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\alpha \simeq 2\pi\frac{m}{qB}v\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right) \tag{33.22}$$

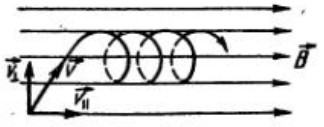


Рис. 33.2

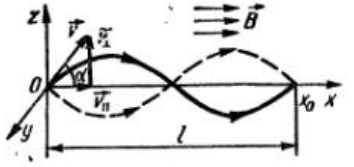


Рис. 33.3

— если из одной точки выходит под небольшим углом α расходящийся пучок заряженных частиц, то все частицы снова соберутся вместе в узком отрезке вблизи значения l при $\alpha = 0$ (эффект фокусировки).

Фокусирующее действие продольного магнитного поля используется для получения электронно-оптического изображения. Если в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, расположить объект,

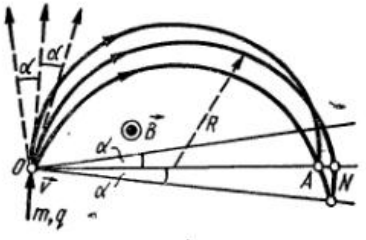


Рис. 33.4

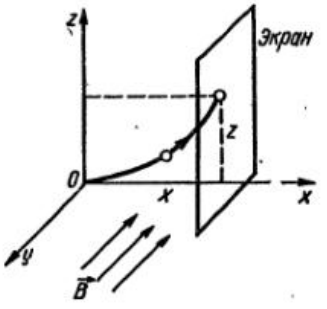


Рис. 33.5

каждая точка которого представляет собой источник монохроматических электронов с малой угловой расходимостью, то на расстоянии l (33.22) будет получено действительное прямое изображение объекта с увеличением, равным единице.

Эффект фокусировки наблюдается и в поперечном магнитном поле (рис. 33.4, поле $\mathbf{B}$ перпендикулярно плоскости рисунка).

Если расходимость пучка заряженных частиц, вылетающих в точке O перпендикулярно полю $\mathbf{B}$, мала, т. е. угол α мал, то ширина фокуса $\Delta = AN$ после поворота пучка в поле на 180° определяется формулой

$$\Delta = 4R\sin^2\frac{\alpha}{2} \simeq R\alpha^2, \tag{33.23}$$

где $R = ON/2$ — радиус окружности, по которой движется частица.

Фокусирующее действие поперечного однородного магнитного поля широко используется в масс-спектроскопии и в электромагнитном разделении изотопов. Согласно уравнению движения (33.16) частицы в таком поле имеем

$$z = \frac{qBx^2}{2mv}, \qquad (33.24)^*$$

где q, m — заряд и масса частицы, v — ее скорость, z — расстояние, пройденное вдоль оси z, x — расстояние, пройденное вдоль оси x (рис. 33.5). Величина z зависит от отношения q/m и от v (энергии частиц).

33.3.2. Аксиально-симметричное магнитное поле. Пример аксиально-симметричного магнитного поля $\mathbf{B}$ показан на рис. 33.6. Такое поле подобно аксиально-симметричному электростатическому полю

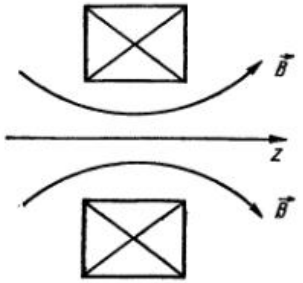


Рис. 33.6

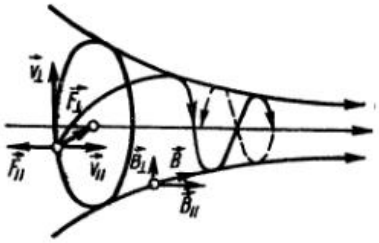


Рис. 33.7

[33.2.3] производит фокусирующее действие на параксиальный пучок электронов. Уравнение движения (33.16) в этом случае в цилиндрических координатах (33.12) имеет вид

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -e(v_\varphi B_z - v_z B_\varphi) = -er\dot{\varphi}B_z, \\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= -re(v_z B_r - v_r B_z), \\ m\ddot{z} &= -e(v_r B_\varphi - v_\varphi B_r) = er\dot{\varphi}B_r, \end{aligned} \qquad (33.25)$$

где $q = -e$ — заряд электрона, m — его масса, v_r, v_φ, v_z, B_r, B_φ, B_z — составляющие векторов скорости $\mathbf{v}$ и индукции $\mathbf{B}$. Отсюда следует, что

$$mr^2\dot{\varphi} = \frac{e}{2}r^2B_z + \text{const}. \qquad (33.26)$$

Если до входа в поле B электрон не совершал вращательного движения, то

$$\dot{\varphi} = \frac{eB}{2m}, \qquad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{e}{2mv}\int_{z_1}^{z_2} B_z dz, \qquad (33.27)$$

где $\dot{\varphi}$ — угловая скорость, а $\Delta\varphi$ — угол поворота параксиального пучка электронов при его движении от точки z_1 до точки z_2 в магнитном поле. При выводе формул (33.27) использовалось условие параксиальности пучка

$$B_z(r, z) \simeq B_z(0, z) = B_z(z) = B_z, \quad v \simeq v_z, \quad v_r = \dot{r} = 0. \qquad (33.28)$$

Уравнение траектории $r = r(z)$ пучка частиц имеет вид

$$\frac{d^2r}{dz^2} + \frac{eB_z^2}{8mU}r = 0, \qquad (33.29)$$

где U — разность потенциалов, которая сообщила пучку электронов начальную скорость $\mathbf{v}$. Это уравнение описывает движение частицы пучка электронов в плоскости, которая вращается относительно оси z с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ (33.27). Соотношение (33.29) называется *основным уравнением магнитной оптики* или *уравнением магнитной линзы*. Оно содержит величину e/m. Поэтому в одном и том же магнитном поле частицы с разными значениями e/m будут обладать различными траекториями.

33.3.3. Медленно изменяющееся магнитное поле. Под медленно изменяющимся магнитным полем понимают поле, удовлетворяющее условию

$$R\frac{|\nabla B|}{B} \ll 1 \qquad (33.30)$$

— радиус кривизны траектории R должен быть мал по сравнению с размерами области, в пределах которой вектор напряженности $\mathbf{B}$ заметно изменяется по величине или направлению. На небольших участках пути в таком поле траектория частицы представляет собой винтовую линию. Однако одновременно с изменением величины $\mathbf{B}$ будет изменяться радиус и шаг винтовой линии (рис. 33.7). Действительно, в данном случае силовые линии $\mathbf{B}$ не параллельны между собой. У поля $\mathbf{B}$ есть продольная $\mathbf{B}_\parallel$ и поперечная $\mathbf{B}_\perp$ составляющие. При движении заряженной частицы вследствие взаимодействия ее составляющей скорости $\mathbf{v}_\perp$ с $\mathbf{B}_\perp$ возникает составляющая $\mathbf{F}_\parallel$ силы Лоренца, направленная перпендикулярно плоскости ларморовой окружности. Составляющая $\mathbf{F}_\parallel$ направлена вдоль поля и изменяет величину продольной скорости $\mathbf{v}_\parallel$ и, следовательно, шаг винтовой линии l (33.22). Кроме того, так как $v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2 = \text{const}$, то будет изменяться $\mathbf{v}_\perp$, а с ней и радиус витков траектории согласно (33.20). Подходя к области более сильного магнитного поля, винтовая линия будет сжиматься, а в области более слабого поля — растягиваться. Если начальная скорость частицы составляет не слишком малый угол с направлением силовых линий, то в области сильного поля может произойти отражение частицы от этой области (штриховая кривая на рис. 33.7).

В медленно изменяющемся во времени и пространстве магнитном поле *магнитный момент* μ вращающейся заряженной частицы сохраняется:

$$\mu = IS = \frac{e\omega}{2\pi}\pi R^2 = \frac{ev_\perp R}{2} = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{W_\perp}{B} = \text{const}, \qquad (33.31)^*$$

где $I = e/T = e\omega/2\pi$ — круговой ток, $\omega = \frac{eB}{m}$ — циклотронная частота, T — период вращения заряда, $W_\perp = mv_\perp^2/2$ — кинетическая

энергия вращательного движения частицы, $R = mv_\perp/eB$ — ларморовый радиус, $S = \pi R^2$ — площадь контура, обтекаемого током I. Условие (33.31) выполняется, если

$$\frac{T}{B}\left|\frac{dB}{dt}\right| \ll 1. \qquad (33.32)$$

Это значит, что магнитный момент μ является не точным, а адиабатическим инвариантом движения. Если поле **B** сильно изменяется за время одного оборота T, то μ изменяется со временем.

33.4. Заряженная частица во внешних полях

33.4.1. Дрейф. Движение заряженной частицы в силовых внешних полях может быть разложено на три составляющие: 1) циклотронное вращение вокруг силовой линии; 2) движение вдоль направления силовой линии; 3) перемещение ларморовой окружности перпендикулярно полю, называемое *дрейфом*. Пусть в пространстве существует однородное магнитное поле **B**, направленное вдоль оси y (рис. 33.8), и внешняя сила **F** другой природы, направленная перпендикулярно полю B вдоль оси z. Если положительно заряженная частица влетает в область поля с начальной скоростью, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля, то на одном полупериоде ее движения по ларморовой окружности радиусом R (33.20) сила **F**, действующая в направлении движения, будет ускорять частицу, а в другом полупериоде,

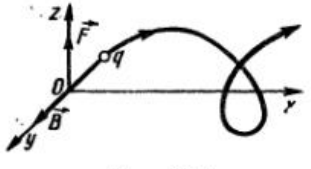


Рис. 33.8

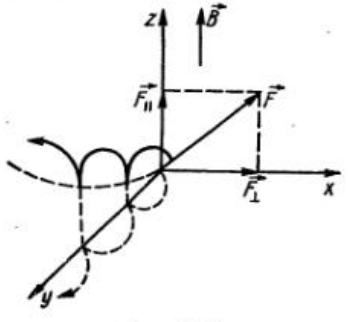


Рис. 33.9

действуя против вращения, тормозить. Скорость будет наибольшей вверху ларморовой окружности и наименьшей внизу. В результате ее радиус в верхней половине траектории будет больше, чем в нижней. Ларморовая окружность под действием силы **F** начнет смещаться с постоянной скоростью $\mathbf{v}_d$ в направлении, перпендикулярном как магнитному полю **B**, так и внешней силе **F**:

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{q}(\mathbf{F}\times\mathbf{B})/B^2, \qquad (33.33)^*$$

где q — заряд частицы. Если сила **F** не перпендикулярна полю **B**, то движение частицы более сложное (рис. 33.9). Оно состоит из трех движений: 1) равноускоренного движения вдоль магнитных силовых линий под действием силы $\mathbf{F}_\parallel$; 2) равномерного движения по ларморовой окружности под действием силы $\mathbf{F}_1 = q\,(\mathbf{v}_1\times\mathbf{B})$, где $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_d$ — скорость частицы в системе координат, движущейся со скоростью дрейфа $\mathbf{v}_d = \frac{1}{q}\frac{(\mathbf{F}_\perp\times\mathbf{B})}{B^2}$; 3) дрейфового движения с постоянной скоростью $\mathbf{v}_d$. Сила **F** создает ускорение частицы вдоль магнитного поля и дрейф в направлении, перпендикулярном полю **B** и составляющей $\mathbf{F}_\perp$ силы **F**. Если сила **F** постоянна, то указанное представление о траектории движения частицы является точным. В случае силы **F**, медленно изменяющейся во времени и пространстве, такое представление приближенно. Оно является тем точнее, чем меньше сказывается действие силы **F** на движении частицы на длине ларморового радиуса и в течение периода движения по ларморовой окружности.

33.4.2. Электрический дрейф. Электрический дрейф возникает в случае, когда внешней силой **F** является сила электрического поля с напряженностью **E**:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \qquad (33.34)$$

В этом случае частица будет вращаться вокруг направления магнитного поля **B**, а ее мгновенный центр вращения будет двигаться со скоростью

$$\mathbf{v}_d = \frac{1}{B^2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}). \qquad (33.35)^*$$

Скорость $\mathbf{v}_d$ не зависит от знака и величины заряда частицы q, а также от ее массы. Поэтому электрический дрейф нельзя использовать для разделения частиц по зарядам и массам.

33.4.3. Дрейф в гравитационном поле. В гравитационном поле на частицу массой m действует сила

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \qquad (33.36$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения. Скорость дрейфа $\mathbf{v}_d$ (33.33) в этом случае определяется формулой

$$\mathbf{v}_d = \frac{m}{q}\frac{(\mathbf{g}\times\mathbf{B})}{B^2}, \qquad (33.37)^*$$

где q — заряд частицы. Если $\mathbf{g}\perp\mathbf{B}$, то

$$v_d = \frac{gm}{qB} = \frac{g}{\omega}, \qquad (33.38)$$

где ω — циклотронная частота (33.21). Для протона в магнитном поле Земли ($B = 7{,}96\cdot10^{-4}$ Тл)

$$v_d \simeq 0{,}98 \text{ см/с}.$$

33.5. Релятивистская частица в электромагнитном поле

33.5.1. Движение частицы в статических полях. При движении релятивистской частицы в статическом магнитном поле **B** ее энергия $E = mc^2$, а следовательно и масса m, сохраняется. Уравнение движения

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \qquad (33.39)$$

имеет вид (33.16), где **v** — скорость частицы, сравнимая со скоростью света c. Поэтому движение релятивистской частицы в магнитном поле будет описываться формулами нерелятивистской динамики [33.3.1],

Таблица 33.1. **Крупнейшие ускорители на встречных пучках (по состоянию на 1988 г.)**

Название, местонахождение	Дата введения в действие	Сталкивающиеся частицы	Максимальная энергия пучка, ТэВ	Начальная энергия пучка, ТэВ	Светимость, 10^{30} см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$	Длина окружности ускорителя, км
ВЭПП-2 Новосибирск (СССР)	Действует с 1966	e^+e^-	0,0007	...	~0,1	0,012
ВЭПП-4 Новосибирск (СССР)	Действует с 1979	e^+e^-	0,0085	...	~1	0,286
ACO Орсей (Франция)	Действует с 1966	e^+e^-	0,00054	...	0,1	0,022
ADONE Фраскати (Италия)	Действует с 1969	e^+e^-	0,0015	...	0,6	0,103
УНК Серпухов (СССР)	1993	pp	3 (II стадия)	0,4—0,6	100	20,77
TEVATRON Лаб. Ферми (США)	Действует с 1986	$p\bar{p}$	0,8—1,0	0,15	1	6,28
Батейвия Лаб. Ферми (США)	Действует	pp	0,8	...	...	...
TRISTAN, KEK	Действует с 1986	e^+e^-	0,03	0,008	20	3,02
SLC, SLAC (США)	Действует с 1987	e^+e^-	0,05	0,05	6	1,45—1,47
	Действует	e^+e^-	0,004	...	...	...
	Действует	e^+e^-	0,015	...	...	...
CESR (США)	Действует	e^+e^-	0,008	...	...	...
ЦЕРН (Швейцария)	Действует	$p\bar{p}$	0,32	...	...	...
LEP (Швейцария)	1989	e^+e^-	0,06	0,02	16	26,66
HERA (ФРГ)	Действует	e^+e^-	0,0055	...	...	...
DESY (ФРГ)	Действует	e^+e^-	0,023	...	...	...
КНР	1990	ep	$0{,}026/0{,}82_{e/p}$	$0{,}014/0{,}04_{e/p}$	15	6,336
Япония	План	e^+e^-	0,003	...	...	...
SSC (США)	План 1994	e^+e^- pp	0,03 20	... 1	... 1000	... 82,9

в которых под массой m следует понимать ее релятивистское выражение (6.15)

$$m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}, \qquad (33.40)$$

где m_0 — масса покоя. Так, ларморовый радиус R (33.20) определяется соотношением

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} = \frac{m_0 v}{qB\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad (33.41)^*$$

а циклотронная частота ω (33.21) — формулой

$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{qB\sqrt{1-(v/c)^2}}{m_0}, \qquad (33.42)^*$$

В общем случае энергия E частицы с зарядом q, прошедшей ускоряющую разность потенциалов U, имеет вид

$$E = mc^2 = m_0c^2 + qU. \qquad (33.43)$$

В ультрарелятивистском случае $E = qU$. Импульс p такой частицы определяется формулой

$$p = \frac{qU}{c}\sqrt{1+\frac{2m_0c^2}{qU}}. \qquad (33.44)$$

33.5.2. Ускорители заряженных частиц. Частицы высоких энергий, т. е. ускоренные до скоростей, близких к скорости света, находят широкое применение в физических исследованиях и в технике. Простейший способ получения таких высокоэнергетических частиц состоит в ускорении их с помощью электрических полей высоких и сверхвысоких напряжений. Такие же энергии могут быть получены при последовательном многократном пробеге частицами сравнительно малой разности потенциалов.

Устройства, служащие для ускорения заряженных частиц, называются *ускорителями*. Ускорители можно разбить на две большие группы: *линейные* и *циклические*. К линейным ускорителям относятся *электростатический генератор Ван де Граафа* [26.2.11], *линейный резонансный ускоритель*, *волновые ускорители*. К циклическим ускорителям относятся ускорители, использующие эффект резонансного ускорения (*циклотрон*, *синхротрон*, *фазотрон*, *синхрофазотрон*), и ускорители, основанные на методе индукционного ускорения (*бетатрон*).

Линейные ускорители используют для ускорения электронов и протонов. В циклотронах ускоряют протоны, дейтроны, альфа-частицы, тяжелые многозарядные ионы. Однако циклотроны не пригодны для ускорения электронов и получения релятивистских частиц. Для ускорения частиц до релятивистских скоростей применяют фазотрон, синхротрон, синхрофазо-

трон. В бетатроне — индукционном ускорителе электронов — используется явление электромагнитной индукции [30].

Пучки заряженных частиц высоких энергий применяют для бомбардировки различных мишеней с целью изучения ядерных реакций [73] и процессов рождения элементарных частиц [XVII]. При этом полезно используется та часть энергии, которая идет на возбуждение или расщепление ядра, на рождение новых элементарных частиц. Эта часть энергии переходит во внутреннюю энергию взаимодействующих объектов. Однако в обычных ускорителях значительная доля энергии расходуется непроизводительно, переходя в энергию движения центра масс сталкивающихся частиц и в кинетическую энергию всей системы. Так, в случае неупругого столкновения релятивистских частиц с равными массами покоя $m_{01} = m_{02}$, одна из которых до соударения покоилась, полезно используемая часть энергии T_n определяется формулой

$$T_n = \sqrt{2E_{01}(E_{01} + E_1)}, \quad T_n \simeq \sqrt{2E_{01}E_1} \text{ при } E_{01} \ll E_1, \qquad (33.45)$$

где $E_{01} = m_{01}c^2$, $E_1 = m_1c^2$ — энергии ускоренной частицы. При столкновении протонов на ускорителе с энергией $E_1 = 3 \cdot 10^{10}$ эВ $T_n = 7{,}4 \cdot 10^9$ эВ, т. е. полезная часть энергии составляет всего 25 %.

Ускорителями нового типа, в которых вся энергия сталкивающихся частиц переходит во внутреннюю энергию системы, являются колайдеры — *ускорители на встречных пучках*. В этих установках два пучка ускоренных частиц направляются навстречу один другому так, что центр масс сталкивающихся частиц остается неподвижным. Основная трудность на пути реализации этой идеи заключается в малой плотности пучков и, следовательно, малой вероятности соударения частиц. Технически эту трудность решают с помощью накопителей, в которых собираются вместе частицы, поступающие от обычного циклического ускорителя, за счет многократности встреч пучков, полученных на различных циклах ускорения. В табл. 33.1 приведены сведения о существующих, строящихся и проектируемых ускорителях на встречных пучках.

ЧАСТЬ IV

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Глава IX

Механические колебания и волны

34. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Колебанием или *колебательным движением* в физике называют всякий периодический, т. е. повторяемый с течением времени, или почти периодический процесс, в котором какая-либо физическая величина принимает одинаковые значения через равные или почти равные промежутки времени. Теория колебаний изучает колебательные движения различной физической природы с единой точки зрения. Она устанавливает закономерности, характеризующие колебательный процесс в целом, вне зависимости от природы величин, совершающих колебания. Важными разновидностями колебаний являются *механические* [IX] и *электромагнитные* [X] колебания.

Колебания возникают в тех случаях, когда системе, способной совершать колебательные движения (называемой поэтому *осциллятором*), сообщается энергия. Наиболее важными величинами, характеризующими колебания, являются:

1) мгновенное перемещение относительно положения равновесия, называемое *отклонением* или *смещением* x:

$$x = f(t), \quad f(t) = f(t + T), \qquad (34.1)$$

где $f(t)$ — заданная периодическая функция времени t;

2) максимальное отклонение от положения равновесия, называемое *амплитудой колебания* A;

3) длительность одного полного колебания, называемая *периодом колебания* T;

4) число колебаний в единицу времени, называемое *частотой колебаний* ν:

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (34.2)$$

Величина

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T \qquad (34.3)$$

называется *угловой* или *циклической частотой*;

5) время t, отсчитываемое от момента начала колебания;

6) величина

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \qquad (34.4)$$

называемая *фазой колебания*, где φ_0 — начальная (при $t = 0$) фаза. Фаза характеризует мгновенное состояние колебательной системы и определяется отклонением и временем.

Частота ν измеряется в герцах (Гц), период T — в секундах (с), угловая частота имеет размерность радиан в секунду (рад/с):

$$[\nu] = \text{Гц} = \text{с}^{-1}, \quad [T] = \text{с}, \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \tag{34.5}$$

Амплитуда A — положительная величина, имеющая размерность отклонения x, т. е. $[A] = [x]$.

Колебание предоставленной самой себе системы, вызванное первоначальным кратковременным внешним возбуждением, называется *свободным* или *собственным колебанием*. Колебания, которые происходят с постоянной во времени амплитудой A, называются *незатухающими колебаниями*. Для получения незатухающих колебаний в реальных физических системах необходимо постоянно подводить к ним энергию, восполняющую энергетические затраты на преодоление сил трения, излучение и другие процессы. *Затухающими колебаниями* называются колебания с амплитудой A, которая с течением времени уменьшается. Без пополнения энергии любые колебания в физических системах затухают. Колебания, которые происходят под действием внешней периодически изменяющейся силы, называются *вынужденными колебаниями*. Если система сама управляет воздействием внешних сил, то возникающее в ней колебательное движение называют *автоколебанием*.

35. НЕЗАТУХАЮЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

35.1. Уравнение движения и его решение

Важнейшим среди колебательных движений является *незатухающее гармоническое колебание*, при котором смещение x (34.1) описывается формулами

$$x = x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x = x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{35.1}$$

где A — амплитуда, а $\omega t + \varphi_0$ — фаза колебания. Оба представления равноправны. Выбором начальной фазы φ_0 всегда можно свести их к простым функциям косинуса или синуса от аргумента ωt:

$$x = A\cos\omega t, \quad x = A\sin\omega t \text{ при } \varphi_0 = 0, \tag{35.2}$$

Первая и вторая производные отклонения $x(t)$ по времени t (скорость v и ускорение a) также изменяются по гармоническому закону

$$\dot{x} = v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0), \quad \ddot{x} = a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{35.3}$$

Из второго выражения следует *уравнение гармонических колебаний*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{35.4}$$

Его решение дается формулами (35.1). Колебания, описываемые соотношениями (35.1), являются результатом таких свойств физической системы, как возвращающая сила и инерция. Возвращающая сила стремится вернуть систему в положение равновесия и сообщает ей скорость $v = \dot{x}$ (35.3). Чем больше x, тем больше возвращающая сила.

Сравнение выражения (35.4) со вторым законом Ньютона [3.3] показывает, что

$$\omega^2 = -\frac{F}{mx}, \tag{35.5}$$

где F — возвращающая сила, m — масса колебательной системы, x — смещение. Физический смысл ω^2: величина ω^2 есть возвращающая сила, приходящаяся на единицу смещения и единицу массы. Если колебание начинается при смещении $x > 0$ и скорости $\dot{x} = 0$, то возвращающая сила F создает ускорение, которое вызывает появление скорости, обратной по знаку смещению. Эта скорость достигает максимума к моменту возвращения x в положение равновесия, $x = 0$. При этом возвращающая сила станет равной нулю, $F = 0$, а наличие отрицательной скорости вызовет появление и увеличение отрицательного смещения. Возвращающая сила становится положительной, направленной на преодоление инерции, обусловленной отрицательной скоростью. После того как скорость снова станет равной нулю, а смещение максимальным и отрицательным, процесс будет повторяться в обратной последовательности, и система будет совершать колебания.

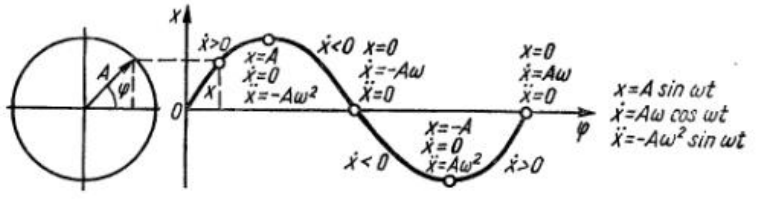


Рис. 35.1

Гармоническое колебание можно представить графически в виде проекции равномерного движения по окружности (рис. 35.1).

Физический смысл начальной фазы φ_0 в (35.1) следует из рис. 35.2. Согласно (35.3) амплитуда A_v скорости $v(t)$ пропорциональна циклической частоте ω и амплитуде A смещения x, т. е. $A_v = -\omega A$; а амплитуда A_a ускорения $a(t)$ пропорциональна квадрату циклической частоты ω и амплитуде A смещения x, т. е. $A_a = -A\omega^2$. Если смещение x изменяется в течение времени по гармоническому закону, то модуль ускорения $a(t)$ всегда пропорционален абсолютному значению смещения x, а направление ускорения всегда противоположно направлению изменения x. Формула $a = -\omega^2 x$ может служить определением гармонических колебаний. Она эквивалентна дифференциальному уравнению (35.4).

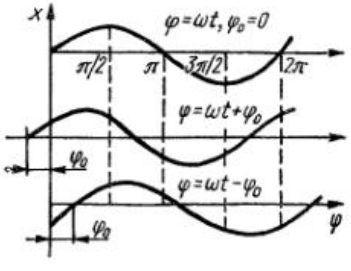


Рис. 35.2

При гармонических колебаниях возвращающая сила F в (35.5) пропорциональна смещению x:

$$F = -kx, \tag{35.6}$$

где величина k называется *коэффициентом квазиупругой силы* или *жесткостью*. Жесткость определяет циклическую частоту ω, частоту ν и период T колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{35.7}$$

Жесткость k задается конкретными свойствами колебательной системы. Формулы (35.7) справедливы для любых незатухающих гармонических колебаний.

35.2. Кинетическая и потенциальная энергии колебаний

Кинетическая E_k и потенциальная U энергии гармонического колебания являются периодическими функциями времени:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{m}{4}A^2\omega^2[1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)], \tag{35.8}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{4}[1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)].$$

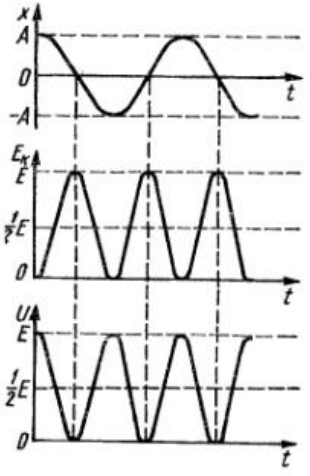


Рис. 35.3

Энергии E_k и U изменяются с частотой 2ω, в два раза превышающей частоту гармонического колебания. Так как квазиупругая сила F (35.6) является консервативной [3.1.1], то полная энергия $E = E_k + U$ гармонического колебания сохраняется:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const},$$

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}. \tag{35.9}$$

В процессе колебания происходит превращение кинетической энергии в потенциальную. Процесс перехода энергии из одного вида в другой является периодическим (рис. 35.3). В моменты наибольшего значения смещения x кинетическая энергия E_k обращается в нуль и полная энергия E равна наибольшему значению потенциальной энергии $E = U_{\max} = kA^2/2$. При прохождении системой положения равновесия, $x = 0$, полная энергия E состоит только из кинетической энергии, принимающей в этот момент наибольшее значение: $E = E_{k\max} = mA^2\omega^2/2$. Согласно (35.9) наибольшие значения потенциальной и кинетической энергий равны между собой.

Средние значения кинетической $\langle E_k \rangle$ и потенциальной $\langle U \rangle$ энергий равны половине полной энергии E:

$$\langle E_k \rangle = \langle U \rangle = \frac{E}{2} = \frac{1}{4}kA^2. \tag{35.10}$$

35.3. Малые колебания

Если система имеет положение устойчивого равновесия при некотором значении параметра $q = q_0$, то ее потенциальная энергия U как функции q может быть разложена в ряд Тейлора вблизи точки устойчивого равновесия q_0:

$$U(q) = U(q_0) + (q - q_0)\left[\frac{dU(q)}{dq}\right]_{q=q_0} + \frac{1}{2}(q - q_0)^2\left[\frac{d^2U(q)}{dq^2}\right]_{q=q_0} + \frac{1}{6}(q - q_0)^3\left[\frac{d^3U}{dq^3}\right]_{q=q_0} + \ldots \tag{35.11}$$

В состоянии устойчивого равновесия потенциальная энергия $U(q)$ имеет минимум. Это означает, что

$$\left[\frac{dU}{dq}\right]_{q=q_0} = 0, \quad \left[\frac{d^2U}{dq^2}\right]_{q=q_0} = k > 0, \tag{35.12}$$

где k — некоторая положительная константа. Колебания называются *малыми*, если слагаемым, содержащим $(q - q_0)^3$ в (35.11), можно пренебречь. В этом случае, отсчитывая потенциальную энергию U от ее минимального значения в положении равновесия $U(q_0)$, имеем

$$U = \frac{1}{2}kx^2, \quad F = -\frac{dU}{dx} = -kx, \tag{35.13}$$

где $x = q - q_0$ — смещение, F — восстанавливающая сила. Дифференциальное уравнение малых колебаний имеет вид (35.4), где параметр ω определяется формулой (35.7). Решение уравнения малых колебаний дается формулами (35.1). Малые колебания есть гармонические колебания.

35.4. Простые колебательные системы

1. *Математический маятник.* Математическим маятником называется идеальная система, состоящая из нерастяжимой и невесомой нити и тела, рассматриваемого как материальная точка. Отклонение маятника от положения равновесия характеризуется углом φ. При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент, стремящийся вернуть его в положение равновесия, и уравнение движения имеет вид (рис. 35.4)

$$ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi, \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \tag{35.14}$$

где $ml^2 = I$ — момент инерции маятника длиной l и массой m, g — ускорение свободного падения, $\ddot{\varphi}$ — угловое ускорение. В случае малых колебаний $\sin\varphi \simeq \varphi$ и

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{35.15}$$

где $\omega^2 = g/l$.

Его решение имеет вид

$$\varphi = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{35.16}$$

— при малых колебаниях угловое отклонение φ изменяется по гармоническому закону с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \tag{35.17}$$

2. *Физический маятник.* Если колеблющееся тело нельзя рассматривать как материальную точку, то уравнение движения в этом случае принимает вид

$$I\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi, \tag{35.18}$$

где I — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O (рис. 35.5), m — масса маятника, l — расстояние между точкой подвеса O и центром масс C маятника. Если колебания малы, $\sin\varphi \simeq \varphi$, то уравнение (35.18) переходит в (35.15), где

$$\omega^2 = mgl/I. \tag{35.19}$$

Период колебания физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \tag{35.20}$$

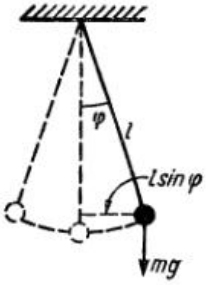


Рис. 35.4

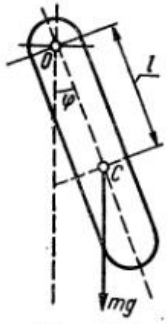


Рис. 35.5

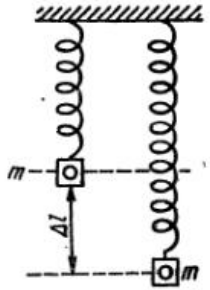


Рис. 35.6

где величина $l_{\text{пр}} = I/ml$ называется *приведенной длиной физического маятника*. Период колебания физического маятника равен периоду колебания математического маятника длиной $l_{\text{пр}}$.

Формулы (35.17) и (35.20) позволяют определять ускорение свободного падения g по известным T, l и момент инерции I тела по известным m, g, l.

3. *Линейные колебания пружины.* При колебаниях пружины восстанавливающая сила F обусловлена ее упругостью. При небольших деформациях согласно закону Гука [10.2.2] сила F_g, вызывающая деформацию Δl, пропорциональна этой деформации:

$$F_g = -F = k\Delta l, \tag{35.21}$$

где k — коэффициент упругости пружины. Согласно (35.6) упругие колебания пружины в этом случае будут гармоническими с циклической частотой ω, частотой ν и периодом T, определяемыми формулами (35.7), где m — масса груза, подвешенного на пружине (рис. 35.6).

4. *Крутильный маятник.* Крутильным маятником называется твердое тело, подвешенное на вертикальном невесомом упругом стержне, которое может колебаться при кручении его вокруг оси, проходящей через стержень. Крутильные колебания обусловлены упругими силами, возникающими в стержне при малых поворотах тела. Если I — момент инерции маятника относительно оси, проходящей вдоль стержня, а c — жесткость стержня по отношению к кручению, то при малых углах поворота φ потенциальная U и кинетическая E_k энергии имеют вид

$$U = \frac{1}{2}c\varphi^2, \quad E_k = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \tag{35.22}$$

и период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}. \tag{35.23}$$

В случае однородного стержня

$$c = \frac{\pi d^4 G}{32l},$$

где d и l — диаметр и длина стержня, G — модуль сдвига [10.2.2].

36. ЗАТУХАЮЩИЕ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

36.1. Слабое затухание

В реальных физических системах, участвующих в колебательном движении, всегда присутствуют силы сопротивления (внутреннее трение, сопротивление среды и т. п.), действие которых уменьшает энергию E системы. Уменьшение энергии проявляется в том, что колебания будут затухать. Это следует из формулы (35.9), согласно которой $E \sim A^2$— при уменьшении энергии E до нуля амплитуда колебаний A также уменьшается до нуля.

Наиболее часто встречающийся в механике случай соответствует силе сопротивления F_c, пропорциональной скорости движения тела $v = \dot{x}$:

$$F_c = -r\dot{x}, \tag{36.1}$$

где величина r называется *коэффициентом сопротивления* или *вязкого трения*. Знак минус означает, что сила F_c направлена против направления скорости v. Если возвращающая сила F при колебаниях системы пропорциональна смещению x (35.6), то из второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \tag{36.2}$$

следует *дифференциальное уравнение затухающих колебаний*

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{36.3}$$

где $\beta = r/2m$, $\omega_0^2 = k/m$. Его решение при $\beta < \omega_0$ (слабое затухание) имеет вид (рис. 36.1, кривая *1*)

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \tag{36.4}$$

где ω — собственная частота затухающего колебания, A_0 и φ_0 — произвольные постоянные. Они определяются смещением $x = x_0$ и производной $\dot{x} = \dot{x}_0$ в момент времени $t = 0$:

$$A_0 = -\frac{\beta x_0 + \dot{x}_0}{\omega\sin\varphi_0}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{\beta x_0 + \dot{x}_0}{x_0\omega}.$$

Согласно (36.4) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой A, изменяющейся во времени по закону

$$A = A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \tag{36.5}$$

Величина β характеризует степень затухания колебаний. Ее называют *коэффициентом затухания*.

Период T затухающего колебания определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{36.6}$$

В любой колебательной системе затухание приводит к уменьшению частоты и увеличению периода колебаний. При незначительном сопро-

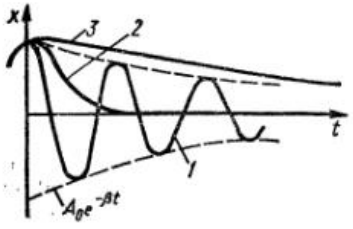


Рис. 36.1



Рис. 36.2

тивлении среды $\beta^2 \ll \omega^2$ период колебания практически равен периоду гармонических колебаний с частотой ω.

Затухающие колебания принято характеризовать *декрементом затухания*

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

или *логарифмическим* декрементом затухания

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N_e} \tag{36.7}$$

и *добротностью* колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}, \tag{36.8}$$

где $N_e = \tau/T$ — число колебаний за время $\tau = \frac{1}{\beta}$, за которое амплитуда $A(t)$ уменьшается в e раз.

Полная энергия системы и ее производная по времени при затухающем колебании определяются формулой (рис. 36.2):

$$E = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{-2\beta t} \left\{ 1 + \frac{\beta}{\omega_0} \sin\left(2\omega t + 2\varphi_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\omega} \right) \right\}, \tag{36.9}$$

$$\frac{dE}{dt} = -rx^2.$$

Убывание энергии обусловлено работой силы сопротивления среды (36.1). При малом сопротивлении $\beta \ll \omega_0$

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad E_0 = \frac{1}{2} k A_0^2, \tag{36.10}$$

где E_0 — значение энергии в начальный момент времени. Из (36.10) следует, что убыль энергии ΔE определяется добротностью системы Q (36.8):

$$-\Delta E = 2\beta T E = 2\pi E/Q. \tag{36.11}$$

Большим значениям Q соответствует слабое затухание колебаний. Типичные значения добротности приведены в табл. 36.1.

Таблица 36.1 Добротность Q некоторых систем

Система	Q
Возбужденное ядро (^{57}F)	$3 \cdot 10^{12}$
Возбужденный атом	10^7
Микрорадиоволны в полом медном резонаторе	10^4
Сейсмические волны (Земля)	25 — 1400
Струна (скрипка, рояль)	10^3

36.2. Сильное затухание

Если затухание в системе значительное, то $\beta > \omega_0$ и решение уравнения (36.3) имеет вид суммы двух экспонент:

$$x = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}, \tag{36.12}$$
$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

где c_1 и c_2 — вещественные постоянные, определяемые начальными условиями: x_0 и $\dot{x}_0 = v_0$. В этом случае движение является непериодическим (апериодическим). Система возвращается в положение равновесия ($x = 0$), не совершая колебаний. Характер этого движения задается начальными условиями. Соотношения между параметрами системы и типом ее колебаний имеют вид

$\beta = 0$, $r = 0$, $\omega = \omega_0$ — незатухающие колебания (35.1),

$\beta < \omega_0$, $r < 2\sqrt{mk}$, $\omega < \omega_0$ — затухающие колебания (36.4) (рис. 36.1, кривая *1*),

$\beta = \omega_0$, $r = 2\sqrt{mk}$, $\omega = 0$ — предельный случай апериодического движения (рис. 36.1, кривая *2*),

$\beta > \omega_0$, $r > 2\sqrt{mk}$, $\omega = i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ — апериодическое движение (36.12) (рис. 36.1, кривая *3*).

37. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

37.1. Уравнение движения и его решение

Если колебательная система подвергается действию внешней силы $F_в$, изменяющейся со временем по гармоническому закону с частотой ω:

$$F_в = F_0 \cos \omega t, \qquad (37.1)$$

то из второго закона Ньютона

$$m\ddot{x} = F + F_c + F_в, \qquad (37.2)$$

где F — возвращающая сила (35.6), F_c — сила сопротивления среды (36.1), следует дифференциальное уравнение, описывающее малые вынужденные колебания:

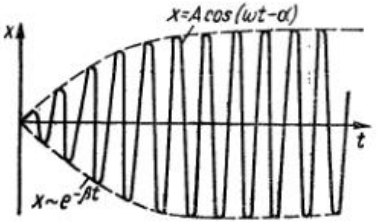


Рис. 37.1

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \qquad (37.3)$$

где $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = k/m$, $f_0 = F_0/m$. Решение уравнения (37.3), отвечающее установившимся колебаниям системы, имеет вид

$$x = A \cos(\omega t - \alpha), \qquad (37.4)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \qquad (37.5)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \qquad (37.6)$$

Из (37.4) — (37.6) следует, что вынужденные малые колебания представляют собой гармонические колебания с частотой ω возмущающей силы $F_в$ (37.1). Амплитуда колебаний A пропорциональна амплитуде F_0 этой силы и зависит от ее частоты ω, т. е. $A = A(\omega)$. Вынужденные колебания отстают по фазе от возмущающей силы на величину α, которая также является функцией ω, т. е. $\alpha = \alpha(\omega)$.

Функция (37.4) есть частное решение неоднородного уравнения (37.3). В теории дифференциальных уравнений доказывается теорема, согласно которой общее решение неоднородного уравнения равно сумме его любого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Для получения общего решения уравнения (37.3) к частному решению (37.4) нужно добавить общее решение однородного уравнения, которое совпадает с уравнением (36.3), описывающим затухающие свободные колебания. Его общее решение описывается функцией (36.4). Следовательно, полное решение уравнения (37.3) имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t - \alpha) + A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi_0), \qquad (37.7)$$

где A и α определяются формулами (37.5) и (37.6) соответственно, A_0 и φ_0 — постоянные, определяемые начальными условиями. График функции $x(t)$ показан на рис. 37.1. Из-за наличия множителя $e^{-\beta t}$ второе слагаемое играет заметную роль только при малых временах, т. е. в начале процесса, до установления устойчивых вынужденных колебаний, описываемых первым слагаемым.

37. 2. Явление резонанса

При заданных значениях амплитуды f_0 возмущающей силы (37.1), приходящейся на единицу массы системы, и коэффициенте затухания β амплитуда A (37.5) вынужденных колебаний является функцией только угловой частоты ω возмущающей силы: $A = A(\omega)$. При некоторой характерной для данной системы частоте $\omega = \omega_{рез}$ амплитуда $A(\omega)$ достигает максимального значения: $A_{рез} = A(\omega_{рез})$. Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний A при частотах возмущающей силы ω, близких к $\omega_{рез}$, называется *резонансом*. Величина $\omega_{рез}$ называется *резонансной циклической частотой*. Из условия максимума функции (37.5) следует, что

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (37.8)$$

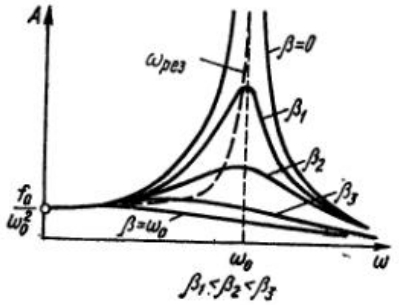


Рис. 37.2

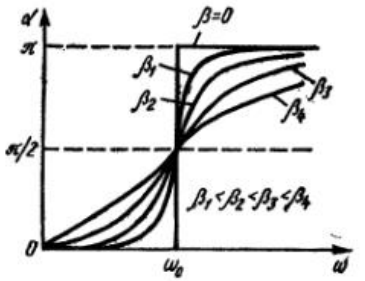


Рис. 37.3

Максимумы амплитуды ωA скорости $\dot{x}$ и амплитуды $\omega^2 A$ ускорения $\ddot{x}$ достигают соответственно при $\omega = \omega_0$ и $\omega = \omega_0^2/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. При $\omega = \omega_{рез}$ амплитуда A смещения x (37.4) определяется формулой

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \qquad (37.9)$$

Резонансная частота $\omega_{рез}$ меньше частоты ω собственных колебаний с затуханием. При $\beta = 0$ амплитуда (37.9) обращается в бесконечность. При $\beta \geqslant \omega_0/\sqrt{2}$ явление резонанса исчезает (рис. 37.2). При $\omega = 0$ имеем $A = f_0/\omega_0^2$. Независимо от величины затухания разность фаз $\alpha(\omega)$ (37.6) при $\omega = \omega_0$ равна $\pi/2$. Величина α изменяется от 0 до π (рис. 37.3). При малом затухании $\beta \ll \omega_0$ добротность системы Q (36.8) выражается следующим образом:

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{2\beta} \simeq \frac{A_{рез}}{x_0}, \qquad (37.10)$$

где $x_0 = F_0/k = f_0/\omega_0^2$ — смещение от положения равновесия под действием постоянной силы F_0. Из (37.10) следует физический смысл Q: добротность при $\beta \ll \omega_0$ характеризует превышение амплитуды вынужденных колебаний в момент резонанса над величиной смещения x_0, вызванного постоянной силой F_0, равной амплитуде возмущающей силы.

В акустике и радиотехнике явление резонанса полезно. Однако в большинстве механических устройств оно играет отрицательную роль. В ряде случаев резонанс может привести к разрушению механизмов, совершающих вынужденные колебания. Для предотвращения резонанса необходимо устранять периодически действующую силу или добиваться большой разности между собственной частотой колебания устройства и частотой возмущающей силы.

37.3. Поглощение мощности. Амплитуды дисперсии и поглощения

Решение (37.4) уравнения вынужденных колебаний (37.3) можно переписать в виде

$$x(t) = A_{\text{п}}(\omega)\sin\omega t + A_{\text{д}}(\omega)\cos\omega t, \tag{37.11}$$

где

$$A_{\text{п}}(\omega) = \frac{2\beta\omega f_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2} = A_{\text{п}}(\omega_0)\frac{4\beta^2\omega_0\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}, \tag{37.12}$$

$$A_{\text{д}}(\omega) = \frac{(\omega_0^2-\omega^2)f_0}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}.$$

Постоянная $A_{\text{п}}$ называется *амплитудой поглощения*, а постоянная $A_{\text{д}}$ — *упругой амплитудой* или *амплитудой дисперсии*. Первое слагаемое в (37.11) определяет среднее по времени значение поглощенной осциллятором мощности, а второе дает вклад в мгновенное значение поглощенной мощности $P(t)$. В установившемся процессе мгновенное значение мощности

$$P(t) = F_{\text{в}}\dot{x}(t) = F_0\cos\omega t\,[\omega A_{\text{п}}\cos\omega t - \omega A_{\text{д}}\sin\omega t]. \tag{37.13}$$

Среднее по времени за один цикл значение *поглощенной мощности*

$$P(\omega) = \langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt \tag{37.14}$$

описывается выражением

$$P(\omega) = \frac{1}{2}F_0\omega A_{\text{п}} = \frac{1}{2}mf_0^2\frac{2\beta\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}, \tag{37.15}$$

$$P(\omega) = P(\omega_0)\frac{4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}. \tag{37.15}$$

Среднее значение мощности $P(\omega)$ имеет максимум при $\omega = \omega_0$:

$$P(\omega_0) = \frac{mf_0^2}{4\beta}. \tag{37.16}$$

Значение $P(\omega_0)$ есть усредненное значение входной мощности $P(t)$ в резонансе, при $\omega = \omega_0$. Значения частот ω, для которых $P(\omega)$ равно

половине максимального значения $P(\omega_0)$, определяются формулами

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2+\beta^2}-\beta, \tag{37.17}$$

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2+\beta^2}+\beta.$$

Интервал частот между этими точками половинной мощности называется *шириной резонансной кривой* или *шириной резонанса* и обозначается $\Gamma = \omega_2 - \omega_1$. Тогда

$$\Gamma = 2\beta \tag{37.18}$$

— ширина резонанса при вынужденных колебаниях по величине равна 2β и характеризует степень затухания свободных колебаний (см. (36.4) и рис. 37.4).

В установившемся режиме среднее значение поглощенной мощности равно среднему значению мощности, рассеиваемой из-за трения. Средняя мощность, расходуемая на трение, выражается формулой

$$P_{\text{тр}}(\omega) = 2m\beta\langle\dot{x}^2\rangle = m\beta\omega^2[A_{\text{п}}^2 + A_{\text{д}}^2]. \tag{37.19}$$

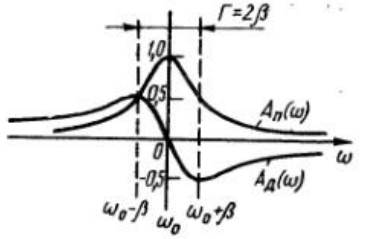


Рис. 37.4

Средняя величина запасенной осциллятором энергии $E(\omega)$ также определяется амплитудами $A_{\text{п}}$ и $A_{\text{д}}$:

$$E(\omega) = \frac{1}{2}m\langle\dot{x}^2\rangle + \frac{1}{2}m\omega_0^2\langle x^2\rangle = \frac{1}{4}m(\omega^2+\omega_0^2)(A_{\text{п}}^2+A_{\text{д}}^2), \tag{37.20}$$

$$E(\omega) = E(\omega_0)\,2\beta^2(\omega^2+\omega_0^2)/((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2).$$

Вдали от резонанса установившееся решение уравнения (37.3) определяется только вторым слагаемым в (37.11):

$$x(t) \simeq A_{\text{д}}\cos\omega t \simeq \frac{f_0\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{37.21}$$

Это выражение не содержит коэффициента затухания β. Оно является решением уравнения (37.3) при $\beta = 0$. При малых затуханиях $2\beta \ll \omega_0$ формулы (37.12) для $A_{\text{п}}$, (37.15) для $P(\omega)$ и (37.20) для $E(\omega)$ имеют одну и ту же форму, которую обозначим

$$R(\omega) = \frac{\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2}{(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)^2}, \tag{37.22}$$

где $\Gamma = 2\beta$ — ширина резонанса при $\omega = \omega_0$. В оптике функция $R(\omega)$ определяет *лоренцеву* форму линий. В ядерной физике формула (37.22) называется резонансной кривой Брейта — Вигнера или формулой Брейта — Вигнера [73.3.1].

38. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

38.1. Сложение гармонических колебаний

Любая колебательная система в общем случае может одновременно совершать несколько колебаний. Одним из важнейших принципов гармонических колебаний является **принцип суперпозиции:** *если* $x_1(t)$ и $x_2(t)$ *представляют собой смещения под действием возмущающих сил* $F_1(t)$ и $F_2(t)$, *то* $x_1(t) + x_2(t)$ *будет представлять смещение под действием силы* $F_1(t) + F_2(t)$. Если система совершает несколько колебаний, то эти колебания складываются независимо одно от другого.

Если два *колебания* происходят *в одном направлении и с одной частотой* ω:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2), \tag{38.1}$$

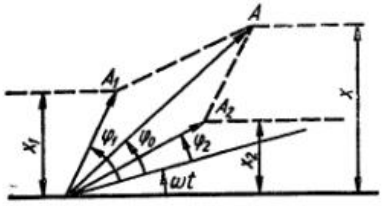


Рис. 38.1

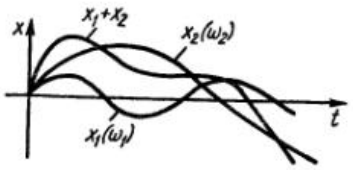


Рис. 38.2

то *отклонение* x *результирующего колебания* имеет вид

$$x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{38.2}$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{38.3}$$

— *амплитуда*,

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \tag{38.4}$$

— *начальная фаза* результирующего колебания. В частном случае равных амплитуд $A_1 = A_2$ имеем

$$A = 2A_1 \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \tag{38.5}$$

Из (38.3) — (38.5) следует, что если разность начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ равна нулю, то при $A_1 = A_2$ отклонение x удваивается, а при $A_1 \neq A_2$ — суммируется. Если $\Delta\varphi = \pi$ и $A_1 = A_2$, то оба колебания взаимно уничтожаются, а при $A_1 \neq A_2$ отклонения вычитаются.

Принцип суперпозиции является следствием линейности уравнений движения, описывающих гармонические колебания.

Колебания (38.2) можно представить графически с помощью вращающихся векторов (рис. 38.1). Такие рисунки называются *векторными диаграммами*. Они позволяют находить амплитуды A и отклонения x без вычислений. При *сложении двух гармонических колебаний, происходящих в одном направлении с разными частотами* ω_1 и ω_2, возникают негармонические колебания (рис. 38.2). *Результирующее отклонение* x в каждый момент времени *равно алгебраической сумме отклонений*

составляющих колебания. В простейшем случае, когда начальные фазы $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и амплитуды этих колебаний $A_1 = A_2 = A$, имеем

$$x = x_1 + x_2 = A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) =$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right), \tag{38.6}$$

$$x = A_{\text{мод}}(t) \sin\omega_{\text{ср}} t, \quad \omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),$$

$$A_{\text{мод}}(t) = 2A\cos\omega_{\text{мод}} t, \quad \omega_{\text{мод}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \tag{38.7}$$

Частота $\omega_{\text{ср}}$ называется *средней частотой, а* $\omega_{\text{мод}}$ — *частотой модуляции* результирующих колебаний. Последние можно рассматривать как колебания, происходящие с угловой частотой $\omega_{\text{ср}}$ и амплитудой

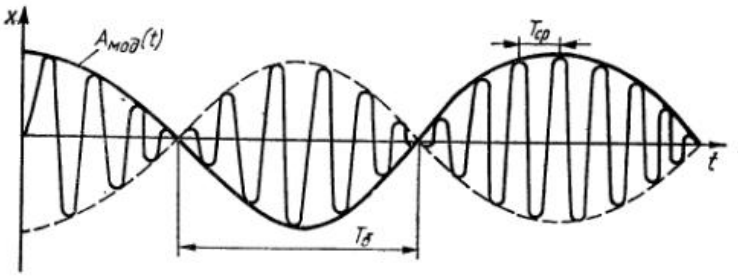


Рис. 38.3

$A_{\text{мод}}(t)$, которая зависит от времени по гармоническому закону. При $\omega_1 \approx \omega_2$ имеем $\omega_{\text{мод}} \ll \omega_{\text{ср}}$ и амплитуда $A_{\text{мод}}(t)$ очень медленно изменяется в течение нескольких колебаний с частотой $\omega_{\text{ср}}$. Если ω_1 мало отличается от ω_2, то суперпозиция двух гармонических колебаний ω_1 и ω_2 называется *почти гармоническим* или *почти монохроматическим* колебанием с частотой $\omega_{\text{ср}}$ и очень медленно изменяющейся амплитудой. При сложении двух колебаний с близкими частотами возникает так называемое *биение* (рис. 38.3), т. е. колебание с частотой $\omega_{\text{ср}}$ и амплитудой $A_{\text{мод}}$, изменяющейся от максимального значения $2A$ до нуля. При каждом обращении амплитуды $A_{\text{мод}}$ в нуль фаза скачком меняется на π. *Периодом биения* $T_б$ называется промежуток времени между двумя последовательными моментами времени, при которых амплитуда $A_{\text{мод}}$ обращается в нуль:

$$T_б = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}, \tag{38.8}$$

где T_1 и T_2 — периоды колебаний с частотами ω_1 и ω_2. *Частотой биений* называется величина

$$\omega_б = 2\omega_{\text{мод}} = \omega_1 - \omega_2. \tag{38.9}$$

Период результирующих колебаний

$$T_{\text{ср}} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \tag{38.10}$$

Модуляция, показанная на рис. 38.3, называется *амплитудной модуляцией*. Если $A_{\text{мод}}(t) = \text{const}$, а начальная фаза результирующего колебания $\varphi_0(t)$ изменяется во времени: $\varphi_0(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$, то модуляция называется *частотной*.

38.2. Фигуры Лиссажу

Фигуры Лиссажу (1855) наблюдаются при наложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний материальной точки

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \tag{38.11}$$

описывающей в полярных координатах

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

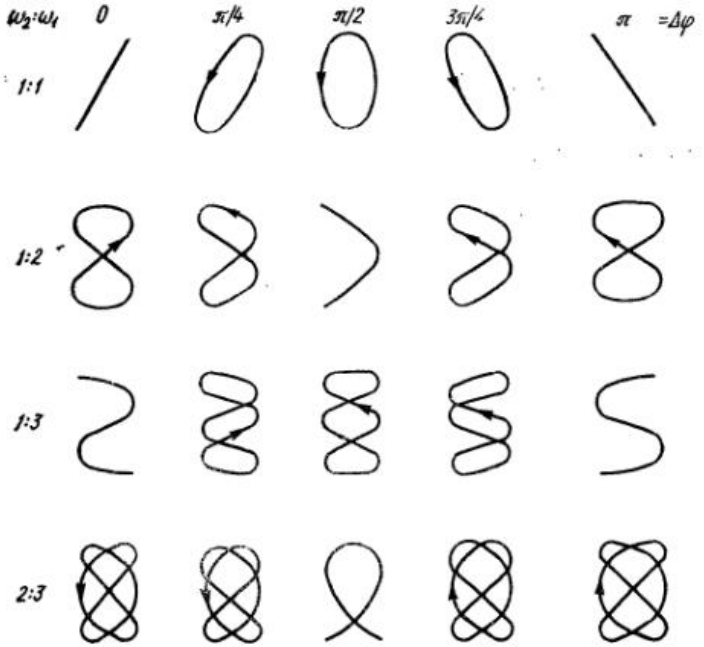


Рис. 38.4

непрерывную линию в случае рационального отношения частот ω_1 и ω_2 (рис. 38.4). Вид фигур Лиссажу зависит от отношений A_2/A_1, ω_2/ω_1 и разности начальных фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Отношение ω_2/ω_1 равно отношению числа касаний фигуры Лиссажу с горизонтальной и вертикальной сторонами прямоугольника, в который она вписана. Если $\omega_1 = \omega_2$, то уравнение фигуры Лиссажу имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi \tag{38.12}$$

и описывает *эллиптически поляризованные* колебания. При $\Delta\varphi = n\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, эллипс вырождается в отрезок прямой и колебания называют *линейно поляризованными*. Если $A_1 = A_2$, то колебания будут поляризованными по кругу.

На рис. 38.4 показаны некоторые примеры фигур Лиссажу с $\Delta\varphi$, изменяющимся от 0 до π. При разности фаз $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ возникают аналогичные фигуры, как бы зеркально отраженные от $\Delta\varphi = \pi$. Если отношение ω_2/ω_1 не есть рациональное число, то траектории не повторяются и фигура Лиссажу непрерывно изменяется.

38.3. Разложение в ряд Фурье

Негармоническое периодическое колебание любой физической величины $S(t)$ можно представить в виде суммы бесконечного числа гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте $\omega = 2\pi/T$, где T — период колебания:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n), \tag{38.13}$$

где $S(t + T) = S(t)$,

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}, \tag{38.14}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos n\omega t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin n\omega t \, dt.$$

Выражение (38.13) называется *рядом Фурье*. Члены этого ряда с частотами ω, 2ω, 3ω и т. д. называются *гармониками* негармонического колебания.

39. ВОЛНЫ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

39.1. Основные понятия

В упругой среде, представляющей собой большое число связанных между собой частиц, под действием внешних сил могут возникать колебательные процессы или *механические волны*. Кинематическим признаком волнового движения является распространение фазы колебаний, а динамическим — перенос энергии.

Волновой процесс характеризуется *фазовой скоростью* или скоростью распространения волны c, длиной волны λ, частотой ν или периодом $T = 1/\nu$ колебаний, равным продолжительности полного колебания частицы среды. Между этими величинами существует простая связь

$$c = \lambda\nu = \lambda/T. \tag{39.1}$$

Длина волны λ есть расстояние между частицами, колеблющимися с одинаковой фазой (рис. 39.1). Длина волны не зависит от координат

и времени. Фазовая скорость c зависит от механических свойств среды. Для упругой поперечной волны в твердых телах

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}, \tag{39.2}$$

где F — сила натяжения твердого тела (струны, проволоки и т. п.), ρ — плотность материала, из которого изготовлено колеблющееся тело, S — его поперечное сечение. Для упругой продольной волны в твердом теле фазовая скорость

$$c = \sqrt{E/\rho}, \tag{39.3}$$

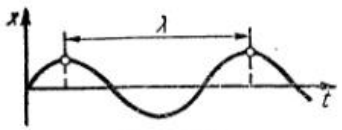
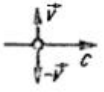


Рис. 39.1



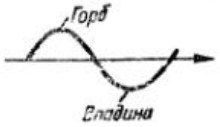


Рис. 39.2

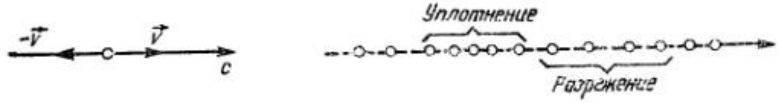


Рис. 39.3

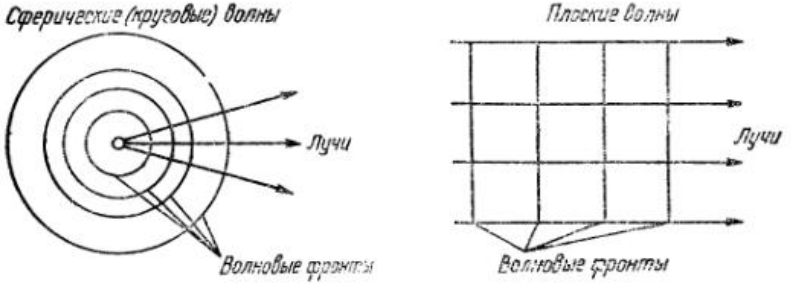


Рис. 39.4

где E — модуль Юнга [10.2.2]. В жидкостях для продольной волны имеем

$$c = \sqrt{K/\rho} = \sqrt{1/\varkappa\rho}, \tag{39.4}$$

где $K = 1/\varkappa$ — модуль всестороннего сжатия, ρ — плотность жидкости. В газе с плотностью ρ и давлением P продольные волны распространяются со скоростью

$$c = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma RT}, \tag{39.5}$$

где γ — показатель адиабаты (20.32), T — температура, R — универсальная газовая постоянная (16.5).

Поперечными волнами называются волны, у которых направление скорости движения частиц перпендикулярно направлению фазовой скорости. Эти волны представляют собой чередование горбов и впадин (рис. 39.2).

Продольными волнами называются волны, у которых направления скорости колебаний частиц и фазовой скорости совпадают (рис. 39.3). У этих волн чередуются области уплотнений и разрежений.

По характеру распространения различают линейные (в одном измерении), поверхностные (в двух измерениях) и пространственные (в трех измерениях) волны. Направление распространения волны называют *лучом*. *Волновым фронтом* называется геометрическое место всех частиц, колеблющихся с одинаковой фазой (рис. 39.4). Волновой фронт перпендикулярен лучу. Расстояние между соседними волновыми фронтами равно длине волны λ. Важными примерами волн являются сферические и плоские волны. *Сферические* волны возникают от точечного источника в пространстве. Их лучи направлены радиально, а волновые фронты представляют собой сферы. На плоскости такие волны будут круговыми, а их волновые фронты — окружностями. *Плоские* волны возникают от плоского или удаленного источника. Их лучи параллельны, а волновые фронты представляют собой плоскости.

39.2. Плотность и поток энергии

При колебательном движении частиц среды имеет место перенос энергии за счет передачи ее от одной частицы к другой. *Плотностью энергии* u называется количество энергии, приходящейся на единицу объема среды. Если среда характеризуется плотностью ρ, то из выражения (35.9) следует, что

$$u = \frac{dE}{dV} = \frac{\rho A^2\omega^2}{2} \text{ или } dE = \frac{\rho}{2} A^2\omega^2 dV, \tag{39.6}$$

где dE — энергия в объеме dV, A — амплитуда колебаний частицы, ω — их циклическая частота, $\rho = dm/dV$, dm — масса в объеме dV.

Под *потоком энергии* W понимают энергию, проходящую через поверхность площадью S за время t. Если c — фазовая скорость волны, u — плотность энергии, то поток

$$W = uSct = \frac{\rho}{2}\omega^2A^2Sct. \tag{39.7}$$

Для мощности $P = W/t$ имеем

$$P = uSc = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2Sc. \tag{39.8}$$

Величина $I = P/S$ называется *интенсивностью*. Она выражается формулой

$$I = uc = \frac{1}{2}\rho\omega^2A^2c. \tag{39.10}$$

Величины u, W, P и I, определяемые формулами (39.6) — (39.10), постоянны во всех точках среды, участвующей в волновом движении только в случае плоских волн с одним, двумя и тремя измерениями. В случае круговых волн $u \sim 1/r$, а для сферических волн $u \sim 1/r^2$, где r — расстояние от источника волн до точки наблюдения.

39.3. Волновое уравнение и его решение

В случае, если число частиц среды велико, смещение ее частиц при волновом движении можно описывать с помощью непрерывной функции $\psi(x, y, z; t)$, представляющей собой вектор смещения частиц

в точке (x, y, z) пространства, отвечающей положению равновесия, в момент времени t:

$$\psi(x, y, z; t) = \hat{x}\,\psi_x(x, y, z; t) + \hat{y}\,\psi_y(x, y, z; t) + \hat{z}\,\psi_z(x, y, z; t), \quad (39.11)$$

где $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ — единичные векторы, ψ_x, ψ_y, ψ_z — компоненты вектора смещения ψ. Если положение равновесия характеризуется только одной координатой z (как, например, при растяжении струны вдоль оси z), то *вектор смещения* $\psi = \psi(z, t)$ имеет вид

$$\psi(z, t) = \hat{x}\,\psi_x(z, t) + \hat{y}\,\psi_y(z, t) + \hat{z}\,\psi_z(z, t). \quad (39.12)$$

Смещения вдоль оси z называются *продольными*, а вдоль осей x и y — *поперечными*. Если колебания происходят только вдоль одной из осей x или y, то они называются *линейно поляризованными* вдоль этой оси.

Пусть $\psi(z, t)$ есть мгновенное поперечное смещение частиц при линейно поляризованном колебании с равновесным положением z. Тогда $\partial\psi(z, t)/\partial t$ — скорость, а $\partial^2\psi(z, t)/\partial t^2$ — ускорение, и уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (39.13)$$

где c — фазовая скорость волны. Это уравнение называется *классическим волновым уравнением*. Его общее решение имеет вид

$$\psi(z, t) = A_1 f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + A_2 f_2\left(t + \frac{z}{c}\right), \quad (39.14)$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции по z и t, определяющие профиль волны. В частности, решением уравнения (39.13) являются *плоские монохроматические волны*

$$\psi_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right) \text{ и } \psi_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right), \quad (39.15)$$

где $c = dz/dt$ — скорость распространения волны, $z = \mathbf{nr}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к фронту волны (вдоль оси z), $\mathbf{r}$ — радиус-вектор любой из точек поверхности фронта волны, $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота, T — период колебаний. Величина $k = \omega/c$ называется *волновым числом*, а вектор $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — *волновым вектором*. Волны ψ_1 и ψ_2 соответствуют возрастающим и убывающим значениям z.

В общем случае (39.11) для волн, возникающих в некоторой малой области и распространяющихся в однородной изотропной среде, справедливо *уравнение Даламбера*

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \quad (39.16)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа (68.12). Его общее решение для компонент ψ_a вектора ψ при наличии сферической симметрии имеет вид

$$\psi_a = A_1\frac{1}{r}f_1(ct - r) + A_2\frac{1}{r}f_2(ct + r) \quad (a = x, y, z), \quad (39.17)$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды дифференцируемые функции по x, y, z и t, r — расстояние от точек, где находится источник волн, до

рассматриваемой точки. Первое слагаемое в (39.17) описывает *расходящуюся* волну, а второе — *сходящуюся*. Если область, занимаемая источником волн, значительно меньше расстояния r, то источник можно рассматривать как точечный, а фронт волны как сферу. В этом случае уравнение (39.16) описывает сферические сходящиеся и расходящиеся волны. Если источник генерирует гармонические колебания, то

$$\psi_a = \frac{A_1}{r}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(ct - r)\right) + \frac{A_2}{r}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(ct + r)\right), \quad (39.18)$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}c$ — длина волны.

Из решений (39.18) и (39.15) следует, что волна — это периодический процесс во времени и пространстве. Распространение волны можно рассматривать как движение ее фронта.

39.4. Стоячие волны

Две волны, имеющие одинаковые амплитуды, частоты и длины волн и распространяющиеся одновременно в одной и той же среде в противоположных направлениях, при сложении образуют *стоячую волну*. Такие волны возникают при сложении падающей одномерной волны с волной, отраженной от менее или более плотной среды. Пусть

$$\psi_1 = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{c}z\right) \text{ и } \psi_2 = A\sin\left(\omega t + \frac{\omega}{c}z\right) \quad (39.19)$$

— падающая и отраженная волны. Тогда стоячая волна ψ имеет вид

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\sin\omega t. \quad (39.20)$$

В наиболее общем случае стоячая волна описывается выражением

$$\psi(z, t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi). \quad (39.21)$$

Амплитуда $A(z)$ зависит от координаты положения равновесия z по гармоническому закону

$$A(z) = A\sin\frac{2\pi z}{\lambda} + B\cos\frac{2\pi z}{\lambda}, \quad (39.22)$$

где A и B — постоянные, λ — длина волны, т. е. расстояние, на котором совершается одно полное колебание. В формулах (39.21) и (39.22) необходимо учесть граничные условия. В случае, если $\psi(z, t)$ описывает колебание струны длиной L, закрепленной на концах:

$$\psi(0, t) = 0, \ \psi(L, t) = 0, \quad (39.23)$$

то из этих условий следует, что $B = 0$ и

$$\sin\frac{2\pi L}{\lambda} = 0. \quad (39.24)$$

Последнее равенство определяет длины λ всех возможных волн, описывающих *колебательные моды* струны:

$$\frac{2\pi L}{\lambda} = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots, \quad (39.25)$$

т. е. стоячая волна может образовываться только в том случае, если L кратно целому числу полуволн $\lambda/2$ (рис. 39.5). Этим модам соответствуют частоты

$$\nu_1 = c/\lambda_1,\ \nu_2 = 2\nu_1,\ \nu_3 = 3\nu_1,\ \nu_4 = 4\nu_1,\ \ldots \qquad (39.26)$$

Частоты ν_2, ν_3, ν_4 и т. д. являются гармониками основной частоты ν_1, определяемой фазовой скоростью

$$c = \sqrt{T_0/\rho_0} = \lambda\nu, \qquad (39.27)$$

где T_0 — натяжение струны в положении равновесия, ρ_0 — ее линейная плотность. Частоты мод большинства физических систем не образуют такой гармонической последовательности. Так, если струна неоднородна, то $\nu_2 = 2{,}78\nu_1$, $\nu_3 = 4{,}62\,\nu_1$ и т. д. Другая причина нарушения гармонической последовательности частот состоит в том, что физические системы (струны) не являются абсолютно упругими. Свойство (39.26) строго выполняется только для абсолютно упругих и однородных твердых тел.

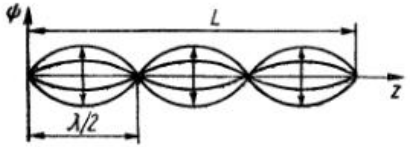


Рис. 39.5

Согласно (39.27)

$$\omega = k\sqrt{T_0/\rho_0}, \qquad (39.28)$$

где k — волновое число. Выражение типа (39.28), определяющее зависимость частоты ω от волнового числа k, называется *дисперсионным соотношением*. Закон дисперсии для реальной струны приближенно описывается формулой

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_0}{\rho_0} + \alpha k^2,$$

где α — небольшая положительная константа, равная нулю для совершенно упругой струны.

Волны, удовлетворяющие дисперсионному соотношению $\omega/k = \text{const}$, называют *недиспергирующими волнами*. Если отношение ω/k зависит от длины волны λ, то волны называют *диспергирующими*.

39.5. Распространение волн в неоднородных средах

39.5.1. Отражение и преломление волн. При распространении волн в неоднородных средах прямолинейность хода их лучей нарушается. Если пространство заполнено разными средами, имеющими четкие границы, то при прохождении волны через эти границы будут наблюдаться явления *отражения* и *преломления* волн.

Угол между падающим лучом и перпендикуляром к поверхности в точке падения называется *углом падения*, а угол между отраженным лучом и перпендикуляром к поверхности называется *углом отражения*. При падении луча на границу двух сред выполняется **закон отражения**

$$\alpha = \beta, \qquad (39.29)$$

где α и β — углы падения и отражения соответственно для лучей и перпендикуляров, лежащих в одной плоскости (рис. 39.6). Если луч переходит из одной среды в другую, то он преломляется (рис. 39.7). **Закон преломления** имеет вид

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{c_1}{c_2} = n_{21}, \qquad (39.30)$$

где c_1 и c_2 — скорости распространения волн в средах 1 и 2, α — угол падения, γ — угол преломления, равный углу между перпендикуляром к поверхности раздела двух сред в точке падения луча и прошедшим лучом.

Постоянную n_{21} называют *относительным коэффициентом преломления* среды 2 по отношению к среде 1. Закон (39.30) справедлив для лучей и перпендикуляра к границе сред, лежащих в одной плоскости.

Если граница раздела двух сред не плоская, то при падении волны на такую граничную поверхность может изменяться тип волны. Так, плоская волна превращается в сферическую волну, если границей является сферическая поверхность.

Если скорость распространения волны в среде изменяется не скачком, а плавно в объеме, то происходит постепенное преломление волны. Это явление называется *рефракцией*.

Для характеристики отражения и преломления волн вводят поня-

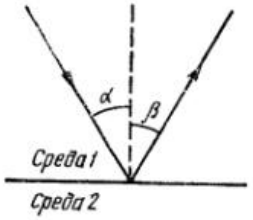


Рис. 39.6

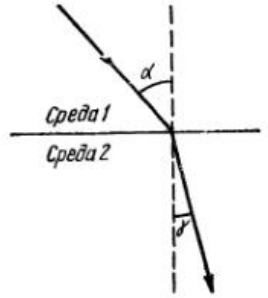


Рис. 39.7

тия коэффициентов отражения R и прохождения T. *Коэффициентом отражения* R называется отношение интенсивностей отраженной и падающей волн. *Коэффициентом прохождения* T называют отношение интенсивностей преломленной и падающей волн. Если среды не поглощают волн, то из закона сохранения потока следует, что

$$R + T = 1. \qquad (39.31)$$

Случай $R = 1$ и $T = 0$ соответствует полному внутреннему отражению.

Пусть падающая волна имеет вид бегущей волны в направлении оси z:

$$\psi_{\text{пад}}(z,\ t) = A\cos(\omega t - kz), \qquad (39.32)$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, ω — частота, c — фазовая скорость. Тогда отраженная волна описывается формулой

$$\psi_{\text{отр}}(z,\ t) = RA\cos(\omega t + kz) \qquad (39.33)$$

и полное смещение $\psi(z,\ t)$ равно суперпозиции

$$\psi(z,\ t) = \psi_{\text{пад}}(z,\ t) + \psi_{\text{отр}}(z,\ t) = \\ = A\cos(\omega t - kz) + RA\cos(\omega t + kz). \qquad (39.34)$$

Если колеблющееся тело есть полубесконечная непрерывная струна, простирающаяся от $z = -\infty$ до $z = 0$, то

$$R = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2), \qquad (39.35)$$

где Z_1 — импеданс струны, Z_2 — импеданс нагрузки, к которой подсоединена струна в точке $z = 0$. Передатчик, генерирующий бегущую волну (39.32), находится в точке $z = -\infty$. Отражение возникает при несогласованности нагрузки и струны $Z_1 \neq Z_2$. *Импедансом* Z непрерывной среды называют величину, определяемую формулой

$$Z = \sqrt{\rho_0 T_0} = \frac{T_0}{c}, \qquad (39.36)$$

где ρ_0 — ее плотность, T_0 — натяжение в положении равновесия. Он характеризует скорость, с которой энергия распространяется вдоль среды, когда на нее действует внешняя сила. Фазовая скорость c и импеданс Z представляют собой параметры, характеризующие бегущие волны в непрерывной среде. Импеданс Z есть коэффициент пропорциональности между силой сопротивления среды F, действующей на передатчик, излучающий бегущие волны, и скоростью перемещения частиц среды на выходе передатчика $\partial\psi/\partial t$:

$$F = -Z\frac{\partial \psi}{\partial t}. \qquad (39.37)$$

Мощность $P(z, t)$, испускаемая передатчиком в виде бегущей волны $\psi_{\text{пад}}(z, t)$ (39.32) в направлении оси z, имеет вид

$$P(z, t) = Z\left[\frac{\partial \psi_{\text{пад}}(z, t)}{\partial t}\right]^2. \qquad (39.38)$$

Если на плоскую границу раздела двух сред падает плоская неполяризованная волна, то коэффициент отражения

$$R = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2(\alpha - \gamma)}{\sin^2(\alpha + \gamma)} + \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \gamma)}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \gamma)}\right], \qquad (39.39)$$

где α и γ — углы падения и преломления. Если волна падает перпендикулярно границе ($\alpha = \gamma = 0$), то

$$R = \left(\frac{n_{21} - 1}{n_{21} + 1}\right)^2, \qquad (39.40)$$

где n_{21} — относительный показатель преломления (39.30).

39.5.2. Интерференция. Дифракция. Если в среде распространяется несколько волн, то происходит их сложение. *Интерференцией* называется явление сложения когерентных волн, в результате которого наблюдается их усиление в одних точках пространства и ослабление в других. Под *когерентными* понимают волны, которые характеризуются одинаковой частотой ω и не зависящей от времени разностью фаз $\Delta\varphi$. Пусть имеются две волны ψ_1 и ψ_2, распространяющиеся вдоль оси z:

$$\psi_1 = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right), \quad \psi_2 = A\sin\left(\omega t - \frac{\omega z}{c} + \Delta\varphi\right), \qquad (39.41)$$

где $\Delta\varphi$ — фазовый сдвиг волн ψ_1 и ψ_2 в области суперпозиции, $\Delta\varphi = \omega\Delta z/c$, Δz — разность путей, проходимых волнами в области их наложения. Результирующее отклонение $\psi(z, t)$ в точке z в момент времени t определяется формулой

$$\psi(z, t) = A\sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + A\sin\omega\left(t - \frac{z + \Delta z}{c}\right). \qquad (39.42)$$

Отсюда следуют условия максимального усиления волн

$$\Delta\varphi = 2\pi n, \quad \Delta z = \lambda n \qquad (39.43)$$

и их гашения (ослабления)

$$\Delta\varphi = (2n + 1)\pi, \quad \Delta z = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (39.44)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

При сложении некогерентных волн явление интерференции не возникает.

Дифракцией называется явление огибания волной малых препятствий, встречающихся на ее пути. При этом волна заходит за препятствие (в область геометрической тени). В более широком смысле под дифракцией понимают совокупность явлений, наблюдающихся при прохождении волн через среды с сильно выраженными неоднородностями. Строгое изучение дифракции волн на основе решения волновых

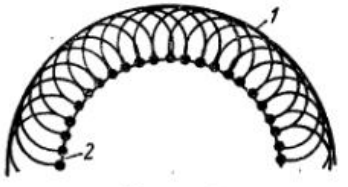


Рис. 39.8

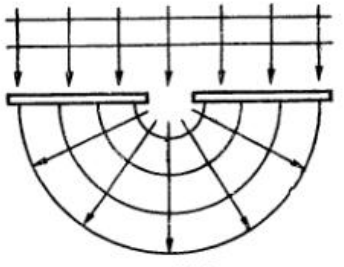


Рис. 39.9

уравнений (39.13) или (39.16), дополненных граничными условиями, учитывающими неоднородности среды, является очень сложной задачей. Поэтому для анализа явления используют **принцип Гюйгенса — Френеля** (1678, 1815): *каждую точку волнового фронта в данный момент времени можно рассматривать в качестве источника вторичных волн, которые являются когерентными.* Согласно этому принципу каждая точка среды, вовлеченная в волновое движение, является источником новой волны, которые интерферируют между собой. Наблюдаемый фронт волны (рис. 39.8, кривая *1*) есть результат сложения этих вторичных волн. (На рис. 39.8 источник вторичных волн показан кривой *2*.) Явление интерференции наблюдается при прохождении волны через узкую щель (рис. 39.9). Принцип Гюйгенса—Френеля не применим, если на поверхности препятствий изменяется распределение интенсивности волн [54].

39.6. Солитоны

При некоторых условиях, когда, например, волны переносят большую энергию, они могут изменять физические свойства среды, в которой распространяются. Уравнения движения в этом случае будут нелинейными. В простейшем случае вместо линейного уравнения (39.13) для смещения $\psi(z, t)$, описывающего действительное скалярное поле, можно написать

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(z, t) + \psi^3(z, t) = 0. \qquad (39.45)$$

Не все решения этого уравнения известны. Точный численный и приближенный аналитический расчет показывает, что волновой пакет, составленный из решений $\psi(z, t)$, с течением времени будет расплываться. Однако существует ряд других нелинейных волновых уравнений, среди решений которых существуют непериодические локализованные решения, амплитуда которых в направлении, перпендикулярном фронту волны, отлична от нуля только в малой области пространства. Такие решения соответствуют уединенным бегущим волнам. Уединенную волну, которая не затухает и не поглощается средой, а сохраняет свои размеры и форму сколь угодно долго, называют *солитоном*. Физическая причина существования солитона состоит в том, что нелинейные члены в уравнениях движения полностью компенсируют дисперсию, приводящую к изменению формы уединенной волны.

Наиболее исследованными нелинейными волновыми уравнениями, имеющими солитонные решения, являются: *уравнение Кортевега — де Фриза* (1895)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - 6\psi \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} = 0, \tag{39.46}$$

нелинейное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2\psi |\psi|^2 = 0 \tag{39.47}$$

и *уравнение синус-Гордон*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \sin \psi \text{ или } \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} = \sin \psi. \tag{39.48}$$

Солитонное решение уравнения (39.46) имеет вид

$$\psi = -2\eta^2 \operatorname{sech}^2 [\eta (z - 4\eta^2 t)], \tag{39.49}$$

где $4\eta^2$ — скорость распространения уединенной волны.
Солитонное решение уравнения (39.47) дается формулой (В. Е. Захаров и А. Б. Шабат, 1967)

$$\psi = \frac{2\eta \exp[-4i(\xi^2 - \eta^2) t - 2i\xi z + i\delta]}{\operatorname{ch}[2\eta (t - t_0) - 8\eta\xi t]}, \tag{39.50}$$

где ξ, η, δ и t_0 — свободные параметры. Это решение описывает кривую, в которой огибающая, имеющая форму кривой гиперболического секанса, модулирует монохроматическую волну, описываемую числителем. В этом солитоне нет связи между скоростью волны и амплитудой как в (39.49). Солитонное решение уравнения (39.48) имеет вид кинка

$$\psi = 4 \operatorname{arctg} \exp\left[\pm \frac{z - z_1 - V_1 t}{(1 - V_1^2)^{1/2}}\right], \tag{39.51}$$

где z_1 и V_1 — свободные параметры, знак плюс соответствует кинку с граничными условиями

$$\psi \to 0, \ z \to -\infty; \ \psi \to 2\pi, \ z \to +\infty \ (2\pi\text{-кинк}),$$

а знак минус — антикинку, имеющему асимптотики

$$\psi \to 2\pi, \ z \to -\infty; \ \psi \to 0, \ z \to +\infty \ (-2\pi\text{-антикинк}).$$

Солитон — это уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость после столкновения с другой такой же волной. Не все уединенные волны удовлетворяют этому требованию. Так, уравнение, возникающее в теории поля с плотностью гамильтониана

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \pm \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4\right),$$

называемое уравнением φ^4:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \pm (\varphi - \varphi^4), \tag{39.52}$$

имеет решение типа кинк (антикинк)

$$\varphi = \pm \operatorname{th} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{z - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}. \tag{39.53}$$

При столкновении уединенных волн (39.53) они могут зацепляться, уничтожать одна другую и излучать энергию в виде осциллирующих возмущений.

В методе обратной задачи показывается, что солитоны описываются связанными состояниями задачи рассеяния.

40. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

40.1. Природа звуковых волн

Звуковыми волнами называют упругие волны с частотами от 16 до 20000 Гц, воспринимаемыми органами слуха человека. Эти волны являются продольными. Они распространяются в твердых телах, жидкостях и газах в виде колебаний давления. Каждая частица среды совершает колебания вокруг своего положения равновесия. Перемещения вещества при этом не происходит. Колебания с частотой $\nu > 20000$ Гц называются *ультразвуком*, а с $\nu < 16$ Гц — *инфразвуком*.

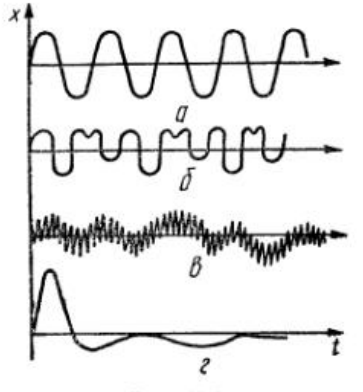


Рис. 40.1

Источником звука называется колеблющееся тело, излучающее звуковые волны, например, струна, камертон, пластинка, стержень, столб воздуха в трубе, мембрана, голосовые связки человека, колокольчик и т. д. При изучении звука используют камертон или звуковой генератор — радиотехническое устройство, генерирующее и излучающее звуковые волны.

Раздел физики, в котором изучают звуковые волны и их взаимосвязь с другими явлениями, называется *акустикой*. В акустике различают: 1) музыкальный тон (рис. 40.1, *а*), представляющий собой синусоидальное колебание; 2) созвучие или музыкальный звук (рис. 40.1, *б*), представляющий собой результат наложения нескольких одновременно звучащих музыкальных тонов; 3) шум (рис. 40.1, *в*), являющийся нерегулярным колебанием, возникающим в результате сложения большого числа колебаний с близкими амплитудами, но различными ча-

стотами; 4) взрыв (рис. 40.1, *в*) — кратковременное и сильное звуковое воздействие на органы слуха человека. Звуковые ощущения принято характеризовать *громкостью*, *высотой* и *тембром*. Громкость звука зависит от амплитуды звуковых колебаний, высота от их частоты, а тембр от формы. Скорости распространения звуковых волн c в твердых телах, жидкостях и газах описываются формулами (39.3) — (39.5). Скорость звука в газах в широких пределах зависит только от температуры и не зависит от давления газа. Скорость звука в воздухе при $t = 0$ °С равна (экспериментальное значение)

$$c_0 = 331{,}6 \text{ м/с}.$$

Таблица 40.1. Скорость звука c в различных средах

Среда	t, °С	c, м/с	Среда	t, °С	c, м/с
Газовое состояние			**Твердое состояние**		
Азот	0	333,6	Алюминий	20	5080
Аргон	0	319	Алюминий	372	4342
Ацетилен	0	327	Висмут	20	1790
Водород	0	1248	Вольфрам	20	4310
Воздух	0	331,6	Гранит	—	3950
Водяной пар	0	401	Дерево	—	4000
Гелий	0	965	Железо	20	5170
Кислород	0	316	Золото	20	2030
Неон	0	435	Иридий	20	4790
Оксид азота (IV)	0	324	Кадмий	20	2400
Хлороформ	100	171	Константан	20	4300
Этан	0	302	Латунь	20	3490
			Лед	—	3280
Жидкое состояние			Марганец	—	3830
			Мрамор	—	3810
Азот	—203	929	Медь	20	3710
Аргон	—186	837	Никель	20	4785
Ацетон	20	1192	Олово	20	2730
Бензин	17	1166	Платина	20	2800
Бензол	20	1324	Плексиглас	—	2670
Вода (дист.)	20	1484	Полистирол	—	2350
Вода (морск.)	20	1490	Пробка	—	500
Водород	—253	1127	Свинец	20	1200
Гелий	—269	180	Серебро	—	2640
Глицерин	20	1923	Сталь	—	5050
Керосин	15	1330	Стекло кварцевое	—	5370
Кислород	—210	1130	Стекло кронглас	—	5300
Нефть	15	1470	Стекло легкий флинтглас	—	4550
Ртуть	20	1451	Стекло тяжелый кронглас	—	4710
Свинец	327	1790	Фарфор	—	4884
Спирт (этил.)	23	1177	Цинк	20	3810
			Чугун	—	3850
			Эбонит	—	1570

Зная эту скорость, легко вычислить скорость звука в воздухе при любой температуре

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \approx 331{,}6 + 0{,}6t, \tag{40.1}$$

где t — температура воздуха (в °С). В табл.40.1 приведена скорость звука c для различных сред.

40.2. Характеристики звука

Для звуковых волн справедливы все закономерности, рассмотренные в разделах [34—39] для продольных волн. При звуковых колебаниях частицы среды совершают колебательные движения с определенной скоростью. Если эти колебания гармонические, $x = A\sin\omega t$, то скорость частиц $v = \dot{x} = \omega A\cos\omega t$. *Максимальная колебательная скорость*

$$v_{max} = \omega A = 2\pi\nu A \tag{40.2}$$

задает *эффективное* ее значение

$$v_{эф} = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi\nu A = \frac{\omega A}{\sqrt{2}}, \tag{40.3}$$

где ν — частота, A — амплитуда колебаний.

При движении звуковой волны в среде в последней происходит *периодическое изменение давления*. Это давление называют *звуковым давлением* P. Мгновенное значение звукового давления P в определенной точке среды определяется формулой

$$P = \rho c\omega A\cos\omega t, \tag{40.4}$$

где ρ — плотность среды, c — скорость звука в среде, $\omega = 2\pi\nu$ — угловая частота. Амплитуда давления, определяющая максимальное звуковое давление:

$$P_{max} = \rho c\omega A = \rho c v_{max} \tag{40.5}$$

определяет и эффективное звуковое давление

$$P_{эф} = \frac{P_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{\rho c v_{max}}{\sqrt{2}}. \tag{40.6}$$

Интенсивностью или *силой звука* I называют отношение падающей на поверхность звуковой мощности P к площади этой поверхности S:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{W}{tS} = \frac{Wl}{tV} = uc = \frac{\rho}{2}cA^2\omega^2 = \rho c v_{эф}^2,$$

$$I = \frac{P_{max}^2}{2\rho c} = \frac{1}{2}P_{max}A\omega = P_{эф}v_{эф} = \frac{P_{эф}^2}{\rho c}, \tag{40.7}$$

где W — энергия, падающая на поверхность S за время t (поток энергии), l — путь, который проходит волна за время t, $V = Sl$ — объем, в котором заключена энергия W, $u = \frac{W}{V}$ — плотность энергии (39.6), c — скорость звука, $v_{эф}$ — эффективная скорость (40.3), $P_{эф}$ — эффективное давление (40.6).

Для сравнения интенсивностей звука используют величину

$$L_p = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \qquad (40.8)$$

где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2 — стандартный порог слышимости, равный порогу слышимости органов слуха человека на частоте $\nu = 1$ кГц. Несмотря на то что L_p — безразмерная величина, для ее числового значения принята единица децибел (дБ). Величина I_0 определяет стандартное пороговое звуковое давление P_0. Для нормального воздуха $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па.

Мерой ослабления звуковых волн при прохождении через различные материалы является *коэффициент звукопоглощения*

$$D = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}, \qquad (40.9)$$

где I_1 и I_2 — интенсивности звуковой волны до и после прохождения через данный звукоизоляционный материал.

При прохождении звуковой волны через границу двух сред наблюдаются явления отражения и преломления волны. Их характеризуют *коэффициентами отражения* R и *прохождения* T:

$$R = \frac{I_{\text{отр}}}{I_{\text{пад}}}, \quad T = \frac{I_{\text{пр}}}{I_{\text{пад}}}, \qquad (40.10)$$

где $I_{\text{пад}}$, $I_{\text{отр}}$ и $I_{\text{пр}}$ — интенсивности падающей, отраженной и преломленной волн соответственно.

При взаимодействии звуковой волны с препятствиями, находящимися на пути ее распространения, образуется множество вторичных волн, распространяющихся во всех направлениях в пространстве. Это явление называется *рассеянием звука*. Его характеризуют полным эффективным сечением σ, равным отношению мощности рассеянных волн к интенсивности падающей волны. При рассеянии звука на препятствиях, размеры которых малы по сравнению с длиной звуковой волны, имеем $\sigma \sim \omega^4$, где ω — циклическая частота падающей волны.

40.3. Эффект Доплера

Если источник и приемник звука движутся один относительно другого так, что расстояние между ними уменьшается или увеличивается, то приемник будет воспринимать частоту, отличную от частоты, испускаемой источником звуковой волны. *Зависимость воспринимаемой частоты волн от скорости движения источника и приемника по отношению к среде, в которой распространяются эти волны,* называется **эффектом Доплера** (1842). Пусть источник Q звуковых волн с частотой ν_Q движется относительно среды со скоростью $\mathbf{u}_Q$, а приемник B — со скоростью $\mathbf{u}_B$. Тогда частота ν_B, воспринимаемая приемником, определяется формулой

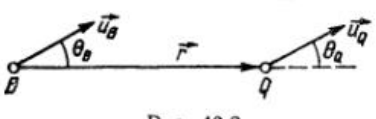


Рис. 40.2

$$\nu_B = \nu_Q \frac{c + u_B \cos \theta_B}{c + u_Q \cos \theta_Q}, \qquad (40.11)$$

где c — скорость звука в неподвижной среде, θ_B, θ_Q — углы между векторами $\mathbf{u}_B$ и $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}_Q$ и $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный от приемника B к источнику Q (рис. 40.2). Для малых скоростей $u_Q \ll c$, $u_B \ll c$

$$\nu_B = \nu_Q \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta\right), \qquad (40.12)$$

где $u = u_Q - u_B$, $\theta = \theta_Q - \theta_B$.

40.4. Ультразвук

Ультразвуком называют звуковые колебания с частотами $\nu = 2 \cdot 10^4 - 10^{13}$ Гц. Верхний предел частот ультразвука в данной среде определяется межмолекулярным расстоянием или длиной свободного пробега молекул (в газе). В кристаллах и жидкостях он равен 10^{12}—10^{13} Гц, а в газах — 10^9 Гц.

Из-за большой частоты (малой длины волны) ультразвук обладает особыми свойствами. Так, подобно свету ультразвуковые волны могут образовывать строго направленные пучки. Отражение и преломление этих пучков на границе двух сред подчиняется законам геометрической оптики [47]. С помощью вогнутых зеркал ультразвуковые волны можно направлять от источника в строго определенном направлении.

Из определения интенсивности I (40.7) следует, что

$$I = 2\pi^2 \rho c A^2 \nu^2.$$

Поэтому высоким частотам ν ультразвука соответствуют большие интенсивности (до значений $I = 20$ Вт/см^2). Это приводит к нагреву тел, подвергающихся воздействию ультразвуковых волн, к образованию в жидкостях пустот (*явление кавитации*) в виде мельчайших пузырьков с кратковременным возрастанием давления до сотен и тысяч атмосфер. Ультразвук сильно поглощается газами и слабо — жидкостями. Это объясняется бо́льшей кинематической вязкостью газов по сравнению с жидкостями.

Ультразвуковые волны ускоряют протекание процессов диффузии. Они существенно влияют на растворимость веществ и в целом на ход химических реакций.

Эти особенности взаимодействия ультразвука со средой обусловливают его широкое техническое использование. Он находит применение в молекулярной физике (исследование акустическими методами строения вещества), в технике (ультразвуковая пайка алюминия, ультразвуковое сверление, кавитация в среде, удаление газов из металлических расплавов и жидкостей, создание эмульсий воды и масел, обнаружение внутренних дефектов в твердых телах, гидролокация), в медицине и биологии (ультразвуковой массаж, разрушение клеток).

Глава X

Электромагнитные колебания и волны

41. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

41.1. Колебательный контур

Математическое описание электромагнитных колебаний аналогично описанию механических колебаний [IX]. Простейшей системой, в которой возникают электромагнитные колебания, является *колебательный контур*, состоящий из последовательно соединенных *конденсатора* емкостью C, *катушки с индуктивностью* L и *проводника* с омическим сопротивлением R. Для создания между обкладками конденсатора напряжения V в цепь подключается источник с ЭДС $\mathscr{E}$, которая изменяется со временем (рис. 41.1).

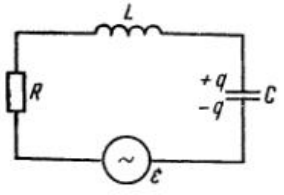


Рис. 41.1

Если конденсатору емкостью C сообщить некоторый заряд q, то после прекращения действия источника ЭДС он будет разряжаться через индуктивность L. Электрическая энергия конденсатора при этом будет переходить в магнитную энергию катушки индуктивности до тех пор, пока заряд конденсатора не обратится в нуль, а сила тока I в контуре достигнет максимума. После этого ток, не меняя направления, начнет убывать медленно из-за противодействия ЭДС индукции. Пластины конденсатора начнут заряжаться так, что знаки их зарядов будут противоположны знакам зарядов в начальный момент времени. Возникает электрическое поле, стремящееся ослабить ток. Через конечный промежуток времени ток обратится в нуль, а заряд на конденсаторе достигнет максимума. Если в контуре нет электрического сопротивления R, то в результате рассмотренного процесса произойдет перезарядка пластин конденсатора, при которой их заряды поменяются местами. Далее конденсатор снова начнет разряжаться через индуктивность L, и по цепи будет течь ток I в обратном направлении. Весь процесс перезарядки конденсатора повторится в обратном направлении (рис. 41.2). Если в контуре нет потерь энергии, то рассмотренный циклический процесс будет длиться неограниченно долго — в контуре будут совершаться строго периодические незатухающие колебания.

Уравнение колебательного контура (рис. 41.1) следует из уравнения (30.3) эквивалентного уравнению Максвелла (31.11), которое описывает электромагнитную индукцию [30.1; 30.2]. Оно имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right)+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathscr{E}, \tag{41.1}$$

где L — индуктивность контура, q — заряд на обкладках конденсатора емкостью C, R — омическое сопротивление контура, $\mathscr{E}$ — ЭДС источника тока. Если катушка индуктивности не деформируется, то $L=$ const и уравнение (41.1) описывает вынужденные колебания электрического заряда

$$\ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2 q=F_в, \tag{41.2}$$

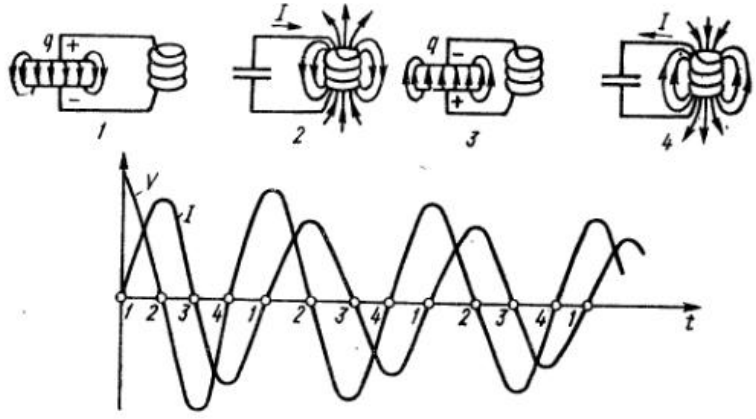


Рис. 41.2

где введены обозначения

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC},\quad 2\beta=\frac{R}{L},\quad F_в=\frac{\mathscr{E}}{L}. \tag{41.3}$$

Величина ω_0 есть собственная частота колебательного контура, β — коэффициент затухания, $F_в$ — возмущающая сила. Решение уравнения (41.2) полностью эквивалентно решению уравнения (37.3) для механических малых вынужденных колебаний.

41.2. Незатухающие электромагнитные колебания

Незатухающие электромагнитные колебания возникают в колебательном контуре (рис. 41.1) в том случае, если его омическое сопротивление равно нулю ($R=0$) и нет постоянно действующей возмущающей силы со стороны источника ЭДС ($\mathscr{E}=0$). Уравнение свободных колебаний электрического заряда согласно (41.2), (41.3) имеет вид уравнения гармонических колебаний (35.4):

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q=0,\quad \omega_0^2=1/LC. \tag{41.4}$$

Его решение

$$q=q_0\cos(\omega_0 t+\delta). \tag{41.5}$$

Величины q_0 и δ являются постоянными, которые определяются граничными условиями: величиной заряда q и тока $I = \dot{q}$ в момент времени $t = 0$. Промежуток времени

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \tag{41.6}$$

через который значения заряда q периодически повторяются, есть период колебаний контура. Формула (41.6) называется **формулой Томсона**. Частота колебаний ν_0, т. е. число колебаний за единицу времени, выражается формулой

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{41.7}$$

Ток $I = \dot{q}$ при электрических колебаниях (41.5) имеет вид

$$I = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \delta) = \omega_0 q_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) \tag{41.8}$$

— колебания тока опережают колебания заряда q по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Мгновенное напряжение V_c на обкладках конденсатора описывается формулой

$$V_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\cos(\omega_0 t + \delta) = V_0 \cos(\omega t + \delta) \tag{41.9}$$

— колебание напряжения совпадает по фазе с колебанием заряда. Амплитуды тока $I_0 = \omega_0 q_0$ и напряжения $V_0 = q_0/C$ показывают, что справедливо соотношение

$$I_0 = \frac{V_0}{R}, \quad R = \sqrt{L/C}. \tag{41.10}$$

Величину $R = \sqrt{L/C}$ называют *волновым сопротивлением контура*. Электрическая U_e и магнитная U_m энергии определяются выражениями

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_0^2}{4C}[1 + \cos 2(\omega_0 t + \delta)],$$

$$U_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} L\omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) =$$

$$= \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_0^2}{4C}[1 - \cos 2(\omega_0 t + \delta)]. \tag{41.11}$$

Средние значения этих величин одинаковы и равны между собой:

$$\langle U_e \rangle = \langle U_m \rangle = \frac{q_0^2}{4C} = \frac{1}{4} LI_0^2.$$

Энергии U_e и U_m совершают гармонические колебания около значений $\langle U_e \rangle$ и $\langle U_m \rangle$ (41.11) с частотой $2\omega_0$. Они непрерывно переходят одна в другую так, что полная энергия U сохраняется:

$$U = U_e + U_m = \frac{q_0^2}{2C}. \tag{41.12}$$

41.3. Затухающие электромагнитные колебания

Затухающие электромагнитные колебания описываются уравнениями (41.2), (41.3) при $\mathscr{E} = 0$:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \tag{41.13}$$

Вид решения этого уравнения зависит от соотношения величин ω_0 и β, характеризующих собственную частоту колебаний и степень затухания в контуре. В случае $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, т. е. $R < 2\sqrt{L/C}$, имеем

$$q = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta),$$
$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}. \tag{41.14}$$

Функция $q = q(t)$ описывает гармонические колебания заряда с частотой ω и амплитудой

$$A = A_0 e^{-\beta t} = A_0 e^{-\frac{R}{2L}t}, \tag{41.15}$$

которая зависит от времени. Такие колебания называют затухающими колебаниями [36]. Их амплитуда A с течением времени уменьшается. Период затухающих колебаний T и частота ν определяются формулами

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = 2\pi \Big/ \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad \nu = \frac{1}{T}. \tag{41.16}$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ ток контуре $I = \dot{q} = 0$, а заряд $q = q_0$, то начальные амплитуда A_0 и фаза δ в (41.14) выражаются формулами

$$A_0 = \frac{q_0}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}} = \frac{q_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}. \tag{41.17}$$

Сила тока $I = \dot{q}$ в контуре и напряжение $V_c = q/C$ на обкладках конденсатора изменяются по законам

$$I = A_0 e^{-\beta t}[\omega\cos(\omega t + \delta) - \beta\sin(\omega t + \delta)] =$$
$$= A_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\cos(\omega t + \delta) - \beta\sin(\omega t + \delta)\right], \tag{41.18}$$
$$V_c = \frac{A_0}{C} e^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta) = \frac{A_0}{C} e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega t + \delta).$$

Логарифмический декремент затухания λ (36.7) имеет вид

$$\lambda = \beta T = \frac{RT}{2L}, \tag{41.19}$$

а добротность контура (36.8)

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1} = \frac{\omega L}{R}. \tag{41.20}$$

В случае $\omega_0^2 - \beta^2 = 0$, т. е. $R = 2\sqrt{L/C}$, имеем решение уравнения (41.13) в виде

$$q = (A + Bt)\, e^{-\beta t},\ \beta = \frac{R}{2L}, \tag{41.21}$$

где A и B — постоянные. Функция (41.21) описывает апериодический процесс. Если при $t = 0$ заряд $q = q_0 = 0$, а ток $\dot{q} = \dot{q}_0$, то $A = 0$, $B = \dot{q}_0$ и

$$q = \dot{q}_0 t e^{-\beta t},\ \dot{q} = (1 - \beta t)\, \dot{q}_0 e^{-\beta t}. \tag{41.22}$$

Если при $t = 0$ заряд $q = q_0$, ток $\dot{q} = \dot{q}_0 = 0$, то $A = q_0$, $B = \beta q_0$ и

$$q = q_0 (1 + \beta t)\, e^{-\beta t},\ \dot{q} = -q_0 \beta^2 t e^{-\beta t}. \tag{41.23}$$

Если $A = 0$, $B \neq 0$, то функция (41.21) имеет один максимум; если $B = 0$, $A \neq 0$, то эта функция монотонно спадает.

В случае $\omega_0^2 - \beta^2 < 0$, т. е. $R > 2\sqrt{L/C}$, общее решение уравнения (41.13) записывается в форме

$$q = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t},$$
$$\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \tag{41.24}$$
$$\lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}},$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Если при $t = 0$ заряд $q = q_0 = 0$, а ток $q = \dot{q}_0$, то

$$q = \frac{\dot{q}_0}{2\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}). \tag{41.25}$$

41.4. Открытый колебательный контур

Выражения (41.7) и (41.16) показывают, что при высоких частотах ν_0 и ν емкость конденсатора C и индуктивность катушки L колебательного контура должны быть малыми. Поэтому простой отрезок провода в этом случае является колебательным контуром. Его называют *вибратором*. Между концами вибратора течет синусоидальный ток. Если длина вибратора равна половине длины волны, то в нем возникает стоячая волна с узлами тока I на концах и узлом напряжения V в середине (рис. 41.3). В технике вибраторы используются в качестве излучателей электромагнитных волн [43].

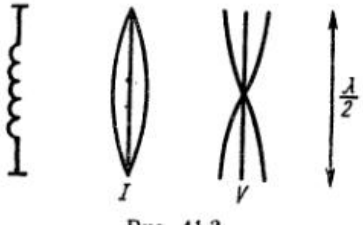


Рис. 41.3

42. ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

42.1. Переменный ток

Переменным током называется ток, изменяющийся с течением времени по гармоническому закону. Такой ток существует в колебательном контуре, в котором электромагнитные колебания не затухают со временем.

Для получения незатухающих электромагнитных колебаний к контуру необходимо подводить энергию. Для этого в цепь включают источник тока с периодически изменяющейся ЭДС (рис. 41.1). Если ЭДС $\mathscr{E}$ источника тока изменяется по закону $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$, то уравнение вынужденных колебаний (41.1) принимает вид

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t, \tag{42.1}$$

где ω — частота возмущающих колебаний, $\mathscr{E}_0$ — амплитуда ЭДС, q — заряд, L — индуктивность контура, C — емкость конденсатора, R — сопротивление.

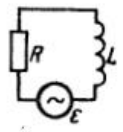


Рис. 42.1

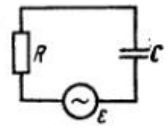


Рис. 42.2

В случае, если в цепи отсутствует конденсатор (рис. 42.1), уравнение (42.1) принимает вид

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathscr{E}_0 \cos \omega t, \tag{42.2}$$

где $I = dq/dt$ — ток в контуре. Его решение имеет вид

$$I = I_0 \cos(\omega t + \delta), \tag{42.3}$$

где амплитуда тока I_0 и начальная фаза δ определяются формулами

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},\ \operatorname{tg}\delta = -\frac{\omega L}{R}. \tag{42.4}$$

Величина $R_L = \omega L$ имеет размерность сопротивления и называется *индуктивным сопротивлением*.

В случае, если контур состоит из сопротивления R, источника ЭДС $\mathscr{E}$ и конденсатора емкостью C (рис. 42.2), то уравнение (42.1) принимает вид

$$\frac{q}{C} + RI = \mathscr{E}_0 \cos \omega t. \tag{42.5}$$

Его решение для тока I имеет вид (42.3), где

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}},\ \operatorname{tg}\delta = \frac{1}{R\omega C}. \tag{42.6}$$

Величина $R_C = 1/\omega C$ имеет размерность сопротивления и называется *емкостным сопротивлением*.

Строго говоря, к решению (42.3), являющемуся частным решением дифференциальных уравнений (42.2) и (42.5), нужно добавить решение однородного дифференциального уравнения (т. е. уравнения

(42.2) с $\mathscr{E}_0 = 0$) [37], которое имеет вид экспоненциально убывающей функции

$$I \sim e^{-\frac{R}{L}t}$$

и соответствует переходному процессу при малых временах $t \lesssim L/R$ до установления устойчивых вынужденных колебаний с током (42.3). При $t \gg \frac{L}{R}$ вклад этого слагаемого в полный ток пренебрежимо мал.

Если переменный ток имеет вид (42.3), то напряжения на индуктивности V_L и на конденсаторе V_C определяются формулами

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = -I_0\omega L \sin(\omega t + \delta), \qquad (42.7)$$

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \delta).$$

Общее напряжение V в цепи из последовательно соединенных индуктивности L и емкости C определяется суммой напряжений V_L и V_C:

$$V = V_L + V_C = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \delta). \qquad (42.8)$$

Если колебательный контур содержит сопротивление R, индуктивность L, емкость C и косинусоидальный источник ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 41.1), то колебания в нем описываются уравнением (42.1), решение которого имеет вид (42.3), где

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}. \qquad (42.9)$$

Максимальный ток I_{max} возникает в случае, когда

$$\omega L - 1/\omega C = 0, \qquad (42.10)$$

т. е. $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$, где ω_0 — собственная частота незатухающих колебаний (41.3),

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\cos\omega t = \frac{\mathscr{E}}{R}. \qquad (42.11)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний силы тока в колебательном контуре при значениях циклической частоты ω внешнего источника ЭДС, близких к собственной частоте незатухающих колебаний ω_0 в этом контуре, называется *резонансом в электрической цепи переменного тока*. Частота $\omega = \omega_0$ называется *резонансной циклической частотой* [37.2].

Из условия резонанса (42.10) следует, что общее напряжение V (42.8) в цепи обращается в нуль, когда частота ω равна резонансной циклической частоте:

$$V = V_L + V_C = 0 \text{ при } \omega = \omega_0. \qquad (42.12)$$

В этом случае амплитуды напряжений на индуктивности V_L и на емкости V_C одинаковы:

$$V_{0L} = V_{0C} = L\omega_0 I_0 = I_0/\omega_0 C.$$

и фазы противоположны: V_L опережает V_C по фазе на π. Полное напряжение в контуре

$$V_{полн} = V_R + V_L + V_C \qquad (42.13)$$

при $\omega = \omega_0$ равно падению напряжения на омическом сопротивлении R, т. е.

$$V_{полн} = V_R \text{ при } \omega = \omega_0. \qquad (42.14)$$

Это явление называется *резонансом напряжений*.

Явление резонанса в колебательном контуре находит широкое применение в радиотехнике. Оно обеспечивает возможность приема радиосигналов путем настройки радиоприемников на частоту данной радиостанции. В электрических цепях, не рассчитанных на работу в условиях резонанса, резкое возрастание тока или напряжения на омическом сопротивлении может привести к пробою изоляторов, расплавлению проводов и другим опасным последствиям. При расчете радиотехнических устройств вредное влияние резонанса необходимо учитывать.

42.2. Цепь переменного тока. Закон Ома

Цепью переменного тока называется электрическая цепь, состоящая из сопротивлений R, емкостей C и индуктивностей L, в которой текут переменные токи с постоянной частотой источника ЭДС $\mathscr{E}$ (рис. 42.3). Колебательный контур с источником ЭДС является простейшей цепью переменного тока (рис. 41.1). Так как частота переменных токов на различных участках сложной цепи одинакова, то для задания этих токов достаточно указывать их амплитуды и начальные фазы. Это же справедливо для напряжений. Рассчитать данную цепь — это означает указать все токи и напряжения на всех участках цепи. Эти величины можно найти, составив и решив соответствующие дифференциальные уравнения. Решение этих уравнений позволяет определить токи и напряжения в цепи как в переходном режиме при малых временах до установившихся устойчивых вынужденных колебаний, так и в установившемся режиме. В последнем случае токи и напряжения могут быть найдены и без решения уравнений колебаний. Идея метода состоит в том, что переменные токи и напряжения можно представлять комплексными числами. При этом сложение и вычитание как токов, так и напряжений выполняется по правилам сложения и вычитания комплексных чисел [42.3]. Кроме того, при заданной частоте отношение напряжения к току характеризуется вполне определенной величиной.

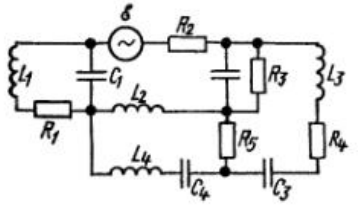


Рис. 42.3

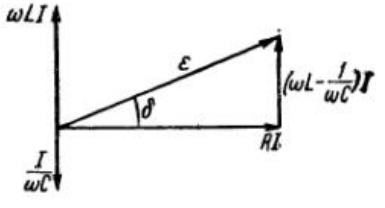


Рис. 42.4

Пусть участок цепи характеризуется последовательно соединенными омическим сопротивлением R, конденсатором C и катушкой самоиндукции L (рис. 41.1). Если к концам этого участка приложена периодическая ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$, то согласно (42.3), (42.9) сила тока в нем

$$I = \frac{\mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \qquad (42.15)$$

Формула (42.15) есть **закон Ома для переменного тока.** Величина

$$\rho = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (42.16)$$

называется *полным сопротивлением* цепи переменного тока. Оно состоит из омического сопротивления R, называемого в этом случае активным сопротивлением, и величины $\omega L - \frac{1}{\omega C} = R_L - R_C$, которую называют *реактивным сопротивлением*. Реактивное сопротивление есть разность индуктивного R_L и емкостного R_C сопротивлений [42.1] Отношение реактивного сопротивления к активному определяет фазу δ в (42.15) между действующей ЭДС и силой тока:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{R_C - R_L}{R}. \qquad (42.17)$$

Комплексная форма закона Ома (42.15) имеет вид

$$I = \frac{\mathscr{E}}{Z} = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho} e^{i(\omega t + \delta)} = I_0 e^{i(\omega t + \delta)}, \qquad (42.18)$$

где использованы обозначения:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}, \quad Z = \rho e^{-i\delta}, \quad I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho}, \quad i \equiv \sqrt{-1}. \qquad (42.19)$$

Величина

$$Z = \rho e^{-i\delta} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \qquad (42.20)$$

называется *комплексным сопротивлением* или *импедансом*. Импеданс измеряется в омах (Ом). Если участок цепи содержит только сопротивление R, то $Z = R$, если только индуктивность, то $Z = i\omega L$, а если только емкость, то $Z = -\frac{i}{\omega C}$.

Закон Ома (42.18) можно представить в виде векторной диаграммы (рис. 42.4) на комплексной плоскости

$$\mathscr{E} = RI + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I. \qquad (42.21)$$

42.3. Правила Кирхгофа для переменного тока

При расчете сильно разветвленных цепей с переменным током пользуются правилами Кирхгофа [26.3.3]. Эти правила применимы к установившемуся периодическому току, записанному в комплексной форме. При этом следует произвести формальную замену омического сопротивления R на соответствующее комплексное сопротивление Z (42.20). **Первое правило Кирхгофа** (26.47) переносится на цепь переменного тока без изменений **Второе правило Кирхгофа** (26.48) принимает вид

$$\sum_k \mathscr{E}_k = \sum_l I_l Z_l. \qquad (42.22)$$

где I_l — сила переменного тока (42.18), проходящего через сопротивление Z_l, $\mathscr{E}_k$ — ЭДС k-го источника тока. Суммирование в (42.22) проводится по всем l сопротивлениям

$$Z_l = R_l + i\left(\omega L_l - \frac{1}{\omega C_l}\right) \qquad (42.23)$$

и всем k источникам ЭДС рассматриваемого замкнутого участка цепи переменного тока.

Пример. Для цепи, показанной на рис. 42.5, правила Кирхгофа приводят к уравнениям

$$I - I_1 + I_2 = 0,$$
$$i\omega L I_1 - i\frac{I_2}{\omega C} = 0,$$

решение которых имеет вид

$$I_1 = \frac{I}{1 - \omega^2 LC}, \quad I_2 = I\frac{\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}.$$

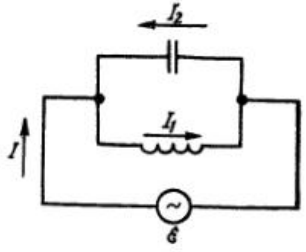


Рис. 42.5

При последовательном соединении l комплексных сопротивлений Z_l общее сопротивление

$$Z = \sum_l Z_l, \qquad (42.24)$$

а при параллельном —

$$\frac{1}{Z} = \sum_l \frac{1}{Z_l}. \qquad (42.25)$$

Если сопротивления параллельных участков (ветвей) цепи одинаковы по своей природе, т. е. состоят из одних только омических, емкостных или индуктивных сопротивлений, то ток в неразветвленной цепи равен сумме токов в отдельных ее ветвях: $I = I_1 + I_2$. Если сопротивления параллельных ветвей имеют различную природу, то ток в неразветвленной цепи меньше суммы токов в отдельных ветвях: $I < I_1 + I_2$. Это связано с тем, что токи через сопротивления разной природы не совпадают по фазе ни между собой, ни с током в неразветвленной цепи (см. (42.17)). Если разность фаз φ между двумя токами с амплитудами I_{01} и I_{02} равна нулю, то $I_0 = I_{01} + I_{02}$, если $\varphi = \pi$, то $I_0 = I_{01} - I_{02}$; если $\varphi = \pi/2$, то $I_0^2 = I_{01}^2 + I_{02}^2$, где I_0 — амплитуда результирующего тока. Ток в цепи с активным сопротивлением R опережает по фазе на четверть периода ($\varphi = \pi/2$) ток в цепи с емкостным сопротивлением R_C и отстает по фазе на четверть периода от тока в цепи с индуктивным сопротивлением. При смешанном сопротивлении разность фаз между токами в параллельных ветвях может принимать любое значение от 0 до $\pm\pi$.

При последовательном соединении сопротивлений одинаковой природы напряжение в цепи V равно сумме падений напряжений на сопротивлениях: $V = V_1 + V_2$. Если сопротивления различны, то $V < V_1 + V_2$. Причина этого состоит в существовании сдвига фаз падений напряжений на сопротивлениях различной природы. Физика этого явления аналогична рассмотренному выше случаю с переменными токами.

Следует иметь в виду, что для мгновенных значений токов (взятых в один и тот же момент времени) в цепи I' и на параллельных участках I'_1 и I'_2 всегда выполняется равенство $I' = I'_1 + I'_2$. Аналогично $V' = V'_1 + V'_2$, где V', V'_1 и V'_2 — мгновенные значения напряжений в цепи и на последовательно соединенных сопротивлениях. Амплитуды и фазы тока I и напряжения V зависят от разности фаз между складываемыми токами и напряжениями.

42.4. Мощность переменного тока

В цепи с активным сопротивлением R происходит необратимое преобразование энергии электрического тока во внутреннюю энергию проводника, выделяется джоулева теплота [26.4.2]. Если пренебречь очень малыми потерями энергии на нагревание диэлектрика в конденсаторе и проводника катушки индуктивности, то прохождение переменного тока через конденсатор и индуктивность не связано с выделением в них мощности. Это связано с тем, что конденсатор, заряжаясь, запасает энергию в виде энергии его электрического поля, а разряжаясь, отдает эту энергию обратно в цепь (рис. 41.2). В катушке индуктивности, пока ток нарастает в течение времени, равном четверти периода, создается магнитное поле за счет энергии источника ЭДС цепи. Однако когда ток уменьшается в течение следующей четверти периода, магнитное поле исчезает, а запасенная в нем энергия в процессе самоиндукции снова возвращается к источнику (рис. 41.2).

Мгновенная мощность P переменного тока (42.3) определяется работой $\delta A = \mathscr{E} dq$, совершаемой ЭДС источника $\mathscr{E}$ за единицу времени dt, в течение которого через поперечное сечение активного сопротивления R прошел заряд dq:

$$P = \mathscr{E}\frac{dq}{dt} = \mathscr{E}I = \mathscr{E}_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos(\omega t + \delta) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos\delta + \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos(2\omega t + \delta), \qquad (42.26)$$

где $\mathscr{E}_0$ — амплитуда ЭДС, I_0 — амплитуда переменного тока, ω — циклическая частота ЭДС, δ — сдвиг фаз между ЭДС и током. Из (42.26) следует, что средняя мощность переменного тока $\overline{P}$ за один период определяется формулой

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0 I_0 \cos\delta. \qquad (42.27)$$

Величины $\mathscr{E}_0$ и I_0 называют *амплитудными значениями напряжения и тока*. В электротехнике используют так называемые эффективные значения напряжения и тока

$$\mathscr{E}^2_{эф} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}^2 dt, \quad I^2_{эф} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt, \qquad (42.28)$$

которые в случае синусоидальных токов равны

$$\mathscr{E}_{эф} = \mathscr{E}_0/\sqrt{2}, \quad I_{эф} = I_0/\sqrt{2}. \qquad (42.29)$$

Тогда

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{эф} I_{эф} \cos\delta. \qquad (42.30)$$

Средняя мощность $\overline{P}$ (42.30) называется также *активной мощностью переменного тока*. Величина

$$\cos\delta = R/\rho, \qquad (42.31)$$

где R — активное сопротивление, ρ — полное сопротивление цепи переменного тока (42.16), называется *коэффициентом мощности*. Этот коэффициент определяется сдвигом фаз δ между колебаниями тока и ЭДС.

Если цепь имеет только активное сопротивление, то $\cos\delta = 1$ и вся мощность передается во внешнюю цепь. Если сдвиг фаз $\delta = \pi/2$, то $\cos\delta = 0$ и средняя мощность равна нулю вне зависимости от величины тока $I_{эф}$ и напряжения $\mathscr{E}_{эф}$. В этом случае энергия, передаваемая за четверть периода от источника ЭДС (генератора) во внешнюю цепь, равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода. При $\delta = \pi/2$ вся энергия колеблется между генератором и нагрузкой. Когда нагрузка имеет большое реактивное сопротивление, то $\cos\delta \ll 1$ и для передачи нужной мощности во внешнюю цепь необходимо увеличить силу тока $I_{эф}$, а это в свою очередь требует увеличения сечения проводников цепи. Поэтому на практике внешнюю цепь составляют так, чтобы добиться значений коэффициента мощности (42.31) близких к единице.

42.5. Трансформатор

Трансформатором называется прибор, с помощью которого производится преобразование (повышение или понижение) напряжения переменного тока. Простота устройства трансформатора (рис. 42.6) и малые потери энергии при преобразовании напряжения определяют преимущественное использование в технике переменных, а не постоянных токов. Трансформатор состоит из железного сердечника, на который надеты две катушки (так называемые *первичная* и *вторичная обмотки*). Источник ЭДС подключен к первичной обмотке, а нагрузка — ко вторичной. Если напряжение $\mathscr{E}$ на первичной обмотке больше, чем на вторичной V_2, т. е. $\mathscr{E} > V_2$, то трансформатор называется *понижающим*, если $\mathscr{E} < V_2$, то *повышающим*.

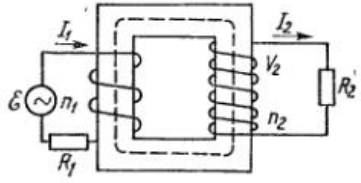


Рис. 42.6

При прохождении по первичной обмотке переменного тока в сердечнике создается переменное магнитное поле. Если потери за счет рассеяния магнитных потоков Φ_1 и Φ_2 в первичной и вторичной обмотках малы, то

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad (42.32)$$

где n_1 и n_2 — числа витков в обмотках. Если трансформатор идеальный (не обладает ферромагнетизмом), то

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2, \qquad \Phi_2 = L_{21} I_1 + L_2 I_2, \tag{42.33}$$

где $I_1(I_2)$ и $L_1(L_2)$ — токи и индуктивности первичной (вторичной) обмотки, $L_{12} = L_{21}$ — коэффициент взаимной индукции [30.2.4]. Уравнения колебаний в обмотках имеют вид

$$\Phi_1 = \mathscr{E} - R_1 I_1, \quad \Phi_2 = -R_2 I_2 = -V_2, \tag{42.34}$$

где R_1 и R_2 — активное сопротивление в цепях первичной и вторичной обмоток, $\mathscr{E}$ — ЭДС источника, равная напряжению на первичной обмотке, V_2 — падение напряжения на сопротивлении R_2. Решение уравнений (42.34) с учетом (42.32), (42.33) в предположении, что $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \times \exp(i\omega t)$, где ω — циклическая частота ЭДС, имеет вид

$$I_1 = \mathscr{E}(R_2 + i\omega L_2)/[R_1 R_2 + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)], \tag{42.35}$$
$$I_2 = -i\mathscr{E}\omega (L_1 L_2)^{1/2}/[R_1 R_2 + i\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1)].$$

На практике активное сопротивление R_1 мало по сравнению с индуктивным ωL_1, т. е. $R_1 \ll \omega L_1$. В этом приближении

$$I_1 = \frac{R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_1 R_2}\mathscr{E}, \quad I_2 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{\mathscr{E}}{R_2} = -\frac{n_2}{n_1}\frac{\mathscr{E}}{R_2}. \tag{42.36}$$

Из последнего равенства следует, что

$$V_2 = -\frac{n_2}{n_1}\mathscr{E}, \quad \left|\frac{\mathscr{E}}{V_2}\right| = \frac{n_1}{n_2} \tag{42.37}$$

— трансформатор повышает напряжение в n_2/n_1 раз. Величина $K = n_1/n_2$ называется *коэффициентом трансформации*. При холостом ходе трансформатора, когда к концам вторичной обмотки не присоединена нагрузка, $V_2 = \mathscr{E}_2$, где $\mathscr{E}_2$ — индуцированная на этой обмотке ЭДС.

Средние мощности, потребляемые в первичной и вторичной цепях, определяются формулами

$$P_1 = \frac{1}{2} R_1 |I_1|^2, \quad P_2 = \frac{1}{2} R_2 |I_2|^2. \tag{42.38}$$

КПД трансформатора η определяется формулой

$$\eta = P_2/P_0, \tag{42.39}$$

где $P_0 = P_1 + P_2$ — средняя мощность электрической энергии в первичной цепи. Максимальное значение КПД достигается при условии $\omega L_2 = R_2$:

$$\eta_{max} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2}, \quad \alpha_1 = \frac{\omega L_1}{R_1}. \tag{42.40}$$

Если $\alpha_1 \gg 1$, то $\eta_{max} \simeq 1$ и $P_2 \simeq P_0$.

43. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

43.1. Переменное электромагнитное поле

Электромагнитными волнами называется переменное электромагнитное поле, распространяющееся в среде с конечной скоростью. К понятию электромагнитных волн можно прийти, рассматривая электрическую цепь, в которой емкости и индуктивности распределены непрерывно, и используя аналогию с механическими колебаниями струны под действием упругой силы. Материальной точке, совершающей колебания под действием упругой силы, в электродинамике соответствует простой колебательный контур [41.1]. Материальная точка имеет одну степень свободы и может совершать колебания с одной определенной частотой ω_0. Колебательный контур характеризуется также единственной собственной частотой ω_0 (рис. 43.1).

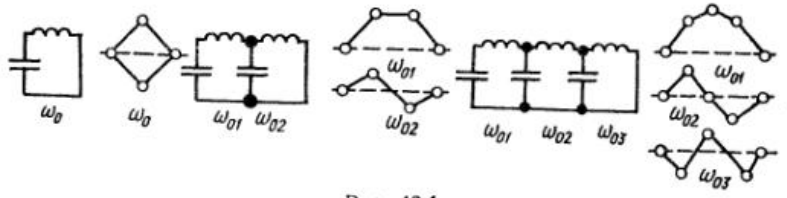


Рис. 43.1

В двух связанных общей емкостью контурах возможны два различных собственных электрических колебания с частотами ω_{01} и ω_{02}. Им соответствует механическая система из двух материальных точек, обладающая двумя степенями свободы. В трех связанных контурах, соответствующих трем материальным точкам, возможны три различных колебания с частотами ω_{01}, ω_{02} и ω_{03}. Увеличивая до бесконечности число связанных контуров, получаем двухпроводную линию, в которой емкости и индуктивности непрерывно распределены по всей длине линии. Механической аналогией такой электрической цепи является струна с непрерывно распределенной массой, между любыми отдельными элементами которой действуют силы упругости. Бесконечному числу собственных механических колебаний струны соответствует бесконечное число возможных электрических колебаний двухпроводной линии. Колебательные движения струны есть механические волны, а электрические колебания в электрических системах с непрерывно распределенными емкостями и индуктивностями представляют собой электромагнитные волны.

Электромагнитные волны характеризуются векторами напряженности **E** электрического [25.2.1] и индукции **B** магнитного [29.1.2] полей. Возможность их существования следует из уравнений Максвелла [31.2] и обусловлена тем, что всякое переменное электрическое поле создает вихревое магнитное поле, а переменное магнитное поле — вихревое электрическое. Эти процессы описываются соотношениями

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}, \tag{43.1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S} = \int \mathbf{j}\,d\mathbf{S} + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}, \tag{43.2}$$

где обозначения такие, как в формулах (31.1), (31.2) и (31.11), (31.12). В случае слабых электромагнитных полей и изотропных неферромагнитных и несегнетоэлектрических сред между векторами электрического смещения $\mathbf{D}$ и напряженности $\mathbf{E}$, векторами индукции $\mathbf{B}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ существует простая связь [31.2.1]

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \tag{43.3}$$

где величины ε и μ задают электрические и магнитные свойства среды [29.1.3; 24.1.6; 25.2.4].

Переменное электрическое поле характеризуется плотностью тока смещения $j_{см} = \partial \mathbf{D}/\partial t$. Если внутри безграничной непроводящей среды в некоторой точке O (рис. 43.2) возбуждено переменное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, которое, например, в данный момент времени возрастает, то $\partial \mathbf{D}/\partial t > 0$ и направление тока смещения совпадает с направлением поля $\mathbf{E}_0$. Этот ток согласно (43.2) порождает вихревое магнитное поле $\mathbf{H}_0$, направление которого определяется правилом правого винта. Однако согласно уравнению Максвелла (43.1) изменяющееся во времени

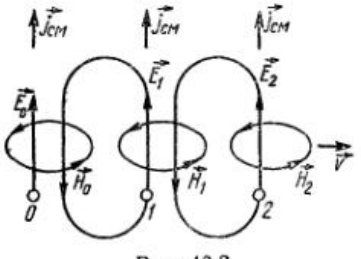


Рис. 43.2

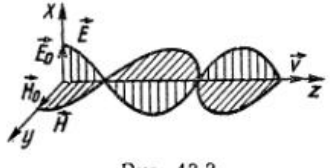


Рис. 43.3

поле $\mathbf{H}_0$ вызывает вихревое электрическое поле $\mathbf{E}_1$. Его направление совпадает с направлением индукционного тока, который возник бы в замкнутом проводнике под действием возрастающего поля $\mathbf{H}_0$. Возрастающее поле $\mathbf{E}_1$ представляет собой ток смещения, который порождает магнитное поле $\mathbf{H}_1$. Так как поля $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_1$ направлены противоположно, то к моменту появления полей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}_1$ в соседней к O точке 1 поля $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ в точке O исчезнут. В последующий момент времени процесс повторится и электромагнитное поле появится в соседней к 1 точке 2. Происходит перемещение переменного электромагнитного поля в пространстве с некоторой скоростью $\mathbf{v}$, направление которой перпендикулярно векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{D}. \tag{43.4}$$

Формулы (43.4) описывают *электромагнитное поле*, которое одно и то же во всех точках плоскости (*фронта волны*), перпендикулярной его распространению. Такая ситуация соответствует плоским монохроматическим волнам [43.2.1]. Следует иметь в виду, что точки 0, 1, 2 (рис. 43.2) находятся бесконечно близко одна к другой. Поэтому максимумы и минимумы полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ совпадают (рис. 43.3).

Скорость электромагнитной волны v определяется электрической ε и магнитной μ проницаемостями среды, в которой эта волна распространяется:

$$v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \tag{43.5}$$

где c — скорость электромагнитной волны в вакууме. Скорость распространения электромагнитных волн (фазовая скорость) совпадает со скоростью света в данной среде.

Векторы напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей всегда перпендикулярны между собой, а также направлению распространения электромагнитной волны. Однако положения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в пространстве с течением времени могут изменяться, оставаясь при этом перпендикулярными один к другому. Если вектор $\mathbf{E}$ лежит всегда в одной плоскости, то такая волна называется *плоскополяризованной*.

Существует два различных способа передачи электромагнитного поля на расстояние: с помощью токов проводимости и с помощью токов смещения. Первый способ играет существенную роль, когда электромагнитные поля медленно изменяются со временем, т. е. при малых частотах электромагнитных колебаний. При больших частотах основную роль играют токи смещения и электрические явления определяются в основном электромагнитными волнами.

43.2. Электромагнитные волны в непроводящей среде

43.2.1. Уравнения колебаний. Плоская монохроматическая волна. Теория электромагнитных волн основана на уравнениях Максвелла [31.2]. Если среда однородна и в ней нет объемных электрических зарядов, $\rho = 0$, то в случае распространения в такой среде электромагнитной энергии без поглощения (диэлектрик, $j = 0$) эти уравнения согласно (31.1) — (31.4) имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{43.6}$$
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

где учтены материальные уравнения (31.9).

В простейшем случае, когда векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ зависят только от одной переменной z и времени t,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z, t), \tag{43.7}$$

соотношения (43.6) упрощаются и сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0, \tag{43.8}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0, \tag{43.9}$$

где E_x и E_z — составляющие вектора $\mathbf{E}$ вдоль осей x и z, H_y и H_z — составляющие вектора $\mathbf{H}$ вдоль осей y и z, v — фазовая скорость волны (43.5). Уравнения (43.9) соответствуют статическим полям: величины E_z и H_z не зависят от z и t. Эти поля не влияют на распространение электромагнитной волны вдоль оси z. Уравнения (43.8) есть волновые уравнения, аналогичные (39.13), общее решение которых имеет вид

$$E_x(z, t) = f_1(z - vt) + f_2(z + vt), \tag{43.10}$$
$$H_y(z, t) = g_1(z - vt) + g_2(z + vt),$$

где f_1, f_2, g_1 и g_2 — произвольные дважды дифференцируемые по z и t функции, f_1 и g_1 описывают распространение волны в положительном направлении оси z со скоростью v, а f_2 и g_2 — в обратном направлении. При этом фронт волны, т. е. геометрическое место всех точек, имеющих одинаковую фазу, представляет собой плоскость постоянной фазы:

$z \pm vt = \text{const}$. Такие колебания называются *бегущими плоскими волнами*.

Из уравнений (43.8) следует, что в распространяющейся электромагнитной волне E_x и H_y пропорциональны между собой:

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\, E_x = \sqrt{\mu_0\mu}\, H_y. \qquad (43.11)$$

Величины E_x и H_y колеблются в среде, т. е. одновременно достигают максимумов и одновременно обращаются в нуль (рис. 43.3). Электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля плоской волны направлены перпендикулярно одно другому и направлению распространения волны, задаваемому единичным вектором $\mathbf{n}$:

$$\sqrt{\mu_0\mu}\,\mathbf{H} = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,(\mathbf{n}\times\mathbf{E}),\quad \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,\mathbf{E} = \sqrt{\mu_0\mu}\,(\mathbf{H}\times\mathbf{n}).$$

Вектор Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma}$ (32.5) при этом в вакууме имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = cu\mathbf{n},$$

где u — объемная плотность энергии электромагнитного поля (30.29).

Среди бегущих плоских волн важное место в физических приложениях теории электромагнитных волн занимают *плоские монохроматические волны*:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(kz - \omega t),\quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0\cos(kz - \omega t), \qquad (43.12)$$

где величина $k = \omega/v$ называется *волновым числом*, $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — амплитуды. При фиксированном z функции (43.12) описывают гармонические колебания с циклической частотой ω. Длина волны таких колебаний определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

В случае вакуума, $\varepsilon = \mu = 1$, подстановка (43.12) в уравнения (43.6) приводит к соотношению

$$\omega = ck.$$

Это уравнение определяет **закон дисперсии электромагнитных волн в вакууме**. При этом фазовая v и групповая $v_{\text{гр}}$ скорости волн совпадают и равны скорости света c:

$$v = \frac{\omega}{k} = c,\quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = c.$$

Это означает, что скорости распространения электромагнитных волн в вакууме не зависят от частоты ω, а суперпозиции плоских монохроматических волн с разными частотами, называемые волновыми пакетами [43.3.2], распространяются в вакууме без изменения формы.

Ввиду линейности уравнений Максвелла решениями волновых уравнений являются также комплексные функции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0\, e^{i\mathbf{kr}-i\omega t},\quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0\, e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}, \qquad (43.13)$$

где $\mathbf{kr} = kz$, $\mathbf{k}$ называется *волновым вектором* с модулем $k = \omega/v$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от источника волны в точку наблюдения. В электродинамике, как правило, пользуются комплексными представлениями полей, поскольку это облегчает проведение конкретных вычислений. При этом однако при переходе к энергетическим величинам, квадратичным относительно напряженностей поля, нужно использовать только действительные части комплексных выражений.

Если источник и наблюдатель движутся с относительной скоростью $\mathbf{u}$, то связь между частотой ω_0 волны в системе источника и частотой ω той же волны в системе наблюдателя имеет вид

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c}\cos\theta},$$

где θ — угол распространения волны относительно $\mathbf{u}$ в системе наблюдателя, c — скорость света в вакууме. Эта формула описывает **эффект Доплера для электромагнитной волны.**

Пусть электрическая часть $\mathbf{E}$ электромагнитного поля описывается уравнением

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{01}\cos(\mathbf{kr} - \omega t) + \mathbf{E}_{02}\sin(\mathbf{kr} - \omega t).$$

Выбирая оси x и y вдоль векторов $\mathbf{E}_{01}$ и $\mathbf{E}_{02}$, находим уравнение кривой (эллипса), которую описывает конец вектора $\mathbf{E}$:

$$E_x^2/E_{01}^2 + E_y^2/E_{02}^2 = 1,$$

с полуосями E_{01} и E_{02}. Волну, описываемую этим уравнением, называют эллиптически поляризованной. При $E_{01} = E_{02}$ эллиптическая поляризация переходит в круговую, а при $E_{01} \neq 0$, $E_{02} = 0$ или $E_{01} = 0$, $E_{02} \neq 0$ поляризация становится линейной. Вектор магнитной части $\mathbf{H}$ поля также описывает эллипс, оси которого повернуты относительно осей электрического вектора $\mathbf{E}$ на $\pi/2$, а направления движения концов этих векторов совпадают. При плоской поляризации векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ колеблются вдоль фиксированных взаимно перпендикулярных направлений.

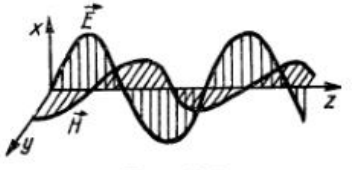


Рис. 43.4

43.2.2. Стоячая электромагнитная волна. Две плоские монохроматические волны, имеющие одинаковые амплитуды, частоты и длины волн, при их наложении образуют стоячую волну [39.4]. Так, волны

$$E_x^{(1)} = E_0\cos(\omega t - kz),\quad E_x^{(2)} = E_0\cos(\omega t + kz),$$
$$H_y^{(1)} = H_0\cos(\omega t - kz),\quad H_y^{(2)} = -H_0\cos(\omega t + kz),$$

где $E_x^{(1)}$, $H_y^{(1)}$ — падающие, $E_x^{(2)}$, $H_y^{(2)}$ — отраженные волны, при их наложении образуют *стоячую электромагнитную волну* с компонентами

$$E_x = E_x^{(1)} + E_x^{(2)} = 2E_0\cos kz\cos\omega t, \qquad (43.14)$$
$$H_y = H_y^{(1)} + H_y^{(2)} = 2H_0\sin kz\sin\omega t.$$

Колебания электрического поля сдвинуты по фазе на $\pi/2$ относительно колебаний магнитного поля (рис. 43.4). Пучности (максимумы амплитуды) одной волны совпадают с узлами (точки, где амплитуды равны нулю) другой. Поэтому согласно (32.5) вектор Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma}$ обращается в этих точках в нуль и электромагнитная энергия не переходит ни через один из узлов стоячей волны.

43.2.3. Сферические электромагнитные волны. Если векторы напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей зависят от трех пространственных переменных x, y, z и времени t:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t), \tag{43.15}$$

то из первых двух уравнений (43.6) после применения к ним операции ротора следует волновое уравнение Даламбера (39.18) для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\mathbf{H} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \tag{43.16}$$

Каждое из этих уравнений эквивалентно трем уравнениям для компонент E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. При наличии сферической симметрии решения уравнений (43.16) вне области, занятой источником для любых декартовых координат E_a и H_a векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, имеют вид

$$E_a = \frac{1}{r}[f_1(vt - r) + f_2(vt + r)], \tag{43.17}$$

$$H_a = \frac{1}{r}[h_1(vt - r) + h_2(vt + r)], \quad (a = x, y, z),$$

где f_1, f_2, h_1 и h_2 — произвольные дважды дифференцируемые по переменным x, y, z и t функции. Первые слагаемые в E_a и H_a описывают расходящиеся сферические волны, распространяющиеся от источника со скоростью v; r — расстояние от источника до точки пространства, где измеряются поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Расстояние r предполагается значительно большим, чем линейные размеры d источника: $r \gg d$. Амплитуды волн E_a и H_a убывают как r^{-1}. Вторые слагаемые описывают сферические волны, испущенные на бесконечности и сходящиеся к точке, где находится точечный источник. Если источник генерирует гармонические колебания, то

$$E_a = \frac{E_{01}}{r}\sin(\omega t - kr) + \frac{E_{02}}{r}\sin(\omega t + kr), \tag{43.18}$$

$$H_a = \frac{H_{01}}{r}\sin(\omega t - kr) + \frac{H_{02}}{r}\sin(\omega t + kr),$$

где $k = \omega/v$ — волновое число.

43.2.4. Энергия и интенсивность электромагнитной волны. Опыт показывает, что электромагнитные волны способны производить различные действия и, следовательно, они переносят определенную *энергию*. Эта энергия представляет собой энергию, запасенную электромагнитным полем.

Энергия ΔW, переносимая электромагнитной волной через произвольную площадку S за малое время Δt, равна энергии поля, сосредоточенного в объеме пространства:

$$\Delta V = Sv\,\Delta t\cos\alpha,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость распространения волны, α — угол между нормалью $\mathbf{n}$ к площадке S и скоростью $\mathbf{v}$ (рис. 43.5),

$$\Delta W = u\,\Delta V = uSv\,\Delta t\cos\alpha. \tag{43.19}$$

Здесь u — объемная плотность энергии электромагнитного поля (30.29):

$$u = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2) = \varepsilon_0\varepsilon E^2 = \mu_0\mu H^2 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}\,EH, \tag{43.20}$$

где учтено (43.11) и обозначено $E = E_x$, $H = H_y$. Формула (43.19) эквивалентна выражению ($v = 1/\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$)

$$\Delta W/\Delta t = EHS\cos\alpha, \tag{43.21}$$

которое в случае бесконечно малых времен имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma_n S, \tag{43.22}$$

где $\gamma_n = |\boldsymbol{\gamma}|\cos\alpha$ есть проекция вектора Пойнтинга (32.5), $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = u\mathbf{v}$, на направление нормали $\mathbf{n}$ к площадке S. Формулы (43.21) и (43.22) определяют энергию, проходящую через заданную площадку S в единицу времени.

Интенсивностью I электромагнитной волны называют энергию, переносимую волной за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны,

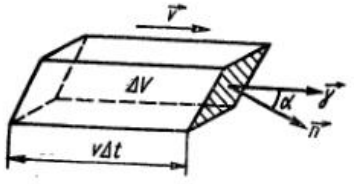


Рис. 43.5

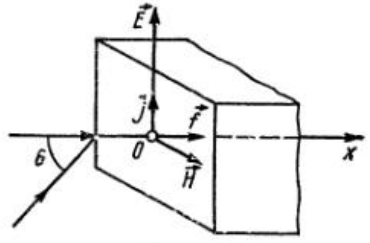


Рис. 43.6

и усредненную по времени за один период волны T. Из (43.22) при $\alpha = 0$ имеем

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial W}{\partial t}\frac{1}{S}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma\,dt = \frac{v}{T}\int_0^T u\,dt, \tag{43.23}$$

$$I = \overline{\gamma} = \overline{u}\,v = \overline{EH},$$

где γ — модуль вектора Пойнтинга, u — объемная плотность энергии электромагнитного поля, v — скорость волны, E и H — модули напряженностей электрического и магнитного полей. Согласно (43.23) интенсивность волны I есть среднее по времени от модуля вектора Пойнтинга.

В случае линейно поляризованной плоской монохроматической волны $I \sim A^2$, где A — амплитуда волны; для произвольной плоской и сферической волн в однородной непоглощающей среде соответственно $I = \text{const}$ и $I \sim r^{-2}$, где r — расстояние от источника до рассматриваемой точки.

43.2.5. Давление электромагнитных волн. Электромагнитные волны оказывают *давление* на тела, находящиеся на пути их распространения. Электрическая составляющая поля $\mathbf{E}$, направленная параллельно поверхности тела (преграды), создает внутри его токи плотностью $\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$ (26.21), где λ — удельная проводимость вещества тела (рис. 43.6). Наличие магнитной составляющей поля $\mathbf{H}$ и плотности тока $\mathbf{j}$ обусловливает появление силы Ампера [29.2.2], которая согласно (29.17) определяется формулой

$$\mathbf{f} = j\mathbf{B} = \mu_0\mu\,j\mathbf{H}, \tag{43.24}$$

где f — сила, действующая на единицу объема тела и направленная перпендикулярно векторам j и **H** (нормально к поверхности тела). По определению давление волны

$$P = \int_0^\infty \bar{f}\, dx, \quad \bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f dt, \tag{43.25}$$

где x — ось, вдоль которой действует сила f, $\bar{f}$ — средняя по времени за период волны T сила f. Из уравнений Максвелла следует, что в случае, когда тело полностью поглощает энергию падающей на него волны,

$$\bar{f} = -\frac{d}{dx}\bar{u} \quad \text{и} \quad P = \bar{u}, \tag{43.26}$$

где $\bar{u}$ — среднее значение объемной плотности энергии u в падающей электромагнитной волне (43.20). Если тело частично отражает волну, то давление P определяется формулой

$$P = (1 + k)\bar{u}, \tag{43.27}$$

где k — коэффициент отражения. Если тело полностью отражает падающую на него волну, то $k = 1$ и $P = 2u$. В случае электромагнитной волны, падающей на поверхность тела под углом θ (рис. 43.6),

$$P = \frac{I}{v}\cos\theta \cdot (1 + k), \tag{43.28}$$

где I — интенсивность волны (43.23), v — скорость ее распространения.

Интенсивность солнечного излучения $I \approx 10^3$ Вт/м^2 и давление $P \approx 1 \cdot 10^{-5}$ Па.

43.3. Реальные электромагнитные волны

43.3.1. Спектральное разложение. Реальные источники создают переменные электромагнитные поля, которые описываются немонохроматическими волнами. При исследовании таких полей предполагают, что поле в данной точке может быть представлено суперпозицией бесконечного числа монохроматических волн. Пусть $U(t)$ — какая-либо компонента полей **E** или **H**, называемая *аналитическим сигналом*. Тогда записывают

$$U(t) = U'(t) + iU''(t), \tag{43.29}$$

где

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(\omega)\cos(\varphi(\omega) - \omega t)\, d\omega,$$

$$U''(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty u(\omega)\sin(\varphi(\omega) - \omega t)\, d\omega. \tag{43.30}$$

Формулы (43.30) называются *интегралами Фурье*. Они обобщают уравнения (43.12), (43.16), описывающие монохроматические волны, на случай источника, разброс частот которого ω описывается действительной функцией $u(\omega)$. Мнимая часть $U''(t)$ однозначно определяет действительную часть $U'(t)$, так как она переходит в нее при замене $\varphi(\omega)$ на $\varphi(\omega) - \pi/2$. Соотношения, связывающие действительную и мнимую части комплексной функции $U(t)$, имеют вид

$$U'(t) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U''(t')}{t' - t}dt', \quad U''(t) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U'(t')}{t' - t}dt', \tag{43.31}$$

где P означает, что из пути интегрирования исключена точка $t' = t$. Формулы (43.31) называются *преобразованиями Гильберта* или *дисперсионными соотношениями*. Выражения (43.29) и (43.30) эквивалентны представлению

$$U(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty V(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega, \qquad \begin{aligned} V(\omega) &= \frac{1}{2}u(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}, \\ V(-\omega) &= V^*(\omega), \end{aligned} \tag{43.32}$$

которое более удобно при выполнении конкретных вычислений. Формула (43.32) есть разложение Фурье аналитического сигнала $U(t)$. Она позволяет определять спектральный состав энергии немонохроматического электромагнитного поля. Так, полная энергия W плоской электромагнитной волны, прошедшей через единичную площадку в направлении, перпендикулярном этой площадке, определяется формулой

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} E^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |V(\omega)|^2 d\omega, \quad |V(\omega)|^2 = V(\omega)\, V^*(\omega). \tag{43.33}$$

Величина

$$\frac{dW_\omega}{d\omega} = \frac{1}{\pi}|V(\omega)|^2 \tag{43.34}$$

называется *спектральной плотностью* потока электромагнитной энергии.

43.3.2. Волновой пакет. Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль оси z. Так как реальная волна не является монохроматической, то любую из ее компонент, например $E_x(z, t)$, можно представить в виде интеграла

$$E_x(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} E_0(k)\, e^{ikz - i\omega t}\, dk, \tag{43.35}$$

представляющего собой *волновой пакет*, составленный из плоских волн (43.13), волновые векторы **k** которых направлены вдоль оси z, а их значения находятся в интервале

$$k_0 - \Delta k \leqslant k \leqslant k_0 + \Delta k,$$

где k_0 — некоторое среднее значение волнового числа. Если разброс значений k невелик, то ограничиваясь первыми членами разложения циклической частоты ω как функции k в ряд по степеням $(k - k_0)$:

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0) + \ldots, \quad \omega_0 = \omega(k_0), \quad v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k = k_0},$$

из (43.35) получаем

$$E_x(z, t) = A(z, t)\, e^{ik_0 z - i\omega_0 t}, \qquad (43.36)$$

$$A(z, t) = 2E_0(k_0)\,\frac{\sin[(z - v_g t)\,\Delta k]}{z - v_g t}.$$

Функция $A(z, t)$ описывает амплитуду волны (рис. 43.7). С течением времени средняя точка волнового пакета (43.36) перемещается в пространстве со скоростью v_g, называемой *групповой скоростью*. В линейной диспергирующей среде происходит искажение формы группы волн в процессе их распространения и волновой пакет с течением времени расплывается. Это связано с различием фазовых скоростей $v = \omega/k$ отдельных монохроматических волн пакета. В нелинейных средах возможно конкурирующее сжатие волнового пакета. В результате могут возникнуть нелинейные волны [39.6].

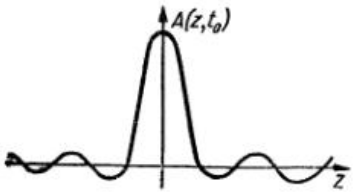


Рис. 43.7

Зависимость фазовой скорости v электромагнитной волны в среде от частоты ω волны называется *дисперсией*: $v = v(\omega)$. Среды, в которых v зависит от ω, называют *диспергирующими средами*. Различают *нормальную дисперсию*, когда

$$\frac{dv}{d\omega} < 0, \quad v_g < v, \qquad (43.37)$$

и *аномальную дисперсию*, когда

$$\frac{dv}{d\omega} > 0, \quad v_g > v. \qquad (43.38)$$

Дисперсию электромагнитной волны в линейных однородных средах характеризуют соотношением типа $\omega = \omega(k)$, которое называется *дисперсионным уравнением* или *законом дисперсии*. Это уравнение устанавливает зависимость частоты ω от волнового числа k плоской гармонической волны. В случае анизотропных сред закон дисперсии описывается уравнением вида $\omega = \omega(\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Если в некотором диапазоне частот

$$\frac{dv}{d\omega} = 0, \quad v_g = v, \qquad (43.39)$$

то говорят, что в этом диапазоне дисперсия волны отсутствует. Примером такой волны является электромагнитная волна в вакууме [43.2.1].

43.3.3. Электромагнитные волны в линиях передач. Вдоль двух параллельных проводов, связанных с источником переменного тока высокой частоты емкостной или индуктивной связью (рис. 43.8), могут распространяться электромагнитные волны. Такие линии передач называются *системой Лехера* (1890). Примером системы Лехера может служить кабель из двух коаксиальных цилиндрических проводов, в котором внутренний сплошной цилиндр помещен в наружный полый цилиндр (рис. 43.9).

Расчеты показывают, что напряжение V и ток I распространяются вдоль проводов со скоростью

$$v = c/\sqrt{LC}, \qquad (43.40)$$

где L и C — индуктивность и емкость единицы длины линии, c — скорость света в вакууме. В бегущей волне V и I связаны соотношением

$$V = \pm R_W I, \qquad (43.41)$$

где величина

$$R_W = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (43.42)$$

называется *волновым сопротивлением линии*. Знак плюс означает, что волна распространяется от генератора, а минус — в обратном направлении. Формулы (43.40) — (43.42) справедливы для линии, у которой расстояние между проводами значительно меньше длины линии, на которой укладывается как минимум несколько длин волн, испускаемых генератором. Напряжение V измеряется вдоль перпендикуляра

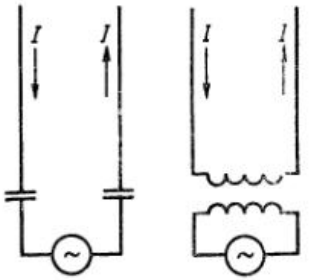


Рис. 43.8

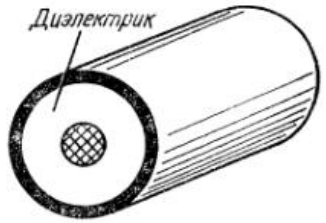


Рис. 43.9

к проводам. Если провода неограничены, то в них возникает бегущая волна [43.2.1], в которой ток I и напряжение V колеблются в одинаковых фазах. Если провода ограничены, то волна, достигнув конца линии, отражается и распространяется в обратном направлении. В линии возникают стоячие волны [43.2.2]. Колебания тока I и напряжения V сдвинуты в стоячей волне по фазе на $\pi/2$ и направленного переноса энергии вдоль всей линии не происходит.

43.3.4. Скин-эффект. Металлы обладают высокой проводимостью. Поэтому основную роль в них играют токи проводимости $\mathbf{j}$. Так как токи смещения (31.5) здесь можно не учитывать, то проникновение магнитного поля $\mathbf{B}$ в металл математически можно описывать как явление диффузии [15.5.2]. Пренебрегая токами смещения в уравнениях Максвелла (31.1) и (31.2)

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \qquad (43.43)$$

приходим к соотношениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{j} = -\lambda\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0\mu}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \qquad (43.44)$$

которые эквивалентны уравнениям диффузии. Так, в случае, когда все величины зависят только от одной переменной x, из (43.44) получаем

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\partial n}{\partial t}, \quad j = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \quad n = \lambda B, \quad D = \frac{1}{\mu_0\mu\lambda}, \qquad (43.45)$$

где величины n и D играют роль концентрации и коэффициента диффузии в уравнениях переноса электромагнитного поля в металл. Из формулы

$$l \sim \sqrt{D\tau},$$

описывающей проникновение вещества за время τ в среду на глубину l, следует, что за время прохождения тока в одном направлении, $\tau = T/2$, где T — период переменного тока, проходящего через металл, магнитное поле, а с ним и электрический ток проникают в металл на глубину

$$l \sim \sqrt{\frac{T}{2\mu_0\mu\lambda}} \sim \frac{1}{\sqrt{2\mu_0\mu\lambda\nu}}, \qquad (43.46)$$

где $\nu = 1/T$ — частота переменного тока. Формула (43.46) описывает так называемый *скин-эффект*: плотность тока убывает с глубиной, т. е. ток течет практически только в приповерхностном слое металла глубиной l (43.46). Согласно (43.46) величина l обратно пропорциональна $\sqrt{\nu}$: чем больше частота ν, тем меньше глубина проникновения тока (и магнитного поля) в металл. Так, при $\nu = 50$ Гц имеем $l \simeq 0{,}7$ см; при $\nu = 5 \cdot 10^3$ Гц $l \simeq 0{,}1$ см; при $\nu = 5 \cdot 10^5$ Гц $l \simeq 0{,}01$ см.

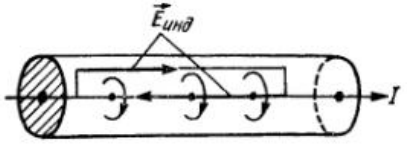


Рис. 43.10

Физическая причина скин-эффекта при протекании переменного тока через проводник конечного сечения состоит в возникновении электрического поля индукции, направленного всегда так, что оно усиливает ток на периферии проводника и уменьшает в его центральной части (рис. 43.10). Концентрация тока на поверхности проводника приводит к тому, что он ведет себя как полый цилиндр с толщиной стенок порядка глубины проникновения l. Это позволяет для передачи быстропеременных токов на расстояние использовать провода в виде полых

Таблица 43.1. Шкала электромагнитных волн

Длина, м	Частота, Гц	Наименование	
$10^6 - 10^4$	$3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^4$	Сверхдлинные	
$10^4 - 10^3$	$3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$	Длинные	Радиоволны
$10^3 - 10^2$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^6$	Средние	Радиоволны
$10^2 - 10^1$	$3 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^7$	Короткие	Радиоволны
$10^1 - 10^{-1}$	$3 \cdot 10^7 - 3 \cdot 10^9$	Ультракороткие	
$10^{-1} - 10^{-2}$	$3 \cdot 10^9 - 3 \cdot 10^{10}$	Телевидение	СВЧ
$10^{-2} - 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} - 3 \cdot 10^{11}$	Радиолокация	СВЧ
$10^{-3} - 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{14}$	Инфракрасное излучение	
$10^{-6} - 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{15}$	Видимый свет	
$10^{-7} - 10^{-9}$	$3 \cdot 10^{15} - 3 \cdot 10^{17}$	Ультрафиолетовое излучение	
$10^{-9} - 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{17} - 3 \cdot 10^{20}$	Рентгеновское излучение (мягкое)	
$10^{-12} - 10^{-14}$	$3 \cdot 10^{20} - 3 \cdot 10^{22}$	Гамма-излучение (жесткое)	
$< 10^{-14}$	$> 3 \cdot 10^{22}$	Космические лучи	

трубок. Сопротивление проводников переменному току больше, чем постоянному. Для токов с частотой $\nu = 10^6$ Гц сопротивление провода диаметром $d = 2$ мм увеличивается в 7 раз.

43.3.5. Шкала электромагнитных волн. Электромагнитные волны принято условно классифицировать по длинам волн в вакууме $\lambda = c/\nu$ или по частоте $\nu = \omega/2\pi$ (табл. 43.1).

44. ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

44.1. Излучение нерелятивистской системы заряженных частиц

44.1.1. Поле в волновой зоне. Источником электромагнитных волн являются движущиеся с ускорением заряженные частицы и изменяющийся во времени электрический ток. Исследование излучения упрощается, если линейные размеры l излучающей системы значительно меньше длины волны λ излучения, что эквивалентно условию малости времени распространения электромагнитных колебаний в пределах излучающей системы по сравнению с характерным временем движения заряженных частиц в системе, равным при периодическом движении периоду T:

$$l \ll \lambda, \quad l/c \ll T, \quad v \ll c, \qquad (44.1)$$

где $v = l/T$ — характерная скорость частиц. Обычно интерес представляет распределение электромагнитного поля излучения в области пространства, находящейся на расстояниях r от излучающей системы, которые значительно больше размеров системы l и длины излучаемых ею волн λ:

$$r \gg l, \quad r \gg \lambda. \qquad (44.2)$$

Область пространства, удовлетворяющая условиям (44.2), называется *волновой зоной*. На малых участках волновой зоны электромагнитные волны являются практически плоскими. Их можно найти с помощью запаздывающего векторного потенциала $\mathbf{A}$ (31.22) [31.3].

Рассмотрим излучение электромагнитных волн в вакууме. Тогда

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}'; \; t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \qquad (44.3)^*$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, в которой измеряется потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ в момент времени t, $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор элемента объема dV' (рис. 31.1), c — скорость света в вакууме, $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ — плотность тока в точке $\mathbf{r}'$ во время $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Так как интегрирование в (44.3) производится по объему, занятому источником излучения, то при условиях (44.2) плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')$ можно разложить в ряд по отношению размеров системы l к расстоянию r, $l/r \approx r'/r$:

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \; t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c}\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \; t - \frac{r}{c}\right) + \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \; t - \frac{r}{c}\right)\frac{\mathbf{n}\mathbf{r}'}{c} + \ldots,$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{n}\mathbf{r}', \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \qquad (44.4)$$

Ограничиваясь только первым слагаемым в правой части (44.4), получаем следующие формулы, описывающие так называемое *электриче-*

ское дипольное излучение:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\mathbf{n}}{4\pi cr}, \tag{44.5}*$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(\mathbf{H}\times\mathbf{n}) = \frac{(\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{4\pi c^2\varepsilon_0 r},$$

где $\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = \partial\mathbf{p}/\partial t$, $\ddot{\mathbf{p}} = \partial^2\mathbf{p}/\partial t^2$ — электрический дипольный момент системы и его производные по времени:

$$\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int \mathbf{r}'\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)dV',$$

$$\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{r}'\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)dV' = \int \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t-\frac{r}{c}\right)dV', \tag{44.6}$$

ρ — объемная плотность зарядов системы.

Интенсивность излучения dI (поток энергии внутри телесного угла $d\Omega$) и *полная интенсивность* I (мощность излучения) определяются формулами

$$dI = \mathbf{n}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})r^2 d\Omega = \frac{\left[\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]^2 \sin^2\theta\, d\Omega}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0}, \tag{44.7}*$$

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega}d\Omega = \frac{\left[\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}.$$

где θ — угол между векторами $\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$ и $\mathbf{r}$.

С учетом второго слагаемого в правой части (44.4) для векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ (44.3) получим выражение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\dot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n}}{r} + \frac{\mu_0\ddot{\mathbf{Q}}}{24\pi cr} + \frac{\mu_0\mathbf{n}}{24\pi cr}\int \dddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}', t-r/c)\,r'^2\,dV', \tag{44.8}*$$

где

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int(\mathbf{r}'\times\mathbf{j})\,dV', \quad \dot{\mathbf{m}} = \frac{\partial\mathbf{m}}{\partial t}, \tag{44.9}*$$

$\mathbf{m}$ — магнитный момент системы,

$$\underline{\underline{Q}} = \int \rho\,[3\mathbf{r}'(\mathbf{n}\mathbf{r}') - r'^2\mathbf{n}]\,dV', \quad \ddot{Q} = \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}, \tag{44.10}$$

Q — электрический квадрупольный момент.

Компоненты Q_1, Q_2, Q_3 вектора $\mathbf{Q}$ связаны с тензором квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ соотношением

$$Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}n_\beta, \quad Q_{\alpha\beta} = \int \rho\,[3x'_\alpha x'_\beta - r'^2\delta_{\alpha\beta}]\,dV', \tag{44.11}$$

где x'_α, x'_β; n_β — декартовы координаты векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{n}$, а $\delta_{\alpha\beta} = 1$ при $\alpha = \beta$ и $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Величины $\dot{\mathbf{p}}$, $\dot{\mathbf{m}}$, $\ddot{\mathbf{Q}}$, ρ в (44.8) — (44.11) берутся в момент времени $t - \frac{r}{c}$. Последнее слагаемое в (44.8), содержащее вторую производную по времени от объемной плотности электрических зарядов ρ, вклада в напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей не дает:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + \frac{\mu_0}{4\pi cr}(\mathbf{n}\times\dddot{\mathbf{m}}) + \frac{\mu_0}{24\pi cr}(\ddddot{\mathbf{Q}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi cr}(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{n}) + \frac{1}{4\pi c^2 r}(\dddot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + \frac{1}{24\pi c^2 r}(\ddddot{\mathbf{Q}}\times\mathbf{n}), \tag{44.12}*$$

где величины $\ddot{\mathbf{p}}$, $\dddot{\mathbf{m}}$, $\ddddot{\mathbf{Q}}$ берутся в момент времени $t - \frac{r}{c}$. Вторые слагаемые в (44.8), (44.12) описывают излучение, называемое *магнитным дипольным излучением*. *Электрическому квадрупольному излучению* системы зарядов соответствуют третьи слагаемые в (44.8) и (44.12). Интенсивность dI в единицу телесного угла $d\Omega$ и полная интенсивность I магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений определяются формулами

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3}(\dddot{\mathbf{m}}\times\mathbf{n})^2 + \frac{\mu_0}{(24\pi)^2 c^3}(\ddddot{\mathbf{Q}}\times\mathbf{n})^2 + \frac{\mu_0}{48\pi^2 c^3}\dddot{\mathbf{m}}(\ddddot{\mathbf{Q}}\times\mathbf{n}),$$

$$I = \frac{\mu_0}{6\pi c^3}\dddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{\mu_0}{720\pi c^3}\ddddot{Q}_{\alpha\beta}^2. \tag{44.13}*$$

По сравнению с I (44.7) слагаемые в I (44.13) содержат малый параметр $(l/\lambda)^2$. Они дают существенный вклад в общую картину только в случае отсутствия электрического дипольного излучения. Если замкнутая система состоит из заряженных частиц с одинаковыми удельными зарядами q_i/m_i, то $\ddot{\mathbf{p}} = \dddot{\mathbf{m}} = 0$.

44.1.2. Поле на близких расстояниях. Рассмотрим поле на расстояниях r от источника электромагнитных волн с размерами l, удовлетворяющими условию

$$l \ll r \ll \lambda, \tag{44.14}$$

где λ — длина излучаемых волн. В этом случае время распространения электромагнитных колебаний до точки наблюдения, равное r/c, мало по сравнению с периодом движения зарядов $\lambda/c = T$. Такие поля называют *квазистационарными*. Условие (44.14) означает, что при вычислении потенциалов φ и $\mathbf{A}$ (31.22), (31.23) запаздыванием сигнала можно пренебречь:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'. \tag{44.15}*$$

Разложение этих потенциалов в ряд по отношению $l/r \approx r'/r$ имеет вид

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^3} + \ldots, \tag{44.16}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{p}(t)\mathbf{r}}{r^3} + \ldots, \tag{44.17}*$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}(t)}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} + \ldots,$$

где q — полный заряд системы:

$$q = \int \rho(\mathbf{r}')\, dV', \quad \mathbf{p}(t) = \int \mathbf{r}'\, \rho(\mathbf{r}', t)\, dV' \qquad (44.18)$$

— ее электрический дипольный момент, $\mathbf{m}(t)$ — ее магнитный момент (44.9). Магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{4\pi r^5} - \frac{\mathbf{m}}{4\pi r^3} + \ldots \qquad (44.19)^*$$

Первое слагаемое представляет собой поле, создаваемое элементарным током $J(t)$, $\mathbf{p}(t) = \dot{q}(t)l = J(t)l$, где l — расстояние между двумя одинаковыми по величине зарядами диполя, $q(t)$ — величина положительного заряда. Оно описывает закон Био — Савара (29.22) [29.2.3]. Два других слагаемых соответствуют полю магнитного диполя.

44.2. Излучение релятивистской заряженной частицы

44.2.1. Потенциалы Лиенара—Вихерта. Согласно формулам для запаздывающих потенциалов (31.22) и (31.23) поле в точке наблюдения с радиусом-вектором, проведенным из начала координат, $\mathbf{r}$ в момент времени t определяется состоянием системы движущихся зарядов в предшествующий момент времени t', для которого время распространения электромагнитной волны из точки нахождения отдельного заряда $\mathbf{r}_0(t)$ в точку наблюдения равно разности $t - t'$. Если $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$ есть радиус-вектор от заряда до точки наблюдения, то время t' определяется из уравнения

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t. \qquad (44.20)$$

Переход от непрерывного распределения зарядов и токов в источнике излучения к отдельному заряду в формулах (31.22), (31.23) осуществляется формальной заменой

$$\rho(\mathbf{r}', t') = e\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') = e\mathbf{v}(t')\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')), \qquad (44.21)$$

где $\mathbf{v}(t') = \dot{\mathbf{r}}_0(t')$ — скорость частицы, e — ее заряд, $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))$ — дельта-функция Дирака, обладающая следующим свойством:

$$\int f(\mathbf{r}')\,\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)\, dV' = f(\mathbf{r}_0). \qquad (44.22)$$

Здесь $f(\mathbf{r}')$ — произвольная непрерывная и ограниченная функция.

В системе отсчета, в которой в момент времени t' частица покоится, поле в точке наблюдения $\mathbf{r}$ в момент времени t описывается кулоновским потенциалом

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \qquad (44.23)^*$$

В произвольной системе отсчета

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{R - \mathbf{v}\mathbf{R}/c} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{e}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c}, \qquad (44.24)^*$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\mathbf{v}}{R - \mathbf{R}\mathbf{v}/c} = \frac{\mu_0}{4\pi R}\frac{e\mathbf{v}}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

где величины $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t')$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t')$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t')$ берутся в момент времени t', определяемый уравнением (44.20). Потенциалы электромагнитного поля (44.24) называются *потенциалами Лиенара — Вихерта*. Зная их, по формулам (31.15), (31.16):

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad (44.25)^*$$

можно найти поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в точке наблюдения. Вычисления приводят к следующему результату:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{R^2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{n} \times \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right]}{R(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi}\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{v} \times \mathbf{n})}{R^2(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{e}{4\pi c^2}\frac{\{c\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n} + \mathbf{n} \times [(\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{n}]\}}{R(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3}, \qquad (44.26)^*$$

где, как и в (44.24), все величины в правой части берутся в момент времени t', $\dot{\mathbf{v}} = \partial\mathbf{v}/\partial t'$. Из (44.26) следует, что магнитное поле везде перпендикулярно электрическому и линии, которая соединяет заряд в запаздывающий момент времени с точкой наблюдения:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 c\,\mathbf{n}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon_0 c}{R(t')}\mathbf{R}(t') \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \qquad (44.27)^*$$

где $\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$, $\mathbf{r}_0(t')$ — радиус-вектор частицы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения в момент времени t. Первые слагаемые в правой части (44.26) описывают поля равномерно движущегося заряда со скоростью $\mathbf{v}$, убывающие на бесконечности подобно статическим полям как R^{-2}. Они соответствуют квазистационарным полям. Вторые слагаемые в правой части (44.26) зависят от ускорения $\dot{\mathbf{v}}$ и при больших R изменяются как R^{-1}. Они описывают излучение частицей электромагнитных волн.

44.2.2. Угловое распределение излучения. Поток энергии излучения внутри телесного угла $d\Omega$, т. е. интенсивность dI, на больших расстояниях от частицы описывается выражением

$$dI = \gamma\mathbf{n}\,R^2\,d\Omega = \frac{e^2\left[\mathbf{n} \times \left(\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right)\right]^2}{16\pi\varepsilon_0 c^3(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}/c)^6}\, d\Omega, \qquad (44.28)^*$$

где все величины в правой части берутся в момент времени t', определяемый уравнением (44.20), $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор Пойнтинга (32.5). Поток энергии, приходящийся на единицу телесного угла, $dI/d\Omega$ зависит от R только через временной аргумент $t' = t - R(t')/c$. Поэтому поток энергии через площадки $R^2 d\Omega$ внутри заданного телесного угла $d\Omega$, находящиеся на различных расстояниях от частицы (рис. 44.1) в соответствующие моменты времени, учитывающие конечность скорости переноса энергии, будет одинаковым. Это означает, что электромагнитные волны отрываются от генерирующего их заряда и распространяются на бесконечность.

Стационарные поля (первые слагаемые в правой части выражений (44.26)) остаются все время связанными с частицей и не создают потока

энергии на бесконечности. Это следует из того, что поток энергии этого поля внутри данного телесного угла убывает как R^{-2}.

Частные случаи: 1) нерелятивистская частица, $v \ll c$,

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi\varepsilon_0 c^3} \sin^2\theta, \qquad (44.29)^*$$

где θ — угол между ускорением $\dot{\mathbf{v}}$ (t') в запаздывающий момент времени t' и направлением наблюдения (радиусом-вектором $\mathbf{r}$); 2) ультрарелятивистская частица, $(1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$. Если ускорение направлено вдоль скорости: $\dot{\mathbf{v}} \parallel \mathbf{v}$, то

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2 \sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}, \qquad (44.30)^*$$

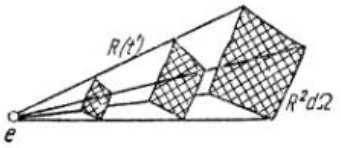


Рис. 44.1

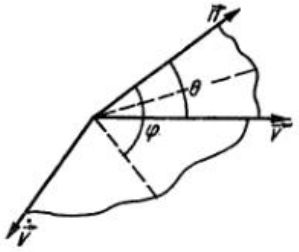


Рис. 44.2

где θ — угол между векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$. Если ускорение частицы перпендикулярно скорости: $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$, то

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3}\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^4} - \frac{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^6}\cos^2\varphi\right], \qquad (44.31)^*$$

где θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, φ — угол между плоскостями $(\mathbf{v}, \mathbf{n})$ и $(\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{v})$ (рис. 44.2).

44.2.3. Потеря энергии на излучение. Более удобной (релятивистски инвариантной) характеристикой излучения по сравнению с полной интенсивностью I является величина

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \int \frac{dt}{dt'}\frac{dI}{d\Omega}\,d\Omega = \int \left(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,(t')}{c}\right)\frac{dI}{d\Omega}\,d\Omega, \qquad (44.32)$$

которая характеризует *потерю энергии* частицей за единицу времени dt'. Она связана с интенсивностью излучения, регистрируемой наблюдателем, т. е. в лабораторной системе координат. Величина $dI/d\Omega$ в (44.32) зависит от момента времени t'. Потеря частицей импульса при излучении определяется формулой

$$-\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right). \qquad (44.33)$$

В случае $v \ll c$ потеря энергии дается формулой Лармора

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{e^2 \dot{\mathbf{v}}^2\,(t')}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \qquad (44.34)^*$$

которая следует из выражений (44.29) и (44.32). Релятивистское обобщение этой формулы имеет вид

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{e^2\gamma^6}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right], \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \qquad (44.35)^*$$

Если ускорение частицы создается внешним электромагнитным полем с напряженностями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{e^4\gamma^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}\left[(\mathbf{E} + \mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{H})^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})^2\right], \qquad (44.36)^*$$

где m — масса частицы. Для ультрарелятивистской частицы, $\gamma \gg 1$, движущейся строго вдоль электрического поля с ускорением, направленным вдоль скорости частицы, при $\mathbf{H} = 0$, потеря энергии

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\parallel} = \frac{e^4\,\mathbf{E}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2} \qquad (44.37)^*$$

и не зависит от самой энергии. Если $\mathbf{E} = 0$, а $\mathbf{H} \neq 0$, то ускорение перпендикулярно скорости и

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\perp} = \frac{\mu_0^2 e^4\,\gamma^2\,\mathbf{H}^2\,v_\perp^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m^2}. \qquad (44.38)^*$$

При $\varepsilon_0\,\mathbf{E}^2 = \mu_0\,\mathbf{H}^2$

$$\frac{(d\mathscr{E}/dt')_\perp}{(d\mathscr{E}/dt')_\parallel} = \gamma^2\frac{v_\perp^2}{c^2}. \qquad (44.39)$$

Это отношение определяется величиной составляющей $\mathbf{v}_\perp$ скорости $\mathbf{v}$ перпендикулярной магнитному полю $\mathbf{H}$ и показывает, что при произвольном движении ультрарелятивистской частицы потеря энергии осуществляется в основном за счет излучения, обусловленного поперечной составляющей силы, действующей на частицу.

44.3. Излучение макроскопических тел

44.3.1. Вектор Герца. Для характеристики излучения макроскопического тела, линейные размеры l которого больше или порядка длины волны λ, $l \geqslant \lambda$, вместо двух потенциалов $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ (31.22) и (31.23) удобно ввести одну векторную функцию $\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t)$, называемую *вектором Герца* (1888) или поляризационным потенциалом, такую, что

$$\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t}. \qquad (44.40)^*$$

Если полный заряд системы q равен нулю, $q = 0$, то ее удобно описать также одной векторной функцией $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, называемой *вектором поляризации*, такой, что

$$\rho = -\operatorname{div}\mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}, \qquad (44.41)$$

где ρ и $\mathbf{j}$ — объемная плотность заряда и тока в системе. Дипольный момент системы $\mathbf{p}$ и ее полный заряд q определяются формулами

$$\mathbf{p} = -\int \mathbf{r}\operatorname{div}\mathbf{P}\,dV = \int \mathbf{P}\,dV, \quad q = \lim_{V\to\infty}\int \rho\,dV = \oint_{S\to\infty}\mathbf{P}\,d\mathbf{S} = 0. \qquad (44.42)$$

Напряженности **E** и **H** электромагнитного поля определяются вектором Герца **Z**:

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{Z}. \tag{44.43}*$$

Он удовлетворяет неоднородному уравнению Даламбера

$$\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \tag{44.44}*$$

решение которого имеет вид

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}dV', \tag{44.45}*$$

аналогичный решению (31.22) уравнения (31.20).

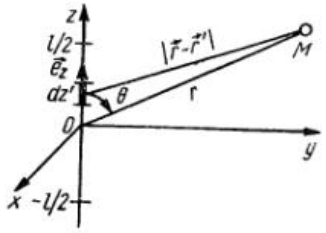


Рис. 44.3

44.3.2. Излучение линейной антенны. Рассмотрим бесконечно тонкий проводник длиной l, в котором вдоль оси z возбуждается стоячая волна тока

$$J(z, t) = J_0 \sin\left[k\left(z + \frac{l}{2}\right)\right]e^{-i\omega t}, \quad k = \frac{n\pi}{l} = \frac{\omega}{c}, \tag{44.46}$$

где n — число полуволн, укладывающихся на длине проводника. Тогда

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\omega}\mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z J(z, t)\,\delta(x)\,\delta(y), \tag{44.47}$$

где $\delta(x)$, $\delta(y)$ — одномерные дельта-функции Дирака, аналогичные (44.22).

Согласно (44.45) на больших расстояниях, $r \gg l$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - z'\cos\theta$, имеем

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{e}_z}{2\pi\varepsilon_0}\frac{J_0 c}{\omega^2 r}\frac{\exp(ikr - i\omega t)}{\sin^2\theta}\begin{cases} -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n \text{ — четное}, \\ i\cos\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{44.48}*$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z, θ — угол между направлением в точку наблюдения M и осью z (рис. 44.3). Магнитное поле **H**, создаваемое током (44.46), имеет вид

$$\mathbf{H} = e_\varphi \frac{J_0}{2\pi r}\frac{e^{ikr - i\omega t}}{\sin\theta}\begin{cases} -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n \text{ — четное}, \\ i\cos\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n \text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{44.49}*$$

где $\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор в сферической системе координат (рис. 2.6). Угловое распределение излучения, усредненное по времени, определяется выражением

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \frac{J_0^2}{8\pi^2\varepsilon_0 c}\begin{cases} \dfrac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & n \text{ — четное}, \\ \dfrac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & n \text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{44.50}*$$

Формула (44.50) дает угловое распределение излучения простейшей линейной антенны, которое для значений $n = 1, 2, 3$ показано на полярных диаграммах рис. 44.4.

Так как на излучение электромагнитных волн расходуется энергия источника тока, то потерю электромагнитной энергии при этом можно характеризовать величиной

$$R_r = 2\bar{I}/J_0^2, \tag{44.51}$$

называемой *сопротивлением излучения*. Здесь I — полная интенсивность излучения, усредненная по времени. Сопротивление излучения отражает собой факт обратного влияния излучения на колебания тока в антенне.

44.3.3. Вибратор Герца. *Вибратором Герца* (1888) называют короткий проводник (металлический стержень) с одинаковыми емкостями, сосредоточенными на концах и небольшим искровым промежутком посредине (рис. 44.5). Емкости вибратора определяются емкостями шаров A и B, индуктивность вибратора — индуктивностью обеих половин металлического стержня. Источником возбуждения электромагнитных волн является высокочастотный трансформатор BT. Искровой промежуток C подключается ко вторичной обмотке трансформатора. При напряжении на ней, равном напряжению пробоя воздушного промежутка, в вибраторе проскакивает искра, служащая в свою очередь источником электромагнитных волн. Вибратор Герца представляет собой открытый колебательный контур. Поэтому электромагнитное поле распространяется в окружающее его пространство, а не сосредоточено, как в обычном колебательном контуре, в узком зазоре конденсатора (электрическое поле) и внутри индуктивности (магнитное поле).

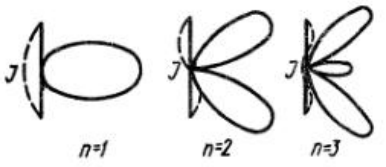


Рис. 44.4

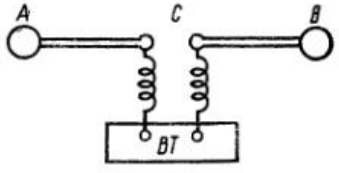


Рис. 44.5

Вибратор Герца с линейными размерами l, малыми по сравнению с длиной волны λ, которую он излучает, $l \ll \lambda$, представляет собой диполь (его называют *диполем Герца*). Излучение такого диполя описывается формулами (44.5) — (44.7). Если диполь с электрическим моментом $p = ql$, где q — величина его положительного заряда, совершает гармонические колебания по закону $p = p_0\cos\omega t$, где p_0 — амплитуда, ω — циклическая частота колебаний диполя, то полная интен-

сивность I (44.7), усредненная по времени (средняя мощность излучения):

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{p_0^2 c}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \qquad (44.52)^*$$

прямо пропорциональна четвертой степени частоты ω или обратно пропорциональна длине волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ излучения. Всякую реальную излучающую систему (антенну), по которой течет переменный ток, можно теоретически представить как большую совокупность диполей Герца. Электромагнитное поле, излучаемое антенной, в этом случае будет представлять собой суперпозицию электромагнитных полей отдельных диполей.

44.3.4. Рамочная антенна. *Рамочной антенной* называется замкнутый контур, по которому течет переменный ток. В такой антенне

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad (44.53)$$

где $\mathbf{j}$ и ρ — объемная плотность тока и заряда. Так как распределение зарядов ρ не изменяется со временем, то электрические дипольный $\mathbf{p}$ (44.6) и квадрупольный Q (44.10) моменты системы равны нулю и антенна излучает только магнитное дипольное излучение. Такое излучение описывается вторыми слагаемыми в выражении (44.12) и первыми в (44.13). Если в антенне течет синусоидальный ток $J = J_0 \sin \omega t$, где J_0 — амплитуда, ω — циклическая частота тока, то средняя мощность ее излучения согласно (44.13) имеет вид

$$\overline{I} = \frac{S^2\omega^4 J_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^5} = \frac{S^2 J_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4, \qquad (44.54)^*$$

где S — площадь, ограниченная контуром, $\lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}$ — длина волны, удовлетворяющая условию $\lambda^2 \gg S$. Сопротивление излучению R_r (44.51) описывается формулой

$$R_r = \frac{S^2\omega^4}{6\pi\varepsilon_0 c^5} = \frac{S^2}{6\pi\varepsilon_0 c}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4. \qquad (44.55)^*$$

44.4. Излучение Черенкова — Вавилова

Излучением Черенкова — Вавилова (или *эффектом Черенкова — Вавилова*, 1934) называется излучение электромагнитной волны (света) электрически заряженной частицей (электроном) при ее движении в среде с постоянной скоростью v, превышающей скорость распространения волны v_Φ (фазовую скорость света) в этой среде. Для света $v_\Phi = c/n$, где n — показатель преломления среды и условие возникновения излучения Черенкова — Вавилова имеет вид

$$c > v > c/n. \qquad (44.56)$$

Это излучение наблюдается у всех чистых прозрачных жидкостей. Его яркость мало зависит от их химического состава. Излучение поляризовано так, что вектор напряженности электрического поля преимущественно ориентирован вдоль направления движения заряженной частицы.

В рамках классической электродинамики происхождение излучения Черенкова — Вавилова можно объяснить с помощью принципа Гюйгенса [39.5.2]. Если частица движется со скоростью v в оптически изотропной среде вдоль прямой AE (рис. 44.6), то каждая точка на пути ее движения, A, B, C, D, является источником волны, представляющей собой сферу радиусом $R = ct/n$ (на рисунке окружности a, b, c, d). При скорости частицы $v < c/n$ волны будут обгонять ее на пути движения и в точке наблюдения E интерференция между волнами a, b, c, d не будет наблюдаться. Если $v > c/n$, то соответствующие волны, испущенные в предыдущие и последующие моменты времени, когда частица находилась в точках A, B, C, D, интерферируют между собой так, что они гасят одна другую везде, за исключением их общей огибающей (рис. 44.7). Эта огибающая есть волновой фронт [39.1] света, распространяющегося в среде. Он имеет вид конуса с вершиной в точке наблюдения E, совпадающей с мгновенным положением частицы. Нормали к образующим конуса определяют волновые векторы, указывающие направление распространения волны. Угол θ между волновым вектором и направлением движения частицы дается формулой

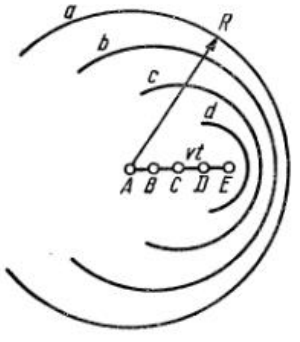


Рис. 44.6

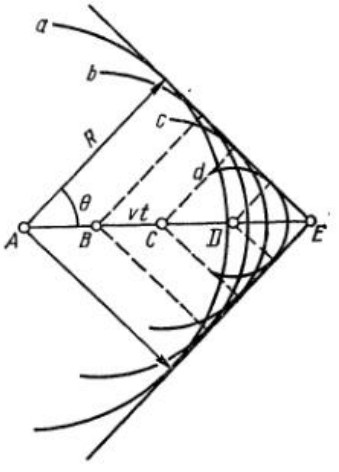


Рис. 44.7

$$\cos\theta = c/nv. \qquad (44.57)$$

Энергия, испускаемая электроном на единице пути L, определяется формулой

$$\frac{d\mathscr{E}}{L} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right)\omega\, d\omega, \qquad (44.58)^*$$

где e — заряд электрона, $\omega = 2\pi c/n\lambda$ — циклическая частота излучения, область интегрирования определяется условием $\dfrac{v}{c} n(\omega) > 1$ (т. е. $\cos\theta < 1$). Формула (44.58) учитывает зависимость показателя преломления n от частоты ω; $n = n(\omega)$.

Эффект Черенкова — Вавилова лежит в основе работы детекторов, служащих для регистрации заряженных частиц. Эти детекторы называются *черенковскими счетчиками*.

45. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ СИСТЕМОЙ ЗАРЯДОВ

45.1. Сечение рассеяния. Закон Рэлея

Согласно электродинамике, если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее воздействием заряды приходят в движение, которое сопровождается излучением во всех направлениях. Происходит рассеяние первоначальной падающей волны. Этот процесс характеризуют *дифференциальным сечением* $d\sigma$, которое по определению равно отношению энергии dI, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении телесного угла $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, где θ и φ — углы в сферической системе координат (2.4), в единицу времени к плотности потока энергии излучения I, падающего на систему зарядов:

$$d\sigma = \frac{dI}{I}. \tag{45.1}$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma = \int d\sigma = \int \frac{dI}{I}, \tag{45.2}$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

Пусть на атом водорода падает плоская монохроматическая волна, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ которой изменяется по гармоническому закону с течением времени t:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t. \tag{45.3}$$

Предположим, что электрон в атоме удерживается в положении равновесия квазиупругой силой $f = kx$, где k — постоянная, x — смещение от положения равновесия, и что скорость электрона v мала по сравнению со скоростью света c. В этой модели уравнение движения электрона имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} \sin \omega t, \tag{45.4}$$

где $\omega_0^2 = k/m$ — собственная частота колебания атома, m — масса электрона и учтено, что магнитная составляющая силы Лоренца $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ мала по сравнению с силой $e\mathbf{E}$.

Решением уравнения (45.4) является функция

$$x = \frac{eE_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \sin \omega t, \tag{45.5}$$

согласно которой электрон в квазиупругом атоме под воздействием волны (45.3) совершает вынужденные колебания с частотой падающей волны ω. Интенсивность dI излучения атома, представляющего собой в рассматриваемой модели диполь, в данном направлении θ в телесный угол $d\Omega$ с учетом (45.5) находится из соотношения [44.1.1]

$$dI = \frac{\ddot{\mathbf{p}}^2}{16\pi^2 c^3 \varepsilon_0} \sin^2\theta\, d\Omega = \frac{e^4}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 m^2} \times$$
$$\times \frac{\omega^4 E_0^2 \sin^2 \omega t}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \sin^2\theta\, d\Omega, \tag{45.6}*$$

где $\mathbf{p} = e\mathbf{r} = e\mathbf{x}$ — дипольный момент, θ — угол между направлением поля $\mathbf{E}$ и направлением рассеяния. Плотность потока энергии электромагнитного поля имеет вид

$$I = \varepsilon_0 c\, E^2 = \varepsilon_0 c E_0^2 \sin^2 \omega t \tag{45.7}*$$

а дифференциальное сечение $d\sigma$ (45.1) определяется выражением

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \sin^2\theta\, d\Omega. \tag{45.8}*$$

Полное сечение (45.2)

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \tag{45.9}*$$

Величина

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}, \quad r_0 = 2{,}82 \cdot 10^{-13}\ \text{см} \tag{45.10}$$

называется классическим радиусом электрона [32.3]. Из формулы (45.9) следует **закон Рэлея** (1871): *сечение когерентного (без изменения частоты* ω*) рассеяния электромагнитных волн малой частоты,* $\omega \ll \omega_0$ *(оптический диапазон) прямо пропорционально четвертой степени* ω *или обратно пропорционально* λ^4, *где* $\lambda = 2\pi c/\omega$ *— длина волны.* Этот закон объясняет голубой цвет неба (преобладание коротких длин волн в рассеянном свете) и красный цвет заходящего Солнца (преобладание длинных волн в прошедшем свете).

В случае рассеяния волн с большой частотой $\omega \gg \omega_0$ (рентгеновские лучи) справедлива формула **Томсона**

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2, \tag{45.11}$$

где r_0 — классический радиус электрона (45.10). Согласно (45.11) сечение рассеяния рентгеновских волн на атоме не зависит от его свойств. Это объясняется тем, что условие $\omega \gg \omega_0$ эквивалентно условию $kx \ll eE$, т. е. рассеяние волны происходит на свободном электроне. Сечение (45.11) называется *томсоновским сечением*. Оно не зависит от частоты (и энергии) падающего излучения.

45.2. Формула Клейна — Нишины

Рассеяние с изменением частоты падающей волны называется *комптоновским рассеянием*. Дифференциальное и полное сечения такого рассеяния рассчитываются в квантовой электродинамике. Оно наблюдается при рассеянии рентгеновских лучей на электронных оболочках атомов и рассеянии гамма-лучей на атомных ядрах.

Изменение длины волны $\Delta\lambda$ при комптоновском рассеянии определяется формулой

$$\Delta\lambda = 2\lambda_e \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \lambda_e = \frac{h}{m_0 c}, \quad \lambda_e = 2{,}426 \cdot 10^{-10}\ \text{см}, \tag{45.12}$$

где величина λ_e называется *комптоновской длиной волны* для электрона, θ — угол между направлениями падающей и рассеянной волн, h — постоянная Планка (23.29), m_0 — масса покоя электрона, $m_0 c^2 =$

=511 кэВ. Частота излучения ω' после рассеяния определяется формулой Комптона (1922)

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + \varepsilon(1 - \cos\theta)}, \qquad (45.13)$$

где $\varepsilon = \hbar\omega/m_0c^2$, $\hbar = h/2\pi$, ω — частота падающей волны. Полное сечение комптоновского рассеяния на свободном электроне

$$\sigma_k = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega}\left(\ln\frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \frac{1}{2}\right). \qquad (45.14)$$

Эта формула называется **формулой Клейна — Нишины** (1928). Она хорошо согласуется с опытом, если энергия $\hbar\omega$ падающего фотона (кванта электромагнитного поля [57]) значительно больше энергии электрона mc^2, $\hbar\omega \gg mc^2$, т. е. $\lambda \ll \lambda_e$, где λ — длина падающей волны, λ_e — комптоновская длина волны для электрона (45.12).

Интенсивность I' рассеянного излучения на расстоянии R от рассеивающего центра связана с интенсивностью I падающей волны и отношением частот ω'/ω (45.13) соотношением

$$I' = \frac{I}{R^2}\frac{\omega'}{\omega}\frac{d\sigma}{d\Omega}, \qquad (45.15)$$

где $d\sigma/d\Omega$ — дифференциальное сечение рассеяния.

ЧАСТЬ V
ОПТИКА

Глава XI
Геометрическая оптика

46. ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПТИКИ

Оптика есть раздел физики, в котором изучают свойства света, его физическую природу и взаимодействие с веществом. Под светом в оптике понимают электромагнитные волны с частотой ν от $1{,}5 \cdot 10^{12}$ до $3 \cdot 10^{16}$ Гц, соответствующие инфракрасному излучению, видимому свету и ультрафиолетовому излучению [43.4.5]. Эту область частот принято называть *оптической областью спектра* электромагнитного излучения [44]. Ей соответствуют длины волн λ от $2 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-8} м. Выделение этой части спектра электромагнитных волн в отдельную область обусловлено общностью методов их экспериментального и теоретического исследования. В оптической области спектра частота ν уже сравнима с собственными частотами колебаний атомов и молекул. Поэтому здесь существенны явления, обусловленные атомистическим строением вещества. Наряду с волновыми в этой области излучения проявляются и квантовые свойства света [56]. Если энергию светового кванта, имеющего частоту ν, определить в виде $\mathscr{E} = h\nu$, где h — постоянная Планка [23.3.6], то границам видимого света, имеющим длины волн $\lambda_{кр} = 760 \cdot 10^{-9}$ м и $\lambda_ф = 400 \cdot 10^{-9}$ м, соответствуют энергии $\mathscr{E}_{кр} = 1{,}6$ эВ и $\mathscr{E}_ф \simeq 3$ эВ.

46.1. Распространение света

Геометрической оптикой называют часть оптики, в которой изучаются законы распространения света в прозрачных средах на основе представления о нем как о совокупности световых лучей. Под лучом здесь понимают линию, вдоль которой переносится энергия электромагнитной волны. В геометрической оптике волновая природа света не учитывается. Поэтому область ее применимости определяется условием

$$d \gg \sqrt{l\lambda},$$

d — линейные размеры препятствия, на котором происходит дифракция света [54], l — расстояние от препятствия до экрана, где проводится наблюдение, λ — длина световой волны (рис. 46.1).

Опыт показывает, что в определенных условиях выполняется **закон прямолинейного распространения света:** *в оптически однород-*

ной (прозрачной) среде свет распространяется по прямым линиям. Доказательством этого закона служит образование тени с резкими границами от источника, размеры которого значительно меньше размеров препятствия, отбрасывающего тень. Такой источник света можно считать точечным. Один точечный источник дает полную тень (рис. 46.1). От нескольких точечных источников или одного протяженного источника света возникают полная тень (*2*) и полутень (*1*, *3*) (рис. 46.2). Полной тени соответствует область пространства, ограниченная лучами света и расположенная за препятствием, куда не попадает свет от источников. Полутени соответствуют частично освещенные (одним из источников) части пространства за препятствием.

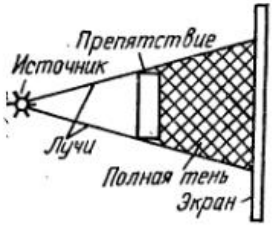


Рис. 46.1

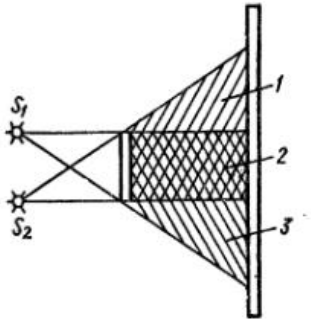


Рис. 46.2

Лучи, выходящие из одной точки, называют *расходящимися* (рис. 46.3, *а*), а входящие в одну точку — *сходящимися* (рис. 46.3, *б*). Лучи, направленные в пространстве произвольным образом, соответствуют так называемому *диффузному излучению* (рис. 46.3, *в*).

Опыт показывает, что выполняется **закон независимости световых лучей:** *распространение световых лучей в среде происходит независимо одно от другого.* Это означает, что прохождение светового луча

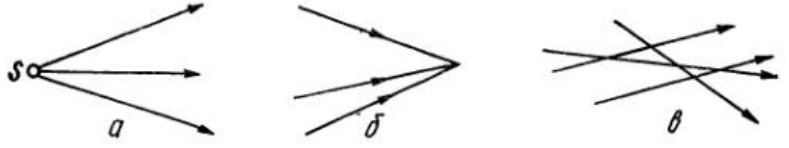


Рис. 46.3

через заданную область пространства не зависит от того, заполнена эта область светом других лучей или нет.

В природе наблюдается отступление от закона прямолинейного распространения света. Это связано с явлением дифракции [54], при котором свет огибает препятствие. Закон независимости световых лучей справедлив только в линейных и однородных средах. Согласно электромагнитной теории света таким средам соответствуют слабые поля, т. е. такие поля, напряженность которых мала по сравнению с напряженностями внутриатомных и внутримолекулярных полей, достигающему значений 10^7—10^8 В/см. В сильных полях с напряженностями равными или большими этих значений наблюдаются так называемые нелинейные явления, при которых нарушается закон независимости световых лучей.

46.2. Скорость света в среде

Скорость света в вакууме c является универсальной физической константой и не зависит от частоты. Ее значение

$$c = (299\,792\,458 \pm 1{,}2)\ \text{м/с}. \qquad (46.1)$$

Скорость света v в веществе меньше, чем в вакууме:

$$v = c/n, \qquad (46.2)$$

где величина n называется абсолютным показателем преломления среды. Согласно электромагнитной теории света [31; 43.1]

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \qquad (46.3)$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемость среды [24.1.6; 25.2.4; 29.1.3]. Формула (46.3) называется **законом Максвелла** (1860). Измеряя скорость света в веществе v по формуле (46.2), можно определить его показатель преломления n. В оптических явлениях магнитные свойства вещества не проявляются ($\mu = 1$). Это обусловлено большой частотой (порядка 10^{14} Гц) световой волны. Так как намагниченность вещества [29.1.1; 29.1.3] возникает в результате поворотов магнитных моментов атомов и молекул [29.1.3] под действием внешнего магнитного поля, то при частотах световой волны атомы и молекулы не успевают поворачиваться за время, равное периоду световых колебаний. Поэтому в хорошем приближении

$$n = \sqrt{\varepsilon}. \qquad (46.4)$$

Соотношение (46.4) хорошо согласуется с опытом только в случае газов. Для воды, спиртов и для большинства других твердых и жидких веществ наблюдается отклонение от закона (46.4), если в качестве ε взять его значение, соответствующее статическим электрическим полям. Это связано с тем, что в основе формул (46.3) и (46.4) лежат материальные уравнения (31.9), которые не выполняются для ряда сред. Уравнения (31.9) справедливы только для монохроматических слабых полей. В общем случае величины ε и μ являются функциями частоты электромагнитного поля ω: $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, $\mu = \mu(\omega)$. Для правильного

Таблица 46.1. Показатель преломления n газов (паров) для желтой линии натрия ($\lambda = 589{,}3$ нм)

Вещество	n	Вещество	n
Азот	1,000297	Метан	1,000441
Аммиак	1,000375	Неон	1,000067
Аргон	1,000284	Оксид углерода (II)	1,000334
Ацетон	1,000606	Оксид углерода (IV)	1,000450
Водород	1,000138	Оксид серы (IV)	1,000660
Водяной пар	1,000252	Пары ртути	1,000933
Воздух	1,000292	Пары метилового спирта	1,000586
Гелий	1,000035	Пары хлороформа	1,001455
Кислород	1,000272	Сероводород	1,000619
Криптон	1,000427	Фтор	1,000195
Ксенон	1,000702	Хлор	1,000768

сопоставления n и ε необходимо брать значения ε, измеренные в электрических полях тех же частот. Зависимость показателя преломления n от частоты световой волны называют *дисперсией света*: $n = n(\omega)$. Физическая природа дисперсии света [49] связана с тем, что диэлектрическая проницаемость ε обусловлена поляризацией диэлектрика, при которой заряженные частицы внутри атомов и молекул под действием внешнего электрического поля смещаются от своих равновесных

Таблица 46.2. Показатель преломления n жидкостей (относительно воздуха при $t = 20\ ^\circ C$, $P = 101{,}3$ кПа для желтой линии натрия $\lambda = 589{,}3$ нм)

Вещество	n	Вещество	n
Анилин	1,586	Подсолнечное масло	1,47
Ацетон	1,359	Раствор (20 %) сахара в воде	1,364
Бензины	1,38—1,41	Раствор (80 %) сахара в воде	1,490
Бензол	1,5014	Серная кислота	1,43
Вода	1,33299	Скипидар	1,460—1,478
Глицерин	1,474—1,4695	Соляная кислота	1,254
Жидкий азот (—195 °С)	1,205	Спирт метиловый	1,329
Жидкий кислород (—181 °С)	1,221	Спирт этиловый	1,3617
Касторовое масло	1,48	Толуол	1,497
Кедровое масло	1,505	Трансформаторное масло	1,476—1,488
Коричное масло	1,604	Хлороформ	1,446
Льняное масло	1,47	Эфир	1,354
Нафталин (100 °С)	1,582		

Таблица 46.3. Показатель преломления n твердых тел при $t = 20\ ^\circ C$ (относительно воздуха при $t = 20\ ^\circ C$, $P = 101{,}3$ кПа для желтой линии натрия $\lambda = 589{,}3$ нм)

Вещество	n	Вещество	n
Алмаз	2,4173	Плексиглас	1,491
Гранат	1,74—1,89	Полистирол	1,588—1,592
Желатин	1,525	Рубин	1,76
Исландский шпат (необыкновенный луч)	1,48643	Сахар	1,56
Исландский шпат (обыкновенный луч)	1,65836	Слюда	1,56—1,60
Каменная соль	1,5443	Стекло кварцевое	1,4584
Кварц	1,544	Стекло обычное	1,48—1,53
Корунд	1,769	Стекло оптическое	1,47—2,04
Лед (0—4 °С)	1,310	Топаз	1,63
Органическое стекло	1,485—1,500	Янтарь	1,532

положений [25.2.4]. Наиболее сильная зависимость $n = n(\omega)$ наблюдается при частотах внешнего поля ω, близких к собственным частотам атомов и молекул.

Показатели преломления n для ряда веществ приведены в табл. 46.1 (для газов), табл. 46.2 (для жидкостей) и табл. 46.3 (для твердых тел). Зависимость n от длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ приведена в табл. 46.4.

Таблица 46.4. Зависимость показателя преломления n от длины волны λ светового излучения

Цвет	λ, нм	n			
		Стекло (желтый флинт)	Стекло (легкий крон)	Вода (при $t = 20\ ^\circ C$)	Каменная соль
Красный	656,3	1,6444	1,5145	1,3311	1,5407
Желтый	589,3	1,6499	1,5170	1,3330	1,5443
Зеленый	546,1	1,6546	1,5191	1,3345	1,5475
Синий	480,0	1,6648	1,5235	1,3374	1,5541
Фиолетовый	404,7	1,6852	1,5318	1,3428	1,5665

47. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

47.1. Законы отражения света

При падении лучей света на границу раздела двух сред происходят явления отражения и преломления световых лучей.

Углом падения называют угол α между падающим лучом A света и перпендикуляром к границе раздела двух сред, восстановленным в точке падения O (рис. 47.1).

Углом отражения называется угол β между отраженным лучом B и перпендикуляром к поверхности, отразившей луч света, восстановленным из точки отражения O (рис. 47.1).

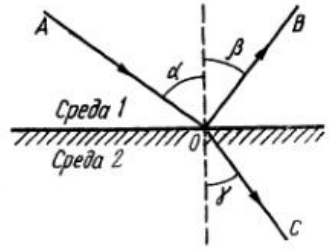


Рис. 47.1

Законы отражения света: 1) *угол падения α равен углу отражения β*; 2) *падающий луч A, отраженный луч B и перпендикуляр к поверхности в точке O лежат в одной плоскости.*

При падении лучей света на идеальную плоскую границу раздела двух сред, размеры которой значительно больше длины волны падающего света, наблюдается так называемое *зеркальное отражение*. При зеркальном отражении отражающая свет поверхность невидима, видны только источники световых лучей. При падении параллельного пучка лучей света на шероховатую поверхность наблюдается так называемое *диффузное* или *рассеянное отражение*. Каждый отдельный падающий луч при диффузном отражении подчиняется законам отражения света. Лучи, отраженные от участков шероховатой поверхности, ориентированных различным образом по отношению к падающим лучам, не образуют параллельного пучка после процесса отражения. Вследствие этого отражающая поверхность становится видимой.

Для законов отражения света выполняется **принцип обратимости хода световых лучей:** *луч света, распространяющийся по пути отраженного луча B, отразившись в точке O от поверхности тела, распространяется дальше по пути падающего луча A.*

47.2. Законы преломления света

Углом преломления называют угол γ между лучом C, прошедшим через границу раздела двух сред, и перпендикуляром к границе, восстановленным в точке преломления O луча (рис. 47.1).

Закон преломления Снеллиуса (1620): *преломленный луч C лежит в плоскости, проведенной через падающий луч A и перпендикуляр к границе в точке падения O, а отношение синуса угла падения α к синусу*

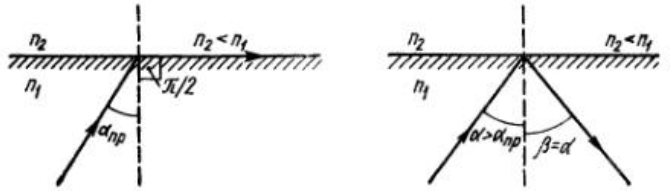


Рис. 47.2

угла преломления γ для данных сред не зависит от угла падения α, но зависит от длины волны света:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{n_2}{n_1}=n_{21}. \tag{47.1}$$

Величина n_{21} называется *относительным показателем преломления среды 2 относительно среды 1.* Он определяется отношением абсолютных показателей преломления (46.3) n_2 и n_1 этих сред. Если $n_{21}>1$, то среда 2 называется оптически более плотной по сравнению со средой 1. Если $n_{21}<1$, то при некоторых условиях преломленный луч не возникает и свет полностью отражается от границы раздела двух сред. Это явление называется *полным отражением.* Оно характеризуется *предельным углом полного отражения* $\alpha_{пр}$, определяемым из условия

$$\sin\alpha_{пр}=n_{21}. \tag{47.2}$$

При переходе луча света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду ($n_{21}<1$) угол падения α не может превышать предельного значения $\alpha_{пр}$. Если $\alpha>\alpha_{пр}$, то происходит *полное внутреннее отражение* (рис. 47.2).

Следствия закона Снеллиуса: 1. При переходе луча света из оптически более плотной в оптически менее плотную среду ($n_{21}<1$) угол преломления γ больше угла падения α. Преломленный луч отклоняется от перпендикуляра к границе раздела двух сред в точке падения луча. 2. При переходе луча света из оптически менее плотной в оптически более плотную среду ($n_{21}>1$) угол преломления γ меньше угла падения α. Преломленный луч приближается к перпендикуляру к границе раздела двух сред в точке падения луча.

47.3. Принцип Ферма. Уравнение геометрической оптики

Принцип Ферма (ок. 1662): *свет распространяется из одной точки среды в другую по пути, для прохождения которого затрачивается наименьшее время.* Этот принцип следует из принципа Гюйгенса [39.5.2] в предельном случае бесконечно малой длины волны света. Он является наиболее общим принципом геометрической оптики. Все ее законы могут быть получены из принципа Ферма.

Математическое выражение принципа Ферма имеет вид

$$\delta\int_A^B ds=0, \tag{47.3}$$

где A и B — точки, между которыми распространяется свет, величина $ds=ndl$ называется *элементом оптической длины пути* s, dl — элемент (геометрической) длины пути между точками A и B, $n=n(x, y, z)$ — абсолютный показатель преломления среды, символ δ означает вариацию интеграла. Если показатель преломления среды n изменяется в пространстве непрерывно, то оптическая длина пути, пройденного светом от точки A до точки B, будет меньше любой другой кривой, соединяющей эти точки.

Геометрическая оптика является предельным случаем волновой оптики [XII], когда длина волны света стремится к нулю. Поэтому ее уравнения следуют из волновых уравнений(43.16) для напряженностей электрического **E** и магнитного **H** полей, описывающих световую волну. Действительно, в случае плоской монохроматической волны

$$f=a(\mathbf{r})\,e^{i\omega t-ik_0\Phi(\mathbf{r})} \tag{47.4}$$

уравнения (43.16) эквивалентны уравнениям

$$(\operatorname{grad}\Phi)^2=n^2+\frac{\Delta a}{k_0^2 a}. \tag{47.5}$$

$$a\,\Delta\Phi+2\operatorname{grad}a\,\operatorname{grad}\Phi=0.$$

Здесь f обозначает любую из компонент векторов **E** и **H**, $a(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$ — вещественные функции координат, $k_0=\omega/c=2\pi/\lambda$ —волновое число в вакууме, ω — циклическая частота колебаний световой волны.

Если длина волны λ мала, а амплитуда a изменяется в пространстве не очень быстро, то

$$\left|\frac{\Delta a}{k_0^2 a}\right|\ll n^2,\quad\left|\lambda^2\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right|\ll\left|\lambda\frac{\partial a}{\partial x}\right|\ll a, \tag{47.6}$$

и уравнения (47.5) принимают вид

$$\operatorname{grad}\Phi=n\mathbf{s}, \tag{47.7}$$

$$a\,\Delta\Phi+2n\frac{\partial a}{\partial s}=0, \tag{47.8}$$

где **s** — единичный вектор нормали к фронту волны

$$\omega t-k_0\Phi=\text{const}, \tag{47.9}$$

проведенный в сторону ее распространения. Уравнение (47.7) называется *уравнением эйконала.* Оно определяет скорость распространения

волнового фронта в направлении нормали $\mathbf{s}$: $\mathbf{v} = d\mathbf{s}/dt$ — малый участок волнового фронта в малых объемах пространства движется со скоростью волнового фронта плоской волны.

Соотношения (47.7) и (47.8) составляют систему уравнений геометрической оптики. Уравнение (47.8) можно проинтегрировать в общем виде

$$a = a_0 \exp\left(-\int_0^s \frac{\Delta\Phi}{2n}\, ds\right), \qquad (47\ 10)$$

где a_0 — амплитуда в точке луча, от которой отсчитывается его длина s. Здесь под лучом понимается траектория, проведенная ортогонально к семейству равных фаз (47.9). Из (47.10) следует, что в приближении геометрической оптики световое поле на данном луче не зависит от полей других лучей и его энергия распространяется вдоль луча.

47.4. Построение изображений в идеальных оптических системах

47.4.1. Плоское зеркало. *Плоское зеркало* представляет собой гладкую поверхность (рис. 47.3). Оно создает мнимое (кажущееся) изображение. Предмет S и его изображение S' расположены симметрично по отношению к поверхности зеркала.

47.4.2. Сферическое зеркало. *Сферическое зеркало* представляет собой гладкую сферическую поверхность (рис. 47.4). Ее *оптической*

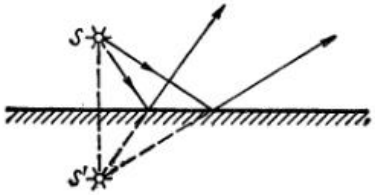


Рис. 47.3

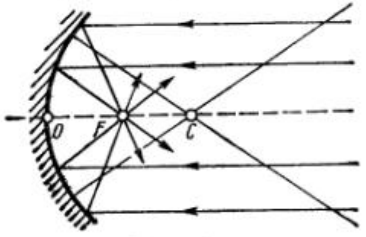


Рис. 47.4

осью называется любая прямая, проходящая через центр кривизны C сферической поверхности. Главная оптическая ось проходит через центр кривизны C и полюс зеркала O — точку, равноудаленную от границ зеркала.

Лучи, параллельные главной оптической оси, после отражения от сферического зеркала собираются в одной точке F, называемой *фокусом* зеркала. Расстояние от полюса зеркала O до фокуса F называется *фокусным расстоянием* f:

$$f = R/2, \qquad (47.11)$$

где R — радиус кривизны зеркала. Для параксиальных световых пучков, т. е. лучей света, образующих узкий конус с осью, перпендикулярной сферической поверхности, справедлива формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad (47.12)$$

где f — фокусное расстояние, a — расстояние от зеркала до предмета (источника света), b — расстояние от зеркала до изображения. Если G есть размер предмета, B — размер изображения, то

$$G/B = a/b. \qquad (47.13)$$

Величины a и b считаются положительными, если они отсчитаны от полюса зеркала O в направлении распространения света, и отрицательными — в противоположном направлении. Изображение в сферическом зеркале действительное, если $b < 0$. В этом случае предмет и его изображение находятся по одну сторону от зеркала (рис. 47.5). Если $b > 0$, то изображение мнимое — предмет и его изображение находятся по разные стороны от зеркала (рис. 47.6). Если зеркало выпуклое, то изображение в нем всегда мнимое (рис. 47.7)



Рис. 47.5

При построении изображения в зеркале следует руководствоваться следующими *тремя правилами*: 1) луч, параллельный главной оптической оси, после отражения в зеркале проходит через фокус; 2) луч, прошедший через фокус, после отражения идет параллельно главной оптической оси; 3) луч, проходящий через центр кривизны зеркала, при отражении совмещается с самим собой. Эти три луча, испущенные из данной точки предмета (источника), после их отражения в зеркале пересекаются в одной точке, являющейся изображением источника.

47.4.3. Плоскопараллельная пластинка. *Плоскопараллельная пластинка* представляет собой прозрачное тело, ограниченное с двух

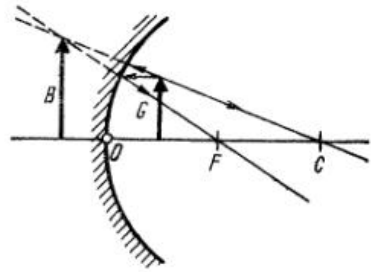


Рис. 47.6

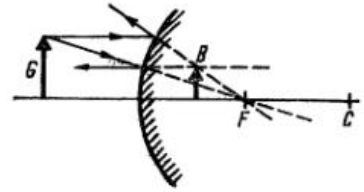


Рис. 47.7

сторон плоскими параллельными между собой поверхностями. При прохождении света через такую систему луч преломляется на двух границах. Он не изменяет своего направления, а только смещается параллельно самому себе на величину a, определяемую формулой

$$a = \frac{d\sin(\alpha - \beta)}{\cos\beta} = d\sin\alpha\left(1 - \sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2-\sin^2\alpha}}\right), \qquad (47.14)$$

где d — толщина пластинки, α — угол падения на первую границу раздела, β — угол преломления на первой границе раздела, равный углу падения на вторую границу раздела, n — показатель преломления материала пластинки по отношению к окружающей среде (рис. 47.8).

Источник S света (предмет) кажется приближенным к поверхности пластинки на расстояние

$$\Delta = d\left(1 - \sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{n^2-\sin^2\alpha}}\right). \qquad (47.15)$$

Если $\alpha = 0$ (нормальное падение луча), то $a = 0$, $\Delta = d\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

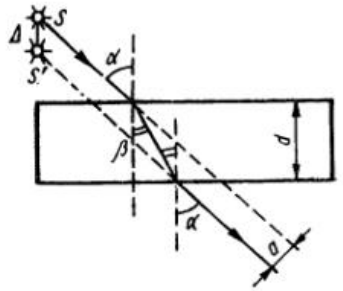


Рис. 47.8

47.4.4. Призма. *Призма* представляет собой прозрачное тело, ограниченное с двух сторон плоскими поверхностями, образующими

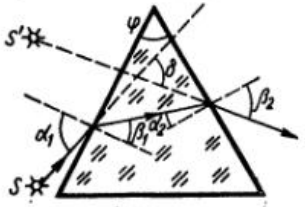


Рис. 47.9

между собой угол φ, называемый *преломляющим углом призмы* (рис. 47.9). В призме световой луч дважды испытывает преломление на преломляющих гранях и изменяет свое направление. Угол δ отклонения луча призмой определяется формулой

$$\delta = \alpha_1 + \beta_2 - \varphi, \qquad (47.16)$$

где α_1 — угол падения на первую грань, β_2 — угол преломления на второй грани, φ — преломляющий угол призмы. Из геометрических соображений следует, что $\varphi = \alpha_2 + \beta_1$ (рис. 47.9). Минимальный угол отклонения падающего луча δ_{min} наблюдается при условии $\alpha_1 = \beta_2$ и $\beta_1 = \alpha_2$. Он определяется соотношением

$$\sin\left[\frac{1}{2}(\delta_{min} + \varphi)\right] = n \sin\frac{\varphi}{2}, \qquad (47.17)$$

где n — показатель преломления материала призмы по отношению к окружающей среде.



Рис. 47.10

47.4.5. Линза. *Линза* представляет собой прозрачное тело, ограниченное с двух сторон криволинейными поверхностями. Линза считается тонкой, если ее толщина много меньше радиусов кривизны R_1 и R_2 ее поверхностей. Прямая, проведенная через центры C_1 и C_2 кривизны поверхностей, называется *главной оптической осью* линзы. В тонкой линзе точки пересечения обеих поверхностей с главной оптической осью можно считать сливающимися в одну точку O, которая называется *оптическим центром* линзы. Прямые, проходящие через оптический центр линзы и не совпадающие с ее главной оптической осью, называют *побочными оптическими осями* (рис. 47.10).

Проходя через призму, лучи преломляются дважды. При построении хода лучей в тонких призмах преломление на обеих гранях заменяют одним преломлением в так называемой *главной плоскости* линзы, проходящей через ее оптический центр, перпендикулярно главной оптической оси. Все расстояния отсчитываются от главной плоскости линзы. Лучи, параллельные главной оптической оси, пересекаются в точке, лежащей на этой оси и называемой фокусом линзы. У всякой линзы имеется два фокуса F_1 и F_2, лежащие по обе стороны от нее. Плоскость, проходящая через фокус перпендикулярно главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*. Расстояние от оптического центра линзы O до ее фокуса называется *фокусным расстоянием* f. Величина D, обратная фокусному расстоянию f, называется *оптической силой линзы*:

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (47.18)$$

где n — показатель преломления для материала линзы относительно окружающей среды, R_1 и R_2 — радиусы кривизны более или менее

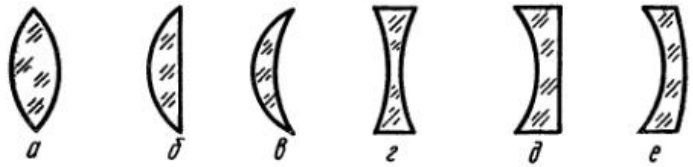


Рис. 47.11

искривленных поверхностей. Радиусы кривизны выпуклых поверхностей считаются положительными, а вогнутых — отрицательными. У плоских поверхностей радиус кривизны равен бесконечности.

Линза называется *собирающей*, если $f > 0$, и *рассеивающей*, если $f < 0$. При $n > 1$ (абсолютный показатель преломления материала линзы больше, чем эта же величина у среды, окружающей линзу) собирающими линзами являются: двояковыпуклая, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ (рис. 47.11, *а*), плоско-выпуклая, $R_1 > 0$, $R_2 = \infty$ (рис. 47.11, *б*) и вогнуто-выпуклая, $R_1 > 0$, $R_2 < 0$ (рис. 47.11, *в*). Рассеивающими линзами при $n > 1$ являются: двояковогнутая, $R_1 < 0$, $R_2 < 0$ (рис. 47.11, *г*), плоско-вогнутая, $R_1 < 0$, $R_2 = \infty$ (рис. 47.11, *д*) и выпукло-вогнутая, $R_1 < 0$, $R_2 > 0$ (рис. 47.11, *е*). Единицей оптической силы линзы является диоптрий (дптр):

$$[D] = \text{дптр} = \frac{1}{\text{м}}. \qquad (47.19)$$

В случае тонкой линзы справедлива формула

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \qquad (47.20)$$

где a — расстояние до предмета, b — расстояние до изображения. Если G — размер предмета, B — размер его изображения, то величина

$$\beta = B/G = b/a \qquad (47.21)$$

определяет линейное увеличение линзы.

Тонкая линза дает неискаженное изображение предмета, если свет монохроматический, а предмет мал или так удален от линзы,

что лучи от него идут вблизи главной оптической оси линзы (являются параксиальными [47.4.2]).

При построении изображений пользуются следующими *правилами*: 1) луч, параллельный главной оптической оси, после преломления в линзе проходит через фокус; 2) луч, прошедший через фокус, после преломления в линзе идет параллельно главной оптической оси; 3) луч, прошедший через центр линзы, не меняет своего направления (рис. 47.12).

Для собирающей линзы: 1) если $a > 2f$, то $\beta < 1$ и изображение действительное перевернутое; 2) если $a = 2f$, то $\beta = 1$ и изображение действительное перевернутое; 3) если $f < a < 2f$, то $\beta > 1$ и изображение действительное перевернутое; 4) если $a = f$, то $\beta = \infty$; 5) если $a < f$, то $\beta > 1$ и изображение мнимое прямое. Для рассеивающей линзы при произвольных a увеличение $\beta < 1$ и изображение мнимое прямое.

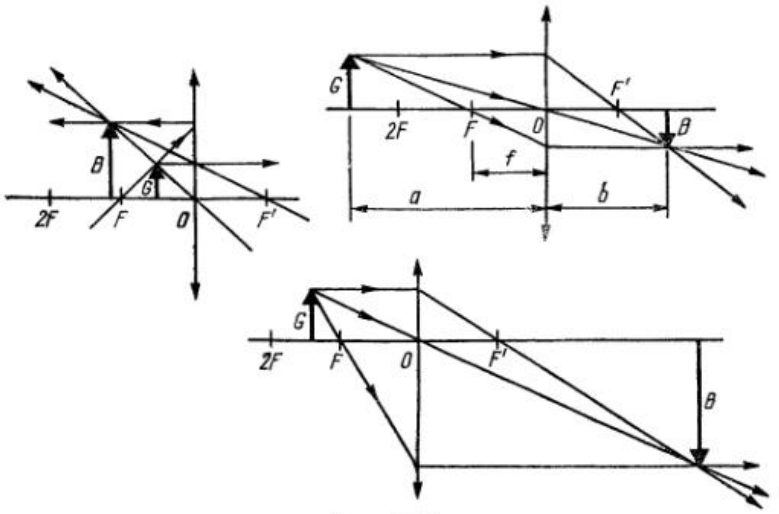


Рис. 47.12

48. РЕАЛЬНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

48.1. Погрешности оптических систем

Погрешности оптических систем называют *аберрациями*. Они возникают в результате использования широких световых пучков (для получения больших освещенностей предметов), а также при получении изображений предметов, значительно удаленных от главной оптической оси прибора (при фотографировании). Если аберрации нет, то каждой точке изображения однозначно соответствует точка предмета. Это достигается только в том случае, когда изображение образуется узкими световыми пучками, падающими на оптическую систему под малыми углами к ее главной оптической оси. В реальных оптических системах эти условия, как правило, не выполняются. Так, сферические линзы только приближенно удовлетворяют этим требованиям. В результате изображение получается недостаточно резким, мелкие детали становятся неразличимыми. Для уменьшения аберрации применяют системы линз.

Различают сферическую и хроматическую аберрации. *Сферическая аберрация* возникает в результате того, что периферия линзы преломляет лучи света сильнее, чем центральная ее часть. Так, линза большого диаметра дает изображение точечного источника не в виде точки, а в виде расплывчатого светлого пятна. Это явление обусловлено использованием широких пучков световых лучей (рис. 48.1). Получаемые с их помощью изображения являются нерезкими, расплывчатыми. Для повышения

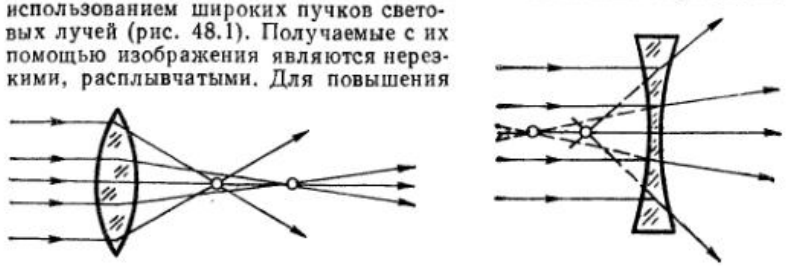


Рис. 48.1

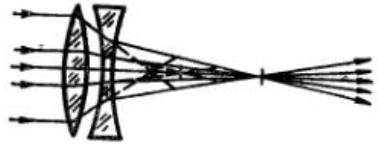


Рис. 48.2

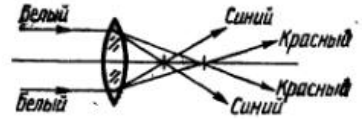


Рис. 48.3

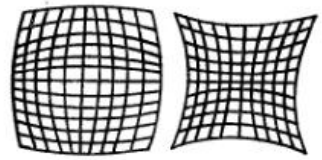


Рис. 48.4

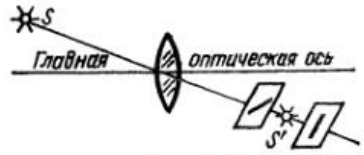


Рис. 48.5

резкости изображения оптическую систему снабжают узким отверстием (диафрагмой), через которое пропускают пучок света. Сферическую аберрацию можно также скомпенсировать путем комбинации собирающей и рассеивающей линз (рис. 48.2), подобранных соответствующим образом.

Хроматическая аберрация обусловлена зависимостью показателя преломления оптических стекол от длины волны падающего на них света. Линзы из таких стекол преломляют синий свет сильнее, чем красный (рис. 48.3). В результате края изображения, полученного с помощью белого света, приобретают цветную кайму. Для ослабления хроматической аберрации применяют систему из выпуклой линзы из кронгласа и вогнутой линзы из флинтгласа (так называемая ахроматическая пара линз). Полная компенсация хроматической аберрации возможна лишь для двух значений длин волн.

К другим аберрациям относятся дисторсия, астигматизм и кома. *Дисторсия* представляет собой погрешность оптической системы, в результате которой изображение прямоугольной сетки приобретает подушкообразную или бочкообразную форму (рис. 48.4). Прямые линии искривляются наружу или внутрь, особенно у края изображения.

Астигматизм проявляется в тех случаях, когда используют световые пучки (даже узкие), составляющие значительный (немалый) угол с главной оптической осью системы. Астигматизм линзы, например, приводит к тому, что изображение точки, лежащей на ее побочной оптической оси, представляет собой две взаимно перпендикулярные линии, лежащие в разных плоскостях (рис. 48.5).

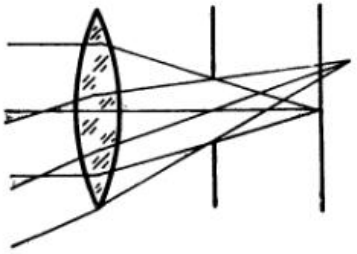


Рис. 48.6

Кома представляет собой погрешность оптической системы, возникающую при прохождении через нее широких пучков света от точки предмета, находящейся на побочной оптической оси. Изображение этой точки имеет вид вытянутого и неравномерно освещенного пятна в форме кометы (рис. 48.6).

Для коррекции дисторсии, астигматизма и комы применяют сложные оптические системы, оптические элементы которых подобраны так, чтобы они взаимно компенсировали погрешности, обусловленные каждой из них.

48.2. Оптические приборы

Оптические приборы предназначены для получения изображения (проекционный аппарат, фотоаппарат, виограф и т. п.) и увеличения угла зрения (лупа, микроскоп, подзорная труба, бинокль, телескоп и т. п.).

48.2.1. Проекционный аппарат. *Проекционный аппарат* представляет собой прибор, с помощью которого на экране получают действительное увеличенное изображение предметов. Проекционный аппарат, предназначенный для демонстрации прозрачных объектов (диапозитивов, рисунков на стекле, слайдов, фильмов) называется диаскопом (рис. 48.7). Проекционный аппарат, предназначенный для демонстрации непрозрачных объектов, называют *эпископом* или *эпипроектором* (рис. 48.8).

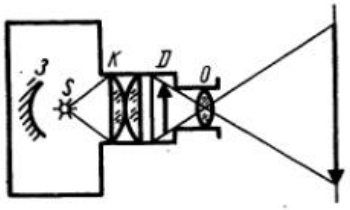


Рис. 48.7

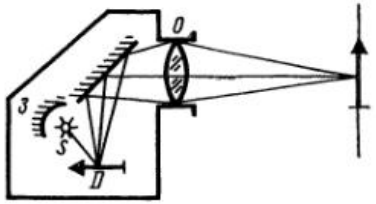


Рис. 48.8

Проекционный аппарат состоит из источника света S, конденсатора K, предназначенного для получения изображения источника S на объективе O. Объектив O представляет собой систему линз, действующих как одна собирающая линза. Предмет D располагается вблизи фокальной плоскости объектива O. Размеры конденсатора подбираются так, чтобы весь предмет D был освещен равномерно. Этой же цели служит зеркало $З$.

48.2.2. Фотоаппарат. Изображение $И$ в *фотоаппарате* создается объективом O, который представляет собой собирающую систему линз (рис. 48.9). Изображение, как правило, получается действительным уменьшенным и перевернутым. Предмет $П$ располагается на расстоянии, превышающем удвоенное фокусное расстояние объектива. Объектив O находится у передней стенки аппарата. Изображение $И$ проецируется на фотопластинку (пленку), расположенную у задней его стенки. Наводкой на резкость (с помощью перемещения объектива) добиваются того, чтобы расстояние до предмета $П$ соответствовало расстоянию до изображения $И$. Диаметр объектива d и его фокусное расстояние f определяют величину относительного отверстия

$$\frac{1}{F} = \frac{d}{f}, \qquad (48.1)$$

которая пропорциональна освещенности фотопластинки. На оправах объективов фотоаппаратов указывают их фокусные расстояния f и относительное отверстие в виде числа F. Последнее записывается в форме дроби $1/F$, где $F = f/d$, и показывает, во сколько раз фокусное расстояние больше диаметра объектива. Чем меньше число F, тем больше светосила объектива, равная $(d/f)^2$. Для регулировки светового потока, поступающего в фотоаппарат, объектив снабжают диафрагмой, диаметр которой можно изменять. Кроме того, фотоаппараты снабжаются устройствами, позволяющими изменять время экспонирования (выдержку).

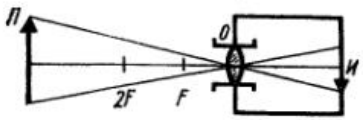


Рис. 48.9

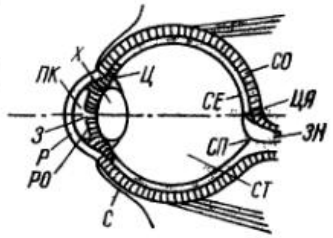


Рис. 48.10

Отражение света от поверхностей линз уменьшает светосилу объектива и понижает контрастность изображения. Для уменьшения отражающей способности линз используют так называемое просветление оптики — нанесение на поверхность линзы тонкой прозрачной пленки из специального материала. Обычно толщина пленки подбирается из расчета минимального отражения зеленого света. Поэтому просветленная оптика имеет сине-красный оттенок.

48.2.3. Глаз. *Глаз* является органом зрения. Он представляет собой сложную оптическую систему. Его устройство схематично показано на рис. 48.10. Здесь C — склера (белковая оболочка глаза); $Р$ — прозрачная роговица, сквозь которую в глаз проникает свет; $РО$ — радужная оболочка с отверстием-зрачком $З$; $Х$ — хрусталик — эластичное, линзообразное тело; $Ц$ — циллиарная мышца, изменяющая радиус кривизны поверхности хрусталика, его оптическую силу и фокусное расстояние; $СТ$ — стекловидное тело — прозрачная студенистая жидкость, заполняющая полость глаза за хрусталиком; $СЕ$ — сетчатая оболочка (сетчатка) — полусфера, состоящая из светочувствительных клеток, имеющих форму колбочек и палочек; $СО$ —

сосудистая оболочка, состоящая из сложного сплетения кровеносных сосудов, питающих глаз; *ПК* — передняя камера, заполненная камерной влагой, *СП* — слепое пятно — место, где нет светочувствительных клеток и откуда выходит зрительный нерв *ЗН*; *ЦЯ* — центральная ямка, в которой сосредоточены колбочки.

По своему устройству глаз как оптическая система имеет много общего с фотоаппаратом [48.2.2]. Роль объектива здесь играет хрусталик вместе со средой передней камеры. Способность глаза к аккомодации обеспечивает возможность получения на сетчатке резких изображений предметов, находящихся на различных расстояниях. Здоровый глаз в спокойном состоянии дает на сетчатке отчетливое изображение очень удаленных предметов (звезд). Наименьшее расстояние, на котором такой глаз может отчетливо видеть предметы, меняется с возрастом от 10 см (до 20 лет) до 22 см (около 40 лет) или до 30 см (в пожилом возрасте).

Минимальное расстояние, на котором глаз аккомодируется без утомления, для здорового глаза составляет 25 см. Задний фокус такого

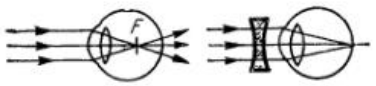


Рис. 48.11

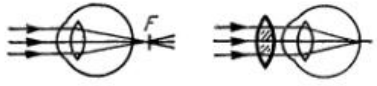


Рис. 48.12

глаза в спокойном состоянии находится на сетчатке. Если фокус глаза в спокойном состоянии лежит внутри глаза перед сетчаткой, то глаз называют *близоруким* (рис. 48.11). Такой глаз плохо видит отдаленные предметы. Близорукость глаза исправляют с помощью рассеивающих линз. Если фокус глаза находится за сетчаткой, то такой глаз называют *дальнозорким*. Он плохо видит близкие предметы. Ему приходится делать усилия даже для того, чтобы видеть очень удаленные объекты. Для исправления дальнозоркости глаза пользуются собирающими линзами (рис. 48.12).

Две близкие светящиеся точки глаз воспринимает раздельно, если они видны под углом зрения не менее 1′. *Углом зрения* называется угол, под которым виден предмет. Если G — размер предмета, a — расстояние до него, то угол зрения δ находится по формуле

$$\operatorname{tg}\delta = G/a. \qquad (48.2)$$

Минимальный угол зрения δ, при котором глаз способен различать две точки предмета, определяет его *разрешающую способность*. Разрешающая способность глаза может быть увеличена с помощью оптических приборов: лупы [48.2.4], микроскопа [48.2.5] и телескопа (бинокля) [48.2.6].

Глазу присущи все виды аберраций [48.1] обычных оптических систем, которые, однако, из-за его совершенства очень малы.

Глаз осуществляет цветное зрение. Согласно теории цветного зрения Юнга и Гельмгольца в глазу имеется только три типа светочувствительных приемников. На первый тип действует только красный свет, на другой — зеленый, на третий — сине-голубой. Сложение этих трех спектрально чистых излучений в различных комбинациях с учетом их интенсивностей физиологически оказывается эквивалентным получению любого цветового ощущения.

Чувствительность глаза к различным длинам волн λ разная. Область допустимого зрительного восприятия нормального глаза показана на рис. 48.13, где V_λ — относительная световая эффективность, определяющая, во сколько раз чувствительность глаза к излучению данной длины волны меньше, чем к излучению в максимуме.

48.2.4. Лупа. *Лупа* является простейшим оптическим прибором, позволяющим увеличить разрешающую способность глаза [48.2.3]. Лупа представляет собой короткофокусную линзу. Она помещается перед глазом, как можно ближе к нему, а рассматриваемый предмет — на расстоянии немного меньшем фокусного расстояния линзы (рис. 48.14). Глаз видит через лупу предмет под углом φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = h/f,$$

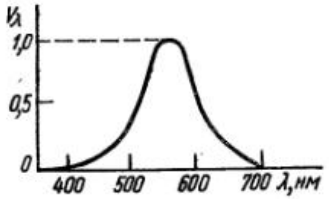


Рис. 48.13

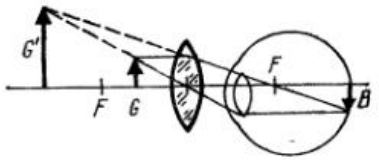


Рис. 48.14

где h — линейные размеры предмета, f — фокусное расстояние линзы. Невооруженный глаз видит предмет под углом φ_0:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = h/D,$$

где D — расстояние наилучшего видения ($D \simeq 25$ см). Нормальное увеличение N линзы определяется формулой

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\varphi_0} = \frac{D}{f}. \qquad (48.3)$$

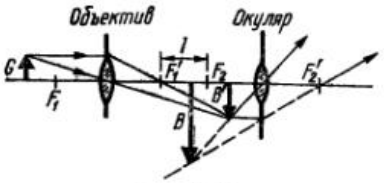


Рис. 48.15

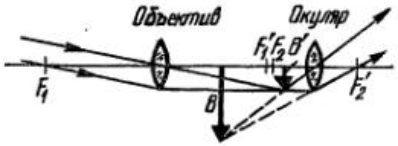


Рис. 48.16

Изображение B предмета на сетчатке глаза оказывается таким, как если бы рассматривался увеличенный предмет без лупы, а не действительный предмет G (рис. 48.14). Чем меньше фокусное расстояние, тем больше увеличение лупы. Лупы с увеличением больше $N = 40$ не применяются. Пользоваться лупами с очень малыми фокусными расстояниями (малыми диаметрами) практически невозможно.

48.2.5. Микроскоп. Для получения значительных увеличений служит *микроскоп*. Он состоит из двух собирающих линзовых систем: объектива с фокусным расстоянием f_1, равным нескольким миллиметрам, и окуляра с фокусным расстоянием f_2, равным нескольким сантиметрам. Предмет G помещается перед фокусом F_1 объектива (рис. 48.15). За объективом за фокусом F_2 окуляра на расстоянии большем $2f_2$ возникает действительное увеличенное (промежуточное) изображение B'. Окончательное изображение B, возникающее перед окуляром,

является мнимым перевернутым и увеличенным. Общее увеличение микроскопа N складывается из увеличений объектива $N_1 \simeq l/f_1$ и окуляра $N_2 = D/f_2$:

$$N = N_1 N_2 = \frac{lD}{f_1 f_2}, \qquad (48.4)$$

где l — оптическая длина тубуса микроскопа, т. е. расстояние между фокальными точками F_1' и F_2 (рис. 48.15), $D \simeq 25$ см — расстояние наилучшего видения.

Наличие у микроскопа действительного промежуточного изображения B' позволяет измерять размеры предмета G. Для этого в фокальную плоскость окуляра помещают шкалу, нанесенную на прозрачную пластинку. Кроме того, можно получить проекцию изображения B' на экран, сфотографировать и т. д.

Вследствие волновой природы света максимальное увеличение N микроскопа не может быть больше 2000.

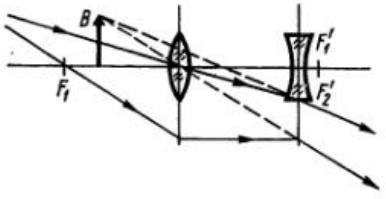


Рис. 48.17

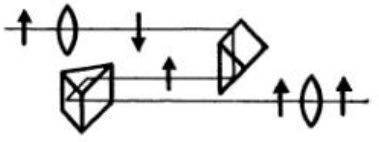


Рис. 48.18

48.2.6. Телескопы и бинокли. *Телескопы* и *бинокли* предназначены для увеличения угла зрения [48.2.3] при наблюдении больших очень удаленных предметов. Простейшим телескопом является подзорная труба. Она состоит из двух линзовых систем — объектива и окуляра. Подзорная труба с собирающим окуляром (рис. 48.16) называется *трубой Кеплера* (1611), труба с рассеивающим окуляром (рис. 48.17) — *трубой Галилея* (1609). Предмет находится на очень большом расстоянии от объектива. В трубе Кеплера за фокусом объектива возникает промежуточное изображение B'. Оно расположено на расстоянии от окуляра, меньшем его фокусного расстояния. Перед окуляром возникает увеличенное мнимое и перевернутое окончательное изображение B. Увеличение, даваемое трубой Кеплера, равно

$$N = f_1/f_2, \qquad (48.5)$$

где f_1 — фокусное расстояние объектива, f_2 — фокусное расстояние окуляра. Длина телескопа

$$l = f_1 + f_2. \qquad (48.6)$$

В трубе Кеплера фокусы объектива F_1' и окуляра F_2 практически совпадают. В этом случае при рассматривании удаленного предмета из окуляра выходят пучки параллельных лучей. Это позволяет наблюдать в телескоп нормальным глазом в спокойном состоянии (без аккомодации).

В трубе Галилея между объективом и окуляром не создается промежуточное изображение. Эта труба создает мнимое увеличенное прямое изображение B. Ее увеличение определяется формулой (48.5). В этой трубе фокусы объектива F_1' и окуляра F_2' практически совпадают.

Труба Галилея дает несильное увеличение удаленного предмета. Поэтому ее используют в театральных биноклях. Так как труба Кеплера дает перевернутое изображение, то в биноклях, построенных на ее основе, применяется оборачивающая система из дополнительной линзы или системы призм с полным внутренним отражением (рис. 48.18). Наличие промежуточного изображения B' в трубе Кеплера позволяет снабжать ее измерительной шкалой или фотопластинкой, помещенной в плоскость расположения промежуточного изображения B'. Поэтому труба Кеплера находит применение в астрономии.

Наряду с телескопами, построенными по типу подзорных труб — *рефракторов*, широкое применение получили зеркальные или отражательные телескопы — *рефлекторы* (рис. 48.19).

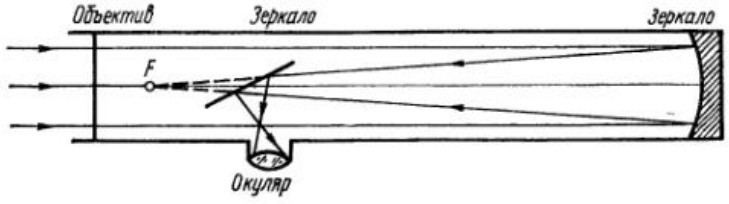


Рис. 48.19

49. ЭЛЕМЕНТЫ ФОТОМЕТРИИ

Фотометрией называется раздел оптики, в котором рассматриваются вопросы измерения энергии, переносимой электромагнитными волнами видимого оптического диапазона [43.3.5].

49.1. Интенсивность лучистого потока

Излучение принято характеризовать интенсивностью, спектральным составом [51.2] и поляризацией [43.2.1]. *Потоком излучения* или *лучистым потоком* Φ называется энергия, переносимая световыми лучами в единицу времени, проходящими через малую площадку dS в телесный угол Ω. Характеристики излучения в пределах площадки dS считаются практически постоянными. Ее линейные размеры предполагаются большими по сравнению с длиной волны излучения. Лучистый поток $d\Phi$ в элементарном телесном угле $d\Omega$ через площадку dS, перпендикулярную его оси, определяется формулой

$$d\Phi = I\, dS\, d\Omega, \qquad (49.1)$$

где I — лучистый поток, отнесенный к единичному телесному углу и к единичной площадке, перпендикулярной направлению распространения излучения. Величину I называют *интенсивностью лучистого потока*. Если направление распространения излучения и нормаль к площадке dS образуют угол θ, то

$$d\Phi = I\, dS \cos\theta\, d\Omega. \qquad (49.2)$$

Энергия dW, проходящая за время dt через площадку dS в телесный угол $d\Omega$, определяется выражением

$$dW = d\Phi\, dt = I\, dS \cos\theta\, d\Omega\, dt. \qquad (49.3)$$

Время dt предполагается бо́льшим по сравнению с периодами колебаний волн, содержащихся в излучении. В противном случае энергия dW будет зависеть от фазы колебания.

Излучение характеризуют *объемной плотностью лучистой энергии*, равной энергии излучения, содержащегося в единице объема пространства. В случае, когда нет дисперсии, скорость распространения энергии совпадает с фазовой скоростью v и объемная плотность лучистой энергии du связана с интенсивностью I соотношением

$$du = \frac{I}{v}\, d\Omega. \tag{49.4}$$

Полная плотность лучистой энергии

$$u = \frac{1}{v}\int I\, d\Omega, \tag{49.5}$$

где интегрирование проводится по всем телесным углам.
Очевидно, когда величина I одинакова во всех направлениях, то

$$u = \frac{4\pi}{v}\, I. \tag{49.6}$$

В системе СИ единицами лучистого потока Φ, интенсивности потока излучения I и объемной плотности u лучистой энергии являются:

$$[\Phi] = \text{Вт},\ [I] = \frac{\text{Вт}}{\text{ср}\cdot\text{м}^2},\ [u] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}. \tag{49.7}$$

Точечный источник света, т. е. источник, линейные размеры которого значительно меньше расстояний, где наблюдается свет, характеризуют силой света источника

$$J = d\Phi/d\Omega. \tag{49.8}$$

Полный световой поток от точечного источника определяется выражением

$$\Phi = \int J\, d\Omega, \tag{49.9}$$

где интегрирование проводится по всем телесным углам.
Величина

$$J_0 = \frac{\Phi}{4\pi} \tag{49.10}$$

называется *средней сферической силой света источника.*
Единицей силы света источника в СИ является кандела (кд):

$$[J] = \text{кд},\ 1{,}005\ \text{кд} = 1\ \text{свеча}. \tag{49.11}$$

Кандела есть сила света, излучаемого в направлении нормали с 1/60 см² излучающей поверхности светового эталона в виде абсолютно черного тела при температуре затвердевания чистой платины, 2046,6 К и давлении 101325 Па.

Интенсивность излучения I и сила света J источника связаны соотношением

$$I = \frac{J}{r^2}, \tag{49.12}$$

где I — интенсивность света на расстоянии r от источника.

Поток излучения, приходящийся на единицу площади освещаемой поверхности, называют *освещенностью* E:

$$E = d\Phi/dS. \tag{49.13}$$

Для точечного источника с силой света J в отсутствие поглощения

$$E = \frac{J}{r^2}\cos\theta, \tag{49.14}$$

где θ — угол между направлением световых лучей и нормалью к освещаемой поверхности.

Формулы (49.12) и (49.14) называют **законами обратных квадратов.**

Единицей освещенности в СИ является люкс (лк):

$$[E] = \text{лк} = \text{лм}/\text{м}^2. \tag{49.15}$$

Люкс есть освещенность, создаваемая потоком излучения в 1 лм, распределенным равномерно по поверхности в 1 м². *Люмен* (лм) есть поток излучения, посылаемый источником с силой света в 1 кд внутрь телесного угла в 1 ср. Освещенность в 1 лк создает точечный источник света с силой 1 кд на внутренней поверхности шара радиусом 1 м, помещенный в центре этого шара.

49.2. Поверхностная яркость и светимость

Протяженные источники характеризуют поверхностной яркостью или просто *яркостью* B:

$$B = \frac{d\Phi}{d\Omega\, dS\cos\theta} = \frac{dJ}{dS\cos\theta}, \tag{49.16}$$

где dJ — сила света площадки dS в рассматриваемом направлении. Яркость B является функцией угла θ: $B = B(\theta)$.

Существуют источники света, для которых справедлив **закон Ламберта:** *поверхностная яркость B не зависит от направления излучения.* Реальные источники света, как правило, этому закону не подчиняются.

Полный световой поток, посылаемый единицей светящейся поверхности в телесный угол $\Omega = 2\pi$ (т. е. в одну сторону), называется *светимостью* K:

$$K = \int B\cos\theta\, d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi/2} B\cos\theta\sin\theta\, d\theta. \tag{49.17}$$

Если поверхность излучает по закону Ламберта, то B не зависит от θ и

$$K = \pi B. \tag{49.18}$$

Единицами яркости B и светимости K в СИ являются:

$$[B] = \text{кд}/\text{м}^2,\ [K] = \text{лм}/\text{м}^2. \tag{49.19}$$

49.3. Спектральный состав излучения

Строго монохроматическое излучение в действительности не реализуется. Излучение, обладающее конечной энергией, занимает конечный диапазон частот ω (длин волн λ). Поэтому фотометрические величины (поток излучения Φ, интенсивность I, полную плотность

лучистой энергии u) можно представить в виде спектральных разложений, аналогичных интегралу Фурье (52.1):

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi_\omega(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty \Phi_\lambda(\lambda)\, d\lambda,$$
$$I = \int_0^\infty I_\omega(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty I_\lambda(\lambda)\, d\lambda, \qquad (49.20)$$
$$u = \int_0^\infty u_\omega(\omega)\, d\omega = \int_0^\infty u_\lambda(\lambda)\, d\lambda.$$

Здесь $\Phi_\omega d\omega$, $I_\omega d\omega$ и $u_\omega d\omega$ имеют смысл потока излучения, интенсивности и объемной плотности лучистой энергии в спектральном интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Аналогичный смысл имеют величины $\Phi_\lambda d\lambda$, $I_\lambda d\lambda$ и $u_\lambda d\lambda$. Описание в терминах частот ω или длин волн λ полностью эквивалентны [43.3.1].

Глава XII

Волновая оптика

50. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ПРИРОДА СВЕТА

Волновой оптикой называют часть оптики, в которой изучаются законы распространения света в среде и его взаимодействия с веществом, обусловленные волновой природой света. Световые волны представляют собой электромагнитные волны [43]. Им соответствует диапазон видимого света на шкале электромагнитных волн [43.3.5].

Электромагнитная природа света следует из теории Максвелла [31]. Первые подтверждения этого предсказания теории были получены: 1) в опытах Фарадея (1846), открывшего явление вращения плоскости поляризации света в магнитном поле; 2) в опытах Вебера и Кольрауша (1856), установивших равенство электродинамической постоянной c (46.1) в уравнениях Максвелла [31.2] скорости света в вакууме; 3) в опытах Герца (1887—1888) [44.3.3] по излучению и приему электромагнитных волн видимого диапазона. В настоящее время волновая оптика представляет собой раздел учения об электрических и магнитных явлениях [III]. Классическая теория оптических явлений основана на атомистических предетавлениях электронной теории Лоренца (1880—1909), позволяющей дать истолкование с микроскопической точки зрения феноменологических постоянных (диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей, электропроводности λ) теории Максвелла. Теория Лоренца позволяет объяснить такие явления, как дисперсия [51], поглощение света [52.2] и др. Для объяснения атомных явлений необходимо переходить к квантовым представлениям о свете как о потоке фотонов — конечных порций (квантов) света [56]. В квантовой электродинамике фотоны рассматриваются как кванты электромагнитного поля.

51. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

51.1. Классическая теория дисперсии света

Дисперсией света называется зависимость абсолютного показателя преломления n от частоты ω падающего на данное вещество света (электромагнитной волны): $n = n(\omega)$. Из определения скорости света v в веществе (46.2) следует, что v также зависит от частоты ω, $v = v(\omega)$.

Согласно атомистическому представлению о строении вещества дисперсия света возникает в результате вынужденных колебаний [37, 42] заряженных частиц, входящих в состав атомов и молекул (электронов и ионов), под действием электромагнитной волны светового излучения. Классическая теория Лоренца (1880—1909) исходит из представления о колеблющихся системах — атомах и молекулах,— подчиняющихся законам Ньютона и классической электродинамики. На излучение и поглощение света в оптической части спектра [46] влияние оказывают практически только электроны периферийной области атомов (электроны внешних оболочек атомов), называемые *оптическими электронами*. Электроны внутренних оболочек атомов имеют очень высокие собственные частоты колебаний. Поэтому их колебания полем световой волны практически не возбуждаются.

В *классической теории дисперсии* уравнение движения одного оптического электрона имеет вид уравнения для затухающего гармонического осциллятора (36.3) с правой частью

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}', \tag{51.1}$$

$$\omega_0^2 = k/m,\ 2\gamma = g/m, \tag{51.2}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона, m — его масса, e — заряд, $-k\mathbf{r}$ — квазиупругая сила, $-g\dot{\mathbf{r}}$ — сила трения, учитывающая поглощение света, $\mathbf{E}'$ — напряженность электрического поля, действующего на электрон. Так как скорость электрона v предполагается малой по сравнению со скоростью света: $v \ll c$, то магнитная составляющая силы Лоренца e $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ не учитывается уравнением (51.1). Собственная частота ω_0 и коэффициент затухания γ в (51.1) не могут быть вычислены на основе классической теории. Здесь они являются формально введенными параметрами. Вычисление этих параметров может быть выполнено только в рамках квантовой теории, учитывающей реально существующие в атомах и молекулах силы. Строгий квантовомеханический расчет показывает, что явление дисперсии хорошо описывается моделью, в которой атомы и молекулы представляют собой осцилляторы с различными собственными частотами ω_0 и коэффициентами затухания γ, описываемыми уравнением Ньютона (51.1).

Электрическое поле $\mathbf{E}'$ отличается от среднего макроскопического поля $\mathbf{E}$, содержащегося в уравнениях Максвелла [31.2]. Однако в случае неплотных сред (газы) их различием можно пренебречь и считать, что решение уравнения (51.1) имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 e^{i\omega t}, \tag{51.3}$$

где ω — частота колебаний поля, описываемого плоской волной:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}e^{i\omega t - i\mathbf{kr}} \tag{51.4}$$

($\mathbf{k}$ — волновой вектор [39.3]), t — время, $\mathbf{r}_0$ — амплитуда колебаний электрона, малая по сравнению с длиной волны. Подстановка (51.3) в (51.1) с учетом (51.4) позволяет представить решение уравнения (51.1) в следующей форме:

$$\mathbf{r} = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}\mathbf{E}, \tag{51.5}$$

В соответствии с (51.5) атом в электрическом поле приобретает дипольный момент (25.37):

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E},\ \alpha = \frac{e^2/(m\varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \tag{51.6}$$

Величина α называется *поляризуемостью атома*.

Вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ [25.2.4] среды, содержащей N атомов, имеет вид

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}\varepsilon_0 + N\mathbf{p} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E},\ \varepsilon = 1 + \frac{Ne^2/(m\varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}, \tag{51.7}$$

где диэлектрическая проницаемость ε зависит от частоты ω. Она является комплексной величиной. Пусть

$$\sqrt{\varepsilon} = n - i\varkappa, \tag{51.8}$$

где n — абсолютный показатель преломления (вещественный показатель преломления), $\varkappa$ — показатель затухания среды. Тогда

$$n^2 - \varkappa^2 = 1 + \frac{Ne^2/(m\varepsilon_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}(\omega_0^2 - \omega^2),$$

$$n\varkappa = \frac{Ne^2/(m\varepsilon_0)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}\omega\gamma. \tag{51.9}$$

Величины n и $\varkappa$ являются функциями частоты ω внешнего электрического поля $\mathbf{E}$ и параметров среды N и e^2/m. Если частоты ω далеки от собственной частоты колебания электронов ω_0, $2\omega\gamma \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$, то

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{Ne^2/(m\varepsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{51.10}$$

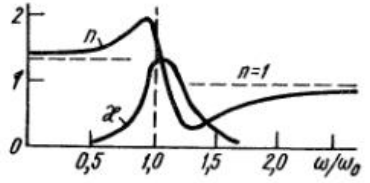


Рис. 51.1

Эта формула совпадает с выражением (46.4) и описывает зависимость n от ω. Типичный вид кривых $n = n(\omega)$ и $\varkappa = \varkappa(\omega)$ показан на рис. 51.1. Дисперсия называется *нормальной*, если показатель преломления n возрастает с увеличением частоты ω, и аномальной, если n уменьшается. В области сильного поглощения ($\omega_0 \approx \omega$) наблюдается *аномальная* дисперсия.

Соотношения (51.9), (51.10) называют **дисперсионными формулами.** В более реалистическом случае среда представляется системой осцилляторов с концентрациями электронов и ионов N_k, массами m_k, зарядами e_k, собственными частотами ω_k и коэффициентами затухания γ_k. Диэлектрическая проницаемость такой среды описывается формулой

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{N_k e_k^2/(m_k\varepsilon_0)}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma_k}, \tag{51.11}$$

где суммирование производится по всем типам осцилляторов. Различные значения ω_k соответствуют различным полосам поглощения света

средой. Сравнение формулы (51.11) с опытными данными позволяет определить коэффициенты $N_k e_k^2/m_k$. Таким путем было найдено, что все осцилляторы разделяются на две группы: одна соответствует электронам, другая — ионам. Для электронов полоса поглощения находится в ультрафиолетовой области спектра, а для ионов — в инфракрасной области.

Формула (51.11) применима и для металлов. В инфракрасной области спектра основную роль в дисперсии играют свободные электроны, для которых $\omega_k = 0$. В видимой и ультрафиолетовой областях спектра дисперсия определяется суммарным воздействием свободных и связанных в ионах металла электронов. Колебания самих ионов в этих частях спектра вклада в дисперсию не дают. В области мягкого рентгеновского излучения $\omega^2 \gg \omega_k^2$ и дисперсионная формула (51.11) принимает простой вид

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}, \qquad (51.12)$$

где N — концентрация электронов, m и e — масса и заряд электрона. Формула (51.12) допускает непосредственную проверку в опытах по отклонению рентгеновских лучей в призме из различных материалов. Оказывается, что

$$1 - n \approx (10^{-5} - 10^{-6})\,\rho, \qquad (51.13)$$

где ρ — плотность вещества призмы.

В квантовой теории дисперсии поляризуемости атомов и молекул в электрическом поле световой волны рассчитываются на основе решения уравнения Шредингера [62].

Зависимость n от длины волны $\lambda = 2\pi c/\omega$ для ряда веществ показана в табл. 46.4.

51.2. Дисперсионный спектр видимого света

При прохождении через призму немонохроматического белого света на экране, установленном за призмой, наблюдается радужная полоса, состоящая из семи монохроматических составляющих и их полутонов. Эта полоса называется *дисперсионным спектром*. Этот спектр условно делят на следующие семь цветов: *красный*, *оранжевый*, *желтый*, *зеленый*, *голубой*, *синий*, *фиолетовый*.

Каждому цвету соответствует определенный диапазон длин волн:

Цвет	Красный	Оранжевый	Желтый	Зеленый	Синий, голубой	Фиолетовый
λ, нм	770—630	630—590	590—570	570—495	495—435	435—390

Смена цвета происходит непрерывно. Смесь всех семи цветов дает белый цвет. Если из полного спектра исключить один из цветов, то комбинация оставшихся цветов приводит к цветам, которые называются *дополнительными*. Дополнительные цвета — это цвета спектра, дополняющие один другого до белого:

Исключенный цвет	Красный	Оранжевый	Желтый	Желто-зеленый	Зеленый
Цвет остатка	Голубовато-зеленый	Голубой	Синий	Фиолетовый	Пурпурный

Исключенный цвет	Голубовато-зеленый	Голубой	Фиолетовый	Индиго
Цвет остатка	Красный	Оранжевый	Желто-зеленый	Желтый

На практике их можно получить с помощью подобранных соответствующим образом цветных стекол

52. СПЕКТРЫ ИСПУСКАНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ СВЕТА

52.1. Испускание света

52.1.1. Типы спектров испускания. *Спектром испускания* называется спектр, образуемый излучением светящихся тел. Он возникает при разложении света, излучаемого нагретыми твердыми телами, жидкостями и газами.

Различают несколько типов спектров испускания: сплошные, линейчатые и полосатые. *Сплошными спектрами* называют спектры, содержащие все длины волн видимого диапазона. Сплошные спектры характерны для светящихся твердых и жидких тел. Примером сплошного спектра испускания может служить спектр Солнца. Его источником является поверхность Солнца, называемая *фотосферой*.

Спектр испускания, состоящий из отдельных узких линий, соответствующих одной определенной длине волны, называется *линейчатым спектром*. Спектры, состоящие из отдельных полос (сплошных или группы очень большого числа узких линий), разделенных темными промежутками, называются *полосатыми спектрами*. Линейчатые и полосатые спектры характерны для свечения газов и паров малой плотности. Линейчатые спектры соответствуют испусканиям отдельных атомов (пары металлов, инертные газы — гелий, неон, аргон и др.), а полосатые спектры — испусканиям целых молекул. При возбуждении таких многоатомных газов происходит частичная диссоциация и поэтому одновременно наблюдаются линейчатые и полосатые спектры.

Линейчатые спектры обусловлены структурой электронных оболочек атомов данного вещества. Количество и расположение линий в спектре испускания газа или пара зависят от структуры химического элемента. По спектрам испускания можно определять химический состав вещества, наличие в соединении отдельных элементов. Метод определения химического состава тел по их спектру испускания (или поглощения) называется *спектральным анализом*.

52.1.2. Классическая теория испускания света. Спектры испускания описывают с помощью интегралов Фурье [43.3.1]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [a(\omega)\cos\omega t + b(\omega)\sin\omega t]\, d\omega, \qquad (52.1)$$

где $f(t)$ — некоторая вещественная функция времени t, описывающая произвольный непериодический во времени физический процесс, $g(\omega) = a(\omega) - ib(\omega)$ — комплексная функция частоты ω, $g^*(\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$, $a(\omega)$ и $b(\omega)$ — вещественные функции ω. Величина

$$I(\omega) = g(\omega)\, g^*(\omega) = |g(\omega)|^2 \qquad (52.2)$$

называется *спектральной плотностью интенсивности излучения*. Она характеризует распределение энергии в спектре по частоте ω [43.3.1].

Сплошной спектр описывается спектральной плотностью $I(\omega)$, являющейся непрерывной функцией ω, в широком диапазоне частот ω. Линейчатый (полосатый) спектр описывается функцией $I(\omega)$, отличной от нуля только в узких дискретных диапазонах частот ω, каждому из которых соответствует своя спектральная линия $\omega_i \pm \frac{1}{2}\Delta\omega_i$, $\omega_i \gg \Delta\omega_i$, где $\Delta\omega_i$ — ширина линии. Под *шириной* (полушириной) *линии* понимают интервал частот $\Delta\omega$ между точками функции $I(\omega)$, для которых $I(\omega) = \frac{1}{2} I_{\text{макс}}$, где I_{max} — максимальное значение функции $I(\omega)$.

Различают естественную и наблюдаемую ширины линий.

Естественная ширина связана с конечной длительностью каждого акта излучения атома и равна $\Delta\omega \sim 2\pi \cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$. Эта частота соответствует потерям энергии атома на излучение. Она обратно пропорциональна времени излучения $\tau_{\text{изл}}$. Действительно, в рамках классической теории, развитой Планком, время $\tau_{\text{изл}}$ может быть вычислено в модели колеблющегося осциллятора (электрона), движущегося ускоренно и непрерывно теряющего энергию за счет излучения. Потеря энергии $\mathscr{E}$ описывается формулой Лармора (44.34) [44.2.3]:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2(t)}{6\pi\varepsilon_0 c^3}, \tag{52.3}$$

где $\mathbf{v}(t)$ — скорость движения электрона. Если потери энергии за период колебания малы, то колебания можно приближенно описать гармоническим законом и положить

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \sin(\omega_0 t + \delta), \quad \dot{\mathbf{v}} = \omega_0 \mathbf{v}_0 \cos(\omega_0 t + \delta). \tag{52.4}$$

При малых колебаниях средние за период колебания значения кинетической $\langle T\rangle$ и потенциальной $\langle V\rangle$ энергии осциллятора одинаковы и поэтому среднее значение его полной энергии $\langle\mathscr{E}\rangle = 2\langle T\rangle$. Так как энергия мало изменяется за один период, то $\langle\mathscr{E}\rangle \simeq \mathscr{E}$, и после усреднения выражения (52.3) по времени за один период с учетом (52.4) получаем уравнение, описывающее потерю (средней) энергии на излучение:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}\mathscr{E}, \tag{52.5}$$

решение которого имеет вид

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-2\gamma t}, \quad \gamma = \frac{e^2\omega_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3 m}. \tag{52.6}$$

Излучение проявляет себя так, как если бы на колеблющийся электрон действовала тормозящая сила $\mathbf{F}_{\text{тор}} = -2m\gamma\mathbf{v}$. Время излучения (затухания) $\tau_{\text{изл}}$, в течение которого энергия убывает в e раз, определяется формулой

$$\tau_{\text{изл}} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{6\pi\varepsilon_0 c^3 m}{e^2\omega_0^2} = \frac{3}{8\pi^2}\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)\left(\frac{\lambda}{c}\right), \tag{52.7}$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина волны, r_0 — классический радиус электрона [32.3]. Для $\lambda = 600$ нм имеем $\tau_{\text{изл}} = 1{,}63 \cdot 10^{-8}$ с.

Для определения *полуширины спектральной линии* $\Delta\omega$ необходимо воспользоваться интегралом Фурье (52.1), в котором функция $f(t)$ описывает поле излучения и имеет вид

$$f(t) = f_0 e^{-\gamma t}\sin\omega_0 t. \tag{52.8}$$

Вычисления приводят к следующему выражению для спектральной плотности интенсивности излучения $I(\omega)$ (52.2):

$$I(\omega) \sim 1/[(\omega-\omega_0)^2 + \gamma^2]. \tag{52.9}$$

Из (52.9) и определения полуширины линии $\Delta\omega$ следует, что

$$\Delta\omega = 2\gamma = 1/\tau_{\text{изл}} \tag{52.10}$$

(см. [37.3]). В квантовой механике [XIV] величина $\tau_{\text{изл}}$ имеет смысл времени жизни возбужденного состояния системы.

Классическая теория излучения света правильно описывает явление только по порядку величины. Формулы (52.3) — (52.10) относятся к излучению изолированного атома и не учитывают влияние на излучающий атом соседних атомов среды. Это влияние сказывается в том, что атом не только отдает энергию среде в виде излучения, но и получает ее из среды за счет энергии, излучаемой другими атомами. Если среда оптически однородна, то эти два процесса в точности компенсируют один другого (Л. И. Мандельштам, 1907). В действительности колебания атомов являются затухающими за счет нарушения оптической однородности среды (наличие в ней посторонних частиц — пыли, капель тумана в воздухе и т. п.) или за счет тепловых флуктуаций, возникающих в среде (рассеяние света [45]).

Наблюдаемая ширина спектральной линии значительно шире естественной. Различают *доплеровское* и *ударное уширение* спектральных линий. Доплеровское уширение связано с хаотичностью теплового движения атомов, приводящего к относительному перемещению излучающего атома и измерительного прибора (приемника) и к изменению частоты излучаемого света из-за эффекта Доплера [40.3; 43.2.1]. Полуширина спектральной линии за счет этого явления определяется формулой

$$\Delta\omega_{\text{доп}} = 2\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}\ln 2} = 2\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\ln 2}\, v_m, \tag{52.11}$$

где $v_m = \sqrt{2kT/m}$ — наиболее вероятная скорость атома [16.4.2] (16.21), k — постоянная Больцмана, T — температура, m — масса атома. В случае легких атомов при газовом разряде

$$\Delta\omega_{\text{доп}} \sim (10^{10} \div 10^{11})\ \text{с}^{-1}. \tag{52.12}$$

Ударное *уширение спектральных линий* связано с взаимодействием излучающих атомов и обусловлено их взаимными столкновениями при тепловом движении. При каждом столкновении резко изменяется амплитуда и фаза гармонического колебания (52.4). Происходит переход в теплоту энергии регулярных колебаний и наблюдается явление поглощения света [52.2]. Согласно классической теории Лоренца столкновения между молекулами в газах при их тепловом движении статистически приводят к экспоненциальному закону затухания интенсивности волны и к форме спектральных линий такой, как при естественном

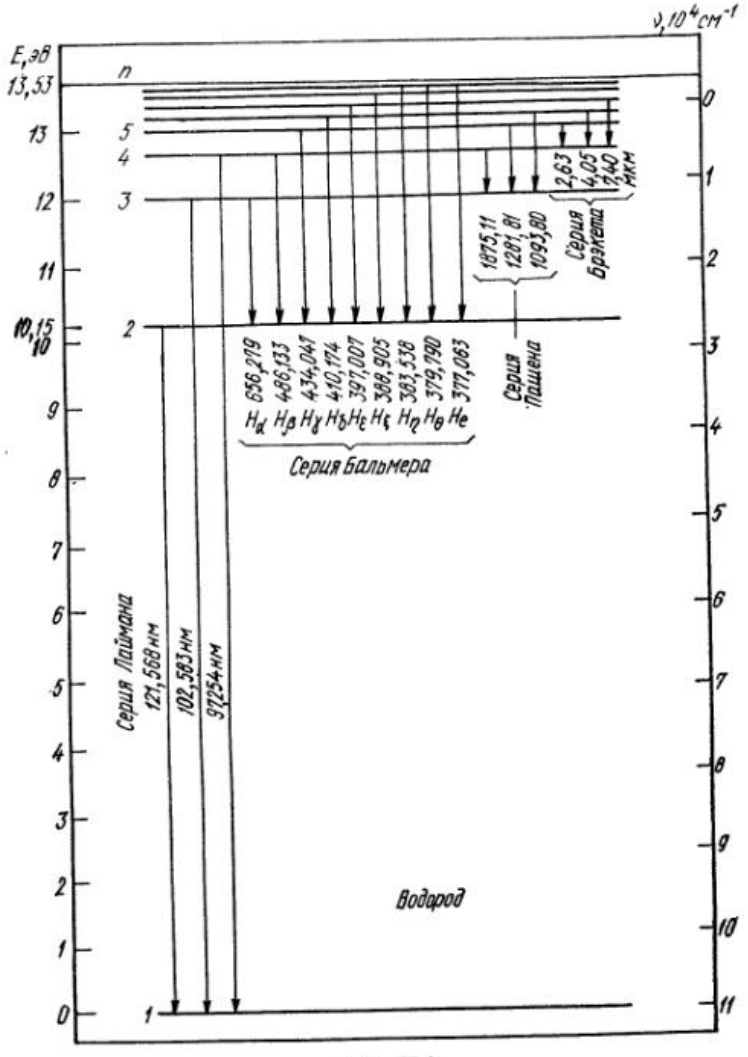


Рис. 52.1

затухании. Ударное уширение спектральных линий определяется формулой

$$\Delta\omega_{уд} \simeq \frac{1}{\tau_{уд}}, \quad \tau_{уд} \simeq \frac{1}{N\sigma v}, \tag{52.13}$$

где N — число атомов в единице объема, σ — газокинетическое поперечное сечение [16.2], $v = \sqrt{kT/m}$ — средняя скорость теплового движения атома [16.4] Ударные уширения спектральных линий играют существенную роль в плотных газах и при высоких температурах.

52.1.3. Спектральные закономерности. Линейчатые спектры атомов подчиняются вполне определенным закономерностям. Так, опыт показал, что частота $\nu = \omega/2\pi$ линий спектра излучения атома водорода описывается **формулой Бальмера — Ридберга** (1885, 1890)

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) = cR_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{52.14}$$

где n и k — целые числа, такие, что $k \geqslant n + 1$; величины R и R_H называются *постоянной Ридберга*:

$$R = 3{,}288051 \cdot 10^{15}\,с^{-1}, \quad R_H = 109677{,}58\ см^{-1}. \tag{52.15}$$

Группу спектральных линий с одинаковыми значениями n и всеми возможными значениями k называют *серией* спектральных линий. Наибольшая частота для каждой серии соответствует значению $k \to \infty$ и называется границей серии или спектральным термом

$$T_n = R/n^2. \tag{52.16}$$

Серии спектральных линий атома водорода получили следующие названия: *Лаймана* ($n = 1$), *Бальмера* ($n = 2$), *Пашена* ($n = 3$), *Брэкета* ($n = 4$), *Пфунда* ($n = 5$), *Хамфри* ($n = 6$) (рис. 52.1, 66.2).

Спектры других атомов имеют более сложную структуру. Однако и они подобно атому водорода могут быть распределены по сериям в форме, аналогичной формуле (52.14). При этом оказывается, что постоянная R имеет близкие значения для различных атомов [65.1]. В табл. 52.1 приведены длины волн, соответствующие линиям испускания некоторых элементов в видимой части спектра. В рамках класси-

Таблица 52.1. Длины волн λ спектральных линий испускания некоторых элементов в видимой части спектра

Элемент	Символ	λ, нм	лемент	Символ	λ, нм
Кальций	Ca	393,3666	Таллий	Tl	535,046
Кальций	Ca	396,8468	Ртуть	Hg	546,0740
Ртуть	Hg	404,6561	Ртуть	Hg	576,9596
Водород	H	410,1735	Ртуть	Hg	579,0654
Кальций	Ca	422,6728	Гелий	He	587,5618
Железо	Fe	430,7905	Натрий	Na	588,9953
Водород	H	434,0465	Натрий	Na	589,5923
Ртуть	Hg	435,8343	Литий	Li	610,3642
Железо	Fe	438,3547	Цинк	Zn	636,2347
Кадмий	Cd	441,463	Кадмий	Cd	643,84696
Гелий	He	447,1477	Водород	H	656,2725
Стронций	Sr	460,7331	Гелий	He	667,8149
Железо	Fe	468,02983	Литий	Li	670,7844
Кадмий	Cd	479,9914	Кислород	O	686,72
Водород	H	486,1327	Гелий	He	706,5188
Гелий	He	492,1929	Кислород	O	760,82
Кадмий	Cd	508,5824	Калий	K	766,4907
Железо	Fe	527,03602	Калий	K	769,8979

ческой физики невозможно объяснить обнаруженные на опыте спектральные закономерности атомов. Формула Бальмера — Ридберга (52.14) получила теоретическое обоснование в теории атома Бора [65.1].

52.2. Поглощение света

52.2.1. Спектры поглощения. *Спектром поглощения* называется спектр излучения (сплошной), прошедший через данное вещество. Он имеет вид сплошного спектра, в котором отсутствуют отдельные спектральные линии. Вид спектра поглощения зависит от поглощающего вещества. Для различных веществ области поглощения находятся в разных местах спектра и имеют различную ширину и интенсивность. По виду спектра можно определить, каким поглощающим веществом он вызван, т. е. произвести спектральный анализ [52.1.1].

Твердые тела и жидкости имеют широкие области поглощения. Газы и пары поглощают только излучение с теми длинами волн, которые они сами излучают. Им соответствуют так называемые *линии поглощения*. Наиболее характерные спектры поглощения дают пары металлов, состоящие из отдельных атомов. Опыты Кирхгофа показали (1860), что линии поглощения атомов точно соответствуют их линиям испускания.

Наиболее изученным спектром поглощения является спектр Солнца. Сплошной спектр Солнца содержит значительное количество черных линий. Эти линии являются линиями поглощения, возникающими при прохождении света через газовую оболочку звезды, называемую *хромосферой*, и через атмосферу Земли. Они получили название *фраунгоферовых линий*. Фраунгофер (1814—1815) впервые наблюдал спектр Солнца и установил, что черные линии в спектре не случайны и появляются всегда на строго определенных местах. Фраунгоферовы линии принято обозначать прописными латинскими буквами от A до K (табл. 52.2).

Таблица 52.2. **Фраунгоферовы линии**

Линия	A	B	C	D	E
λ, нм	760,8	686,7	656,3	589,3	527,0
Цвет	Темно-красный	Красный	Красный	Желтый	Зеленый

Продолжение табл. 52.2

Линия	F	G	H	K
λ, нм	486,1	430,8	396,8	393,4
Цвет	Сине-зеленый	Синий	Фиолетовый	Фиолетовый

Согласно Кирхгофу линии Фраунгофера представляют собой линии поглощения паров различных металлов, расположенных между фотосферой (яркой поверхностью) Солнца и местом наблюдения спектра. Спектр Солнца дает сведения о спектре поглощения этих паров. Он показывает, что в хромосфере имеются водород, кальций, натрий, железо и другие элементы, встречающиеся на Земле. Спектральный анализ по спектрам поглощения позволяет определить химический состав отдаленных тел.

52.2.2. Законы Бугера — Ламберта и Бэра. При распространении световой волны в среде происходит уменьшение ее энергии за счет рассеяния света на неоднородностях среды и вследствие преобразования энергии волны во внутреннюю энергию вещества среды или в энергию вторичного излучения. Последние два явления связаны с поглощением света веществом. В результате поглощения света вещество может нагреваться, могут происходить ионизация атомов и молекул, фотохимические реакции [57.4.1], фотолюминесценция [57.5] и др. явления.

В классической теории дисперсия [51.1] и поглощение света описываются линейными уравнениями. Поэтому показатели преломления среды n и $\varkappa$ (51.8) не зависят от интенсивности падающего света. В случае плоской монохроматической волны ее амплитуда A при распространении в среде убывает по закону

$$A = A_0 \exp\left(-\frac{2\pi\varkappa x}{\lambda}\right), \qquad (52.17)$$

где λ — длина волны, x — расстояние, пройденное волной, а интенсивность I описывается **законом Бугера—Ламберта** (1729, 1760)

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad \alpha = 4\pi\varkappa/\lambda, \qquad (52.18)$$

где I_0 — интенсивность падающей волны, α — коэффициент (затухания) поглощения света в веществе. Согласно (52.18) для монохроматического света коэффициент α не зависит от интенсивности света I_0. Опыт показывает (С. И. Вавилов), что в некоторых растворах коэффициент поглощения α остается постоянным с точностью до 5 % при изменении I_0 от 20 до $2{,}5 \cdot 10^{-19}$ Вт/см^2, т. е. от интенсивности прямых солнечных лучей до порога зрительного восприятия глаза. У некоторых веществ при больших значениях интенсивности I_0 наблюдается отклонение от закона (52.18), так как коэффициент поглощения α убывает с ростом I_0. Согласно квантовым представлениям о поглощении света закон Бугера — Ламберта (52.18) выполняется для сред, в которых число возбужденных падающим светом молекул пренебрежимо мало по сравнению с числом невозбужденных. В таких средах среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии сравнительно мало и составляет $\sim 10^{-8}$ с. При больших временах жизни и больших интенсивностях падающего на среду света число ее молекул в основном состоянии мало и закон (52.18) перестает выполняться. В таких средах происходит нарушение принципа суперпозиции в оптике, наблюдаются нелинейные оптические явления [58].

Согласно **закону Бэра** (1852) *коэффициент поглощения света α разбавленными растворами пропорционален концентрации c растворенного вещества в непоглощающем растворителе*:

$$\alpha = Ac, \qquad (52.19)$$

где A — постоянная, зависящая от свойств растворенного вещества и длины волны падающего света. При больших концентрациях c за-

кон Бэра не выполняется, так как в этом случае постоянная A становится функцией c.

Спектр поглощения света веществом определяется зависимостью α от длины волны (частоты) света. Разреженные одноатомные газы характеризуются линейчатыми спектрами поглощения. Частоты линий поглощения совпадают в этих газах с частотами линий испускания [52.1.1; 52.1.2]. Для разреженных молекулярных газов характерны полосатые спектры поглощения. Их структура определяется энергетическими уровнями молекул газа. Жидкие и твердые тела (диэлектрики) в широкой области частот имеют сплошные спектры поглощения. За пределами этих областей $\alpha \cong 0$.

53. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

53.1. Природа явления

В интерференции света проявляются его волновые свойства. *Интерференцией света* называют интерференцию [39.5.2] электромагнитных волн видимого (оптического) диапазона [43.3.5]. Пусть $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ — напряженности электрических полей световых волн, которые складываются между собой и образуют результирующее поле с напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ (принцип суперпозиции). Так как все приемники света могут измерять только величины, квадратичные по полю, усредненные за время, большее временной разрешающей способности приемника (поток излучения Φ, интенсивность потока I, яркость и освещенность [49]), то, например, для интенсивности света $I = \langle \mathbf{E}^2 \rangle$, имеем

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \tag{53.1}$$

где скобки означают усреднение по времени, $I_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle$, $I_2 = \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle$ — интенсивность света первого и второго пучка, величина $I_{12} = 2\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle$ называется интерференционным слагаемым. Явление интерференции света наблюдается тогда, когда $I_{12} \neq 0$, и, следовательно, результирующая интенсивность I больше или меньше (в зависимости от знака I_{12}) суммы интенсивностей I_1 и I_2. Если два источника света приводят к интерференции, то излучаемые ими волны когерентны между собой [39.5.2], т. е. волновые процессы в этих источниках протекают во времени согласованно.

Интерференционная картина имеет вид поочередно сменяющих одна другую светлых и темных интерференционных полос. Расстояние между серединами соседних светлых или темных полос называется *шириной интерференционной полосы*. Светлые полосы соответствуют максимальному усилению волн, а темные — их ослаблению. В случае наложения двух когерентных волн, линейно поляризованных в одной плоскости, условия максимального усиления и ослабления волн имеют вид (39.43) и (39.44):

$$I_{\max} = (I_1 + I_2)^2 \text{ при } \Delta\varphi = 2\pi n,\ \Delta z = \lambda n,$$
$$I_{\min} = (I_1 - I_2)^2 \text{ при } \Delta\varphi = (2n+1)\pi,\ \Delta z = (2n+1)\frac{\lambda}{2}, \tag{53.2}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $\Delta\varphi$ — разность начальных фаз волн в рассматриваемой точке результирующего поля, Δz — разность хода волн в области их наложения, $\lambda = 2\pi c/\omega$ — длина световой волны (одинаковая для двух волн). При наложении некогерентных волн происходит только усиление света и интерференционная картина не наблюдается.

Для получения когерентных световых волн применяют метод расщепления волны, излучаемой одним источником на две или большее число волн. Для расщепления волны используют системы из зеркал и линз.

Число n в (53.2) называют *порядком интерференции*. Если свет немонохроматический и его длины волн лежат в интервале $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$, то интерференционная картина смазывается, когда

$$(n+1)\lambda = n(\lambda + \Delta\lambda).$$

Наблюдение интерференции порядка n возможно, если выполняется условие малости сдвига $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda < \lambda/n. \tag{53.3}$$

Из (53.3) следует, что для наблюдения интерференции большого порядка свет должен быть практически монохроматическим. Следует иметь в виду, однако, что $\Delta\lambda$ не может быть меньше естественной ширины спектральной линии [52.1.2], связанной с конечной длительностью каждого акта излучения видимого света атомами источника.

При интерференции происходит пространственное перераспределение лучистой энергии таким образом, что в местах интерференционных максимумов ее плотность увеличивается, а в минимумах — уменьшается. Общий запас энергии в пространстве при этом остается неизменным.

Если интерферирующие волны проходят через среды с различными показателями преломления n_1 и n_2, то вместо разности хода Δz волн (53.2), $\Delta z = r_2 - r_1$, где r_1 и r_2 — геометрические длины путей, пройденных волнами до области их наложения, вводят понятие оптической разности хода

$$\Delta = \int_{(2)} n_2 dl - \int_{(1)} n_1 dl, \tag{53.4}$$

где dl — элемент пути, а интегрирование производится по путям, пройденным волнами в средах. В этом случае порядок интерференции n есть оптическая разность хода Δ интерферирующих волн, выраженная в единицах длин волн в вакууме λ и округленная до целого числа:

$$n = \Delta/\lambda. \tag{53.5}$$

Между разностью фаз $\Delta\varphi$ волн и оптической разностью хода Δ существует простая связь

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta. \tag{53.6}$$

53.2. Цвета тонких пленок

При освещении тонких пленок белым светом наблюдается интерференционная картина, полосы которой окрашены в разные цвета. Это явление возникает в результате наложения волн одного источника, отразившихся от двух (передней и задней) поверхностей пленки (рис. 53.1). Цвета тонких пленок можно наблюдать на стенках мыльных пузырей, на тонких пленках масел, разлитых на поверхности водоемов и др. Если угол преломления лучей γ, то оптическая разность хода лучей $\Delta = SOP - SRP$ (рис. 53.1) определяется равенством

$$\Delta = 2dn\cos\gamma + \frac{\lambda}{2}, \tag{53.7}$$

где d — толщина пленки, n — ее показатель преломления. Слагаемое $\lambda/2$ учитывает изменение фазы на π при отражении волны от одной из поверхностей пленки, λ — длина волны. Если тонкая пленка имеет переменную толщину, то d в (53.7) есть толщина пленки в том месте, где происходит отражение лучей, пересекающихся в точке наблюдения P. Если источник света точечный и монохроматический, то каждая точка пространства характеризуется вполне определенной разностью хода лучей. В этом случае в каждой точке пространства наблюдается устойчивая интерференция. Если источник света протяженный, то при нормальном падении лучей интерференционная картина наблюдается непосредственно на передней поверхности пластины. *Условие ослабления интенсивности волн* при этом имеет вид

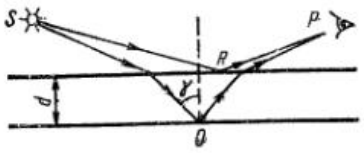


Рис. 53.1

$$\lambda = \frac{4dn}{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{53.8}$$

а *условие взаимного усиления волн* описывается соотношением

$$\lambda = \frac{2dn}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{53.9}$$

Если известна толщина d пленки, то можно определить длину волны λ, при которой волны гасят одна другую. Наоборот, по известной длине волны λ можно определить толщину d пленки.

Если обе поверхности пленки плоские, то интерференционные полосы прямолинейны и параллельны линии пересечения соответствующих плоскостей. Интерференционные картины наблюдаются и по обе стороны пластинки. Интерференционные полосы в проходящем свете получаются на светлом фоне, обусловленном многократным отражением одного и того же луча от поверхностей пленки. Если коэффициент отражения велик, то необходимо учитывать эффекты многократных отражений. В толстых пленках разность хода Δ велика и интерференционные полосы имеют высокий порядок интерференции [53.1]. Для их получения необходимо использовать падающий свет с высокой степенью монохроматичности, которую характеризуют отношением $\lambda/\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ — интервал длин волн света [53.1].

53.3. Кольца Ньютона

Кольцами Ньютона (1675) называют интерференционные полосы, которые наблюдаются между плоской поверхностью стеклянной пластинки и плоско-выпуклой линзой, приложенной к пластинке выпуклой стороной (рис. 53.2). Картину, имеющую вид концентрических окружностей (колец) из чередующихся светлых и темных линий, можно наблюдать как в отраженном, так и в проходящем свете. Радиусы колец $x = OA$ (рис. 53.2) можно найти из формул

$$x_c = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda R}, \quad x_т = \sqrt{m\lambda R}, \tag{53.10}$$

где x_c — радиус m-го светлого кольца, $x_т$ — радиус m-го темного кольца, m — целое число, R — радиус кривизны сферы, определяющий кривизну линзы. Центр колец в отраженном свете темный, а в проходящем — светлый.

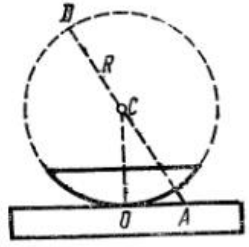


Рис. 53.2

54. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

54.1. Теория дифракции

Дифракцией света называется явление огибания световыми волнами малых препятствий, встречающихся на пути их распространения [39.5.2]. Это явление можно наблюдать, например, на опыте, в котором на пути распространения света находится препятствие в виде непрозрачного тела, называемого экраном, произвольной формы или отверстие в непрозрачном теле. Дифракция приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью, как того требуют законы геометрической оптики [47], получается сложная картина распределения интенсивности света. Чем меньше размеры экрана или отверстия, тем сильнее дифракция света. В дифракции проявляется волновая природа света. Полное количественное описание явления дают уравнения Максвелла [31.2], дополненные соответствующими граничными условиями. Строгое аналитическое решение задачи в такой формулировке возможно только для простейших идеализированных случаев. В оптике для решения задач дифракции пользуются более простым методом, основанным на принципе Гюйгенса — Френеля [39.5.2].

Количественное описание этого принципа дается интегралом Кирхгофа

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi}\oint_S dS' \left(\frac{1}{R}\,\mathbf{n}'\cdot\nabla' - \frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{R}}{cR^2}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\mathbf{n}'\cdot\mathbf{R}}{R^3}\right) u(\mathbf{r}', t')\Big|_{t'=t-R/c}, \tag{54.1}$$

где через $u(\mathbf{r}, t)$ обозначена любая из компонент напряженностей электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей в точке пространства с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t; $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{n}'$ — внешняя нормаль к поверхности S, показывающая направление света, пришедшего из источника в элемент поверхности dS'; ∇' — операция градиента по компонентам вектора $\mathbf{r}'$, задающего поле на замкнутой поверхности S. Согласно (54.1) поле в произвольной точке пространства связано с полем на некоторой замкнутой поверхности (электромагнитные возмущения на поверхности играют роль источников, возбуждающих вторичные возмущения, которые создают поле в точке $\mathbf{r}$). Выражение (54.1) можно рассматривать как формальное решение волновых уравнений (43.16) [43.2.3]. Задавая приближенно значение поля $u(\mathbf{r}', t')$ на некоторой поверхности, можно найти значение этого поля во всем пространстве. Если $u(\mathbf{r}, t)$ зависит от времени по гармоническому закону

$$u(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t},$$

где ω — циклическая частота, $u(\mathbf{r})$ — функция только пространственных координат, то интеграл Кирхгофа принимает простой вид

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial n'} - u(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{e^{ikR}}{R}\right) dS', \tag{54.2}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число.

54.2. Дифракция Френеля

54.2.1. Интенсивность света. В случае, когда длина волны λ света мала по сравнению с размерами тел и расстояниями a и b от них до источника S и точки наблюдения P, при вычислении интеграла (54.2) можно воспользоваться приближением геометрической оптики (рис. 54.1). Если расстояния a и b конечны, то необходимо учитывать кривизну фронта падающей и дифрагированной волн. Дифракция, в которой нельзя пренебрегать кривизной волновых поверхностей волн, называется *дифракцией Френеля*.

При дифракции Френеля на экране получается дифракционное изображение препятствия.

В приближении $kR \gg 1$ и $kR_0 \gg 1$ из (54.2) получаем

$$u_P(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi}\int_S \frac{u(\mathbf{r}')}{R} e^{ikR}\left(\frac{\mathbf{R}_0}{R_0}+\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\mathbf{n}'dS', \quad (54.3)$$

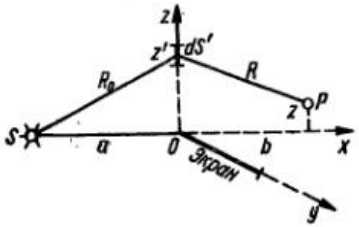


Рис. 54.1

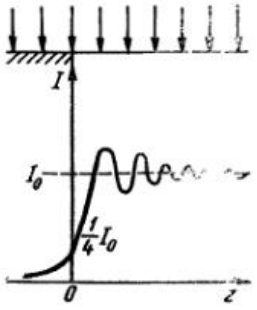


Рис. 54.2

где R_0 — расстояние от источника S до элемента поверхности dS', R — расстояние от этого элемента до точки наблюдения светового поля P (рис. 54.1). Выберем в качестве поверхности интегрирования полуплоскость yz ($z > 0$). Пусть поле в этой плоскости совпадает с невозмущенным полем источника, имеющим вид

$$u(\mathbf{r}') = u(y', z') = \frac{A}{R_0} e^{ikR_0}, \quad (54.4)$$

где A — некоторая постоянная. Тогда

$$u_P(\mathbf{r}) = u_P(z) = \frac{ikA}{4\pi}\int_S \frac{e^{ik(R_0+R)}}{R_0 R}\left(\frac{\mathbf{R}_0}{R_0}+\frac{\mathbf{R}}{R}\right)\mathbf{n}'dS'. \quad (54.5)$$

В приближении геометрической оптики (прямолинейное распространение света) свет испытывает лишь малые отклонения от прямолинейности, приводящие к огибанию экрана. Поэтому в интеграле (54.5) существенной является только малая часть поверхности интегрирования вблизи прямой, соединяющей источник S с точкой наблюдения P, и поле $u_P(z)$ (54.5) имеет вид

$$u_P(z) = \frac{A(1-i)}{2(a+b)}\exp\left[ik\left(a+b+\frac{z^2}{2(a+b)}\right)\right]\times$$
$$\times\left[C(s)+\frac{1}{2}+i\left(S(s)+\frac{1}{2}\right)\right], \quad (54.6)$$

где выражения

$$C(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \cos t^2 dt, \quad S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^s \sin t^2 dt \quad (54.7)$$

называются *интегралами Френеля*, а переменная

$$s = z\sqrt{\frac{ka}{2b(a+b)}}. \quad (54.8)$$

Интенсивность света $I(z) = |u_P(z)|^2$ равна

$$I(z) = \frac{1}{2} I_0\left[\left(C(s)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(s)+\frac{1}{2}\right)^2\right], \quad (54.9)$$

где $I_0 = |u_0|^2$ — интенсивность света при свободном распространении волнового поля на расстоянии $(a+b)$ от источника S:

$$u_0 = \frac{A}{a+b} e^{ik(a+b)}.$$

Распределение интенсивности $I(z)$ в области тени ($z < 0$) и в освещенной области ($z > 0$) определяется значением параметра s (54.8).

На границе геометрической тени $s = 0$ ($z = 0$)

$$I(0) = \frac{1}{4} I_0. \quad (54.10)$$

В области тени $s < 0$ ($z < 0$), $|s| \gg 1$

$$I(z) = \frac{1}{4\pi s^2} I_0. \quad (54.11)$$

В освещенной области $s \gg 1$ ($z > 0$)

$$I(z) = I_0\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin(s^2 - \pi/4)}{s}\right]. \quad (54.12)$$

При удалении от границы геометрической тени ($s = 0$) интенсивность $I(z)$ осциллирует, приближаясь с увеличением z к постоянному значению I_0 (рис. 54.2).

54.2.2. Зоны Френеля. В ряде случаев (например, при наличии осевой симметрии) решение дифракционной задачи может быть выполнено с помощью геометрического метода, основанного на разбиении фронта волны на кольцевые участки, называемые *зонами Френеля*. Пусть имеется некоторая сферическая поверхность F, окружающая все источники света. Опишем из точки наблюдения P концентрические сферы с радиусами r, $r + \lambda/2$, $r + 2(\lambda/2)$, $r + 3(\lambda/2)$, ... (рис. 54.3). Кольцевые области, на которые эти сферы разбивают волновой фронт, и есть зоны Френеля. Участок *10* волновой поверхности есть первая зона Френеля, *21* — вторая зона Френеля, *32* — третья зона Френеля и т. д. Так как $CO = R_0 \gg \lambda$ и $r \gg \lambda$ (по условию), то при не слишком больших значениях i (i — номер зоны) их площади одинаковы:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_i = \frac{\pi R_0 r\lambda}{R_0 + r}. \quad (54.13)$$

Согласно построению разность хода от границ соседних зон равна $\lambda/2$. Вторичные волны, пришедшие из этих зон в точку F, противоположны по фазе и при наложении ослабляют одна другую (интерферируют между собой).

Амплитуду волны от каждой зоны Френеля в точке наблюдения P можно рассчитать с помощью графического метода, в котором амплитуды колебаний от разных участков (подзон) зоны Френеля складываются как векторы. Колебания, возбуждаемые в точке наблюдения данной зоной Френеля, изображаются суммой векторов A_0A_1, A_1A_2 ... , A_5A_6, ... На рис. 54.4 показан случай шести подзон Френеля. Вектор A_0A_{12} описывает суммарное действие первой и второй зон Френеля.

Если число подзон стремится к бесконечности, то ломаная кривая в пределе переходит в непрерывную спираль с фокусом в точке F. В этой спирали действие первой зоны Френеля описывается вектором A_0A_6, а всего волнового

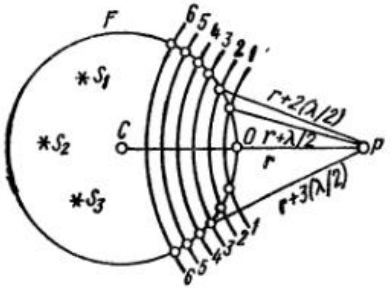


Рис. 54.3

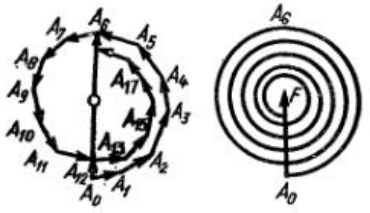


Рис. 54.4

фронта — вектором A_0F, который приблизительно в два раза короче вектора A_0A_6, т. е.

$$u = \frac{1}{2}u_1 \qquad (54.14)$$

— при свободном распространении волны волновое возмущение u от всего волнового фронта равно половине возмущения u_1, даваемого первой зоной Френеля.

54.2.3. Зоны Шустера. Метод зон Френеля является универсальным, пригодным для решения большого класса задач дифракции. В случае одномерных задач (дифракция света на прямолинейном крае плоского экрана или на прямолинейной щели) более удобным является метод *зон Шустера*. В случае плоского волнового фронта AB (рис. 54.5) зоны Шустера имеют вид прямоугольных полос, образующихся при пересечении плоскости AB с цилиндрическими коаксиальными поверхностями, ось которых проходит через точку наблюдения P (перпендикулярно плоскости рис. 54.5), а радиусы равны r, $r + \lambda/2$, $r + 2(\lambda/2)$, $r + 3(\lambda/2)$, ... Расстояние x_n зон Шустера от точки O, образуемой пересечением перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость волнового фронта AB, с этой плоскостью, определяется формулой

$$x_n = \sqrt{nr\lambda},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \qquad (54.15)$$

где n — номер зоны, а ширины зон Шустера последовательно равны

$$\sqrt{r\lambda},\ (\sqrt{2}-1)\sqrt{r\lambda},\ (\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{r\lambda},\ \ldots \qquad (54.16)$$

Расчет дифракции, как и в случае зон Френеля, можно выполнить графически с помощью *спирали Корню* (рис. 54.6), которая получается в результате предельного перехода из ломаной кривой, являющейся результатом сложения векторов, описывающих вклады от отдельных полосок, на которые разбивается каждая зона Шустера. Спираль Корню состоит из двух симметричных ветвей, бесконечное число раз обвивающихся вокруг фокусов F и F'. Верхняя ветвь описывает действие правой половины волнового фронта (от точки O), нижняя — левой. Колебание, возбуждаемое всем волновым фронтом, представляется вектором $F'F$.

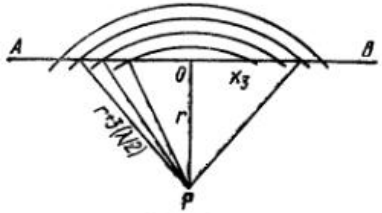


Рис. 54.5

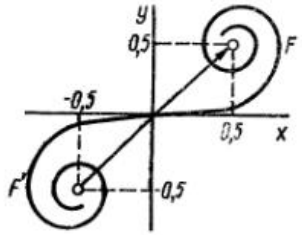


Рис. 54.6

54.3. Дифракция Фраунгофера

54.3.1. Интенсивность света. *Дифракцией Фраунгофера* называется дифракция, наблюдающаяся на бесконечно удаленном расстоянии от препятствия, на которое падает свет бесконечно удаленного источника. Если длина волны света λ мала по сравнению со всеми расстояниями, в том числе размерами препятствия, то падающую волну можно считать плоской, т. е. лучи света, падающие на разные точки поверхности препятствия, можно считать параллельными. Поэтому дифракцию Фраунгофера называют еще и *дифракцией в параллельных пучках* или *дифракцией плоских волн*. Это явление имеет в оптике значительно большее практическое значение, чем дифракция Френеля. На опыте дифракцию Фраунгофера можно осуществить, поместив источник света в фокусе одной собирающей линзы, а другую собирающую линзу — за препятствием. Дифракционная картина при этом образуется в фокальной плоскости второй линзы. На рис. 54.7 показан случай, когда препятствием является щель. Дифракционная картина представляет собой дифракционное изображение источника света.

Для расчета дифракции Фраунгофера, т. е. интенсивности света, воспользуемся общим выражением (54.5) для компоненты $u(z)$ светового поля, считая, что поле на препятствии равно неискаженному полю источника. В качестве препятствия выберем длинную прямоугольную щель (рис. 54.8). Обозначим через $\mathbf{a}$ вектор, указывающий направление распространения падающей волны, а через $\mathbf{b}$ — вектор дифрагированной волны. В рассматриваемом случае малого отверстия площадью S из (54.5) получаем следующее выражение для дифрагированной волны:

$$u_P = -\frac{ikA}{2\pi}\frac{e^{ik(a+b)}}{ab}\int_S e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'}dS', \qquad (54.17)$$

где использованы представления $R_0 \simeq a + \mathbf{ar}'/a$, $R \simeq b + \mathbf{br}'/b$, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ — изменение волнового вектора при дифракции. Интенсивность dI

дифрагированной волны в телесном угле $d\Omega$ определяется формулой

$$dI = |u_P|^2 b^2 d\Omega = \frac{k^2 A^2}{(2\pi)^2 a^2}\left|\int\limits_S e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'} dS'\right|^2 d\Omega, \qquad (54.18)$$

$$I_0 = |u_0|^2 = \frac{A^2}{a^2}.$$

54.3.2. Дифракция на узкой длинной щели. Если щель имеет ширину l и является бесконечно длинной, то интегрирование выражения (54.18) по площади S приводит к формуле

$$\frac{dI}{d\Omega} = I_0\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2, \quad x \equiv \frac{k}{2} l\sin\theta = \pi\frac{l}{\lambda}\sin\theta, \qquad (54.19)$$

описывающей распределение света по направлениям; θ — угол дифракции, который предполагается малым (рис. 54.9), I_0 — интенсивность в направлении падающей волны. Минимумы интенсивности I находятся в точках $x = m\pi$, где $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$, или при выполнении условия $l\sin\theta = m\lambda$. Положение максимумов определяется решением трансцендентного уравнения $x\cos x - \sin x = 0$. На практике можно считать, что максимумы находятся посередине между соседними минимумами.

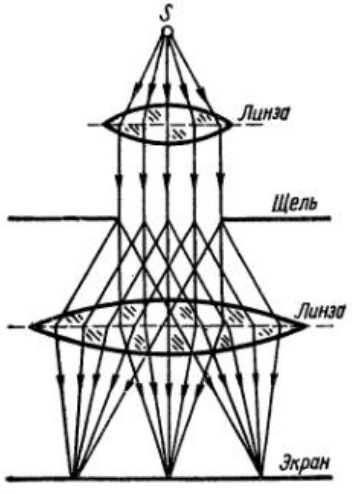


Рис. 54.7

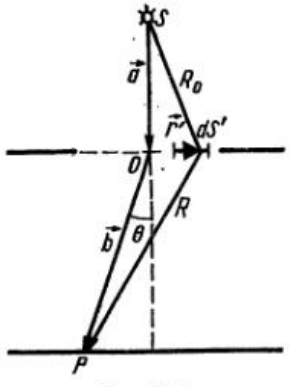


Рис. 54.8

54.3.3. Дифракция на прямоугольном отверстии. В случае прямоугольного отверстия, имеющего конечную длину h и ширину l, интегрирование выражения (54.18) по площади $S = lh$ приводит к распределению интенсивности I дифрагированного света вида

$$\frac{dI}{d\Omega} = I_0\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2, \quad x = \frac{k}{2} l\sin\theta, \quad y = \frac{k}{2} h\sin\varphi, \qquad (54.20)$$

где $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$, α и β — углы между осями, проведенными параллельно сторонам l и h прямоугольного отверстия, и направлениями распространения дифрагированного света. Если свет падает нормально к плоскости отверстия, то условия минимумов интенсивности I имеют вид

$$l\sin\theta = m\lambda, \; m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$
$$h\sin\varphi = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \qquad (54.21)$$

54.3.4. Принцип Бабине. В случае дифракции Фраунгофера имеет место *принцип Бабине*: дополнительные экраны дают одинаковые распределения интенсивности дифрагированного света. Два экрана называются *дополнительными* по отношению один к другому, если первый экран имеет отверстие там, где второй непрозрачен, и наоборот. Если поле дифрагированного света на первом экране есть $u_P^{(1)}$, а на втором $u_P^{(2)}$, то согласно принципу Бабине

$$|u_P^{(1)}|^2 = |u_P^{(2)}|^2. \qquad (54.22)$$

Это соотношение выражает тот простой факт, что поле $u_P^{(1)} + u_P^{(2)}$ в силу условия дополнительности экранов представляет собой падающую плоскую волну с определенным направлением распространения и потому $u_P^{(1)} + u_P^{(2)} = 0$ при всех $q \neq 0$ (см.(54.17)).

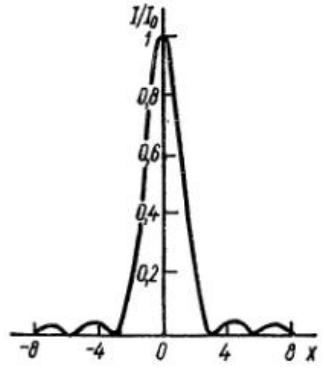


Рис. 54.9

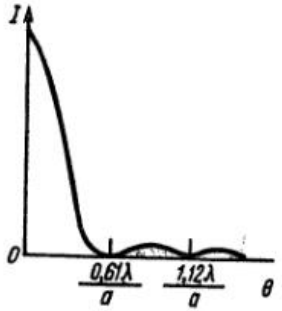


Рис. 54.10

54.3.5. Дифракция на круглом отверстии. Если свет падает в нормальном направлении на круглое отверстие радиусом a, то распределение интенсивности дифрагированного света (54.18) имеет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = I_0\frac{J_1^2(ak\theta)}{\pi\theta^2}, \qquad (54.23)$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка, θ — угол дифракции, который предполагается малым (использовано приближение $\sin\theta \simeq \theta$) (рис. 54.10). Дифракционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных колец. При уменьшении a дифракционная картина расплывается, а при увеличении — стягивается в точку.

54.4. Дифракционная решетка как спектральный прибор

Дифракционной решеткой называют совокупность большого числа равноотстоящих штрихов, нарезанных на стеклянной или металлической поверхности, на которых происходит дифракция света. На стеклянных решетках дифракцию можно наблюдать как в проходящем, так и отраженном свете, а на металлических — только в отраженном. Дифракционная решетка является одним из самых важных приборов в оптике, используемых для разложения света в спектр и измерения длин волн.

Простейшая дифракционная решетка представляет собой систему из N одинаковых равноотстоящих параллельных щелей в плоском непрозрачном экране. Пусть ширина щели b, а ширина непрозрачной части экрана между двумя соседними щелями a. Тогда условие главных максимумов при дифракции на решетки, наблюдаемых под углом θ, имеет вид (рис. 54.11)

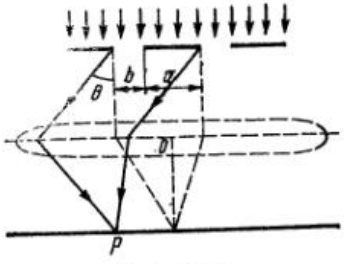


Рис. 54.11

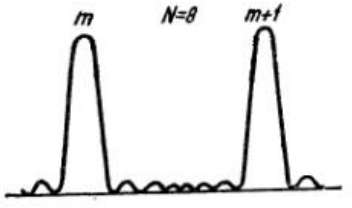


Рис. 54.12

$$d \sin \theta = m\lambda, \tag{54.24}$$

где величина $d = a + b$ называется *периодом решетки*, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ называется *порядком главного максимума* или *порядком спектра*, λ — длина волны падающего света. Условие (54.24) определяет направления, в которых излучения от всех щелей решетки (по принципу Гюйгенса — Френеля [39.5.2]) приходят в точку наблюдения в одинаковых фазах и потому усиливают одно другое. Если $a = b$, то все главные максимумы четных порядков m не появляются. Условие дифракционных минимумов, в которых интенсивность света равна нулю, имеет вид

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda, \quad p = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{54.25}$$

где N — общее число щелей. Между двумя соседними минимумами получаются максимумы, которые называются *второстепенными* или *добавочными*. Между соседними главными максимумами располагается $N - 1$ минимум и $N - 2$ добавочных максимума (рис. 54.12).

Положения главных максимумов согласно (54.24) зависят от длины волны λ (кроме случая $m = 0$). Поэтому решетка в каждом порядке $m \neq 0$ разлагает падающий белый свет в спектр, в котором отдельные его монохроматические составляющие получаются пространственно разделенными, т. е. главные максимумы получаются окрашенными. Дифракционные максимумы, соответствующие $m = 1$, образуют *спектр первого порядка*, $m = 2$ — *спектр второго порядка*, $m = 3$ — *спектр третьего порядка* и т. д. Если падающий свет белый, то спектры каждого порядка имеют все цвета радуги. Наибольшее отклонение имеют красные лучи, наименьшее — фиолетовые.

Дифракционные решетки характеризуют угловой дисперсией, дисперсионной областью и разрешающей способностью. *Угловой дисперсией* называется производная $d\theta/d\lambda$. В случае формулы (54.24)

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\sin \theta}{\lambda \cos \theta} \tag{54.26}$$

— угловая дисперсия не зависит от параметров решетки.

Дисперсионной областью называется максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой еще нет перекрытия спектров соседних порядков, т. е. спектры можно различать:

$$\Delta\lambda = \lambda/m, \tag{54.27}$$

где m — порядок спектра. *Разрешающей способностью* дифракционной решетки называется величина $R = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ есть наименьшая разность длин волн двух спектральных линий, при которой они видны как раздельные. По Рэлею

$$R = Nm, \tag{54.28}$$

где N — общее число щелей решетки, m — порядок спектра.

55. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

55.1. Явление поляризации света

Поляризацией света называют совокупность явлений, в которых проявляется свойство поперечности электромагнитных волн видимой (оптической) части спектра. Волна называется *поляризованной*, если в ней существует выделенное направление колебаний. Различают несколько видов поляризации: 1) *линейная* или *плоская* поляризация; 2) *круговая* или *циркулярная* поляризация; 3) *эллиптическая* поляризация [39.3; 43.2]. Поляризация возможна только у поперечных волн. Плоская световая волна называется *линейно поляризованной*, если ее электрический вектор $\mathbf{E}$ все время лежит в одной плоскости, в которой расположена нормаль $\mathbf{N}$ к фронту волны (рис. 55.1). Плоскость, проходящая через два вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{N}$, называется *плоскостью поляризации*. За направление поляризации световой волны принято направление вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$, а за направление колебаний — направление колебаний вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$. Естественный свет неполяризован, так как он излучается атомами, ориентированными в пространстве произвольным образом. В нем векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{N}$ в каждый момент времени взаимно перпендикулярны, но направление векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ изменяется со временем произвольно.

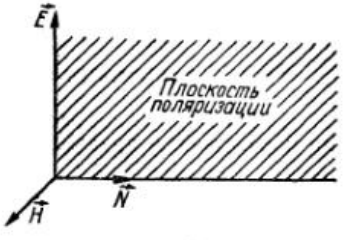


Рис. 55.1

Естественный свет обладает в среднем осевой симметрией относительно направления его распространения.

Устройства, с помощью которых естественный свет можно преобразовать в поляризованный, называют *поляризаторами*. Простейшим поляризатором является пластинка турмалина, вырезанная параллельно его кристаллографической (оптической) оси. Турмалин сильно поглощает световые лучи, в которых вектор электрической напряженности **E** перпендикулярен оптической оси. Если вектор **E** параллелен этой оси, то соответствующие лучи проходят через турмалин практически без поглощения. Поэтому свет, прошедший через такую пластинку, становится линейно поляризованным с вектором **E**, параллельным оптической оси турмалина.

Поляризаторы, используемые для исследования поляризации света, называют анализаторами. Для линейно поляризованной световой волны, прошедшей через анализатор, справедлив **закон Малюса** (1808)

$$I = kI_0\cos^2\alpha, \tag{55.1}$$

где I — интенсивность волны на выходе анализатора, I_0 — интенсивность входящего в него свега, α — угол между плоскостями поляризации входящего и выходящего света, k — коэффициент прозрачности анализатора ($0 < k \ll 1$).

Две электромагнитные (световые) волны, линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, при сложении образуют волну, поляризованную эллиптически [43.2.1]:

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} - \frac{2E_xE_y}{E_{0x}E_{0y}}\cos\delta + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = \sin^2\delta, \tag{55.2}$$

где

$$E_x = E_{0x}\cos\omega t,\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t + \delta) \tag{55.3}$$

— компоненты вектора электрической напряженности **E** вдоль осей x и y, совершающие колебания с одинаковой частотой ω, δ — начальная фаза. Аналогичное уравнение эллипса справедливо и для магнитного вектора **H**. В такой волне конец электрического (и магнитного) вектора в каждой точке пространства движется по эллипсу.

55.2. Поляризация при отражении света

Световые лучи, проходя через границу раздела двух сред с разными показателями преломления n_1 и n_2, испытывают отражение и преломление [47]. Отраженный и преломленный лучи оказываются частично линейно поляризованными. В отраженном световом луче колебания происходят преимущественно перпендикулярно плоскости падения, а в преломленном — в плоскости падения (рис. 55.2).

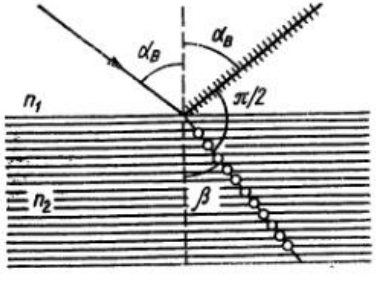


Рис. 55.2

Существует такой угол падения α_B, называемый *углом Брюстера*, при котором отраженный свет оказывается полностью линейно поляризованным. Это явление называется **законом Брюстера** (1815). Угол Брюстера α_B определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha_B = n_{21}, \tag{55.4}$$

где $n_{21} = n_2/n_1$ — показатель преломления среды, в которой распространяется преломленный свет, относительно среды, в которой распространяется падающий свет. При угле Брюстера отраженный α_B и преломленный β лучи образуют прямой угол: $\alpha_B + \beta = \pi/2$.

Отражение под углом Брюстера представляет собой самый простой способ получения поляризованного света. Отраженный свет линейно поляризован так, что колебания его волны происходят в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Недостатком этого способа получения поляризованного света является малая интенсивность отраженных лучей.

Числовые значения угла Брюстера: 83°40′ для воды и 56°19′ для стекла.

55.3. Поляризация при двойном лучепреломлении

Электромагнитная (световая) волна, падающая на кристалл из изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованные волны: *обыкновенную*, вектор электрической индукции **D** [25.2.4] которой перпендикулярен главному сечению, и *необыкновенную* с вектором электрической индукции, лежащим в главном сечении. Такое явление называется *двойным лучепреломлением*. Под главным сечением кристалла понимают плоскость, в которой лежат оптическая ось кристалла и нормаль **N** к фронту волны. Оптическая ось кристалла есть то направление в кристалле, относительно которого его свойства обладают симметрией вращения. Обыкновенная и необыкновенная волны распространяются с различной фазовой скоростью. У обыкновенной волны скорость распространения $v_\perp$ не зависит от направления распространения. Скорость распространения необыкновенной волны $v_\parallel$ зависит от направления. Эта зависимость обусловлена тем, что с изменением направления нормали **N** к фронту волны меняется угол между электрическим вектором **D** и оптической осью кристалла. Следует отметить, что вдоль оптической оси обе волны в кристалле распространяются с одинаковыми скоростями. Последнее может служить определением оптической оси кристалла.

Вещества, в которых фазовая скорость электромагнитных волн зависит от направления распространения, называются *анизотропными*.

Обыкновенная волна подчиняется обычным законам преломления света, а необыкновенная преломляется по другим законам. Так, если на пластинку кристалла, вырезанную параллельно его оптической оси, нормально падает свет, ограниченный диафрагмой, то необыкновенный луч *e* испытывает преломление, а обыкновенный *o* движется без преломления (рис. 55.3). Волновые фронты и волновые нормали обоих лучей не преломляются. Фронты представляют собой поверхности, параллельные поверхности пластинки. После выхода из пластинки луч *e* идет в направлении падающего пучка света. При достаточной толщине пластинки лучи *e* и *o* по выходу из нее оказываются пространственно разделенными. Если на кристалл падает естественный свет, то на выходе всегда имеется два луча. Если падающий свет линейно поляризован в плоскости главного сечения или перпендикулярно ей, то двойное лучепреломление не происходит — на выходе имеется один луч с исходной поляризацией. На опыте для получения двойного луче-

преломления пользуются не отдельным кристаллом, а комбинациями кристаллов, выполненных в виде призмы. Простейшей такой системой является *призма Николя*. Призма Николя представляет собой кристалл исландского шпата ($CaCO_3$), полученный из куска кристалла скалыванием. Основания этого образца сошлифовывают так, чтобы они составляли с боковыми ребрами угол 68° (у естественного кристалла этот угол равен 71°). Далее кристалл разрезают вдоль плоскости, перпендикулярной сошлифованным основаниям и главному сечению кристалла. Это сечение перпендикулярно основаниям и проходит через оптическую ось кристалла. Срезы полируют и склеивают тонким слоем канадского базальта. Сечение призмы Николя плоскостью главного сечения показано на рис. 55.4. Оптическая ось направлена под углом 64° к основанию. Обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение от плоскости склейки и отводится в сторону. Через призму может пройти только один необыкновенный луч *e*, если падающий луч лежит в пределах разности допустимых углов наклона лучей, равной 29°. Эту величину называют *апертурой полной поляризации призмы*. Если

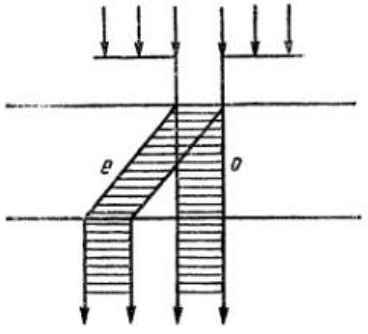


Рис. 55.3

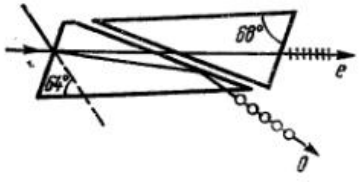


Рис. 55.4

падающий луч падает на призму Николя под большим углом, то возможно полное внутреннее отражение не только луча *o*, но и луча *e*. Если этот угол слишком мал, то через призму пройдет и луч *o*.

Некоторые вещества (например, турмалин) поглощают обыкновенный луч. Эффект поглощения одного из лучей (*o* или *e*) называется *дихроизмом*. Вещества, у которых наблюдается этот эффект, могут служить поляризаторами или анализаторами световой волны [55.1].

Поляризаторы, имеющие малую толщину при большой площади, называются *поляроидами*. Поляроиды — это искусственные пленки с сильным дихроизмом.

Примеры веществ, обладающих свойством двойного лучепреломления: исландский шпат, кварц, слюда, турмалин, стекло, искусственные смолы и др.

55.4. Вращение плоскости поляризации

При прохождении поляризованного света через некоторые вещества происходит поворот плоскости поляризации световой волны. Это явление называется *вращением плоскости поляризации*. Вещества, которые способны поворачивать плоскость поляризации падающих на них световых волн, называют *оптически активными*. Оптически активными могут быть как жидкие вещества и газы, так и кристаллы. Угол поворота α плоскости поляризации линейно поляризованной волны пропорционален длине пути света в веществе l. В твердых телах

$$\alpha = al, \tag{55.5}$$

где a — вращательная способность, зависящая от рода вещества, его температуры и длины волны. В растворах

$$\alpha = \alpha_0 lm/V, \tag{55.6}$$

где m — масса оптически активного вещества, V — объем раствора, α_0 — удельное вращение.

Оптически неактивные вещества под действием магнитного поля приобретают способность вращать плоскость поляризации света, распространяющегося вдоль направления поля. Это явление называется **эффектом Фарадея** (1845). Угол поворота плоскости поляризации

$$\alpha = VlB, \tag{55.7}$$

где V — *постоянная Верде* (удельное магнитное вращение), l — длина пути света в веществе, B — индукция однородного магнитного поля [29.1.2]. Постоянная Верде V зависит от природы вещества, его температуры и длины световой волны. Магнитное вращение плоскости поляризации объясняется асимметрией оптических свойств вещества, возникающей под действием магнитного поля.

Различают правое и левое направления вращения плоскости поляризации с точки зрения наблюдателя, смотрящего навстречу лучу.

Измерение угла поворота α позволяет определять концентрации растворов.

Глава XIII

Квантовая оптика

56. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

Опыт показывает, что свет имеет двойственную природу. В одних явлениях (дифракция [54], интерференция [53], поляризация [55]) проявляются *волновые свойства света*, в других (фотоэлектрический эффект [57.1], эффект Комптона [57.2], люминесценция [57.5]) — его *корпускулярные свойства*.

Согласно Планку [23.3.4] излучение и поглощение света веществом происходит не непрерывно, а конечными порциями или *квантами*. По Эйнштейну эти кванты могут распространяться в пространстве. Опыт (Боте) подтвердил существование особых частиц света, получивших название *фотонов*. Энергия фотона равна энергии кванта света, введенной Планком:

$$E = \hbar\omega = h\nu. \qquad (56.1)$$

Эта энергия определяется частотой фотона ν; $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота излучения, h — постоянная Планка (23.29). Величина $\hbar = h/2\pi$ называется *постоянной Планка перечеркнутой* или *дираковской* (введена Дираком).

Фотоны обладают волновыми свойствами, которые проявляются в интерференции и дифракции потока фотонов. Особенность фотона быть волной и частицей называется *корпускулярно-волновым дуализмом*. Согласно квантовой теории [XIV] корпускулярно-волновой дуализм присущ всем известным элементарным частицам. В случае фотонов волновые свойства играют преобладающую роль при малых частотах ν. При больших значениях ν более существенными являются его корпускулярные свойства.

Источниками фотонов являются переходы атомов, молекул и атомных ядер из возбужденных состояний в состояния с меньшей энергией. Фотоны излучаются при ускоренном движении заряженных частиц, при распадах и аннигиляциях частиц.

Фотон обладает собственным моментом импульса (спином), равным $\hbar$. Если фотон поглощается или излучается веществом, то момент импульса последнего изменяется на дискретную величину $m\hbar$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$

Фотон обладает импульсом. Это подтверждается наличием давления света [43.2.5; 57.3.1]. Связь между энергией фотона E и его импульсом p дает специальная теория относительности [6]:

$$E = pc, \; p = \frac{E}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k, \qquad (56.2)$$

где ω — циклическая частота излучения, λ — длина волны, k — волновое число. Фотон летит в направлении распространения электромагнитной волны, поэтому направления его импульса $\mathbf{p}$ и волнового вектора $\mathbf{k}$ [39.3] совпадают:

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}. \qquad (56.3)$$

Согласно специальной теории относительности масса покоя фотона равна нулю: $m_0 = 0$, и он всегда движется со скоростью c.

При взаимодействии с веществом фотоны могут испускаться, поглощаться и рассеиваться. При этом число фотонов не сохраняется, однако выполняются законы сохранения энергии и импульса.

57. ДЕЙСТВИЕ СВЕТА НА ВЕЩЕСТВО

57.1. Фотоэлектрический эффект

57.1.1. Теория Эйнштейна. *Фотоэлектрическим эффектом* или *фотоэффектом* называется явление испускания электронов веществом под действием света. Опыты Г. Герца (1887), А. Г. Столетова (1888—1890), Ф. Ленарда (1899), Дж. Томсона (1899), А. Ф. Иоффе (1907) показали, что фотоэффект подчиняется следующим **закономерностям:** 1) *энергия освобожденных электронов, называемых фотоэлектронами, абсолютно не зависит от интенсивности света*; 2) *повышение интенсивности приводит к увеличению числа фотоэлектронов, но не их скорости*; 3) *число фотоэлектронов пропорционально интенсивности света*; 4) *скорость электронов зависит только от частоты падающего света: с увеличением частоты энергия фотоэлектронов возрастает линейно.* Эти законы фотоэффекта не могут быть объяснены с точки зрения волновой природы света. Теория, основанная на чисто корпускулярной природе света, дает правильное количественное и качественное объяснение опытных данных (Эйнштейн, 1905).

Качественно картина механизма фотоэффекта объясняется тем, что фотон отдает свою энергию (56.1) электрону вещества. Если эта энергия достаточна для того, чтобы освободить электрон от удерживающих его внутри вещества сил (связей), то он выходит за его пределы. Каждый освобожденный электрон поглощает энергию у одного фотона, так как вероятность одновременного поглощения двух фотонов ничтожно мала. Поэтому число освобожденных фотоэлектронов пропорционально числу поглощенных фотонов, определяющих интенсивность света, а их энергия линейно зависит от частоты ω, но не зависит от числа фотонов.

Количественно фотоэффект описывается *уравнением Эйнштейна*

$$\hbar\omega = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + A, \qquad (57.1)$$

представляющим собой закон сохранения энергии. Здесь ω — частота световой волны, m — масса покоя электрона, $v_{\max}$ — максимальная скорость вылетевшего электрона, A — работа выхода электрона, рав-

ная наименьшей энергии, которую необходимо сообщить электрону для того, чтобы удалить его за пределы вещества в вакуум. Величина

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 = eV \qquad (57.2)$$

есть максимальная кинетическая энергия, которой будет обладать вылетевший электрон. Здесь e — заряд электрона, а величина V называется *задерживающим потенциалом*. Он равен напряжению, которое следует приложить к веществу (катоду) для того, чтобы электроны, обладающие скоростями $v_{\max}$, не смогли его покинуть.

Из уравнения (57.1) следует, что когда работа выхода A больше энергии кванта $\hbar\omega$, электрон не может покинуть вещество. Частота ω_0 или длина волны λ_0, определяемые условиями

$$\omega_0 = \frac{A}{\hbar}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar c}{A}, \qquad (57.3)$$



Рис. 57.1

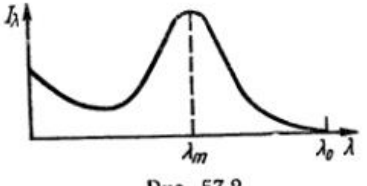


Рис. 57.2

называются *красной (длинноволновой) границей* фотоэффекта. Фотоэффект возможен, если $\omega \geqslant \omega_0$ или $\lambda \leqslant \lambda_0$.

57.1.2. Виды фотоэффекта. Если частота ω значительно больше низкочастотной границы фотоэффекта ω_0, $\omega \gg \omega_0$, т.е. энергия световых квантов значительно больше работы выхода A (рентгеновские лучи), то величиной A можно пренебречь и уравнение (57.1) принимает вид

$$\hbar\omega = eV. \qquad (57.4)$$

Эта формула описывает не только фотоэффект, называемый *прямым* фотоэффектом, в котором энергия фотонов переходит в кинетическую энергию фотоэлектронов, но и обратный фотоэффект, в котором фотоны рождаются за счет кинетической энергии электронов, падающих на поверхность вещества (металла). Такой процесс происходит в рентгеновских трубках [69.1.2]. Формула (57.4) в этом процессе определяет максимальную частоту ω, с которой могут испускаться рентгеновские лучи [69.2.1].

Фотоэлектроны, движущиеся под действием внешнего электрического поля, образуют фототок. Фотоэффект называют *нормальным*, если величина $I_\lambda(\lambda)$, равная силе фототока насыщения и отнесенная к единичному интервалу длин волн и к единице поглощенной лучистой энергии, монотонно убывает с увеличением длины волны λ, стремясь к нулю на длинноволновой границе λ_0 (рис. 57.1). Фотоэффект называется *селективным*, если кривая $I_\lambda(\lambda)$ характеризуется максимумом при некотором значении $\lambda = \lambda_m$ (рис. 57.2). В селективном фотоэффекте проявляются волновые свойства фотона. Интенсивность I_λ при этом зависит от поляризации падающего света и угла падения. Если электрический вектор $\mathbf{E}$ падающей волны перпендикулярен плоскости падения или свет падает нормально к поверхности металла, то селективный фотоэффект не наблюдается. Селективность фотоэффекта наиболее сильно выражена в том случае, когда падающий поляризованный свет, электрический вектор которого лежит в плоскости падения, скользит вдоль этой плоскости. Селективный фотоэффект наблюдается у щелочных металлов: у калия $\lambda_m = 435$ нм, у натрия $\lambda_m = 340$ нм, у сплава калия и натрия $\lambda_m = 400$ нм.

Применение лазеров [58.2.2] в качестве мощных источников света позволяет наблюдать нелинейные особенности фотоэффекта. В таких явлениях фотоэлектрон может получить энергию не от одного фотона, а от нескольких. В этом случае уравнение Эйнштейна (57.1) принимает вид

$$N\hbar\omega = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + A, \qquad (57.5)$$

где N — число столкновений электрона с фотонами. Длинноволновая граница фотоэффекта (57.3) определяется выражением

$$\omega_0 = \frac{A}{\hbar N}, \qquad (57.6)$$

а фототок насыщения $I_н$ зависит нелинейным образом от светового потока Φ [49.1]:

$$I_н \sim \Phi^N. \qquad (57.7)$$

В случае обычного однофотонного фотоэффекта зависимость $I_н$ от Φ является линейной

$$I_н \sim \Phi. \qquad (57.8)$$

Все рассмотренные выше фотоэффекты можно определить как внешние, в результате которых электроны покидают вещество. Кроме них возможен *внутренний* фотоэффект, при котором электроны, оставаясь в веществе, изменяют в нем свое энергетическое состояние. Так, в полупроводниках и диэлектриках часть электронов под действием света из валентной энергетической зоны переходит в зону проводимости. При этом увеличивается электропроводность вещества. Такое явление называют *фотопроводимостью*. Изменение энергетических состояний электронов (их перераспределение) может привести к изменению внутреннего электрического поля в кристалле и, как результат этого, к появлению ЭДС, называемой *фото-ЭДС*, на границе двух различных полупроводников или полупроводника и металла при их освещении. Около этой границы образуется переходной слой, пропускающий ток только в одном направлении.

В газах явление фотоэффекта состоит в фотоионизации, при которой происходит ионизация атомов и молекул под действием излучения.

Фотоэффект нашел самое широкое применение в различных технических устройствах: фотоэлементах, фотосопротивлениях, фотодиодах, фотоэлектронных умножителях и др.

57.2. Эффект Комптона

57.2.1. Рассеяние фотона на свободном электроне. *Эффектом Комптона* называется явление изменения длины волны фотонов при их рассеянии на электронах. Опыт (Комптон, 1922) показывает, что в рассеянном излучении наряду с исходной длиной волны λ имеется

смещенная линия с длиной волны $\lambda' > \lambda$. При этом разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, называемая *комптоновским смещением*, не зависит от природы рассеивающего вещества и длины падающей волны λ, а зависит только от угла θ между направлениями падающего и рассеянного излучений. Эффект Комптона наблюдается при рассеянии монохроматических рентгеновских лучей на легких веществах (графите, парафине и др.), при рассеянии рентгеновских лучей на электронных оболочках атомов.

В квантовой теории (Комптон и Дебай) эффект Комптона рассматривается как процесс упругого столкновения фотонов со свободными электронами. В атомах вещества свободными можно считать электроны, энергия связи которых в атоме значительно меньше энергии, передаваемой фотоном электрону при соударении. Это условие хорошо выполняется для легких атомов и для периферических слабо связанных электронов более тяжелых элементов. Их энергия связи составляет величину порядка нескольких электронвольт и является ничтожно малой по сравнению с энергией фотона рентгеновских лучей.

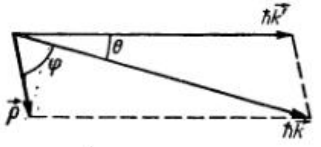


Рис. 57.3

Пусть фотон с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar k = \hbar\omega/c$ сталкивается с покоящимся электроном, имеющим энергию m_0c^2, где m_0 — масса покоя электрона. После столкновения энергия фотона и его импульс приобретут значения $\hbar\omega'$ и $\hbar k' = \hbar\omega'/c$, а энергия электрона будет равна $c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$, где p — его импульс после столкновения (рис. 57.3). Из законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega + m_0c^2 = \hbar\omega' + c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}, \qquad (57.9)$$
$$\hbar\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}' + \mathbf{p}$$

следует формула для комптоновского смещения

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}, \qquad (57.10)$$

где $\lambda = 2\pi/k$, $\lambda' = 2\pi/k'$ — длина волны фотона до и после рассеяния, θ — угол между направлениями падающего и рассеянного фотона, величина

$$\lambda_c = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} = \frac{h}{m_0c} \qquad (57.11)$$

называется *комптоновской длиной волны* частицы с массой m_0 (в данном случае электрона). При $\theta = \pi/2$ имеем $\Delta\lambda = \lambda_c$, при $\theta = \pi$ имеем $\Delta\lambda = 2\lambda_c$. Экспериментальное значение λ_c для электрона

$$\lambda_{c,\text{эксп}} = (2{,}424 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-12}\text{м}, \qquad (57.12а)$$

а теоретическое значение

$$\lambda_{c,\text{теор}} = (2{,}4263089 \pm 0{,}0000040) \cdot 10^{-12}\text{ м}. \qquad (57.12б)$$

В современной физике чаще используется величина $\lambda_c = \lambda_c/2\pi$, также называемая *комптоновской длиной волны электрона*. Ее значение

$$\lambda_c = (3{,}8615905 \pm 0{,}0000064) \cdot 10^{-13}\text{ м}. \qquad (57.12в)$$

Опыт показывает, что с увеличением атомного номера рассеивающего вещества интенсивность несмещенной линии λ возрастает, а интенсивность смещенной λ' падает. Это явление объясняется тем, что электроны внутренних областей атомов (внутренние электроны) сильно связаны с атомом и приближение о свободных электронах, рассеивающих фотоны, оказывается слишком грубым. При соударении фотона со связанным электроном обмен энергией и импульсом осуществляется с атомом как с целым. Так как масса атома намного больше массы электрона, то комптоновское смещение при рассеянии фотона на связанном электроне ничтожно мало, а величина энергии $\hbar\omega$ при рассеянии практически не изменяется. С увеличением атомного номера относительное число электронов, сильно связанных с атомом, увеличивается, что приводит к ослаблению интенсивности смещенной линии и увеличению интенсивности линии, соответствующей падающему пучку света.

Согласно (57.11) частота рассеянного фотона ω' определяется **формулой Комптона**

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\hbar\omega/m_0c^2)(1 - \cos\theta)}, \qquad (57.13)$$

где ω — частота падающего фотона, θ — угол рассеяния. Так как движения свободных электронов независимы, то рассеяние фотонов на них некогерентно. Колебания связанных электронов согласованы, поэтому фотоны рассеиваются ими когерентно; падающая и рассеянные волны могут интерферировать между собой [60.2.1].

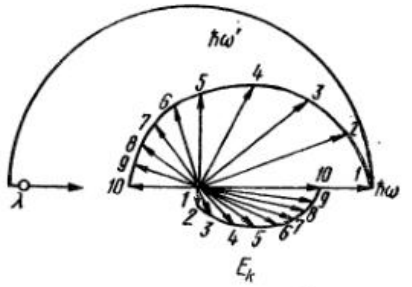


Рис. 57.4

57.2.2. Электроны отдачи. При рассеянии фотона на свободном электроне последний получает отдачу. Если в начальном состоянии электрон покоился, то импульс отдачи есть $\mathbf{p}$ (рис. 57.3). Угол φ, под которым вылетает *электрон отдачи*, определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \lambda_c/\lambda} = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \hbar\omega/m_0c^2}, \qquad (57.14)$$

где λ_c — комптоновская длина волны электрона (57.12). Энергия E_k, которую приобретает электрон, равна разности энергий фотона до и после рассеяния:

$$E_k = \hbar\omega - \hbar\omega' = \hbar\omega\frac{2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}}, \qquad (57.15)$$

а импульс

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E_k^2 + 2m_0c^2E_k}. \qquad (57.16)$$

В области не слишком жестких рентгеновских лучей ($\lambda > 10\lambda_c = 0{,}024$ нм) электрон отдачи получает малую часть от энергии фотона ($E_k/\hbar\omega < 1/11$ при $\varphi = \pi/2$). Это позволяет на опыте различать элек-

троны отдачи от фотоэлектронов [57.1], возникающих при полном поглощении фотона атомом. На рис. 57.4 показано угловое распределение по энергиям рассеянных фотонов ($\hbar\omega'$) и электронов отдачи (E_k).

57.3. Давление света

57.3.1. Электромагнитная теория светового давления. *Давлением света* называется механическое действие, производимое светом при падении его на поверхность тела. С точки зрения электромагнитной теории [43.2.5] давление света объясняется возникновением механических сил, действующих на электроны, находящиеся вблизи освещаемой поверхности тела, и обусловленных электромагнитным полем световой волны. Электрическое поле световой волны возбуждает колебания электронов в поверхностном слое тела. Действие магнитного поля описывается силой Ампера [29.2.2], направление которой задается вектором Пойнтинга $\boldsymbol{\gamma}$ (32.5) световой волны. Давление света p определяется величиной вектора Пойнтинга и углом θ, под которым падает световая волна на поверхность тела (43.28).

57.3.2. Квантовая теория светового давления. Согласно квантовой теории давление света объясняется передачей фотонами своего импульса атомам или молекулам поверхностного слоя освещаемого тела.

Если свет полностью поглощается поверхностью, то при световом потоке с плотностью фотонов n на единицу поверхности в единицу времени падает nc фотонов. Давление света p на поверхность тела есть импульс, сообщаемый в единицу времени единице поверхности:

$$p = \frac{E}{c}\, nc = En = u, \qquad (57.17)$$

где u — объемная плотность электромагнитной энергии (43.20) падающей световой волны. После усреднения по времени формула (57.17) переходит в (43.26), т. е. описание давления света в рамках электромагнитной и квантовой теории полностью эквивалентно.

Гипотезу о световом давлении высказал Кеплер (1619). Теоретически давление света предсказал Максвелл (1873), а экспериментально обнаружил П. Н. Лебедев (1899—1901). Наличие светового давления объясняет появление хвостов у комет при их приближении к Солнцу.

57.4. Фотохимические превращения под действием света

57.4.1. Фотохимические реакции. *Фотохимическими реакциями* называются химические превращения веществ под действием света. В таких реакциях происходит поглощение света. Его энергия идет на разложение сложных молекул и многоатомных ионов на составные части, на образование сложных молекул из более простых.

Примеры фотохимических реакций:

1) разложение углекислоты под действием света

$$2CO_2 + 2\hbar\omega \rightarrow 2CO + O_2;$$

2) диссоциация молекул хлора

$$Cl_2 + \hbar\omega \rightarrow Cl + Cl;$$

3) разложение бромида серебра (при фотографировании)

$$AgBr + \hbar\omega \rightarrow Ag + Br.$$

Фотохимические реакции подчиняются **закону эквивалентности Эйнштейна:** *на один акт фотохимического превращения идет один квант поглощенного света.* Масса прореагировавшего вещества $M = Nm$, где m — масса молекулы, N — число молекул, участвовавших в реакции. Согласно закону Бунзена — Роско

$$M = k\Phi t, \qquad (57.18)$$

где Φ — мощность излучения, t — время освещения, k — коэффициент, зависящий от рода реакции при постоянном спектральном составе света.

57.4.2. Сенсибилизированные фотохимические реакции. *Сенсибилизированными* называются фотохимические реакции, которые происходят в данном веществе при облучении его светом с частотой ω, лежащей вне полосы его поглощения, при добавлении к нему другого вещества, называемого *сенсибилизатором*. Сенсибилизатор имеет полосу поглощения, содержащую частоту ω падающего света. После поглощения фотона сенсибилизатором энергия, необходимая для осуществления реакции в данном веществе, передается его молекулам при межмолекулярных столкновениях с молекулами сенсибилизатора. Из этого ясно, что сенсибилизированные реакции осуществляются при достаточно больших давлениях, когда происходят частые столкновения молекул.

Пример сенсибилизированной реакции:

$$Hg + \hbar\omega \rightarrow Hg^*,$$
$$Hg^* + H_2 \begin{matrix} \rightarrow HgH + H, \\ \rightarrow Hg + 2H, \end{matrix} \quad 2H + O_2 \rightarrow H_2O_2,$$

где сенсибилизатором являются атомы ртути Hg, возбуждаемые фотонами с длиной волны $\lambda = 253{,}7$ нм. В результате такого процесса из атомов H_2 и O_2 образуется пероксид водорода H_2O_2.

57.5. Люминесценция

57.5.1. Природа явления. Все тела помимо теплового или равновесного излучения [23] в результате различных внешних воздействий дают избыточное излучение, которое не определяется температурой тела. Все виды свечений, возбуждаемые за счет любого внешнего источника энергии, называют *люминесценцией*. Длительность люминесценции после прекращения внешнего воздействия значительно превышает период световых колебаний. Это свойство люминесценции позволяет отличать ее от кратковременных вторичных излучений таких, как отражение и рассеяние света, тормозное излучение заряженных частиц, излучение Черенкова — Вавилова [44].

Люминесценция не является равновесным процессом. Она обусловлена колебаниями сравнительно небольшого числа атомов или молекул вещества, которые под действием источника энергии переходят в возбужденные состояния. Излучение возникает в результате переходов атомов или молекул из этих состояний в основное (невозбужденное), или менее возбужденное (с меньшей энергией) состояния. Люминесценция определяется структурой энергетического спектра тела, средним временем его пребывания в возбужденных состояниях, правилами отбора, разрешающими поглощать или излучать свет данной частоты. Кратковременную люминесценцию называют также *флуоресценцией*.

Вещества, в которых возбуждается люминесценция, называются *люминофорами*. Свечение различают по методу его возбуждения. Люми-

несценцию, возникающую при освещении люминофора видимым или ультрафиолетовым светом, называют *фотолюминесценцией*; при облучении его рентгеновскими или гамма-лучами — *рентгенолюминесценцией*; при бомбардировке люминофора катодными лучами (электронами) — *катодолюминесценцией*; при облучении альфа-, бета-, гамма-лучами, протонами и т. д. (ядерные излучения) — *радиолюминесценцией*. Свечение люминофоров, помещенных в электрическое поле, называют *электролюминесценцией*; их свечение при химических реакциях — *хемилюминесценцией*; при помещении люминофора в пламя — *кандолюминесценцией*; при механическом воздействии на люминофор (растирание, раздавливание, раскалывание) — *триболюминесценцией*.

57.5.2. Законы фотолюминесценции. Различают спектры люминесценции: *линейчатые*, *полосатые* и *сплошные*. Как правило, люминесценция удовлетворяет **закону** или **правилу Стокса** (1852): *длина волны λ' света люминесценции больше длины волны λ возбуждающего света*. Согласно квантовой теории, это означает, что энергия фотона $\hbar\omega$ последнего частично расходуется на неоптические процессы:

$$\hbar\omega = \hbar\omega' + W, \quad \omega > \omega', \tag{57.19}$$

где ω' — частота люминесценции, W — потери энергии на другие процессы. В природе наблюдается исключение из правила Стокса, когда $\lambda' < \lambda$. В этом случае недостающая часть энергии поступает за счет энергии теплового движения атомов или молекул люминофора:

$$\hbar\omega' = \hbar\omega + akT, \tag{57.20}$$

где ω' — частота люминесценции, ω — частота поглощенного света, k — постоянная Больцмана, T — температура, a — коэффициент, зависящий от природы люминофора. Излучение, описываемое уравнением (57.20), называется *антистоксовым свечением*.

Люминесценцию характеризуют *энергетическим выходом*, равным отношению энергии люминесценции к энергии, поглощенной в стационарных условиях люминофором. *Энергетический выход фотолюминесценции возрастает прямо пропорционально длине волны λ поглощенного света до некоторого максимального значения при $\lambda \simeq \lambda_{max}$ и затем быстро спадает до нуля при $\lambda > \lambda_{max}$* (**закон Вавилова**). Резкое уменьшение энергетического выхода при $\lambda > \lambda_{max}$ объясняется тем, что при таких длинах волн λ энергия поглощенных фотонов недостаточна для перевода атомов или молекул люминофора в возбужденные состояния.

Отношение числа фотонов люминесценции к числу поглощенных фотонов с фиксированной энергией называют *квантовым выходом фотолюминесценции*. Согласно закону Вавилова для люминесценции, подчиняющейся правилу Стокса, квантовый выход фотолюминесценции не зависит от длины волны возбуждающего света и резко падает при антистоксовом излучении.

Интенсивность I люминесценции зависит от характера элементарных процессов, приводящих к этому свечению. В случае спонтанной люминесценции, когда свечению предшествует поглощение света с переходом атомов или молекул не на уровень, с которого происходит свечение, а на вышележащий возбужденный уровень, с последующим переходом (с излучением или без него) на уровень люминесценции, интенсивность подчиняется экспоненциальному закону

$$I = I_0 \exp(-t/\tau), \tag{57.21}$$

где I — интенсивность свечения в момент времени t, I_0 — интенсивность свечения в момент прекращения действия возбуждающего излучения, $\tau \sim 10^{-9}$—10^{-8} с — средняя продолжительность возбужденного состояния атомов или молекул люминофора. Если люминесценция возникает в результате рекомбинации (воссоединения) частиц люминофора (разделенных на эти частицы при поглощении возбуждающего излучения), то зависимость интенсивности люминесценции от времени описывается степенным законом

$$I = I_0 (1 + at)^{-n}, \tag{57.22}$$

где I_0 — интенсивность свечения в момент его возбуждения, $a \sim V I_0$, $1 < n < 2$.

Закону (57.21) подчиняется люминесценция сложных молекул в парах и растворах, свечение (*фосфоресценция*) органических веществ. Люминесценция в результате рекомбинации может происходить на дефектах или примесных центрах в кристаллах, когда электроны переходят на возбужденный уровень, а образовавшиеся дырки захватываются на основной уровень центра.

58. ОПТИЧЕСКИЕ КВАНТОВЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

58.1. Спонтанное и индуцированное излучения

58.1.1. Коэффициенты Эйнштейна. Атомы и молекулы вещества в различных агрегатных состояниях [15.2] являются генераторами и усилителями излучения. В основе работы таких квантовых систем лежит *явление индуцированного излучения*, открытое Эйнштейном (1916).

Согласно квантовой теории [65], энергетическое состояние атома или молекулы (любой атомной системы) характеризуется определенными дискретными значениями энергии $E_1, E_2, E_3, \ldots$. Эти значения энергий, расположенные в порядке их увеличения, например $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$, образуют систему энергетических уровней или так называемый *энергетический спектр*. У изолированного атома энергетический спектр дискретен (рис. 58.1). У атома в твердом теле эти дискретные уровни расщепляются и расширяются, превращаясь в отдельные полосы, между которыми находятся запрещенные для электронов энергетические интервалы (рис. 58.2). Это расщепление и уширение уровней обусловлено взаимодействием атома с полем других атомов кристаллической решетки твердого тела. Электроны внутренних оболочек атома экранируются внешними электронами. Поэтому они слабо взаимодействуют с полем кристаллической решетки, и их энергетические уровни расширяются незначительно. В результате низкоэнергетическая часть спектра атома в твердом теле подобна спектру изолированного атома.

Изолированный атом может изменить свое энергетическое состояние, т. е. перейти с одного уровня энергии на другой, только в том случае, если он поглотит (излучит) фотон и перейдет в более высокое (низкое) энергетическое состояние:

$$\hbar\omega_{mn} = h\nu_{mn} = E_m - E_n, \quad E_m > E_n, \tag{58.1}$$

где E_m и E_n — значения энергий атома на уровнях m и n, ω_{mn} или ν_{mn} — частота фотона (56.1), излученного при переходе $m \to n$. Возможны также нелинейные процессы, наблюдаемые в сильных электромагнитных полях, при которых переход атома с одного уровня на другой сопровождается испусканием или поглощением не одного, как в (58.1),

а сразу нескольких фотонов. Это так называемые *многофотонные процессы*.

Состояние атома с наименьшим значением энергии, например E_1, называется *основным*, а остальные E_2, E_3, ... — *возбужденными*. Если атом находится в одном из возбужденных состояний, то имеется определенная вероятность того, что он самопроизвольно перейдет в состояние с более низкой энергией с испусканием фотона. Такое излучение называется *спонтанным (самопроизвольным)*. Спонтанное излучение некогерентно, так как атомы излучают независимо один от другого. Если на атом действует внешнее электромагнитное поле с частотой, равной частоте излучаемого фотона, то вероятность перехода атома в нижележащее энергетическое состояние увеличивается. При этом излучение атома имеет ту же частоту, направление распространения и поляризацию, что и внешнее электромагнитное поле. Такое излучение называется *индуцированным (вынужденным)* излучением. Индуцированное излучение когерентно, оно находится в определенном фазовом соотношении с внешним полем. При индуцированном излучении энергия электромагнитного поля не расходуется. Однако одновременно



Рис. 58.1

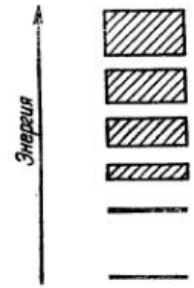


Рис. 58.2

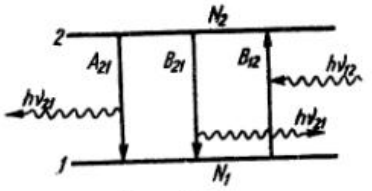


Рис. 58.3

с излучением фотонов, увеличивающих энергию внешнего электромагнитного поля, происходит процесс поглощения фотонов с переходом атомов в возбужденные состояния, при которых энергия электромагнитного поля уменьшается на величину энергии поглощенных фотонов. В природе существует равновесие между процессами испускания и поглощения, поэтому в обычных условиях нет усиления внешних электромагнитных полей.

Спонтанное и индуцированное излучения описывают методами теории вероятности (Эйнштейн, 1916). Пусть система, состоящая из большого числа изолированных атомов, может находиться только в двух состояниях: в основном (состояние 1) и возбужденном (состояние 2) (рис. 58.3). Если в данный момент времени в единице объема в состоянии 1 находится N_1 частиц, а в состоянии 2 — N_2 частиц (числа N_1 и N_2 называют *заселенностями состояний* 1 и 2), то при спонтанном излучении число переходов $2 \to 1$ в единице объема за время dt определяется формулой

$$dZ_{21} = A_{21} N_2 dt = -dN_2, \tag{58.2}$$

где A_{21} есть вероятность спонтанного перехода отдельного атома из состояния 2 в состояние 1; имеет размерность: $[A_{21}] = с^{-1}$. Это уравнение показывает, что число переходов $2 \to 1$ равно числу атомов dN_2, покинувших состояние 2. Его решение имеет вид

$$N_2 = N_{20} e^{-A_{21} t} \tag{58.3}$$

и определяет интенсивность J_c спонтанного излучения

$$J_c = h\nu_{21} \frac{dN_2}{dt} = h\nu_{21} \frac{N_{20}}{\tau} e^{-t/\tau}, \tag{58.4}$$

где N_{20} — число атомов в единице объема в состоянии 2 в момент времени $t = 0$,

$$\tau = \frac{1}{N_{20}} \int_0^\infty A_{21} N_2 t dt = A_{21} \int_0^\infty t e^{-A_{21} t} dt = \frac{1}{A_{21}} \tag{58.5}$$

— среднее время жизни атома в возбужденном состоянии. Соотношение (58.4) позволяет по измерению затухания спонтанного излучения определять среднее время жизни атома в возбужденном состоянии τ и вероятность A_{21} спонтанного перехода $2 \to 1$.

Вероятность W_{21} индуцированного излучения при переходе $2 \to 1$ предполагается пропорциональной спектральной плотности энергии электромагнитного поля $u_{\nu_{21}}$ [23.1] на частоте перехода ν_{21}:

$$W_{21} = B_{21} u_{\nu_{21}}, \tag{58.6}$$

где постоянная B_{21} называется *эйнштейновым коэффициентом индуцированного излучения*, $[B_{21}] = Дж^{-1} \cdot м^3 \cdot с^{-2}$. Вероятность W_{12} поглощения кванта света атомом (переход $1 \to 2$) определяется аналогичным соотношением

$$W_{12} = B_{12} u_{\nu_{21}}, \tag{58.7}$$

где постоянная B_{12} называется *эйнштейновым коэффициентом поглощения*, $[B_{12}] = Дж^{-1} \cdot м^3 \cdot с^{-2}$. Величины A_{12}, B_{12} и B_{21} называют *коэффициентами Эйнштейна*. Они являются характеристиками самого атома и могут зависеть только от частоты перехода ν_{21}.

Пусть система находится в равновесии. Тогда полное число переходов $2 \to 1$ равно числу обратных переходов $1 \to 2$:

$$(A_{21} + B_{21} u_{\nu_{21}}) N_2 = B_{12} u_{\nu_{21}} N_1. \tag{58.8}$$

При термодинамическом равновесии распределение частиц по энергиям описывается законом Больцмана (16.25) [16.5.1], который приводит к соотношению

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{21}}{kT}}, \quad h\nu_{21} = E_2 - E_1, \tag{58.9}$$

где g_1 и g_2 — кратности уровней энергии E_1 и E_2 состояний 1 и 2 соответственно. Кратность g_n уровня E_n показывает, сколько независимых состояний атома обладает одной и той же энергией. Если уровень E_n простой, то $g_n = 1$. Если он состоит из q простых слившихся энергетических подуровней, то $g_n = q$. Из (58.8) и (58.9) следует, что

$$u_{\nu_{21}} = \frac{A_{21}}{B_{21}} \left[\exp\left(-\frac{h\nu_{21}}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}. \tag{58.10}$$

Сравнение (58.10) с выражением для спектральной плотности (23.31) [23.3.4] приводит к следующему соотношению, описывающему связь между коэффициентами Эйнштейна A_{21} и B_{21}:

$$A_{21} = B_{21} \frac{8\pi h \nu_{21}^3}{c^3}. \tag{58.11}$$

Между коэффициентами B_{12} и B_{21} также существует простая связь

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21}, \tag{58.12}$$

которая следует из (58.8) и (58.9) в пределе $T \to \infty$.

Согласно (58.11) и (58.12) для описания процессов спонтанного и индуцированного излучений и поглощения света достаточно знать только один из коэффициентов Эйнштейна. Обычно за атомную константу принимают вероятность спонтанного перехода A_{21}, которую согласно (58.4), (58.5) легко определить опытным путем.

58.1.2. Усиление излучения. При некоторых условиях система атомов может излучать больше энергии, чем поглощать. Так, при спонтанном излучении атомы в единице объема за время dt излучают согласно (58.2) энергию

$$W_{0u} = h\nu_{21} dZ_{21} = A_{21} N_2 h\nu_{21} dt. \tag{58.13}$$

В присутствии электромагнитного поля за время dt излучается энергия

$$W_u = (A_{21} + B_{21} u_{\nu_{21}}) N_2 h\nu_{21}\, dt - B_{12} u_{\nu_{21}} N_1 h\nu_{21} dt. \tag{58.14}$$

Приращение энергии излучения при наличии электромагнитного поля

$$dW = W_u - W_{0u} = \chi u_{\nu_{21}} c\Delta\nu\, dt = J\chi\, dt, \tag{58.15}$$

где величина

$$\chi = \left(N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1\right) \frac{B_{21} h\nu_{21}}{c\Delta\nu}, \quad [\chi] = \text{м}^{-1}, \tag{58.16}$$

называется *коэффициентом усиления излучения*, $\Delta\nu$ — эффективная ширина линии с частотой ν_{21}, $J = u_{\nu_{21}} c\Delta\nu$ — спектральная плотность потока энергии излучения, $[J] = \text{Дж/м}^2 \cdot \text{с}$. Так как $n = u_{\nu_{21}} c\Delta\nu / h\nu_{21}$ есть число фотонов с энергией $h\nu_{21}$, т. е. плотность потока числа фотонов внешнего электромагнитного поля, то величина

$$\sigma_{21} = \frac{B_{21} h\nu_{21}}{c\Delta\nu}, \tag{58.17}$$

входящая в выражение (58.16), есть сечение индуцированного излучения. Если $\chi > 0$, то излучение усиливается системой атомов, если $\chi < 0$, то по мере распространения излучения в среде интенсивность его будет уменьшаться. Следовательно, условие усиления излучения имеет вид

$$N_2 > \frac{g_2}{g_1} N_1. \tag{58.18}$$

Для того чтобы система атомов излучала больше энергии, чем поглощала, необходимо, чтобы число атомов в возбужденном состоянии было больше числа атомов в нижележащем состоянии. Если условие (58.18) выполняется, то говорят, что среда обладает *инверсной заселенностью*. Система с инверсной заселенностью является *неравновесной*. В неравновесных системах распределение частиц по энергетическим состояниям формально можно описать с помощью функции распределения (16.25), справедливой для равновесных систем, если в последней температуру T считать отрицательной, $T < 0$. Поэтому систему с инверсной заселенностью называют также *системой с отрицательной температурой*, а вещество — *активным веществом*.

Изменение плотности потока энергии излучения dJ после прохождения слоя среды толщиной dx определяется формулой

$$dJ = \frac{dW}{dt} dx, \tag{58.19}$$

где dW — приращение энергии излучения (58.15). Спектральная плотность потока энергии удовлетворяет уравнению

$$dJ = J\chi dx, \tag{58.20}$$

решение которого имеет вид

$$J = J_0 e^{\chi x}, \tag{58.21}$$

где J_0 — плотность потока энергии излучения на границе слоя $x = 0$. Излучение усиливается, если $\chi > 0$. Формула (58.21) не учитывает, однако, потери электромагнитной энергии в веществе. Их можно учесть феноменологически, вводя в уравнение (58.20) *коэффициент поглощения* $\varkappa$ из-за потерь энергии в веществе, не связанных с данным переходом $1 \to 2$:

$$dJ = \chi J\, dx - \varkappa J\, dx. \tag{58.22}$$

Решение уравнения (58.22) имеет вид

$$J = J_0 e^{(\chi - \varkappa)x}. \tag{58.23}$$

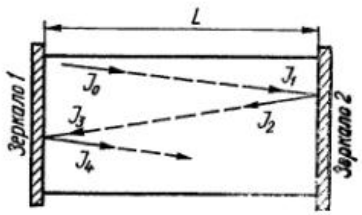


Рис. 58.4

Излучение усиливается, если индуцированное излучение компенсирует (с избытком) потери электромагнитного излучения в веществе, $\chi - \varkappa > 0$.

58.1.3. Принцип обратной связи. Резонатор. Одной из основных задач квантовой электроники является поиск и разработка методов создания неравновесных атомных систем с инверсной заселенностью. Опыт показывает, что в обычных условиях $(\chi - \varkappa)L \ll 1$, где L — толщина слоя вещества с инверсной заселенностью (активного вещества). Так, для усиления излучения в кристалле рубина в 10^2 раз он должен иметь толщину $L \simeq 5 \cdot 10^3$ м. На практике для получения большого коэффициента усиления в генераторах излучения используют *принцип обратной связи*, при котором усиленный сигнал постоянно возвращается в усилитель, где он снова усиливается. В случае оптического квантового генератора такой системой является открытый *резонатор* (рис. 58.4). Здесь активное вещество заключено между двумя зеркалами, находящимися одно от другого на расстоянии L. Излучение J_0, пройдя вещество, усиливается и становится равным $J_1 = J_0 e^{L(\chi - \varkappa)}$. После отражения от зеркала 2 плотность потока излучения уменьшается в r раз, где r — коэффициент отражения зеркала, и становится равной $J_2 = r J_0 e^{L(\chi - \varkappa)}$. Далее, пройдя путь L в обратном направлении, излучение снова усилится, $J_3 = r J_0 e^{2L(\chi - \varkappa)}$, а после отражения от зеркала 1 станет равным $J_4 = r^2 J_0 e^{2L(\chi - \varkappa)}$, и т. д. При конкретных вычислениях удобно считать, что потери электромагнитной энергии происходят не скачком при отражении от зеркал, а непрерывно при распространении света в веществе. В этом случае распространение плотности потока электромагнитной энергии в активном веществе резонатора описывается соотношением

$$J = J_0 e^{(\chi - \varkappa - \varkappa_3)x}, \tag{58.24}$$

которое отличается от (58.23) наличием дополнительного коэффициента поглощения $\varkappa_3 = (1 - r)/L$, учитывающего потери при отражении от зеркал.

На практике для отвода излучения одно из зеркал делается полупрозрачным с коэффициентом отражения $R < r$, а другое — близким к идеальному, $r \simeq 1$. Тогда распространение потока энергии описывается формулой

$$J = J_0 e^{(\chi - \chi_{пор})x}, \qquad (58.25)$$

где

$$\chi_{пор} = \varkappa + \frac{1-R}{2L} \qquad (58.26)$$

— *пороговый коэффициент усиления*. Величина $\varkappa_p = \frac{1-R}{2L}$ есть коэффициент поглощения, учитывающий потери в системе активное вещество — резонатор, связанные с выходом излучения из резонатора. При $\chi = \chi_{пор}$ в системе компенсируются потери энергии. Если поглощение в веществе мало по сравнению с потерями излучения на выходе из резонатора, $\varkappa \ll (1 - R)/2L$, то пороговый коэффициент (58.26) не зависит от свойств активного вещества и определяется только параметрами резонатора. Из (58.25) следует, что при $\chi > \chi_{пор}$ плотность потока энергии увеличивается непрерывно до некоторой величины, определяемой эффектом насыщения. После этого поток энергии уменьшается и становится стационарным при $\chi = \chi_{пор}$. При $\chi < \chi_{пор}$ поток электромагнитной энергии затухает.

Резонатор характеризуют также величиной

$$\Delta N_{пор} = \frac{\varkappa}{\sigma} + \frac{1-R}{2\sigma L}, \qquad (58.27)$$

называемой *пороговой населенностью*. Здесь $\sigma = \sigma_{21}$ — сечение индуцированного излучения (58.17). Оптический квантовый генератор будет усиливать электромагнитное излучение, если выполняется условие

$$\Delta N > \Delta N_{пор}, \qquad (58.28)$$

где $\Delta N = N_2 - N_1$ (при $g_1 = g_2$) — избыток активных атомов в состоянии 2 по сравнению с числом этих атомов в нижележащем состоянии 1 (рис. 58.3).

58.2. Квантовые генераторы

58.2.1. Молекулярный генератор — мазер. Молекулярный генератор или *мазер* (от англ. microwave amplification by stimulated emission of radiation — микроволновое усиление посредством индуцированного излучения) есть усилитель микроволн, работающий на принципе индуцированного излучения.

Мазер представляет собой систему с инверсной заселенностью [58.1]. Одним из первых методов создания таких систем является метод сортировки молекул в различных энергетических состояниях с помощью неоднородного электростатического поля (Н. Г. Басов, А. М. Прохоров, Ч. Таунс, 1954—1955). В качестве рабочего вещества в мазерах используются аммиак, синильная кислота, формальдегид и др. В приборе Басова и Прохорова в качестве генератора сантиметровых волн ($\lambda = 1{,}27$ см) использовались квантовые переходы между дискретными энергетическими уровнями в молекуле аммиака NH_3. Стабильность такого мазера очень высока. Так, молекулярные часы, построенные по его принципу, имеют точность хода 1 с за 300 лет. Аналогично работает атомный генератор на пучке атомов водорода ($\lambda = 21$ см).

Среда с инверсной заселенностью может быть создана путем сортировки магнитных атомов (серебро, рубидий) с помощью неоднородного магнитного поля. Главным конструктивным элементом мазера является резонатор [58.1.3], в котором при определенных условиях возникает индуцированное излучение. Из резонатора высокочастотная мощность отводится к потребителю через волновод.

58.2.2. Оптический квантовый генератор — лазер. Оптический квантовый генератор или *лазер* (от англ. light amplification by stimulated emission of radiation — усиление света с помощью индуцированного излучения) представляет собой квантовый генератор в оптической области спектра. Лазер работает по принципу индуцированного излучения [58.1].

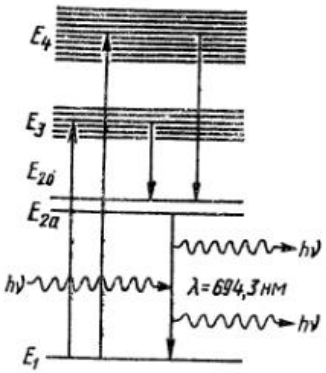


Рис. 58.5

Активными веществами в лазерах могут быть различные диэлектрические кристаллы, стекла, газы, полупроводники и плазма. В первом оптическом квантовом генераторе в качестве активного вещества использовался кристалл рубина, представляющий собой оксид алюминия (III), в кристаллической решетке которого некоторые атомы алюминия замещены ионами хрома, Al_2O_3: Cr^{3+}. В рубине содержится примерно 0,05 % хрома, что составляет порядка $1{,}6 \cdot 10^{19}$ ионов хрома в 1 $см^3$. Ионы хрома являются активными атомами в рубиновом лазере. Так как ионов хрома мало, то они практически не взаимодействуют между собой и их энергетический спектр сохраняет некоторые черты энергетического спектра изолированных атомов [58.1.1] (рис. 58.5). Уровень E_1 основной, уровни E_2, E_3, E_4 возбужденные. Уровень E_2 состоит из двух близких узких уровней $E_{2а}$ и $E_{2б}$. При переходе с них на основной уровень E_1 излучается красный свет с длинами волн $\lambda_а = 694{,}3$ нм и $\lambda_б = 692{,}9$ нм. Более интенсивной является линия $\lambda_а$. Только она и усиливается при работе лазера. Линии E_3 и E_4 представляют собой довольно широкие полосы в 100 нм. Переходы с этих полос в основное состояние E_1 сопровождаются излучением зеленого и голубого света соответственно: $\lambda_4 = 410$ нм, $\lambda_3 = 560$ нм.

Для работы рубинового лазера необходимо создать инверсную заселенность [58.1] между уровнями E_1 и E_2. Это достигается с помощью освещения кристалла рубина мощной вспышкой света. Такой процесс называют *оптической накачкой*. Лампа-вспышка переводит атомы хрома из основного состояния E_1 в возбужденные E_3 и E_4 (рис. 58.5). Из-за значительной ширины этих состояний 10—15 % лучистой энергии лампы-вспышки затрачивается полезно на возбуждение атомов хрома. Время жизни атомов хрома в состояниях E_3 и E_4 составляет $\sim 10^{-8}$ с. За это время они переходят на один из подуровней $E_{2а}$, $E_{2б}$ уровня E_2 без излучения. Выделяемая при таком переходе энергия идет на возбуждение колебаний кристаллической решетки рубина. Уровень E_2

метастабилен. Время жизни атома на нем $\sim 10^{-3}$ с, что значительно больше характерных атомных времен ($\sim 10^{-8}$—10^{-9} с). Это позволяет накапливать атомы на уровне E_2 и создавать в результате инверсную заселенность.

О лазере, работающем по описанному принципу, говорят, что он работает по трехуровневой энергетической схеме. Схема устройства такого лазера показана на рис. 58.6. Рабочим элементом лазера является цилиндр *1* диаметром $\sim$ 1 см и длиной $\sim$10 см из кристалла рубина. Резонансной системой являются зеркала *2* и *3*, одно из которых полупрозрачно. Расстояние между зеркалами много больше длины волны излучения. Поэтому выходящие из резонатора волны *4* характеризуются высокой степенью параллельности. Волны *5*, распространяющиеся под углом к оси резонатора, выходят через боковую поверхность стержня. Источником накачки является лампа-вспышка *6*. Свет от нее прямо и от отражателя *7* попадает на рубиновый стержень *1*.

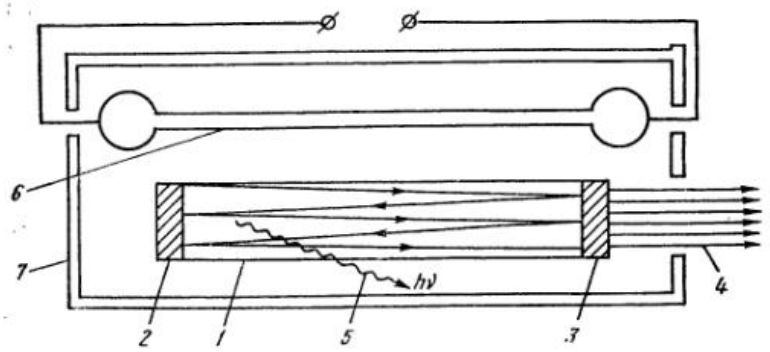


Рис. 58.6

Мощность излучения простого рубинового лазера достигает 10^6 Вт с 1 см^2 торца цилиндра, расходимость пучка не превышает 0,5°. Для сравнения, мощность излучения поверхности Солнца ($T = 6000$ °С) в спектральном диапазоне 0,01 нм около длины волн $\lambda = 500$ нм составляет всего 10^{-1} Вт с 1 см^2.

Одним из недостатков лазера является то, что более 50 % энергии лампы-вспышки идет на нагревание рубинового цилиндра. При $T \sim$ $\sim$ 1000 °С такой лазер перестает работать. Поэтому его нужно охлаждать.

Более экономичным в энергетическом отношении является лазер, работающий по четырехуровневой схеме (рис. 58.7). Если выполняется условие $E_4 - E_1 \gg kT$, то при термодинамическом равновесии заселенность уровня E_2 очень мала. Поэтому для получения инверсной заселенности уровней E_4 и E_3 достаточно перевести из основного состояния E_1 в состояние E_3 незначительное число атомов. По четырехуровневой схеме работает лазер с активным веществом из флюорита кальция CaFr с примесью ионов диспрозия Dy^{2+}, имеющего энергетический спектр рис. 58.7. Такие лазеры работают непрерывно. Мощность света в каждом из импульсов, следующих с большой частотой (до нескольких кГц), достигает 1—2 МВт. Длина волны лазера на флюорите кальция с диспрозием $\lambda = 2{,}36$ мкм.

В *лазерах на твердом теле* употребляется также неодимовое стекло. Активность среды создается ионами неодима Nd^{3+}. Неодимовое стекло генерирует инфракрасное излучение с длиной волны $\lambda = 1{,}06$ мкм.

Кроме лазеров на твердом теле большое распространение получили *газовые лазеры*. Энергетический спектр газов при низких давлениях почти точно совпадает с энергетическим спектром изолированных атомов [58.1.1]. Газы характеризуются высокой оптической однородностью и малой плотностью. Это позволяет в резонаторах использовать большие расстояния между зеркалами [58.1.3] и получить излучение, которое характеризуется острой направленностью, высокой монохроматичностью и стабильностью частоты. Так, в гелий-неоновом лазере расходимость лучей составляет всего 1—2′, а иногда достигает даже теоретического предела $\lambda/D \sim 20''$. Относительная ширина спектральных линий в излучении такого газового лазера составляет $\delta\omega/\omega \sim 10^{-11}$—$10^{-12}$, а сама частота ω поддерживается с относительной точностью $\sim 10^{-14}$. При малой плотности газа выходная мощность в непрерывном режиме составляет от 10 до 200—300 мВт. Это большая мощность по сравнению с мощностью тепловых источников света. Лазер на CO_2 в непрерывном режиме (инфракрасная область) может генерировать мощность до 10 кВт, а ионный аргоновый лазер в видимой области — до 1 кВт. В импульсном режиме мощности этих лазеров сильно увеличиваются и достигает нескольких сотен киловатт.

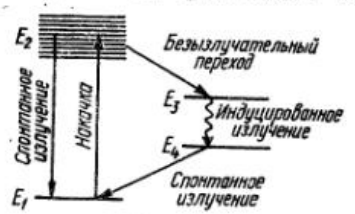


Рис. 58.7

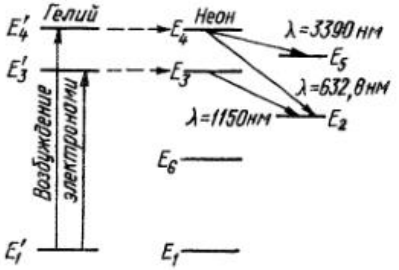


Рис. 58.8

Газовые лазеры отличаются от лазеров на твердом теле методами возбуждения и подвода энергии накачки. Метод оптической накачки практически непригоден для газовых лазеров из-за отсутствия полос поглощения в газах. Линии поглощения в атомарных газах при низких давлениях имеют очень малую ширину по сравнению с полосами поглощения в твердых телах. Оптическая накачка будет эффективной только в том случае, если линии излучения лампы-вспышки будут точно соответствовать линиям поглощения газа в лазере. Эту трудную задачу практически удалось решить только для цезиевого газового лазера, для которого найден высокоинтенсивный спектральный источник света, линии излучения которого совпадают с линиями поглощения паров цезия. Во всех остальных газовых лазерах для создания инверсной заселенности уровней пользуются методом возбуждения атомов электронными ударами.

Возбуждение атомов газа путем электронных ударов осуществляется в газовом разряде, в котором возникает плазма [27.3], состоящая из свободных электронов и ионов. Процесс передачи возбуждения и создания инверсной заселенности рассмотрим на примере гелий-неонового лазера, явившегося первым газовым лазером (Джаван и Беннет, 1960). На рис. 58.8 представлены упрощенные схемы энергетических уровней гелия и неона, играющих существенную роль в возникновении

инверсной заселенности. При возбуждении атомов неона в результате столкновения их с электронами газовой плазмы при определенном режиме разряда может возникнуть инверсная заселенность уровней E_2 и E_3. Однако заселенность уровней E_2 и E_4, а также уровней E_5 и E_4 остается неинверсной. Этому препятствует долгоживущий метастабильный уровень E_6, лежащий ниже короткоживущего уровня E_2. Заселенность уровня E_6 велика, и он пополняет уровень E_3. Атомы гелия, имеющиеся в смеси, характеризуются возбужденными уровнями E'_3 и E'_4, которые по энергии почти совпадают с уровнями E_3 и E_4 неона. При возбуждении атомов гелия электронными ударами они переходят в состояния E'_3 и E'_4, время жизни в которых очень велико, так как радиационный переход в основное состояние E'_1 запрещен. Возбужденные атомы гелия передают свою энергию невозбужденным атомам неона безызлучательным путем при взаимных столкновениях. В результате концентрации атомов неона на уровнях E_3 и E_4 возникает инверсная заселенность по отношению к уровням E_2 и E_4, а разность заселенностей уровней E_3 и E_2 также увеличивается в несколько раз.

Гелий-неоновый лазер может работать как в импульсном, так и в непрерывном режимах. Он генерирует красный свет ($\lambda = 632{,}8$ нм) и может генерировать инфракрасное излучение ($\lambda = 1150$ нм и $\lambda = 3390$ нм). В настоящее время генерация получена на 27 линиях неона, лежащих в области 0,6328—5,409 мкм. Мощность излучения на длине волны $\lambda = 1150$ нм достигает 10—15 МВт.

58.3. Голография

В настоящее время лазеры широко применяются в науке и технике. Наиболее перспективным представляется использование квантовых генераторов для передачи информации, скорость которой пропорциональна ширине полосы несущего сигнала. При переходе от радиочастотного диапазона к оптическому ширина полосы увеличивается более чем в 10^8 раз. Возможность концентрации мощного лазерного излучения в малом объеме позволяет применять его для обработки материалов, в медицине, для локации и других целей. Лазеры позволяют получать изображения предметов безлинзовым двухступенчатым методом, называемым *голографией*. В основе голографии лежит идея получения оптического изображения путем восстановления волнового фронта (Вольфке, 1920; Габор, 1947). Ее практическая реализация стала возможной лишь после изобретения лазера (Лейт и Упатниекс, 1962).

Голография — двухступенчатый процесс. На первом этапе регистрируется волна света, распространяющаяся от освещаемого предмета и несущая информацию о нем. На этом этапе изготовляется фотография предмета, называемая голограммой. С помощью голограммы на втором этапе восстанавливается рассеянная предметом волна и получается оптическое изображение. В отличие от обычной фотографии, содержащей информацию только об амплитуде рассеянной волны, голограмма содержит еще и дополнительные сведения о ее фазе. Это позволяет полностью восстанавливать волновое поле и по нему получать изображение предмета во всех подробностях, включая объем и цвет.

В простейшей и самой надежной схеме голографии источник, освещающий предмет, должен быть монохроматическим и когерентным. Поэтому для этих целей применяют лазер. Схема получения голограммы показана на рис. 58.9. Пучок от лазера разделяется на два пучка — предметный (*1*), направляемый на предмет (*2*), и опорный (*3*), отражаемый от плоского зеркала (*4*). Оба пучка направляются на фотопластинку (*5*) и там интерферируют между собой. Интерференционная картина фотографируется, и получается голограмма. Она представляет собой сложную интерференционную картину с мелкими деталями, не имеющую никакого сходства с предметом. Голограмма в закодированной форме содержит полную информацию об амплитудах и фазах рассеянной волны.

Если фотослой, на котором записана голограмма, тонкий, то ее называют *двухмерной*. Для восстановления изображения двухмерных голограмм можно использовать свет от ртутной лампы, так как в этом случае интерференция очень высоких порядков не возникает. Для получения изображения нет необходимости изготовлять позитивную голограмму. При освещении как позитивной, так и негативной голограмм одного и того же предмета получается одинаковое изображение.

Так как при экспонировании все части фотопластинки подвергаются действию света, рассеянного всеми точками предмета, то каждый

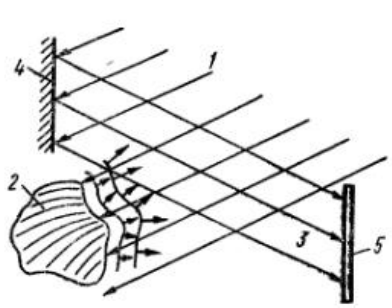


Рис. 58.9

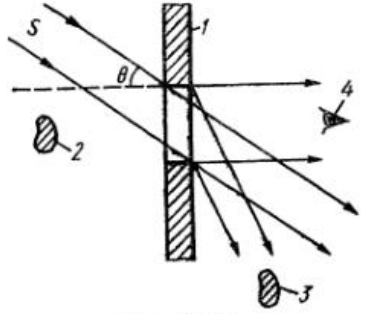


Рис. 58.10

малый участок голограммы содержит всю информацию о предмете. Чем меньшая часть полной голограммы используется для получения изображения предмета, тем меньше четкость изображения и ощущение объемности. Уменьшение размеров голограммы эквивалентно уменьшению площади диафрагмы в оптике.

Для получения хорошего качества изображения, т. е. для полного восстановления волны, закодированной в голограмме, последнюю (после проявления фотопластинки) необходимо освещать тем же когерентным источником света S, что и при записи голограммы (рис. 58.10). Восстановленная в голограмме (*1*) волна света распространяется в обе стороны от нее. Расходящаяся волна образует мнимое изображение предмета (*2*), а сходящаяся — действительное изображение (*3*). Для наблюдения мнимого изображения глаз (*4*) нужно поместить в пучок, распространяющийся перпендикулярно голограмме. Действительное изображение при освещении голограммы под углом θ будет видно под углом 2θ. Его можно увидеть, если поместить глаз на расстояние большее, чем расстояние голограммы от предмета.

Если на голограмме запечатлена группа предметов, то мнимое изображение полностью без каких-либо искажений воспроизводит взаимное расположение реальных предметов в пространстве и сами предметы. Для того чтобы заглянуть за предмет, достаточно сместить в сторону глаз, как в реальной ситуации.

На одной фотопластинке можно последовательно закодировать несколько предметов, расположенных в одном и том же месте пространства, если при записи изменять направление опорного пучка (во избе-

жание наложения изображений при воспроизведении). Можно получать цветное изображение, освещая предмет тремя источниками света (как для предметных, так и опорных пучков) с различными длинами волн, подобранными так, чтобы передать цвет предмета. При этом запись ведется на одну голограмму, а воспроизведение достигается использованием тех же пучков света, посылаемых на голограмму, помещенную в то же место, что и при записи.

Кроме двухмерных возможно получение *трехмерных* или *объемных голограмм* (Ю. Н. Денисюк, 1962). Фотослой (рис. 58.11, *1*) толщиной 15—20 мкм (30—40 длин волн зеленого света) делают прозрачным. Это позволяет освещать предмет (*2*) через пластинку (*3*). При таком расположении источника света S и предмета опорная монохроматическая плоская волна от лазера, пройдя через фотопластинку и отразившись от предмета, интерферирует с рассеянной волной, распространяющейся ей навстречу. Интерференция, образованная стоячими волнами [39.4], происходит в слое фотоэмульсии. Восстановление волны, рассеянной предметом, производится расходящимся пучком белого света. Так как объемная голограмма представляет собой большое число расположенных одна за другой в толще фотоэмульсии двухмерных голограмм (слоев серебра), то при многолучевой интерференции происходит усиление тех волн от каждой двухмерной голограммы, длина которых равна длине волны излучения лазера в направлениях, где разность фаз между волнами от соседних плоских голограмм равна 2π. Изображение имеет тот же цвет, что и цвет луча лазера. Объемная голограмма производит монохроматизацию белого света, которым она освещена.

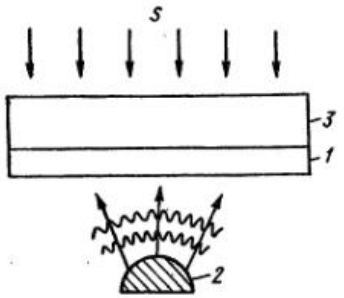


Рис. 58.11

Объемные голограммы позволяют получать цветные изображения предметов. Для этого запись ведется с помощью трех лазеров с различными длинами волн, подобранными так, чтобы передать натуральный цвет предмета. При освещении такой голограммы белым светом происходит наложение изображений предмета, записанных в трех цветах, и возникает одно цветное изображение.

Голография находит широкое применение в науке, технике и в искусстве. Она позволяет наблюдать за развитием какого-либо процесса во времени и пространстве.

ЧАСТЬ VI

АТОМНАЯ ФИЗИКА

Глава XIV

Элементы квантовой механики

59. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Квантовая механика есть теория физических явлений и процессов микромира. Под *микромиром* понимают совокупность объектов, линейные размеры которых порядка 10^{-6}—10^{-13} см. Квантовая механика описывает свойства атомов и молекул, механизмы излучения и поглощения электромагнитных волн, природу периодического закона, движение частиц во внешних полях и др. Принципы, лежащие в основе квантовой механики, являются обобщением экспериментальных фактов о квантовании, т. е. дискретных значениях некоторых физических величин, характеризующих свойства объектов микромира.

59.1. Принцип соответствия

Согласно **принципу соответствия** (Бор, 1923) между квантовой и классической теориями существует формальная аналогия. Квантовая теория в предельном случае пренебрежимо малых изменений (квантовых скачков) физических величин должна совпадать с соответствующей классической теорией или, более строго, асимптотически в пределе больших квантовых чисел [62.2.2] результаты квантового и классического описания данного явления должны совпадать. Другими словами, если в процесс вовлечено много квантов, то уравнения квантовой физики должны совпадать с классическими уравнениями для усредненных величин.

59.2. Принцип дополнительности

Предсказания квантовой механики являются вероятностными. Для их интерпретации используют представления и терминологию классической физики. Согласно **принципу дополнительности** (Бор, 1927) физические свойства микроскопических систем на языке квантовой теории описываются парами дополнительных переменных, которые не могут быть одновременно измерены с одинаковой точностью, превышающей величину элементарного кванта действия, равного постоянной Планка $\hbar$ (23.29). Физическая причина этого заключается

ь том, что измерительный прибор так же, как и изучаемая с его помощью микроскопическая система, является квантовым объектом, удовлетворяющим соотношениям неопределенности [61.1].

59.3. Принцип причинности

Принцип причинности устанавливает временную очередность протекания и взаимную связь событий в данной системе. Согласно этому принципу состояние физической системы в какой-либо определенный момент времени предопределяет ее состояние для любого последующего момента. Несмотря на вероятностный характер описания объектов микромира, квантовые процессы также причинно связаны между собой (детерминированы). Они могут быть описаны на основе уравнений движения, однозначно определяющих волновые функции [62.1.1] или любые другие эквивалентные им величины. При этом начальное состояние системы полностью определяет всю последующую ее эволюцию.

59.4. Принцип сохранения числа частиц

В нерелятивистской квантовой теории, изучающей атомные явления при скоростях v, малых по сравнению со скоростью света c, $v \ll c$, и энергиях, меньших порога образования электрон-позитронных пар, $E < 2m_e c^2 \simeq 1$ МэВ, выполняется **закон сохранения числа частиц**. В релятивистской квантовой механике ($v \sim c$ и $E \gtrsim 2m_e c^2$) закон сохранения числа частиц нарушается. Динамические состояния системы различаются не только обычными квантовыми характеристиками, но также видом и числом частиц. Для математически корректного построения теории привлекается концепция квантового поля [78.2].

59.5. Принцип суперпозиции состояний

Согласно **принципу суперпозиции** состояний: 1) если какая-либо система может находиться в состояниях, описываемых волновыми функциями ψ_1 и ψ_2, то она может находиться и в состоянии, которое описывается волновой функцией

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2, \tag{59.1}$$

где a_1 и a_2 — любые комплексные числа;

2) волновые функции ψ и $a\psi$, где a — любое не равное нулю комплексное число, соответствуют одному и тому же состоянию системы.

60. ВОЛНЫ ВЕЩЕСТВА

60.1. Волна де Бройля

В квантовой теории постулируется, что *любые объекты микромира* (электрон, протон, атом, молекула и т. д.) *наряду с корпускулярными свойствами обладают также и волновыми*. Соотношения между динамическими переменными материальной частицы и величинами, характеризующими соответствующую ей плоскую монохроматическую волну [43.2.1], аналогичны соотношениям для фотона — кванта света (56.1) — (56.3) [56], используемым в оптике. Согласно де Бройлю

(1924) энергия E и импульс p частицы связаны с круговой частотой волны вещества ω и длиной волны λ соотношениями

$$E = \hbar\omega, \quad p = 2\pi\hbar/\lambda, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \tag{60.1}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка (23.29), $\mathbf{k}$ — волновой вектор частицы [39.3]. **Формула волны де Бройля**, описывающая свободное движение материальной частицы, имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}, \tag{60.2}$$

где A — амплитуда плоской монохроматической волны, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор (1.1) частицы, t — время. Длина волны частицы с массой m, движущейся со скоростью v, равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{60.3}$$

Для нерелятивистской частицы с массой m и энергией E, движущейся в медленно меняющемся скалярном поле с потенциалом $V(r)$,

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E - V(r))}}. \tag{60.4}$$

Если релятивистская частица с зарядом e и массой покоя m_0 движется в ускоряющем электрическом поле с разностью потенциалов U, то ее длина волны λ определяется формулой

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2em_0U}}\left[1 + \frac{eU}{2m_0c^2}\right]^{-1/2}. \tag{60.5}$$

Для электронов (с учетом релятивистских поправок) эта формула принимает вид

$$\lambda_e = \frac{1{,}2264}{\sqrt{U}}(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6}U), \tag{60.6}$$

где λ_e измеряется в нанометрах [15.1], а U — в вольтах [26.2.4].

Порядок величины длин волн де Бройля дают следующие примеры:

1) $m = 10^{-3}$ кг, $v = 10^{-2}$ м/с, $\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-29}$ м;
2) $m = m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг, $U = 50$ В, $\lambda_e = 1{,}7 \cdot 10^{-10}$ м;
3) $m = m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, $U = 50$ В, $\lambda_p = 4{,}0 \cdot 10^{-12}$ м.

Свойства волны де Бройля.

1. Длина волны λ определяется формулой (60.1):

$$\lambda = 2\pi\hbar/p = 2\pi/k \tag{60.7}$$

однозначно во всех инерциальных системах отсчета.

2. Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} \geqslant c, \tag{60.8}$$

где $p = mv$ — импульс частицы с массой m, c — скорость света в вакууме, $E = mc^2$. Фазовая скорость v_ϕ волны де Бройля относится к числу принципиально ненаблюдаемых величин и имеет чисто символическое значение.

3. Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = v, \tag{60.9}$$

где v — скорость частицы.

4. Фазовая и групповая скорости связаны соотношением

$$v_{\phi} v_{\text{гр}} = c^2. \tag{60.10}$$

5. Радиус a стационарной орбиты водородоподобного атома по Бору [65.1] определяется целым числом длин волн де Бройля:

$$a = \frac{n\lambda}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{60.11}$$

Это выражение предполагает, что волна распространяется не в пространстве, а вдоль стационарной орбиты электрона и соответствует приближению геометрической оптики [47.3]. Оно оправдано, когда длина волны λ пренебрежимо мала по сравнению с радиусом орбиты a, $\lambda \ll a$.

60.2. Экспериментальное подтверждение волновой природы вещества

60.2.1. Опыты Дэвиссона и Джермера. В опытах Дэвиссона и Джермера (1926—1927) изучалось рассеяние электронов на кристаллах. Наблюдалась дифракционная картина, аналогичная дифракции рентгеновских лучей на монокристаллических объектах [39.5.2; 54] (рис. 60.1). Положение максимумов интенсивности I рассеянных электронов описывалось формулой Вульфа — Брэгга (1913)

$$2d\sqrt{n^2 - \cos^2\alpha} = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{60.12}$$

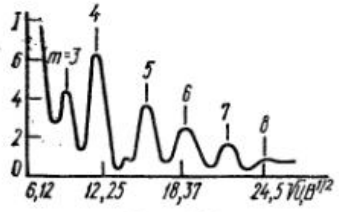


Рис. 60.1

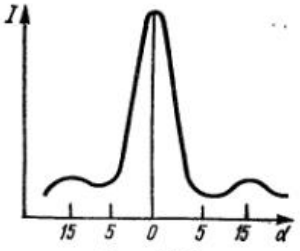


Рис. 60.2

где d — расстояние между соседними параллельными плоскостями, в которых расположены атомы кристалла, α — угол падения пучка электронов на кристалл, λ и n — длина волны и показатель преломления волны де Бройля [60.1]. Для больших значений m величина n близка к единице. На рис. 60.1 показана зависимость интенсивности I интерференционного отражения электронов монокристаллами никеля (Ni) от разности потенциалов U в (60.5) для $\alpha = 80°$ и $d = 0{,}203$ нм. Черточками показаны положения максимумов, вычисленные по формулам (60.12), (60.6).

60.2.2. Опыты Штерна. В опытах Штерна (1929) изучалась волновая природа нейтральных (незаряженных) атомов и молекул по их рассеянию на двухмерной дифракционной решетке. Было показано, что для тяжелых атомов дифракционная картина получается очень расплывчатой, так как в этом случае длина волны де Бройля (60.3) очень мала. Для легких атомов и молекул (H_2, He) наблюдается четкая дифракционная картина. На рис. 60.2 показан результат опыта Штерна, полученный при рассеянии гелия (He) на кристалле LiF. Здесь I — интенсивность рассеянных атомов гелия, падающих на кристалл под углом α. Максимумы интенсивности для данной волны наблюдаются в точках, где волны от дифракционных центров собираются в фазе.

60.3. Дуализм волна — частица

Волновые и корпускулярные представления о свойствах объекта микромира дополняют одно другое. Связь между волнами и частицами может быть истолкована только статистически: квадрат амплитуды волны в данном месте пространства определяет интенсивность волны и вероятность нахождения частицы в этом месте [62.1.1]. Вероятность нахождения частицы максимальна там, где амплитуда соответствующей ей волны максимальна.

61. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

61.1. Сопряженные переменные

Наличие волновых свойств у объектов микромира (микрообъектов) накладывает ограничения на применимость к ним понятия частицы (корпускулы), используемой в классической физике.

В классической механике частица с массой m в каждый момент времени характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$ и определенным импульсом $\mathbf{p} = m d\mathbf{r}(t)/dt$ [2.1.2; 3.3.1]:

$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}(t) + d\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t) + \frac{\mathbf{p}}{m}\, dt. \tag{61.1}$$

В квантовой механике импульс частицы p связан с длиной волны λ соотношением де Бройля (60.1). Так как длина волны λ есть функция формы волны, а не координаты точки, то импульс p не является в этом случае функцией координат. Это означает, что невозможно при таком описании микрообъекта одновременно определять его координату и импульс. Физическая причина этого заключается в том, что измерительный прибор привносит неконтролируемое воздействие на микрообъект. Точность измерения определяется **соотношением неопределенности Гейзенберга** (1927), которое для канонически сопряженных переменных q_i и p_i, где $i = 1, 2, \ldots, R$ (R — размерность пространства) [7], имеет вид

$$\Delta q_i \Delta p_i \geqslant \frac{\hbar}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, R, \tag{61.2}$$

где

$$\Delta q_i = \sqrt{\langle q_i^2 \rangle - \langle q_i \rangle^2}, \qquad \Delta p_i = \sqrt{\langle p_i^2 \rangle - \langle p_i \rangle^2}, \tag{61.3}$$

— средние квадратичные отклонения переменных q_i и p_i; $\hbar$ — постоянная Планка (23.29). Величины $\langle q_i^2 \rangle$, $\langle q_i \rangle^2$, $\langle p_i^2 \rangle$ и $\langle p_i \rangle^2$ представляют

собой статистические распределения переменных q_i, p_i и их квадратов, определяемые выражениями [7]

$$\langle q_i\rangle = \int \Psi^* q_i \Psi\, dq = -\frac{\hbar}{i}\int \Phi^* \frac{\partial}{\partial p_i}\Phi\, dp,$$
$$\langle p_i\rangle = \int \Phi^* p_i \Phi\, dp = \frac{\hbar}{i}\int \Psi^* \frac{\partial}{\partial q_i}\Psi\, dq,$$
$$\langle q_i^2\rangle = \int \Psi^* q_i^2 \Psi\, dq = \hbar^2 \int \Phi^* \frac{\partial^2}{\partial p_i^2}\Phi\, dp, \qquad (61.4)$$
$$\langle p_i^2\rangle = \int \Phi^* p_i^2 \Phi\, dp = -\hbar^2 \int \Psi^* \frac{\partial^2}{\partial q_i^2}\Psi\, dq.$$

Здесь $\Psi = \Psi(q_1, q_2, \ldots, q_R, t)$ — волновая функция [62.1.1] микрообъекта (квантовой системы) в R-мерном q-пространстве в данный момент времени t, $\Phi = \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_R, t)$ — волновая функция квантовой системы в p-пространстве в данный момент времени t, $dq = dq_1 dq_2 \ldots dq_R$, $dp = dp_1 dp_2 \ldots dp_R$ — элементы объемов в q- и p-пространствах. Функции Ψ и Φ связаны между собой преобразованием Фурье

$$\Phi(p_1, \ldots, p_R, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{R/2}}\int \Psi(q_1, \ldots, q_R, t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{R} p_n q_n}\, dq, \qquad (61.5)$$

$$\Psi(q_1, \ldots, q_R, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{R/2}}\int \Phi(p_1, \ldots, p_R, t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{R} p_n q_n}\, dp.$$

По определению величина $\Psi^*\Psi\, dq$ есть вероятность найти обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_R$ в областях $(q_i, q_i + dq_i)$, а $\Phi^*\Phi\, dp$ — вероятность найти обобщенные импульсы $p_1, \ldots, p_R$ в областях $(p_i, p_i + dp_i)$.

Отклонения Δq_i и Δp_i в (61.2) не есть обычные ошибки измерений, источником которых является несовершенство измерительных приборов и методик измерения, не позволяющее с идеальной (абсолютной) точностью фиксировать измеряемые величины. Отклонения Δq_i и Δp_i обусловлены квантовомеханической природой микрообъектов.

Для сопряженных переменных координата — импульс трехмерного пространства соотношение неопределенности (61.2) принимает вид

$$\Delta x\, \Delta p_x \geqslant \hbar/2,\ \Delta y\, \Delta p_y \geqslant \hbar/2,\ \Delta z\, \Delta p_z \geqslant \hbar/2, \qquad (61.6)$$

где Δx, Δy, Δz — неопределенности трех пространственных координат, Δp_x, Δp_y, Δp_z — неопределенности проекций импульса $\mathbf{p}$ микрообъекта на координатные оси x, y, z.

Для сопряженных переменных время — энергия соотношение неопределенности имеет вид

$$\Delta t\, \Delta E \gtrsim \hbar, \qquad (61.7)$$

где $\Delta E = \Delta(E_2 - E_1)$ — разброс разности энергий двух состояний при переходе системы из состояния с энергией E_2 в состояние с энергией E_1, Δt — продолжительность того отрезка времени, на котором этот переход произошел, но не продолжительность самого перехода. В случае перехода электрона в атоме из состояния E_2 в состояние E_1 вследствие конечной ширины энергетических уровней возбужденного атома $\Delta E \neq 0$, а $\Delta t = \tau$ — время жизни атома в возбужденном состоянии относительно данного перехода из E_2 в E_1.

Соотношения неопределенности (61.2), (61.6) и (61.7) являются универсальными. Они выполняются при всякой попытке измерения точного положения или точного импульса микрообъекта. Уточнение положения микрообъекта сказывается на увеличении неточности в значении импульса, и наоборот. Порядок неточности измеряемых величин дают следующие примеры.

1. Макрообъект: масса $m = 1$ г, неопределенность скорости вдоль оси x равна $\Delta v_x = 10^{-4}$ см/с, неопределенность координаты $\Delta x = 10^{-4}$ см. Тогда $\Delta p_x = m\Delta v_x = 10^{-4}$ г · см/с и $\Delta x \Delta p_x = 10^{-15}$ Дж · с $\gg h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ Дж · с. Вывод: волновую природу можно не учитывать.

2. Микрообъект: масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ г, скорость электрона по боровской орбите $\Delta v_x = 10^8$ см/с, размеры атома $\Delta x = 10^{-8}$ см. Тогда $\Delta p_x = m\Delta v_x = 9{,}1 \cdot 10^{-20}$ г · см/с и $\Delta x\, \Delta p_x = 9{,}1 \cdot 10^{-35}$ Дж · с $< h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Вывод: волновую природу электрона в атоме нужно учитывать.

В пределе очень больших энергий длина волны де Бройля λ согласно (60.3) — (60.5) будет очень мала. В оптике при малых длинах волн волновыми свойствами света можно пренебречь и пользоваться понятием светового луча [46; 47] или приближением геометрической оптики [47.3]. В квантовой механике при малых λ волновые свойства микрообъектов несущественны, и их движение в этом случае можно описывать траекторией [2.1.2].

61.2. Процесс измерения

Процесс измерения предполагает взаимодействие исследуемой системы с измерительным прибором. Фиксация определенного значения измеряемой величины происходит по изменению состояния прибора в результате воздействия системы на прибор. При этом система сама изменяет свое состояние под воздействием прибора. В случае макроскопических явлений возмущающее действие прибора на исследуемую систему можно сделать пренебрежимо малым или учесть с достаточной для поставленных целей точностью. Поскольку в макроскопических масштабах все изменения динамических величин (координаты, импульса, энергии, момента импульса и т. д.) в результате воздействия прибора на систему пренебрежимо малы, то **классическая механика постулирует:** 1) *все динамические переменные физической системы могут быть одновременно измерены с произвольно малой ошибкой*; 2) *динамическое состояние системы в данный момент времени определяется точным заданием всех этих переменных в этот момент времени.*

Согласно квантовомеханическому описанию нельзя точно предсказать состояние физической системы после процесса измерения. Известна лишь вероятность того, что система находится в некоторых динамических состояниях, соответствующих тем или иным значениям ее параметров. Поэтому **квантовая механика постулирует:** 1) *непредсказуемое и неконтролируемое возмущение, испытываемое физической системой со стороны измерительного прибора в процессе измерения ее динамических переменных, всегда конечно*; 2) *для пар канонически сопряженных переменных выполняется соотношение неопределенности Гейзенберга* (61.2).

Измерительный прибор сам является квантовым объектом, и параметры, характеризующие его динамическое состояние, удовлетворяют соотношениям неопределенности.

Согласно квантовой механике результаты наблюдений физического явления, полученные в различных условиях опыта или в различных опытах, не могут быть совмещены в единой картине этого явления. Они должны рассматриваться как дополняющие одно другое. Переменные, которые согласно принципу неопределенности (61.2) не могут быть одновременно измерены со сколь угодно большой точностью, образуют попарно группу так называемых *дополнительных переменных*. Таковыми являются: координата и импульс, время и энергия. Переменные, которые могут быть измерены одновременно, называют *совместными*. К ним относятся, например, момент импульса микрообъекта и его проекция на одну из координатных осей. Квантовая механика устанавливает строгие правила, позволяющие определять, какие переменные для данной физической системы являются дополнительными, а какие совместными [62.2.2].

В квантовой механике деление полной энергии на кинетическую и потенциальную не имеет смысла, так как одна из этих величин зависит от импульса, а другая от координат. Здесь определяется и измеряется только полная энергия системы.

62. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

62.1. Правила квантования динамических переменных классической механики

62.1.1. Волновая функция. В соответствии с постулатом о наличии волновых свойств у объектов микромира [60.1] квантовая механика принимает без доказательства (a priori), что динамические состояния физической системы определяются функцией, описывающей распространение соответствующей волны вещества в пространстве и времени. Эту функцию принято называть *волновой функцией*. Волна де Бройля (60.2) является волновой функцией свободной частицы в нерелятивистском приближении. Она описывает свободное равномерное движение частицы в определенном направлении и с определенным импульсом $\mathbf{p}$ (60.1). В общем случае частицы, движущейся в силовых полях, волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ будет иметь вид, отличный от (60.2). Он определяется характером взаимодействия частицы с полем или другими частицами. Эволюция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ во времени задается волновым уравнением.

Волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ есть аналог траектории в классической механике [2.1.2]. Частица, сопоставляемая с волной, кроме случая волны де Бройля (60.1), не обладает ни определенным положением в пространстве, т. е. координатой $\mathbf{r}$, ни определенным импульсом $\mathbf{p}$ [61]. Можно говорить лишь о вероятности найти частицу в некоторой области пространства координат и импульсов.

Для заданного момента времени t вероятность найти частицу в элементе объема $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ пространства координат по определению равна

$$dW = \Psi^*(\mathbf{r}, t)\,\Psi(\mathbf{r}, t)\,d\mathbf{r} = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2\,d\mathbf{r}, \tag{62.1}$$

где $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ есть волновая функция, комплексно сопряженная функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Полная вероятность W найти частицу во всем конфигурационном пространстве равна единице, т. е.

$$W = \int dW = \int |\Psi|^2\,d\mathbf{r} = 1. \tag{62.2}$$

Это соотношение определяет *условие нормировки волновой функции* $\Psi(\mathbf{r}, t)$. О волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ говорят, что она задана в координатном представлении.

Для заданного момента времени t вероятность $d\widetilde{W}$ найти частицу в элементе объема $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$ пространства импульсов определяется равенством

$$d\widetilde{W} = \Phi^*(\mathbf{p}, t)\,\Phi(\mathbf{p}, t) = |\Phi(\mathbf{p}, t)|^2\,d\mathbf{p}, \tag{62.3}$$

аналогичном (62.1), где $\Phi(\mathbf{p}, t)$ есть волновая функция частицы в импульсном представлении. Волновые функции Ψ и Φ в координатном и импульсном представлениях связаны между собой преобразованиями Фурье

$$\Phi(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \Psi(\mathbf{r}, t)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\,d\mathbf{r},$$
$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \Phi(\mathbf{p}, t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}\,d\mathbf{p}, \tag{62.4}$$

где интегрирование осуществляется по всему конфигурационному (импульсному) пространству. Ясно, что выполняется при этом равенство

$$\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2\,d\mathbf{r} = \int |\Phi(\mathbf{p}, t)|^2\,d\mathbf{p}. \tag{62.5}$$

Физический смысл волновой функции накладывает на нее определенные (аналитические) ограничения. Она должна быть однозначной, конечной и непрерывной функцией своих переменных.

Функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$, удовлетворяющая условию

$$\int |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2\,d\mathbf{r} < \infty, \tag{62.6}$$

называется *квадратично интегрируемой*. В соответствии с определениями элементарных вероятностей dW (62.1) и $d\widetilde{W}$ (62.3) в квантовой механике рассматриваются только квадратично интегрируемые волновые функции.

Зная волновую функцию частицы в координатном или импульсном представлении, можно вычислить средние значения ее координаты $\langle\mathbf{r}\rangle$ и импульса $\langle\mathbf{p}\rangle$ в заданный момент времени t:

$$\langle\mathbf{r}\rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{r}\Psi(\mathbf{r}, t)\,d\mathbf{r} = \int \Phi^*(\mathbf{p}, t)\,i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}\Phi(\mathbf{p}, t)\,d\mathbf{p},$$
$$\langle\mathbf{p}\rangle = \int \Phi^*(\mathbf{p}, t)\,\mathbf{p}\Phi(\mathbf{p}, t)\,d\mathbf{p} = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t)\,\frac{\hbar}{i}\,\nabla\Psi(\mathbf{r}, t)\,d\mathbf{r}, \tag{62.7}$$

где использованы обозначения:

$$\nabla_{\mathbf{p}}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial p_x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial p_z}\,\mathbf{k},$$
$$\nabla\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\mathbf{k}. \tag{62.8}$$

Здесь x, y, z — декартовые координаты частицы, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; p_x, p_y, p_z — проекции импульса $\mathbf{p}$ частицы на координатные оси x, y, z. Величины $\langle \mathbf{r} \rangle$ и $\langle \mathbf{p} \rangle$ есть средние значения измерений координаты $\mathbf{r}$ и импульса $\mathbf{p}$, выполненных для очень большого числа частиц (независимо одна от другой) и описываемых одной и той же волновой функцией Ψ в конфигурационном пространстве или, что эквивалентно, волновой функцией Φ в импульсном пространстве. Согласно (62.7) волновые функции Ψ и Φ являются эквивалентными представлениями одного и того же динамического состояния системы. Квантовая механика может быть сформулирована в самом общем виде независимо от конкретного представления состояний микроскопических объектов.

62.1.2. Операторы. В квантовой механике всем динамическим переменным классической механики ставятся в соответствие *линейные операторы*, действующие в функциональном пространстве волновых функций. Если указано правило, по которому каждой функции Ψ в некотором функциональном пространстве однозначно ставится в соответствие другая функция Ψ' в том же пространстве, то говорят, что Ψ' есть функция, полученная в результате действия некоторого *оператора* $\hat{A}$ из этого пространства на функцию Ψ, и записывают

$$\Psi' = \hat{A}\Psi. \tag{62.9}$$

Оператор $\hat{A}$ называется *линейным*, если выполняется условие

$$\hat{A}(\lambda_1\Psi_1 + \lambda_2\Psi_2) = \lambda_1(\hat{A}\Psi_1) + \lambda_2(\hat{A}\Psi_2), \tag{62.10}$$

где λ_1, λ_2 — любые комплексные числа. Для линейных операторов справедливы следующие алгебраические операции:

1) умножение оператора на постоянное число c

$$\hat{S} = cA, \quad \hat{S}\Psi = (c\hat{A})\Psi = c(\hat{A}\Psi); \tag{62.11}$$

2) сложение операторов

$$\hat{S} = \hat{A} + \hat{B}, \quad \hat{S}\Psi = \hat{A}\Psi + \hat{B}\Psi; \tag{62.12}$$

3) умножение оператора на оператор

$$\hat{S} = \hat{A}\hat{B}, \quad \hat{S}\Psi = (\hat{A}\hat{B})\Psi = \hat{A}(\hat{B}\Psi) = \hat{A}\Psi^*, \quad \Psi^* = \hat{B}\Psi. \tag{62.13}$$

Произведение двух операторов в общем случае не коммутативно:

$$\hat{A}\hat{B}\Psi \neq \hat{B}\hat{A}\Psi. \tag{62.14}$$

Разность $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называют *коммутатором*, а сумму $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ — *антикоммутатором* и обозначают

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad \{\hat{A}, \hat{B}\} \equiv \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}. \tag{62.15}$$

Коммутаторы являются квантовым аналогом классических скобок Пуассона [7.4] (7.24).

Примеры линейных операторов:

1) дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}; \tag{62.16}$$

2) комбинации дифференциальных операторов

$$\text{grad} \equiv \nabla \equiv \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{62.17}$$

$$\text{div grad} \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{62.18}$$

$$\text{grad div} = \text{rot rot} + \Delta, \tag{62.19}$$

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta; \tag{62.20}$$

3) операторы простого умножения на заданную функцию. Величины $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ под знаками интегралов в (62.7), являются операторами координаты и импульса. В координатном представлении оператор координаты $\hat{\mathbf{r}}$ есть оператор умножения на «классический» радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}, \tag{62.21}$$

а в импульсном представлении ему ставится в соответствие операция дифференцирования по проекциям импульса $\mathbf{p}$ (62.8):

$$\hat{\mathbf{r}} = i\hbar\nabla_{\mathbf{p}}. \tag{62.22}$$

В импульсном представлении оператор импульса $\hat{\mathbf{p}}$ есть «классический» импульс частицы:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}, \tag{62.23}$$

а в координатном

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \tag{62.24}$$

где операция градиента определена формулой (62.17) или в явном виде (62.8).

«Классической» энергии E в квантовой механике ставится в соответствие операция дифференцирования по времени:

$$E \to \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{62.25}$$

квадрату импульса $\mathbf{p}^2$ — операция (62.18):

$$\mathbf{p}^2 \to \hat{\mathbf{p}}^2 = -\hbar^2\nabla \cdot \nabla = -\hbar^2\Delta, \tag{62.26}$$

кинетической энергии —

$$\frac{p^2}{2m} \to \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot \nabla = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \tag{62.27}$$

моменту импульса —

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \to \hat{\mathbf{l}} = -i\hbar(\mathbf{r} \times \nabla), \tag{62.28}$$

и его составляющим вдоль осей x, y, z —

$$l_x = (yp_z - zp_y) \to \hat{l}_x = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$l_y = (zp_x - xp_z) \to \hat{l}_y = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad (62.29)$$

$$l_z = (xp_y - yp_x) \to \hat{l}_z = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Операторы $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$ не коммутируют между собой:

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar\hat{l}_z, \quad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hbar\hat{l}_x, \quad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hbar\hat{l}_y. \qquad (62.30)$$

Операторы $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ коммутируют:

$$[\hat{l}^2, \hat{l}_z] = 0, \quad \hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2. \qquad (62.31)$$

Функции Гамильтона H частицы [7.3] в квантовой механике соответствует *оператор Гамильтона* или *гамильтониан*

$$H = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \to \hat{H} = \hat{H}\left(\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i}\nabla, t\right), \qquad (62.32)$$

а функции Лагранжа L [7.2] — *оператор Лагранжа* или *лагранжиан:*

$$L = L(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \to \hat{L} = \hat{L}\left(\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i}\nabla, t\right). \qquad (62.33)$$

В общем случае конкретный вид оператора определяется представлением волновых функций, на которые он действует (см., например, (62.7)).

Пусть A есть динамическая переменная, соответствующая оператору $\hat{A}$, заданному в координатном представлении. Тогда *среднее значение* $\langle A \rangle$ определяется выражением

$$\langle A \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t)\,\hat{A}\,\Psi(\mathbf{r}, t)\,d\mathbf{r}, \qquad (62.34)$$

где $\Psi(\mathbf{r}, t)$ предполагается нормированной на единицу согласно (62.2). Аналогично записываются средние от динамических переменных по нормированным на единицу волновым функциям в других представлениях. Среднее значение $\langle A \rangle$ представляет собой среднее значение измеряемой физической величины и поэтому является действительным числом:

$$\langle A \rangle^* = \langle A \rangle. \qquad (62.35)$$

Из (62.34) и (62.35) следует общее ограничение на свойства операторов $\hat{A}$, используемых в квантовой механике:

$$\int \Psi^*(\hat{A}\Psi)\,d\mathbf{r} = \int (\hat{A}\Psi)^*\,\Psi\,d\mathbf{r}, \quad \hat{A}^+ = \hat{A}. \qquad (62.36)$$

Операторы, удовлетворяющие этому соотношению, называются *эрмитовыми*. Эрмитовые операторы, соответствующие наблюдаемым физическим величинам, называют *наблюдаемыми*.

62.2. Нерелятивистское волновое уравнение

62.2.1. Уравнение Шредингера. Основная задача квантовой механики состоит в том, чтобы по заданной в начальный момент времени t_0 волновой функции $\Psi(t_0)$ определить ее значение $\Psi(t)$ в любой последующий момент времени $t > t_0$. Эволюцию волновой функции со временем описывают волновым уравнением для $\Psi(t)$. Принципы квантовой механики [59] накладывают строгие ограничения на вид этого уравнения:

1) из принципа причинности [59.3] следует, что волновое уравнение для Ψ должно быть дифференциальным уравнением первого порядка относительно времени t;

2) из принципа суперпозиции состояний [59.5] следует, что уравнение для Ψ должно быть линейным и однородным;

3) из принципа соответствия [59.1] следует, что уравнение для Ψ должно приводить к классическим законам движения для усредненных по большому числу квантовых переходов динамических переменных.

В классической механике полная энергия E частицы определяется ее функцией Гамильтона H (62.32) [7.3]:

$$E = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \qquad (62.37)$$

В квантовой теории этой классической частице ставится в соответствие квантовая частица, динамическое состояние которой описывается волновой функцией $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Заменяя классические величины в (62.37) на операторы (62.25) и (62.32), действующие на $\Psi(\mathbf{r}, t)$, приходим к уравнению

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\left(\mathbf{r}, \frac{\hbar}{i}\nabla, t\right)\Psi(\mathbf{r}, t), \qquad (62.38)$$

которое называется *уравнением Шредингера* (1926). Поскольку формальная аналогия между классической и квантовой теориями не может рассматриваться как основа для строгого обоснования справедливости уравнения (62.38), квантовая механика постулирует, что уравнение Шредингера (62.38) есть динамическое уравнение для нерелятивистской квантовой частицы. Уравнение (62.38) задано, если определен гамильтониан $\hat{H}$.

В случае системы из N частиц гамильтониан $\hat{H}$ зависит от обобщенных координат q_j, операторов обобщенных импульсов $\hat{p}_j = -i\hbar\,\partial/\partial q_j$ и времени t:

$$\hat{H} = \hat{H}\left(q_1, \ldots, q_R; \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_R}; t\right), \qquad (62.39)$$

где $R = 3N$ — размерность конфигурационного пространства, и уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi \qquad (62.40)$$

определяет волновую функцию квантовой системы из N частиц как функцию координат q_j и времени t:

$$\Psi = \Psi(q_1, \ldots, q_R; t). \qquad (62.41)$$

Уравнение Шредингера является однородным. Поэтому его решения определены только с точностью до произвольного постоянного комплексного множителя. Условие нормировки волновой функции Ψ в начальный момент времени $t = t_0$ фиксирует абсолютное значение этого множителя, но его фаза остается произвольной. Последнее обстоятельство, однако, никак не сказывается на определении средних значений измеряемых физических величин, так как выражение (62.34) содержит как саму волновую функцию Ψ, так и комплексно-сопряженную ей величину Ψ^*.

62.2.2. **Интегралы движения и квантовые числа.** Уравнение, определяющее изменение во времени среднего значения $\langle A \rangle$ (62.34), следует из уравнения (62.40):

$$i\hbar \frac{d}{dt}\langle A\rangle = \langle [\hat{A}, \hat{H}]\rangle + i\hbar \left\langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle. \tag{62.42}$$

Для всякой наблюдаемой $\hat{A}$, коммутирующей с гамильтонианом:

$$[\hat{A}, \hat{H}] = 0 \tag{62.43}$$

и не зависящей явно от времени:

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} = 0, \tag{62.44}$$

следует закон сохранения среднего значения $\langle A \rangle$ во времени

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = 0. \tag{62.45}$$

По аналогии с классической механикой наблюдаемая $\hat{A}$ называется *интегралом движения*, если выполняется условие (62.45). Динамические переменные A и B, наблюдаемые которых $\hat{A}$ и $\hat{B}$ одновременно коммутируют с гамильтонианом $\hat{H}$:

$$[\hat{A}, \hat{H}] = [\hat{B}, \hat{H}] = 0, \tag{62.46}$$

называются *совместными переменными*. Если операторы этих переменных не коммутируют с гамильтонианом, то они называются *дополнительными переменными*. Для дополнительных переменных выполняется соотношение неопределенности Гейзенберга [61].

Квантовая система подобно классической считается полностью описанной, если найдены все ее интегралы движения. С каждым интегралом движения в квантовой механике связывают определенный параметр системы, называемый *квантовым числом*. Описать квантовую систему — значит указать все ее квантовые числа.

62.2.3. **Уравнение непрерывности.** *Плотностью вероятности* в квантовой механике называют величину

$$\rho = \Psi^*\Psi, \tag{62.47}$$

а вектор

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) \tag{62.48}$$

— *вектором плотности тока вероятности* или *плотностью потока вероятности*. В случае движения одной частицы m есть ее масса, а $\mathbf{j}$ определяет поток в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t, т. е. $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$. Так как комплексную волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$ частицы можно всегда представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)\, e^{\frac{i}{\hbar} S(\mathbf{r}, t)}, \tag{62.49}$$

где $A(\mathbf{r}, t)$ и $S(\mathbf{r}, t)$ — действительные функции времени и координат, то

$$\rho = A^2(\mathbf{r}, t),\ \mathbf{j} = \rho\nabla\left(\frac{1}{m} S\right) = A^2 \frac{\nabla S}{m}. \tag{62.50}$$

Если функция S не зависит от координат, то $\mathbf{j} = 0$.

Дивергенция потока $\mathbf{j}$ определяется гамильтонианом системы

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{i}{\hbar}[\Psi^*(\hat{H}\Psi) - \Psi(\hat{H}\Psi)^*]. \tag{62.51}$$

Это соотношение показывает, что уравнение Шредингера (62.40) эквивалентно *уравнению непрерывности*

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{62.52}$$

где ρ есть плотность вероятности (62.47). Из этого уравнения следует равенство

$$\frac{d}{dt}\int \Psi^*\Psi\, d\mathbf{r} = 0, \tag{62.53}$$

описывающее сохранение нормировки волновой функции с течением времени.

В случае волны де Бройля (60.2)

$$\mathbf{j} = |A|^2 \frac{\mathbf{p}}{m}. \tag{62.54}$$

62.2.4. **Частица в поле действия скалярного потенциала.** Функции Гамильтона [7.3]

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \tag{62.55}$$

описывающей движение классической частицы с массой m и импульсом $\mathbf{p}$ в поле действия скалярного потенциала $V(\mathbf{r})$, в квантовой механике соответствует оператор

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}). \tag{62.56}$$

Уравнение Шредингера (62.38) для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$, описывающей свойства квантовой частицы в поле действия скалярного потенциала $V(\mathbf{r})$, имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}, t). \tag{62.57}$$

Это уравнение эквивалентно системе двух вещественных уравнений для функций $A(\mathbf{r}, t)$ и $S(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta A}{A}, \tag{62.58}$$

$$m\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla A\cdot\nabla S + \frac{A}{2}\Delta S = 0, \tag{62.59}$$

связанных с $\Psi(\mathbf{r}, t)$ соотношением (62.49). Функция $A(\mathbf{r}, t)$ является модулем, а $S(\mathbf{r}, t)$ — фазой волновой функции. Уравнение (62.59) для A эквивалентно уравнению непрерывности (62.52), где ρ и $\mathbf{j}$ определяются выражениями (62.50). Классическим аналогом фазы S есть функция действия [7.5], а уравнение (62.58) для S является квантовым аналогом основного уравнения динамики в механике Ньютона.

Уравнения (62.58) и (62.59) позволяют указать две аналогии между квантовой и классической системами.

1. *Гидродинамическая аналогия.* Функции A и S описывают «жидкость» из квантовых невзаимодействующих частиц массой m, движущихся в поле потенциала $V(\mathbf{r})$. Плотность потока вероятности этой жидкости в каждой точке пространства в каждый момент времени $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ и плотность вероятности $\rho(\mathbf{r}, t)$ имеют вид (62.50). Величина

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{j}}{\rho} = \frac{\nabla S}{m} \tag{62.60}$$

есть скорость квантовой частицы и описывает поле скоростей «жидкости». Если пренебречь членами, пропорциональными $\hbar^2$, то уравнение (62.58) для S переходит в классическое уравнение движения для скорости $\mathbf{v}$ (62.60):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}),\ \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}). \tag{62.61}$$

2. *Оптическая аналогия.* Согласно (62.60) скорость частицы $\mathbf{v}$ пропорциональна градиенту функции S. В классическом пределе это означает, что траектории частиц ортогональны поверхностям равных фаз: $S = \text{const}$. В оптике эти поверхности являются волновыми поверхностями, а траектории частиц совпадают с оптическими лучами (приближение геометрической оптики [47.3]).

Теорема Эренфеста: *уравнения движения для средних величин* $\langle\mathbf{r}\rangle$ и $\langle\mathbf{p}\rangle$ (62.7) *имеют вид уравнений Гамильтона классической механики для радиуса-вектора* $\mathbf{r}$ *и импульса* $\mathbf{p}$ *частицы* [7.3]:

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{r}\rangle = \frac{\langle\mathbf{p}\rangle}{m},\quad \frac{d}{dt}\langle\mathbf{p}\rangle = \langle\mathbf{F}\rangle, \tag{62.62}$$

где

$$\langle\mathbf{F}\rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{F}(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}, t)\,d\mathbf{r} \tag{62.63}$$

— среднее значение силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ (62.61). Два уравнения (62.62) эквивалентны уравнению

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\mathbf{r}\rangle = \langle\mathbf{F}\rangle, \tag{62.64}$$

которое является квантовым аналогом второго закона Ньютона [3.3]. Оно переходит в основное уравнение динамики классической механики, если заменить $\langle\mathbf{F}\rangle$ на $\mathbf{F}(\langle\mathbf{r}\rangle)$, т. е. положить

$$\langle\mathbf{F}\rangle = \mathbf{F}(\langle\mathbf{r}\rangle). \tag{62.65}$$

Если сила $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ линейно зависит от $\mathbf{r}$ (как в гармоническом осцилляторе [35.1]), то соотношение (62.65) является точным. Оно справедливо также в том случае, когда волновая функция частицы $\Psi(\mathbf{r}, t)$ локализована в такой малой области пространства, где величину силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ можно считать практически постоянной.

62.2.5. Заряженная частица в электромагнитном поле. Функция Гамильтона классической частицы с массой m и зарядом e, движущейся в электромагнитном поле, имеет вид

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\right)^2 + e\varphi(\mathbf{r}, t), \tag{62.66}$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — векторный и скалярный потенциалы [31.3] электромагнитного поля, $\mathbf{p}$ — импульс частицы. Заменяя функцию $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ на соответствующий оператор (62.32) и используя принцип соответствия [59.1], получаем уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$ квантовой заряженной частицы, движущейся в электромагнитном поле:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi\right]\Psi(\mathbf{r}, t), \tag{62.67}$$

где действие оператора $\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$ на $\Psi(\mathbf{r}, t)$ определяется выражением

$$\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\Psi = \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\Psi =$$
$$= -\hbar^2\Delta\Psi - 2\frac{e\hbar}{ic}\mathbf{A}\nabla\Psi + \left(-\frac{e\hbar}{ic}\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2\right)\Psi. \tag{62.68}$$

В общем случае

$$[\nabla, \mathbf{A}] \neq 0. \tag{62.69}$$

62.2.6. Уравнение движения в форме Гейзенберга. Уравнение (62.42), характеризующее закон изменения средних значений физических величин с течением времени, можно записать в операторной форме, если воспользоваться определением средних величин (62.34). Такое операторное уравнение называется *уравнением движения в форме Гейзенберга*. Оно имеет вид

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial\hat{A}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]. \tag{62.70}$$

Сравнение этого уравнения с уравнением движения классической механики (7.28) показывает, что для того чтобы получить уравнение движения квантовой механики в форме Гейзенберга, следует в классическом уравнении движения (7.28) заменить скобки Пуассона [7.4] для данной функции F, описывающей физическую систему, и ее гамильтониана H на коммутатор [62.1.2] соответствующих им операторов $\hat{F}$ и $\hat{H}$ по правилу

$$[F, H] \to \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}]. \tag{62.71}$$

Переход (62.71) называют *правилом квантования классической системы*. Оно позволяет переходить к квантовому описанию любой системы, имеющей классический аналог, т. е. системы, которая может быть описана в классической механике функцией Гамильтона H, выраженной через канонические переменные q_j и p_j [7.3]. По аналогии с классической механикой величину $[\hat{F}, \hat{H}]/i\hbar$ называют *квантовыми скобками Пуассона*. Квантовые скобки Пуассона имеют смысл и для операторов, которые не имеют аналога в классической механике (например, спин частицы [66.3.2]). И в этом случае правило квантования сводится к установлению перестановочных соотношений между такими операторами и оператором Гамильтона $\hat{H}$ квантовой системы.

62.3. Стационарное уравнение Шредингера

62.3.1. Стационарное состояние. Если гамильтониан $\hat{H}$ системы не зависит явно от времени, решение уравнения Шредингера (62.40) определяет динамическое состояние с определенной энергией $E = \hbar\omega$ (60.1). Это решение имеет вид

$$\Psi = \psi e^{-i\omega t} = \psi e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \qquad (62.72)$$

где ψ зависит только от координат частиц в конфигурационном пространстве и определяется уравнением

$$\hat{H}\psi = E\psi, \qquad (62.73)$$

называемым *стационарным уравнением Шредингера*. В классической механике независящая от времени функция Гамильтона описывает консервативные системы, для которых энергия является интегралом движения [62.2.2]. По аналогии с квантовой системе, описываемой волновой функцией (62.72) и уравнением (62.73), говорят, что эта система находится в стационарном состоянии с энергией E, а функцию ψ называют *волновой функцией стационарного состояния*.

62.3.2. Структура энергетического спектра. В случае движения частицы с массой m в поле действия скалярного потенциала $V(\mathbf{r})$ стационарное уравнение Шредингера (62.73) имеет вид

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \qquad (62.74)$$

Это уравнение в частных производных (62.18) называется *уравнением на собственные значения*. Его решение $\psi(\mathbf{r})$ называют *собственной функцией*, соответствующей собственному значению E оператора $\hat{H}$ (62.56).

Пусть потенциал $V(\mathbf{r})$ на бесконечности равен нулю:

$$V(\mathbf{r}) \to 0 \text{ при } r \to \infty. \qquad (62.75)$$

Тогда функция $\psi(\mathbf{r})$ будет непрерывной и ограниченной во всем конфигурационном пространстве.

Множество всех возможных для данного гамильтониана $\hat{H}$ значений E в (62.73) образуют спектр собственных значений энергии системы. Этот спектр имеет следующую структуру.

1. В области энергий системы $E < 0$ уравнение (62.74) имеет решение только при некоторых определенных значениях $E = E_n$, образующих *дискретный спектр*. Индекс n нумерует эти значения энергии. Соответствующие им собственные функции $\psi_n(\mathbf{r})$ обращаются в нуль на бесконечности (при $r \to \infty$), и интеграл от квадрата модуля $\psi_n(\mathbf{r})$ сходится:

$$\int |\psi_n(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < \infty. \qquad (62.76)$$

Это означает, что частица локализована в конечной области пространства, т. е. вероятность найти частицу на бесконечности равна нулю. О такой частице говорят, что она находится в связанном состоянии.

2. В области энергий $E > 0$ уравнение (62.74) имеет решение при любом значении E. Говорят, что эти положительные значения энергии E образуют *непрерывный спектр*. Соответствующие собственные функции $\psi_E(\mathbf{r})$ не обращаются в нуль на бесконечности. Модуль $\psi_E(\mathbf{r})$ в зависимости от вида $V(\mathbf{r})$ либо стремится к конечной постоянной, либо осциллирует между определенными конечными значениями. Волновая функция не локализована в конечной области пространства. Она описывает стационарные состояния задачи о рассеянии частицы полем $V(\mathbf{r})$, т. е. несвязанные состояния. Форма волновой функции $\psi_E(\mathbf{r})$ при $r \to \infty$, называемая *асимптотикой*, непосредственно связана с эффективным сечением, характеризующим процесс рассеяния.

Для ряда простых потенциалов $V(\mathbf{r})$ уравнение (62.74) может быть решено аналитически [66.2.1]. Для систем частиц со сложными гамильтонианами $\hat{H}$ уравнение (62.73) решают с применением ЭВМ.

62.4. Инвариантность уравнения Шредингера и законы сохранения

Инвариантность уравнений движения, описывающих динамические состояния квантовой системы, относительно некоторой группы преобразований эквивалентна предположению о том, что гамильтониан $\hat{H}$ коммутирует с операторами группы $\hat{G}$, не зависящими явно от времени [62.2.2]:

$$[\hat{H}, \hat{G}] = 0. \qquad (62.77)$$

Это означает, что если Ψ есть решение уравнения Шредингера (62.40), то и $\Psi' = \hat{G}\Psi$ есть решение этого уравнения. Если оператор $\hat{G}$ (или его комбинация) есть наблюдаемая [62.1.2], не зависящая явно от времени, то согласно (62.42) — (62.45) наблюдаемая $\hat{G}$ есть интеграл движения квантовой системы. Такому оператору $\hat{G}$ соответствует определенный закон сохранения. С каждой группой преобразований связано определенное число законов сохранения. Если сохраняющаяся наблюдаемая имеет классический аналог, то эти законы сохранения идентичны соответствующим классическим законам.

62.4.1. Оператор симметрии. *Операцией симметрии* называют преобразование вида

$$\Psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{U}\Psi(\mathbf{r}, t), \qquad (62.78)$$

при котором некоторый оператор преобразования $\hat{U}$ переводит волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в другую функцию $\Psi'(\mathbf{r}, t)$. Выберем оператор $\hat{U}$ таким, чтобы он не изменял нормировки волновой функции:

$$\int d\mathbf{r}\Psi'^*\Psi' = \int d\mathbf{r}\,(\hat{U}\Psi)^*\hat{U}\Psi = \int d\mathbf{r}\Psi^*\hat{U}^+\hat{U}\Psi = \int d\mathbf{r}\Psi^*\Psi.$$

Это означает, что оператор $\hat{U}$ должен удовлетворять условию

$$\hat{U}^+\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^+ = I, \qquad (62.79)$$

где $\hat{U}^+$ — оператор, эрмитово сопряженный с оператором $\hat{U}$ и определяемый равенством

$$\int d\mathbf{r}\,(U\Psi^*)\Phi = \int d\mathbf{r}\Psi^*\hat{U}^+\Phi, \qquad (62.80)$$

I — единичный оператор (единичная матрица).

Операторы, удовлетворяющие условию (62.79), называются *унитарными*. Унитарный оператор $\hat{U}$ называется *оператором симметрии*, если волновая функция Ψ' (62.78) удовлетворяет тому же уравнению Шредингера (62.38), что и функция Ψ:

$$i\hbar \frac{\partial (\hat{U}\Psi)}{\partial t} = \hat{H}\hat{U}\Psi, \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \tag{62.81}$$

Если оператор $\hat{U}$ не зависит явно от времени t, то из (62.81) имеем

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U}\Psi, \quad \hat{H} = \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U} = \hat{U}^{+}\hat{H}\hat{U}, \tag{62.82}$$

где $\hat{U}^{-1}$ — оператор, обратный к $\hat{U}$, $\hat{U}^{-1}\hat{U} = I$. Отсюда следует, что оператор симметрии $\hat{U}$ коммутирует с гамильтонианом:

$$[\hat{H}, \hat{U}] = 0. \tag{62.83}$$

Существует два типа преобразований: непрерывные и дискретные. *Непрерывными* называют такие преобразования, которые можно сделать столь малыми, что оператор преобразования $\hat{U}$ будет сколь угодно близок к единичному. Непрерывные преобразования всегда можно записать в виде

$$\hat{U} = e^{i\varepsilon\hat{F}}, \tag{62.84}$$

где ε — некоторое действительное число, а оператор $\hat{F}$ называется *генератором оператора* $\hat{U}$. Действие оператора (62.84) на волновую функцию Ψ определяется формулой

$$\hat{U}\Psi = e^{i\varepsilon\hat{F}}\Psi = \left[1 + i\varepsilon\hat{F} + \frac{1}{2!}(i\varepsilon\hat{F})^2 + \ldots\right]\Psi. \tag{62.85}$$

Из условия унитарности оператора $\hat{U}$ следует, что оператор $\hat{F}$ должен быть эрмитов [62.1.2], т. е.

$$\hat{U}^{+}\hat{U} = (e^{i\varepsilon\hat{F}})^{+} e^{i\varepsilon\hat{F}} = e^{-i\varepsilon\hat{F}^{+}} e^{i\varepsilon\hat{F}} = e^{i\varepsilon(\hat{F}-\hat{F}^{+})} = I \text{ при } \hat{F}^{+} = \hat{F}.$$

Генератор $\hat{F}$ описывает физическую наблюдаемую величину, которой соответствует неэрмитовый оператор $\hat{U}$. Из инвариантности системы относительно конечных преобразований следует ее инвариантность относительно бесконечно малых преобразований, которые могут быть исследованы простыми методами. Так, для бесконечно малых преобразований имеем

$$\hat{U} = e^{i\varepsilon\hat{F}} \simeq 1 + i\varepsilon\hat{F}, \quad \varepsilon\hat{F} \ll 1, \tag{62.86}$$

и, следовательно,

$$[\hat{H}, \hat{F}] = 0, \tag{62.87}$$

т. е., если сохраняется величина U, то сохраняется и ее генератор F. Инвариантность относительно непрерывных преобразований ведет к аддитивным законам сохранения [62.4.3; 62.4.4].

Дискретными называют такие преобразования, которые не могут быть сделаны сколь угодно малыми. Среди операторов $\hat{U}_h$, описывающих дискретные преобразования, имеются такие, которые и унитарны, и эрмитовы. Наибольший интерес представляют операторы $\hat{U}_h$, удовлетворяющие условию

$$\hat{U}_h^2 = 1, \tag{62.88}$$

согласно которому два последовательных преобразования возвращают систему в исходное положение. Таким операторам соответствуют наблюдаемые величины. В частности, инвариантность системы относительно дискретных преобразований может привести к мультипликативным законам сохранения [62.4.5; 62.4.6], т. е. к законам, которые требуют постоянства произведения определенных квантовых чисел.

62.4.2. Калибровочные преобразования и сохранение электрического заряда. *Калибровочным преобразованием первого рода* называется преобразование (62.78), описываемое оператором (Вейль, 1950)

$$\hat{U} = e^{i\varepsilon\hat{Q}}, \tag{62.89}$$

где ε — произвольное действительное число, $\hat{Q}$ — оператор электрического заряда такой, что

$$\hat{Q}\Psi = q\Psi, \tag{62.90}$$

где Ψ описывает состояние системы с зарядом q. Выбирая число ε сколь угодно малым и таким, чтобы выполнялось условие $\varepsilon\hat{Q} \ll 1$, получаем [62.4.1], что оператор $\hat{Q}$ коммутирует с гамильтонианом системы $\hat{H}$:

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0, \tag{62.91}$$

т. е. электрический заряд системы q сохраняется.

В физической теории допустимы только такие гамильтонианы, которые инвариантны относительно калибровочных преобразований. В частности, закону сохранения барионного числа B (барионного заряда) при взаимодействии элементарных частиц [75.3; 75.4] соответствует калибровочное преобразование

$$\Psi' = e^{i\varepsilon\hat{B}}\Psi, \tag{62.92}$$

где $\hat{B}$ — оператор барионного заряда.

Если параметры ε в (62.89) зависят от координат точки пространства и времени: $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t)$, то калибровочное преобразование называется *локальным*. Если ε не зависит от x, y, z, t, то преобразование называется *глобальным*.

62.4.3. Трансляционная инвариантность и сохранение полного импульса. *Оператор трансляции* T (a) системы на вектор **a** определяется формулой

$$\hat{T}(\mathbf{a}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{P}\mathbf{a}} \simeq 1 - \frac{i}{\hbar}\mathbf{P}\mathbf{a}, \tag{62.93}$$
$$\hat{T}(\mathbf{a})\,\hat{T}(\mathbf{b}) = \hat{T}(\mathbf{b})\,\hat{T}(\mathbf{a}) = \hat{T}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

где **P** — полный импульс системы N частиц, **a** и **b** — векторы, задающие смещение радиуса-вектора центра масс системы при соответствующих трансляциях.

Условие инвариантности гамильтониана $\hat{H}$ относительно бесконечно малых (инфинитезимальных) трансляций имеет вид

$$[\hat{H}, \mathbf{P}] = 0, \tag{62.94}$$

т. е. полный импульс системы сохраняется. Кроме того, из условия коммутаций проекций импульса $\mathbf{P}$

$$[P_x, P_y] = [P_y, P_z] = [P_z, P_x] = 0$$

следует, что их можно одновременно измерить, они сохраняют свои значения со временем.

62.4.4. Инвариантность относительно вращений и сохранение момента импульса. *Оператор вращения* вокруг произвольной оси $\mathbf{u}$ на угол ε определяется формулой

$$\hat{R}_{\mathbf{u}}(\varepsilon) = e^{-i\varepsilon \mathbf{J}\mathbf{u}} \simeq 1 - i\varepsilon \mathbf{J}\mathbf{u}, \tag{62.95}$$

где $\mathbf{J}$ — полный момент импульса системы. В случае, если система не имеет классического аналога, соотношение (62.95) служит определением момента импульса $\mathbf{J}$. Условие инвариантности гамильтониана $\hat{H}$ относительно бесконечно малых вращений имеет вид

$$[\hat{H}, \mathbf{J}] = 0, \tag{62.96}$$

т. е. полный момент импульса системы сохраняется.

Из условий коммутации

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}^2] = 0, \quad [\mathbf{J}^2, J_z] = 0$$

следует, что величины $\mathbf{J}^2$ и J_z могут быть одновременно измерены, их значения со временем не изменяются.

62.4.5. Инвариантность относительно отражений и сохранение четности. Инвариантность относительно *операции пространственной четности* означает инвариантность относительно отражений, т. е. относительно замены «левое» — «правое», при которой система идентична своему зеркальному отражению. Оператор отражений $\hat{P}$ в точке полностью определяется своим действием на волновую функцию системы. В случае одной частицы с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, импульсом $\mathbf{p}$ и орбитальным моментом количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ имеем

$$\begin{gathered} \hat{P}\mathbf{r} = -\mathbf{r}\hat{P}, \quad \hat{P}\mathbf{p} = -\mathbf{p}\hat{P}, \\ \hat{P}\mathbf{L} = \mathbf{L}\hat{P}, \quad \hat{P}^2 = 1, \end{gathered} \tag{62.97}$$

т. е. операция $\hat{P}$ изменяет знак любого истинного (полярного) вектора и не изменяет аксиальные векторы.

Оператор четности $\hat{P}$ преобразует любую волновую функцию следующим образом:

$$\hat{P}\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(-\mathbf{r}, t) = \pi\Psi(\mathbf{r}, t), \quad \pi = \pm 1 \tag{62.98}$$

и совпадает с оператором отражений в точке. Величина π является собственным значением эрмитового оператора четности $\hat{P}$. Соответствующая ей волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ называется *функцией, имеющей четную (положительную)* или *нечетную (отрицательную) четность*. Условие инвариантности гамильтониана $\hat{H}$ относительно отражений в точке имеет вид

$$[H, \hat{P}] = 0 \tag{62.99}$$

и означает, что четность π системы сохраняется. Сохранение четности приводит к мультипликативному закону сохранения. Так, в случае реакции, в результате которой при столкновении частиц a и b образуются новые частицы c и d:

$$a + b \to c + d,$$

начальное и конечное состояния описываются волновыми функциями

$$\Psi_{\text{нач}} = \Psi_a\Psi_b\varphi_{ab}, \quad \Psi_{\text{кон}} = \Psi_c\Psi_d\varphi_{cd}, \tag{62.100}$$

где Ψ_a — волновая функция частицы a и т. д., φ_{ab} — волновая функция относительно движения частиц a и b. Так как операция четности $\hat{P}$ действует на каждый множитель в (62.100) по отдельности:

$$\hat{P}\Psi_{\text{нач}} = \hat{P}\Psi_a\hat{P}\Psi_b\hat{P}\varphi_{ab} \text{ и т. д.},$$

то из закона сохранения четности системы

$$\pi_{\text{нач}} = \pi_{\text{кон}}, \quad \hat{P}\Psi_{\text{нач}} = \pi_{\text{нач}}\Psi_{\text{нач}}, \quad \hat{P}\Psi_{\text{кон}} = \pi_{\text{кон}}\Psi_{\text{кон}} \tag{62.101}$$

следует соотношение

$$\pi_a\pi_b(-1)^l = \pi_c\pi_d(-1)^{l'}, \tag{62.102}$$

где π_a, π_b, π_c, π_d — так называемые внутренние четности частиц a, b, c, d соответственно, $\hat{P}\Psi_a = \pi_a\Psi_a$ и т. д.; l, l' — относительные орбитальные моменты количества движения частиц a и b, c и d. Возможность приписать частицам определенные внутренние четности связана с тем, что их структура определяется главным образом сильным и электромагнитным взаимодействиями. Множитель $(-1)^l$ связан со свойством сферических функций Y_{lm} (66.13), описывающих угловую зависимость функции относительного движения φ_{ab}, относительно операции четности

$$\hat{P}Y_{lm} = (-1)^l Y_{lm}.$$

Из формул (62.101), (62.102) следует, что четность сложной (составной) системы равна произведению четностей составляющих ее частей (мультипликативность) с учетом четности волновых функций их относительных движений: $\pi_{\text{нач}} = \pi_a\pi_b(-1)^l$.

62.4.6. Инвариантность относительно перестановок частиц и сохранение симметрии. Бозоны и фермионы. Частицы называются *тождественными*, если гамильтониан системы $\hat{H}$ и все физические наблюдаемые системы симметричны относительно перестановок частиц $\hat{\Pi}$. В квантовой механике постулируется, что состояния системы, содержащей N тождественных частиц, будут все либо симметричными, либо антисимметричными относительно перестановок этих частиц. Частицы с симметричными состояниями Ψ_B называются *бозонами*:

$$\hat{\Pi}\Psi_B = \Psi_B. \tag{62.103}$$

Частицы с антисимметричными состояниями Ψ_F называются *фермионами*:

$$\hat{\Pi}\Psi_F = -\Psi_F. \tag{62.104}$$

В системе из тождественных частиц гамильтониан $\hat{H}$ инвариантен относительно любой перестановки этих частиц:

$$[\hat{H}, \hat{\Pi}] = 0, \tag{62.105}$$

т. е. состояние симметрии системы со временем не изменяется.

62.4.7. Инвариантность относительно сдвига во времени и закон сохранения энергии. *Оператор сдвига во времени* $\hat{T}(\tau)$ на величину τ определяется следующим выражением:

$$\hat{T}(\tau)\, t = t + \tau \text{ или } \hat{T}(\tau)\Psi(t) = \Psi(t - \tau), \tag{62.106}$$

где τ — параметр оператора $\hat{T}(\tau)$. Условие однородности времени для замкнутых квантовых систем имеет вид

$$[\hat{T}(\tau),\ \hat{H}] = 0. \tag{62.107}$$

Вместо оператора $\hat{T}(\tau)$ на практике используют генератор преобразования или инфинитезимальный оператор сдвига во времени $\hat{I}(t)$, который определяется соотношением

$$\hat{I}(t) = \frac{\partial}{\partial \tau}\hat{T}(\tau)\Big|_{\tau=0} = -\frac{\partial}{\partial t}. \tag{62.108}$$

Таким образом, согласно (62.108) и (62.25) величина $\hat{I}(t)$ пропорциональна оператору $\hat{E}$:

$$\hat{E} = -i\hbar\hat{I}(t) \tag{62.109}$$

и соотношение (62.107) означает, что однородность времени приводит к закону сохранения энергии замкнутой системы. Следует иметь в виду, что в квантовой механике оператором энергии системы является не величина (62.109), а оператор Гамильтона $\hat{H}$ (62.32), собственные значения которого в стационарных состояниях определяют согласно (62.73) энергию квантовомеханической системы. Время не является оператором в квантовой механике в противоположность пространственным координатам.

62.5. Квантовые переходы

62.5.1. Вероятность перехода из одного состояния в другое. Пусть на квантовую систему, которая описывается независящим от времени t гамильтонианом $\hat{H}_0$, действует внешнее возмущение, оператор которого $\hat{V}(t)$ имеет вид

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} W(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{при } t < 0,\ t > \tau, \end{cases} \tag{62.110}$$

где $W(t)$ — заданная функция времени, τ — время, в течение которого возмущение действует на систему. Уравнением движения в этом случае является уравнение Шредингера (62.40), оператор Гамильтона $\hat{H}$ которого зависит от времени по закону (62.110):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = [\hat{H}_0 + \hat{V}(t)]\Psi. \tag{62.111}$$

Волновую функцию Ψ можно представить в виде ряда

$$\Psi = \sum_n a_n(t)\,\psi_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}, \tag{62.112}$$

где E_n и ψ_n — собственные значения и собственные функции оператора $\hat{H}_0$:

$$\hat{H}_0\psi_n = E_n\psi_n, \tag{62.113}$$

описывающие стационарные состояния системы с энергиями E_n. Коэффициенты $a_n(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_n(t) = \sum_l \langle n|W(t)|l\rangle e^{i\omega_{nl}t}a_l(t), \tag{62.114}$$

где использованы обозначения

$$\langle n|W(t)|l\rangle = \int \psi_n^* W(t)\,\psi_l\,d\xi, \quad \hbar\omega_{nl} = E_n - E_l. \tag{62.115}$$

Интегрирование здесь производится по всем значениям переменной ξ, от которой зависят функции ψ_n.

При $t \leqslant 0$ решение системы (62.114) имеет вид

$$a_n(t) = \delta_{nm},$$

где $\delta_{nm} = 1$ при $n = m$ и $\delta_{nm} = 0$ при $n \neq m$, а волновая функция Ψ в начальном состоянии m описывается выражением

$$\Psi_{\text{нач}} = \psi_m e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}. \tag{62.116}$$

В конечном состоянии после истечения действия возмущения $\hat{V}(t)$, т. е. при $t > \tau$, система будет характеризоваться волновой функцией

$$\Psi_{\text{кон}} = \sum_n a_{nm}(\tau)\,\psi_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}, \tag{62.117}$$

где величины $a_{nm}(\tau)$ характеризуют вероятность ее нахождения в стационарном состоянии с энергией E_n. *Вероятность перехода* системы $w_{nm}(\tau)$ *за время* τ из начального состояния m в состояние n определяется формулой

$$w_{nm}(\tau) = |a_{nm}(\tau)|^2. \tag{62.118}$$

Эта величина находится путем решения системы уравнений (62.114) с граничным условием

$$a_n(0) = \delta_{nm}.$$

Это решение имеет вид бесконечного ряда, усредненного по волновым функциям стационарных состояний:

$$a_{nm}(t) = \left\langle n\left|\hat{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \tilde{W}(t')\,dt'\right)\right|m\right\rangle, \tag{62.119}$$

где

$$\hat{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \tilde{W}(t')\,dt'\right) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \tilde{W}(t_1)\,dt_1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2\int_0^t \tilde{W}(t_1)\int_0^{t_1}\tilde{W}(t_2)\,dt_2\,dt_1 + \cdots +$$

$$+\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_0^t \tilde{W}(t_1) \int_0^{t_1} \tilde{W}(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} \tilde{W}(t_n)\, dt_n \cdots dt_2\, dt_1 + \cdots, \quad (62.120)$$

$$\tilde{W}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} W(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}. \quad (62.121)$$

Интегрирование здесь производится по временам, расположенным в хронологическом порядке: $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$. Такое упорядочение осуществляется с помощью находящегося в левой части (62.120) оператора $\hat{T}$, называемого *хронологическим оператором Дайсона*. Он упорядочивает произведения операторов, зависящих от времени, согласно правилу

$$\hat{T}\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) = \begin{cases} \hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2) & \text{при } t_1 > t_2, \\ \hat{B}(t_2)\hat{A}(t_1) & \text{при } t_2 > t_1. \end{cases} \quad (62.121a)$$

Решение в виде ряда (62.120) представляет практическую ценность только в том случае, когда можно ограничиться конечным числом его слагаемых. В некоторых задачах атомной и ядерной физики достаточно ограничиться вторым слагаемым в (62.120). В этом простейшем случае вероятность перехода из состояния m в состояние n при $n \neq m$ за время действия возмущения определяется формулой

$$w_{nm}(\tau) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^\tau \langle n|W(t)|m\rangle e^{i\omega_{nm}t}\, dt\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2\omega_{nm}^2}\left|\int_0^\tau e^{i\omega_{nm}t}\frac{d}{dt}\langle n|W(t)|m\rangle\, dt\right|^2. \quad (62.122)$$

Возможны два предельных случая скорости изменения взаимодействия $W(t)$. *Адиабатическим изменением взаимодействия* называется такое его изменение за время одного периода колебаний в квантовой системе, которое мало по сравнению с абсолютной величиной разности энергии соответствующих состояний:

$$\left|\frac{1}{\omega_{nm}}\frac{d}{dt}\langle n|W(t)|m\rangle\right| \ll |E_n - E_m|. \quad (62.123)$$

Если это условие выполняется, то интегрирование в (62.122) можно приближенно выполнить, вынося медленно меняющийся множитель перед экспонентой за знак интеграла:

$$w_{nm} \simeq \frac{4}{\hbar^2\omega_{nm}^4}\left|\frac{d}{dt}\langle n|W(t)|m\rangle\right|^2 \sin^2\left(\omega_{nm}\frac{\tau}{2}\right) \ll 1, \quad (62.124)$$

т. е. при достаточно медленном включении и выключении взаимодействия квантовая система остается в начальном состоянии m после выключения взаимодействия.

Внезапным изменением взаимодействия называется такое его изменение в данный момент времени, при котором выполняется условие

$$\left|\frac{1}{\omega_{nm}}\frac{d}{dt}\langle n|W(t)|m\rangle\right| \gg |E_n - E_m|. \quad (62.125)$$

В этом случае вероятность перехода (62.122) имеет вид

$$w_{nm} \simeq \frac{|\langle n|W|m\rangle|^2}{\hbar^2\omega_{nm}^2}, \quad (62.126)$$

где W — максимальное значение взаимодействия при его внезапном включении. Формула (62.126) позволяет вычислять вероятности переходов под действием внезапных малых по абсолютной величине возмущений, для которых справедливо выражение (62.122).

62.5.2. Вероятность перехода в единицу времени при постоянном взаимодействии. Если величина взаимодействия $W(t)$ в (62.110) не зависит от времени в интервале $0 \leqslant t \leqslant \tau$, $W(t) = W$, где $W = \text{const}$, то вероятность перехода из начального состояния m в состояние n, $n \neq m$, согласно (62.122) определяется выражением

$$w_{nm}(\tau) = \frac{2}{\hbar^2}|\langle n|W|m\rangle|^2 F(E_n - E_m), \quad (62.127)$$

где $F(E_n - E_m)$ — функция, которая обращается в нуль при $|E_n - E_m| = 2\pi\hbar/\tau, 4\pi\hbar/\tau, \ldots$ и равна $\tau^2/2$ при $E_n = E_m$:

$$F(E_n - E_m) = \frac{1 - \cos[(E_n - E_m)\tau/\hbar]}{\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar}\right)^2}.$$

При достаточно больших временах $\tau \gg \hbar/E_n$ эта функция выражается через дельта-функцию Дирака:

$$F(E_n - E_m) = \tau\pi\delta(E_n - E_m),$$

и вероятность перехода (62.127) имеет вид

$$w_{nm}(\tau) = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|W|m\rangle|^2 \tau\delta(E_n - E_m). \quad (62.128)$$

Так как вероятность (62.128) пропорциональна времени τ действия возмущения, то более удобной величиной является *вероятность перехода, отнесенная к единице времени*:

$$\tilde{P}_{nm} = \frac{w_{nm}}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|W|m\rangle|^2 \delta(E_n - E_m). \quad (62.129)$$

Она определяет скорость перехода или число переходов в единицу времени.

Если начальное или конечное состояние физической системы принадлежит непрерывной группе состояний [62.3.2], то для определения полной вероятности перехода во все состояния n, имеющие одинаковые энергии и одинаковые матричные элементы $\langle n|W|m\rangle$, необходимо просуммировать по всем таким состояниям n и усреднить по начальным состояниям m, для которых значения $\langle n|W|m\rangle$ одинаковы.

Если число конечных состояний данного типа, приходящихся на единичный интервал энергии E_n (плотность конечных состояний), описывается некоторой функцией $\rho(E_n)$, то полная вероятность перехода в единицу времени определяется выражением

$$P_{nm} = \int \tilde{P}_{nm}\rho(E_n)\, dE_n = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|W|m\rangle|^2 \rho(E_n) \text{ при } E_n = E_m. \quad (62.130)$$

Здесь учтен закон сохранения энергии при квантовом переходе.

62.5.3. Вероятность перехода в единицу времени при гармоническом взаимодействии. Если взаимодействие $W(t)$ в (62.119) зависит от времени периодически:

$$W(t) = w^{\pm} e^{\pm i\omega t}, \tag{62.131}$$

то при времени взаимодействия $\tau \gg \hbar/E_n$ [62.5.2] вероятность перехода w_{nm} (62.122) имеет вид

$$w_{nm}^{\pm}(\tau) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | w^{\pm} | m \rangle|^2 \tau \delta(E_n - E_m \pm \hbar\omega). \tag{62.132}$$

Вероятность перехода в единицу времени определяется формулой

$$\tilde{P}_{nm}^{\pm} = \frac{w_{nm}^{\pm}}{\tau} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n | w^{\pm} | m \rangle|^2 \delta(E_n - E_m \pm \hbar\omega), \tag{62.133}$$

т. е. при взаимодействии вида (62.131) переходы происходят в состояния E_n, удовлетворяющие условию

$$E_n = E_m \mp \hbar\omega. \tag{62.134}$$

62.6. Теория возмущений

Точное решение уравнения Шредингера (62.73), определяющего энергию E и волновые функции ψ стационарных состояний, возможно только для некоторых простых потенциальных полей [66.2]. При исследовании сложных атомных и ядерных систем [66; 71; 72] приходится применять приближенные методы расчета собственных функций и собственных значений оператора Гамильтона $\hat{H}$, описывающего указанные реальные системы. Решение задачи сильно упрощается, если известно, что состояния исследуемой физической системы мало отличаются от состояний некоторой идеализированной системы, допускающей точное (аналитическое) решение. В этом случае расчет ψ и E может быть сделан в рамках *теории возмущений*.

Пусть гамильтониан $\hat{H}$ рассматриваемой системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{W}. \tag{62.135}$$

Здесь $\hat{H}_0$ — гамильтониан некоторой другой системы, допускающий явное решение уравнения Шредингера

$$\hat{H}_0\varphi_n = E_n^0\varphi_n, \tag{62.136}$$

где E_n^0 и φ_n — ее собственные значения энергии и волновые функции, n — индекс, нумерующий стационарные состояния. Величина $\hat{W}$ представляет собой оператор возмущения рассматриваемой системы по отношению к системе, описываемой гамильтонианом $\hat{H}_0$. Предположив, что состояния этих двух систем мало отличаются одно от другого, положим безразмерный параметр λ малым. Тогда решение уравнения Шредингера (62.73):

$$(\hat{H}_0 + \lambda\hat{W})\psi = E\psi, \tag{62.137}$$

может быть найдено в виде

$$\psi = \sum_n a_n\varphi_n, \tag{62.138}$$

где суммирование производится по всем состояниям невозмущенной системы, а коэффициенты a_n удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$(E - E_m^0) a_m = \lambda \sum_n W_{mn} a_n. \tag{62.139}$$

Здесь, как и в (62.115), $W_{mn} = \langle m | \hat{W} | n \rangle$ — матричные элементы оператора возмущения. Для малых λ решение уравнений (62.139) ищем в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} E &= E_l^0 + \lambda E_l^{(1)} + \lambda^2 E_l^{(2)} + \cdots, \\ a_m &= \delta_{ml} + \lambda a_m^{(1)} + \lambda^2 a_m^{(2)} + \cdots, \end{aligned} \tag{62.140}$$

где индекс l нумерует стационарные состояния рассматриваемой (возмущенной) системы. Подстановка (62.140) в (62.139) приводит к системам уравнений

$m = l$:	$m \neq l$:
$E_l^{(1)} = W_{ll},$	$a_m^{(1)}(E_l^0 - E_m^0) = W_{ml},$
$E_l^{(2)} + E_l^{(1)} a_l^{(1)} = \sum_n W_{ln} a_n^{(1)},$	$E_l^{(1)} a_m^{(1)} + (E_l^0 - E_m^0) a_m^{(2)} = \sum_n W_{mn} a_n^{(1)},$
. . . . .	. . . . .

(62.141)

Из этих уравнений находим волновую функцию ψ_l и энергию E_l рассматриваемой системы

$$\begin{aligned} \psi_l &= \varphi_l + \sum_{m \neq l} \frac{\lambda W_{ml}}{E_l^0 - E_m^0} \varphi_m + \cdots, \\ E_l &= E_l^0 + \lambda W_{ll} + \sum_{m \neq l} \frac{|\lambda W_{lm}|^2}{E_l^0 - E_m^0} + \cdots, \end{aligned} \tag{62.142}$$

где волновые функции ψ_l и φ_l предполагаются нормированными. Из (62.142) следует, что: 1) поправка второго порядка к энергии основного состояния всегда отрицательна (в этом случае $E_l^0 < E_m^0$); 2) условие применимости теории возмущений имеет вид

$$\lambda \ll \left| \frac{E_l^0 - E_m^0}{W_{lm}} \right| \quad \text{для любого } m \neq l, \tag{62.143}$$

т. е. недиагональные матричные элементы оператора возмущения $\lambda\hat{W}$ в (62.135) должны быть малыми по сравнению с абсолютной величиной разности значений энергии невозмущенной системы.

Теория возмущений допускает обобщение на случай двух близких уровней и наличия вырождения, т. е совпадения энергий двух или большего числа состояний квантовой системы.

63. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

63.1. Уравнение Клейна— Гордона

63.1.1. **Свободное движение релятивистской частицы.** *Релятивистскими волновыми уравнениями* называются уравнения, инвариантные относительно преобразований Лоренца [6.2]. В случае свободного движения частицы с нулевым спином [66.3.2] и энергией, значительно превышающей ее энергию покоя, релятивистское волновое уравнение может быть получено из релятивистского соотношения между энергией E и импульсом p (6.24)

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4, \tag{63.1}$$

где m — масса частицы, c — скорость света в вакууме, путем замены величин E и p соответствующими операторами согласно (62.25) и (62.24), действующими на волновую функцию ψ:

$$\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (\hbar^2\Delta - m^2c^2)\psi. \tag{63.2}$$

Это уравнение называется *уравнением Клейна — Гордона* (Клейн, Гордон, Фок, 1926). Оно является дифференциальным уравнением второго порядка по времени. Для определения ψ при всех временах необходимо задать ψ и $\partial\psi/\partial t$ в начальный момент времени, что не согласуется с требованием принципа причинности [59.3; 62.2]. Поэтому постулируют, что в рассматриваемом случае динамическое состояние квантовой частицы описывается двумя функциями φ и χ такими, что

$$\psi = \varphi + \chi, \quad \frac{i\hbar}{mc^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \varphi - \chi. \tag{63.3}$$

Функции φ и χ удовлетворяют системе двух дифференциальных уравнений первого порядка по времени

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi+\chi) + mc^2\varphi, \\ i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\varphi+\chi) - mc^2\chi. \end{aligned} \tag{63.4}$$

Эту систему принято записывать в матричном виде, совпадающем по форме с нерелятивистским уравнением Шредингера (62.40)

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}_f\right)\Psi = 0, \tag{63.5}$$

где оператор Гамильтона $\hat{H}_f$ имеет вид

$$\hat{H}_f = -(\tau_3 + i\tau_2)\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + mc^2\tau_3, \tag{63.6}$$

а величины Ψ и τ_l представляют собой следующие матрицы:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \quad \Psi^+ = (\varphi^*, \chi^*), \tag{63.7}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{63.8}$$

Матрицы τ_l называются *зарядовыми матрицами*. Они удовлетворяют простым соотношениям

$$\tau_k^2 = I, \quad \tau_k\tau_l = -\tau_l\tau_k = i\tau_m, \tag{63.9}$$

где индексы k, l, m пробегают значения 1, 2, 3 в циклическом порядке. Любая квадратная матрица второго порядка может быть представлена в виде линейной комбинации зарядовых матриц τ_l и единичной матрицы I.

Если частица обладает зарядом e, то по определению плотность заряда ρ и плотность электрического тока $\mathbf{j}$ имеют вид

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) = e(\varphi^*\varphi - \chi^*\chi) = e\Psi^+\tau_3\Psi, \tag{63.10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \frac{e\hbar}{2mi}\{&\Psi^+\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\nabla\Psi - \\ &-(\nabla\Psi^+)\tau_3(\tau_3 + i\tau_2)\Psi\}.\end{aligned} \tag{63.11}$$

Величины ρ и $\mathbf{j}$ удовлетворяют уравнению непрерывности (62.52), которое эквивалентно уравнению Клейна — Гордона в форме (63.2) или (63.5). Из (62.52) следует, что интеграл

$$\int \rho d\zeta = e\int \Psi^+\tau_3\Psi\, d\zeta, \tag{63.12}$$

где интегрирование производится по всем значениям переменных функции Ψ, сохраняется с течением времени, и условие нормировки Ψ имеет вид

$$\int \Psi^+\tau_3\Psi\, d\zeta = \int (\varphi^*\varphi - \chi^*\chi)\, d\zeta = \pm 1, \tag{63.13}$$

где знак плюс соответствует частице с зарядом $+e$, а знак минус — с зарядом $-e$.

Для частицы со спином нуль, движущейся свободно в объеме V, уравнение Клейна — Гордона (63.5) допускает два решения

$$\begin{aligned}\Psi_{(+)} &= \frac{1}{\sqrt{V}}\begin{pmatrix}\varphi_{0(+)}\\ \chi_{0(+)}\end{pmatrix}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr} - E_pt)\right], \\ \Psi_{(-)} &= \frac{1}{\sqrt{V}}\begin{pmatrix}\varphi_{0(-)}\\ \chi_{0(-)}\end{pmatrix}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{pr} + E_pt)\right],\end{aligned} \tag{63.14}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_{0(+)} &= \frac{mc^2 + E_p}{2\sqrt{mc^2E_p}}, \quad \varphi_{0(-)} = \frac{mc^2 - E_p}{2\sqrt{mc^2E_p}}, \\ \chi_{0(+)} &= \frac{mc^2 - E_p}{2\sqrt{mc^2E_p}}, \quad \chi_{0(-)} = \frac{mc^2 + E_p}{2\sqrt{mc^2E_p}},\end{aligned} \tag{63.15}$$

а $E_p = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$, $\mathbf{p}$ — импульс частицы, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. Решение $\Psi_{(+)}$ называется *положительным решением*. Оно описывает движение частицы с зарядом $+e$. Решение $\Psi_{(-)}$ называется *отрицательным решением*. Оно описывает движение частицы с зарядом $-e$.

Функция

$$\Psi_c = \begin{pmatrix}\chi^*\\ \varphi^*\end{pmatrix} = \tau_1\Psi^* \tag{63.16}$$

также является решением уравнения (63.5). Его называют *зарядово сопряженным решением* по отношению к Ψ. Если Ψ описывает частицу с положительным (отрицательным) зарядом, то Ψ_c есть решение для частицы с отрицательным (положительным) зарядом. Преобразованию Ψ в Ψ_c соответствуют замены

$$\varphi_{0(+)} \to \chi_{0(-)},\ \chi_{0(+)} \to \varphi_{0(-)},\ \mathbf{p} \to -\mathbf{p},\ E_p \to -E_p. \qquad (63.17)$$

Частицы, которые описываются волновой функцией Ψ_c, называются *античастицами*. Каждой частице, описываемой волновой функцией Ψ, соответствует своя античастица. Операция зарядового сопряжения (63.16) или (63.17) переводит частицы в античастицы. Введение понятия об античастице позволяет дать физическую интерпретацию двум решениям (63.14).

Частица называется *истинно нейтральной*, если она совпадает со своей античастицей. Для истинно нейтральной частицы выполняется условие

$$\Psi_c = \pm\Psi \text{ или } \varphi = \pm\chi^*. \qquad (63.18)$$

Это означает, что истинно нейтральные частицы описываются действительными волновыми функциями. Говорят, что знак плюс соответствует частице с *положительной зарядовой четностью*, а знак минус — с *отрицательной зарядовой четностью*. Зарядовая четность нейтральной частицы определяется опытным путем при исследовании ее взаимодействия с другими частицами.

Частицы и античастицы отличаются одна от другой не только знаком электрического заряда, но и знаками других зарядов и другими характеристиками [75.3; 75.5].

В нерелятивистском приближении $E_p \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ и для волновых функций φ и χ имеем

$$\varphi_{0(+)} \sim 1,\ |\chi_{0(+)}| \sim \left(\frac{p^2}{2mc}\right)^2 = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \ll 1,$$
$$\chi_{0(-)} \sim 1,\ |\varphi_{0(-)}| \sim \left(\frac{p^2}{2mc}\right)^2 = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 \ll 1, \qquad (63.19)$$

т. е. для положительных зарядовых состояний $\varphi_{0(+)} \gg \chi_{0(+)}$, а для отрицательных $\varphi_{0(-)} \ll \chi_{0(-)}$.

С физической точки зрения уравнение Клейна — Гордона (63.2) является неудовлетворительным, поскольку с ним связаны две принципиальные трудности теории. 1. Плотность вероятности положения релятивистской частицы

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \qquad (63.20)$$

не является положительно определенной. Это означает, что величину $\psi(\mathbf{r}, t)$ нельзя интерпретировать как волновую функцию, 2. Уравнение (63.2) имеет лишние решения с отрицательной энергией $E = -E_p$. Это означает, что спектр состояний больше не ограничен снизу и понятие стабильных стационарных состояний теряет смысл.

Для частиц, имеющих электрический заряд, физическое содержание приписывается величине $\rho = e\rho_0$ (63.10) и состояниям Ψ (63.7), Ψ_c (63.16) так, как это показано выше.

63.1.2. Движение релятивистской частицы в электромагнитном поле. Наличие или отсутствие электрического заряда у частицы проявляется только при ее взаимодействии с электромагнитным полем. Волновое уравнение, описывающее движение квантовой частицы массой m, зарядом e и спином, равным нулю [66.3.2], в электромагнитном поле, определяемом скалярным $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и векторным $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ потенциалами, формально получается из классической функции Гамильтона для свободной частицы, движущейся в электромагнитном поле:

$$E = e\varphi + \sqrt{c^2\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^4} \qquad (63.21)$$

после преобразования величин E и $\mathbf{p}$ в операторы согласно правилам (62.25) и (62.24):

$$\frac{1}{c^2}\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\varphi\right)^2\psi = \left[\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^2\right]\psi. \qquad (63.22)$$

Функция ψ комплексна. Плотности электрического заряда ρ и тока $\mathbf{j}$ в присутствии электромагнитного поля имеют вид

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{e^2\varphi}{mc^2}\psi^*\psi, \qquad (63.23)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^2\mathbf{A}}{mc}\psi^*\psi. \qquad (63.24)$$

Электромагнитное поле не нарушает инвариантности уравнения (63.22) по отношению к преобразованиям Лоренца [6.2]. Уравнение (63.22), как и уравнение Клейна — Гордона (63.2), есть дифференциальное уравнение второго порядка по времени. Поэтому его аналогично можно привести к уравнению первого порядка (63.5), вводя вместо одной функции ψ две функции φ и χ по правилу (63.3). В рассматриваемом случае оператор Гамильтона $\hat{H}_f$ описывается выражением

$$\hat{H}_f = -(\tau_3 + i\tau_2)\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + mc^2\tau_3 + e\varphi -$$
$$- \frac{e}{mc}(\tau_3 + i\tau_2)\frac{\hbar}{i}\nabla\mathbf{A} + \frac{e^2}{2mc^2}(\tau_3 + i\tau_2)\mathbf{A}^2, \qquad (63.25)$$

где использовано условие калибровки потенциалов [29.3.2; 31.3]

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0, \qquad (63.26)$$

а матрицы τ_i имеют вид (63.8).

Так как при выводе уравнения (63.22) из соотношения (63.21) использовалась процедура возведения в квадрат величины $E - e\varphi$, то уравнение (63.22) имеет лишнее решение с отрицательной энергией, соответствующее классическому решению вида

$$E = e\varphi - \sqrt{c^2\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + m^2c^4}, \qquad (63.27)$$

которое не имеет физического смысла.

63.2. Уравнение Дирака

63.2.1. **Свободное движение электрона.** Согласно Дираку (1928) в релятивистской теории электрон описывается волновой функцией Ψ, которая состоит из четырех компонент ψ_l и изменяется определенным образом при преобразованиях Лоренца [6.2]. Эти компоненты объединяются в матрицу Ψ, имеющую один столбец:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad \Psi^+ = (\psi_1^*, \ \psi_2^*, \ \psi_3^*, \ \psi_4^*). \tag{63.28}$$

Волновую функцию Ψ вида (63.28) принято называть *спинором*. Она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, которая в матричной форме записывается так:

$$\left(\frac{i\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\hbar\alpha\nabla - mc\beta\right)\Psi = 0. \tag{63.29}$$

где $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и β — четыре эрмитовые матрицы, имеющие следующие свойства:

$$(\alpha^k)^2 = 1, \ \alpha^k\alpha^l + \alpha^l\alpha^k = 0 \ (k \neq l), \ \beta^2 = 1, \ \alpha^k\beta + \beta\alpha^k = 0, \tag{63.30}$$

m — масса электрона.

Уравнение (63.29), в котором матрицы α и β эрмитовы и удовлетворяют соотношениям (63.30), называется *уравнением Дирака* для свободного электрона. Выбор явного вида матриц α и β не является единственным. В представлении Дирака

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, 3, \ \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{63.31}$$

где σ^i представляют собой *спиновые матрицы* или *матрицы Паули* (1927), а I — единичная двумерная матрица,

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{63.32}$$

Матрицы Паули удовлетворяют простым соотношениям

$$(\sigma^k)^2 = I, \ \sigma^k\sigma^l = -\sigma^l\sigma^k = i\sigma^m, \tag{63.33}$$

где индексы k, l, m пробегают значения 1, 2, 3 в циклическом порядке.

Необходимость введения в уравнение Дирака (63.29) спиновых матриц $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ связана с тем обстоятельством, что электрон имеет спин 1/2 [66.3.2]. Всякая частица со спином 1/2 обладает тремя фундаментальными свойствами: 1) она имеет внутренние векторные свойства, не зависящие от пространственных координат; 2) соответствующий вектор представляет собой момент количества движения, называемый спином, который должен быть добавлен к обычному (орбитальному) моменту количества движения частицы; 3) компоненты спина принимают только два значения: $\pm \hbar/2$. Эти свойства позволяют описывать электрон в нерелятивистской теории двухкомпонентной волновой функцией (двухкомпонентным спинором), которая при вращении

преобразуется как момент импульса, равный 1/2. Оператор вектора спина $\hat{\mathbf{S}} = (S_x, S_y, S_z)$ при этом имеет вид

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\sigma; \ S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma^1, \ S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma^2, \ S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma^3. \tag{63.34}$$

В представлении Дирака (63.31) каждая компонента спинора Ψ (63.28) соответствует определенной ориентации спина по оси z ($\sigma^3 \equiv \sigma_z$) и определенному знаку энергии электрона.

Уравнение (63.29) формально можно преобразовать к виду

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}_D\Psi, \tag{63.35}$$

где $\hat{H}_D$ называется *гамильтонианом Дирака* для свободного электрона

$$\hat{H}_D = -i\hbar c\alpha\nabla + mc^2\beta. \tag{63.36}$$

Плотность вероятности ρ и плотность тока вероятности $\mathbf{j}$ определяются выражениями

$$\rho = \Psi^+\Psi, \ \mathbf{j} = c\Psi^+\alpha\Psi. \tag{63.37}$$

Согласно (63.37) плотность вероятности ρ в случае уравнения Дирака является положительно определенной величиной, а матрицу α можно трактовать как скорость электрона. Величины ρ и $\mathbf{j}$ удовлетворяют уравнению непрерывности (62.52).

Стационарные состояния электрона с гамильтонианом $\hat{H}_D$ (63.36) описываются волновой функцией

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon t}, \tag{63.38}$$

где $\Psi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{H}_D\Psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\Psi(\mathbf{r}). \tag{63.39}$$

Решение этого уравнения, описывающее состояние электрона с определенным значением импульса $\mathbf{p}$ и энергии ε, имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}) \equiv \Psi_{\mathbf{p}\lambda}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{mc^2 + \varepsilon}{2\varepsilon}}\begin{pmatrix} u \\ \dfrac{c\sigma\mathbf{p}}{mc^2 + \varepsilon}u \end{pmatrix}\frac{e^{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \tag{63.40}$$

$$\varepsilon = \lambda E_p,$$

где $E_p = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ — энергия частицы, $\lambda = \pm 1$, а u — независящая от координат двухкомпонентная спиновая функция, на которую действуют матричные операторы σ (63.32):

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \ u^+u = u_1^*u_1 + u_2^*u_2 = 1. \tag{63.41}$$

Компоненты u_1 и u_2 выбирают так, чтобы они были собственными функциями оператора $\sigma^3 = \sigma_z$ (63.32):

$$\sigma^3u_1 = u_1, \ \sigma^3u_2 = -u_2. \tag{63.42}$$

В соответствии с определением оператора спина $\hat{\mathbf{S}}$ (63.34) его собственные значения по оси z равны $+\hbar/2$ и $-\hbar/2$. С учетом нормировки функции u (63.41) компоненты u_1 и u_2 можно записать в виде

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{63.43}$$

Если частица находится в состоянии $u_1(u_2)$, то в этом состоянии ее спин направлен вдоль положительного (отрицательного) направления оси z. При этом в состоянии u_1 спин частицы направлен вдоль импульса: $\sigma\mathbf{p} = p$, а в состоянии u_2 — против импульса: $\sigma\mathbf{p} = -p$. С учетом явного вида спиноров u_1 и u_2 волновая функция электрона $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_{p\lambda S_z}(z)$ с определенным значением импульса $\mathbf{p}$, направленного вдоль оси z, с определенным знаком энергии λ и проекцией спина S_z на ось z (63.34), равным $\pm\hbar/2$, имеет вид

$$\Psi_{p\lambda\hbar/2}(z) = \sqrt{\frac{mc^2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c\sigma\mathbf{p}}{mc^2+\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}pz}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \begin{matrix} \varepsilon = \lambda E_p, \\ \sigma\mathbf{p} = p, \end{matrix} \tag{63.44}$$

$$\Psi_{p\lambda-\hbar/2}(z) = \sqrt{\frac{mc^2+\varepsilon}{2\varepsilon}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dfrac{c\sigma\mathbf{p}}{mc^2+\varepsilon} \end{bmatrix} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}pz}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad \begin{matrix} \varepsilon = \lambda E_p, \\ \sigma\mathbf{p} = -p. \end{matrix} \tag{63.45}$$

Функции $\Psi_{p\lambda S_z}$ нормированы условием

$$\int \Psi^+_{p'\lambda' S_z'} \Psi_{p\lambda S_z} d\mathbf{r} = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{S_z S_z'}\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \tag{63.46}$$

где интегрирование проводится по пространственным переменным, от которых зависит функция $\Psi_{p\lambda S_z}$, $d\mathbf{r} = dx\,dy\,dz$. Решения (63.44), (63.45) с $\varepsilon = E_p$ называют положительными решениями уравнения Дирака для свободного электрона, а решения с $\varepsilon = -E_p$ называют отрицательными решениями или решениями с отрицательной энергией [63.1.1].

В современной теоретической физике предпочтительно используется *ковариантная форма уравнения Дирака*. В случае свободного электрона уравнение (63.29) легко преобразуется к ковариантному виду [78.2.1]

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\,\Psi = 0, \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \nabla\right), \tag{63.47}$$

где введены обозначения для матриц

$$\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \equiv (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma^0 = \beta, \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha}. \tag{63.48}$$

В представлении Дирака (63.31) имеем

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \tag{63.49}$$

В выражении (63.47) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам μ. Свойства матриц γ^μ следуют из свойств матриц $\boldsymbol{\alpha}$ и β (63.30):

$$\begin{gathered} \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{0+} = \gamma^0, \quad \gamma^{k+} = -\gamma^k, \\ \gamma^{\mu+} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0, \quad \gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu, \quad \gamma_\mu = (\gamma_0, -\boldsymbol{\gamma}), \end{gathered} \tag{63.50}$$

где $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ — метрический тензор с компонентами [78.2.1]

$$g^{00} = 1, \; g^{kk} = -1, \; g^{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu \text{ и } k = 1, 2, 3. \tag{63.51}$$

Функция

$$\overline{\Psi} = \Psi^+\gamma^0, \quad \Psi^+ = \overline{\Psi}\gamma^0, \tag{63.52}$$

называется *дираковски сопряженной* или просто *сопряженной к* Ψ. Она удовлетворяет сопряженному к (63.47) уравнению

$$-i\hbar\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu - mc\overline{\Psi} = 0, \tag{63.53}$$

которое ему эквивалентно. В этих обозначениях соотношения (63.37) принимают вид

$$\rho = \overline{\Psi}\gamma^0\Psi, \quad \mathbf{j} = c\overline{\Psi}\boldsymbol{\gamma}\Psi \tag{63.54}$$

и могут быть объединены в единый четырехмерный вектор плотности тока

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) = c\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{63.55}$$

Уравнение непрерывности (62.52) в ковариантной форме сводится к простому равенству

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \tag{63.56}$$

где подразумевается суммирование по всем четырем значениям μ.

63.2.2. Движение электрона в электромагнитном поле. Зарядовое сопряжение. Теория дырок. Уравнение Дирака, описывающее движение электрона во внешнем (классическом) электромагнитном поле, задаваемом скалярным $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и векторным $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ потенциалами, имеет вид

$$\left[\left(i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c}e\varphi\right) + \boldsymbol{\alpha}\left(i\hbar\nabla + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) - mc\beta\right]\Psi = 0. \tag{63.57}$$

Оно формально может быть получено из свободного уравнения (63.29), если воспользоваться преобразованиями

$$\hat{\mathbf{p}} \to \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}, \quad \hat{E} \to \hat{E} - e\varphi, \tag{63.58}$$

аналогичными соответствующим подстановкам классической физики, и явным видом операторов $\mathbf{p}$ и E (62.24) и (62.25). Величины $\boldsymbol{\alpha}$ и β имеют тот же смысл, что и в уравнении (63.29).

Уравнение (63.57) формально преобразуется к виду уравнения Шредингера (63.35), где гамильтониан Дирака $\hat{H}_D$ в данном случае описывается формулой

$$\hat{H}_D = e\varphi + \alpha c\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + mc^2\beta. \tag{63.59}$$

В ковариантной форме [63.2.1] уравнение Дирака (63.57) для электрона во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\hbar\partial_{\mu}-\frac{e}{c}A_{\mu}\right)-mc\right]\Psi=0, \qquad (63.60)$$

где $A_{\mu}=(\varphi, -\mathbf{A})$ — четырехмерный ковариантный вектор электромагнитного поля, а матрицы γ^{μ} определены соотношениями (63.48) и (63.50).

Функция

$$\Psi_c = C\overline{\Psi}^{\mathrm{T}} = C\gamma^{0\mathrm{T}}\Psi^*, \qquad (63.61)$$

называется *зарядово сопряженной* функцией к Ψ, если она удовлетворяет уравнению

$$\left[\gamma^{\mu}\left(i\hbar\partial_{\mu}+\frac{e}{c}A_{\mu}\right)-mc\right]\Psi_c=0, \qquad (63.62)$$

где индекс т означает транспонирование соответствующей матрицы; $\overline{\Psi}$ есть дираковски сопряженная функция (63.52). Матрица зарядового сопряжения C удовлетворяет соотношению

$$C(\gamma^{\mu})^{\mathrm{T}}C^{-1}=-\gamma^{\mu}. \qquad (63.63)$$

Ее явный вид зависит от представления, в котором заданы матрицы γ^{μ}. В представлении Дирака (63.49)

$$C=i\gamma^2\gamma^0=\begin{pmatrix}0 & -i\sigma^2\\ -i\sigma^2 & 0\end{pmatrix}, \quad C^{+}=C^{\mathrm{T}}=C^{-1}=-C. \qquad (63.64)$$

Согласно определению зарядового сопряжения (63.61) функция Ψ описывает присутствие частицы в определенном состоянии, а функция Ψ^* — ее отсутствие. Состояние Ψ_c, получающееся при зарядовом сопряжении электрона с отрицательной энергией [63.2.1] и спином, направленным против оси z, эквивалентно электрону с положительной энергией и спином, направленным вдоль положительного направления оси z. Такое описание находится в согласии с *теорией дырок* Дирака. Согласно этой теории пустое пространство — физический вакуум — представляет собой среду, в которой все состояния с отрицательной энергией (их бесконечно много) заполнены электронами, а состояния с положительной энергией свободны. В соответствии с принципом Паули [67.1.1] это препятствует переходу электронов в состояния с отрицательной энергией, а физические состояния с положительной энергией являются стабильными. Однако электрон из «моря» состояний с отрицательной энергией может перейти в состояние с положительной энергией. В этом случае в «море» образуется «дырка» (рис. 63.1), которая ведет себя как положительно заряженная частица с положительной энергией и массой покоя, равной массе покоя электрона. Такой частицей является позитрон. В современной теоретической физике электрон принято называть частицей, а позитрон — античастицей. Теория дырок кроме свойств позитрона предсказывает явление аннигиляции пары электрон — позитрон (или частица — дырка), при котором в соответствии с законами сохранения энергии и импульса должно испускаться по крайней мере два фотона, и явление рождения электрон-позитронной пары из вакуума под действием внешнего поля. Реальный процесс рождения пары частица — античастица возможен только при условии, когда энергия внешнего воздействия превышает удвоенную энергию $2mc^2$ покоящейся частицы (рис. 63.1). Если эта энергия меньше $2mc^2$, то состояния частица — античастица являются виртуальными. В этом случае говорят, что происходит *поляризация вакуума*. Строгий расчет таких явлений возможен только в рамках теории поля, описывающей рождение и уничтожение частиц.

Согласно современным представлениям, если Ψ описывает движение дираковской частицы (т. е. частицы со спином 1/2) массой m и зарядом e в потенциале A_{μ}, то Ψ_c описывает движение другой дираковской частицы с той же массой m, но с противоположным зарядом $-e$, в том же потенциале A_{μ}. Если Ψ соответствует данной частице, то говорят, что состояние Ψ_c соответствует ее античастице [75.5].

Теория дырок является первым шагом на пути построения корректной теории квантового электронного поля. Она имеет серьезные трудности и ограничения. Эта теория не является одночастичной даже при описании одного электрона, так как требует учета бесконечного числа состояний с отрицательной энергией. Электроны и позитроны входят в нее несимметричным образом. Определение состояний отрицательной энергии в теории дырок зависит от приложенного электромагнитного поля, поскольку введение внешнего поля модифицирует определенное при его отсутствии вакуумное состояние за счет рождения пар.

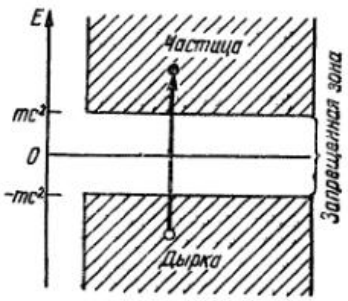


Рис. 63.1

Так как уравнение Дирака (63.60) описывает процесс аннигиляции электронов и позитронов, то его нельзя рассматривать как волновое. Это уравнение нашло большое и важное применение при рассмотрении тонкой структуры атомных спектров. Теоретические предсказания теории хорошо согласуются с экспериментальными данными.

63.2.3. Динамические переменные частицы Дирака. Динамическим переменным дираковской частицы соответствуют следующие наблюдаемые [62.1.2] (эрмитовые операторы):

координата (положение частицы) $\hat{\mathbf{r}}$,

импульс $\hat{\mathbf{p}}$,

количество движения $\hat{\boldsymbol{\pi}}=\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}(r, t)$,

энергия $\hat{H}=e\varphi+c\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{\pi}}+mc^2\beta$,

релятивистская масса $\hat{M}=\hat{H}-e\varphi=c\boldsymbol{\alpha}\hat{\boldsymbol{\pi}}+\beta mc^2$,

плотность потока $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)=\boldsymbol{\alpha}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$,

полный момент импульса $\hat{\mathbf{J}}=\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$,

спин $\hat{\mathbf{S}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$,

четность $\hat{P}_0=\beta\hat{P}$.

Определения величин $\hat{H}$ и $\hat{M}$ основаны на соответствии с классической механикой, определение $\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)$ следует из уравнения непрерывности, а $\hat{\mathbf{J}}$, $\hat{S}$ и $\hat{P}$ связаны с законами преобразования состояний при вращениях и отражении. Оператор $\hat{P}$, называемый оператором орбитальной четности, определяется соотношениями (62.97).

Глава XV

Механика изолированного атома

64. ПРЯМЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ АТОМНЫХ И СУБАТОМНЫХ ЧАСТИЦ

64.1. Открытие электрона

В основе современных представлений об атомной структуре всех существующих в природе химических элементов (веществ) лежат строгие экспериментальные данные. Дискретная структура электрических зарядов следует уже из анализа опыта Фарадея по электролизу [27.1.2]. Первые данные о строении вещества были получены при исследовании катодных и каналовых лучей, возникающих при электрических разрядах в разреженных газах. Показано (Томсон, 1897), что катодное излучение представляет собой поток отрицательно заряженных частиц, названных *электронами*. В этих экспериментах измерялось смещение луча под действием сил электрического и магнитного полей и на основе этих данных определялась величина удельного заряда частицы, т. е. заряда e, приходящегося на единицу массы m частицы: e/m. Если на частицу катодного луча действует электрическое поле напряженностью E, вызывающее смещение луча на величину $d_{эл}$, и магнитное поле напряженностью B, действующее в направлении, перпендикулярном направлению движения частиц, и вызывающее их смещение на величину $d_{маг}$, то удельный заряд частицы определяется формулой Томсона

$$\frac{e}{m} = \frac{Ed_{маг}^2}{B^2 l L d_{эл}}, \qquad (64.1)$$

где l — длина области действия электромагнитных сил, L — длина области дрейфа частиц, куда они попадают, выйдя из области действия внешнего электромагнитного поля. В области дрейфа частицы движутся в направлении, близком к направлению распространения луча со скоростью, равной первоначальной скорости частиц. Современное значение *удельного заряда электрона* составляет

$$\frac{e}{m} = 1{,}7588 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}. \qquad (64.2)$$

Этот результат показывает, что каждому электрону следует приписать *элементарный электрический заряд* величиной [27.1.2]

$$e = F/N_A, \qquad (64.3)$$

где F — постоянная Фарадея (27.6), N_A — число Авогадро (14.4). Большая величина (64.2) означает, что масса электрона m на несколько порядков величины меньше массы любого иона. Малая масса электронов и неспецифичность их источника позволяет считать, что они входят в состав атомов всех видов.

Согласно *классической модели атома Томсона* (1902) атом представляет собой шар диаметром $\sim 10^{-8}$ см положительно заряженной материи. Так как классический радиус электрона [32.3; 45.1] очень мал: $r_0 = e^2/mc^2 = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ см, то электроны в модели Томсона считаются практически точечными отрицательными зарядами. Эти отрицательные заряды погружены в положительно заряженную материю и могут в ней двигаться. Число электронов в атоме такое, что они компенсируют положительный заряд шара и атом является электрически нейтральным. При отклонении электрона из положения равновесия на него будет действовать квазиупругая сила

$$F = -eE = -e^2 r/R_0^3,$$

направленная к центру, где $R_0 \simeq 10^{-8}$ см — радиус атома, r — расстояние от центра шара до электрона, $r < R_0$, E — электрическое поле внутри атома. Согласно уравнению движения

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0,$$

где $\omega^2 = e^2/mR_0^3$, решение которого имеет вид [35.1]

$$r = A\cos(\omega t + \varphi),$$

электрон будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega \simeq \simeq 1{,}6 \cdot 10^{16}$ Гц, близкой к частоте излучения водорода в видимой части спектра. Таким образом, модель атома Томсона правильно описывает излучение электромагнитных волн атомом в видимой части спектра. Однако она не в состоянии описать наблюдаемые на опыте спектральные закономерности излучения атомов и, в частности его линейчатые спектральные серии [52.1.1]. Эта модель противоречила результатам опытов по рассеянию быстрых заряженных частиц на атомах вещества (Ленард, 1903), в которых установлено, что положительно заряженная часть атома имеет размеры значительно меньше, чем $R_0 \simeq \simeq 10^{-8}$ см. Модель Томсона несостоятельна и с теоретической точки зрения. Согласно теореме **Иршоу** (19 в.) всякая статическая система постоянных электрических зарядов не может быть устойчивой под действием только кулоновских сил. Поэтому в модели Томсона возможно только одно устойчивое состояние атома, при котором все его электроны находятся в центре положительно заряженного шара. Модель атома Томсона имеет чисто исторический интерес. Она отражала недостаточность опытных данных о структуре атома, которые можно было бы положить в основу создания его модели, не противоречащей основным законам физики.

64.2. Определение числа Авогадро

Число Авогадро N_A (14.4), показывающее, сколько атомов (или молекул) содержится в моле [14.2.3] любого вещества, является фундаментальной физической характеристикой. Его можно определить различными экспериментальными методами.

1. *Исследование свойств вещества в целом, основанное на молекулярно-кинетической теории.* Первое определение N_A опирается на моле-

кулярно-кинетическую теорию транспортных свойств газа, развитую Максвеллом. Согласно этой теории величина среднего свободного пробега l молекул определяется по порядку величины следующей формулой:

$$l \sim \frac{1}{3}\left(\frac{v}{N_A}\right)^{1/3}\frac{V}{v}, \qquad (64.4)$$

где V — объем моля газа, v — объем моля газа в конденсированном состоянии, когда его молекулы расположены в непосредственной близости одна от другой так, что $l \simeq d$, где d — диаметр молекулы. Величины l, V и v можно измерить опытным путем. Эти измерения дают $l \sim 10^{-5}$ см, $V/v \sim 10^3$, $V \sim 2 \cdot 10^4$ см^3/моль. Откуда следует, что $N_A \simeq 7 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Наиболее убедительным доказательством существования атомов и молекул является броуновское движение [15.4.2]. Гипотеза о том, что беспорядочное движение очень малых частиц, взвешенных в жидкости или газе, возникает вследствие многочисленных беспорядочных столкновений этих частиц с молекулами окружающей среды, получила свое окончательное подтверждение в опытах Перрена (1908—1911).

Перрен наблюдал броуновское движение капель, лежащих на самых тонких участках мыльной пленки. Диаметр капель был в 10^2—10^3 раз меньше толщины пленки. Для проверки основных положений молекулярно-кинетической теории вещества Перрен использовал два метода. В первом он наблюдал поступательное броуновское движение и дал экспериментальное подтверждение формулы Эйнштейна (15.10) [15.4.2]. Суть метода сводилась к отмечанию положений одной частицы через равные промежутки времени Δt и соединению этих положений прямолинейными отрезками (рис. 15.4). Измерение проекций этих отрезков на какое-либо направление позволяет вычислить величину среднего квадрата смещения броуновской частицы $\Delta\langle x^2\rangle$ за промежуток времени Δt и по формуле (15.10) найти постоянную Больцмана k и число Авогадро N_A из (16.4).

Другой метод определения N_A, предложенный и реализованный Перреном, состоит в использовании закона распределения Больцмана (16.25), дающего распределение частиц в поле тяжести при $\mathscr{E}_p = mgz$, где z — координата частицы вдоль оси z, направленной вертикально вверх. Так как измерить массу молекулы не менее трудно, чем постоянную Больцмана k, то в опытах Перрена измерялась масса броуновских частиц, помещенных в жидкость, плотность которой немного меньше плотности вещества этих частиц. В установившемся состоянии концентрация частиц n определяется формулой (16.25), где $\mathscr{E}_p = (m - m_ж)gz$. Здесь m — масса частицы, $m_ж$ — масса вытесненной ею жидкости. Если n_1 и n_2 — измеренные концентрации частиц на высотах z_1 и z_2, то число Авогадро N_A и постоянная Больцмана k определяются формулами

$$N_A = R/k, \quad k = \frac{(m - m_ж)(z_2 - z_1)g}{T \ln(n_1/n_2)}, \qquad (64,5)$$

где R — универсальная газовая постоянная (16.3). Исследование распределения концентрации броуновских частиц по высоте и измерение величин z_1 и z_2 проводилось с помощью микроскопа. Масса частицы m и масса вытесненной ею жидкости $m_ж$ вычислялись по размерам частиц и плотности их вещества. В опытах Перрена частицы имели размеры $d \sim 0{,}37$ мкм. Полученные им значения N_A находились в полном согласии между собой и другими данными. Опыты Перрена имели большое значение для утверждения идей атомистики.

2. *Измерение элементарного заряда e.* Оно позволяет количественно наиболее точно определить N_A по формуле (64.3), так как из опытов по электролизу следует, что один моль элементарных зарядов несет заряд $F = N_A e = 9{,}649 \cdot 10^4$ Кл/моль. Практическое измерение e возможно из-за огромной концентрации заряда на электронах и ионах исследуемого вещества. Когда макроскопическое тело заряжается электричеством, оно приобретает или отдает электроны, число которых ничтожно мало по сравнению с числом его атомов. Очень малое относительное изменение числа электронов, таким образом, приводит к макроскопическому эффекту, наблюдаемому визуально. Эта идея была реализована в опытах Милликена (1911) с масляными каплями. В них было дано прямое доказательство дискретности электрических зарядов и впервые точно определена величина электрического заряда электрона.

Метод, примененный Милликеном, заключался в измерении заряда очень маленьких капель масла, которое распылялось между пластинами конденсатора. Движение отдельных капель наблюдалось под микроскопом.

Если к пластинам конденсатора не приложено поле, то падающая капелька быстро достигает равновесной скорости, т. е. падает равномерно, так как ее вес уравновешивается силой сопротивления воздуха, определяемой законом Стокса [13.4.3]:

$$mg = 6\pi\eta a v_g, \qquad (64.6)$$

где m — масса капли, g — ускорение свободного падения, η — коэффициент внутреннего трения воздуха, a — радиус капли, v_g — скорость падения капли. Условие (64.6) позволяет вычислить a.

В процессе падения большинство капель приобретает электрический заряд. Поэтому, изменяя подаваемое на пластины конденсатора напряжение, можно добиться равновесного положения капли или же ее равномерного движения со скоростью v_E вверх против сил тяжести. В последнем случае вместо (64.6) будем иметь условие такого равномерного движения:

$$eE - mg = 6\pi\eta a v_E, \qquad (64.7)$$

где E — напряженность электрического поля внутри конденсатора. С учетом (64.6) имеем для величины заряда капли e уравнение

$$e = \frac{6\pi\eta a}{E}(v_g + v_E). \qquad (64.8)$$

Ионизируя воздух между пластинами, можно изменять величину заряда капли. В этом случае при том же напряжении E будет изменяться лишь скорость капли. Если при заряде e' эта скорость равна v'_E, то

$$\Delta e = e - e' = \frac{6\pi\eta a}{E}(v_E - v_E). \qquad (64.9)$$

Величина $(v_E - v'_E)$ может быть измерена экспериментально. Это позволяет найти изменение заряда Δe по формуле (64.9). Заметим, что в случае сферической капли с учетом закона Архимеда [12.3] имеем

$$a = 3\sqrt{\frac{4v g}{2(\sigma - \rho)g}}. \qquad (64.10)$$

где ρ, σ — плотности воздуха и вещества капли.

Милликен установил, что величина Δe равна или кратна одному и тому же числу. С учетом современного значения вязкости η это число

$$e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ}_q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \qquad (64.11)$$

представляет собой элементарный заряд (заряд электрона). Вычисленное по формуле (64.3) число Авогадро

$$N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{электрон/моль}.$$

Следует иметь в виду, что формулы (64.8), (64.9) неприменимы для движения очень малых капель. Это вытекает из ограничений применимости закона Стокса, справедливого только при движении шара в непрерывной среде. Если размеры капель a сравнимы со средней длиной свободного пробега λ молекул воздуха, то закон Стокса неприменим. Отсюда следует, что формулы (64.8), (64.9) справедливы при условии $\lambda/a \ll 1$.

3. *Электрическая интерпретация химической энергии.* Она основана на предположении, что атомы содержат элементарные заряды противоположного знака. В этом случае энергия связей, удерживающих атомы вместе, называемая энергией химической связи, имеет порядок величины энергии, которой обладают заряды, находящиеся один от другого на расстоянии $l \sim d$, где d — диаметр атома:

$$\mathscr{E} \sim N_A \frac{e^2}{d} \sim \frac{F^2}{N_A (v/N_A)^{1/3}} = 9 \cdot 10^{21} N_A^{-2/3} v^{-1/3}\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль}}, \qquad (64.12)$$

где $\mathscr{E}$ — электростатическая энергия одного моля заряженных пар, v — объем моля газа в конденсированном состоянии, как в (64.4). Зная $\mathscr{E}$ и v, по формуле (64.12) находим N_A. Так, в случае атома никеля в твердом состоянии $\mathscr{E} = 4 \cdot 10^5$ Дж/моль, $v = 6{,}6$ см^3 и $N_A = 10^{24}$ атом/моль.

Значение числа Авогадро (14.4) связано с определением моля (1961), согласно которому моль равен числу атомов изотопа углерода-12 с суммарной массой 12 [14.2.3]:

$$N_A = 6{,}022045\ (31) \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}. \qquad (64.13)$$

64.3. Явление радиоактивности

Под *радиоактивностью* понимают способность некоторых атомных ядер [74] самопроизвольно (спонтанно) превращаться в другие ядра с испусканием частиц. Радиоактивность исторически была первым явлением, в котором проявились свойства атомного ядра. Ее обнаружил Беккерель (1896) при исследовании урана. Оказалось, что радиоактивными являются торий и два новых элемента — полоний и радий (Пьер и Мария Кюри, 1898). Были открыты (Резерфорд, Содди, Пьер и Мария Кюри, 1912) три типа (α, β, γ) радиоактивных излучений и установлено, что испускание α- и β-излучений обусловлено превращением атомов одного химического элемента в атомы другого: при α-излучении происходит переход $Z \to Z - 2$, $A \to A - 4$; при β-излучении — переход $Z \to Z + 1$, где Z — заряд первоначального (материнского) ядра, A — число частиц (нуклонов) в ядре, называемое *массовым числом*. Прямые опыты показали, что α-частицы представляют собой ионы гелия He^{2+}, а β-частицы являются электронами (Резерфорд, 1903).

64.4. Опыты Резерфорда

Решающую роль в формировании современных представлений о строении атома сыграли опыты Резерфорда, Гейгера и Марсдена (1906—1913), в которых изучалось прохождение излучений радиоактивных элементов через тонкие слои вещества. Было обнаружено, что при прохождении α-частиц через металлическую фольгу бо́льшая их часть отклоняется от своего первоначального направления движения (рассеивается) на малые углы $\theta \sim 4$—$6°$. Однако отдельные α-частицы отклонялись на большие углы вплоть до $\theta = 180°$ (рассеяние назад). В этих опытах только одна из 8000 падающих частиц отклонялась на угол $\theta > 90°$. Это число значительно превышает то значение, которое следовало ожидать на основе допущения о наложении ряда малых случайных отклонений, трактуемых в рамках модели атома Томсона [64.1]. Результаты опытов свидетельствовали о том, что внутри атома имеется очень сильное электрическое поле, которое создается положительным зарядом, сконцентрированным в очень малом объеме (ядре), имеющем большую массу. Согласно предложенной Резерфордом (1911) *ядерной модели* атом представляет собой систему зарядов, в центре которой расположено положительное ядро с размерами $d \lesssim 10^{-12}$ см. Вокруг этого ядра под действием электростатических сил движутся электроны. Если атом имеет Z электронов, то заряд ядра равен $+Ze$. Почти вся масса атома сосредоточена в его ядре. Так как в простейшем варианте движение электронов предполагалось по орбитам вокруг ядра, то *модель атома Резерфорда* принято называть *планетарной моделью атома*.

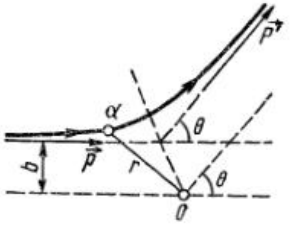


Рис. 64.1

Количественная теория рассеяния Резерфорда основана на предположении о кулоновском взаимодействии α-частицы с ядрами рассеивающего вещества. Влияние атомных электронов в первом приближении теория не учитывает, так как их масса и энергия значительно меньше массы и энергии движения α-частицы.

Пусть в некоторой точке O (рис. 64.1) помещено ядро атома, заряд которого равен $+Ze$. Предположим, что масса этого ядра настолько больше массы α-частицы, что при их взаимодействии ядро можно считать неподвижным. Так как сила взаимодействия ядра с α-частицей по предположению подчиняется закону Кулона [25.1]

$$F = \frac{Z' Z e^2}{r^2}, \qquad (64.14)$$

где $Z' = 2$ — заряд α-частицы, r — расстояние от нее до ядра, то согласно классической механике траектория движения α-частицы представляет собой гиперболу. Угол θ между асимптотами гиперболы есть угол рассеяния частиц. Расстояние b от ядра, на котором прошла бы α-частица, если бы она не взаимодействовала с ядром, называется *прицельным параметром*. Из законов сохранения энергии и момента импульса системы следует, что

$$b = b(\theta) = \frac{Z' Z e^2}{m v^2} \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta/2)}, \qquad (64.15)$$

где m — масса α-частицы, v — ее скорость. Так как прицельный параметр b не может быть измерен на опыте, то экспериментальная проверка

формулы (64.15) невозможна. Эту трудность можно преодолеть, если от описания одиночного акта рассеяния перейти к рассмотрению рассеяния потока α-частиц. Экспериментально наблюдаемой характеристикой при таком описании является *сечение рассеяния*.

Пусть частица падает на тонкий слой вещества — мишень (рис. 64.2.). В эксперименте с помощью детектора измеряется число частиц, рассеянных в некоторую область пространства, достаточно удаленную от расположенной в начале координат мишени (в точке O). Если число падающих частиц в пучке, проходящем в одну секунду через единичную площадку в направлении оси z, равно N, а число рассеянных частиц, проходящих в одну секунду через площадку dS, расположенную на расстоянии r от начала координат, равно dN, то

$$dN = \sigma(\theta)\, N\, dS/r^2, \tag{64.16}$$

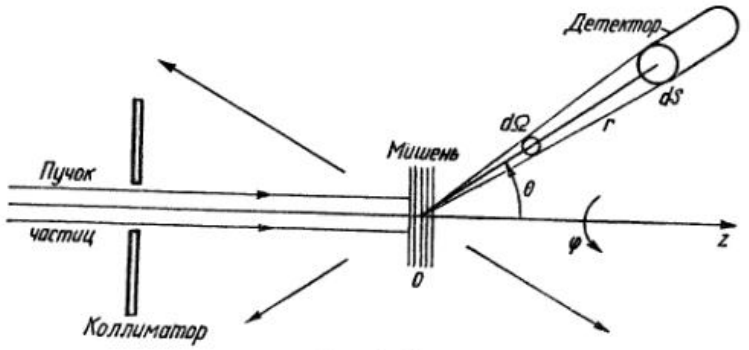


Рис. 64.2

где коэффициент пропорциональности $\sigma(\theta)$, зависящий от угла рассеяния θ, имеет размерность площади и называется *дифференциальным сечением* рассеяния. *Телесным углом* $d\Omega$ называется пространственный угол, под которым из начала координат O видна площадка dS:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \tag{64.17}$$

где φ — азимутальный угол относительно оси z. С учетом этого определения имеем для дифференциального сечения $\sigma(\theta)$ выражение

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\,\frac{db(\theta)}{d\theta}, \tag{64.18}$$

где учтено, что

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = b\, db\, d\varphi = b(\theta)\frac{db(\theta)}{d\theta}\, d\theta\, d\varphi = \frac{b(\theta)}{\sin\theta}\,\frac{db(\theta)}{d\theta}\, d\Omega. \tag{64.19}$$

Формула (64.18) позволяет в рамках классической механики определять величину $\sigma(\theta)$ по известной зависимости прицельного параметра b от θ, описывающей траекторию движения частицы.

В опытах Резерфорда изучалось среднее число частиц, рассеиваемых в пределах области, лежащей между двумя телесными углами, с углами рассеяния θ и $\theta + d\theta$. Соответствующий этому сферическому поясу телесный угол равен величине (64.17), проинтегрированной по углу φ в пределах от 0 до 2π. В соответствии с этим вместо (64.19) для $d\sigma$ имеем выражение

$$d\sigma = 2\pi b\, db. \tag{64.20}$$

Дифференцируя выражение для $b(\theta)$ (64.15) по θ, для дифференциального сечения $\sigma(\theta)$ получаем формулу Резерфорда (1911)

$$\sigma(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z'Ze^2}{2mv^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \frac{(2mZ'Ze^2)^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|^4}, \tag{64.21}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы α-частицы (рис. 64.1), $|\mathbf{p} - \mathbf{p}'| = 2mv\sin(\theta/2)$ — переданный импульс. Для сравнения с результатами эксперимента нужно учесть конечность толщины мишени и числа ее атомов в единице объема. Если в единице объема мишени содержится n атомов, а ее толщина d, то формула Резерфорда принимает вид

$$d\sigma = \frac{dN}{N} = nd\left(\frac{Z'Ze^2}{2mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)}. \tag{64.22}$$

Согласно (64.22) число рассеянных α-частиц dN должно убывать с увеличением угла рассеяния θ как $1/\sin^4(\theta/2)$, а с ростом энергии $E = p^2/2m$ как E^{-2}. Оно должно расти пропорционально квадрату заряда $(Ze)^2$ ядер, на которых рассеиваются α-частицы. Эти предсказания теории получили полное экспериментальное подтверждение (Гейгер, Марсден, 1913). Опыты Чэдвика (1920) показали, что число элементарных положительных зарядов ядра равно атомному номеру соответствующего элемента. Это позволило свести задачу об определении заряда ядра данного элемента к точной фиксации его атомного номера. Атомный номер элемента совпадает с его порядковым номером в периодической системе элементов Д. И. Менделеева.

Результаты опытов подтвердили справедливость планетарной модели атома. Однако в рамках классической физики оказалось невозможным объяснить стабильность атома, поскольку согласно электродинамике вращающийся вокруг атома электрон должен излучать электромагнитные волны и потеря им энергии должна приводить к уменьшению радиуса электронной орбиты вплоть до падения электрона на ядро. Тогда размеры устойчивого атома были бы равны размерам его ядра $\sim 10^{-12}$ см, что противоречит опыту. Указанные трудности были решены в рамках квантового описания атома [65—67].

Согласование теории Резерфорда с экспериментом показывает, что закон Кулона [25.1] справедлив вплоть до расстояний $\sim 10^{-13}$ см между центрами взаимодействующих частиц. На расстояниях, меньших 10^{-12} см, наблюдается резкое отклонение от закона Кулона (опыты Блэкетта). На таких малых расстояниях между одноименно заряженными частицами (α-частицей и ядром) обнаруживается действие сил притяжения, которые перекрывают действие кулоновских сил отталкивания. Дальнейшие исследования показали, что на расстояниях $l < 10^{-12}$ см действуют специфические силы ядерного взаимодействия [71], быстро убывающие с увеличением расстояния от ядра.

Метод исследования Резерфорда, состоящий в зондировании частицами пучка частиц мишени, получил широкое применение во многих современных исследованиях атомов, атомных ядер [XVI] и элементарных частиц [XVII].

64.5. Наблюдение элементарных атомных процессов

Для регистрации атомных процессов используются различные физические процессы, происходящие при диссипации энергии частиц при их прохождении через вещество. Важнейшим из таких процессов является *ионизация* [27.2.1] — процесс испускания электрона атомом или молекулой вещества под действием внешних возмущений. Для усиления отдельного акта ионизации используют метод ускорения испущенного электрона в сильном электрическом поле. При этом может возникнуть разветвленная цепь последовательных ионизаций вплоть до появления искры или непрерывного разряда [27.2].

Другим важным процессом является *превращение кинетической энергии частицы в видимый свет* с помощью люминесцентного материала [57.5]. При попадании быстрой частицы на экран, покрытый таким материалом, возникает свечение (сцинтилляция). В настоящее время с помощью фотоумножителей [27.4.3] регистрируются очень слабые сцинтилляции, вызванные отдельными частицами.

Широкое распространение получили приборы, использующие процессы *образования капелек* в пересыщенных газах и *пузырьков* в перегретых жидкостях. Действие *камеры Вильсона* (1912) основано на свойстве ионов, находящихся в газе, пересыщенном парами какой-либо жидкости, служить зачаточными центрами конденсации этих паров. Для создания нужной степени пересыщения используется охлаждение газа при быстром расширении. Для исследования сильно поглощаемых частиц (α-частиц, осколков деления ядер и ядер отдачи) применяют камеры, заполненные легкими газами при пониженном давлении, а частицы с большой проникающей способностью изучают с помощью камер с повышенным до десятков и сотен атмосфер давлением. Для увеличения эффективности камер Вильсона их делают управляемыми, т. е. расширение газа производится не случайным образом, а в момент пролета через камеру частицы. Управление осуществляется с помощью двух счетчиков, расположенных на входе и выходе частиц в камеру. Момент пролета частицы через камеру фиксируется по срабатыванию обоих счетчиков. Помещая камеру Вильсона в сильное магнитное поле (П. Л. Капица, Д. В. Скобельцын, 1923, 1924) можно по кривизне следа заряженной частицы определять ее импульс и знак заряда, а в некоторых случаях также энергию, скорость и удельную ионизацию, создаваемую частицей на своем пути. Так, связь между зарядом частицы e, прошедшей в камеру Вильсона под углом α к направлению магнитного поля напряженностью H, радиусом кривизны R траектории и ее скоростью v имеет вид

$$HR = \frac{mvc}{e}\sin\alpha = \frac{pc}{e}\sin\alpha, \qquad (64.23)$$

где $p = mv$ — импульс частицы. Для сильно релятивистских частиц $E = pc$ [6.3], и выражение (64.23) непосредственно определяет энергию E частицы. Сорт частицы определяется радиусом кривизны траектории и удельной ионизацией.

Рабочей средой в *пузырьковых камерах* (Глезер, 1952) является перегретая жидкость (метиловый спирт, диэтиловый спирт, бензол, пропан, бутан, жидкий азот, водород и др.). Главными достоинствами таких камер являются большая тормозная способность среды, малые искажения, вызываемые конвективными движениями рабочего вещества, практическое отсутствие фона от частиц, проникших в камеру до расширения, простота регистрации и просмотра следов частиц. Заряженная частица, проходя через сильно перегретую или пересыщенную парами жидкость, оставляет на своем пути мелкие пузырьки. Цепочка этих пузырьков дает траекторию частицы. Мерой скорости частиц служит число пузырьков на сантиметре длины пробега. Для частиц с одинаковым зарядом и скоростью $v \sim c$ это число составляет 30—50.

Для регистрации частиц широко применяются *искровые камеры*. Принцип их действия основан на применении электрического пробоя, вызванного ионизирующими частицами. При некоторых условиях пробой может распространяться самопроизвольно, начинаясь с процесса ускорения оторванного от атома электрона в сильном электрическом поле, его столкновения с другими атомами и их ионизации. Электроны, выбитые из этих атомов, вызывают дальнейшую ионизацию среды между двумя электродами. При этом на кратчайшее время создается электрическая искра между ними. Искровые камеры позволяют наблюдать траектории движения заряженных частиц. Для этого используется система параллельно соединенных пар электродов, помещенных в атмосферу неона. Счетно-логическая система позволяет создавать необходимый перепад напряжений между чередующимися электродами. Достоинством искровых камер является их быстродействие и возможность фотографировать данное событие сразу после его свершения. Такие камеры могут работать в магнитном поле.

Существуют приборы-счетчики частиц, в которых ионизация, вызванная регистрируемыми частицами, обнаруживается непосредственно по ионному треку в газовой среде, а не по явлениям, которые ею вызываются (например, конденсация пересыщенного пара).

Пропорциональный счетчик представляет собой металлический цилиндр с тонкой проволокой, натянутой по его оси. Внутренняя область цилиндра заполняется газом при пониженном давлении. На цилиндр подается отрицательный потенциал, а нить заземляется через сопротивление. Частица, попавшая в цилиндр, вызывает ионизацию газа. В области высокого градиента электрического поля (у нити) движущиеся к нити электроны приобретают энергию, достаточную для последующей ионизации атомов газа. Созданные при этой ионизации вторичные электроны ионизируют в свою очередь другие атомы. Электроны в прилегающем слое движутся к нити, а положительные ионы — к цилиндру, и во внешней цепи индуцируется ток. На сопротивлении, включенном последовательно со счетчиком, возникает импульс напряжения, который после радиотехнического усиления регистрируется счетным устройством. Величина импульса пропорциональна начальному числу ионов. Коэффициент усиления пропорционального счетчика возрастает с увеличением напряжения между цилиндром и нитью только в небольшом диапазоне напряжений и находится в пределах 10^3—10^4. Для работы пропорционального счетчика очень важно, чтобы все электроны, вырванные заряженной частицей, дошли до нити и приняли участие в последующей (ударной) ионизации. Поэтому пропорциональные счетчики заполняются газом (например, аргоном), в котором прилипание электронов к его молекулам и образование отрицательных ионов, преграждающих путь электронам к нити, практически не происходит. Процесс, возникающий в счетчике при попадании в него заряженной частицы, заканчивается, когда все электроны и положительные ионы достигнут соответствующих электродов. Для положительных ионов это время велико и достигает 10^{-4} с.

Счетчиками Гейгера — Мюллера (1908—1913) являются пропорциональные счетчики, работающие в области самостоятельного разряда. В этих приборах электроны, созданные заряженной частицей при ее прохождении через счетчик, движутся к нити, где, сталкиваясь с молекулами газа, возбуждают и ионизируют их. Возбужденные молекулы

испускают фотоны, которые выбивают фотоэлектроны из стенок счетчика и молекул газа. Эти электроны ускоряются нитью и участвуют в процессе создания электронов и фотонов. Для создания самостоятельного разряда в такому счетчику нужно приложить существенно большее напряжение, чем в случае пропорциональных счетчиков.

Для регистрации атомных процессов широко применяются *полупроводниковые детекторы*. Они характеризуются высокими счетными характеристиками, компактностью, механической прочностью, простотой устройства. Их применяют для детектирования тяжелых заряженных частиц, γ-квантов, электронов и нейтронов. По способу регистрации полупроводниковые счетчики представляют собой твердотельные ионизационные камеры, в которых носители заряда, образу ошиеся в результате пролета через них частиц, собираются на электродах. Из-за большой плотности и большой тормозной способности материалов полупроводников (для кремния $\rho = 2{,}33$ г/см^3, для германия $\rho = 5{,}33$ г/см^3), в них укладываются полностью пробеги длиннопробежных частиц (например, электронов).

Для изучения осколков деления ядер, регистрации α-частиц и других тяжелых частиц применяют *диэлектрические детекторы*. Процесс детектирования состоит здесь в том, что регистрируемая частица, попадая в диэлектрическую пластинку (слюда, стекло, лавсан и др.), нарушает ее кристаллическую решетку. После травления появляются хорошо видимые под микроскопом следы (треки) частиц. Подбором режима травления можно полностью исключить фон от частиц с малой ионизирующей способностью. Поэтому эти счетчики очень удобны для изучения редких явлений, таких, как спонтанное деление ядер (определение возраста минералов или других старинных предметов).

64.6. Атомные единицы

Число Авогадро (64.13) позволяет оценить линейные размеры атома. Так как $N_A \sim 10^{24}$ моль$^{-1}$, а объем одного моля конденсированных атомов $v \sim 1$ см^3, то объем одного атома будет порядка 10^{-24} см^3, а его линейные размеры $d \sim 10^{-8}$ см. Ранее в атомной физике в качестве единицы длины использовалась величина, называемая ангстремом (Å): 1 Å $= 10^{-8}$ см $= 10^{-10}$ м. Значения диаметров всех атомов лежат в пределах от 0,1 до 0,4 нм (от 1 до 4 Å).

На атомных расстояниях энергетические характеристики, выраженные в единицах, принятых в механике и электродинамике, представляют собой малые величины. Так, электростатический потенциал V в точке, удаленной от положительного элементарного заряда на расстояние 0,2 нм, равен 7,20 В, а энергия, необходимая для вырывания электрона из этой точки и перенесения его в бесконечность, $\mathcal{E} = eV = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл $\cdot$ 7,20 В $= 11{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж. Поэтому в атомной физике в качестве энергетической единицы используется *электронвольт*, представляющий собой потенциальную энергию электрона в точке, где электрический потенциал равен 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}. \quad (64.24)$$

Для энергетической характеристики химических превращений макроскопических количеств вещества ранее использовалась единица килокалорий на моль (ккал/моль), связанная с электронвольтом, приходящимся на одну молекулу, равенством

$$1 \text{ эВ/молекул} = 23{,}06 \text{ ккал/моль}. \quad (64.25)$$

При решении конкретных задач удобно использовать атомные единицы: *атомную единицу длины* — боровский радиус a_0 (65.10) и *атомную единицу энергии*

$$E_a = \frac{e^2}{a_0} = \frac{me^4}{\hbar^2} \approx 27{,}07 \text{ эВ}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}0529 \text{ нм}. \quad (64.26)$$

В этих единицах длина $\rho = \frac{r}{a_0}$ и энергия $\varepsilon = \frac{E}{E_a}$ являются безразмерными величинами.

Зная число Авогадро (64.13), можно определить массу атома m_a и массу электрона m_e. Массы атомов принято выражать в *атомных единицах массы* (а. е. м.) [14.2.3]:

$$1 \text{ а.е.м.} = \frac{\text{масса атома изотопа } {}^{12}\text{C}}{12} = \frac{1 \text{ г}}{N_A} = 1{,}6605655\,(86) \cdot 10^{-27} \text{ кг}. \quad (64.27)$$

В этих единицах масса

$$m_a = M_a \cdot 1 \text{ а.е.м.}, \quad (64.28)$$

где M_a — атомная масса — безразмерная величина, равная отношению массы атома вещества к 1/12 массы атома изотопа ^{12}C. Например:

$$\begin{aligned} m_a\,(^1\text{H}) &= 1{,}007825036\,(11) \text{ а.е.м.}, \\ m_a\,(^2\text{H}) &= 2{,}014101795\,(21) \text{ а.е.м.}, \\ m_a\,(^4\text{He}) &= 4{,}002603267\,(48) \text{ а.е.м.} \end{aligned} \quad (64.29)$$

Массы покоя элементарных частиц также принято выражать в атомных единицах массы. Например:

$$m_e = 5{,}4858026\,(21) \cdot 10^{-4} \text{ а.е.м.} = 9{,}109534\,(47) \cdot 10^{-31} \text{ кг}, \quad (64.30)$$

$$m_p = 1{,}007276470\,(11) \text{ а.е.м.} = 1{,}6726485\,(86) \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1836{,}15152\,(70)\, m_e. \quad (64.31)$$

До 1961 г. в физике за 1 а. е. м. принимали 1/16 массы атома изотопа ^{16}O, т. е. величину $1{,}65976 \cdot 10^{-27}$ кг, а в химии — 1/16 средней атомной массы природного кислорода (смеси трех стабильных изотопов ^{16}O, ^{17}O, ^{18}O.) Последняя в 1,000275 раз была больше физической.

Следует иметь в виду, что атомная масса M_a меньше суммы масс частиц, входящих в состав атома, на дефект масс, равный (с противоположным знаком) энергии связи протонов и нейтронов в ядре [70.2.3].

Наиболее точные современные методы определения атомных масс основаны исключительно на различии масс индивидуальных атомов и не зависят от других их свойств. В них используется явление отклонения ионов различных газов в электрических и магнитных полях (Томсон, 1911) [33; 33.3.1].

65. КВАНТОВАНИЕ В АТОМНЫХ СИСТЕМАХ

65.1. Теория атома Бора

65.1.1. Постулаты Бора. Трудности классической физики в объяснении опытных данных [52.1.3; 64.4] частично были разрешены Бором (1913) в его теории атома. Согласно Бору представления классической

физики неприменимы к явлениям микромира. В основе предложенной им теории были положены два постулата, которые являются обобщением экспериментальных данных. Их введение в теорию позволило описать специфические особенности внутриатомного движения на полуклассическом уровне.

Постулат 1. *Атомы (и атомные системы) могут длительное время находиться только в определенных стационарных состояниях, в которых, несмотря на происходящие в них движения заряженных частиц, входящих в состав атомов, они не излучают и не поглощают энергию.* В этих состояниях атомы обладают энергиями, которые образуют дискретный ряд значений: $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$. Всякое изменение энергии в результате излучения или поглощения электромагнитного излучения, а также в результате соударений с другими частицами возможно только при полном переходе (скачком) из одного состояния в другое.

Согласно планетарной модели атома Резерфорда [64.4] это означает, что из бесконечного числа электронных орбит, возможных с точки зрения классической физики, в действительности реализуются только некоторые определенные стационарные орбиты. Электрон, двигаясь по одной из этих орбит с ускорением, вопреки законам классической электродинамики не излучает электромагнитных волн. Электрон может двигаться только по орбитам, для которых момент его импульса L равен целому кратному $\hbar$ [65.2]:

$$L = n\hbar, \tag{65.1}$$

где $\hbar = h/2\pi$ — постоянная Планка (23.29), $n = 1, 2, 3, \ldots$ Если электрон массой m движется со скоростью v_n по круговой орбите радиусом r_n, где n — номер стационарной орбиты, то условие (65.1) имеет вид

$$mv_n r_n = n\hbar. \tag{65.2}$$

Постулат 2. *При переходе из одного стационарного состояния в другое атомы испускают или поглощают в виде светового кванта энергию* $\hbar\omega$ (ω — *круговая частота излучения*), *равную разности энергий* E_m *и* E_n *этих состояний*:

$$\hbar\omega = E_m - E_n, \quad E_m > E_n. \tag{65.3}$$

В соответствии с моделью атома Резерфорда излучение или поглощение атомом электромагнитной волны с частотой ω происходит при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую.

Соотношение (65.3) называется *условием частот Бора*. Его можно записать в виде соотношения, отражающего **комбинационный принцип Ридберга — Ритца** (1905) спектров излучения атомов [52.1.3]:

$$\frac{1}{\lambda} = T_n - T_k, \tag{65.4}$$

где $\lambda = c/\nu = 2\pi c/\omega$ — длина волны,

$$T_k = -\frac{E_k}{hc}, \quad T_n = -\frac{E_n}{hc} \tag{65.5}$$

— спектральные термы, которые могут быть выражены через постоянную Ридберга R_H (52.15) в соответствии с определением (52.16). Это позволяет записать энергию стационарных состояний атомов в виде

$$E_n = -\frac{hcR_H}{n^2} = -\frac{2\pi R_H \hbar c}{n^2}, \tag{65.6}$$

где $\hbar$ и c — универсальные константы, n — целое число. Теория Бора дает возможность вычислить значение E_n, используя только универсальные константы, и тем самым теоретическим путем определить постоянную Ридберга.

§5.1.2. Водородоподобный атом. Система, состоящая из ядра с зарядом $+Ze$ (Z — целое число) и одного электрона, называется *водородоподобным атомом*. При $Z = 1$ — это атом водорода, при $Z = 2$ — однократно ионизованный атом гелия He^+, при $Z = 3$ — двукратно ионизованный атом лития Li^{2+}, при $Z = 4$ — трехкратно ионизованный атом бериллия Be^{3+} и т. д.

Согласно опытам Резерфорда [64.4] взаимодействие ядра с электроном является кулоновским и потенциальная энергия последнего описывается выражением

$$U = -\frac{Ze^2}{r}. \tag{65.7}$$

Предполагая движение электрона по орбите классическим и применяя законы Кеплера [3.9.3], получаем, что полная энергия водородоподобного атома

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \tag{65.8}$$

где a — большая полуось эллипса или в случае круговой орбиты — ее радиус. Согласно первому постулату Бора (65.2) радиусы возможных стационарных круговых орбит a_n удовлетворяют условию

$$a_n = \frac{n\hbar}{mv_n} = n^2\frac{\hbar^2}{mZe^2} = \frac{r_0}{\alpha^2}\frac{n^2}{Z} = a_0\frac{n^2}{Z}, \tag{65.9}$$

где $r_0 = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона [32.3], $\alpha = e^2/\hbar c$ — величина, называемая *постоянной тонкой структуры*. Величина

$$a_0 \equiv a_1 = \frac{\hbar^2}{me^2}, \quad a_0 = 0{,}5292 \cdot 10^{-8}\ \text{см} = 0{,}05292\ \text{нм} \tag{65.10}$$

называется *радиусом первой боровской орбиты атома водорода* или *боровским радиусом*. Скорость движения электрона на стационарной круговой орбите

$$v_n = \frac{Ze^2}{n\hbar} = \frac{Z\alpha c}{n}. \tag{65.11}$$

Возможные энергетические состояния атома определяются выражением

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a_n} = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{\alpha^2}{2}mc^2\frac{Z^2}{n^2}, \tag{65.12}$$

т. е. энергия атома дискретна и изменяется обратно пропорционально квадрату числа n. Число n принято называть *главным квантовым числом*. Оно нумерует орбиты атома (рис. 65.1).

Зная возможные энергетические состояния атома, можно определить частоту ν его излучения, используя второй постулат Бора (65.3) в форме (65.4) и формулу (65.12):

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{mZ^2e^4}{4\pi\hbar^3 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \tag{65.13}$$

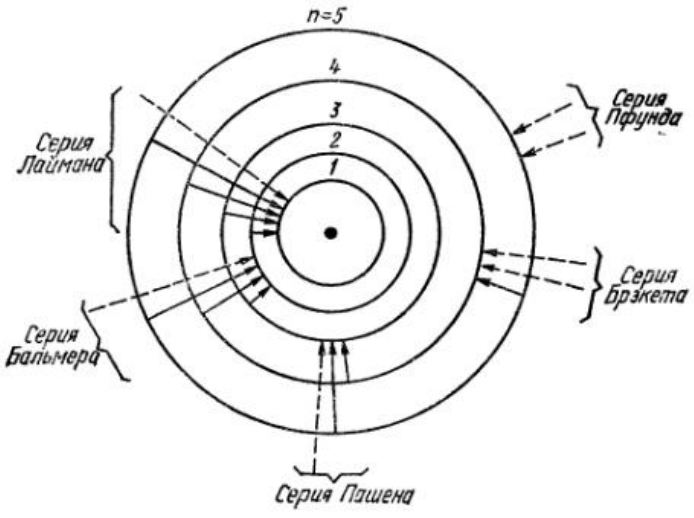


Рис. 65.1

где n и k — целые положительные числа. Эта формула обобщает формулу Бальмера — Ридберга (52.14) на случай водородоподобных атомов с $Z > 1$. Для водорода ($Z = 1$) сравнение (65.13) с (52.14) дает следующее выражение для постоянной Ридберга:

$$R_{\text{H}} = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c}. \qquad (65.14)$$

Формула (65.14) найдена в предположении, что ядро водородоподобного атома остается неподвижным. Поэтому теоретическое значение $R_{\text{H}} = 109735{,}7\ \text{см}^{-1}$, полученное из (65.14), отличается от значения (52.15) $R_{\text{H}} = 109677{,}58\ \text{см}^{-1}$, найденного эмпирическим путем из спектроскопических измерений. Учет движения атома и электрона вокруг общего центра масс, сводящийся к замене в формуле (65.13) массы электрона m на приведенную массу $\mu = mM_Z/(m + M_Z)$, где M_Z — масса ядра атома с зарядом Z:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = Z^2 R_Z \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \quad R_Z = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c\,(1 + m/M_Z)}, \qquad (65.15)$$

дает значение $R_{\text{H}} = R_1 = 109677\ \text{см}^{-1}$, практически совпадающее с эмпирическим значением (52.15). Полное согласование теории и эксперимента достигается при учете таких тонких эффектов, как конечность размеров ядра атома водорода (протона), релятивистских поправок на движение электрона и др.

Формула (65.15) предсказывает так называемый *изотопический сдвиг* линий атомных спектров, согласно которому спектры изотопов (атомов с одинаковыми значениями Z и разными массами) одного и того же элемента должны различаться. Это предсказание привело к открытию дейтерия (^{2}H) — изотопа водорода с массовым числом 2.

Обобщенная формула Бальмера — Ридберга (65.15) описывает различные серии водородоподобных атомов. Схема их возникновения в атоме водорода показана на рис. 65.1 (см. рис. 52.1). Когда электрон находится на первой боровской орбите ($n = 1$), то говорят, что атом водорода находится в основном состоянии. Когда электрон находится на орбите с квантовым числом $n > 1$, то такое состояние атома водорода называют *возбужденным*. Согласно (65.15) постоянная Ридберга R_Z зависит от массы ядра (рис. 65.2), а частота излучения ν пропорциональна Z^2, где Z — заряд ядра атома.

Теория атома Бора явилась большим достижением в развитии и обосновании атомной спектроскопии. Она стала основой большого числа работ, установивших ряд важных экспериментальных фактов. К недостаткам теории следует отнести ее логическую противоречивость.

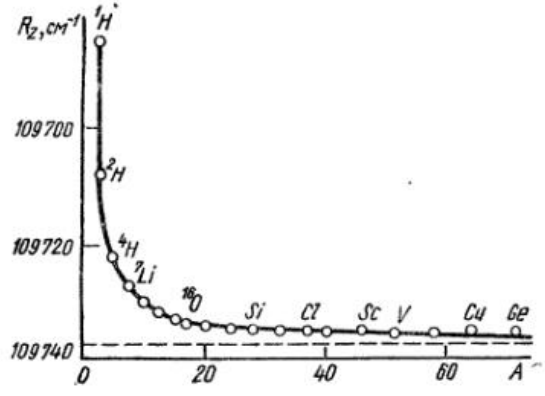


Рис. 65.2

Она оказалась неприменимой к атому гелия — одному из простейших атомов периодической системы элементов Д. И. Менделеева. В настоящее время теория Бора представляет лишь исторический интерес.

65.1.3. Правила квантования Бора — Зоммерфельда. Квантовая теория атомных явлений на первом этапе своего развития (до открытия уравнения Шредингера [62.2]) представляла собой общий метод вычисления квантованных (дискретных) величин, основанный на постулатах Бора [65.1.1] и принципе соответствия [59.1]. Последовательность вычислений такая: 1) предполагалось, что данная система материальных частиц описывается законами классической механики, и находились все возможные решения соответствующих уравнений движения; 2) постулировалось, что из всех возможных решений истинными являются только те, которые удовлетворяют правилам квантования, и производился отбор дискретных семейств движений в системе; 3) каждому из возможных движений ставилось в соответствие определенное значение энергии, дискретный ряд таких значений энергии давал спектр квантованных энергетических уровней; 4) аналогично находился дискретный спектр разрешенных значений для любого другого интеграла движения. Основной проблемой такого подхода является определение правил квантования.

Наиболее просто правило квантования получается в том случае, когда классическое движение является периодическим, а соответствующая

ему частота есть функция только энергии: $\nu = \nu(E)$,

$$\int_{E_{\min}}^{E} \frac{dE}{\nu(E)} = nh \quad (n = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{65.16}$$

где $E_{\min}$ — минимальное значение энергии классической системы, h — постоянная Планка (23.29). Функция $\nu(E)$ зависит от природы классической системы и характера ее движения.

Для гармонического осциллятора *правило квантования* (65.16) принимает вид

$$\oint p\,dq = nh = 2\pi n\hbar, \tag{65.17}$$

где p — импульс, q — координата осциллятора, а интегрирование производится по полному периоду движения с энергией

$$E_n = n\hbar\omega = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \tag{65.18}$$

принимающей согласно постулату Планка [23.3.6] лишь дискретные значения, кратные энергии одного кванта $\hbar\omega$. Интеграл в левой части равенства (65.17) представляет собой площадь $S = \pi ab$ эллипса — фазовой (в переменных p и q) траектории гармонического осциллятора (рис. 65.3) — с полуосями $a = \sqrt{2n\hbar/m\omega}$ и $b = \sqrt{2mn\hbar\omega}$. Формулу (65.17) рассматривают как общее условие квантования для любых систем (не только осциллятора) с одной степенью свободы, где q и p — ее обобщенные координата и импульс, и называют *правилом квантования Бора — Зоммерфельда* (1915, 1916).

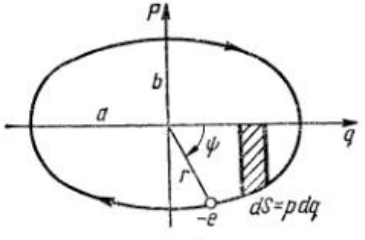


Рис. 65.3

Для электрона, движущегося по круговой орбите вокруг ядра, обобщенной координатой является азимутальный угол ψ, обобщенной скоростью $\dot{\psi}$, а обобщенный импульс $mr^2\dot{\psi} = mvr$, где r — радиус орбиты, m — масса электрона, представляет собой момент импульса L. Учитывая, что в данном случае сила, действующая на электрон, центральна, имеем $L = \text{const}$, и формула (65.17) переходит в условие квантования орбиты (65.1).

Формула (65.17) допускает простое обобщение на случай системы с несколькими степенями свободы (Зоммерфельд, Ч. Вильсон). Если система имеет s степеней свободы, каждая из которых характеризуется своей частотой, то правило квантования принимает вид

$$\oint p_1 dq_1 = n_1 h, \quad \oint p_2 dq_2 = n_2 h, \quad \ldots, \quad \oint p_s dq_s = n_s h, \tag{65.19}$$

где $q_1, \ldots, q_s$; $p_1, \ldots, p_s$ — обобщенные координаты и импульсы системы, целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_s$ называются *квантовыми числами*. Если условие (65.17) применимо для движения электрона только по круговым орбитам, то условие (65.19) позволяет рассматривать более общий класс эллиптических орбит, взяв за основу решение задачи Кеплера [3.9.3] из классической механики. В случае движения электрона в плоскости эллиптической орбиты его положение характеризуется расстоянием от ядра r и азимутальным углом ψ (рис. 65.3). Поэтому правило квантования имеет вид

$$\oint p_r dr = n_r h, \quad \oint p_\psi d\psi = n_\psi h, \tag{65.20}$$

где $p_r = m\dot{r}$, $p_\psi = mr^2\dot{\psi}$. Из этих условий следует формула для уровней энергии водородоподобного атома, аналогичная (65.12) для круговой орбиты:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{mZ^2e^4}{2(n_r + n_\psi)^2\hbar^2}, \quad n = n_r + n_\psi. \tag{65.21}$$

Главное квантовое число n равно сумме *радиального* n_r и *азимутального* n_ψ квантовых чисел. Большая a и малая b полуоси эллипса квантуются в соответствии с выражениями

$$a = a_n = n^2\frac{a_0}{Z}, \quad b = b_n = nn_\psi\frac{a_0}{Z}, \quad n = n_r + n_\psi, \tag{65.22}$$

где a_0 — боровский радиус (65.10). Большая полуось зависит только от главного квантового числа n, а малая как от главного, так и азимутального квантового числа n_ψ. При $n = n_\psi$ орбита переходит в круговую, при $n_\psi = 0$ и $b = 0$ она вырождается в прямолинейную траекторию, по которой электрон должен совершать колебательные движения. Поскольку такая траектория проходила бы через ядро, она исключается из теории атома Бора. Поэтому

$$n_\psi = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{65.23}$$

Это означает, что одному значению главного квантового числа n отвечает n различных орбит с разной величиной эксцентриситета $\varepsilon = \sqrt{1 - n_\psi^2/n^2} = \sqrt{1 - b^2/a^2}$. Такие *состояния* имеют одинаковые энергии E_n (65.21) и называются *вырожденными*. Под влиянием внешних возмущений орбита может деформироваться, и n уровней, которые раньше совпадали, разделяются. В этом случае говорят, что данное возмущение снимает вырождение.

Положение электрона в пространстве характеризуется тремя координатами. Введение третьей координаты соответствует учету пространственной ориентации плоскости эллиптической орбиты электрона. Описывая пространственное положение электрона сферическими координатами r, θ, φ (2.4) (рис. 2.6), правило квантования (65.19) записываем в виде

$$\oint p_r dr = n_r h, \quad \oint p_\theta d\theta = n_\theta h, \quad \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h, \tag{65.24}$$

где $p_r = m\dot{r}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$, $p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}$. Отсюда следует, что энергия электрона описывается формулой

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{mZ^2e^4}{2(n_r + n_\psi)^2\hbar^2} = -\frac{mZ^2e^4}{2(n_r + n_\theta + n_\varphi)^2\hbar^2}, \tag{65.25}$$
$$n = n_r + n_\psi, \quad n_\psi = n_\theta + n_\varphi.$$

Она зависит только от суммы всех квантовых чисел n_r, n_θ и n_φ, а не от их самих. Это означает, что такие состояния являются вырожденными: не только эллипсы с одинаковой большой полуосью a, но и все такие эллипсы, различным образом ориентированные в пространстве, в отсутствие внешних возмущений (магнитного поля) имеют одинаковую

энергию. Внешнее магнитное поле снимает вырождение по квантовому числу n_φ.

В сложных атомах, имеющих несколько электронов, движение периферического электрона возмущается остальными электронами. Это приводит к зависимости энергии E_n не только от главного квантового числа n, но и от азимутального n_φ. Поэтому уровни энергий в таких атомах с различными n_φ не совпадают. В таком простом подходе объясняются особенности спектров сложных атомов, имеющих один валентный электрон (элементы первой группы периодической системы Li, Na, K и т. д.).

Правило квантования Бора — Зоммерфельда (65.19) применимо только для периодических и многопериодических систем. Не существует правил квантования апериодических движений. Теория Бора — Зоммерфельда дает правильное описание уровней энергии мишени из водородоподобных атомов и атомов, имеющих один валентный электрон. Однако она не описывает рассеяние электронов атомами и результаты опытов Франка — Герца [65.2.1]. Метод квантования Бора — Зоммерфельда является переходным этапом к последовательной квантовой теории, основанной на волновой природе вещества [59—62].

65.2. Энергетические уровни атомов

65.2.1. Опыты Франка — Герца. В основе современной теории атома лежит экспериментальный факт, установленный в результате опытов Франком и Герцем (1914). В этих опытах исследовалось распределение скоростей электронов до и после соударения их с атомами и молекулами разреженного газа. Было найдено, что при скоростях электронов, меньших некоторой критической скорости, соударение происходит вполне упруго — электрон не передает атому своей энергии, а изменяет лишь направление своей скорости. При скоростях, достигающих некоторой критической скорости, столкновение электрона с атомом становится неупругим — электрон теряет всю энергию, передавая ее атому, который после этого переходит в другое стационарное состояние с бо́льшей энергией. Отсюда следовало, что атом либо вообще не воспринимает энергию, либо воспринимает ее только в количествах, равных разности энергий в двух стационарных состояниях, характерной для данного атома.

Схема установки Франка — Герца показана на рис. 65.4. В вакуумный баллон (трубку) впаяны термокатод K, сетка C и анод A. Трубка заполнялась парами исследуемых веществ (ртути, гелия и др.) под небольшим давлением ($\sim$ 133 Па). Электроны, вылетевшие из катода, ускорялись разностью потенциалов U, приложенной между катодом K и сеткой C, которая регулируется потенциометром $П1$. Потенциометром $П2$ устанавливается разность потенциалов U_A между сеткой C и анодом A, которая создает поле, задерживающее электроны. Анод достигают только те электроны, энергия которых

$$E = eU > eU_A.$$

Исследовалась зависимость тока J, регистрируемого гальванометром G, помещенным в цепь анода A, от напряжения U. На пути движения электроны претерпевали многочисленные соударения с атомами газа. Полученный результат в случае паров ртути показан на рис. 65.5. Максимумы тока J наблюдались при потенциалах U = 4,1; 9,0; 13,9 В. Разность между этими значениями постоянна и равна 4,9 В (с точностью до 0,1 В). Если к приложенному извне ускоряющему потенциалу прибавить контактную разность потенциалов, которая в опыте равнялась 0,8 В, то получается ряд значений энергий электрона E = 4,9; 9,8; 14,7 эВ, в котором первое значение совпадает с разностью между соседними значениями. Максимумы на кривой рис. 65.5 имеют простое истолкование. Пока энергия электронов меньше 4,9 эВ, они испытывают с атомами ртути упругие соударения, их энергия достаточна для преодоления разности потенциалов между K и C, и ток J возрастает с увеличением потенциала по обычному закону. При потенциалах кратных 4,9 В удары становятся неупругими, электроны отдают всю свою энергию атомам ртути и задерживаются сеткой C. В результате ток в цепи анода резко падает. Если энергия электронов заметно превосходит величину, кратную 4,9 эВ, то такие электроны, потеряв часть своей энергии при неупругом соударении с атомами ртути, сохраняют достаточно энергии для преодоления разности потенциалов U_A, и ток начинает возрастать.

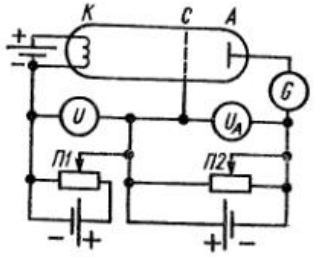


Рис. 65.4

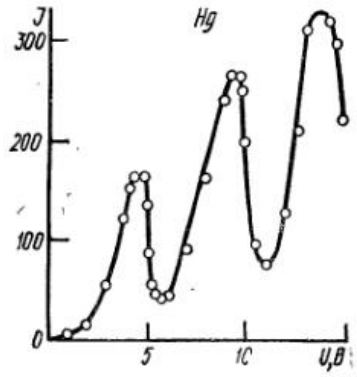


Рис. 65.5

Значение энергии 4,9 эВ играет, таким образом, особую роль для атомов ртути. Если запас энергии атома ртути равен E_0, то следующее возможное значение энергии атома будет равно $E_0 + 4{,}9$ эВ. Ускоряющий потенциал $U_1 = 4{,}9$ В называется *резонансным потенциалом* атома ртути. Атом любого химического элемента характеризуется своим значением U_1. Некоторые из них для иллюстрации приведены ниже.

Элемент	Калий	Натрий	Ртуть	Гелий
U_1, В	1,63	2,12	4,9	21

Опыты Франка и Герца показали, что энергия атомов изменяется дискретно. Величина $\Delta E = eU_1$ есть доля энергии, которую атом может полностью воспринять. Тем самым постулаты Бора [65.1] получили экспериментальное подтверждение.

65.2.2. Ионизационный потенциал. Дальнейшие исследования показали, что у атомов данного сорта существует не одно дискретное возбужденное состояние, обнаруживаемое опытами Франка — Герца, а множество таких состояний. При низком давлении и высоком ускоряющем потенциале U появляется возможность возбуждения более высоких стационарных состояний атомов. У атома ртути, например, кроме резонансного потенциала $U_1 = 4{,}9$ В имеется второй критический потенциал $U_2 = 6{,}7$ В. Знание этих потенциалов позволяет опреде-

лять кратность столкновений электрона с атомом с передачей соответствующей порции энергии. Так, отдельные значения полученного на опыте ряда $U = 4{,}9;\ 9{,}8;\ 11{,}2;\ 13{,}5;\ 14{,}7;\ 16;\ 17{,}6;\ 19{,}3;\ 20{,}2;\ 21{,}2$ В,

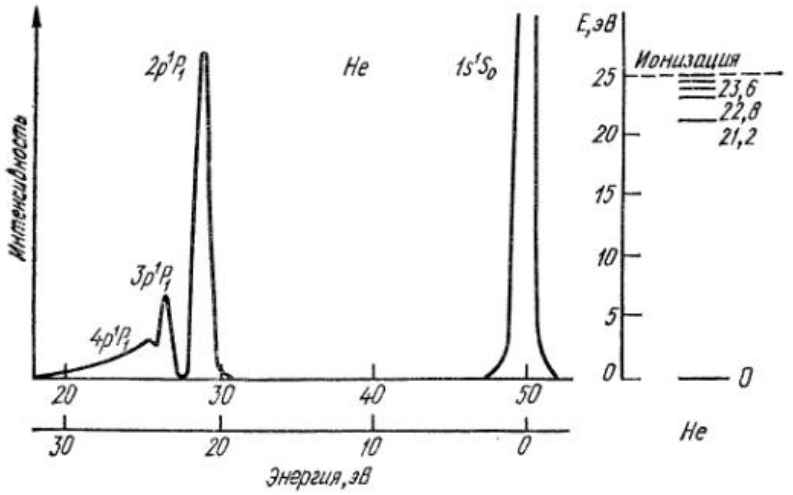


Рис. 65.6

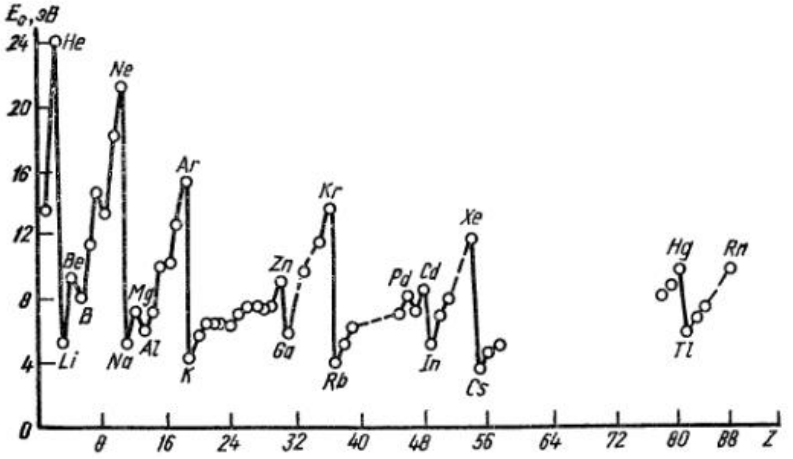


Рис. 65.7

при которых наблюдаются максимумы вольт-амперной характеристики $J = J(U)$, предетавляются простыми комбинациями двух критических потенциалов U_1 и U_2: $2U_1 = 9{,}8$; $U_1 + U_2 \simeq 11{,}2$; $2U_2 \simeq 13{,}5$; $3U_1 = 14{,}7$; $U_1 + 2U_2 \simeq 17{,}6$; $4U_1 \simeq 19{,}3$; $3U_2 \simeq 20{,}2$; $3U_1 + U_2 = 21{,}2$, где числовые коэффициенты перед U_1 и U_2 указывают кратность столкновения с передачей данной порции энергии. Следует отметить, что само значение U_2 в отличие от U_1 не наблюдается.

На рис. 65.6 показаны энергетический спектр электронов с начальной энергией 50 эВ после соударений с атомами гелия и схема уровней атома гелия, отсчитанных от энергии атома до соударения с электроном (от основного состояния $1\ ^1S_0$).

Для того чтобы найти значения энергий стационарных (основного и возбужденных) состояний данного атома (а не только их разности, как в опытах Франка — Герца) достаточно определить энергию, которую необходимо затратить, чтобы от атома, находящегося в определенном энергетическом состоянии, полностью отделить электрон. Эти значения энергий называются *энергиями ионизации*, а соответствующие им потенциалы — *потенциалами ионизации* в различных энергетических состояниях. В настоящее время найдены потенциалы ионизации для большинства атомов периодической системы элементов Д. И. Менделеева. В табл. 67.2 приведены первые ионизационные потенциалы F_0, соответствующие энергиям освобождения одного электрона из нейтрального атома. Ионизационный потенциал является характеристикой периферических свойств атома, так как описывает энергию отрыва внешнего электрона. Поэтому такие потенциалы обнаруживают периодическую зависимость от атомного номера (рис. 65.7). Инертные газы в максимумах кривой имеют большие ионизационные потенциалы и слабо участвуют в химических реакциях. Наоборот, щелочные металлы одновалентны и ведут себя активно в химических процессах. Они обладают минимальными ионизационными потенциалами.

66. СТРОЕНИЕ АТОМА

66.1. Составляющие атома и их характеристика

Атомом называется наименьшая частица химического элемента, являющаяся носителем его свойств. Системы связанных атомов одного или нескольких химических элементов называют *молекулами*. Атом или молекула с отличным от нуля электрическим зарядом называется *ионом*.

Атом любого элемента состоит из *ядра* и *оболочки*. Ядро в свою очередь состоит из нейтронов и протонов [70.2.1], а атомную оболочку формируют электроны (рис. 66.1). Параметры, характеризующие протоны, нейтроны и электроны, приведены в табл. 66.1.

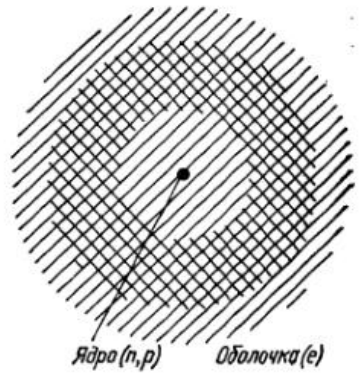


Рис. 66.1

Размер атома r_a определяется размерами его атомной оболочки и имеет порядок 10^{-10} м [64.6]. Приближенно его можно вычислить по формуле

$$r_a \simeq 0{,}5 \sqrt[3]{m_a/\rho}, \qquad (66.1)$$

где m_a — масса атома (64.28), ρ — плотность вещества. Почти вся масса атома сконцентрирована в его ядре. Плотность $\rho_я$ ядерного вещества велика и равна $2 \cdot 10^{17}$ кг/м^3 [70.2.2].

Таблица 66.1. Параметры, характеризующие протоны, нейтроны и электроны

Параметр	Обозначение параметра	Частица		
		p	n	e
Масса покоя	m_0	$1836m_e$	$1839m_e$	$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ кг
Заряд	Q	$+1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	0	$-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
Спин	$S/\hbar$	1/2	1/2	1/2
Продолжительность жизни	τ	$> 10^{31} - 3 \times 10^{32}$ лет	$(1{,}01 \pm 0{,}03) \times 10^3$ с	$> 2 \cdot 10^{22}$ лет

Размер ядра $r_я$ (его *радиус*) определяется приближенно эмпирической формулой [70.2.2]

$$r_я \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{м}, \tag{66.2}$$

где A — массовое число ядра [70.2.1].

Электрон с точностью измерений 10^{-18} м не имеет размеров и считается материальной точкой.

Зная массу атома m_a, можно вычислить число атомов N в любой массе вещества m по формуле

$$N = \frac{m}{m_a} = \frac{m}{M_a \cdot 1 \text{ а. е. м}} = \frac{m}{M_a \cdot 1{,}66057 \cdot 10^{-24} \text{ кг}}, \tag{66.3}$$

где M_a — атомная масса (64.28). В большинстве случаев вместо точной атомной массы M_a достаточно использовать массовое число A [70.2.1.].

Согласно квантовомеханической модели атома, основанной на решении волнового уравнения Шредингера [66.2], распределение электронов в атомной оболочке описывается пространственными стоячими волнами — *волновыми функциями*. Каждой такой волне соответствует своя определенная энергия — *собственное значение* и *собственная частота*. Электроны могут переходить из состояния, описываемого одной волной, в состояние, которому соответствует другая волна. Интенсивность волны в различных точках пространства определяет вероятность того, что электрон находится в данной точке. Наглядно атомная оболочка может быть представлена в виде заряженного (электронного) облака, пространственная плотность которого в каждой точке соответствует интенсивности стоячей волны в этом месте.

66.2. Теория Шредингера для водородоподобного атома

66.2.1. Волновое уравнение. Рассмотрим систему, состоящую из ядра с зарядом Ze (Z — целое число) и массой m_a и электрона с зарядом $-e$ и массой m_e. Подобно задаче двух тел в классической механике [3.5.5] движение атома, состоящего из двух частиц, можно представить как два независимых движения электрона с приведенной массой

$$\mu = m_a m_e / (m_a + m_e) \tag{66.4}$$

вокруг ядра и движение центра масс атома. Движение атома как целого не влияет на уровни его энергий, обусловленные внутренними движениями атома, и может не рассматриваться. Движение электрона с массой μ происходит в поле скалярного потенциала

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \tag{66.5}$$

где r — расстояние электрона от ядра, равного потенциальной энергии электрона. Гамильтониан атома H (62.56) в этом случае не зависит от времени и задача сводится к решению стационарного уравнения Шредингера (62.74) с потенциалом (66.5):

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta\psi + \left(\frac{Ze^2}{r} + E\right)\psi = 0. \tag{66.6}$$

В случае движения электрона вокруг неподвижного ядра $m_a = \infty$, $\mu = m_e$. Поле (66.5) обладает центральной симметрией. Поэтому удобно воспользоваться сферической системой координат r, θ, φ (2.4) (рис. 2.6). Уравнение (66.6) в этих координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hat{l}^2}{2\mu r^2}\right)\psi = 0, \tag{66.7}$$

где $\hat{l}^2$ — квадрат оператора момента импульса (62.28) электрона с приведенной массой μ. Так как полный гамильтониан $\hat{H}$ (62.56), (66.5) коммутирует с операторами $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ (62.29), то стационарное состояние электрона в водородоподобном атоме можно характеризовать его энергией E, квадратом момента импульса $\mathbf{l}^2$ и его проекцией l_z на выбранное направление (ось z). Это означает, что волновая функция ψ уравнения (66.7) характеризуется тремя целочисленными параметрами — квантовыми числами n, l, m:

$$\psi = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi), \tag{66.8}$$

где значения l и m находятся из уравнений

$$\hat{l}^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots, \infty), \tag{66.9}$$
$$\hat{l}_z\psi = \hbar m\psi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l).$$

Эти уравнения описывают квантование момента импульса относительного движения электрона и ядра и связаны с вращением электрона вокруг ядра. Согласно (66.9) квадрат орбитального момента электрона, находящегося в состоянии с квантовыми числами n, l, m, равен $|\mathbf{l}|^2 = \hbar^2 l(l+1)$, а его проекция на ось z равна $l_z = \hbar m$. Квантовое число l называют *орбитальным* или *азимутальным*, а квантовое число m — *магнитным*. Последнее название связано с тем, что с помощью магнитного поля можно задать направление оси квантования z, направив это поле параллельно выбранной оси. В обычных условиях пространство изотропно и не имеет выделенных направлений.

66.2.2. Сферические функции. Операторы $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ действуют только на угловые переменные θ и φ волновой функции ψ_{nlm} (66.8). Поэтому

в соответствии с видом уравнения (66.7) ψ_{nlm} распадается на два множителя

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi), \tag{66.10}$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — *сферические функции*, являющиеся собственными функциями оператора квадрата момента импульса $\hat{l}^2$ и его проекции $\hat{l}_z$:

$$\begin{aligned} &\hat{l}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, \infty), \\ &\hat{l}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm} \qquad (m = -l, -l+1, -l+2, \ldots, +l). \end{aligned} \tag{66.11}$$

Воспользовавшись явным видом операторов $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ в сферических координатах

$$\hat{l}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right], \quad \hat{l}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{66.12}$$

можно показать, что функции Y_{lm} имеют вид

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} (\sin\theta)^m \times \\ \times \frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}} (\cos^2\theta - 1)^l e^{im\varphi}, \tag{66.13}$$

где использованы обозначения $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Эти функции удовлетворяют соотношению

$$Y^*_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\theta, -\varphi) = (-1)^m Y_{l-m}(\theta, \varphi). \tag{66.14}$$

Они образуют ортонормированную систему функций

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, Y^*_{lm}(\theta, \varphi)\, Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'}\, \delta_{mm'}. \tag{66.15}$$

Приведем явный вид первых сферических функций:

$l = 0$:
$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}};$$

$l = 1$:
$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{i\varphi}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta,$$
$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \cdot e^{-i\varphi};$$

$l = 2$:
$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \cdot e^{2i\varphi}, \tag{66.16}$$
$$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta \cdot e^{i\varphi}, \quad Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1),$$
$$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta \cdot e^{-i\varphi}, \quad Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \cdot e^{-2i\varphi};$$

$l = 3$:
$$Y_{33} = \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta \cdot e^{3i\varphi}, \quad Y_{32} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta \cos\theta \cdot e^{2i\varphi},$$

$$Y_{31} = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} (5\cos^2\theta - 1) \sin\theta \cdot e^{i\varphi},$$
$$Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5\cos^2\theta - 1) \cos\theta,$$
$$Y_{3-1} = \sqrt{\frac{21}{64\pi}} (5\cos^2\theta - 1) \sin\theta \cdot e^{-i\varphi},$$
$$Y_{3-2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta \cos\theta \cdot e^{-2i\varphi}, \quad Y_{3-3} = \sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta \cdot e^{-3i\varphi}.$$

66.2.3. Энергетический спектр. Стационарные состояния движения электрона в кулоновском поле ядра (66.5) с определенным значением энергии и момента импульса l определяются уравнением Шредингера для радиальной части волновой функции $R_{nl}(r)$:

$$\frac{\partial^2 R_{nl}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_{nl}}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{nl} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - \frac{Ze^2}{r} \right) R_{nl} = 0, \tag{66.17}$$

которое следует из (66.7) — (66.10). Электрону, связанному с ядром, соответствуют энергии $E < 0$. *Собственные значения энергии* уравнения (66.17) определяются формулой

$$E = E_n = -\left(\frac{Ze^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{\mu c^2}{2n^2} = -\frac{1}{n^2} \frac{Ze^2}{2a}, \quad a = \frac{a_0}{Z}, \quad a_0 = \frac{\hbar}{\mu e^2}. \tag{66.18}$$

Здесь a_0 — радиус боровской орбиты [65.1.2]. Формула (66.18) совпадает с формулой для энергии стационарных состояний (65.12) в теории Бора [65.1.2]. Главное квантовое число

$$n = n_r + l + 1, \tag{66.19}$$

где n_r равно числу узлов радиальной части волновой функции R_{nl}. Квантовое число n_r называется *радиальным квантовым числом*, введенным Зоммерфельдом [65.1.3]. Спектр водородоподобного атома содержит бесконечное счетное множество уровней, так как число n_r может принимать все целые значения от 0 до $+\infty$. При $n_r \to \infty$ уровни сгущаются и в пределе стремятся к значению $E = 0$, с которого начинается непрерывный спектр. Объединение спектров, относящихся к различным возможным состояниям с $l = 0, 1, 2, \ldots, \infty$, дает полный спектр атома в теории Шредингера. Уровни E_n вырождены — при каждом значении главного квантового числа n момент импульса l может принимать все целые значения от 0 до $n - 1$. Поэтому вырождение каждого уровня E_n имеет кратность

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n(n-1) + n = n^2. \tag{66.20}$$

Различные состояния электрона в атоме принято обозначать символами, каждый из которых состоит из числового коэффициента, равного главному квантовому числу n, и строчной буквы латинского алфавита, обозначающей квантовое число l в соответствии со схемой:

l	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Обозначение	s	p	d	f	g	h	i	k	...

(66.21)

Электрон, находящийся в состоянии с $l = 0$, называют s-электроном, а состояние — s-состоянием, с $l = 1$ — p-электроном (p-состоянием), с $l = 2$ — d-электроном (d-состоянием) и т. д. Поскольку $l = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, то возможны следующие состояния электрона:

$$1s$$
$$2s,\ 2p$$
$$3s,\ 3p,\ 3d$$
$$4s,\ 4p,\ 4d,\ 4f \text{ и т. д.}$$

Квантовое число m, указывающее ориентацию атома в пространстве, в обозначениях состояний не приводят. Состояние $1s$ есть основное состояние атома. Первое возбужденное состояние четырехкратно вырождено и включает одно состояние $2s$ и три состояния $2p$; второе возбужденное состояние девятикратно вырождено и включает одно состояние $3s$, три состояния $3p$ и пять состояний $3d$ и т. д. На рис. 66.2 показана схема уровней атома водорода (см. также рис. 52.1). Согласно квантовой механике испускание и поглощение света при переходах электрона с одного уровня на другой возможно только в том случае, если орбитальное квантовое число l удовлетворяет правилу отбора

$$\Delta l = \pm 1,\ \Delta m = 0,\ \pm 1, \tag{66.22}$$

где Δl и Δm — разности квантовых чисел l и m двух состояний. Серии Лаймана соответствуют переходы $np \leftrightarrow 1s$ ($n = 2, 3, \ldots$), серии Бальмера — переходы $ns \leftrightarrow 2p$ и $nd \leftrightarrow 2p$ ($n = 3, 4, \ldots$) и т. д.

Теория Шредингера правильно объясняет спектральные линии. Их положение описывается формулой Бальмера — Ридберга (65.4) с термами T_n (65.5), вычисленными по значениям энергий E_n (66.18). Согласно (66.18) энергия первого уровня атома водорода ($Z = 1$, $n = 1$, $\mu = m_e$) равна $-13{,}53$ эВ.

66.2.4. Радиальная волновая функция. Собственные функции $R_{nl}(r)$ уравнения (66.17), соответствующие собственным значениям (66.18), имеют вид

$$R_{nl}(r) = a^{-3/2} N_{nl} F_{nl}\left(\frac{2r}{na}\right), \tag{66.23}$$

где

$$a = \frac{\hbar^2}{Z\mu e^2},\quad N_{nl} = \frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+1)!]^3}},$$
$$F_{nl}(x) = x^l e^{-x/2} L^{2l+1}_{n-l-1}(x). \tag{66.24}$$

Здесь N_{nl} — постоянная нормировки, определяемая условием

$$\int_0^\infty R^2_{nl}(r)\, r^2\, dr = 1, \tag{66.25}$$

а $L^k_p(z)$ — полиномы Лагерра, определяемые соотношениями

$$L^0_p(z) = e^z \frac{d^p}{dz^p}(e^{-z} z^p),\ L^k_p(z) = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k} L^0_{p+k}(z) \tag{66.26}$$
$$(k,\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty).$$

В частности, $L^k_0 = k!$. Квантовое число $n_r = n - l - 1$ определяет число узлов волновой функции $R_{nl}(r)$, т. е. число пересечений графика этой функции с осью r, исключая значение $r = 0$.

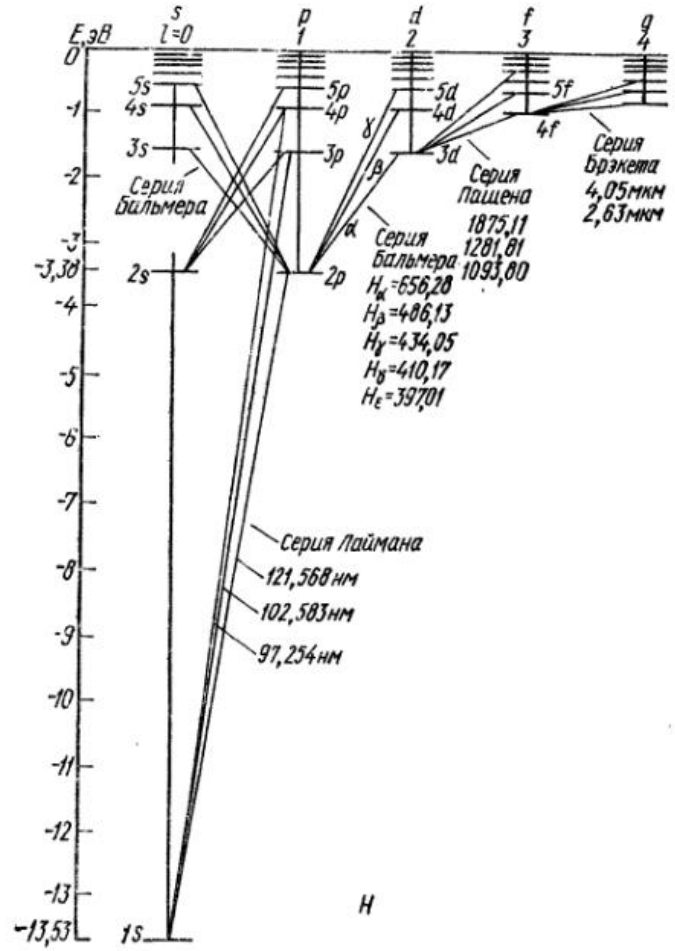


Рис. 66.2

Приведем явный вид первых радиальных функций:

$$1s\text{-состояние: } R_{1s}(r) = \frac{2}{a^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{a}\right),$$
$$2s\text{-состояние: } R_{2s}(r) = \frac{2}{(2a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\cdot\left(1 - \frac{r}{2a}\right),$$
$$2p\text{-состояние: } R_{2p}(r) = \frac{2}{[3\,(2a)^3]^{1/2}} \exp\left(-\frac{r}{2a}\right)\cdot\frac{r}{2a}, \tag{66.27}$$
$$3s\text{-состояние: } R_{3s}(r) = \frac{2}{(3a)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{3a}\right)\left[1 - 2\frac{r}{3a} + \frac{2}{3}\left(\frac{r}{3a}\right)^2\right],$$

3 p-состояние: $R_{3p}(r) = \frac{4}{3}\left[\frac{2}{(3a)^3}\right]^{1/2} \exp\left(-\frac{r}{3a}\right) \cdot \frac{r}{3a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{3a}\right)$,

3 d-состояние: $R_{3d}(r) = \frac{4}{3\,[10\,(3a)^3]^{1/2}} \exp\left(-\frac{r}{3a}\right) \cdot \left(\frac{r}{3a}\right)^2$.

66.2.5. Распределение электронной плотности. В соответствии с правилами квантовой механики [62.1.1] вероятность dW нахождения электрона в окрестности точки с координатами r, θ, φ в объеме $dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta d\varphi$ в состоянии с квантовыми числами n, l, m определяется формулой

$$dW = |\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2 r^2\, dr\, d\Omega,\ d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (66.28)$$

Проинтегрировав это выражение по полному телесному углу $d\Omega$, с учетом (66.10) и (66.15) найдем вероятность того, что электрон находится в сферическом слое радиусом r и шириной dr:

$$dW_r = R_{nl}^2 r^2\, dr. \qquad (66.29)$$

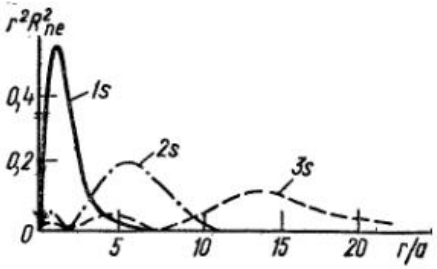


Рис. 66.3

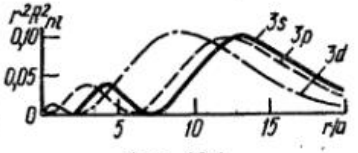


Рис. 66.4

Величина $r^2R_{nl}^2$ есть *плотность вероятности найти электрон в состоянии n, l, m на расстоянии r от ядра*. Интегрирование выражения (66.28) по r в пределах от 0 до ∞ дает вероятность того, что электрон окажется в телесном угле $d\Omega$ в направлении углов θ и φ. В силу нормировки функций $R_{nl}(r)$ (66.25) имеем

$$dW_{\theta,\varphi} = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2\, d\Omega. \qquad (66.30)$$

Величина $|Y_{lm}|^2$ есть *плотность вероятности найти электрон в направлении углов* θ и φ. Из явного вида сферических функций (66.13), (66.16) следует, что эта вероятность не зависит от угла φ.

Распределение электронной плотности $r^2R_{nl}^2$ для состояний, соответствующих различным радиальным возбуждениям, показано на рис. 66.3. С ростом энергии собственных состояний электрона среднее расстояние между электроном и ядром увеличивается. Электронные плотности двух соседних состояний различаются главным образом тем, что при большем собственном значении энергии появляются дополнительные максимумы.

Распределение электронной плотности $r^2R_{nl}^2$ для состояний, соответствующих различным вращательным возбуждениям, показано на рис. 66.4. Для вращательных движений $l \neq 0$ преобладают центробежные силы вблизи ядра, равные $-l(l+1)/r^2$. Это приводит к подавлению внутренних максимумов, возникающих в случае $l = 0$. Для больших r преобладает притяжение ядра и радиальное движение практически не зависит от l.

Согласно правилу вычисления средних величин (62.34) для $\langle r^s \rangle$, где s — целое число, имеем выражение

$$\langle r^s \rangle_{nl} = \int_0^\infty r^2 dr \int d\Omega\, \psi^*_{nlm}(r, \theta, \varphi)\, r^s\, \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) =$$

$$= \int_0^\infty R_{nl}^2(r)\, r^{s+2} dr, \qquad (66.31)$$

откуда для среднего значения расстояния r электрона в состоянии с квантовыми числами n, l, m от ядра находим

$$\langle r \rangle_{nl} = \frac{a}{2}[3n^2 - l(l+1)], \qquad (66.32)$$

т. е. электрон в среднем находится тем дальше от ядра, чем больше n. Для основного состояния $\langle r \rangle_{1s} = 3a/2$. Аналогично определяются средние других степеней r в состояниях n, l, m:

$$\langle r^2 \rangle_{nl} = \frac{n^2a^2}{2}[5n^2 + 1 - 3l(l+1)],\ \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{an^2}, \qquad (66.33)$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{a^2n^3(l+1/2)},\ \left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{a^3n^3(l+1)(l+1/2)\,l}.$$

Другие средние могут быть найдены из рекуррентного соотношения

$$\frac{s+1}{n^2}\langle r^s \rangle_{nl} - (2s+1)\,a\,\langle r^{s-1} \rangle_{nl} + \frac{s}{4}[(2l+1)^2 - s^2]\,a^2\langle r^{s-2} \rangle_{nl} = 0,$$

$$s > -2l - 1. \qquad (66.34)$$

При больших значениях $l = n - 1$ из (66.32) и (66.33) следует, что среднее квадратичное отклонение

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \frac{na}{2}\sqrt{2n+1} = \frac{\langle r \rangle}{\sqrt{2n+1}}, \qquad (66.35)$$

т. е. при больших значениях n величина $\Delta r/\langle r \rangle$ мала и электрон оказывается практически локализованным вблизи сферы радиусом n^2a, а его энергия $E_n = -Ze^2/2n^2a$ совпадает с энергией классического электрона на круговой орбите радиусом n^2a. Это согласуется с требованиями принципа соответствия [59.1]. Радиусам боровских орбит [65.1.2] в теории Шредингера соответствуют наиболее вероятные расстояния электрона от ядра (рис. 66.5; стрелками показаны положения боровских радиусов).

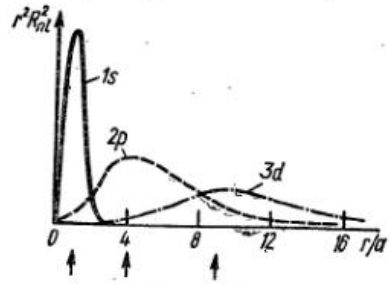


Рис. 66.5

Так как плотность вероятности углового распределения электрона $|Y_{lm}|^2$ не зависит от угла φ, то это распределение обладает симметрией вращения около оси z, на которую проектируется орбитальный момент $\mathbf{l}$. В соответствии с видом функции Y_{lm} (66.16) при $l = 0$ (s-состояние) распределение плотности вероятности $|Y_{lm}|^2$ представляет собой сферическое облако, при $l \neq 0$ оно носит более сложный характер. На

рис. 66.6 показаны полярные диаграммы плотности вероятности $|Y_{lm}|^2$ для ряда значений l и пространственное квантование проекции l_z. Они соответствуют электрону, который, двигаясь под действием центральной силы около неподвижного ядра, остается все время на одном и том же расстоянии от него.

С увеличением l распределение электронов в пространстве концентрируется все больше и больше около плоскости, в которой лежат боровские орбиты [65.1] (на рис. 66.6 они не заштрихованы; стрелки указывают направления момента импульса l).

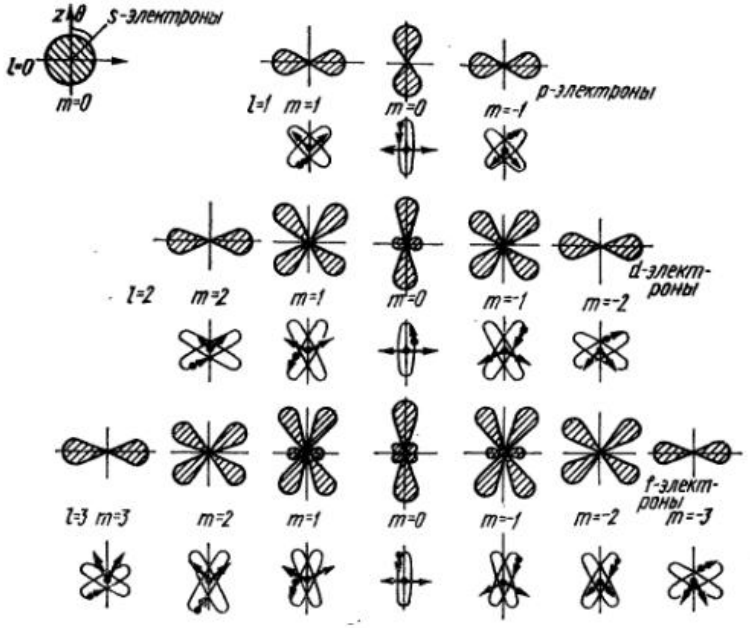


Рис. 66.6

66.3. Спектры атомов щелочных металлов

66.3.1. **Модель валентного электрона.** Сложные атомы представляют собой систему многих электронов, движущихся в кулоновском поле ядра. Расчет спектра таких атомов на основе уравнения Шредингера [67.1] является трудной проблемой. Поэтому на практике пользуются методами приближенного решения задачи многих тел, учитывающими особенности рассматриваемых многоэлектронных систем. Так, спектральные свойства атомов щелочных металлов (Li, Na, K, Rb, Cs) могут быть легко объяснены с помощью приближенного расчета, аналогичного расчету спектра водородоподобного атома [66.2].

Исследование спектров атомов щелочных металлов показало, что они по внешнему виду похожи на спектр водорода и состоят из серий, линии которых в пределах одной серии закономерно сгущаются к границе серии, а их интенсивность при этом падает. Однако эти серии описываются комбинацией термов T_n, сходных с водородоподобными $T_n = R/n^2$ (52.16), но не совпадающими с ними (Ридберг):

$$T_n = \frac{R}{(n+\sigma)^2}, \tag{66.36}$$

где R — постоянная Ридберга (52.15), n — целое число, σ — некоторая поправка, которая сохраняет постоянное значение в пределах одной серии и изменяется при переходе от одной серии к другой. Поэтому спектральные линии атомов щелочных металлов описываются формулой

$$\nu = R\left[\frac{1}{(n+\sigma_1)^2} - \frac{1}{(k+\sigma_2)^2}\right], \tag{66.37}$$

где n — постоянное, а k — переменное целое число, σ_1 и σ_2 — поправки, ν — частота линии спектра излучения атома.

Качественное объяснение спектра (66.37) следует из периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Из нее видно, что щелочные металлы следуют за инертными газами: Li за He, Na за Ne, K за Ar, Rb за Kr, Cs за Xe. Атомы инертных газов He, Ne, Ar, Kr, Xe очень устойчивы к ионизации, а атомы щелочных металлов ионизируются очень легко. Так, энергия E_0, необходимая для удаления первого электрона (первый ионизационный потенциал [65.2.2]) равна 24,45 эВ для He, 5,37 эВ для Li, 21,48 эВ для Ne, 5,12 эВ для Na и т. д. Это позволяет считать, что у щелочных металлов, имеющих Z электронов, $(Z-1)$ из них образуют устойчивую структуру инертного газа, а последний электрон слабо связан с ядром атома. Этот слабо связанный электрон движется в электрическом поле остова, образуемого ядром с зарядом $+Ze$ и $(Z-1)$ электронами. Заряд остова $Ze - e(Z-1) = +e$. Последний электрон принято называть *оптическим* или *валентным*, поскольку он определяет химическую валентность атома.

Валентный электрон, двигаясь в поле остова щелочного элемента с эффективным зарядом $+e$, деформирует его, притягивая его положительно заряженную часть и отталкивая отрицательную. Это означает, что движение валентного электрона происходит в центральном поле точечного заряда $+e$, на которое накладываются поля диполя, квадруполя, октуполя и т. д. Его потенциальная энергия представляется в виде ряда

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - c_1\frac{e^2}{r^2} - c_2\frac{e^2}{r^3} - \ldots, \tag{66.38}$$

где первое слагаемое есть потенциальная энергия электрона в поле точечного заряда, второе — в поле диполя, третье — в поле квадруполя и т. д. Подставляя (66.38) в стационарное уравнение Шредингера (62.74) и решая его так, как это делается для водородоподобного атома [66.2], можно рассчитать спектр энергетических состояний E_n и получить спектральные термы по формулам (65.5). Учет только поля точечного заряда в (66.38) дает спектр водорода (66.18) при $Z = 1$. Учет двух слагаемых в (66.38) приводит к собственным значениям соответствующего уравнения Шредингера вида

$$E_{nl} = -\frac{\mu e^4}{2n^{*2}\hbar^2} = -\frac{\mu e^4}{2(n+\sigma)^2\hbar^2}, \quad n^* = n+\sigma, \tag{66.39}$$

где n — главное квантовое число (66.19), которое принимает целые значения, μ — приведенная масса электрона (66.4) с m_a, равной массе

остова,

$$\sigma = -c_1 \frac{\mu e^2}{\hbar^2 (l + 1/2)} \qquad (66.40)$$

— поправочный член, который зависит от азимутального квантового числа l. Поэтому термы Ридберга атомов щелочных металлов

$$T_{nl} = -E_{nl}/2\pi\hbar = R/(n + \sigma)^2, \qquad (66.41)$$

соответствующие s-, p-, d-, ... электронам при одном и том же значении n, не являются одинаковыми по величине. Вырождение по l, которое имеется у атома водорода, снимается (рис. 66.7). Наибольшее значение σ принимает при $l = 0$. Поправка σ зависит от рода щелочного металла. Эта зависимость заключена в коэффициенте c_1.

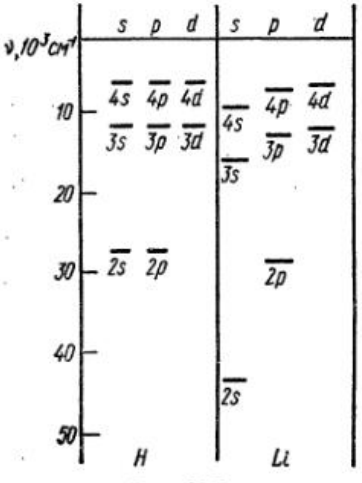


Рис. 66.7

Поглощение и испускание света подчиняется правилам отбора (66.22). Серия, возникающая при комбинации термов s и p, называется *главной*. Это переходы $2s \leftrightarrow np$ (n=2, 3, ...) для Li, $3s \leftrightarrow np$ (n = = 3, 4, ...) для Na. Серии, у которых основным термом является терм типа p, называются *побочными* или *диффузными*. Это переходы $2p \leftrightarrow ns$ (Li), $3p \leftrightarrow ns$ (Na), $2p \leftrightarrow nd$ (n = 3, 4, ...), $3p \leftrightarrow nd$ (n = 4, 5, ...). Серии $3d \leftrightarrow nf$ (Li), $3d \leftrightarrow nf$ (Na) и т. д. называются *фундаментальными* или *сериями Бергмана*. Они находятся в инфракрасной части спектра. Все указанные серии, кроме главной, при обычных условиях наблюдаются только в виде серий линий испускания.

66.3.2. Мультиплетность спектров и спин электрона. Тщательные исследования спектров атомов щелочных металлов с помощью приборов с большой разрешающей способностью показали, что каждая линия этих спектров имеет *тонкую структуру* — она состоит из двух линий. Так, наиболее яркая линия главной серии натрия $3s \leftrightarrow 3p$ (так называемая желтая D-линия) представляет собой дублет: D_1= 589,5930 нм, D_2= 588,9963 нм с расстоянием между линиями 0,6 нм, а линия главной серии цезия $6s \leftrightarrow 6p$ разделяется на две 894,346 нм и 852,112 нм с расстоянием между ними 42,2 нм.

Сложные (составные) линии, состоящие из нескольких простых линий, называют *мультиплетами*; одиночные линии называют синглетами, двойные — дублетами, тройные — триплетами, четверные — квартетами и т. д. Опыт показывает, что тонкую структуру имеют атомы не только щелочных металлов, но и других элементов.

Поскольку расщепление спектральных линий обусловлено расщеплением энергетических уровней, Паули (1924) предложил для описания состояний электрона ввести дополнительное квантовое число к числам n, l, m. Уленбек и Гаудсмит (1925) связали с новым квантовым числом понятие о собственном моменте импульса S электрона, получившем название *спина электрона* [63.2.1]. Спин считается внутренним свойством, присущим электрону наряду с массой и зарядом. Первоначально предполагалось (Уленбек и Гаудсмит), что спин обусловлен вращением

электрона вокруг собственной оси подобно волчку. Однако дальнейшие исследования показали, что спин является сугубо квантовым свойством электрона, не имеющим классического аналога. Наличие у электрона спина было подтверждено опытами Штерна и Герлаха [67.4.5]. Его существование автоматически следовало из релятивистского уравнения Дирака [63.2], удовлетворяющего требованиям теории относительности.

По аналогии с моментом импульса (орбитальным моментом) l (62.28), который принимает дискретные значения согласно правилу (66.11), постулируется, что спиновый момент импульса S также квантуется. Величина спина определяется по общим законам квантовой механики:

$$\hat{\mathbf{S}}^2 \chi_{sm_s} = \hbar^2 s(s+1)\, \chi_{sm_s},$$
$$\hat{S}_z \chi_{sm_s} = \hbar m_s \chi_{sm_s} \quad (m_s = -s, -s+1, \ldots, s), \qquad (66.42)$$

где $\hat{\mathbf{S}}^2$ — квадрат оператора спина, $s \geqslant 0$ — спиновое квантовое число, определяющее величину спина, $\hat{S}_z$ — оператор проекции спина на заданное направление (ось z), m_s — проекция спина на ось z. Квантовое число m_s принимает $2s+1$ значение. Функции χ_{sm_s} являются собственными функциями операторов $\hat{\mathbf{S}}^2$ и $\hat{S}_z$.

В спектре щелочных металлов наблюдается расщепление каждого уровня энергии на два подуровня. Это означает, что $2s + 1 = 2$, т. е. числу s следует приписать значение 1/2. Тогда собственное значение оператора квадрата спина электрона $|\mathbf{S}^2| = \hbar^2 \frac{3}{4}$, а его проекция принимает два значения $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$, т. е. $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Таким образом, состояние электрона в атоме определяется четырьмя квантовыми числами n, l, m, m_s, если все физические величины, связанные с ними (энергия, квадрат момента импульса, проекция момента импульса на ось z, проекция спина на ось z) не изменяются со временем. В действительности, однако, между механическим орбитальным $|\mathbf{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$ и спиновым $|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{s(s+1)}$ моментами существует взаимодействие, обусловливающее тонкую структуру спектра [66.4]. Поэтому сохраняющейся величиной является полный момент импульса

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{S}. \qquad (66.43)$$

Собственные значения квадрата полного момента импульса $|\mathbf{j}^2|$ и его проекция j_z на ось z равны соответственно:

$$|\mathbf{j}^2| = \hbar^2 j(j+1), \quad j_z = m_j \hbar, \qquad (66.44)$$

где квантовые числа j и m_j принимают значения

$$j = l + s,\ l + s - 1,\ l + s - 2,\ \ldots,\ |l - s|, \qquad (66.45)$$
$$m_j = j,\ j-1,\ j-2,\ \ldots,\ -j.$$

Энергия электрона характеризуется тремя квантовыми числами n, l, j. Так как для электрона $s = \frac{1}{2}$, то для атомов с одним валентным электроном зависимость энергии от квантового числа j приводит к расщеплению уровней на два: с $j = l + \frac{1}{2}$ и $j = l - \frac{1}{2}$. Так как l

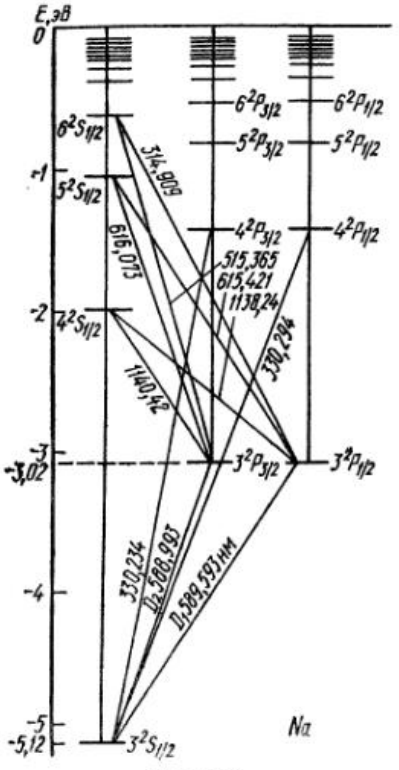


Рис. 66.8

принимает только целые значения, то в таких атомах j имеет только полуцелые значения: $j = 3/2$, $5/2$ ($l = 2$) и т. д. [66.4.1].

В спектроскопии приняты следующие обозначения для термов отдельных электронов и всего атома в целом: ${}^{2s+1}L_j$, где s — спин атома, L — его орбитальный момент, отмечаемый прописной буквой латинского алфавита по схеме, аналогичной классификации электронов (66. 21), j — полный момент атома. В случае атома с одним валентным электроном возможны следующие энергетические состояния

l \ j	1/2	3/2	5/2	7/2
0	${}^2S_{1/2}$			
1	${}^2P_{1/2}$	${}^2P_{3/2}$		
2		${}^2D_{3/2}$	${}^2D_{5/2}$	
3			${}^2F_{5/2}$	${}^2F_{7/2}$

(66.46)

и т. д. Для такого атома можно указать также значение его главного квантового числа n, которое пишется перед обозначением терма, например, $2\,{}^2S_{1/2}$, $3\,{}^2P_{3/2}$, $3\,{}^2D_{5/2}$, $5\,{}^2P_{3/2}$ и т. п. Если атом содержит несколько оптических электронов, то для такого атома в общем случае указать главное квантовое число n нельзя, так как различные электроны могут иметь неодинаковые наименьшие главные квантовые числа. Так, у лития в нормальном состоянии два электрона имеют $n = 1$, а третий $n = 2$.

Из анализа спектров установлено, что переходы происходят только между состояниями, у которых j имеет одно и то же значение или отличается на единицу (правила отбора):

$$\Delta j = 0, \pm 1. \tag{66.47}$$

Схема уровней натрия и некоторые из возможных переходов показаны на рис. 66.8.

Таким образом, учет спина электрона требует введения новых квантовых чисел j и m_j. В случае, если взаимодействие спинового и орбитального моментов мало, как, например, в сильном магнитном поле (сложный эффект Зеемана [68.2.1]), то энергетические состояния описываются квантовыми числами m и m_s.

66.4. Тонкая структура спектров атомов

66.4.1. Энергия спин-орбитальной связи. Взаимодействие спинового **S** и орбитального **l** моментов дает поправку ΔE_{ls} к энергии E_{nl} (66.39) атома щелочного металла или E_n (66.18) водорода. Эта поправка связана с энергией магнитного взаимодействия V_{ls} орбитального и спинового токов. Ее можно выразить как энергию спинового тока, с которым связан спиновый магнитный момент электрона [67.4.2]

$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{m_e c}\mathbf{S},\quad \mu_{S_z} = -\frac{e}{m_e c}S_z = -m_s\frac{e\hbar}{m_e c} = \mp\frac{e\hbar}{2m_e c}, \tag{66.48}$$

в магнитном поле **H**, создаваемом его орбитальным движением:

$$V_{ls} = -\boldsymbol{\mu}_S\mathbf{H}. \tag{66.49}$$

Так как спиновый ток должен рассматриваться в системе координат, в которой электрон покоится, то магнитное поле **H** создается ядром атома, движущимся вокруг электрона со скоростью **v**, численно равной скорости электрона, но направленной в противоположную сторону. Согласно закону Био — Савара [29.2.3] в точке, где находится электрон, поле

$$\mathbf{H} = -\frac{Ze}{cr^3}(\mathbf{v}\times\mathbf{r}) = \frac{Ze\mathbf{l}}{m_e c r^3},\quad \mathbf{l} = m_e(\mathbf{r}\times\mathbf{v}). \tag{66.50}$$

Добавочная энергия атома, обусловленная взаимодействием (66.49), (66.50), равна его среднему значению по распределению вероятности нахождения электрона на расстоянии r от ядра для состояния с заданными квантовыми числами n, l:

$$\Delta E_{ls} = \langle V_{ls}\rangle_{nl} = \left\langle\frac{Z}{r^3}\right\rangle_{nl}\left(\frac{e\hbar}{2m_e c}\right)^2\frac{2\mathbf{lS}}{\hbar^2}. \tag{66.51}$$

Это выражение содержит магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}. \tag{66.52}$$

Величина $\langle Z/r^3\rangle_{nl}$ относится к электрону, который движется в кулоновском поле ядра с зарядом Ze. Более общее соотношение, учитывающее экранирующее действие других электронов и описывающее электрон с потенциальной энергией $V(r)$, получается заменой

$$e^2\left\langle\frac{Z}{r^3}\right\rangle_{nl} \longrightarrow \left\langle\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right\rangle_{nl}. \tag{66.53}$$

Взаимодействие V_{ls}, описываемое формулами (66.51), (66.53) (без усреднения по состояниям nl) называют *спин-орбитальным взаимодействием*:

$$V_{ls} = -\lambda\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)\mathbf{lS},$$

где λ — постоянная взаимодействия.

В квантовой механике показывается, что

$$\left\langle\frac{Z}{r^3}\right\rangle_{nl} = \frac{Z^4}{a_0^3 n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)},\quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \tag{66.54}$$

$$\frac{2\mathbf{lS}}{\hbar^2} = \frac{|\mathbf{j}|^2 - |\mathbf{l}|^2 - |\mathbf{S}|^2}{\hbar^2} = j(j+1) - l(l+1) - s(s+1), \tag{66.55}$$

где a_0 — боровский радиус (65.10), и поправка к энергии ΔE_{ls} имеет вид

$$\Delta E_{ls} = \frac{Z^4}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} \frac{v_0^2}{a_0^3} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] = \\ = \frac{\pi R \alpha^2 \hbar c Z^4}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)], \quad (66.56)$$

где R — постоянная Ридберга, α — постоянная тонкой структуры:

$$R = \frac{m_e e^4}{4\pi\hbar^3 c}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}03604} = 7{,}29735 \cdot 10^{-3}. \quad (66.57)$$

Для атома с одним валентным электроном j принимает два значения: $l \pm \frac{1}{2}$. Поэтому поправка

$$\Delta E_{ls} = \begin{cases} \dfrac{\pi R \alpha^2 \hbar c Z^4}{n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)(l+1)}, & j = l + \frac{1}{2}, \\ -\dfrac{\pi R \alpha^2 \hbar c Z^4}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)}, & j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (66.58)$$

Разность энергий двух уровней $E_{nlj} = E_{nl} + \Delta E_{ls}$ определяет дублетное расщепление тонкой структуры спектров щелочных металлов. Согласно (66.58) поправка ΔE_{ls} пропорциональна квадрату постоянной тонкой структуры α (66.57), которая является малой величиной. Поэтому расстояние между уровнями тонкой структуры примерно в 10^5 раз меньше, чем расстояние между уровнями с теми же значениями nl.

Так как постоянная α может быть представлена комбинацией трех величин: e^2, комптоновской длины волны электрона $\lambda_c = \hbar/m_e c$ [57.2] и его энергии покоя $m_e c^2$, т. е. $\alpha = e^2/\lambda_c m_e c^2$, то постоянная тонкой структуры характеризует взаимодействие двух электронов на расстоянии λ_c в единицах $m_e c^2$. Постоянную α называют *константой связи электрона с электромагнитным полем*. Выражение для α (66.57) не содержит массы электрона, поэтому α является константой связи с электромагнитным полем любой элементарной частицы с зарядом e.

66.4.2. Релятивистская поправка. Движение электрона в поле центральных сил описывается уравнением Дирака [63.2]. Получаемое с его помощью решение автоматически учитывает релятивистские эффекты, наличие у электрона спина и его взаимодействие с орбитальным моментом. Эту задачу можно решить и с помощью уравнения Шредингера, обобщенного на релятивистский случай. Его можно получить, воспользовавшись функцией Гамильтона, представляющей собой полную релятивистскую энергию электрона за вычетом его энергии покоя:

$$H = T + V = \left(\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} - m_e c^2\right) + V = \\ = V + \frac{p^2}{2m_e} - \frac{p^4}{8m_e^3 c^2} + \dots, \quad (66.59)$$

разложенную в ряд Тейлора по малому параметру $p^2/m_e^2 c^2$ (считаем, что $v \ll c$, а значит, $p \ll m_e c$) [6.3.4]. Заменим классические величины соответствующими операторами, согласно правилам квантовой механики [62.1.2]. Предполагая, что собственные функции и собственные значения уравнения, построенного по функции Гамильтона (66.59), мало отличаются от значений, даваемых уравнением Шредингера (62.74) с $m = m_e$, приходим к уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta\psi + \left[(V-E) - \frac{1}{2m_e c^2}(V-E)^2\right]\psi = 0. \quad (66.60)$$

В случае водородоподобного атома потенциал V имеет вид (66.5) и уравнение (66.60) может быть решено методом, описанным в [66.2]. Его собственные значения энергии E имеют вид

$$E = m_e c^2 \left\{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left[n_r + \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 Z^2} - \frac{1}{2}\right]^2}\right\}^{-1/2} - 1, \quad (66.61)$$

где α — постоянная тонкой структуры (66.57), n_r — радиальное квантовое число, как в (66.18), (66.19), а квадратный корень в знаменателе взят со знаком плюс (знак минус соответствует отрицательным решениям уравнения Дирака, связанным с позитроном [63.2.1; 63.2.2]). Представляя правую часть формулы (66.61) в виде разложения по степеням малого параметра α^2, с точностью до α^4 получаем

$$E = -m_e c^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2n^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}\left(\frac{n}{l+1/2} - \frac{3}{4}\right)\right] + \dots, \quad (66.62)$$

$$n = n_r + l + 1.$$

Энергия E (66.62) представляет собой сумму энергий E_n (66.18) атома без учета релятивистского эффекта и релятивистской поправки ΔE_p:

$$E = E_n + \Delta E_p,$$

$$\Delta E_p = E_n \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{l+1/2} - \frac{3}{4n}\right), \quad E_n = -\frac{\alpha^2 m_e c^2 Z^2}{2n^2}. \quad (66.63)$$

Поправка ΔE_p мала. Для атома водорода ($E_1 = -13{,}53$ эВ)

$$|\Delta E_p| \sim |\alpha^2 E_1| = 7{,}21 \cdot 10^{-4}\ \text{эВ} \sim 10^{-3}\ \text{эВ}. \quad (66.64)$$

66.4.3. Тонкая структура спектральных линий атома водорода. Тонкая структура спектра атома водорода является результатом двух физических эффектов: зависимости массы электрона в атоме от скорости его движения вокруг ядра (релятивистский эффект) и спин-орбитального взаимодействия. Поэтому энергии стационарных состояний электрона описываются формулой

$$E = E_n + \Delta E_p + \Delta E_{ls}, \quad (66.65)$$

где E_n и ΔE_p определяются формулами (66.63), а ΔE_{ls} — (66.58). Отсюда следует, что

$$E = -\frac{(Ze^2)^2 m_e}{2\hbar^2 n^2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right\}, \quad j = l \pm \frac{1}{2}, \quad (66.66)$$

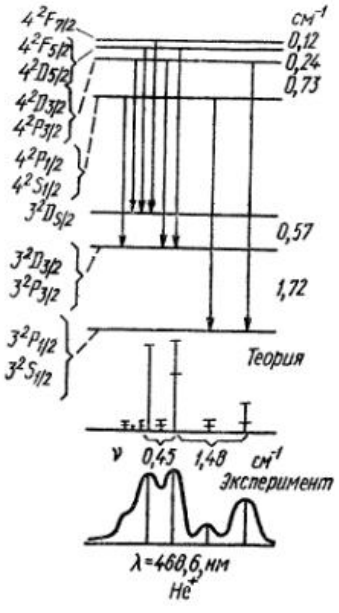


Рис. 66.9

т. е. влияние двух эффектов приводит к тому, что все уровни водородоподобного атома расщепляются на два: с $j = l + \frac{1}{2}$ и $j = l - \frac{1}{2}$ (кроме s-уровня). Масштабы этого расщепления определяются постоянной тонкой структуры α. Для легких атомов оно не превышает 10^{-5} эВ и увеличивается с ростом Z.

Поправка ΔT к терму $T = -E/2\pi\hbar c$ определяется формулой

$$\Delta T = \frac{\Delta E_p + \Delta E_{ls}}{2\pi\hbar c} = \frac{R\alpha^2 Z^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right), \quad (66.67)$$

где R — постоянная Ридберга (66.57). Эта формула определяет тонкую структуру линий спектра водородоподобного атома. На рис. 66.9 показана тонкая структура линии $\lambda = 468{,}6$ нм атома гелия He^+. Причины небольшого расхождения теории и эксперимента относятся к фундаментальным проблемам о структуре электрона, происхождении его массы, поля и т. п. В частности, наблюдаемые малые сдвиги уровней по сравнению с их положением, предсказываемым теорией Дирака, объясняются взаимодействием электрона с нулевыми колебаниями вакуума, приводящим к колебаниям электрона около некоторого среднего положения и изменению его средней потенциальной энергии. Эти и подобные тонкие эффекты изучаются в квантовой электродинамике [77.3.2].

66.4.4. Дублеты щелочных металлов. Формула тонкой структуры спектров водородоподобных атомов (66.67) может быть обобщена на случай атомов щелочных металлов

$$\Delta T = \frac{R\alpha^2 (Z-a)^4}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right), \quad j = l \pm \frac{1}{2}, \quad (66.68)$$

где $(Z - a)$ есть эффективный заряд ядра, величина a характеризует экранирование заряда ядра электронами остова. В случае щелочных металлов термы s, p, d различны и их подуровни не совпадают. Каждый терм образует два подуровня, что и обусловливает дублетную структуру спектральных линий щелочных металлов.

66.4.5. Опыты Лэмба и Ризерфорда. Лэмбовский сдвиг. Более последовательный по сравнению с рассмотренным в [66.4.3] расчет тонкой структуры спектра водородоподобных атомов может быть выполнен на основе релятивистской квантовой теории Дирака [63.2]. Решение уравнения Дирака для электрона, движущегося в электрическом поле ядра с зарядом Ze, приводит к формуле для энергии E стационарных состояний одноэлектронного атома, которая с точностью до членов порядка α^4 совпадает с выражением (66.66), полученным в квазирелятивистском приближении, основанном на уравнении Шредингера. Согласно (66.66) у водородоподобных атомов уровни с одинаковыми квантовыми числами n и j точно совпадают независимо от значений квантового числа l. Экспериментальная проверка этого предсказания теории является принципиальной, так как позволяет установить границы применимости уравнения Дирака.

Наиболее простыми представляются опыты с водородом. Нижний терм серии Бальмера ($n = 2$) имеет три состояния: $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$. По теории Дирака первые два уровня должны совпадать. Заключение о положении этих уровней можно сделать, изучая тонкую структуру водородной линии H_α (рис. 66.2), возникающей при переходе $3d \to 2p$. В ряде предварительных опытов (1934—1938) было получено указание на то, что уровень $2^2S_{1/2}$ находится немного выше уровня $2^2P_{1/2}$. Использовавшиеся при этом оптические методы исследования

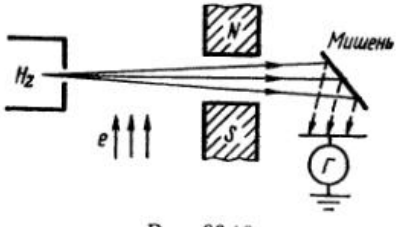


Рис. 66.10

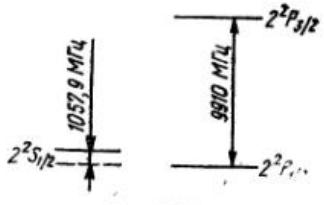


Рис. 66.11

позволили определить только масштабы ожидаемого смещения уровней, но не само смещение.

Необходимая точность измерения была достигнута в опытах Лэмба и Ризерфорда (1947), применивших радиоспектроскопический метод. Здесь атомарный водород в основном состоянии $1^2S_{1/2}$ получался путем диссоциации молекул водорода H_2 при высокой температуре. Пучок атомов водорода направлялся на мишень. Выбиваемые ими электроны мишени регистрировались чувствительным гальванометром (рис. 66.10). Пучок атомов на своем пути пересекал пучок электронов, после чего атомы проходили через переменное магнитное поле, частота которого плавно изменялась в определенных пределах.

В основе опытов лежали следующие физические представления. Атомы водорода в основном состоянии, попав на мишень, не могут передать энергию ее электронам. Однако в результате столкновения атомов водорода с электронами пучка часть из них переходит в возбужденные состояния $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$. За время пролета к мишени атомы водорода успевают перейти из возбужденных p-состояний в основное $1^2S_{1/2}$, поскольку время их жизни $\sim 10^{-9}$ с. Переход из состояния $2^2S_{1/2}$ в основное запрещен правилом отбора $\Delta l = \pm 1$ (66.22). Атомы в этом состоянии достигают мишени, передают ей энергию возбуждения, равную 10,2 эВ, и вырывают из нее электроны. Появляется электрический ток, который регистрируется гальванометром. Когда атомов в состоянии $2^2S_{1/2}$ нет, тогда ток отсутствует. Если предположить, что уровень $2^2S_{1/2}$ действительно находится выше уровня $2^2P_{1/2}$ на малую величину ΔE, то уровень $2^2S_{1/2}$ будет метастабильным, так как вероятность перехода с него на уровень с $2^2P_{1/2}$ имеет порядок

ΔE и потому очень мала. Однако, подвергая атомы в состоянии $2^2S_{1/2}$ воздействию внешнего магнитного поля с частотой $\nu = \Delta E/h$, можно заставить их совершать вынужденные переходы в состояние $2^2P_{1/2}$, из которого они за время $t \sim 10^{-9}$ с самопроизвольно возвратятся в основное состояние $1^2S_{1/2}$. В результате в пучке атомов водорода будут отсутствовать атомы в возбужденном состоянии $2^2S_{1/2}$, а значит, ток через гальванометр течь не будет. Изменяя плавно частоту переменного магнитного поля по минимуму тока можно определить резонансную частоту поля ν и разность уровней ΔE. Лэмбом и Ризерфордом было установлено, что уровень $2^2S_{1/2}$ атома водорода находится выше уровня $2^2P_{1/2}$ на малую величину, равную в частотах $\Delta\nu = 1057{,}90 \pm 0{,}06$ МГц. Это соответствует энергии $\Delta E \simeq 4{,}4 \cdot 10^{-6}$ эВ, или в длинах волн $\Delta\lambda \sim 28$ см, что примерно в 10 раз меньше расстояния между уровнями $2^2P_{1/2}$ и $2^2P_{3/2}$ (рис. 66.11).

Разность между уровнями тонкой структуры с одинаковыми квантовыми числами n и j, но различными l называется *лэмбовским сдвигом*. Дальнейшие исследования, выполненные в рамках квантовой электродинамики (Бете), показали, что лэмбовский сдвиг обусловлен взаимодействием электрона с вакуумом, рассматриваемым как суперпозиция состояний с виртуально рождающимися и исчезающими виртуальными фотонами, электронно-позитронными и другими парами частиц и античастиц. Такая концепция вакуума является дальнейшим развитием идей Дирака [63.2.2]. Точные измерения лэмбовского сдвига позволяют судить о точности, с которой в атомных масштабах справедлив закон Кулона. В настоящее время установлено, что этот закон выполняется вплоть до расстояний порядка 10^{-16} см.

67. АТОМЫ СО МНОГИМИ ЭЛЕКТРОНАМИ

67.1. Уравнение Шредингера для системы электронов

67.1.1. Принцип Паули. Атом со многими электронами представляет собой систему, содержащую абсолютно одинаковые частицы — электроны. Такие системы в квантовой механике подчиняются принципу тождественности (неразличимости) одинаковых частиц [62.4.6]: состояния квантовой системы, отличающиеся одно от другого перестановками одинаковых частиц местами, следует рассматривать как одно и то же состояние. Так как состояния квантовой системы описываются волновыми функциями [62.1.1], то принцип неразличимости одинаковых частиц записывается в виде

$$\hat{P}_{ij}\ \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = \lambda\Psi(x_1, x_2 \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N), \tag{67.1}$$

где $\hat{P}_{ij}$ — оператор перестановки частиц i и j:

$$\hat{P}_{ij}\,\Psi(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \Psi(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots),$$
$$\hat{P}_{ij}^2 = 1, \tag{67.2}$$

а λ — его собственное значение. Из свойства $\hat{P}_{ij}^2 = 1$ следует, что $\lambda^2 = 1$ и $\lambda = \pm 1$, т. е.

$$\Psi(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots) = \pm\Psi(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots). \tag{67.3}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — координаты (пространственные и спиновые) N частиц. Поскольку гамильтониан системы из N одинаковых частиц ($m_i = m$, $i = 1, 2, \ldots, N$) не изменяется при перестановке любой пары частиц, то оператор $\hat{P}_{ij}$ коммутирует с гамильтонианом:

$$\hat{P}_{ij}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}_{ij}, \tag{67.4}$$

его собственные значения $\lambda = \pm 1$ являются интегралами движения [62.2.2] и, следовательно, характеризуют *многочастичную квантовую систему*.

В соответствии с принципом тождественности одинаковых частиц (67.3) возможны только два типа функций. Волновая функция Ψ, которая не изменяется при перестановке частиц, называется *симметричной* относительно этих частиц. Волновая функция Ψ, которая при перестановке частиц изменяет только свой знак, называется *антисимметричной*.

Опыт показывает, что свойство симметрии волновой функции многочастичной системы однозначно связано с величиной спина S тождественных частиц, составляющих эту систему, и не зависит от того, являются эти частицы элементарными (электрон, фотон и др.) или составными (α-частица, протон и др.). Оказывается, что антисимметричными волновыми функциями описываются многочастичные системы, состоящие из частиц с полуцелым спином $\left(\frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \frac{5}{2}\hbar, \ldots\right)$. Такими частицами являются электрон, протон, нейтрон и др. Симметричные функции описывают системы, состоящие из частиц, имеющих целый спин ($0\hbar$, $1\hbar$, $2\hbar$, $3\hbar$, ...). Такими частицами являются фотон, π-мезон и др. Частицы с полуцелым спином называют *фермионами*, а с целым спином — *бозонами*.

Уравнение Шредингера (62.40) с гамильтонианом (62.39) допускает решения общего вида, которые, вообще говоря, не обладают определенным типом симметрии. Однако из этих решений Ψ можно построить волновую функцию с требуемым свойством симметрии по правилу

$$\Psi_s = A\sum_{\nu}\hat{P}_\nu\,\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N),$$
$$\Psi_a = B\sum_{\nu}(-1)^\nu\hat{P}_\nu\,\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_N), \tag{67.5}$$

где Ψ_s и Ψ_a — симметричная и антисимметричная функции, $\hat{P}_\nu$ — оператор перестановки частиц пары с номером ν, суммирование производится по всем $N!$ функциям, соответствующим всем различным перестановкам N частиц, A и B — нормировочные постоянные.

Наиболее простой вид функции Ψ_s и Ψ_a (67.5) имеют в том случае, когда N частиц системы между собой не взаимодействуют, а ее гамильтониан $\hat{H}$ не зависит от времени. Решение стационарного многочастичного уравнения Шредингера (62.73), описывающего такую систему, дается выражениями

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_N,\quad \psi = \psi_1(x_1)\,\psi_2(x_2)\ldots\psi_N(x_N), \tag{67.6}$$

где

$$(\hat{H}_i - E_i)\,\psi_i(x_i) = 0,\quad \hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \ldots + \hat{H}_N, \tag{67.7}$$

$\hat{H}_i$ — гамильтониан частицы i, E_i — ее энергия. Так как частицы тождественны, то индекс i у E_i и ψ_i фактически соответствует номеру стационарного состояния, в котором находится каждая из частиц. Симметричная ψ_s и антисимметричная ψ_a функции легко могут быть построены по одночастичным функциям $\psi_i(x_i)$:

$$\psi_s = A \sum_{\nu} P_\nu \psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \ldots \psi_N(x_N), \qquad (67.8)$$

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \ldots & \psi_1(x_N) \\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \ldots & \psi_2(x_N) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \ldots & \psi_N(x_N) \end{vmatrix}. \qquad (67.9)$$

Вид функции ψ_a в форме определителя (67.9) согласуется с **принципом Паули** (1925): *две тождественные частицы с полуцелым спином не могут одновременно находиться в одном состоянии*. Этот принцип является фундаментальным законом природы. Действительно, если бы две частицы одновременно находились в одинаковых одночастичных состояниях, например $\psi_i(x_1) = \psi_j(x_2)$ при $i \neq j$, то определитель тождественно обращался бы в нуль и $\psi_a \neq 0$, т. е. такое состояние не осуществляется. Выражение (67.9) называют *детерминантом Слэтера*.

В случае атомных систем принцип Паули означает, что в определенном квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Если спин-орбитальное взаимодействие [66.4.1] мало, то полную волновую функцию атома со многими электронами можно представить в виде произведения функции, зависящей только от пространственных координат $\mathbf{r}_i$ электронов, на функцию одних только спинов s_i (спиновая функция χ (66.42)):

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N)\chi(s_1, s_2, \ldots, s_N). \qquad (67.10)$$

Согласно принципу Паули полная волновая функция системы тождественных фермионов ψ должна быть антисимметрична как по отношению к пространственным переменным $\mathbf{r}_i$, так и по отношению к переменным спина s_i. Поэтому в самом простом случае функция ψ_a может быть получена двумя путями:

$$\psi_a = \Phi_s\chi_a, \quad \psi_a = \Phi_a\chi_s, \qquad (67.11)$$

где $\Phi_s(\Phi_a)$ и $\chi_s(\chi_a)$ — симметричные (антисимметричные) пространственная и спиновая волновые функции. В общем случае многофермионных систем волновая функция ψ_a строится как линейная комбинация произведений функций Φ и χ, каждая из которых может быть симметричной по отношению к перестановкам одних частиц, антисимметричной по отношению к перестановкам других и не иметь определенной симметрии по отношению к перестановкам третьей группы частиц. Разработаны общие методы построения волновых функций ψ заданной симметрии, основанные на схемах Юнга.

67.1.2. Приближение независимых электронов. Наиболее широко изучаемой характеристикой атома является спектр его энергетических уровней. Этот спектр может быть рассчитан на основе решения уравнения Шредингера для системы электронов:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\sum_{i=1}^{Z}\Delta_i - \sum_{i=1}^{Z}\frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{i=1}^{Z}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + V_{co} + V_p - E\right]\psi = 0, \qquad (67.12)$$

где первая сумма представляет собой кинетическую энергию Z атомных электронов с массой m_e, вторая описывает притяжение электронов к ядру с зарядом Ze, третья — взаимное отталкивание всех пар электронов. Слагаемое V_{co} описывает спин-орбитальное взаимодействие для каждого электрона:

$$V_{co} = \sum_{i=1}^{Z}\left\langle \frac{1}{r_i}\frac{dU(r_i)}{dr_i}\right\rangle_{n_i l_i} \frac{e^2}{2m_e^2 c^2}\,\mathbf{l}_i\mathbf{s}_i, \qquad (67.13)$$

где $U(r_i)$ — потенциальная энергия i-го электрона, учитывающая экранировку со стороны других электронов, $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ — его орбитальный и спиновый моменты, а усреднение производится по одночастичным состояниям, описываемым квантовыми числами $n_i l_i$ [66.4.1]. Слагаемое V_p описывает более тонкие эффекты взаимодействия спинов различных электронов и зависимость потенциальной энергии электронов от импульса, приводящую к релятивистским поправкам в спектре [66.4.2]. Уравнение (67.12) записано в предположении покоящегося ядра, поэтому $\mathbf{r}_i$ есть радиус-вектор, проведенный из ядра к i-му электрону, Δ_i — оператор дифференцирования (62.18) по координатам i-го электрона.

Точное решение многочастичного уравнения (67.12) представляет собой трудную задачу. Поэтому большое распространение в атомной физике получили различные методы приближенного вычисления энергетических состояний атомов, содержащих более двух электронов.

В *приближении независимых электронов* волновая функция ψ уравнения (67.12) представляется в виде произведений одночастичных состояний $\psi_{n_i l_i m_i}$:

$$\psi = \psi_{n_1 l_1 m_1}\psi_{n_2 l_2 m_2}\ldots\psi_{n_Z l_Z m_Z}, \qquad (67.14)$$

где n_i, l_i, m_i — их квантовые числа [66.2], которые удовлетворяют системе независимых уравнений ($i = 1, 2, \ldots, Z$)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta_i + U(r_i) - E_{n_i l_i}\right)\psi_{n_i l_i m_i} = 0. \qquad (67.15)$$

Уравнение (67.15) отличается от одночастичного уравнения (66.6). Потенциальная энергия U каждого электрона, находящегося в некоторой точке пространства, в каждый момент времени зависит от положения всех других электронов в этот момент. В приближении независимых электронов принимается, что потенциальная энергия U электрона зависит только от его расстояния до ядра r_i. Это соответствует сферически симметричному распределению плотности остальных электронов $\rho(r_i)$, которое считается независящим от положения i-го электрона. Межэлектронное отталкивание приводит к тому, что притяжение i-го электрона к ядру $V(r_i) = -Ze^2/r_i$ уменьшается. Потенци-

альную энергию $U(r_i)$ можно выразить через силу $F(r)$, которая действует на электрон, находящийся на расстоянии r от ядра:

$$F(r) = \left[Z - \int_0^r \rho(r')\, 4\pi r'^2\, dr' \right] \frac{e^2}{r^2},$$

где $\rho(r)$ — плотность электронов, не учитывающая влияние i-го электрона. Потенциальная энергия

$$U(r_i) = -\int_{r_i}^{\infty} F(r)\, dr = -\left[Z - \int_0^{r_i} \rho(r')\, 4\pi r'^2\, dr' \right] \frac{e^2}{r_i} + \\ + e^2 \int_{r_i}^{\infty} \rho(r')\, 4\pi r'^2 dr'. \qquad (67.16)$$

Интеграл в квадратных скобках называется *константой внутреннего экранирования*. Она равна нулю при $r_i = 0$ и стремится к $Z - 1$ при $r_i \to \infty$. Последнее слагаемое в (67.16) представляет собой потенциальную энергию внешнего экранирования. При малых r_i и больших Z вклад этого слагаемого в $U(r_i)$ составляет $\sim 20\ \%$. Расстояние r_0, для которого константа внутреннего экранирования приблизительно достигает значения $Z - 1$, можно рассматривать как радиус атома. Оказывается, что для всех атомов $r_0 \sim 0{,}1$ нм.

Уравнение Шредингера (67.15) с потенциалом $U(r_i)$ в форме (67.16) можно переписать в сферических координатах, как для атома водорода [66.2]. Собственные значения и собственные функции вращательного движения совпадают с найденными для водородоподобного атома, а радиальное движение описывается уравнением (66.17), в котором слагаемое — Ze^2/r следует заменить на $U(r)$. Зная собственные функции $R_{n_i l_i}$ такого уравнения, собственные значения $E_{n_i l_i}$ можно представить в виде

$$E_{n_i l_i} = -\frac{m_e (Z_{\text{эф}})^2_{n_i l_i} e^4}{2\hbar^2 (n_i - \sigma_{n_i l_i})^2} + (V_{\text{внеш}})_{n_i l_i}, \qquad (67.17)$$

где введены обозначения

$$(Z_{\text{эф}})_{nl} = Z - \int_0^{\langle r \rangle_{nl}} \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr,$$

$$(V_{\text{внеш}})_{nl} = e^2 \int_{\langle r \rangle_{nl}}^{\infty} \rho(r)\, 4\pi r^2\, dr, \qquad (67.18)$$

$$\langle r \rangle_{nl} = \int_0^{\infty} r R^2_{nl}(r)\, r^2\, dr,$$

σ_{nl} — поправка Ридберга (66.40). Когда внутреннее экранирование мало $(Z_{\text{эф}})_{nl} \simeq Z$, то и поправка σ_{nl} мала: $\sigma_{nl} \simeq 0$. По значению σ_{nl} можно

судить о влиянии более сильного ядерного притяжения вблизи ядра, при $r < \langle r \rangle_{nl}$. У возбужденных состояний, для которых $\langle r \rangle_{nl}$ велико, константа внутреннего экранирования близка к $(Z - 1)$ для нейтрального атома, а внешнее экранирование пренебрежимо мало. В этом случае выражение (67.17) совпадает с боровским выражением (66.39) при $Z = 1$. При этом параметр σ_{nl} почти не зависит от главного квантового числа n, и наборы собственных значений E_{nl} с большими n и фиксированными l описывают серию Ридберга (66.37) для уровней.

В приближении независимых электронов энергия атома E зависит только от собственных значений E_{nl} и от числа N_{nl} электронов в состояниях с одинаковыми квантовыми числами n и l (о таких электронах говорят, что они принадлежат одной подоболочке [67.3.1]):

$$E = \sum_{n,\, l} N_{nl} E_{nl}. \qquad (67.19)$$

Стационарное состояние атома при этом идентифицируется наборами квантовых чисел n, l, m, m_s, относящимся к одноэлектронным состояниям, где m_s принимает два значения: $\pm \frac{1}{2}$. О состояниях всего атома, различающихся только магнитными квантовыми числами m и имеющих одинаковую энергию, говорят как об одинаковых электронных конфигурациях атома. Конфигурация определяется распределением Z электронов по различным оболочкам. Ее символическое изображение состоит из наборов типа $(nl)^N nl$. Например, конфигурация основного состояния атома кремния изображается следующим образом:

$$\text{Si} \to (1s)^2 (2s)^2 (2p)^6 (3s)^2 (3p)^2. \qquad (67.20)$$

Здесь 14 электронов распределены по состояниям с наименьшей энергией. На практике конфигурационная формула часто не записывается в явном виде, как (67.20), а записывается только формула внешней оболочки (одной или нескольких). Так, для Si вместо (67.20) обычно пишут $3s^2 3p^2$ или еще короче: $3p^2$, опуская при этом скобки. (Более подробно см. [67.3].)

67.1.3. Методы Хартри и Хартри — Фока. *В методе Хартри* (1928) задача о стационарных состояниях атома сводится к решению следующей системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta_i - \frac{Ze^2}{r_i} + \sum_{j \neq i} \int \psi_j^* \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \psi_j\, d\tau_j - E_i \right] \psi_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, Z, \qquad (67.21)$$

где $\psi_i \equiv \psi_{n_i l_i m_i}$ — одночастичные состояния с энергиями $E_i \equiv E_{n_i l_i}$. Волновая функция атома ψ имеет вид (67.14). Система (67.21) является нелинейной, поскольку неизвестные функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_Z$ содержатся под интегралом в левой части равенства (67.21). Ее решают методом последовательных приближений, при котором в интеграл

$$W_i \equiv \sum_{j \neq i} \int \psi_j^* \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \psi_j\, d\tau_j \qquad (67.22)$$

на первом этапе вычислений вместо ψ_j подставляются функции водородоподобного атома (66.10) [66.2]. Вычисленная таким образом величина W_i подставляется в уравнение (67.21), решение которого дает другие функции $\psi_j^{(1)}$. Подставляя $\psi_j^{(1)}$ вместо ψ_j в (67.22), находим новое значение W_i. Подставляя его затем в систему (67.21), находим функции $\psi_j^{(2)}$, которые снова используем для определения W_i, и т. д. Если процесс сходится, то начиная с некоторого значения k система уравнений (67.21) будет приводить почти к тем же волновым функциям $\psi_j^{(k)} \simeq \psi_j^{(k+1)} \simeq \psi_j$, которые и будут описывать искомые одноэлектронные состояния. Интеграл (67.22) имеет смысл потенциальной энергии электрона, учитывающей эффективным образом влияние других электронов. Величину W_i называют *самосогласованным полем Хартри*.

Метод самосогласованного поля по существу дает способ вычисления потенциальной энергии $U(r_i)$ приближения независимых электронов [67.1.2]:

$$U(r_i) = -\frac{Ze^2}{r_i} + W_i.$$

Сравнение этого выражения с (67.16) позволяет определить плотность электронов $\rho(r)$ самосогласованным путем.

Строго говоря, волновую функцию атома ψ нельзя представить в виде простого произведения (67.14) одноэлектронных состояний ψ_j. Поэтому описанный метод самосогласованного поля учитывает только основную часть взаимодействия электронов, а не полное взаимодействие. Энергия атома в этом методе

$$E = \sum_{i=1}^{Z} E_i - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\int \psi_i^* \psi_j^* \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\psi_j\psi_i\, d\mathbf{r}_i\, d\mathbf{r}_j. \qquad (67.23)$$

Метод Хартри не учитывает принципа Паули. Использование вместо (67.14) волновой функции ψ_a (67.9), учитывающей в явном виде свойство ее антисимметрии (с учетом спиновых переменных электронов), позволяет записать систему уравнений для одноэлектронных состояний ψ_i, совместимую с требованиями принципа Паули (В. А. Фок, 1930). Такой метод решения многоэлектронной задачи называется *методом Хартри — Фока*. Полученные на его основе уравнения по сравнению с (67.21) содержат дополнительные слагаемые вида $W_{ji}\psi_i$, где W_{ji} — так называемый *обменный интеграл*:

$$W_{ji} = \int \psi_j^*(\mathbf{r}_j)\frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}\psi_i(\mathbf{r}_j)\, d\mathbf{r}_j. \qquad (67.24)$$

В нем учитывается корреляция в движении электронов, обусловленная симметризацией координатных функций.

Вычисления энергетических состояний атомов, выполненные с использованием метода Хартри — Фока, обнаруживают очень хорошее согласование теории с экспериментом.

67.2. Атом гелия

Простейшими атомами после водорода являются атом He ($Z = 2$) и ионы Li^+($Z = 3$), Be^{2+}($Z = 4$), B^{3+}($Z = 5$) и т. д., содержащие два электрона. В спектрах этих атомов наблюдаются теже спектральные серии, что и у щелочных металлов. Однако эти серии представлены в двух экземплярах, один из которых содержит простые линии (синглеты), а в другом каждая линия состоит из трех близкорасположенных линий (триплетов). Принцип Паули дает исчерпывающее объяснение этому явлению.

67.2.1. Теория основного состояния атома гелия. Энергетические состояния атома, состоящего из двух электронов, движущихся в кулоновском поле неподвижного ядра с зарядом Ze, в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием и другими тонкими эффектами описываются уравнением Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}(\Delta_1 + \Delta_2) - Ze^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} - E\right]\psi = 0, \qquad (67.25)$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы, проведенные из ядра к электронам 1 и 2, m_e — масса электрона, Δ_1 и Δ_2 — операторы дифференцирования (62.18) по координатам электронов. Слагаемое $e^2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ описывает взаимодействие электронов. В нулевом приближении, когда это взаимодействие не учитывается, движение электронов является независимым одно от другого и задача сводится к определению спектра энергетических состояний водородоподобного атома [66.2] (формулы (66.6), (66.18), (66.10), (66.13), (66.16), (66.23), (66.27)).

Основные состояния атома в нулевом приближении описываются волновой функцией

$$\psi = \psi_0 = \psi_{1s}(\mathbf{r}_1)\,\psi_{1s}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^3 \exp\left[-\frac{Z}{a_0}(r_1 + r_2)\right], \qquad (67.26)$$

где $a_0 = \hbar^2/m_e e^2$ — боровский радиус (65.10) и учтено, что оба электрона находятся в 1s-состоянии (конфигурация $(1s)^2$ [67.1.2]). Энергия этого состояния

$$E = E^{(0)} = 2E_1 = -\frac{Z^2e^2}{a_0} = 2Z^2E_H, \quad E_H = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -13{,}53 \text{ эВ}. \qquad (67.27)$$

Так как пространственная волновая функция (67.26) является симметричной относительно перестановки координат r_1 и r_2 двух электронов, то для получения антисимметричной полной волновой функции ψ_a атома ее нужно домножить на антисимметричную спиновую функцию двух электронов $\chi_a(1, 2)$:

$$\psi_a = \psi_0\chi_a(1, 2), \quad \chi_a(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)], \qquad (67.28)$$

где $\alpha(i)$ описывает спиновое состояние i-го электрона с проекцией спина $m_s = 1/2$, а $\beta(i)$ — с проекцией $m_s = -1/2$. В обозначениях спиновых функций χ_{sm_s} (66.42) имеем $\chi_{1/2\,1/2} \equiv \alpha$, $\chi_{1/2-1/2} = \beta$.

Более точное значение энергии атома, учитывающее корреляцию в движении электронов, т. е. слагаемое $e^2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, можно получить, воспользовавшись теорией возмущений по взаимодействию электронов. В первом порядке теории возмущений энергия основного состояния определяется формулой

$$E = E^{(0)} + E^{(1)}, \qquad (67.29)$$

где

$$E^{(1)} = \int \psi^* \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}\psi\, d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 =$$

$$= \int \psi_{1s}^2(r_1) \frac{e^2}{|r_1 - r_2|} \psi_{1s}^2(r_2)\, dr_1\, dr_2. \qquad (67.30)$$

Вычисление интеграла (67.30) значительно упрощается, если воспользоваться разложением $1/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ по сферическим функциям

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{4\pi}{r_1} \sum_{l,m} \frac{1}{(2l+1)} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^l Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2), \quad r_1 > r_2,$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{4\pi}{r_2} \sum_{l,m} \frac{1}{(2l+1)} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l Y_{lm}^*(\theta_1, \varphi_1) Y_{lm}(\theta_2, \varphi_2), \quad r_2 > r_1, \qquad (67.31)$$

и элементом фазового объема $d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2$, записанным в сферических координатах r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2 электронов:

$$d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2 = r_1^2 r_2^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2\, dr_1\, dr_2\, d\theta_1\, d\theta_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2. \qquad (67.32)$$

Тогда легко показать, что

$$E^{(1)} = \frac{5}{4} \frac{m_e Z e^4}{2\hbar^2} = \frac{5Ze^2}{8a_0} = -\frac{5}{4} Z E_{\text{H}},$$

и энергия основного состояния атома гелия ($Z = 2$) или подобного ему иона ($Z = 3, 4, \ldots$) равна

$$E = -\left(2\frac{m_e Z^2 e^4}{2\hbar^2} - \frac{5}{4} Z \frac{m_e e^2}{2\hbar^2}\right) = -\frac{Ze^2}{a_0}\left(Z - \frac{5}{8}\right) =$$

$$= \left(2Z^2 - \frac{5}{4} Z\right) E_{\text{H}}, \qquad (67.33)$$

где E_H, как и в (67.27),— энергия первого уровня атома водорода. Энергия ионизации J, равная энергии отрыва одного электрона от атома, определяется формулой [65.2.2]

$$J \equiv -E + E_1 =$$

$$= \frac{Ze^2}{a_0}\left(Z - \frac{5}{8}\right) - \frac{Ze^2}{2a_0} = \frac{Ze^2}{2a_0}\left(Z - \frac{5}{4}\right) = -\left(Z^2 - \frac{5}{4} Z\right) E_{\text{H}}. \qquad (67.34)$$

В табл. 67.1 приведены энергии основных уровней некоторых атомов, найденные экспериментально (они равны потенциалам полной ионизации атомов в основном состоянии, взятым со знаком минус) и по формуле (67.33). Величина $\Delta = (E_{\text{эксп}} - E_{\text{теор}}) / E_{\text{эксп}}$ указывает относительную ошибку. Можно получить более точное значение энергии и соответствующую ему волновую функцию атома в основном состоянии. Так, расчет вариационным методом, содержащим всего один вариационный параметр — эффективный заряд Z^*, приводит к следующим результатам:

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{Z^*}{a_0}\right)^3 \exp\left[-\frac{Z^*}{a_0}(r_1 + r_2)\right],$$

$$E = -\left(Z^2 - \frac{5}{8} Z + \frac{25}{256}\right)\frac{e^2}{a_0},$$

$$J = -E - \frac{Z^2 e^2}{2a_0} = \left(Z^2 - \frac{5}{4} Z + \frac{25}{128}\right)\frac{e^2}{2a_0}, \qquad (67.35)$$

где $Z^* = Z - 5/16$. Вариационные расчеты позволяют найти значения E и J со спектроскопической точностью порядка 10^{-6}.

Таблица 67.1. Энергии основных состояний атомов

Энергия, эВ	Атом				
	He	Li^+	Be^{2+}	B^{3+}	C^{4+}
$-E_{\text{эксп}}$	78,62	197,14	369,96	596,4	876,2
$-E_{\text{теор}}$	74,42	192,80	365,31	591,94	872,69
Δ, %	5,34	2,20	1,26	0,75	0,40

67.2.2. Орто- и парагелий. Первому возбужденному состоянию атома гелия и ему подобных атомов соответствует электронная конфигурация $1s^1 2s^1$. Она описывается пространственными функциями двух типов — симметричной Φ_s и антисимметричной Φ_a относительно перестановки координат электронов:

$$\Phi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{1s}(r_1)\,\psi_{2s}(r_2) + \psi_{1s}(r_2)\,\psi_{2s}(r_1)],$$

$$\Phi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{1s}(r_1)\,\psi_{2s}(r_2) - \psi_{1s}(r_2)\,\psi_{2s}(r_1)]. \qquad (67.36)$$

В соответствии с принципом Паули полная волновая функция должна быть антисимметричной. Поэтому возможны следующие представления:

$$\psi \equiv \psi_{\text{пара}} = \Phi_s \chi_a(1, 2),\ \chi_a(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)]; \qquad (67.37)$$

$$\psi \equiv \psi_{\text{орто}}^{(1)} = \Phi_a \chi_s^{(1)}(1, 2),\ \chi_s^{(1)}(1, 2) = \alpha(1)\alpha(2),$$

$$\psi \equiv \psi_{\text{орто}}^{(2)} = \Phi_a \chi_s^{(2)}(1, 2),\ \chi_s^{(2)}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)], \qquad (67.38)$$

$$\psi \equiv \psi_{\text{орто}}^{(3)} = \Phi_a \chi_s^{(3)}(1, 2),\ \chi_s^{(3)}(1, 2) = \beta(1)\beta(2),$$

где обозначения спиновых состояний отдельных электронов α и β, как в (67.28). Функция $\chi_a(1, 2)$ описывает систему электронов с антипараллельными спинами (суммарный спин двух электронов $s = 0$). Такое состояние называют *парасостоянием*. Функции $\chi_s^{(1)}$, $\chi_s^{(2)}$, $\chi_s^{(3)}$ описывают систему с параллельными спинами (суммарный спин электронов $s = 1$). Такое состояние называется *ортосостоянием*. Так как спин $s = 0$ имеет только одну проекцию $m_s = 0$, то парасостояние описывается одной спиновой функцией χ_a. Спин $s = 1$ имеет три проекции 1; 0; —1. Им соответствуют спиновые функции $\chi_s^{(1)}$, $\chi_s^{(2)}$, $\chi_s^{(3)}$.

В нулевом приближении, не учитывающем энергию взаимодействия электронов $e^2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ в (67.25), пара- и ортосостояния Φ_s и Φ_a с конфигурацией $1s^1 2s^1$ имеют одинаковую энергию. Учет энергии взаимодействия электронов приводит к тому, что энергия парасостояния Φ_s

оказывается несколько выше энергии ортосостояния Φ_a. Так, в первом порядке теории возмущений имеем

$$E_s = E_{1s} + E_{2s} + Q + A, \quad E_a = E_{1s} + E_{2s} + Q - A, \qquad (67.39)$$

где E_s и E_a — энергии пара- и ортосостояний,

$$Q = \int \psi_{1s}^2(r_1)\,\psi_{2s}^2(r_2)\,\frac{e^2}{|r_1 - r_2|}\,dr_1\,dr_2,$$
$$A = \int \psi_{1s}(r_1)\,\psi_{2s}(r_2)\,\frac{e^2}{|r_1 - r_2|}\,\psi_{1s}(r_2)\,\psi_{2s}(r_1)\,dr_1\,dr_2. \qquad (67.40)$$

Здесь ψ_{1s} и ψ_{2s} — водородоподобные функции с собственными значениями энергии E_{1s} и E_{2s}. Интеграл Q называется *кулоновским интегралом*, а интеграл A — *обменным интегралом*. Последний определяет часть кулоновского взаимодействия, связанную с корреляцией движения обоих электронов и обусловленную принципом Паули. Используя явный вид функций ψ_{1s} и ψ_{2s} (66.10), (66.16) и (66.27) и разложение (67.31), можно вычислить энергии E_s и E_a. Их экспериментальные значения для атома гелия:

$$E_s = -2{,}146\,\frac{e^2}{a_0}, \quad E_a = -2{,}175\,\frac{e^2}{a_0}, \qquad (67.41)$$

где a_0 — боровский радиус (65.10).

Возбужденное состояние атома гелия, соответствующее конфигурации $1s^12p^1$, также разделяется на пара- и ортосостояния с пространственными функциями

$$\Phi'_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\psi_{1s}(r_1)\,\psi_{2p}(r_2) + \psi_{1s}(r_2)\,\psi_{2p}(r_1)],$$
$$\Phi'_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\psi_{1s}(r_1)\,\psi_{2p}(r_2) - \psi_{1s}(r_2)\,\psi_{2p}(r_1)]. \qquad (67.42)$$

Экспериментальные значения энергий этих состояний

$$E'_s = -2{,}124\,\frac{e^2}{a_0}, \quad E'_a = -2{,}133\,\frac{e^2}{a_0}. \qquad (67.43)$$

Возбужденные состояния, соответствующие другим электронным конфигурациям, содержащим два разных одноэлектронных состояния, также разделяются на пара- и ортосостояния. Поскольку каждому уровню соответствует своя волновая функция ψ, то согласно (67.37) и (67.38) уровни парасостояний будут синглетами, а уровни ортосостояний — триплетами. Атомы гелия, находящиеся в синглетном состоянии, называют *парагелием*. Атомы гелия, находящиеся в триплетном состоянии, называют *ортогелием*. Пара- и ортогелий имеют различные физические свойства. Атомы парагелия не имеют магнитного момента и образуют *диамагнитный газ*. Атомы ортогелия обладают магнитным моментом и образуют *парамагнитный газ*. Спектральные линии атомов парагелия являются одиночными (простыми), а спектральные линии ортогелия состоят из трех близких линий — триплетов. Расщепление линий в триплетах обусловлено спин-орбитальным взаимодействием электронов [66.4.1], а также магнитным взаимодействием спинов обоих электронов. Эти поправки носят релятивистский характер, поэтому энергии в триплетах отличаются на малую величину. Триплетные состояния $1s^12s^1$ и другие с $l = 0$ являются вырожденными, так как в таких состояниях в атоме нет выделенных направлений и расщепление уровней отсутствует. В состояниях $1s^12p^1$ и других с $l \neq 0$ вырождение снимается. Здесь выделенное направление задается орбитальным моментом, и три спиновых состояния (67.38) обладают различной энергией. Дальнейшее сверхтонкое расщепление линий атомов обусловливается ядерными эффектами, связанными с наличием у ядра этого атома спина и магнитного момента. Схема уровней атома гелия показана на рис. 67.1. Значение энергии, равное 24,45 эВ, соответствует первому ионизационному потенциалу атома He [65.2.2]; длины волн даны в нанометрах.

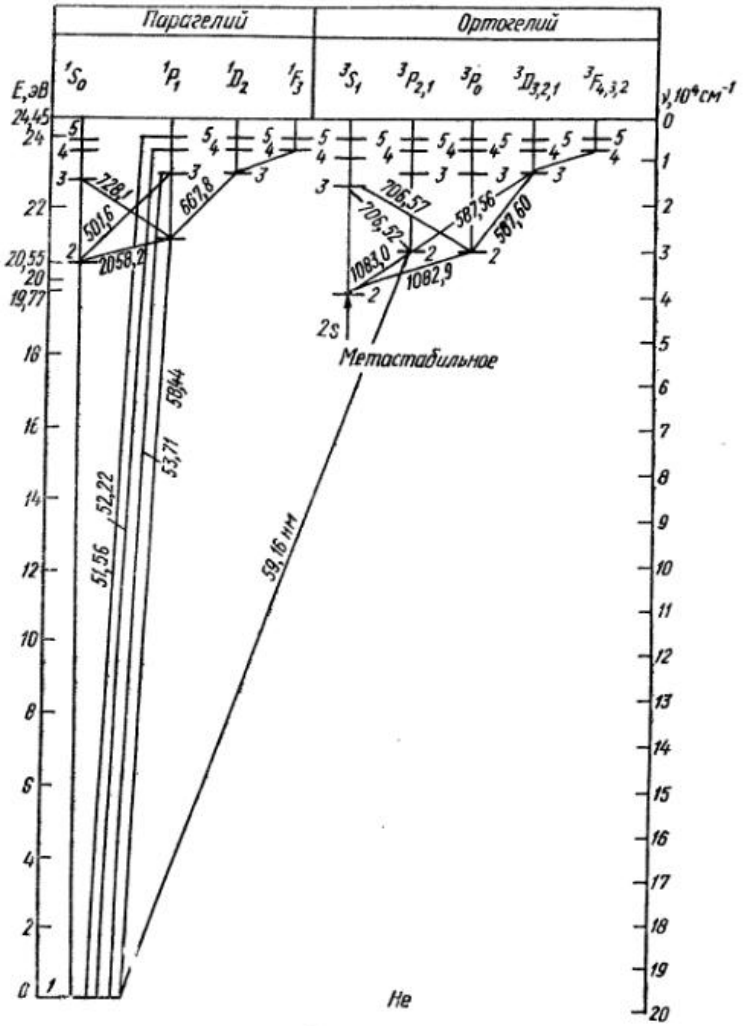


Рис. 67.1

67.3. Векторная модель атома

Для систематики спектров многоэлектронных атомов применяют *векторную модель атома*. В этой модели каждому электрону i ставится в соответствие два вектора — $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$, где $\mathbf{l}_i$ описывает его орбитальное движение (момент импульса электрона, определяемый формулой (62.28)), $\mathbf{s}_i$ — спиновый момент (спин электрона, определяемый уравнениями (66.42) и связанный с матрицами Паули формулой (63.34)). Модули этих векторов в соответствии с правилами квантовой механики равны соответственно

$$|\mathbf{l}_i| = \hbar\sqrt{l_i(l_i+1)},\quad |\mathbf{s}_i| = \hbar\sqrt{s(s+1)} = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Моменты $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ могут складываться по-разному в результирующий момент атома $\mathbf{J}$.

67.3.1. Связь Рассель — Саундерса (*LS*-связь). В некоторых, как правило, легких и не слишком тяжелых атомах моменты $\mathbf{l}_i$ взаимодействуют между собой сильнее, чем с $\mathbf{s}_i$. Это означает, что в таких атомах спин-орбитальное взаимодействие [66.4.1] мало по сравнению с электростатическим взаимодействием электронов, и векторы $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{s}_i$ складываются порознь:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{l}_i,\ |\mathbf{L}| = \hbar\sqrt{L(L+1)},$$
$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{s}_i,\ |\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{S(S+1)}, \tag{67.44}$$

где $\mathbf{L}$ — суммарный орбитальный момент атома, $\mathbf{S}$ — суммарный спиновый момент атома. Оба момента $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ складываются в суммарный (полный) момент атома

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S},\ |\mathbf{J}| = \hbar\sqrt{J(J+1)}. \tag{67.45}$$

Величина J называется *суммарным внутренним квантовым числом* атома, а L и S — суммарные орбитальный и спиновый квантовые числа атома. Так как векторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ могут быть направлены произвольно, то в соответствии с правилами квантовой механики квантовое число J принимает следующие значения:

$$J = L+S,\ L+S-1,\ \ldots,\ |L-S|. \tag{67.46}$$

Отсюда следует, что J имеет $2S+1$ значение при $L \geqslant S$ и $2L+1$ — при $L \leqslant S$.

Квантовое число L принимает целые значения, заключенные между максимальным и минимальным значениями алгебраической суммы $\left|\sum_{i=1}^{Z} l_i\right|$.

В случае двух электронов ($Z=2$) L принимает значения

$$L = l_1+l_2,\ l_1+l_2-1,\ l_1+l_2-2,\ \ldots,\ |l_1-l_2|.$$

Для $l_1=3$, $l_2=2$ имеем $L=5, 4, 3, 2, 1$, а числовые значения вектора суммарного момента $|L| = \hbar\sqrt{30}$, $\hbar\sqrt{20}$, $\hbar\sqrt{12}$, $\hbar\sqrt{6}$, $\hbar\sqrt{2}$. Аналогично находятся значения L и $|\mathbf{L}|$ для $Z>2$.

Квантовое число S принимает значения, заключенные между максимальным и минимальным значениями алгебраической суммы $\left|\sum_{i=1}^{Z} s_i\right|$, отличающиеся на единицу. Так как спины оптических (наружных) электронов ориентируются только параллельно или антипараллельно один другому, то квантовое число S будет целым (включая нуль) при четном числе электронов Z или полуцелым — при нечетном числе электронов:

$$S = \frac{1}{2}Z,\ \frac{1}{2}Z-1,\ \ldots,\ 0,\ \text{если } Z \text{ четное},$$
$$S = \frac{1}{2}Z,\ \frac{1}{2}Z-1,\ \ldots,\ \frac{1}{2},\ \text{если } Z \text{ нечетное}. \tag{67.47}$$

Квантовое число J принимает целые значения для четного числа электронов Z и полуцелые для нечетного. Различным значениям J соответствуют различные состояния атома, определяемые энергией взаимодействия суммарных моментов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$. В результате энергетические уровни многоэлектронного атома расщепляются. Число подуровней, на которые расщепляется уровень, определяется числом возможных значений для J. Для $S<L$ число $2S+1$ определяет мультиплетность терма. Для $S>L$ мультиплетность уровня равна $2L+1$.

Если внутренние оболочки атомов [67.4] полностью заполнены электронами, то их орбитальные и спиновые моменты полностью скомпенсированы (т. е. $L=S=0$) и квантовые числа атома L, S, J определяются только наружными (валентными) электронами.

Электроны в атоме взаимодействуют с центрально симметричным электрическим полем ядра. Поэтому вектор полного момента атома $\mathbf{J}$ сохраняется точно. Векторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{S}$ из-за наличия между ними спин-орбитального взаимодействия по отдельности не сохраняются. Однако их длины остаются практически постоянными, а значит, квантовые числа L и S остаются практически постоянными, т. е. являются хорошими квантовыми числами, и вместе с квантовым числом $\mathbf{J}$ могут служить в качестве характеристик состояний наружных электронов. В спектроскопии для термов атомов принято условное обозначение

$$^{2S+1}L_J, \tag{67.48}$$

где вместо числового значения L пишут прописную букву латинского алфавита в соответствии со схемой, аналогичной (66.21). Это совпадает с обозначением, принятым для щелочных металлов [66.3.2], где $2S+1=2$. В многоэлектронном атоме, наружная оболочка которого содержит два электрона, возможны два случая:

1) $S=0$ — спины электронов направлены противоположно —

$J=L$	0	1	2	3	4	5	6
термы	$^1S_0$	$^1P_1$	$^1D_2$	$^1F_3$	$^1G_4$	$^1H_5$	$^1I_6$

(67.49)

2) $S=1$ — спины электронов параллельны —

L	0		1			2			3		
J	0	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4
термы	$^3S_0$	$^3S_1$	$^3P_0$	$^3P_1$	$^3P_2$	$^3D_1$	$^3D_2$	$^3D_3$	$^3F_2$	$^3F_3$	$^3F_4$

(67.50)

Дополненные электронными конфигурациями [67.4.2] термы $^{2S+1}L_J$ полностью описывают атом.

Описанная связь орбитальных и спиновых моментов электронов, предложенная Расселом и Саундерсом (1925), называется также *нормальной связью*. Она является наиболее важной и распространенной в атомах.

67.3.2. *jj*-Связь. Так называемая *jj-связь* осуществляется, когда спин-орбитальное взаимодействие отдельного электрона велико по сравнению с электростатическим взаимодействием различных электронов. В *jj*-связи орбитальный $\mathbf{l}_i$ и спиновый $\mathbf{S}_i$ моменты каждого электрона складываются в полный момент

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{S}_i, \tag{67.51}$$

а суммарный полный момент атома образуется сложением полных моментов отдельных электронов

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{j}_i, \quad |\mathbf{J}| = \hbar \sqrt{J(J+1)}. \tag{67.52}$$

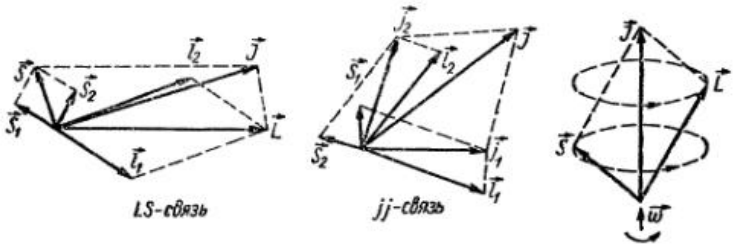


Рис. 67.2

Квантовое число j_i пробегает значения

$$j_i = l_i + S_i,\ l_i + S_i - 1,\ \ldots,\ |l_i - S_i|, \tag{67.53}$$

а квантовое число J принимает значения, заключенные между максимальным и минимальным значениями алгебраической суммы $\left|\sum_{i=1}^{Z} j_i\right|$, отличающиеся на единицу.

Случай одного наружного электрона рассмотрен в [66.3.2].

Резко выраженная *jj*-связь встречается у атомов редко и то только у тяжелых. Следует иметь в виду, что как *jj*-, так и *LS*-связи являются двумя предельными случаями. В действительности в природе наблюдаются различные, более сложные промежуточные виды связей. Рассмотренные же предельные случаи имеют простую наглядную геометрическую и физическую интерпретацию и удобны для классификации атомных термов (рис. 67.2).

67.4. Магнитные свойства атома

67.4.1. Орбитальный магнитный момент электрона. Опыт показывает, что все вещества независимо от агрегатного состояния взаимодействуют с внешним магнитным полем. Это указывает на то, что природа магнитных свойств веществ связана со свойствами их атомов, т. е. *изолированные атомы должны обладать магнитными свойствами.* Наличие таких свойств у атома следует из полуклассических представлений теории Бора [65.1]. Вращающийся по орбите электрон создает круговой ток. По законам электродинамики такой круговой ток

должен обладать определенным магнитным моментом. Поэтому поведение атома в магнитном поле подобно магнитному диполю [29.2.4].

Согласно электродинамике замкнутый виток (контур) с током I обладает магнитным моментом

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{c} I\mathbf{S}, \tag{67.54}$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{n}S$, S — площадь поверхности контура, $\mathbf{n}$ — нормаль к этой поверхности, определяемая правилом буравчика (правого винта) (рис. 67.3), c — скорость света. В простейшем случае, когда ток I создается одним электроном с зарядом $-e$ и массой m_e, движущимся по круговой орбите, *орбитальный момент электрона*

$$\mu_l = -\frac{e}{cT}\pi R^2 = -\frac{e}{2m_e c} m_e R^2 \omega = -\frac{e}{2m_e c} m_e v R = -\frac{e}{2m_e c} l$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{\mu}_l = -\frac{e}{2m_e c}\mathbf{l}. \tag{67.55}$$

Здесь учтено, что $I = -\frac{e}{T}$ (T — период обращения электрона по орбите), $S = \pi R^2$ (R — радиус орбиты), $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ — момент импульса ($\mathbf{p} = m_e\mathbf{v}$ — импульс, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона). Отношение магнитного момента к обусловливающему его моменту импульса принято называть *гиромагнитным отношением*. Отношение магнитного момента электрона μ_l к механическому l:

$$\gamma_l = \frac{\mu_l}{l} = -\frac{e}{2m_e c} \tag{67.56}$$

называется *гиромагнитным отношением для орбитального движения электрона.*

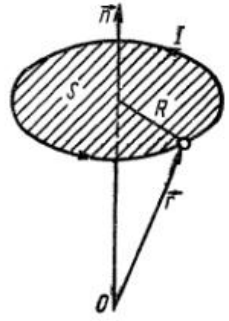


Рис. 67.3

Переход от классического описания к квантовому соответствует замене в (67.55) классических величин на соответствующие операторы [62.1.2]

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_l = -\frac{e}{2m_e c}\hat{\mathbf{l}}, \tag{67.57}$$

где $\hat{\mathbf{l}}$ — оператор момента импульса (62.28), $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l$ — оператор орбитального магнитного момента электрона. Собственные значения оператора $\hat{\boldsymbol{\mu}}_l$ и его проекции на ось z определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu_l &= -\frac{e\hbar}{2m_e c}\sqrt{l(l+1)} = -\mu_0\sqrt{l(l+1)}, \\ \mu_{l_z} &= -\frac{el_z}{2m_e c} = -\frac{e\hbar}{2m_e c} m = -\mu_0 m, \end{aligned} \tag{67.58}$$

где l и m — орбитальное и магнитное квантовые числа. Величина

$$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e c},\quad \mu_0 = 9{,}274 \cdot 10^{-24}\ \text{Дж} \cdot \text{Тл}^{-1} \tag{67.59}$$

называется *магнетоном Бора*. Поскольку магнетон Бора можно рассматривать как квант магнитного момента, то μ_0 является удобной единицей магнитного момента атомов.

Так как заряд электрона отрицательный, то направления векторов $\vec{\mu}_l$ и $\vec{l}$ противоположные. В магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$ поведение атома, имеющего магнитный момент μ_l, подобно диполю, поэтому атом обладает дополнительной энергией ΔE_l магнитного взаимодействия:

$$\Delta E_l = -\mu_l \vec{\mathcal{H}} = -\mu_l \mathcal{H} \cos(\widehat{l\mathcal{H}}) = \mu_0 \mathcal{H} m, \qquad (67.60)$$

где m — магнитное квантовое число.

Строгий квантовомеханический расчет орбитального магнитного момента μ_l атома с одним электроном, учитывающий волновую природу движения электрона в поле ядра (т. е. пространственное распределение заряда по всему объему атома), показывает, что ток в атоме течет только по широтам так, как если бы действительно электрон вращался в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Поэтому определение оператора магнитного момента $\hat{\mu}_l$ (67.57) справедливо в общем случае.

67.4.2. Собственный магнитный момент электрона. Так как электрон обладает собственным моментом количества движения — спином S [66.3.2], квантование которого осуществляется в полной аналогии с квантованием его момента импульса l, связанного с орбитальным движением, то электрон должен обладать также и *собственным магнитным моментом* $\hat{\mu}_S$, таким, что его собственное значение μ_S должно быть пропорционально $\hbar\sqrt{s(s+1)}$. Из опыта (см., например, [68.2.3]) следует, что

$$\mu_S = -\gamma_S \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad \mu_{S_z} = -2\mu_0 m_s, \qquad (67.61)$$

где μ_0 — магнетон Бора, s и m_s — спиновое и магнитное спиновое квантовые числа, как в (66.42). Оператор спинового магнитного момента электрона

$$\hat{\mu}_S = -\frac{e}{m_e c}\hat{\mathbf{S}}. \qquad (67.62)$$

Гиромагнитное отношение для спина электрона γ_S вдвое больше гиромагнитного отношения γ_l для его орбитального движения:

$$\gamma_S = \frac{\mu_S}{S} = -\frac{e}{m_e c} = 2\gamma_l. \qquad (67.63)$$

Энергия взаимодействия собственного магнитного момента электрона μ_S с внешним магнитным полем $\vec{\mathcal{H}}$ определяется формулой

$$\Delta E_S = -\mu_S \vec{\mathcal{H}} = -\mu_S \mathcal{H} \cos(\widehat{S\mathcal{H}}) = 2\mu_0 \mathcal{H} m_s \qquad (67.64)$$

и по порядку величины совпадает с энергией взаимодействия ΔE_l орбитального магнитного момента электрона μ_l с полем $\vec{\mathcal{H}}$ (67.60). Для $\mathcal{H} \sim 1$ Тл находим, что $\mu_0 \mathcal{H} \sim 5 \cdot 10^{-5}$ эВ, т. е. энергия взаимодействия μ_l и μ_S с $\mathcal{H} \sim 1$ Тл меньше энергии спин-орбитального взаимодействия $\Delta E_{ls} \sim \frac{1}{n^3}$.

67.4.3. Полный магнитный момент одноэлектронного атома. Опыт показывает, что в отсутствие внешнего магнитного поля между орбитальным и собственным моментами количества движения электрона существует взаимодействие [66.3.2], которое обусловливает тонкую структуру спектров атомов щелочных металлов [66.4]. Сохраняющейся величиной является полный момент импульса $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{S}$ (66.43) с собственными значениями $|\mathbf{j}| = \hbar\sqrt{j(j+1)}$ и $j_z = \hbar m_j$ (66.44), (66.45). Для определения величины полного магнитного момента атома, учитывающего как его орбитальный μ_l, так и собственный μ_S магнитные моменты, удобно воспользоваться векторной моделью атома [67.3] с одним электроном. В этой модели векторы l и S представляются как прецессирующие относительно вектора полного момента количества движения j (рис. 67.4). Так как $\gamma_S = 2\gamma_l$, то направления векторов —j и полного момента атома $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_l + \boldsymbol{\mu}_S$ не совпадают. Векторы μ_l и μ_S также прецессируют вокруг направления, противоположного вектору j. *Эффективный полный магнитный момент одноэлектронного атома*, т. е. среднее значение $\langle\mu\rangle$ за большой промежуток времени, определяется суммой параллельных составляющих μ_l и μ_S (вдоль направления —j) и равен вектору μ_j (рис. 67.4). Усредненное значение перпендикулярных составляющих векторов μ_l и μ_S очевидно равно нулю. Таким образом, проекция $\langle\mu\rangle = \mu_j$ на направление μ_j равна

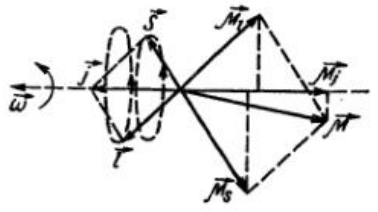


Рис. 67.4

$$\mu_j = \mu_l \cos(\widehat{lj}) + \mu_S \cos(\widehat{Sj}). \qquad (67.65)$$

Из рис. 67.4 следует явный вид косинусов:

$$\cos(\widehat{lj}) = \frac{|\mathbf{j}^2| + |\mathbf{l}^2| - |\mathbf{S}^2|}{2|\mathbf{j}||\mathbf{l}|} = \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{j(j+1)\,l(l+1)}},$$
$$\cos(\widehat{Sj}) = \frac{|\mathbf{j}^2| + |\mathbf{S}^2| - |\mathbf{l}^2|}{2|\mathbf{j}||\mathbf{S}|} = \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2\sqrt{j(j+1)\,s(s+1)}}. \qquad (67.66)$$

Поэтому магнитный момент атома μ_j и его проекция μ_{j_z} на ось z равны соответственно

$$\mu_j = -\mu_0 g\sqrt{j(j+1)}, \quad \mu_{j_z} = -\mu_0 g m_j, \qquad (67.67)$$

где

$$g = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \qquad (67.68)$$

называется *множителем (фактором) Ланде* (1922), μ_0 — магнетон Бора (67.59), $m_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j$ — магнитное квантовое число.

Атом, помещенный в слабое магнитное поле $\vec{\mathcal{H}}$, т. е. такое, при котором взаимодействие моментов μ_l и μ_S между собой значительно больше их взаимодействия с полем $\vec{\mathcal{H}}$, ведет себя как диполь с моментом μ_j. Его дополнительная энергия определяется выражением

$$\Delta E_j = -\mu_j \vec{\mathcal{H}} = -\mu_j \mathcal{H} \cos(\widehat{j\mathcal{H}}) = \mu_0 g \mathcal{H} m_j. \qquad (67.69)$$

67.4.4. Магнитный момент многоэлектронного атома. Магнитный момент атома μ, состоящего из Z электронов, равен сумме орбитальных μ_{l_i} и спиновых μ_{S_i} магнитных моментов отдельных электронов:

$$\mu = \mu_{l_1} + \mu_{l_2} + \cdots + \mu_{l_Z} + \mu_{S_1} + \mu_{S_2} + \cdots + \mu_{S_Z}. \qquad (67.70)$$

Порядок суммирования членов этого ряда определяется типом связи орбитальных l_i и спиновых s_i моментов электронов. Наиболее важной для атомов является LS-связь [67.3.1]. Для LS-связи имеем

$$\mu = \mu_L + \mu_S, \ \mu_L = \sum_{i=1}^{Z} \mu_{l_i}, \ \mu_S = \sum_{i=1}^{Z} \mu_{S_i}. \qquad (67.71)$$

Из явных видов магнитных моментов μ_l (67.57) и μ_S (67.62) следует, что

$$\mu_L = -\mu_0 \mathbf{L}/\hbar, \ \mathbf{L} = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{l}_i, \ \mu_L = -\mu_0 \sqrt{L(L+1)}, \ \mu_{L_z} = -\mu_0 m_L, \qquad (67.72)$$

$$\mu_S = -2\mu_0 \mathbf{S}/\hbar, \ \mathbf{S} = \sum_{i=1}^{Z} \mathbf{s}_i, \ \mu_S = -2\mu_0 \sqrt{S(S+1)} \ \mu_{S_z} = -2\mu_0 m_S,$$

$$m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm L; \ m_S = S, S-1, S-2, \ldots, -S,$$

где использованы формулы (67.44).

Легко показать, что *магнитный момент атома* μ выражается через суммарные орбитальный $\mathbf{L}$ и спиновый $\mathbf{S}$ моменты атома соотношением

$$\mu = -\frac{\mu_0}{\hbar}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = -\frac{e}{2m_e c}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}). \qquad (67.73)$$

Гиромагнитные отношения для орбитальных и спиновых движений атома совпадают по величине с гиромагнитными отношениями γ_l (67.56) и γ_S (67.63) отдельных электронов:

$$\frac{\mu_L}{L} = -\frac{e}{2m_e c} = \gamma_l, \ \frac{\mu_S}{S} = -\frac{e}{m_e c} = \gamma_S = 2\gamma_l. \qquad (67.74)$$

Это позволяет для определения величины магнитного момента атома воспользоваться векторной моделью, рассмотренной в [67.4.3]. Подобно случаю одного электрона магнитный момент μ прецессирует вокруг направления, противоположного направлению вектора полного момента атома $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ (67.45). Его среднее значение $\langle \mu \rangle = \mu_J$ по направлению вектора μ_J (задаваемого направлением вектора — $\mathbf{J}$) равно

$$\mu_J = -\mu_0 g_J \sqrt{J(J+1)}, \ \mu_{J_z} = -\mu_0 g_J m_J, \qquad (67.75)$$

где

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \qquad (67.76)$$

— множитель Ланде для атома с полным моментом J; $m_J = J, J-1, \ldots, -J$ — его магнитное квантовое число ($2J+1$ значение).

Непосредственным следствием принципа Паули [67.1.1] является то, что у любой замкнутой оболочки суммарные орбитальный, спиновый и полный моменты количества движения равны нулю: $L = 0$, $S = 0$, $J = 0$. Это значит, что для замкнутой оболочки $\mu_J = 0$. Поэтому полный момент количества движения J атома и его магнитный момент μ_J определяются электронами, находящимися на незаполненных оболочках.

Следует иметь в виду, что часто под величиной магнитного момента атома подразумевают не его значение μ_J (67.75), а максимальное значение его проекции μ_{J_z}.

Аналогично (67.69) дополнительная энергия ΔE_J многоэлектронного атома с LS-связью, помещенного в слабое магнитное поле $\vec{\mathcal{H}}$, определяется выражением

$$\Delta E_J = -\mu_J \vec{\mathcal{H}} = -\mu_J \mathcal{H} \cos(\widehat{\mathbf{J}\vec{\mathcal{H}}}) = \mu_0 g_J \mathcal{H} m_J, \qquad (67.77)$$

где μ_0 — магнетон Бора (67.59).

67.4.5. Опыты Штерна и Герлаха. Непосредственное экспериментальное доказательство существования у атомов магнитного момента и его пространственного квантования в соответствии с формулой (67.75) было дано в опытах Штерна и Герлаха (1921—1922). (Идея опыта принадлежит П. Л. Капице и Н. Н. Семенову, 1920.)

Пучок атомов пропускался через сильное неоднородное магнитное поле $\vec{\mathcal{H}}$ и затем регистрировался на фотопластинке (рис. 67.5). Если атомы имеют магнитный момент, то на них в неоднородном магнитном поле кроме момента сил, стремящегося повернуть магнитные моменты в направлении поля, будет действовать и отклоняющая сила, обусловленная неодинаковой напряженностью поля у полюсов атомного магнитного диполя, определяемая формулой

$$F_z = \mu_z \frac{d\mathcal{H}}{dz}, \qquad (67.78)$$

где μ_z — проекция магнитного момента атома на направление магнитного поля. Так как в классическом представлении атом прецессирует в магнитном поле вокруг направления этого поля (оси z) [67.4.3; 67.4.4], то сила F_z есть усредненная по времени величина. Такое усреднение оказывается возможным потому, что за характерное время, определяемое периодом прецессии, равным $\tau \sim 7 \cdot 10^{-7}/\mathcal{H}$ (в секундах), и напряженностью $\mathcal{H} \sim 10^{-1}$ Тл, атом со скоростью $v \sim 100$ м/с пролетает расстояние $\sim 10^{-5}$ см, значительно меньшее, чем размеры экспериментальной установки.

Если атомы имеют магнитный момент μ, который может произвольно ориентироваться (рис. 67.5, *б*) относительно поля $\vec{\mathcal{H}}$, то первоначальный узкий пучок атомов, пройдя через магнитное поле, размоется и даст на экране широкую (в направлении поля) полосу. Если величина μ_z принимает только дискретный ряд значений, то первоначальный пучок расщепится на ряд пучков (рис. 67.5, *в*). Из (67.78) следует, что для наблюдения эффекта необходимо, чтобы неоднородность поля была достаточно велика на расстояниях порядка размеров атома. В опытах Штерна и Герлаха для получения магнитного поля с сильной неоднородностью использовался магнит специальной формы: северный полюс (N) имел вид призмы с острым ребром вдоль направления пучка, а в южном (S) протачивалась канавка в этом же направлении.

Опыт показал, что атомный пучок расщепляется на отдельные компоненты. Этим было доказано существование у атома магнитного момента и его пространственное квантование. Детальный анализ результатов опыта обнаружил, что величина μ_z описывается не формулой

(67.58) для μ_{l_z}, а более сложным выражением μ_{J_z} (67.75), учитывающим наличие у атома (а значит, и у электрона) собственного момента количества движения — спина S.

Число компонент, на которые расщепляется атомный пучок в неоднородном магнитном поле, зависит от природы атома и его состояния (от квантовых чисел J, L, m_J). Когда атом находится в основном s-состоянии, его полный момент J определяется спином S. В опытах Штерна и Герлаха использовались атомы серебра, имеющие один внешний электрон. Это позволило определить, что общее число проекций спина электрона m_s равно двум, т. е. $2s + 1 = 2$. Отсюда следовало, что электрону нужно приписать полуцелый собственный момент количества движения $s = 1/2$ (т. е. равный максимальному значению его проекции m_s на выбранное направление).

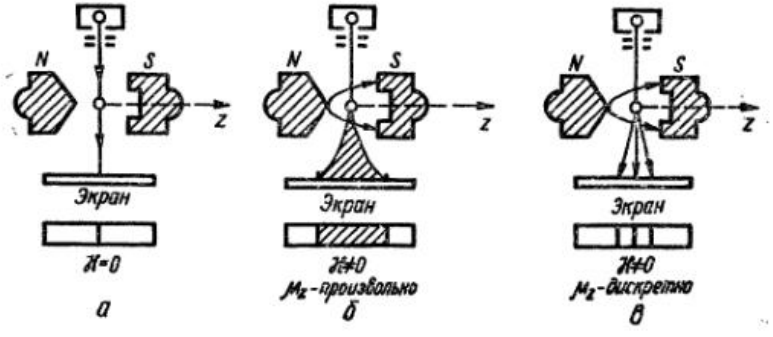


Рис. 67.5

Вычисленный на основе данных опыта собственный магнитный момент электрона $|\mu_{S_z}|$ оказался равным μ_0 в полном согласии с формулой (67.61), где $m_s = \pm 1/2$, предсказываемой теорией Дирака [63.2]. Более точные измерения собственного магнитного момента электрона методом магнитного резонанса (1952) [68.2.6] показали, однако, что

$$|\mu_{S_z}| = 1{,}001159652200\,(40) \cdot \mu_0.$$

Собственный магнитный момент электрона (его максимальная проекция), отличающийся от магнетона Бора μ_0 (67.59), называют *аномальным магнитным моментом* электрона. В квантовой электродинамике показывается, что аномальный магнитный момент у заряженной частицы обусловлен ее взаимодействием с собственным электромагнитным полем.

Опыты Штерна и Герлаха относятся к числу основополагающих экспериментов атомной физики.

67.5. Теория периодической системы элементов Д. И. Менделеева

67.5.1. Принципы объяснения периодического закона. Периодический закон Д. И. Менделеева (1869): *химические свойства элементов периодически повторяются*. Этот закон нашел отражение в периодической системе элементов, в основу построения которой была положена атомная масса. Квантовая теория атома дала объяснение периодическому закону. Прежде всего было уточнено, что в основе систематики химических элементов лежит заряд ядра атома, а не его атомная масса (Бор, 1922). В единицах элементарного заряда e, равного заряду одного электрона, взятому со знаком плюс, заряд ядра любого атома выражается целым числом Z.

Число Z определяет номер химического элемента в периодической системе и называется его *порядковым номером*. Если атом электрически нейтрален, то число электронов в атомной оболочке равно Z. Свойства элементов зависят от числа электронов в атомной оболочке и ее строения. Химические свойства элементов определяются периферийными электронами.

Современное объяснение периодической системы элементов основано на трех принципах.

Принцип первый: *состояние атомной оболочки характеризуется состояниями ее отдельных электронов, которые полностью определяются четырьмя квантовыми числами:* n, l, m, m_s, где n — главное квантовое число, l — орбитальный момент электрона, m — его проекция на выделенное направление, m_s — проекция спина на это направление. Они могут принимать следующие значения [66.2.3; 66.3.2]:

$$n = 1, 2, 3, \ldots, \infty;\ l = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l;\ m_s = \pm \frac{1}{2}.$$

Принцип второй: *в атоме может существовать только один электрон в состоянии, характеризуемом данными значениями четырех квантовых чисел* (принцип Паули [67.1.1]). Это означает, что два электрона в одном атоме должны различаться значениями по крайней мере одного квантового числа. Так как спиновое квантовое число принимает только два значения, то его можно исключить из рассмотрения, положив при этом, что в квантовом состоянии (n, l, m) может находиться не более двух электронов. Далее из детального рассмотрения можно исключить магнитное квантовое число m. Так как m принимает $2l + 1$ значение, то в состоянии с одинаковыми квантовыми числами n и l может одновременно быть $2(2l + 1)$ электронов. Отсюда следует, что максимальное число электронов с одинаковым главным квантовым числом n равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2. \qquad (67.79)$$

Говорят, что совокупность электронов, обладающих одинаковым главным квантовым числом n, образует электронную *оболочку* (или *слой*), а совокупность электронов, имеющих одинаковые n и l, образуют *подоболочку* (или *оболочку*). В соответствии с терминологией, принятой в спектроскопии рентгеновских лучей [69.2.2], различные электронные оболочки имеют названия, которые соответствуют схеме:

n	1	2	3	4	5
Оболочка	K	L	M	N	O
Максимальное число электронов	2	8	18	32	50

(67.80)

Различным значениям l ставятся в соответствие строчные буквы латинского алфавита по схеме (66.21):

l	0	1	2	3	4
Подоболочка	s	p	d	f	g
Максимальное число электронов	2	6	10	14	18

(67.81)

Символ, указывающий оболочки, подоболочки и числа электронов в каждой подоболочке, называется *электронной конфигурацией атома*. Она записывается в виде последовательного ряда, состоящего из символов $(nl)^{N_{nl}}$, где N_{nl} — число электронов в подоболочке (см. (67.20) и табл. 67.2). Скобки при записи, как правило, опускают.

В основе такой классификации атомов лежит решение многоэлектронной задачи в приближении независимых электронов [67.1.2]. Строго говоря, состояние атомной оболочки в целом следовало бы характеризовать волновой функцией атома ψ, в которой переменные, соответствующие отдельным электронам, не разделяются, поскольку электроны взаимодействуют между собой (см. уравнение (67.12)). Волновая функция ψ реального атома не представляется в виде произведений одноэлектронных волновых функций $\psi_{n_i l_i m_i}$, как в (67.14). Это значит, что точный смысл имеет состояние атомной оболочки в целом, а не отдельных ее электронов. Поскольку решение уравнения Шредингера (67.12) в точной постановке многоэлектронной задачи представляет собой крайне трудную проблему, принято классифицировать состояние атома в целом по состояниям его отдельных электронов. Несмотря на приближенный характер такого одночастичного описания, теория периодической системы дает правильное объяснение свойств химических элементов.

Принцип третий: *атом устойчив тогда, когда находится в состоянии с наименьшей возможной энергией.* Это означает, что при присоединении к системе нового электрона его энергия связи должна быть максимально возможной. Применение этого принципа, вообще говоря, требует точного решения квантовомеханической задачи многих электронов, что, как уже отмечалось, практически невыполнимо. Поэтому при построении электронных конфигураций реальных атомов используют эмпирические данные об ионизационных потенциалах атомов и их химических свойствах.

67.5.2. Электронные конфигурации элементов. Оболочка K ($n = 1$) состоит только из s-подоболочки ($l = 0$). В водороде на K-оболочке находится один электрон, и его электронная конфигурация есть $1s^1$. В атоме гелия к этому электрону присоединяется второй электрон в $1s$-состоянии, и образуется электронная конфигурация $1s^2$. Этим исчерпывается число возможных электронов на K-оболочке. Формируется первый период периодической системы элементов. Третий электрон начинает заполнять s-подоболочку оболочки L ($n = 2$). Его состояние $2s^1$. Образуется атом лития с электронной конфигурацией $1s^2 2s^1$. Четвертый электрон также занимает состояние $2s$, и получается элемент бериллий (см. табл. 67.2). На оболочке L может находиться всего 8 электронов. В соответствии с (67.80) и (67.81) они распределяются по состояниям следующим образом: $2s^2 2p^6$. Этой конфигурацией заканчивается формирование второго периода периодической системы. Он начинается щелочным металлом $_3$Li и заканчивается инертным газом $_{10}$Ne (индекс обозначает порядковый номер элемента).

Заполнение оболочки M ($n = 3$) начинается со щелочного элемента $_{11}$Na и заканчивается инертным газом $_{18}$Ar. Получается третий период периодической системы.

В соответствии с третьим принципом объяснения периодической системы элементов [67.5.1] оболочки должны заполняться последовательно одна за другой, а в пределах каждой оболочки должны полностью заполняться сначала s-подоболочка, затем p-, d-, f-подоболочки. Однако начиная с четвертого периода этот порядок нарушается. Так, здесь сначала заполняется $4s$-подоболочка, а затем $3d$. За электронной конфигурацией ванадия $4s^2 3d^3$ следует электронная конфигурация хрома $4s^1 3d^5$. Новый электрон присоединяется не к подоболочке $3d$, а к $4s$, занимая пропущенное место, и образует конфигурацию марганца $4s^2 3d^5$. Аналогичные нерегулярности наблюдаются при заполнении и других d- и f-подоболочек.

Отмеченные нарушения порядка заполнения подоболочек электронами объясняются главным образом наличием у них орбитального момента $|\mathbf{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, который приводит к появлению у электрона дополнительной к электрической энергии центробежного отталкивания от ядра, равной $l(l+1)\hbar^2/2m_e r^2$ (см. (66.17)). Эта энергия противоположна по знаку электрической энергии притяжения к ядру. Поэтому энергия связи электрона с $l \neq 0$ меньше, чем у s-электрона. Так, каждый из 10 электронов $3d$-подоболочки имеет меньшую энергию связи, чем каждый из двух электронов $4s$-подоболочки. Поэтому сначала заполняется подоболочка $4s$, а затем $3d$. Особенно велико центробежное отталкивание у d-и f-подоболочек. В целом, за исключением некоторых деталей, которые видны в табл. 67.2, порядок заполнения оболочек и подоболочек следующий:

Число электронов	Конфигурация
2	$1s^2$
8	$2s^2 2p^6$
8	$3s^2 3p^6$
18	$4s^2 3d^{10} 4p^6$
18	$5s^2 4d^{10} 5p^6$
32	$6s^2 4f^{14} 5d^{10} 6p^6$
32	$7s^2 5f^{14} 6d^{10} 7p^6$

(67.82)

Иногда электронными оболочками называют совокупность состояний, входящих в каждую строку этой таблицы.

Характерной особенностью периодов периодической системы элементов является то, что каждый из них начинается щелочным металлом, а заканчивается инертным газом. У щелочных металлов имеется всего один наружный s-электрон. Такие атомы имеют наименьшие ионизационные потенциалы. Они легко отдают наружный s-электрон, поэтому имеют большую химическую активность. У инертных газов (кроме He) наружные s-, p-подоболочки состоят из восьми электронов, образующих особенно компактную, прочно связанную систему. Ионизационные потенциалы инертных газов максимальны. Этим объясняется их химическая пассивность — они практически не вступают в химические реакции.

В табл. 67.2 дано строение известных химических элементов. Эта таблица дополняет данные, представленные в периодической системе элементов Д. И. Менделеева. *Лантаноиды* — группу элементов от $_{58}$Ce до $_{71}$Lu, следующих за $_{57}$La — называют также *редкоземельными элементами*. У них происходит заполнение внутренней $4f$-подоболочки при

практически неизменных наружных подоболочках. Поэтому редкоземельные элементы обладают близкими химическими свойствами. Подобным образом ведут себя *актиноиды* — группа элементов от $_{90}$Th до $_{103}$Lr — в седьмом периоде. Элементы $_{26}$Fe, $_{27}$Co, $_{28}$Ni (четвертый период), $_{44}$Ru, $_{45}$Rh, $_{46}$Pd (пятый период) и $_{76}$Os, $_{77}$Ir, $_{78}$Pt (шестой период) называют *переходными элементами*.

Таблица 67.2. Электронные конфигурации элементов (N_{nl} — число электронов в состоянии с одинаковыми n и l, E_0 — ионизационный потенциал, Z — порядковый номер элемента)

	Z	Символ	Название элемента	$nl^{N_{nl}}$	E_0, эВ
I	1	H	водород	$1s^1$	13,54
	2	He	гелий	$2s^2$	24,45
II	3	Li	литий	(He) + $2s^1$	5,37
	4	Be	бериллий	(He) + $2s^2$	9,48
	5	B	бор	(He) + $2s^22p^1$	8,4
	6	C	углерод	(He) + $2s^22p^2$	11,22
	7	N	азот	(He) + $2s^22p^3$	14,47
	8	O	кислород	(He) + $2s^22p^4$	13,56
	9	F	фтор	(He) + $2s^22p^5$	18,6
	10	Ne	неон	(He) + $2s^22p^6$	21,48
III	11	Na	натрий	(Ne) + $3s^1$	5,12
	12	Mg	магний	(Ne) + $3s^2$	7,61
	13	Al	алюминий	(Ne) + $3s^23p^1$	5,96
	14	Si	кремний	(Ne) + $3s^23p^2$	7,39
	15	P	фосфор	(Ne) + $3s^23p^3$	10,3
	16	S	сера	(Ne) + $3s^23p^4$	10,31
	17	Cl	хлор	(Ne) + $3s^23p^5$	12,96
	18	Ar	аргон	(Ne) + $3s^23p^6$	15,69
IV	19	K	калий	(Ar) + $4s^1$	4,32
	20	Ca	кальций	(Ar) + $4s^2$	6,09
Переходные	21	Sc	скандий	(Ar) + $3d^14s^2$	6,57
	22	Ti	титан	(Ar) + $3d^24s^2$	6,80
	23	V	ванадий	(Ar) + $3d^34s^2$	6,76
	24	Cr	хром	(Ar) + $3d^54s^1$	6,74
	25	Mn	марганец	(Ar) + $3d^54s^2$	7,40
	26	Fe	железо	(Ar) + $3d^64s^2$	7,83
	27	Co	кобальт	(Ar) + $3d^74s^2$	7,81
	28	Ni	никель	(Ar) + $3d^84s^2$	7,61
	29	Cu	медь	(Ar) + $3d^{10}4s^1$	7,62
	30	Zn	цинк	(Ar) + $3d^{10}4s^2$	9,35
	31	Ga	галлий	(Ar) + $3d^{10}4s^24p^1$	5,27
	32	Ge	германий	(Ar) + $3d^{10}4s^24p^2$	7,85
	33	As	мышьяк	(Ar) + $3d^{10}4s^24p^3$	9,4
	34	Se	селен	(Ar) + $3d^{10}4s^24p^4$	9,75
	35	Br	бром	(Ar) + $3d^{10}4s^24p^5$	11,8
	36	Kr	криптон	(Ar) + $3d^{10}4s^24p^6$	13,94

	Z	Символ	Название элемента	$nl^{N_{nl}}$	E_0, эВ
V	37	Rb	рубидий	(Kr) + $5s^1$	4,16
	38	Sr	стронций	(Kr) + $5s^2$	5,67
	39	Y	иттрий	(Kr) + $4d^15s^2$	6,5
	40	Zr	цирконий	(Kr) + $4d^25s^2$	6,84
Переходные	41	Nb	ниобий	(Kr) + $4d^45s^1$	6,88
	42	Mo	молибден	(Kr) + $4d^55s^1$	7,65
	43	Tc	технеций	(Kr) + $4d^65s^1$	7,28
	44	Ru	рутений	(Kr) + $4d^75s^1$	7,7
	45	Rh	родий	(Kr) + $4d^85s^1$	7,7
	46	Pd	палладий	(Kr) + $4d^{10}$	8,5
	47	Ag	серебро	(Kr) + $4d^{10}5s^1$	7,54
	48	Cd	кадмий	(Kr) + $4d^{10}5s^2$	8,95
	49	In	индий	(Kr) + $4d^{10}5s^25p^1$	5,76
	50	Sn	олово	(Kr) + $4d^{10}5s^25p^2$	7,37
	51	Sb	сурьма	(Kr) + $4d^{10}5s^25p^3$	8,5
	52	Te	теллур	(Kr) + $4d^{10}5s^25p^4$	9,1
	53	I	иод	(Kr) + $4d^{10}5s^25p^5$	10,44
	54	Xe	ксенон	(Kr) + $4d^{10}5s^25p^6$	12,08
VI	55	Cs	цезий	(Xe) + $6s^1$	3,88
	56	Ba	барий	(Xe) + $6s^2$	5,19
	57	La	лантан	(Xe) + $5d^16s^2$	5,57
Лантаноиды	58	Ce	церий	(Xe) + $4f^26s^2$	5,54
	59	Pr	празеодим	(Xe) + $4f^36s^2$	5,46
	60	Nd	неодим	(Xe) + $4f^46s^2$	5,52
	61	Pm	прометий	(Xe) + $4f^56s^2$	5,55
	62	Sm	самарий	(Xe) + $4f^66s^2$	5,64
	63	Eu	европий	(Xe) + $4f^76s^2$	5,67
	64	Gd	гадолиний	(Xe) + $4f^75d^16s^2$	6,15
	65	Tb	тербий	(Xe) + $4f^85d^16s^2$	5,86
	66	Dy	диспрозий	(Xe) + $4f^{10}6s^2$	5,94
	67	Ho	гольмий	(Xe) + $4f^{11}6s^2$	6,02
	68	Er	эрбий	(Xe) + $4f^{12}6s^2$	6,11
	69	Tm	тулий	(Xe) + $4f^{13}6s^2$	6,18
	70	Yb	иттербий	(Xe) + $4f^{14}6s^2$	6,25
	71	Lu	лютеций	(Xe) + $4f^{14}5d^16s^2$	5,42
Переходные	72	Hf	гафний	(Xe) + $4f^{14}5d^26s^2$	7,5
	73	Ta	тантал	(Xe) + $4f^{14}5d^36s^2$	7,89
	74	W	вольфрам	(Xe) + $4f^{14}5d^46s^2$	7,98
	75	Re	рений	(Xe) + $4f^{14}5d^56s^2$	7,88
	76	Os	осмий	(Xe) + $4f^{14}5d^76s^1$	8,73
	77	Ir	иридий	(Xe) + $4f^{14}5d^76s^2$	9,05
	78	Pt	платина	(Xe) + $4f^{14}5d^96s^1$	8,96
	79	Au	золото	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^1$	9,22
	80	Hg	ртуть	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^2$	9,20
	81	Tl	таллий	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^26p^1$	10,59
	82	Pb	свинец	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^26p^2$	7,39
	83	Bi	висмут	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^26p^3$	8,0
	84	Po	полоний	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^26p^4$	8,42

Продолжение табл. 67.2

	z	Символ и название элемента	$nl^{N_{nl}}$	$E_{ион}$, эВ
	85	At астат	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^26p^5$	9,0
	86	Rn радон	(Xe) + $4f^{14}5d^{10}6s^26p^6$	10,69
VII	87	Fr франций	(Rn) + $7s^1$	4,0
	88	Ra радий	(Rn) + $7s^2$	5,28
	89	Ac актиний	(Rn) + $6d^17s^2$	5,6
Актиноиды	90	Th торий	(Rn) + $6d^27s^2$	6,1
	91	Pa протактиний	(Rn) + $5f^26d^17s^2$	6,0
	92	U уран	(Rn) + $5f^36d^17s^2$	6,0
	93	Np нептуний	(Rn) + $5f^46d^17s^2$	6,2
	94	Pu плутоний	(Rn) + $5f^67s^2$	6,06
	95	Am америций	(Rn) + $5f^77s^2$	6,0
	96	Cm кюрий	(Rn) + $5f^76d^17s^2$	6,02
	97	Bk берклий	(Rn) + $5f^86d^17s^2$	
	98	Cf калифорний	(Rn) + $5f^{10}7s^2$	
	99	Es эйнштейний	(Rn) + $5f^{11}7s^2$	
	100	Fm фермий	(Rn) + $5f^{12}7s^2$	
	101	Md менделевий	(Rn) + $5f^{13}7s^2$	
	102	(No нобелий)	(Rn) + $5f^{14}7s^2$	
	103	Lr лоуренсий	(Rn) + $5f^{14}6d^17s^2$	
	104	(Ku курчатовий)	(Rn) + $5f^{14}6d^27s^2$	
	105	(Ns нильсборий)	(Rn) + $5f^{14}6d^37s^2$	
	106	EW экавольфрам	(Rn) + $5f^{14}6d^47s^2$	
	107	ERe экарений	(Rn) + $5f^{14}6d^57s^2$	
	108		(Rn) + $5f^{14}6d^67s^2$	
	109		(Rn) + $5f^{14}6d^77s^2$	

68. АТОМ ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

68.1. Атом во внешнем электрическом поле

68.1.1. Эффект Штарка. *Эффектом Штарка* (1913) называется расщепление энергетических уровней атомов во внешнем электрическом поле. Этот эффект наблюдается как в однородном, так и неоднородном сильном электрическом поле. Изменение энергии стационарных состояний атома под влиянием внешнего электрического поля зависит от того, имеется у атома собственный дипольный электрический момент $\mathbf{d}$ или его нет. В первом случае при включении однородного электрического поля напряженностью $\vec{\mathscr{E}}$ в приближении, линейном по полю, атом получает дополнительную энергию

$$W = -\mathbf{d}\vec{\mathscr{E}} \tag{68.1}$$

и смещение и расщепление спектральных линий оказывается также пропорциональным первой степени напряженности $\vec{\mathscr{E}}$. Такое расщепление называют *линейным эффектом Штарка*.

Если атом не имеет собственного электрического дипольного момента, то в присутствии электрического поля $\vec{\mathscr{E}}$ он приобретает средний электрический дипольный момент $\langle \mathbf{d} \rangle$. Если внешнее поле является достаточно слабым, т. е. оно значительно меньше электрического поля в атомах, создаваемого зарядами ядер и электронов и имеющего напряженность не менее 10^{10} В/м, то

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \alpha \vec{\mathscr{E}}, \tag{68.2}$$

где коэффициент пропорциональности α называется *поляризуемостью атома*. Для атомов со сферической симметрией α — скалярная величина, а в общем случае представляет собой симметричный тензор [9.3; 25.2.4]. Поляризуемость атома может быть вычислена методами квантовой механики. При увеличении электрического поля от нуля до $\vec{\mathscr{E}}$ дипольный момент атома также изменяется от нуля до $\langle \mathbf{d} \rangle$. При этом над атомом совершается работа

$$W = \frac{1}{2} \langle \mathbf{d} \rangle \vec{\mathscr{E}} = \frac{1}{2} \alpha \vec{\mathscr{E}}^2, \tag{68.3}$$

которая идет на увеличение потенциальной энергии атома во внешнем поле. Смещение и расщепление спектральных линий у таких атомов пропорционально $\vec{\mathscr{E}}^2$. Такое расщепление называют *квадратичным эффектом Штарка*. Этот эффект меньше линейного.

Атом, имеющий собственный дипольный момент $\mathbf{d}$ в электрическом поле, получает и добавочный (индуцированный) дипольный момент, который в первом приближении пропорционален $\vec{\mathscr{E}}$, как в (68.2). Происходит наложение линейного и квадратичного эффектов Штарка. Смещение линий оказывается несимметричным — они смещаются в красную сторону спектра в область более низких энергий.

У водородоподобных атомов эффект Штарка линеен. Это объясняется тем, что в таких атомах электрическое поле ядра, в котором движется электрон, является кулоновским, и его энергетические уровни вырождены по l. Уравнение Шредингера водородоподобного атома во внешнем электрическом поле $\vec{\mathscr{E}}$ имеет вид

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{Ze^2}{r} - ez\mathscr{E} - E \right) \psi = 0, \tag{68.4}$$

который отличается от (66.6) наличием дополнительного слагаемого $-ez\mathscr{E}$, обусловленного возмущением W (68.1) со стороны поля. Здесь учтено, что дипольный электрический момент атома с одним электроном [25.2.2] $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, и выбрана ось z системы координат вдоль вектора напряженности электрического поля $\vec{\mathscr{E}}$, т. е. $\mathbf{r}\vec{\mathscr{E}} = z\mathscr{E}$. Величина μ, как и в (66.6), есть приведенная масса электрона (66.4). Из уравнения (68.4) видно, что при включении внешнего электрического поля атом становится аксиально-симметричной системой. Кроме того, под влиянием внешнего электрического поля может осуществиться спонтанная (самопроизвольная) ионизация атома.

Если величина поля мала, т. е. когда изменение уровней мало по сравнению с расстояниями между соседними уровнями атома без поля, количественная теория эффекта Штарка может быть построена на основе теории возмущений по взаимодействию W (68.1). В первом порядке теории возмущений поправка $\Delta E_n = E - E_n^0$, где E — энергия атома в поле, E_n^0 — энергия атома без поля, имеет вид

$$\Delta E_n = -e\vec{\mathscr{E}} \langle \mathbf{r} \rangle_n, \quad \langle \mathbf{r} \rangle_n = \int \psi_n^* \mathbf{r} \psi_n \, d\mathbf{r}, \tag{68.5}$$

где ψ_n — собственные функции, соответствующие собственным значениям E_n^0. Волновые функции ψ_n строятся с учетом возможного вырождения по l [68.1.2].

68.1.2. Линейный эффект Штарка для атома водорода. В нерелятивистском приближении электрическое поле не действует на спин электрона. Поэтому в простейшем варианте теории тонкую структуру спектра электрона, обусловленную спин-орбитальным взаимодействием, можно не учитывать. Основным состоянием атома водорода является 1s-состояние. Воспользовавшись явным видом волновой функции водорода [66.2], легко показать, что $\langle \mathbf{r} \rangle_1 = 0$, т. е. в первом порядке теории возмущений энергия основного состояния атома водорода во внешнем поле не изменяется. В первом возбужденном состоянии ($n = 2$) необходимо учесть вырождение волновой функции ψ_2 по l. Это можно сделать, записав ψ_2 в виде линейной комбинации функций ψ_{nlm} водорода с квантовыми числами $n, l, m = \{2, 0, 0; 2, 1, 0; 2, 1, 1; 2, 1, -1\}$:

$$\psi_2 = \sum_{i=1}^{4} b_i \Phi_i, \tag{68.6}$$

где обозначено для простоты $\Phi_1 = \psi_{200}$, $\Phi_2 = \psi_{210}$, $\Phi_3 = \psi_{211}$, $\Phi_4 = \psi_{21-1}$. Подставляя (68.6) в уравнение (68.4) для $Z = 1$ и интегрируя его с функциями Φ_i^*, получаем систему уравнений для коэффициентов b_i. Из условия разрешимости этой системы находим, что поправка к энергии ΔE_2 может принимать три различных значения:

$$\Delta E_2 = 3ea_0\mathscr{E}, \quad \Delta E_2 = -3ea_0\mathscr{E}, \quad \Delta E_2 = 0, \tag{68.7}$$

где $a_0 = \hbar^2/\mu e^2$ — боровский радиус [65.1]. Отсюда следует, что при включении внешнего электрического поля четырехкратно вырожденный уровень атома водорода ($n = 2$) расщепляется на три уровня. Состояние с $m = \pm 1$ является двукратно вырожденным. Величина расщепления уровней ΔE, пропорциональна напряженности электрического поля $\mathscr{E}$. В общем случае уровень с главным квантовым числом n в постоянном электрическом поле расщепляется на $2n - 1$ подуровней.

У более сложных атомов и ионов с одним валентным электроном поле, действующее на внешний электрон, искажено внутренними электронами и потому не является кулоновским. В таком поле вырождения по l нет. Можно показать, что в первом порядке теории возмущений $\Delta E_n = 0$ для каждого n и l. В этом случае влияние электрического поля $\mathscr{E}$ нужно учитывать во втором порядке теории возмущений, который приводит к величине расщепления уровней энергии атомов, квадратичной по полю $\mathscr{E}$.

В случае атома водорода слагаемыми, пропорциональными $\mathscr{E}^2$, можно пренебречь при $\mathscr{E} \lesssim 10^7$ В/м. При более сильных полях необходимо учитывать слагаемое $\sim \mathscr{E}^2$, а при $\mathscr{E} \sim 4 \cdot 10^7$ В/м — слагаемое $\sim \mathscr{E}^3$. Имеется полное согласование теории с экспериментом, где достигнуты поля $\sim 10^9$ В/м.

68.2. Атом во внешнем магнитном поле

68.2.1. Эффект Зеемана. *Эффектом Зеемана* (1896) называется расщепление энергетических уровней атомов, помещенных во внешнее магнитное поле.

Физическая природа расщепления уровней заключается в том, что в отсутствие внешних полей все направления в пространстве эквивалентны, поэтому энергии уровней атомов не зависят от магнитного квантового числа m [66.2]. Если суммарный орбитальный момент атома J (67.45) определяется внутренним квантовым числом J, то его проекция m_J на некоторое направление принимает $2J + 1$ значений, и энергетические уровни являются вырожденными с кратностью вырождения $2J + 1$, т. е. у атома $2J + 1$ уровней имеют одинаковую энергию. Внешнее магнитное поле задает в пространстве выделенное направление и вырождение снимается: каждый энергетический уровень расщепляется на $2J + 1$ подуровней. Действительно, атом имеет магнитный момент μ_J, равный, как показывает квантовомеханический расчет, по величине [67.4.4]

$$\mu_J = -\mu_0 g_J \sqrt{J(J+1)}, \quad g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \tag{68.8}$$

где $\mu_0 = e\hbar/2m_e c$ — магнетон Бора (67.59), L и S — суммарные орбитальное и спиновое квантовые числа атома. Проекция μ_J на направление, задаваемое осью z, имеет вид

$$\mu_{J_z} = -\mu_0 g_J m_J, \quad m_J = -J, -J+1, \ldots, J-1, J. \tag{68.9}$$

Атом с отличным от нуля магнитным моментом μ_J при помещении его в магнитное поле напряженностью $\vec{\mathscr{H}}$ приобретает дополнительную энергию, которая описывается оператором взаимодействия

$$V = -\mu_J \vec{\mathscr{H}}. \tag{68.10}$$

Считая поле $\vec{\mathscr{H}}$ достаточно слабым, т. е. приводящим к малому изменению уровней по сравнению с расстояниями между соседними уровнями, и усредняя (68.10) по состояниям атома, найденным при $\vec{\mathscr{H}} = 0$, с квантовыми числами n, J, L, для величины смещения уровней находим выражение, согласующееся с формулой (67.77):

$$\Delta E = \langle V \rangle_{nJL} = -\mu_{J_z}\mathscr{H} = \mu_0 g_J \mathscr{H} m_J. \tag{68.11}$$

Здесь в качестве оси z взято направление поля $\vec{\mathscr{H}}$. Так как m_J принимает $2J + 1$ разных значений, то энергетический уровень с данным J расщепляется на $2J + 1$ равноотстоящих подуровней. Величина расщепления ΔE зависит от множителя Ланде g_J, который определяется квантовыми числами атома J, L, S.

Случай $g_J = 1$ соответствует так называемому *нормальному (или простому) эффекту Зеемана*. Из (68.8) видно, что нормальный эффект Зеемана наблюдается для энергетических состояний с полным спином $S = 0$ (синглетные термы атомов с четным числом электронов), т. е. при $J = L$ и $m_J = m_L = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm L$. В результате квантовых переходов между уровнями E' и E'' излучаются спектральные линии с частотами $\omega = (E'' - E')/\hbar$,

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega_0 \Delta m_L, \quad \Delta\omega_0 = \frac{\mu_0 \mathscr{H}}{\hbar} = \frac{e\mathscr{H}}{2m_e c}, \tag{68.12}$$

где Δm_L — разность магнитных квантовых чисел m_L уровней E'' и E', $\omega_0 = (E_0'' - E_0')/\hbar$ — частота линии, излучаемой в отсутствие магнитного поля. Величина $\Delta\omega_0$ совпадает с ларморовой частотой (68.23). В силу

правила отбора (66.22): $\Delta m_L = 0, \pm 1$ частота ω излучаемой линии представляет собой триплет:

$$\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega_0, \quad \omega = \omega_0, \tag{68.13}$$

обозначаемый σ и π соответственно.

На рис. 68.1 показана схема простого эффекта Зеемана для перехода из состояния $^1P_1$ в состояние $^1S_0$ (обозначения см. (67.48)). Для частоты $\omega \simeq 3 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ (видимый свет) и поля $\mathcal{H} \simeq 8 \cdot 10^5$ А/м величина зеемановского расщепления, выраженная в длинах волн $\lambda = 2\pi c/\omega$, равна

$$\Delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2}\Delta\omega_0 = \frac{\pi e\mathcal{H}}{m_e\omega^2}, \quad \Delta\lambda \simeq 0{,}02 \text{ нм}. \tag{68.14}$$

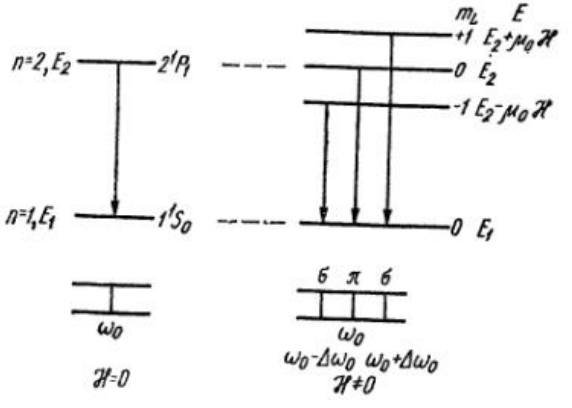


Рис. 68.1

Простой эффект Зеемана наблюдается в том случае, когда линии не имеют тонкой структуры (являются синглетами). Если полный спин атома в данном состоянии отличен от нуля, $S \neq 0$, то на ΔE (68.11) существенно влияет множитель Ланде g_J. Множитель g_J различен для различных состояний J, L, S. Так, $g_{1/2} = 2$ для терма $^2S_{1/2}$, у которого $L = 0$, $S = \frac{1}{2}$, $J = \frac{1}{2}$; $g_{1/2} = \frac{2}{3}$ для терма $^2P_{1/2}$, у которого $L = 1$, $S = \frac{1}{2}$, $J = \frac{1}{2}$; $g_{3/2} = \frac{4}{3}$ для терма $^2P_{3/2}$ и т. д. Величина смещения линий относительно первоначальной линии (без поля) определяется разностью величин $g_J m_J$ для состояний, между которыми рассматривается квантовый переход. Пусть переход наблюдается между двумя термами, для которых

$$\Delta E' = \mu_0\mathcal{H}g'_J m'_J, \quad \Delta E'' = \mu_0\mathcal{H}g''_J m''_J. \tag{68.15}$$

Тогда смещение спектральных линий относительно первоначальной частоты ω_0

$$\Delta\omega = \frac{\Delta E'' - \Delta E'}{\hbar} = \frac{\mu_0\mathcal{H}}{\hbar}(g''_J m''_J - g'_J m'_J) = \Delta\omega_0(g''_J m''_J - g'_J m'_J). \tag{68.16}$$

Расщепление спектральных линий, описываемое формулой (68.16), называется *сложным (или аномальным) эффектом Зеемана*. На рис. 68.2 показана схема аномального эффекта Зеемана для переходов $^2P_{1/2} \to {}^2S_{1/2}$ (линия 589,6 нм желтого дублета натрия) и $^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}$ (линия 589,0 нм этого же дублета).

68.2.2. Эффект Пашена — Бака. Если величина расщепления ΔE (68.11), вызываемого внешним магнитным полем, велика по сравнению с дублетным расщеплением уровней [66.3.2; 66.4.4], то магнитное поле называется *сильным*. В таком поле разрывается связь спинового **S** и орбитального **L** моментов атома, и они взаимодействуют с магнитным

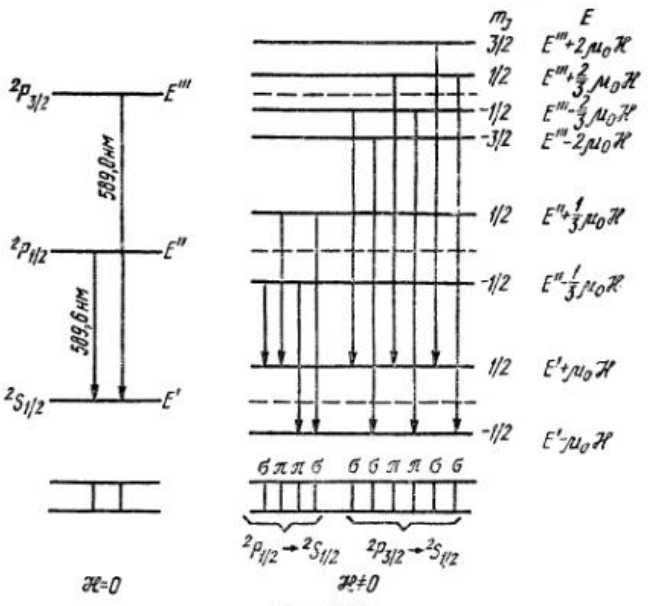


Рис. 68.2

полем $\mathcal{H}$ независимо. Оператор взаимодействия атома с магнитным полем имеет вид

$$V = -\mu_J\mathcal{H} = -\mu_0(\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\mathcal{H} = \mu_0\mathcal{H}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z), \tag{68.17}$$

где $\hat{L}_z$ и $\hat{S}_z$ — проекции векторов **L** и **S** на направление магнитного поля. Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием и выбирая в качестве невозмущенных волновые функции с квантовыми числами n, L, m_L, m_S, для величины расщепления находим

$$\Delta E_{m_L m_S} = \langle V\rangle_{nLm_L m_S} = \mu_0\mathcal{H}(m_L + 2m_S). \tag{68.18}$$

В отличие от (68.11) величина $\Delta E_{m_L m_S}$ зависит от собственных значений $\hbar m_L$ и $\hbar m_S$ операторов $\hat{L}_z$ и $\hat{S}_z$. Так как сумма $m_L + 2m_S$ пробегает $2L + 2S + 2$ различных значения, то каждый невозмущенный магнитным полем уровень E_{nL} расщепляется на $2L + 2S + 2$ подуровня, равноот-

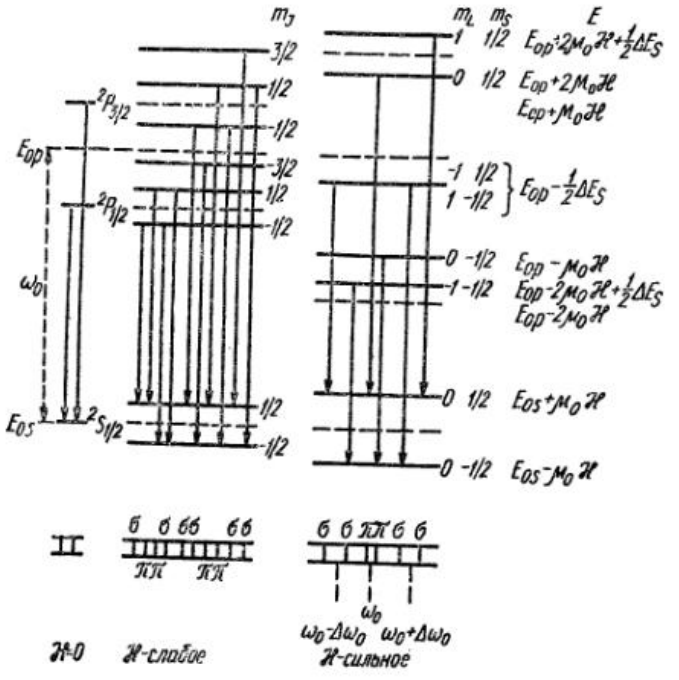


Рис. 68.3

стоящие один от другого на величину $\mu_0\mathcal{H}$. Для переходов между уровнями справедливо *правило отбора*

$$\Delta m_L = 0,\ \pm 1,\ \Delta m_S = 0. \tag{68.19}$$

Расщепление уровней (68.18) в сильных магнитных полях называется *эффектом Пашена — Бака* (1912). На рис. 68.3 показана схема эффекта Пашена — Бака для переходов $^2P_{1/2} \to {}^2S_{1/2}$ и $^2P_{3/2} \to {}^2S_{1/2}$. Описанное явление наблюдается для некоторых уровней атомов Li, Na, O и др. в магнитных полях с напряженностью, превышающей $2{,}9 \cdot 10^6$; $3 \cdot 10^6$; $7{,}2 \cdot 10^6$ А/м соответственно.

При более строгом рассмотрении смещения уровней в сильных магнитных полях нужно учитывать спин-орбитальное взаимодействие. Оно приводит к дополнительному мультиплетному расщеплению ΔE_S энергетических уровней, накладывающемуся на расщепление (68.18):

$$\Delta E_S = \frac{Z^4\alpha^2 m_L m_S}{2n^3 L\,(L+1)\left(L+\frac{1}{2}\right)}. \tag{68.20}$$

По порядку величины ΔE_S равно расстоянию ΔE_{LS} (66.56) между компонентами тонкой структуры [66.4.1]. Учет ΔE_S существенен в том случае, когда внешнее магнитное поле вызывает расщепление, сравнимое с расщеплением, обусловленным тонкой структурой [66.4] (рис. 68.3).

В очень сильных полях следует учитывать в гамильтониане, описывающем атом во внешнем магнитном поле, слагаемые, пропорциональные $\mathcal{H}^2$.

68.2.3. **Магнитомеханические явления.** Существование связи между механическими и магнитными моментами атома обнаруживается в так называемых *магнитомеханических эффектах*, позволяющих измерять величину гиромагнитного отношения [27.4.1].

В опытах Эйнштейна — де Гааза (1915) металлическая игла длиной 10 см и радиусом поперечного сечения 0,015 см подвешивалась внутри соленоида на тонкой кварцевой нити. При пропускании тока через соленоид игла намагничивалась в результате ориентирования атомных магнитных моментов вдоль направления магнитного поля соленоида. Так как магнитный момент атома $\boldsymbol{\mu}_J$ связан с его полным моментом $\mathbf{J}$ и согласно (67.75) противоположен ему по направлению, то в магнитном поле игла приобретает механический момент $\mathbf{J}_{эф}$, определяемый суммой механических моментов валентных электронов атомов, и закручивается относительно своей оси. При изменении направления тока в катушке игла перемагничивается и закручивается в противоположную сторону. Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$\mathbf{J}_{реш} = -\mathbf{J}_{эф},$$

где $\mathbf{J}_{реш}$ — момент импульса, обусловленный движением кристаллической решетки иглы. Его можно определить, измерив амплитуду колебаний иглы, а по коэффициенту магнитной восприимчивости χ ее вещества [29.1.1; 68.2.4] и величине напряженности поля $\mathcal{H}$ соленоида можно найти величину магнитного момента иглы $\mu_{реш} = \chi\mathcal{H}$. Это дает возможность определить гиромагнитное отношение γ [27.4.1] для атома:

$$\left|\frac{\boldsymbol{\mu}_{реш}}{\mathbf{J}_{реш}}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{\mu}_{реш}}{\mathbf{J}_{эф}}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{\mu}_J}{\mathbf{J}}\right| = \frac{\mu_0}{\hbar} g_J = \frac{e}{2m_e c} g_J = \gamma \tag{68.21}$$

и вычислить множитель Ланде g_J. Опыты Эйнштейна — де Гааза показали, что для железной иглы $g_J = 2$. Если бы магнитные свойства атома определялись орбитальным магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}_L$ (67.72), то согласно величине гиромагнитного отношения для орбитального движения (67.56) $|\boldsymbol{\mu}_L/\mathbf{L}| = e/2m_e c$ множитель Ланде должен быть равен единице: $g_J = 1$. Результаты опытов указали на то, что элементарными магнитиками в железной игле являются не орбитальные электронные токи, а сами электроны, которые обладают собственным моментом импульса — спином $\mathbf{S}$ и собственным магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}_S$ (67.2), поскольку $|\boldsymbol{\mu}_S/\mathbf{S}| = e/m_e c$ (см. (67.63)).

Баркетт выполнил опыты (1909), которые по существу являются обратными опытами Эйнштейна — де Гааза. В них во вращение (порядка 100 об/с) приводился железный стержень, а определялась величина возникающего при этом магнитного поля. Физика опытов такова. Элементарные магнитики обладают гироскопическими свойствами и при вращении ориентируются в направлении оси вращения. Это приводит к намагничиванию стержня. При вращении в противоположном направлении стержень перемагничивался. Для определения гиромагнитного отношения γ необходимо знать частоту вращения стержня и величину возникающего при его вращении магнитного поля $\mathcal{H}$. В опытах Барнетта величина $\mathcal{H}$ была в 10^3 раз меньше напряженности магнитного

поля Земли. Тем не менее опыты дали результат, совпадающий с результатом Эйнштейна — де Гааза.

68.2.4. Магнитные свойства веществ. Все без исключения вещества, помещенные во внешнее магнитное поле, намагничиваются. Это означает, что у них появляется или изменяется магнитный момент. Поэтому при описании магнитных свойств вещества называют *магнетиками*.

Магнетики принято делить на два класса: *диамагнетики* — вещества, которые намагничиваются противоположно направлению внешнего магнитного поля, и *парамагнетики* — вещества, которые во внешнем магнитном поле намагничиваются в направлении поля. В свою очередь парамагнетики подразделяют на 4 группы: *парамагнетики в узком смысле слова, ферромагнетики, антиферромагнетики* и *ферримагнетики*. Такая классификация парамагнетиков соответствует современному представлению о природе магнитных свойств веществ, которые определяются магнитными свойствами их атомов и характером межатомного взаимодействия.

К парамагнетикам в узком смысле относят магнетики, у которых практически отсутствует взаимодействие магнитных моментов атомов и которые во внешнем магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$ намагничиваются вдоль вектора $\vec{\mathcal{H}}$. К ферромагнетикам относят твердые (кристаллические) магнетики, у которых атомные магнитные моменты под влиянием межатомного взаимодействия самопроизвольно (без воздействия внешнего магнитного поля) ориентируются параллельно один другому. Ферромагнетики в отсутствие внешнего поля могут быть намагниченными.

Антиферромагнетиками называют такие кристаллические магнетики, у которых магнитные моменты атомов под влиянием межатомного взаимодействия устанавливаются самопроизвольно антипараллельно один другому и полностью компенсируются. Без внешнего магнитного поля антиферромагнетики не могут быть намагниченными.

К ферримагнетикам относят магнетики, у которых атомные магнитные моменты самопроизвольно сориентированы антипараллельно, но не компенсируют один другого полностью.

Магнетики характеризуются *магнитной восприимчивостью* χ, которая по определению представляет собой коэффициент пропорциональности между магнитным моментом $\vec{\mathcal{J}}$ единицы объема магнетика (вектором намагничивания) и внешним магнитным полем $\vec{\mathcal{H}}$:

$$\vec{\mathcal{J}} = \chi \vec{\mathcal{H}}. \qquad (68.22)$$

Магнитная восприимчивость χ, таким образом, есть физическая величина, характеризующая способность веществ изменять (или приобретать) свой магнитный момент под воздействием внешнего магнитного поля. Для диамагнетиков величина χ отрицательна и называется *коэффициентом диамагнитной восприимчивости*, для парамагнетиков — положительна и называется *коэффициентом парамагнитной восприимчивости*. Для пара- и диамагнетиков магнитная восприимчивость мала (10^{-4}—10^{-6} см^3/моль) и практически не зависит от величины напряженности $\vec{\mathcal{H}}$, а для ферромагнетиков [29.1.3] коэффициент χ велик (10^4 — 10^6 см^3/моль) и сложным образом зависит от $\mathcal{H}$. Антиферромагнетики характеризуются величиной $\chi \sim 10^{-4}$—10^{-6} см^3/моль, практически не зависящей от $\vec{\mathcal{H}}$ в слабых магнитных полях. Магнитная восприимчивость ферримагнетиков, как правило, меньше чем у ферромагнетиков, но изменяется в широких пределах и сложным образом зависит от $\vec{\mathcal{H}}$.

Магнитную восприимчивость магнетиков определяют опытным путем. Описать теоретически магнитные свойства данного вещества — означает рассчитать его магнитную восприимчивость. Это можно выполнить на основе модельных (упрощающих) представлений о магнитных моментах атомов и их взаимодействии [68.2.5] (см. также [29.1.3]. В электродинамике магнитную восприимчивость принято обозначать $\varkappa$.

68.2.5. Теорема Лармора и диамагнетизм. Формулировка **теоремы Лармора:** *во внешнем магнитном поле* $\vec{\mathcal{H}}$ *в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью*

$$\Omega = \frac{e\vec{\mathcal{H}}}{2m_e c}, \qquad (68.23)$$

электрон в атоме движется по тем же орбитам, что и в отсутствие поля $\vec{\mathcal{H}}$. Это означает, что электронные орбиты во внешнем магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$ равномерно прецессируют вокруг направления магнитного поля с частотой Ω (68.23). Эта частота называется *ларморовой частотой* (рис. 68.4).

Из теоремы Лармора следует, что вращение электронной орбиты с частотой Ω должно привести к возникновению магнитного поля

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{2m_e c\Omega}{e}. \qquad (68.24)$$

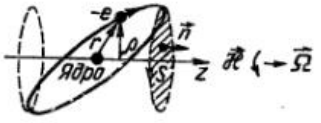


Рис. 68.4

Орбитальные магнитные моменты μ_e (67.55) электронов прецессируют вокруг направления магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}$ с ларморовой частотой Ω (68.23).

Теорема Лармора позволяет объяснить явление диамагнетизма [29.1.3; 68.2.4.].

При включении магнитного поля $\vec{\mathcal{H}}$ у электронных оболочек атомов возникает дополнительный магнитный момент [29.1.3; 67.4.1], направленный по правилу Ленца [30.2.1] противоположно магнитному полю:

$$\mu_d = -\frac{I_{\text{инд}}}{c} S\mathbf{n} = -\frac{e^2\vec{\mathcal{H}}}{6m_e c^2}\langle r^2\rangle, \quad \mathbf{n} \parallel \vec{\mathcal{H}}, \qquad (68.25)$$

где $I_{\text{инд}}$ — ток индукции, возникающий в атоме в результате дополнительного вращения электрона, вызванного прецессией электронной орбиты вокруг направления поля $\vec{\mathcal{H}}$ (рис. 68.4), и текущий в плоскости, перпендикулярной $\vec{\mathcal{H}}$:

$$I_{\text{инд}} = \frac{e}{T} = \frac{e\Omega}{2\pi} = \frac{e^2\mathcal{H}}{4\pi m_e c}, \qquad (68.26)$$

S — площадь контура, по которому течет $I_{\text{инд}}$, определяется формулой

$$S = \pi\rho^2 = \frac{2}{3}\pi\langle r^2\rangle, \qquad (68.27)$$

где ρ^2 — среднее значение квадрата расстояния электрона от оси z, $\langle r^2\rangle$ — средний квадрат расстояния электрона от ядра атома, равный $\frac{3}{2}\rho^2$ в случае сферической симметрии орбиты.

У атома, имеющего Z электронов, диамагнитный момент

$$\mu_d = -\frac{e^2}{6m_e c^2}\vec{\mathcal{H}}\sum_{i=1}^{Z}\langle r_i^2\rangle, \qquad (68.28)$$

где $\langle r_i^2\rangle$ — средний квадрат расстояния i-го электрона от ядра. Если в единице объема диамагнетика содержится N атомов, то вектор намаг-

ничивания $\mathscr{I}$ (68.22) равен $\mathscr{I} = N\mu_J$, и диамагнитная восприимчивость χ единицы объема магнетика определяется соотношением

$$\chi = -\frac{e^2N}{6m_ec^2}\sum_{i=1}^{Z}\langle r_i^2\rangle \simeq -\frac{e^2N}{6m_ec^2}n_0\langle r_0^2\rangle, \qquad (68.29)$$

где n_0 — число электронов на внешней оболочке, $\langle r_0^2\rangle$ — средний квадрат ее радиуса. Величина $\langle r_0^2\rangle$ определяется распределением электронов (их заряда) в атоме. С другой стороны, зная из эксперимента χ, можно определить $\langle r_0^2\rangle$. Экспериментальные значения χ для ряда веществ приведены ниже.

Вещество	He	Ne	Ar	Li^+	Na^+	Fe^-	Cl^-	K^+
$\chi \cdot 10^6$, см³/моль	—1,9	—7,2	—19,4	—0,7	—6,1	—9,4	—24,2	—14,6

68.2.6. Электронный парамагнитный резонанс. Многие вещества в намагниченном состоянии могут поглощать энергию падающих на них электромагнитных волн. Это поглощение происходит только при определенном соотношении между длиной электромагнитной волны и напряженностью постоянного магнитного поля, намагничивающего вещество. Физическое объяснение такого рода явлений, получивших название *магнитного резонанса*, состоит в следующем. В магнитном поле каждый уровень энергии атома расщепляется на $2J + 1$ подуровней [68.2.1]. Эти подуровни отличаются магнитным квантовым числом m_J и обнаруживаются в эффекте Зеемана при квантовых переходах между подуровнями различных расщепившихся уровней. Спонтанные переходы между подуровнями одного и того же уровня маловероятны, а в случае одного валентного электрона запрещены правилом отбора $\Delta L \neq 0$. Согласно (68.11) расстояние между соседними подуровнями δE атома, находящегося во внешнем постоянном магнитном поле напряженностью $\mathscr{H}$, имеет вид

$$\delta E = \mu_0 g_J \mathscr{H}. \qquad (68.30)$$

Если на такой атом падает электромагнитная волна с частотой

$$\omega = \frac{\delta E}{\hbar} = \Delta\omega_0 g_J, \qquad (68.31)$$

где $\Delta\omega_0$ — нормальное смещение (68.12), то можно предполагать что под действием магнитного поля падающей электромагнитной волны будут происходить переходы между соседними подуровнями одного и того же уровня, расщепившегося в постоянном магнитном поле $\vec{\mathscr{H}}$. Такое явление было обнаружено Е. К. Завойским (1944) и получило название *электронного парамагнитного резонанса* (ЭПР). Оно наблюдается у парамагнетиков [68.2.4], поскольку ответственным за расщепление уровней атома является его магнитный момент [68.2.1], учитывающий как орбитальный, так и спиновый моменты электронов. Строгий квантовомеханический расчет показывает, что переменное магнитное поле должно быть слабым и направленным перпендикулярно постоянному магнитному полю $\vec{\mathscr{H}}$. Вынужденные переходы между зеемановскими подуровнями означают, что находящийся в магнитном поле атом способен, переходя с одного подуровня данного уровня на другой подуровень того же уровня, поглощать энергию электромагнитной волны с частотой ω (68.31). Поглощение энергии электромагнитного поля будет избирательным (или резонансным). Вынужденные переходы между подуровнями одного уровня могут происходить и в обратном направлении, т. е. с излучением электромагнитной энергии. Поглощению волны соответствуют переходы из более низких энергетических состояний атома в более высокие, а излучению — из более высоких состояний в более низкие. У парамагнетика, находящегося в тепловом равновесии, атомы распределяются по подуровням в соответствии с законом Больцмана [16.5.1]. Поэтому в состояниях с меньшей энергией находится больше атомов, чем в состояниях с большей энергией, и в парамагнетиках преимущественно происходят переходы с увеличением энергии атомов, т. е. наблюдается поглощение электромагнитного излучения.

При $\mathscr{H} = 3{,}2 \cdot 10^5$ А/м и $g_J = 2$ частота электромагнитной волны $\omega = 6{,}91 \cdot 10^{10}$ с$^{-1}$, что соответствует длине волны $\lambda \simeq 2{,}7$ см (область сантиметрового диапазона радиоволн).

Опыт показывает, что парамагнетики поглощают энергию поля непрерывно. Это связано с тем, что его атомы взаимодействуют между собой. Наибольшую роль в ЭПР играют спин-спиновое и спин-решеточное взаимодействия. Первое из них приводит к выравниванию энергии атомов. Этот процесс называют *спиновой релаксацией*. Спиновая релаксация приводит к появлению ширины у линий резонансного поглощения в ЭПР. Спин-решеточное взаимодействие обусловлено процессом обмена энергией спиновой системы с кристаллической решеткой в целом и приводит в конечном счете к переходу энергии возбуждения атомов в теплоту (т. е. в энергию колебания атомов решетки). Спиновая система при этом возвращается в исходное состояние и снова может поглощать электромагнитную энергию с последующей передачей ее решетке.

Кроме ЭПР различают ферромагнитный, антиферромагнитный, ферримагнитный и диамагнитный (циклотронный) резонансы, т. е. в соответствии с магнетиком, у которого наблюдают магнитный резонанс. В атомных системах наблюдают также *ядерный магнитный резонанс* (ЯМР), природа которого связана с магнитным и механическим моментами атомных ядер [70.2.5]. Явление магнитного резонанса широко используют для определения магнитных моментов атомов и атомных ядер, изучения строения молекул и кристаллов, создания технических устройств (лазеров) и ряда других целей.

69. РЕНТГЕНОВСКИЕ СПЕКТРЫ

69.1. Рентгеновские лучи

69.1.1. Природа рентгеновских лучей. *Рентгеновские лучи* (*X-лучи*) представляют собой электромагнитные волны [43; 43.3.5] малой длины волны $\lambda \leqslant 0{,}1$ нм. Они возникают при остановке или торможении быстро летящих электронов (Рентген, 1895). Волновая природа этих лучей была подтверждена опытами Фридриха, Книппинга и Лауэ (1912), обнаруживших явление дифракции рентгеновских лучей. В качестве дифракционной решетки использовался естественный кристалл, в котором атомы расположены в правильном порядке на расстоянии $\sim 10^{-10}$ м один от другого. При облучении рентгеновскими лучами кристалла на фотопластинке, расположенной за кристаллом, получалась картина (рис. 69.1), представляющая собой результат дифракции

рентгеновских лучей на кристаллической решетке. Дифракционные картины оказались различными для разных кристаллов.

Рентгеновские лучи широко применяются в науке и технике. В физике они используются для исследования структуры кристаллов и других веществ, определения физических констант Z, h, e/m, изучения структуры внутренних электронных оболочек атомов, в химии и биологии — для структурного анализа, в медицине — для диагностики и терапии, в пищевой промышленности — для стерилизации, в технике — для обнаружения дефектов структур материалов (в дефектоскопии), в живописи — при анализе живописных полотен и для других целей.

69.1.2. Источники рентгеновского излучения. В технических устройствах источником рентгеновских лучей являются специальные *трубки*, называемые *рентгеновскими*. В простейшем варианте они представляют собой двухэлектродный электровакуумный прибор, состоящий из анода A и катода K, запаянных в стеклянную колбу T (рис. 69.2). Электроны, вылетающие из анода, ускоряются высокой разностью потенциалов между анодом и катодом и тормозятся на катоде, вызывая рентгеновское излучение. Энергии электронов в таких трубках не превышают 10^5—10^5 эВ. Рентгеновские лучи большой интенсивности получают в ускорителях электронов — *бетатронах* [33.5.2], в которых энергии электронов достигают 10^9 эВ.

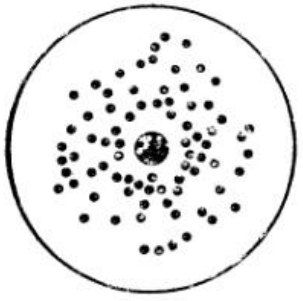


Рис. 69.1

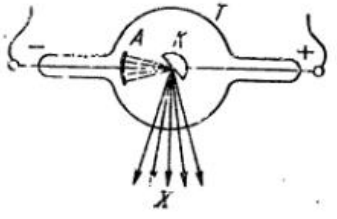


Рис. 69.2

Для регистрации рентгеновского излучения созданы различные приборы, использующие его химическое действие на фотопластинку, ионизационное воздействие на газы, а также рентгенолюминесценцию [57.5.1]. С помощью таких приборов установлено, что источником рентгеновского излучения являются естественные и искусственные радиоактивные элементы, распадающиеся путем K- и L-захвата электронов. Источником рентгеновских лучей является *плазма*, некоторые *звезды* и *звездные скопления*. Рентгеновское излучение космических объектов лежит в диапазоне длин электромагнитных волн от 10 до 0,01 нм. Общий поток такого излучения от Солнца на границе земной поверхности равен 10^{-8} Дж/см^2 · с, а светимость составляет 10^{19}—10^{20} Дж/с. Сильные источники рентгеновских лучей обнаружены в созвездии Скорпиона (Росси, Джаккони, 1962), в Крабовидной туманности — пульсар *PSR* 0531 ⊕ 21, в Малом Магеллановом облаке — *SMC X* — 1, в центральной части туманности Андромеды — *M*31 и др.

69.2. Типы рентгеновского излучения и их спектры

69.2.1. Тормозное излучение. Опыт (Баркла, 1905, и др.) показывает, что при соударении электронов с атомами вещества возникает два типа рентгеновского излучения: тормозное и характеристическое. Излучение, возникающее в результате торможения электронов с энергией

$$eV < E_{nlj} \tag{69.1}$$

на поверхности металла, называется *тормозным рентгеновским излучением*. Здесь V — разность потенциалов, пройденная электроном с зарядом $-e$, E_{nlj} — энергия атома металла в состоянии с квантовыми числами n, l, j [66.2.1; 66.3.2], равная работе ионизации атома. Тормозное излучение не зависит от вида металла, на котором происходит торможение электронов, и характеризуется сплошным спектром, ограниченным со стороны коротких волн величиной

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eV} = \frac{1{,}24}{V} \tag{69.2}$$

($\lambda_{\min}$ выражено в нанометрах, V — в киловольтах), следующей из уравнения Эйнштейна (57.1) для обратного фотоэффекта [57.1.1] (рис. 69.3). Распределение энергии по спектру описывается выражением

$$I = \frac{B}{\lambda_{\min}\lambda^3}(\lambda - \lambda_{\min}), \tag{69.3}$$

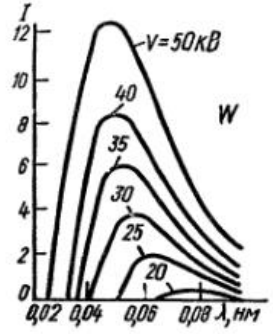


Рис. 69.3

где I — интенсивность излучения как функция его длины волны $\lambda > \lambda_{\min}$, B — постоянная величина.

Согласно законам электродинамики, энергия dE, излучаемая движущейся с ускорением заряженной частицей за время dt и равная потере энергии на излучение — $d\mathscr{E}$ за это же время, в нерелятивистском приближении ($v \ll c$) описывается формулой Лармора (44.34). Ускорение $\mathbf{v}$, приобретаемое заряженной частицей в поле ядра атома металла $\mathscr{F} = Ze\mathbf{r}/r^3$, где Ze — заряд ядра, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из ядра к частице, определяется формулой

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{e\mathscr{F}}{m_e} = -\frac{Ze^2}{m_e r^3}\mathbf{r} \tag{69.4}$$

(знак минус отражает тот факт, что заряженная частица с массой m_e тормозится полем ядра). Подстановка $\dot{v}$ в (44.34) приводит к следующему выражению для энергии излучения:

$$dE = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^6}{m_e^2c^3r^4}\,dt, \tag{69.5}$$

согласно которому потери на излучение с увеличением заряда ядер атомов металла увеличиваются. Эти потери сильно зависят от массы заряженной частицы m_e, генерирующей излучение. Для электронов (легкая частица) они много больше, чем для протонов (тяжелая частица). Эти закономерности тормозного излучения подтверждаются на

опыте. Сплошной характер наблюдаемого спектра объясняется тем, что при торможении электрон (или другая заряженная частица) с энергией eV (69.1) может отдать атомам металла любую долю своей кинетической энергии.

Строгое и детальное описание тормозного излучения дается в квантовой электродинамике.

69.2.2. Характеристическое излучение. Если энергия налетающего на металл первичного электрона достаточна для того, чтобы

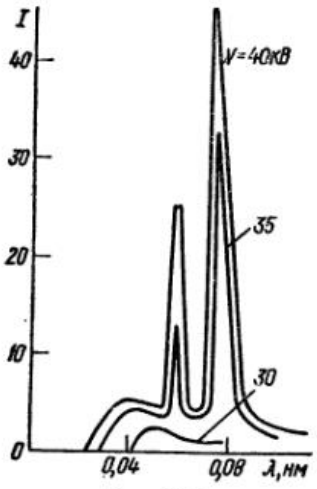


Рис. 69.4

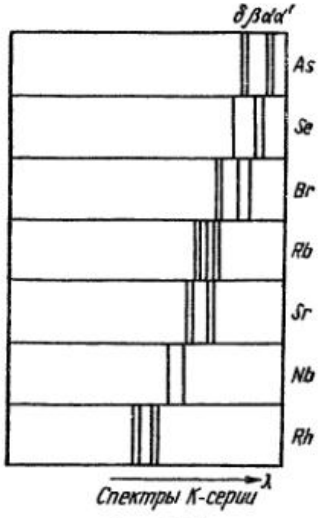


Рис. 69.5

выбить атомные электроны, находящиеся в состоянии с квантовыми числами n, j, l,

$$eV \geqslant E_{njl} \qquad (69.6)$$

(обозначения такие, как в (69.1)), то возникает рентгеновское излучение, которое называется *характеристическим*. Это излучение имеет линейчатый спектр, который зависит от вида металла (химического элемента). Каждый элемент дает только ему присущий спектр, который не зависит от того, находится элемент в свободном состоянии или входит в состав химического соединения. При облучении элементов электронами возникает характеристическое излучение, которое накладывается на сплошной спектр (рис. 69.4). С повышением разности потенциалов V положение пиков в интенсивности I излучения не изменяется, а величина I возрастает. При облучении элементов α-частицами (ядрами атома гелия) или протонами возбуждается только характеристическое излучение (без сплошного спектра).

Согласно квантовой механике каждая линия рентгеновского характеристического излучения возникает в результате перехода атома облучаемого заряженными частицами элемента с одного энергетического уровня на другой. Частота ω излучения определяется правилом частот Бора (65.3): $\hbar\omega = E_2 - E_1$. То обстоятельство, что рентгеновское излучение является коротковолновым [69.1], указывает на то, что квантовые переходы совершаются электронами внутренних оболочек атома. При переходе от одного элемента к другому структура внутренних электронных оболочек атома изменяется очень мало [67.5.2]. Этим объясняется простота и однотипность рентгеновских линейчатых спектров. Опыт (Мозли, 1913) показывает, что при возрастании атомного номера Z на единицу характеристический спектр, сохраняя свой вид, лишь незначительно смещается как целое в сторону более коротких волн (рис. 69.5) [69.2.3]. Линии спектра группируются в серии, которые обозначают K, L, M, N, O и т. д. [67.5.1]. Обозначению K соответствует самая коротковолновая серия, затем по мере увеличения λ идут спектры L, M и т. д. Каждая серия насчитывает несколько линий, обозначаемых в порядке возрастания частоты индексами α, β, γ, ..., т. е. K_α, K_β, K_γ, ..., L_α, L_β, L_γ, ..., M_α, ... и т. д. Число серий в спектре растет с увеличением атомного номера Z элемента.

Физическое объяснение возникновения характеристического рентгеновского излучения состоит в том, что заряженная частица, например первичный электрон, падающий на металл, может передать свою энергию одному из электронов в состоянии n, j, l внутренних оболочек атома металла, если его энергия удовлетворяет условию (69.6), и выбить его из атома. Происходит ионизация атома заряженной частицей с образованием вакансии (дырки) в одной из внутренних оболочек. Эта вакансия заполняется одним из электронов, находящимся на более удаленной от ядра оболочке и, следовательно, в состоянии с большей энергией по сравнению с вакантным. Разность этих энергий определяет частоту испущенного атомом фотона, соответствующую одной из линий характеристического излучения. Если под воздействием заряженной частицы выбивается один из двух электронов самой глубокой K-оболочки, то возникшая вакансия может быть заполнена электроном из любой внутренней оболочки L, M, N и т. д. Переходу $L \to K$ соответствует линия K_α, переходу $M \to K$ — линия K_β, переходу $N \to K$ — линия K_γ (рис. 69.6) и т. д. Так образуется K-серия. Границе этой серии соответствует переход свободного покоящегося вне атома электрона ($E = 0$) на вакантное место в K-оболочке. К границе K-серии примыкает сплошной спектр, поскольку свободные электроны обладают отличной от нуля кинетической энергией ($E > 0$). На вакантное место в L-оболочке ($n = 2$) могут переходить электроны с любых вышележащих оболочек. Эти переходы сопровождаются испусканием фотонов L-серии. Аналогично линии M-серии образуются при переходах электронов на вакантное место в M-оболочке и т. д. Серия K обязательно сопровождается остальными сериями, так как при испускании линий K_α, K_β, ... освобождаются уровни в оболочках L, M, ... и т. д., которые в свою очередь заполняются электронами из более высоких оболочек. Чем ближе данный уровень находится от оболочки с вакансией, тем выше вероятность перехода электрона с этого уровня на вакантное место. Поэтому в K-серии наиболее интенсивной является

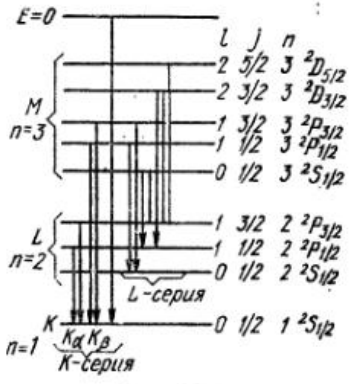


Рис. 69.6

линия K_α, а менее интенсивными — линии K_β, K_γ и т. д. Интенсивность линий в серии убывает от первой линии к границе серии.

Характеристический спектр имеет мультиплетную структуру (рис. 69.6), которая обусловлена мультиплетностью внутренних энергетических уровней атома [66.3.2]. Уровень рентгеновского излучения соответствует состоянию атома, в котором в одной из замкнутых оболочек отсутствует один электрон. В случае ионизации K-оболочки возможно одно состояние $1^2S_{1/2}$. Если в L-оболочке удален один из двух s-электронов, то возможно состояние $2^2S_{1/2}$. Если удален один из шести p-электронов этой оболочки, то атом будет находиться в одном из двух состояний: $2^2P_{1/2}$ либо $2^2P_{3/2}$. При ионизации M-оболочки возможны пять уровней: $3^2S_{1/2}$, $3^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2}$, $3^2D_{3/2}$, $3^2D_{5/2}$, а N-оболочки — семь различных уровней: $4^2S_{1/2}$, $4^2P_{1/2}$, $4^2P_{3/2}$, $4^2D_{3/2}$, $4^2D_{5/2}$, $4^2F_{5/2}$, $4^2F_{7/2}$ и т. д. При переходах между этими уровнями должны выполняться правила отбора

$$\Delta l = \pm 1,\ \Delta j = 0, \pm 1.$$

69.2.3. Закон Мозли. Между частотой ν линий характеристического рентгеновского излучения и атомным номером Z испускающего его элемента справедливо соотношение

$$\sqrt{\nu} = C\,(Z - \sigma), \tag{69.6}$$

где C и σ — постоянные величины для данной линии любой серии. Для разных серий C и σ имеют различные числовые значения. Формула (69.6) называется **законом Мозли** (1913—1914). Этот закон определяет смещение характеристических спектров при переходе от одного элемента к другому (рис. 69.5) и позволяет по измеренной длине волны λ рентгеновских линий точно установить атомный номер Z данного элемента (рис. 69.7). Найденное эмпирически соотношение (69.6) исторически давало первое указание на то, что место элемента в периодической таблице элементов [67.5] определяется не его атомной массой, а атомным номером. Закон Мозли можно переписать в следующей форме:

$$\nu = R\,(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right), \tag{69.7}$$

где R — постоянная Ридберга (52.15), постоянные σ, n_1 и n_2 различны для разных линий:

Линия	σ	n_1	n_2
K_α	1	1	2
K_β	1	1	3
L_α	7,5	2	3

(69.8)

Величина σ называется *константой экранирования*. Она слабо зависит от Z и одинакова в пределах одной серии: для линий K-серии $\sigma \simeq 1$, для линий L-серии $\sigma \simeq 7{,}5$ и т. д. Формула (69.7) подобна формуле Бальмера — Ридберга (52.14) для водородоподобного атома. Физический смысл входящих в нее величин можно установить, если перейти от многоэлектронной проблемы к задаче одного электрона в некотором эффективном кулоновском поле, создаваемом ядром с зарядом $+Ze$, экранированным другими электронами атома. В такой модели формула Мозли (69.7) описывает линию с частотой ν, совпадающую с линией,

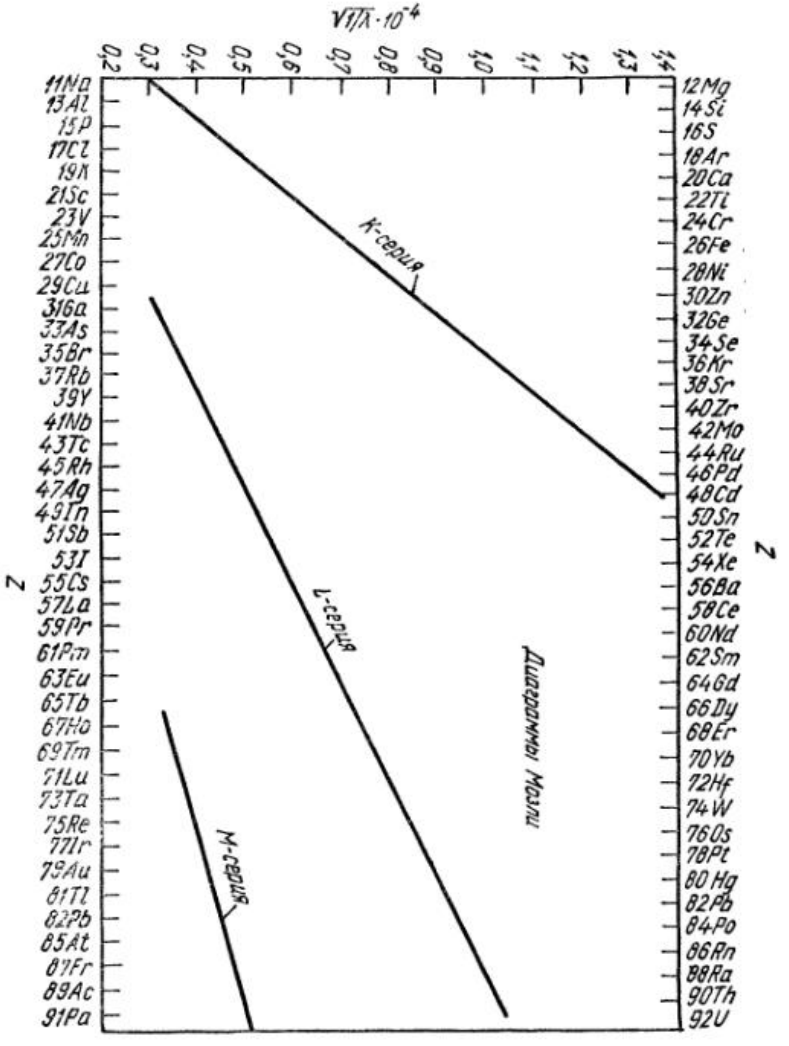


Рис. 69.7

испускаемой при переходе электрона, находящегося в поле заряда $(Z - \sigma)e$, с уровня с номером n_2 на уровень с номером n_1. Электроны, находящиеся на всех уровнях, кроме n_1, на электрон, участвующий в переходе $n_2 \to n_1$, не действуют, поскольку они образуют внешнюю оболочку со сферическим распределением заряда. Экранирующее действие на поле ядра оказывают электроны уровня n_1, на котором имеется вакансия (дырка). При ионизации с K-оболочки эффективный заряд равен $(Z - 1)e$, так как на этой оболочке будет один заряд и дырка, т. е. $\sigma = 1$, что совпадает с (69.8). При ионизации с других оболочек число σ по порядку величины равно половине оставшихся на ней электронов. Точное значение σ определяется опытным путем.

Более точные исследования показали, что закон Мозли является приближенным: имеются отступления от линейной зависимости $\sqrt{\nu}$ соответствующей линии от Z. Однако для K- и L-серий оно несущественно и становится заметным для M- и N-серий при больших атомных номерах элементов.

Закон Мозли позволил установить тождественность порядкового номера элемента и числа элементарных зарядов в ядре его атома. Он показал, что химические свойства элемента определяются зарядом атомного ядра.

ЧАСТЬ VII

ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Глава XVI

Атомное ядро

70. ОБЩИЕ СВОЙСТВА АТОМНЫХ ЯДЕР

70.1. Предмет и основные задачи ядерной физики

Ядерная физика изучает свойства и структуру атомных ядер [66.1]. Основная ее задача связана с выяснением природы ядерных сил, действующих между нуклонами — составными частями ядер [70.2.1; 75.4], и особенностей движения нуклонов в ядрах. Ядерная физика включает в себя *ядерную спектроскопию*, изучающую квантовые характеристики энергетических состояний (уровней) ядер, и *нейтронную физику* — научную основу реакторостроения, изучающую рассеяние и захват нейтронов ядрами, процессы деления ядер нейтронами. В ядерной физике изучаются: спонтанные превращения ядер (α-, β-, γ-активность, спонтанное деление, изомерные переходы); ядерные реакции стабильных ядер, вызванные элементарными частицами (протонами, нейтронами, мезонами, фотонами) и другими ядрами (гелия, дейтерия, тяжелых элементов); термоядерные процессы (ядерные реакции между легчайшими ядрами); биологическое действие излучений и защиту от него. Теоретической основой ядерной физики является квантовая теория [59]. Ее экспериментальную базу составляют ускорители частиц и ядер [33.5.2] и современные методы наблюдений (счетчик Гейгера, черенковский и пропорциональный счетчик, камера Вильсона, ионизационная и диффузионная камеры и др.) [64.5].

70.2. Характеристики атомного ядра

70.2.1. Состав ядер. Общепризнанной является *нейтронно-протонная модель* (В. Гейзенберг, Д. Д. Иваненко, 1932). Согласно этой модели ядра всех атомов химических элементов состоят из протонов и нейтронов (рис. 66.1). *Протон* (p) представляет собой ядро простейшего атома — атома водорода. Он имеет положительный заряд Q_p, равный по величине заряду электрона:

$$Q_p = +e = 1{,}6021892\ (46) \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}. \qquad (70.1)$$

Масса протона

$$m_p = 1{,}6726485\ (86) \cdot 10^{-27}\ \text{кг} = 1{,}007276470\ (11)\ \text{а. е. м.} = 938{,}2796\ (27)\ \text{МэВ}/c^2 = 1836{,}15152\ (70)\ m_e. \qquad (70.2)$$

В ядерной физике массы частиц и ядер принято выражать в МэВ. Эта единица связана с атомной единицей массы (а. е. м.) [64.6] соотношением

$$1 \text{ а. е. м.} = 931{,}50 \text{ МэВ}, \tag{70.3}$$

т. е. представляет собой массу, умноженную на c^2. В этих единицах

$$m_p = 938{,}2796\,(27) \text{ МэВ}. \tag{70.4}$$

Протон имеет собственный момент импульса — спин **S** [66.3.2]. Его величина $s = 1/2$. Собственный магнитный момент μ_p [67.4.2] протона (Штерн, 1933; Раби, 1936)

$$\mu_p = 2{,}79275\,\frac{e\hbar}{2m_p c} = 2{,}79275\mu_N;\ \mu_p = g_p\mu_N \mathbf{S},\ g_p = 5{,}5855. \tag{70.5}$$

Величина

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c},\ \mu_N = 5{,}05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}, \tag{70.6}$$

называется *ядерным магнетоном*. Он в 1836 раз меньше магнетона Бора μ_0 (67.59). Отличие магнитного момента протона μ_p от ядерного магнетона μ_N, равенство которых следовало бы ожидать [67.4], объясняется тем, что протоны и нейтроны могут превращаться один в другой в процессах диссоциации на π-мезон [75.4] соответствующего заряда

$$p \rightleftarrows \pi^+ + n,\ n \rightleftarrows \pi^- + p. \tag{70.7}$$

Такие процессы происходят виртуально [71.3.1], многократно повторяясь с течением времени, и приводят к тому, что вокруг этих частиц то появляется, то исчезает облако из π-мезонов, обладающих собственным магнитным моментом

$$\mu_\pi = \frac{e\hbar}{2m_\pi c} = \left(\frac{m_p}{m_\pi}\right)\mu_N = 6{,}72\mu_N, \tag{70.8}$$

где $m_\pi = 139{,}63$ МэВ — масса покоя $\pi^\pm$-мезонов. Орбитальное движение π^+-мезона вокруг нейтрона приводит к аномальной величине магнитного момента протона (70.5).

Нейтрон (n) открыл Чэдвик (1932) в реакции типа (α, n) [73.1.1]. Его электрический заряд $Q_n = 0$, а масса

$$m_n = 1{,}00865017\,(37) \text{ а. е. м.} = 939{,}57 \text{ МэВ} = 1838{,}6562m_e \tag{70.9}$$

близка к массе протона. Разность масс протона и нейтрона составляет

$$m_n - m_p = 1{,}3 \text{ МэВ} = 2{,}5m_e. \tag{70.10}$$

Спин **S** нейтрона имеет величину $s = 1/2$. Несмотря на то что заряд нейтрона равен нулю, он обладает собственным магнитным моментом (Альварец, Блох, 1940)

$$\mu_n = -1{,}91348\,\frac{e\hbar}{2m_p c} = -1{,}91348\mu_N;\ \mu_n = g_n\mu_N \mathbf{S},\ g_n = -3{,}82629. \tag{70.11}$$

Знак минус означает, что направление магнитного момента μ_n противоположно направлению спинового **S**. Величина и знак μ_n удовлетворительно объясняются представлением о диссоциации нейтрона в π-мезон (70.7), который имеет магнитный момент μ_π (70.8). Нейтрон часть времени находится в виртуальном состоянии $(\pi^- + p)$. Орбитальное движение π^--мезона приводит к возникновению наблюдаемого у нейтрона отрицательного магнитного момента μ_n.

Протон — стабильная частица. Время его жизни $\tau > 10^{31}$ — $3 \cdot 10^{32}$ лет. Свободный нейтрон, т. е. не входящий в состав атомного ядра, нестабилен. Он самопроизвольно превращается в протон, претерпев β-распад по схеме

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e \tag{70.12}$$

с периодом полураспада 15 мин. Здесь e^- — электрон (β-частица), $\bar{\nu}_e$ — антинейтрино [75.4].

Согласно современным представлениям протон и нейтрон являются двумя различными состояниями одной частицы, называемой *нуклоном*. Нуклон кроме пространственных и спиновой координат характеризуется дополнительной степенью свободы — зарядовой координатой, называемой *изотопическим спином* или просто *изоспином*. Так как зарядовая координата принимает всего два значения, то с ней сопоставляют вектор **t** в некотором условном (фиктивном) пространстве, подобный по своим свойствам вектору спина **S** (63.34) с абсолютной величиной $s = 1/2$ (в единицах $\hbar$):

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\tau}, \tag{70.13}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — зарядовые матрицы (63.8), их свойства (63.9) подобны свойствам (63.33) спиновых матриц Паули (63.32). Проекция изоспина на ось z может принимать только два значения: $t_z = \pm \frac{1}{2}$. Значение $\frac{1}{2}$ приписывают протону, а $-\frac{1}{2}$ — нейтрону. Так как пространственные $\mathbf{r}$, спиновая σ и изоспиновая τ координаты независимы, то волновая функция Ψ свободного нуклона имеет вид

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, \sigma, \tau) = \psi(\mathbf{r})\,\chi(\sigma)\,\zeta(\tau), \tag{70.14}$$

где $\psi(\mathbf{r})$, $\chi(\sigma)$ и $\zeta(\tau)$ — его пространственная, спиновая и изоспиновая функции. Функция $\zeta = \zeta_{t_z}$ для состояний с определенным значением проекции изоспина t_z в представлении, в котором в качестве зарядовой координаты τ выбрано значение проекции изоспина на ось z, имеет для протонного и нейтронного состояний следующий вид:

$$\zeta_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \zeta_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{70.15}$$

Описание нейтрона и протона с единой точки зрения имеет глубокое физическое содержание. Оно связано со свойством ядерного взаимодействия быть зарядово независимым [71.1].

Число нуклонов в ядре обозначает A и называется *массовым числом* ядра. По определению

$$A = Z + N, \tag{70.16}$$

где Z — число протонов, N — число нейтронов в ядре. Число Z определяет общий заряд ядра, равный $+Ze$, и порядковый номер химического элемента в периодической системе элементов Д. И. Менделеева [67.5; 69.2.3]. Поэтому Z называют *атомным номером* ядра. Для обозначения ядер принята символика

$$^A_Z X, \tag{70.17}$$

где X — химический символ элемента, например, $^{3}_{1}H$, $^{7}_{3}Li$, $^{16}_{8}O$ и т. п. Ядра с одинаковым числом Z, но разными A, называются *изотопами* ($^{1}_{1}H$, $^{2}_{1}H$, $^{3}_{1}H$; $^{16}_{8}O$, $^{17}_{8}O$, $^{18}_{8}O$; $^{235}_{92}U$, $^{233}_{92}U$, $^{232}_{92}U$ и др.), с одинаковым A, но разными Z — *изобарами* ($^{10}_{4}Be$, $^{10}_{5}B$, $^{10}_{6}C$, $^{40}_{18}Ar$, $^{40}_{20}Ca$ и т. д.), с одинаковым числом нейтронов — *изотонами* ($^{15}_{7}N$, $^{16}_{8}O$, $^{17}_{9}F$ и др.). Существуют ядра, у которых Z и A одинаковы, но периоды полураспада τ различны ($^{80}_{35}Br$ с $\tau = 4{,}4$ ч и $^{80}_{35}Br$ с $\tau = 18$ мин). Такие ядра называют *изомерами*. Среди легких ядер существуют пары так называемых *зеркальных* ядер, у которых число нейтронов одного равно числу протонов другого, а массовое число A одинаковое. Примеры зеркальных ядер:

$$\begin{array}{lll} ^{3}_{1}H\,(1p+2n) & ^{7}_{3}Li\,(3p+4n) & ^{11}_{5}B\,(5p+6n) \\ ^{3}_{2}He\,(1n+2p); & ^{7}_{4}Be\,(3n+4p); & ^{11}_{6}C\,(5n+6p); \\ ^{13}_{6}C\,(6p+7n) & ^{29}_{14}Si\,(14p+15n) & \\ ^{13}_{7}N\,(6n+7p); & ^{29}_{15}P\,(14n+15p). & \end{array} \qquad (70.18)$$

Известно около 2300 ядер. Примерно 300 ядер устойчивы, а остальные — радиоактивны. В природе встречаются элементы с атомными номерами Z от 1 до 92 (кроме технеция, $_{43}Tc$, и прометия, $_{61}Pm$). Элементы с Z от 93 до 109, называются *трансурановыми*. Они были получены искусственным путем в ядерных реакциях.

70.2.2. Размер ядра. Атомное ядро представляет собой квантовую систему нуклонов, связанных между собой ядерными силами, и занимающую вполне определенный объем внутри атома. Его пространственная структура определяется распределением нуклонов в этом объеме. Опыт показывает, что ядерная плотность почти постоянна внутри ядра, а на периферии резко спадает до нуля в пределах области, линейные размеры которой малы по сравнению с размерами области, занимаемой всем ядром. В ядерной физике вводится понятие о *радиусе ядра* как параметре, характеризующем его пространственную протяженность, числовое значение которого определяется по совокупности различных экспериментальных данных.

Сведения о радиусе ядра можно извлекать из данных о ядерных силах и распределении нуклонов в ядре, а также из данных о распределении заряда в нем. В первом случае определяют так называемые *ядерные значения радиусов*, а во втором — *электромагнитные* или *зарядовые радиусы ядер*. Сведения о границе действия ядерных сил и распределении нуклонов дают:

1) рассеяние нейтронов промежуточных (14—25 МэВ), больших (> 90 МэВ) и очень больших (~ ГэВ) энергий ядрами;
2) рассеяние заряженных частиц — протонов (20—400 МэВ) и альфа-частиц (13—42 МэВ) ядрами;
3) альфа-распад ядер;
4) энергии связи тяжелых и средних ядер.

Сведения о распределении заряда в ядре дают:

1) рассеяние быстрых электронов ядрами;
2) кулоновские эффекты в зеркальных ядрах;
3) рассеяние μ-мезонов и спектр μ-атомов;
4) тонкая структура рентгеновских спектров;
5) сверхтонкая структура спектра водорода;
6) изотопический сдвиг в спектрах.

Рассмотрим некоторые данные из этих экспериментов и способы извлечения из них сведений о радиусе ядра.

А. Наиболее просто радиус ядра R можно оценить по *энергии связи зеркальных ядер*, если предположить, что ядро представляет собой сферу, внутри которой протоны распределены равномерно. Тогда

$$R = \frac{6}{5}\frac{Ze^2}{\Delta m c^2}, \qquad (70.19)$$

где Δm — измеренная опытным путем разность масс зеркальных ядер, Z — меньшее из чисел протонов ядер пары. Формула (70.19) получена в предположении, что разность масс Δm объясняется только дополнительным кулоновским отталкиванием в поле остальных Z протонов для ядра с большим числом протонов, а значит, $\Delta E = \Delta m c^2 = 6Ze^2/5R$.

Б. Другой метод оценки радиусов ядер основан на *данных альфа-распада* для тяжелых радиоактивных ядер [74.2.1]. Опыт показывает, что взаимодействие $V(r)$ альфа-частицы (ядра атома гелия $^{4}_{2}He$) с дочерним ядром $^{A-4}_{Z-2}Y$, образовавшимся в результате альфа-распада материнского ядра

$$^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}He, \qquad (70.20)$$

на малых расстояниях r между дочерним ядром и альфа-частицей характеризуется притяжением, а на больших расстояниях описывается потенциалом кулоновского отталкивания между зарядами $Z_1 = Z - 2$ и $Z_2 = 2$ (рис. 70.1).

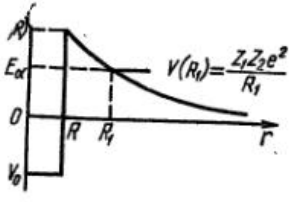


Рис. 70.1

В простейшей модели радиоактивного распада предполагается, что альфа-частица существует внутри ядра $^{A}_{Z}X$. Поэтому, покидая это ядро, она должна преодолеть потенциальный барьер $V(r)$ при $r > R$, где R — размеры области притяжения ядер $^{4}_{2}He$ и $^{A-4}_{Z-2}Y$. Вероятность прохождения этого барьера альфа-частицей с энергией E_α пропорциональна коэффициенту прохождения барьера D, который по определению равен отношению прошедшего потока альфа-частиц к падающему. Квантовая теория в квазиклассическом приближении приводит к формуле для D вида [74.2.1]

$$D \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{R}^{R_1}\sqrt{2m_\alpha\,(V(r)-E_\alpha)}\,dr\right), \qquad (70.21)$$

где m_α — масса ядра $^{4}_{2}He$, которая считается много меньше массы ядра $^{A-4}_{Z-2}Y$, $m_\alpha \ll m(^{A-4}_{Z-2}Y)$. Если $m_\alpha \sim m(^{A-4}_{Z-2}Y)$, то под m_α в (70.21) следует понимать приведенную массу этих ядер, а под E_α — энергию их относительного движения. Радиусы R и R_1 определяются условием (как в классической физике [5.2.4])

$$V(R) = V(R_1) = E_\alpha. \qquad (70.22)$$

Среднее время жизни τ альфа-радиоактивного ядра связано с коэффициентом D простым соотношением

$$\tau = \tau_F/D, \qquad (70.23)$$

где τ_F — продолжительность ядерного процесса фрагментации ядра $^A_Z X$ на альфа-частицу и дочернее ядро, предшествующего вылету альфа-частицы из материнского ядра. Время τ_F по порядку величины в рассматриваемой альфа-частичной модели ядра $^A_Z X$ равно времени Δt между двумя последовательными ударами альфа-частицы о барьер: $\tau_F \approx \Delta t = 2R/\sqrt{2E_\alpha/m_\alpha}$, где учтено, что, отразившись от барьера со скоростью $v_\alpha = \sqrt{2E_\alpha/m_\alpha}$, альфа-частица проходит расстояние $2R$ до следующего удара о кулоновский барьер с противоположной стороны ядра. Для ядра урана ^{238}U, если принять за кинетическую энергию альфа-частицы внутри ядра величину $E_\alpha \simeq 4{,}2$ МэВ, получим $\Delta t \simeq 7 \cdot 10^{-22}$ с. Для этого ядра $D \simeq 10^{-39}$, а $\tau = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет $\simeq 1{,}4 \cdot 10^{17}$ с.

Отождествляя R с радиусом ядра $^A_Z X$ и сравнивая D с данными, полученными при измерении продолжительности жизни τ (70.23) альфа-радиоактивных ядер, найдем, что несмотря на значительные различия в значениях τ, радиусы R находятся в довольно узких пределах: $R = (8{,}4 - 9{,}4)\,10^{-13}$ см. Например: $R(^{230}_{90}\mathrm{Th}) = 8{,}7 \cdot 10^{-13}$ см, $R(^{214}_{84}\mathrm{Po}) = 9{,}4 \cdot 10^{-13}$ см.

В. Данные об *упругом рассеянии электронов* дают сведения о зарядовом радиусе ядра. В соответствии с представлениями о волновой природе вещества [60] для обнаружения эффектов, связанных с конечными размерами ядра, необходимо, чтобы длина волны электронов λ была меньше или порядка 10^{-13} см. Этому условию удовлетворяют ультрарелятивистские электроны, т. е. электроны с энергией $E \simeq pc \gg m_0c^2 = 0{,}511$ МэВ (m_0 — масса покоя электрона, p — его импульс). Для $\lambda \ll 10^{-13}$ см $E = \hbar c/\lambda \gtrsim 200$ МэВ. На линейном ускорителе в Стэнфорде (США) достигнута энергия $E = 2 \cdot 10^4$ МэВ $= 20$ ГэВ. Это соответствует длине волны $\lambda = \hbar/p \simeq 10^{-15}$ см. Дифференциальное сечение $\sigma(\theta)$ (64.16) [64.4] упругого рассеяния электронов с энергией $E \gg m_0c^2$ в кулоновском поле точечного заряда Ze описывается **формулой Мотта**

$$\sigma_c(\theta) = \left(\frac{Z e^2}{2E}\right)^2 \frac{\cos^2\theta/2}{\sin^4\theta/2} \quad \text{при} \quad \frac{Ze^2}{\hbar c} \ll 1, \tag{70.24}$$

представляющей собой обобщение формулы Резерфорда (64.21) на ультрарелятивистский случай. Если заряд Ze распределен в пространстве с плотностью $\rho(r)$, то дифференциальное сечение описывается выражением

$$\sigma(\theta) = \sigma_c(\theta)\,|F(q)|^2, \quad q = \frac{2E}{\hbar c}\sin\frac{\theta}{2}, \tag{70.25}$$

где $F(q)$ — так называемый *формфактор* ядра, который определяется плотностью заряда $\rho(r)$:

$$F(q) = \frac{1}{Ze}\int \rho(r)\, e^{i\mathbf{qr}}\, d\mathbf{r}, \quad Ze = \int \rho(r)\, d\mathbf{r}; \tag{70.26}$$

$\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ — импульс, переданный электроном ядру, как в (64.21). Выбирая функцию $\rho(r)$ такой формы, которая лучше всего воспроизводит наблюдаемое на эксперименте угловое распределение $\sigma(\theta)$, можно судить о распределении заряда в ядре. Анализ многочисленных экспериментальных данных показал, что в качестве плотности заряда можно

выбрать *двухпараметрическое распределение Ферми* (рис. 70.2, табл. 70.1)

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r-c)/a]}, \tag{70.27}$$

где ρ_0 — нормировочная постоянная, c — радиус полуплотности, a — диффузность края ядра, которую принято характеризовать величиной $t = (4\ln 3)a$, называемой *толщиной поверхности ядра* (или поверхностного слоя). Для средних и тяжелых ядер параметры c и t приближаются значениями ($A > 12$)

$$c = (1{,}18\,A^{1/3} - 0{,}48)\cdot 10^{-13}\ \text{см}, \quad t = 2{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{см}. \tag{70.28}$$

Величина $\rho(0)$ характеризует плотность заряда в центре ядра. Для ядер с $A > 12$ она изменяется в пределах от $1{,}05 \cdot 10^{15}$ Кл/см^3 (у ядра $^{16}_{8}$O) до $1{,}4 \cdot 10^{15}$ Кл/см^3 (у $^{24}_{12}$Mg). Распределение протонов $\rho_p(r) = \rho(r)/e$, нейтронов $\rho_n(r) = \frac{A-Z}{Ze}\rho(r)$ и нуклонов $\rho_N(r) = \frac{A}{Ze}\rho(r)$ совпадает с распределением заряда. При параметрах (70.28) плотность нуклонов в центре ядра

$$\rho_N(0) = 0{,}168 \cdot 10^{39}\ \text{нуклон/см}^3. \tag{70.29}$$

Эта величина характеризует *плотность ядерного вещества*, т. е. плотность бесконечно протяженного по размерам ядра (без учета влияния его поверхности). Истинное распределение ядерной плотности для ряда ядер показано на рис. 70.3. В случае легких ядер на распределении нуклонов сильно сказывается влияние его поверхности. Поэтому распределение $\rho_N(r)$ отличается от фермиевского (70.27).

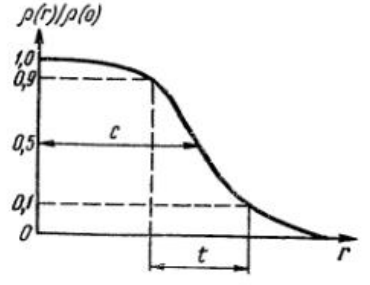


Рис. 70.2

Если длина волны λ электрона велика по сравнению с размерами ядра, $qR \ll 1$, где R — примерно равно радиусу ядра, то экспоненту в (70.26) можно разложить в ряд и представить формфактор $F(q)$ в виде

$$F(q) = 1 - \frac{q^2}{6}\langle r^2\rangle + \cdots, \tag{70.30}$$

где $\langle r^2\rangle$ определяется соотношением

$$\langle r^2\rangle = \frac{1}{Ze}\int r^2 \rho(r)\, d\mathbf{r} \tag{70.31}$$

и называется *средним квадратичным радиусом ядра*.

Для средних и тяжелых ядер ($A > 12$) средний квадратичный радиус распределения заряда можно с хорошим приближением описывать формулой

$$\langle r^2\rangle^{1/2} = r_0\, A^{1/3}, \quad r_0 = 0{,}94 \cdot 10^{-13}\ \text{см}. \tag{70.32}$$

На практике принято характеризовать ядра *радиусом эквивалентного однородного распределения* R. Это соответствует замене

Таблица 70.1. **Параметры распределения заряда (70.27), радиусы ядер (все в 10^{-13} см) и максимальная плотность нуклонов (в единицах 10^{39} нуклон/см^3)**

Ядро	$\langle r^2\rangle^{1/2}$	R	c	t	R_0	c_0	ρ_N (max)	r_0
$^{1}_{1}$H	0,77 ± 0,1	1	—	—	1	—	3,6	0,77
$^{2}_{1}$H	1,96	2,53	—	—	2,01	—	0,029	1,56
$^{4}_{2}$He	1,61	2,08	1,10	1,4	1,30	0,7	0,316	1,01
$^{6}_{3}$Li	2,78	3,59	1,56	2,3	1,98	0,86	0,141	1,53
$^{7}_{3}$Li	2,71	3,5	—	—	1,83	—	—	1,42
$^{9}_{4}$Be	3,04	3,92	1,8	2,0	1,89	0,87	0,197	1,46
$^{11}_{5}$B	2,25	2,90	2	2	1,31	0,90	0,210	1,01
$^{12}_{6}$C	2,37	3,04	2,3	1,85	1,33	1	0,168	1,03
$^{14}_{7}$N	2,48	3,20	2,40	1,85	1,33	0,99	0,178	1,03
$^{16}_{8}$O	2,65	3,42	2,60	1,8	1,35	1,03	0,161	1,05
$^{24}_{12}$Mg	2,98	3,85	2,93	2,6	1,33	1,01	0,164	1,03
$^{28}_{14}$Si	3,04	3,93	2,95	2,8	1,29	0,97	0,179	1,00
$^{32}_{16}$S	3,19	4,11	3,26	2,6	1,29	1,03	0,167	1,00
$^{40}_{20}$Ca	3,50	4,54	3,60	2,5	1,33	1,05	0,165	1,03
$^{51}_{23}$V	3,59	4,64	3,98	2,2	1,26	1,07	0,167	0,98
$^{59}_{27}$Co	3,83	4,94	4,09	2,5	1,27	1,05	0,172	0,98
$^{58}_{28}$Ni	3,94	5,08	4,28	2,5	1,31	1,1	0,151	1,01
$^{88}_{38}$Sr	4,15	5,35	4,80	2,3	1,20	1,08	0,169	0,93
$^{115}_{49}$In	4,50	5,80	5,24	2,3	1,19	1,08	0,173	0,92
$^{122}_{51}$Sb	4,63	5,97	5,32	2,5	1,20	1,07	0,174	0,93
$^{181}_{73}$Ta	5,50	7,10	6,45	2,8	1,25	1,14	0,147	0,97
$^{197}_{79}$Au	5,32	6,87	6,38	2,32	1,80	1,096	0,168	1,39
$^{208}_{82}$Pb	5,42	7,00	6,5	2,3	1,18	1,10	0,170	0,91
$^{209}_{83}$Bi	5,52	7,13	6,47	2,7	1,2	1,09	0,168	0,93

Примечание: $R_0 = RA^{-\frac{1}{3}}$, $c_0 = cA^{-\frac{1}{3}}$, $r_0 = \langle r^2\rangle^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{3}}$.

реального распределения заряда в ядре $\rho(r)$ эквивалентным распределением постоянной плотности в объеме $\frac{4}{3}\pi R^3$, которое приводит к тому же среднему квадратичному радиусу, что получается на опыте:

$$\langle r^2\rangle = \int \frac{3r^2}{4\pi R^3}\,dr = 4\pi \int_0^R \frac{3r^4}{4\pi R^3}\,dr = \frac{3}{5}R^2, \qquad (70.33)$$

$$R = \left(\frac{5}{3}\langle r^2\rangle\right)^{1/2}.$$

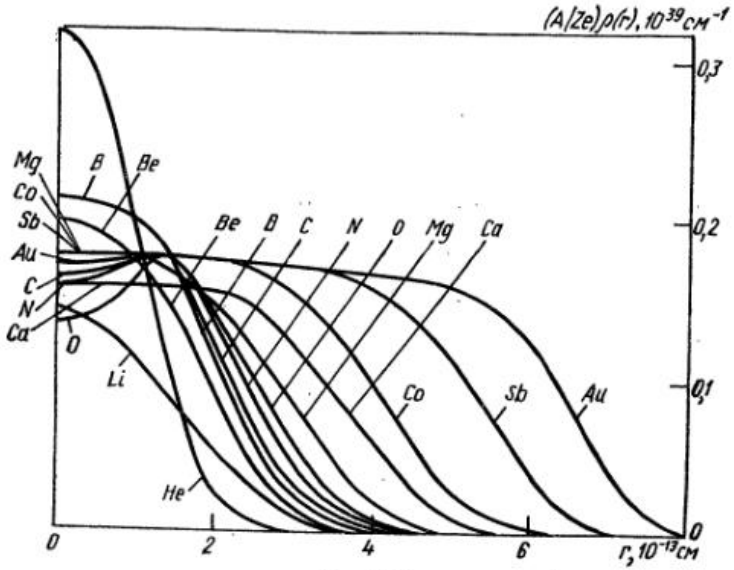


Рис. 70.3

Радиус R приближенно описывается формулой

$$R = R_0 A^{1/3},\ R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{см}. \qquad (70.34)$$

Г. Изучение *рассеяния альфа-частиц ядрами* позволяет также получить сведения о радиусах этих ядер. Так, в предположении, что радиус ядра по порядку величины равен расстоянию наибольшего сближения альфа-частицы с ядром, для зависимости радиуса ядра R от массового числа A был установлен следующий закон: $R = R_0 A^{1/3}$, где $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-13}$ см.

Д. При определении радиусов ядер из *данных по рентгеновским спектрам μ-атомов* исходят из того, что при попадании μ-мезона в конденсированную среду он захватывается атомом на боровскую орбиту с большими квантовыми числами n и l [66.2]. После этого за время $t \sim 10^{-13}$ с он переходит на K-орбиту атома [67.5; 69.2] за счет безызлучательных переходов (эффект Оже) при больших n и l и за счет радиационных переходов при малых n и l. На этой орбите μ-мезон существует довольно долго, после чего он захватывается ядром (через $\sim 10^{-7}$ с),

или распадается на электрон, нейтрино и антинейтрино (через $\sim 10^{-6}$ с), вследствие естественного β-распада. Это позволяет изучать характеристики μ-атома и, в частности энергию рентгеновских лучей при переходе $2p \to 1s$ [69.2]. Поскольку радиус боровской орбиты a_n (65.9) обратно пропорционален массе частицы, то

$$a_n(\mu) = \frac{m_e}{m_\mu} a_n(e) \simeq 207\, a_n(e),$$

где $a_n(\mu)$ — радиус орбиты μ-мезона с массой m_μ, $a_n(e)$ — радиус орбиты электрона с массой m_e, т. е. мезон в 200 раз находится ближе к ядру, и положение S-уровня μ-атома должно быть чувствительно к распределению заряда в ядре.

Строгое решение задачи о движении μ-мезона в поле электрического заряда ядра может быть получено на основе уравнения Дирака [63.2]. Распределение заряда внутри ядра при этом задается модельно. Для малых Z влияние размеров ядра и релятивистские поправки можно рассматривать как возмущение, накладываемое на решение, найденное с помощью уравнения Шредингера для случая точечного заряда, собственные функции ψ_{nl} которого являются функциями водородоподобного атома [66.2] с массой μ-мезона вместо массы электрона. Расчет показывает, что энергия $\delta\mathscr{E}$ перехода $2p \to 1s$ для протяженного ядра связана со средним квадратичным радиусом ядра (70.31). Действительно:

$$\delta\mathscr{E} \sim \langle \psi_{1s} | \delta U | \psi_{1s} \rangle \sim |\psi_{1s}(0)|^2\, \delta U\, V_N \sim Z^4 R^2 \sim Z^4 \langle r^2 \rangle, \quad (70.35)$$

где $\delta U \sim Z/R$, $|\psi_{1s}(0)|^2 \sim Z^3$, $V_N \sim R^3$. Здесь $|\psi_{1s}(0)|^2$ — плотность вероятности для мезона на K-оболочке, находящейся внутри ядра ($r \simeq 0$), δU — изменение потенциальной энергии ядра из-за пространственного распределения заряда ядра по области с линейным размером R, равным радиусу эквивалентного однородного распределения (70.33). Опыты с μ-атомами имеют высокую точность. Они могут быть описаны теоретически, если положить

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad R_0 = (1{,}1 - 1{,}3) \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (70.36)$$

Данные, приведенные выше, позволяют сделать следующие выводы.

1. Вся совокупность данных о ядрах позволяет рассматривать их как систему из A нуклонов, заключенных в объем сферы с радиусом

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (70.37)$$

где в зависимости от характера изучаемого явления R_0 принимает значения от $1{,}1 \cdot 10^{-13}$ до $1{,}4 \cdot 10^{-13}$ см. Для большинства ядер приближенно можно положить

$$R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (70.38)$$

2. Объем ядра V_N (в см) пропорционален массовому числу:

$$V_N = (7 - 14) \cdot 10^{-39} A. \quad (70.39)$$

3. Плотность ядерного вещества практически одинакова для всех ядер и равна

$$\rho_N = (1{,}2 - 2{,}4)\, 10^{14} \text{ г/см}^3 = (120 - 240)\, 10^6 \text{ т/см}^3 \simeq 10^{38} \text{ нуклон/см}^3. \quad (70.40)$$

Поскольку размеры ядер имеют порядок 10^{-13} см в ядерной физике в качестве единицы длины используется величина, называемая ферми (Ф):

$$1 \text{ Ф} = 10^{-13} \text{ см} = 1 \text{ фм}. \quad (70.41)$$

Площади геометрических сечений, равные πR^2, для ядерных объектов оказываются пропорциональными или близкими к величине 10^{-24} см^2. Поэтому в качестве единицы площади ранее в ядерной физике использовалась величина барн (б),

$$1 \text{ б} = 10^{-24} \text{ см}^2 = 10^{-28} \text{ м}^2. \quad (70.42)$$

70.2.3. Масса и энергия связи ядра. Ядро представляет собой связанную систему A нуклонов. Это означает, что силы притяжения между ними больше сил кулоновского отталкивания между протонами. Благодаря действию сил притяжения, масса стабильного ядра $M(A, Z)$, находящегося в основном состоянии, всегда меньше суммы масс протонов и нейтронов, входящих в состав ядра:

$$M(A, Z)\, c^2 = Z m_p c^2 + N m_n c^2 - B(A, Z), \quad (70.43)$$

где $M(A, Z)c^2$ есть полная энергия ядра с зарядом Z и массовым числом $A = Z + N$, m_p — масса протона, m_n — масса нейтрона. Величина $B(A, Z) > 0$ называется *энергией связи* ядра. Энергия связи представляет собой работу, которую нужно затратить для того, чтобы расчленить ядро на составляющие его нуклоны и удалить их один от другого на такие расстояния, при которых они практически не взаимодействуют.

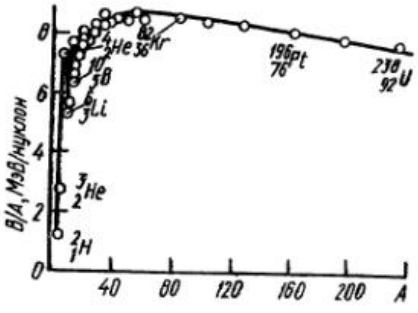


Рис. 70.4

Величина

$$\Delta M = B(A, Z)/c^2 = Z m_p + (A - Z) m_n - M(A, Z) \quad (70.44)$$

называется *дефектом масс* ядра. Массы ядер $M(A, Z)$ определяют на опыте путем разделения изотопов либо путем расчета баланса энергии в распадах и реакциях.

Опыт показывает, что энергия связи ядра B тем больше, чем больше в нем нуклонов. Поэтому важной характеристикой является удельная энергия связи B/A, т. е. энергия связи, приходящаяся на один нуклон (рис. 70.4). Удельная энергия связи ядер приведена ниже.

Ядро	$^1_1$H	$^3_1$H	$^4_2$He	$^6_3$Li	$^7_5$Li	$^9_2$Be	Cr — Zn ($A \simeq 50$—60)	Sb ($A \simeq 120$)	U ($A \simeq 240$)
B/A, МэВ/нуклон	1,1	2,78	7,07	5,30	5,57	6,42	8,7	8,5	7,5

Наименьшую величину B/A имеют легкие ядра, а наибольшую — элементы от Cr до Zn ($A \simeq 50$—60). Так как состояния с наибольшей удельной энергией связи являются энергетически наиболее выгодными, то возможны два процесса, приводящие к выделению большого (по сравнению с химическими процессами) количества энергии: деление

тяжелых ядер на более легкие ядра и слияние (синтез) легких ядер в одно более тяжелое. Примеры:

1) Деление ядра с $A = 240$ на два осколка (ядра) с $A = 120$ приводит к выделению энергии в 240 МэВ. 2) Слияние ядер дейтерия ^2_1H и гелия ^4_2He дает энергию в 24 МэВ. 3) Сгорание углерода с образованием CO_2 приводит к выделению энергии в 5 эВ. Эта энергия значительно меньше энергии, получаемой при ядерных процессах деления или синтеза.

В обычных условиях слиянию легких ядер в одно энергетически более выгодное ядро препятствуют кулоновские силы отталкивания между ядрами. Для преодоления этих сил ядрам необходимо сообщить дополнительную кинетическую энергию, соответствующую температурам порядка сотен миллионов кельвин. Такие условия реализуются на Солнце и других звездах, где активно происходит синтез ядер. Реакции такого типа называют термоядерными реакциями [73.3.6].

Наличие в природе стабильных ядер с $A > 60$ объясняется тем, что для того чтобы такое ядро распалось на более легкие осколки, ему необходимо сообщить энергию, называемую энергией активации. Физическая причина этого состоит в том, что при делении нерадиоактивного ядра оно должно пройти через промежуточное состояние, энергия которого превышает энергию основного состояния ядра. Тяжелое ядро может получить энергию активации, захватив нейтрон. Такой процесс лежит в основе действия ядерных реакторов и атомных бомб. В качестве делящихся ядер здесь используют уран или плутоний. Использование ядерных процессов в качестве источника энергии дает большие экономические выгоды. Так, сжигание 1 г ядерного горючего позволяет получить такое же количество энергии, как при сгорании 10 т химического топлива.

Средняя энергия связи, приходящаяся на один нуклон, равна ~ 8 МэВ и не превышает 1 % энергии, соответствующей массе покоя нуклона ($m_p = 938$ МэВ). Поэтому в ядерных реакциях превращения одних ядер в другие освобождаются лишь доли процента полной энергии ядра $M(A, Z)c^2$ (70.43).

Так как энергия связи нуклонов в ядре значительно больше энергии связи электронов в атоме, то при вычислении энергии связи $B(A, Z)$ ядра можно пользоваться формулой

$$B(A, Z) = [Z m_H + (A - Z) m_n - m_a] c^2, \qquad (70.45)$$

где $m_H = m_p + m_e$ — масса атома водорода, $m_a = M + Z m_e$ — масса атома с данными A и Z, m_e — масса электрона.

70.2.4. Спин ядра. Полный механический момент ядра $\mathbf{J}$ принято называть *спином ядра*. Он равен векторной сумме механических моментов импульса $\mathbf{l}_i$ нуклонов (орбитальных моментов количества движения) и собственных моментов количества движения $\mathbf{S}_i$ нуклонов (спинов):

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{A} (\mathbf{l}_i + \mathbf{S}_i). \qquad (70.46)$$

Поскольку спин отдельного нуклона равен 1/2 (в единицах $\hbar$), то все дальнейшие операции с величинами $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{S}_i$ осуществляются в полной аналогии с тем, как это делается в атомной физике [67.3], с той лишь разницей, что под переменными электрона теперь следует понимать переменные нуклона и Z заменить на A.

В случае легких ядер спин-орбитальное взаимодействие несущественно и при сложении векторов $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{S}_i$ реализуется схема LS-связи [67.3.1] (67.44), (67.45). Квантовое число J определяет возможные значения спина ядра и пробегает значения (67.46). Так как спин отдельного нуклона равен 1/2, то для четных значений A квантовое число J принимает целые значения, а для нечетных A — полуцелые в соответствии с формулами (67.46), (67.47), где число электронов Z следует заменить на число нуклонов A. В схеме LS-связи полный орбитальный момент нуклонов $\mathbf{L}$ и полный спиновый момент $\mathbf{S}$ являются интегралами движения (соответствующие им операторы коммутируют с гамильтонианом $\hat{H}$ системы из A нуклонов [62.2.2]). Поэтому они характеризуют состояние ядра и могут быть использованы для классификации его уровней, аналогичной принятой в атомной физике (см. (67.48)).

Если спин-орбитальное взаимодействие в ядре существенно, то реализуется jj-связь [67.3.2], при которой орбитальный момент отдельного нуклона складывается со спином в полный момент, $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{S}_i$, являющийся интегралом движения. Спин ядра $\mathbf{J}$ при такой схеме определяется формулой (67.52), где Z следует заменить на A.

Согласно опытным данным спин J стабильных ядер с четным A в большинстве случаев лежит в пределах 0 — 5, а для нечетных A не превышает 9/2. Все без исключения четно-четные ядра, т. е. ядра, у которых Z и N четные, имеют спин $J = 0$. Это свидетельствует о том, что в таких ядрах происходит попарная компенсация антипараллельно направленных полных моментов нуклонов j_i. Так как для каждого $l_i > 0$ в схеме jj-связи возможны два значения: $j_i = l_i \pm \frac{1}{2}$, то вместо одной оболочки (nl) при LS-связи в случае jj-связи будет две

Таблица 70.2. Спины J и четности π основных состояний некоторых атомных ядер ($\pi = \pi_я (-1)^L$) (экспериментальные данные)

Ядро	J^π	Ядро	J^π	Ядро	J^π	Ядро	J^π
^7_3Li	$\frac{3^-}{2}$	$^{17}_8O$	$\frac{5^+}{2}$	$^{43}_{20}Ca$	$\frac{7^-}{2}$	$^{79}_{35}Br$	$\frac{3}{2}$
^9_4Be	$\frac{3^-}{2}$	$^{17}_9F$	$\frac{5^+}{2}$	$^{53}_{25}Mn$	$\frac{7^-}{2}$	$^{97}_{42}Mo$	$\frac{5^+}{2}$
$^{11}_5B$	$\frac{3}{2}$	$^{25}_{12}Mg$	$\frac{5}{2}$	$^{61}_{28}Ni$	$\frac{3}{2}$	$^{105}_{46}Pd$	$\frac{5^+}{2}$
$^{13}_6C$	$\frac{1^-}{2}$	$^{27}_{13}Al$	$\frac{5^+}{2}$	$^{69}_{30}Zn$	$\frac{1}{2}$	$^{209}_{83}Bi$	$\frac{9^-}{2}$
$^{15}_7N$	$\frac{1^-}{2}$	$^{35}_{17}Cl$	$\frac{3^+}{2}$	$^{75}_{33}As$	$\frac{3}{2}$	$^{131}_{54}Xe$	$\frac{3^+}{2}$

оболочки, которые характеризуются квантовыми числами nlj [66.2; 66.3]. Спины основных состояний некоторых ядер приведены в табл. 70.2.

70.2.5. Магнитный момент ядра. Кроме спина $\mathbf{J}$ ядро обладает также магнитным моментом [67.4]. Наличие у ядер магнитных моментов

μ проявляется в сверхтонком расщеплении спектральных линий атомных спектров, которое является результатом взаимодействия W_N электронов атома, создающих магнитное поле $\vec{\mathcal{H}}_e$ в центре атома, с магнитным полем ядра: $W_N = -\vec{\mu}\vec{\mathcal{H}}_e$.

Магнитный момент ядра μ обусловлен собственными магнитными моментами протонов μ_p (70.5) и нейтронов μ_n (70.11), а также движением протонов внутри ядра, которое создает орбитальную часть магнитного момента. По определению

$$\mu = \mu_N \sum_{\alpha=1}^{A} (g_{l_\alpha} l_\alpha + g_{s_\alpha} s_\alpha), \qquad (70.47)$$

где g_{l_α} и g_{s_α} — орбитальное и спиновое гиромагнитные отношения, равные соответственно

$$g_{l_\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{для протона,} \\ 0 & \text{для нейтрона,} \end{cases} \quad g_{s_\alpha} = \begin{cases} g_p = 5{,}58550 & \text{для протона,} \\ g_n = -3{,}82629 & \text{для нейтрона,} \end{cases} \qquad (70.48)$$

μ_N — ядерный магнетон (70.6).

Под магнитным моментом ядра всегда понимают значение магнитного момента μ (70.47), усредненное по движению всех нуклонов ядра. В качестве магнитного момента μ условились выбрать среднее значение проекции вектора μ на направление вектора полного момента импульса ядра $\mathbf{J}$ (70.46) в состоянии с максимальным значением его проекции на ось z (ось квантования, задаваемая направлением внешнего магнитного поля) $m_J = J$:

$$\mu \equiv \left\langle \frac{\mu \mathbf{J}}{\mathbf{J}^2} m_J \right\rangle = \frac{1}{J+1} \langle \mu \mathbf{J} \rangle_{m_J = J}, \qquad (70.49)$$

где усреднение [62.1.2] проводится с волновыми функциями A нуклонов (см. (62.34)). Строгий расчет μ по формуле (70.49) требует предварительного решения задачи A нуклонов (многих тел) [71.2]. Использование моделей ядра [72] позволяет значительно упростить вычисление μ.

Опыт показывает, что магнитные моменты четно-четных ядер (Z и N четные) всегда равны нулю. Это позволяет предположить, что спины и магнитные моменты ядер с нечетным массовым числом A обусловлены движением последнего неспаренного нуклона (протона, если число протонов нечетное, или нейтрона, если число нейтронов нечетное). В такой одночастичной модели ядра [72.4.2]

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{S}, \quad \mu = \mu_N (g_l \mathbf{l} + g_S \mathbf{S}), \qquad (70.50)$$

где $\mathbf{j}$ — полный момент неспаренного нуклона, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{S}$ — его орбитальный и спиновый моменты. Подставляя (70.50) в (70.49) и учитывая тождества

$$2\,\mathbf{l}\mathbf{j} = \mathbf{j}^2 + \mathbf{l}^2 - \mathbf{S}^2, \quad 2\,\mathbf{S}\mathbf{j} = \mathbf{j}^2 - \mathbf{l}^2 + \mathbf{S}^2,$$

находим для магнитного момента ядра следующие выражения:

$$\mu/\mu_N = \frac{1}{2} g_S + \left(j - \frac{1}{2}\right) g_l \quad \text{при } j = l + \frac{1}{2},$$
$$\mu/\mu_N = \frac{1}{j+1}\left[-\frac{1}{2} g_S + \left(j + \frac{3}{2}\right) g_l\right] \quad \text{при } j = l - \frac{1}{2}, \qquad (70.51)$$

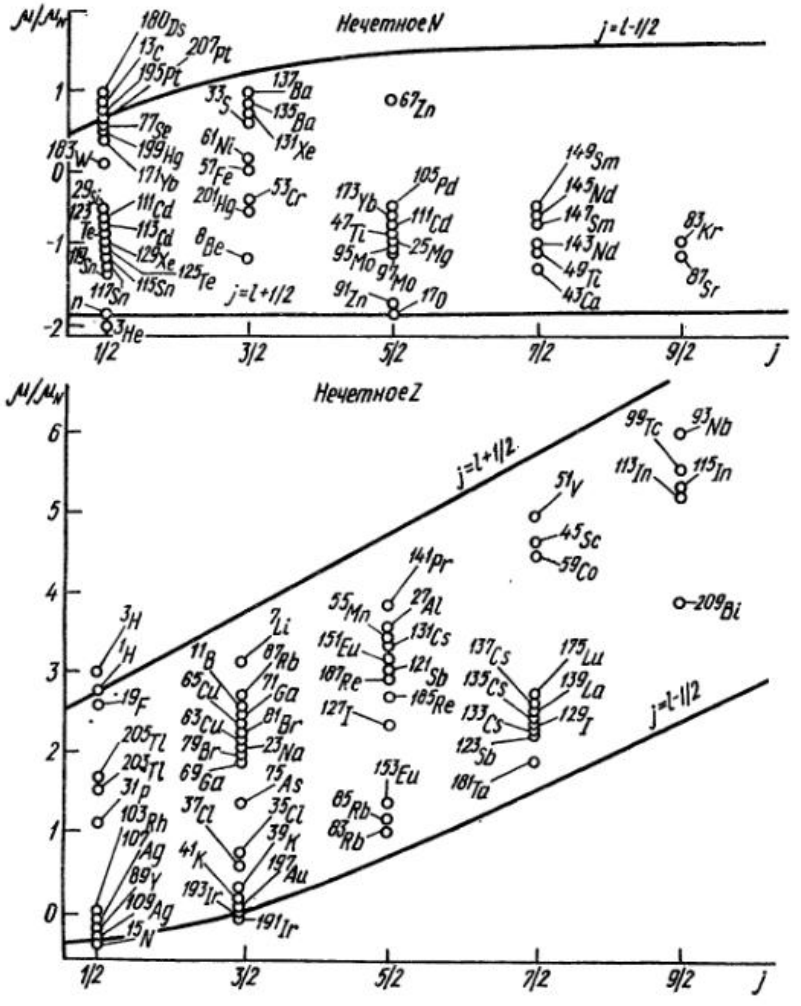


Рис. 70.5

где числовые значения гиромагнитных отношений g_l и g_S равны (70.48). Таким образом, для ядер с нечетным числом протонов Z и с нечетным числом нейтронов N должны наблюдаться два различных значения магнитного момента ядра в зависимости от взаимной ориентации векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{S}$. Совокупность этих значений для различных μ и j (различных ядер) определяет так называемые *пределы* или *кривые Шмидта* (рис. 70.5).

Экспериментальные значения магнитных моментов ядер находятся между двумя линиями Шмидта, они близки к теоретическим значениям, рассчитанным в оболочечной модели ядра [72.4]. Близость магнитного момента к одной из кривых позволяет определять спин ядра по экспериментальному значению его магнитного момента.

Наблюдаемое согласие простой теоретической модели с опытными данными, особенно в случае дважды магического ядра [72.4.1] плюс (или минус) один нуклон, объясняется существованием в ядрах эффекта спаривания, при котором два нуклона, один в состоянии с квантовыми числами j, m_j, а другой в состоянии j, $-m_j$, спариваются так, что их вклады в магнитный момент ядра компенсируются. Отклонения от линий Шмидта дают информацию о тех состояниях (примесях конфигураций), которые в простой оболочечной модели ядра не учитываются. К ним относится поправка в g-фактор от магнетизма, связанного с вращением нуклонов (главным образом протонов) в случае деформированных ядер (она имеет порядок $Z/A \simeq 0{,}5$). Кроме того, определение (70.47) или (70.50) неявно предполагает, что магнитные характеристики нуклона, находящегося внутри ядра, такие же, как и у свободного нуклона. Однако в ядре между нуклонами происходит непрерывный обмен мезонами [70.2.1; 71.3], т. е. в ядре существуют так называемые мезонные токи. Согласно современным представлениям эффекты мезонных токов приводят к тому, что магнитные моменты ядер ^{3}He и ^{3}H немного выходят за пределы Шмидта (рис. 70.5).

Следующая поправка связана с существованием у нуклона возбужденных состояний [75.2]. При расчете магнитных моментов с очень высокой точностью их следует также учитывать.

Опыт показывает, что для уровней сверхтонкого расщепления атомных спектров, обусловленного взаимодействием W_N магнитного момента ядра μ с электрическим полем электронной оболочки $\vec{\mathscr{H}}_e$, выполняется *правило интервалов*

$$E_F - E_{F-1} = cF, \tag{70.52а}$$

согласно которому расстояния между соседними уровнями соотносятся между собой как

$$(I+J) : (I+J-1) : \cdots : |I-J|, \tag{70.52б}$$

где I и J — полные моменты атомной оболочки и ядра, F — суммарный момент атома, принимающий значения

$$F = I+J,\ I+J-1,\ \ldots,\ |I-J|,$$

E_F — энергия уровня с моментом F, c — константа.

70.2.6. Квадрупольный момент ядра. Нейтрон и протон имеют электромагнитные характеристики. Поэтому состоящие из них ядра, кроме магнитных моментов [70.2.5], обладают отличными от нуля электрическими моментами. Происхождение последних можно объяснить, рассмотрев ядро как систему зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r}', t')$ в данной точке $\mathbf{r}'$ в моменты времени t', заключенную в объеме V' (рис. 31.1). Используя сведения из электродинамики [31.3; 44.1.1; 44.1.2], для скалярного потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$ квазистационарного поля ($t = t'$), описываемого формулой (44.15), с учетом следующего члена в разложении (44.16) находим для поля $V_N(\mathbf{r})$, создаваемого нуклонами ядра на расстоянии r от его центра в данный момент времени t, следующее выражение:

$$V_N(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{Ze}{r} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{p_\alpha x_\alpha}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} Q_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5} + \cdots, \tag{70.53}$$

где $x_\alpha\,(x_\beta)$ — декартовые координаты $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$, Ze — полный заряд ядра (70.26) (см. также (44.18)), p_α — компоненты вектора электрического дипольного момента ядра $\mathbf{p}$ (44.18), $Q_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора электрического квадрупольного момента (44.11):

$$Ze = \int \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \quad p_\alpha = \int x_\alpha \rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r},$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\,\rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}, \quad (\alpha, \beta) = (1, 2, 3). \tag{70.54}$$

Так как у ядра центр масс совпадает с центром распределения заряда, то у него не может быть дипольного момента $\mathbf{p}$. Опыт показывает, что действительно не существует ядер с $\mathbf{p} \neq 0$. Это в свою очередь свидетельствует о том, что центр масс протонов в ядре совпадает с центром масс нейтронов.

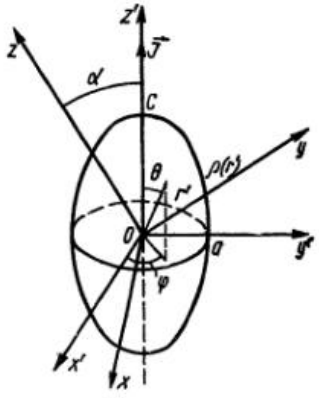


Рис. 70.6

Если распределение заряда $\rho(\mathbf{r})$ обладает сферической симметрией, то в системе координат с началом в центре масс, совпадающем с центром распределения заряда, для всех α и β тензор $Q_{\alpha\beta} = 0$.

Обычно под *квадрупольным моментом ядра* Q понимают компоненту $Q_{33} \equiv Q_{zz}$ тензора $Q_{\alpha\beta}$:

$$Q \equiv Q_{zz} = \int (3z^2 - r^2)\,\rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}. \tag{70.55а}$$

Вычисленная в произвольной (лабораторной) системе координат величина Q (70.55) дает так называемый *внешний* или *наблюдаемый* квадрупольный момент. Квадрупольный момент Q_0, вычисленный (или измеренный) в системе координат, совпадающей с главными осями ядра, представленного в форме эллипсоида (рис. 70.6), называется *внутренним* или *собственным*:

$$Q_0 = \int (3z'^2 - r'^2)\,\rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}' = \sqrt{\frac{16\pi}{5}}\int r'^2 Y_{20}(\theta, \varphi)\,\rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'. \tag{70.56}$$

Внешний и внутренний квадрупольные моменты связаны между собой соотношением

$$Q = \frac{1}{2}(3\cos^2\alpha - 1)\, Q_0, \tag{70.55б}$$

где α — угол между осями z и z' лабораторной и собственной систем координат (рис. 70.6). Если распределение заряда в ядре, имеющем форму эллипсоида с полуосями a и c, является однородным, т. е. $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0$, то

$$Q_0 = \frac{4}{5} Ze R^2 \eta,$$

$$Ze = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^2 c, \quad R^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2), \quad \eta = (c^2 - a^2)/(a^2 + c^2), \tag{70.57}$$

где Ze — заряд ядра, R — его средний квадратичный радиус, величина η называется параметром деформации ядра. Для сферического ядра $c = a$ и $Q_0 = 0$, для вытянутого эллипсоидального ядра $c > a$ и $Q_0 > 0$, для сплюснутого эллипса $c < a$ и $Q_0 < 0$. Таким образом, величина квадрупольного момента Q_0 является мерой отклонения распределения зарядов в ядре, а значит, и его формы от сферической.

Формулы (70.53)—(70.57) дают описание квадрупольного момента ядра в рамках классической физики. При переходе к квантовомеханическому описанию плотность распределения зарядов в ядре ρ должна быть вычислена по волновым функциям ядра Ψ [71.2] согласно правилу квантовой механики (62.47). Кроме того, нужно учесть дискретный характер пространственного положения момента импульса эллипсоида J, направленного вдоль оси z' собственной системы координат, относительно оси z лабораторной системы, т. е. положить $\cos\alpha = m_J/\sqrt{J(J+1)}$, где J — квантовое число, характеризующее длину вектора J, m_J — его проекция на ось квантования z:

$$Q(J, m_J) = \frac{3m_J^2 - J(J+1)}{2J(J+1)} Q_0. \qquad (70.58)$$

Квадрупольным моментом рассматриваемой *квантовой системы* условились называть величину (70.58) при $m_J = J$:

$$Q \equiv Q(J, J) = \frac{2J-1}{2J+2} Q_0. \qquad (70.59)$$

Если ввести оператор квадрупольного момента ядра из A нуклонов равный

$$\hat{Q} = \sum_{\alpha=1}^{A} e_\alpha (3z_\alpha^2 - r_\alpha^2), \quad e_\alpha = \begin{cases} +e & \text{для протонов,} \\ 0 & \text{для нейтронов,} \end{cases} \qquad (70.60)$$

то квадрупольный момент Q (70.59) будет представлять собой среднее значение оператора $\hat{Q}$ по состояниям ядра со спином J и проекцией $m_J = J$:

$$Q = \langle \hat{Q} \rangle_{JJ} = \sum_{\alpha=1}^{A} e_\alpha \int \Psi_{JJ}^* (3z_\alpha^2 - r_\alpha^2) \Psi_{JJ} \, d\tau, \qquad (70.61)$$

где $\Psi_{JJ} = \Psi_{JJ}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_A)$ — волновая функция ядра, а интегрирование производится по всему конфигурационному пространству с элементом объема $d\tau = d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \ldots d\mathbf{r}_A$. Этот интеграл удается вычислить только используя упрощающие модельные представления о ядре. Простейшей из таких моделей является модель, в которой ядро представляет собой равномерно заряженную сферическую сердцевину, вокруг которой по окружности с радиусом R движется точечная частица с зарядом q. Такая модель описывает дважды магические ядра плюс (минус) один нуклон. При этом наличие нуклона сверх заполненных оболочек рассматривается как реальная частица с зарядом $q = 0$ для нейтрона и $q = +e$ для протона, а недостачу в один нуклон рассматривают как дырочное состояние (частицу-дырку) с зарядом $q = 0$ для нейтрона и $q = -e$ для протона. В такой модели спин ядра J равен полному

моменту $j = l \pm \frac{1}{2}$ непарного нуклона, а квадрупольный момент ядра Q (70.59) определяется выражением

$$Q = \begin{cases} -q \dfrac{2j+1}{2j+2} \langle r^2 \rangle_{nl} & \text{при } j \neq 0, \\ 0 & \text{при } j = 0 \text{ или } j = 1/2, \end{cases} \qquad (70.62a)$$

где $\langle r^2 \rangle_{nl}$ — средний квадратичный радиус

$$\langle r^2 \rangle_{nl} = \int_0^\infty r^2 R_{nl}^2(r) \, r^2 \, dr,$$

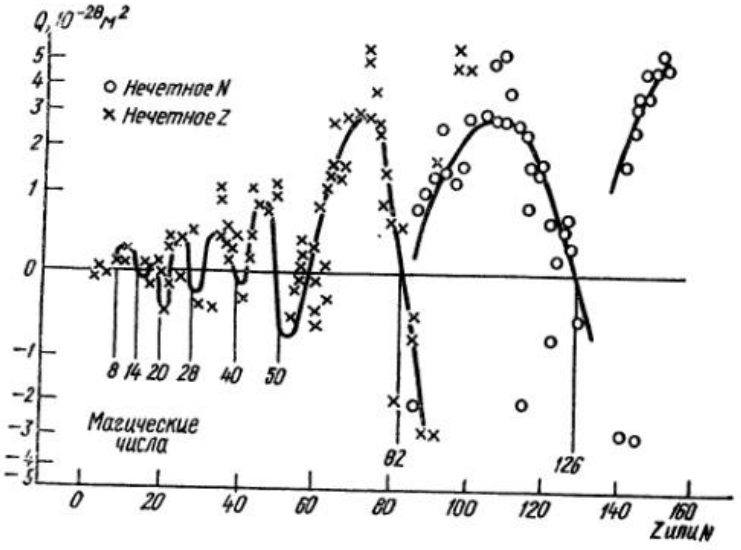


Рис. 70.7

$R_{nl}(r)$ — радиальная волновая функция [62.2.4], соответствующая функции $\Psi_{jj}(\mathbf{r})$ ядра. Согласно (70.62) в одночастичном приближении квадрупольный момент ядра определяется квадрупольным моментом последнего непарного нуклона:

$Q = 0$, если внешняя частица — нейтрон или нейтронная дырка;

$Q = -\frac{3}{5} eR^2 \frac{2j-1}{2j+2}$, если внешняя частица — протон в состоянии Ψ_{jj}; (70.62б)

$Q = \frac{3}{5} eR^2 \frac{2j-1}{2j+2}$, если внешняя частица — протонная дырка в состоянии Ψ_{jj},

где R — радиус эквивалентного однородного распределения заряда (70.33).

Наличие у ядра квадрупольного момента Q проявляется во взаимодействии его с градиентом внутриатомного электрического поля,

создаваемого электронами атома. Энергия этого взаимодействия

$$W_{\text{кв}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 V_e}{\partial z^2}\right)_0 Q, \qquad (70.63)$$

где $V_e = V_e(r)$ — внутриатомный электрический потенциал, градиент которого направлен вдоль оси z и взят в центре атома ($r = 0$). Взаимодействие $W_{\text{кв}}$ приводит к сверхтонкому расщеплению спектров атомов, которое по виду отличается от сверхтонкого расщепления, обусловленного магнитным моментом ядра [70.2.5]. Это взаимодействие нарушает правило интервалов (70.52), выполняющееся в последнем случае.

Электрический квадрупольный момент Q (70.62), рассчитанный по одночастичной модели, согласуется с экспериментальным только для ядер, имеющих один нуклон сверх заполненной оболочки. Квадрупольные моменты всех других ядер отличаются от одночастичных как по знаку, так и по величине. Они оказываются много больше предсказываемых одночастичной моделью. Так, для ядра ^{181}Ta предсказываемое значение $Q \sim R^2 \simeq 0{,}4 \cdot 10^{-24}$ см^2, в то время как эксперимент дает $Q = 6 \cdot 10^{-24}$ см^2. Это свидетельствует о коллективном происхождении ядерных квадрупольных моментов, вклад в которые дают все нуклоны ядра. Наблюдаемая зависимость квадрупольного момента от числа протонов Z или от числа нейтронов N показана на рис. 70.7. Периодическая зависимость Q от числа нуклонов указывает на оболочечную структуру ядер. По мере увеличения числа нуклонов форма ядер периодически изменяется от вытянутой до сферической (и даже сплюснутой) и далее в обратном порядке. Отмеченные особенности описывает обобщенная модель ядра [72.5]. Квадрупольный момент имеет размерность площади. Выражая градиент поля в (70.63) в вольтах на квадратный сантиметр, с учетом заряда электрона получаем энергию $W_{\text{кв}}$ в электронвольтах. Квадрупольные моменты некоторых атомных ядер приведены в табл. 70.3.

Таблица 70.3. **Квадрупольные моменты Q (в 10^{-24} см^2) некоторых атомных ядер (экспериментальные данные)**

Ядро	Q	Ядро	Q	Ядро	Q	Ядро	Q
$^{2}_{1}$H	0,00282	$^{33}_{16}$S	—0,064	$^{85}_{37}$Rb	0,27	$^{179}_{72}$Hf	3
$^{11}_{5}$B	0,0355	$^{35}_{16}$S	0,045	$^{93}_{41}$Nb	—0,3	$^{181}_{73}$Ta	6
$^{14}_{7}$N	0,0071	$^{59}_{27}$Co	0,404	$^{135}_{56}$Ba	0,25	$^{264}_{81}$Bi	—0,19
$^{17}_{8}$O	—0,027	$^{63}_{29}$Cu	0,16	$^{141}_{59}$Pr	—0,054	$^{233}_{92}$U	3,4
$^{27}_{13}$Al	0,149	$^{81}_{35}$Br	0,28	$^{175}_{71}$Lu	5,9	$^{241}_{93}$Am	4,9
$^{37}_{17}$Cl	0,061	$^{59}_{27}$Co	0,5	$^{115}_{49}$In	1,16	$^{185}_{75}$Re	—0,6
$^{40}_{20}$Ca	0	$_{28}$Ni	0	$_{50}$Sn	0	$_{82}$Pb	0
$^{51}_{23}$V	0,3	$^{59}_{29}$Cu	—0,16	$^{121}_{51}$Sb	—0,5	$^{209}_{83}$Bi	—0,4

70.3. Структура спектра энергетических уровней ядра

Атомное ядро является многочастичной системой, внутреннее состояние которой характеризуется вполне определенной энергией E. Совокупность всех таких состояний образует *спектр энергетических уровней ядра*. Состояние с наименьшей энергией называется *основным*, а все остальные — *возбужденными*. Так как ядро — квантовая система,

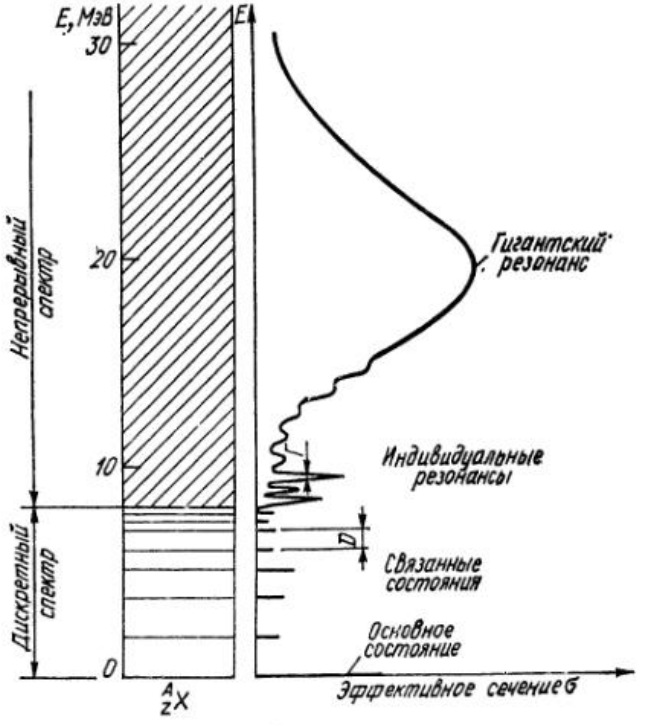


Рис. 70.8

то его спектр в общем случае состоит из двух частей: дискретной и непрерывной [62.3.2]. В нерелятивистской теории ядра ему соответствует спектр собственных значений E уравнения Шредингера (71.2) [71.2].

Спектр ядра может быть установлен в опытах по рассеянию протонов на ядрах. Если кинетическая энергия падающего протона равна E_p, а рассеянного $E_{p'}$, то на возбуждение ядра затрачивается энергия $E^* = E_p - E_{p'} - E'$, где E' — энергия отдачи ядра. Эта разность и определяет энергию возбуждения $E^* = E_n - E_0$, где E_0 — энергия основного состояния, E_n — энергия n-го уровня ядра. Данный эксперимент аналогичен опытам Франка — Герца [65.2.1]. Типичная структура спектра энергетических уровней возбужденных состояний ядра показана на рис. 70.8. Определения эффективных сечений и резонансов даны в [73.1.2; 73.3.1] (см. также [72.2.5; 72.3.3]).

71. ЯДЕРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

71.1. Особенности ядерных сил

Атомное ядро представляет собой связанную систему A нуклонов Z протонов и N нейтронов, $A = Z + N$. Между нуклонами действуют специфические силы, называемые *ядерными*. Изучение наблюдаемых характеристик ядер [70.2] позволяет сделать ряд важных заключений о свойствах этих сил. Наиболее важными и отличительными являются следующие особенности ядерных сил.

1. Притяжение. Силы, действующие между нуклонами, в основном являются силами притяжения. Это следует из существования самих ядер — составных систем нуклонов.

2. Радиус действия. Сравнение энергий связи ядер ^{2}H, ^{3}H и ^{4}He показывает, что радиус действия ядерных сил имеет порядок 1 фм.

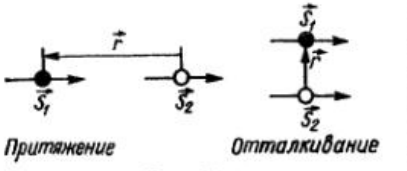


Рис. 71.1

3. Интенсивность. В пределах радиуса действия ядерные силы характеризуются очень большой величиной. Если взаимодействие нуклонов описывать при помощи потенциала с радиусом действия (шириной) ~ 1 фм, то глубина этого потенциала должна быть ~ 50 МэВ. Для сравнения — энергия кулоновского взаимодействия двух протонов на расстоянии 1 фм по порядку величины равна 1,4 МэВ. В связи с этим взаимодействие нуклонов называют сильным [77.5].

4. Зарядовая независимость или изотопическая инвариантность. Ядерные силы являются зарядовонезависимыми, т. е. они не зависят от величины электрического заряда. Ядерные силы, действующие между двумя протонами, протоном и нейтроном и двумя нейтронами, имеют одинаковую величину, если эти пары нуклонов находятся в одних и тех же состояниях $^{2S+1}L_J$, где S — спин пары, L — орбитальный, J — полный моменты пары; $J = L + S, L + S - 1, \ldots, |S - L|$.

5. Насыщение. Каждый нуклон в ядре взаимодействует с ограниченным числом нуклонов. Эта особенность ядерных сил проявляется в том, что удельная энергия связи нуклонов B/A [70.2.3] при увеличении числа нуклонов A остается почти постоянной. Для большинства ядер объем и энергия связи пропорциональны массовому числу A [70.2.2; 70.2.3]. Свойство нуклона притягивать к себе лишь ограниченное число других нуклонов подобно силам химических связей и ван-дер-ваальсовым [15.3.1]. Явление насыщения ядерных сил взаимодействия нуклонов объясняют тем, что эти силы обменные (как в силах химической связи) и характеризуются сильным отталкиванием на малых расстояниях $\sim 0{,}4$ фм (как в силах Ван дер Ваальса). Обменный характер ядерных сил является чисто квантовой особенностью, не имеющей классического аналога. Обменные нуклон-нуклонные силы превращают протоны в нейтроны, а нейтроны в протоны путем обмена заряженными мезонами, как в (70.7), и описываются взаимодействием, при котором переставляются координаты взаимодействующих частиц [71.2].

6. Зависимость от спина. Силы взаимодействия нуклонов зависят от взаимной ориентации спинов этих нуклонов. Этим объясняется, в частности, причина существования ядра тяжелого водорода дейтрона, состоящего из нейтрона и протона, и отсутствие ядра, состоящего из двух нейтронов. В первом случае спин пары $S = 1$, так как спины нуклонов параллельны один другому, а в случае двух нейтронов из-за действия принципа Паули $S = 0$, т. е. спины нуклонов антипараллельны. Состояния двух нуклонов с $S = 1$ называют триплетным спиновым состоянием, а с $S = 0$ — синглетным [71.2].

7. Нецентральность. Ядерные силы являются нецентральными. Их нельзя представить как силы, действующие вдоль прямой, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов. На нецентральность нуклон-нуклонного взаимодействия указывает наличие у дейтрона отличного от нуля квадрупольного момента $Q_d = 0{,}282 \cdot 10^{-26}$ см^2 (см. табл. 70.3). Нецентральные силы, приводящие к существованию электрического квадрупольного момента дейтрона, называются тензорными силами. Такие силы зависят от угла между вектором, соединяющим два нуклона, и вектором спина дейтрона. В дейтроне тензорные силы являются силами притяжения, когда дейтрон имеет сигарообразную форму, и силами отталкивания — в дискообразной конфигурации (рис. 71.1) [71.2].

71.2. Нерелятивистская теория ядра

Главной задачей нерелятивистской теории ядра является объяснение свойств ядер и характера их взаимодействия с другими элементарными и составными частицами (протонами, нейтронами, электронами, мезонами, фотонами, ядрами и др.) на основе сведений о свойствах нуклонов и характере их взаимодействия. Физическим обоснованием такой постановки задачи является то, что нуклон, погруженный в ядерную среду с плотностью $\rho_N \simeq 10^{38}$ нуклон/см^3 (70.40), в первом приближении сохраняет структуру и свойства свободного нуклона. Это связано с тем, что энергии нуклонов в ядре малы в масштабах ядерной физики. Так, средняя кинетическая энергия нуклона в ядре

$$\langle E_c \rangle \simeq \frac{\langle p \rangle^2}{2m_N} \simeq \frac{\hbar^2}{2m_N R_0^2} \approx 20 \text{ МэВ}, \tag{71.1}$$

где R_0 характеризует средний импульс нуклона $\langle p \rangle \simeq \frac{\hbar}{R_0}$, находящегося в ячейке с линейными размерами R_0, куда в силу принципа Паули не может попасть другой нуклон, ядро при этом занимает объем $R^3 = R_0^3 A$ согласно (70.34). Энергия (71.1) значительно меньше энергии первого возбужденного состояния нуклона Δ (1236), превышающего на 300 МэВ энергию его основного состояния (массу нуклона).

Кроме того, в нерелятивистском пределе, когда скорость движения нуклонов значительно меньше скорости света, ядерные силы не зависят от скоростей взаимодействующих нуклонов и могут быть заданы потенциалом. Эти обстоятельства позволяют описывать ядро стационарным уравнением Шредингера (62.73)

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{71.2}$$

с гамильтонианом

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^{A} \left(-\frac{\hbar^2}{2m_N} \Delta_\alpha \right) + \sum_{\alpha=1}^{A} \sum_{\beta<\alpha}^{A} \hat{V}_{\alpha\beta} + \hat{V}', \tag{71.3}$$

где первая сумма соответствует кинетической энергии A нуклонов ядра, $V_{\alpha\beta}$ — парный потенциал взаимодействия нуклонов α и β. В отличие от электродинамики, где полная энергия взаимодействия заряженных частиц равна сумме взаимодействий отдельных пар в соответствии с линейностью ее уравнений [31], в ядерной физике нет прямых указаний на то, что взаимодействие двух нуклонов не зависит от присутствия других нуклонов. Указанное отличие описывается так называемыми *многочастичными силами* $\hat{V}'$. Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что вклад многочастичных (и, в частности, трехчастичных) сил мал. Поэтому потенциальную энергию ядерной системы можно представить в виде суммы эффективных парных потенциалов, которые по форме достаточно близки к потенциалу элементарного (т. е. не подверженного искажению побочными эффектами) нуклон-нуклонного взаимодействия $\hat{V}_{NN}$. Наиболее общим согласно свойствам ядерных сил [71.1] является следующий вид потенциала взаимодействия нуклонов 1 и 2:

$$\hat{V}_{N_1N_2} = \hat{V}_c + \hat{V}_{sc}\,\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \hat{V}_T\,S_{12} + \hat{V}_{LS}\,\mathbf{LS} + \hat{V}_{LL}\,L_{12}, \qquad (71.4)$$

где $\hat{V}_c$ описывает обычную центрально-симметричную потенциальную энергию двух нуклонов, $\hat{V}_{sc}$ — зависящий от спинов центрально-симметричный потенциал, $\hat{V}_T$ представляет собой тензорные силы, $\hat{V}_{LS}$ характеризует спин-орбитальное взаимодействие, а $\hat{V}_{LL}$ — квадратичные спин-орбитальные силы. Величины σ_1 и σ_2 — спиновые матрицы Паули (63.32), связанные со спинами $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ нуклонов соотношениями (63.34) (в единицах $\hbar$)

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{2}\,\sigma_1, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\,\sigma_2; \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\,(\sigma_1 + \sigma_2)$$

— полный спин пары; $\mathbf{L}$ — относительный орбитальный момент количества движения:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\,\mathbf{r} \times \mathbf{q}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2,$$

$\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — импульсы и радиусы-векторы нуклонов, S_{12} — тензорный оператор, характеризующий энергию взаимодействия двух диполей с моментами $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ (25.103) (рис. 71.1):

$$S_{12} = 4\left[\frac{3}{r^2}\,(\mathbf{S}_1\,\mathbf{r})\,(\mathbf{S}_2\,\mathbf{r}) - \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\right] =$$

$$= 3\,(\sigma_1\,\mathbf{n})\,(\sigma_2\,\mathbf{n}) - (\sigma_1\sigma_2) = 6\,(\mathbf{n}\,\mathbf{S})^2 - 2\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (71.5)$$

L_{12} — оператор вида

$$L_{12} = [\delta_{LJ} + 2S\,(S+1) - 3]\,\mathbf{L}^2 - (\mathbf{LS})^2 =$$

$$= (\sigma_1\sigma_2)\,\mathbf{L}^2 - \frac{1}{2}\,[(\sigma_1\,\mathbf{L})\,(\sigma_2\,\mathbf{L}) + (\sigma_2\,\mathbf{L})\,(\sigma_1\,\mathbf{L})], \qquad (71.6)$$

$$J = L + S, \quad L + S - 1, \ldots, |L - S|.$$

Согласно свойству зарядовой независимости ядерные силы должны быть инвариантны относительно поворотов в изоспиновом пространстве [70.2.1].

Это означает, что все операторы $\hat{V}_a$ в (71.4) являются изоспиновыми операторами вида

$$\hat{V}_a = V_a + V_{a\tau}\,(\tau_1 \cdot \tau_2), \quad a = \{c,\ sc,\ T,\ LS,\ LL\}, \qquad (71.7)$$

где τ_1 и τ_2 — зарядовые матрицы нуклонов (63.8) с изоспинами (в единицах $\hbar$) $\mathbf{t}_1 = \frac{1}{2}\,\tau_1$ и $\mathbf{t}_2 = \frac{1}{2}\,\tau_2$. Функции V_a и $V_{a\tau}$ могут зависеть от $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $p = \frac{1}{2}\,|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|$ и $|\mathbf{L}|$. Все эти функции в принципе должны находиться из экспериментов путем пробного их выбора с последующей подгонкой под экспериментальные данные (по сечениям, угловым распределениям в процессах рассеяния и реакций и др. характеристикам). Такая процедура, однако, не дает однозначного указания на выбор функций V — целый ряд из них одинаково хорошо описывает эксперимент. Оказалось, что они сильно зависят от спина и четности $\pi = (-1)^L$ состояния обоих взаимодействующих нуклонов. Взаимодействие $\hat{V}_{NN}$ является сильно притягивательным в состояниях с положительной четностью (L четное) и слабо притягивательным в состояниях с отрицательной четностью (L нечетное). Для большинства состояний взаимодействие $\hat{V}_{NN}$ на расстояниях $r < r_c \simeq 0{,}5$ фм является сильно отталкивательным. На больших расстояниях r оно убывает так же, как потенциал Юкавы (71.16б). Следует, однако, иметь в виду, что расстояниям, равным длине волны де Бройля $\lambda \simeq 1$ фм, соответствуют нуклоны с кинетической энергией 350 МэВ, и нерелятивистское описание, использующее представление о потенциале, здесь неприменимо.

Наиболее реалистическими считаются *парижский* (Лакомб и др., 1975, 1980) и *боннский* (Эркеланц и др., 1974) потенциалы, а также *потенциал Нагельса* (1975). Наиболее широко в приложениях используются *потенциалы Рейда* (1965) в виде суммы потенциалов Юкавы, *Эйкенмейера — Хакенбройха* (1971) в виде суммы гауссоид, *Хамады — Джонсона* (1962) в виде суммы потенциалов Юкавы и потенциалов, учитывающих эффекты одномезонного обмена [71.3], и др.

71.3. Мезонная теория нуклон-нуклонного взаимодействия

71.3.1. Виртуальные частицы. Ядерное (сильное) взаимодействие обусловлено тем, что нуклоны виртуально обмениваются частицами, имеющими конечную массу покоя. Идея об *обменном характере сильного взаимодействия* заимствована из квантовой электродинамики, согласно которой процесс взаимодействия двух заряженных частиц осуществляется путем обмена фотонами, представляющими собой кванты электромагнитного поля. Согласно квантовой теории фотоны, посредством которых осуществляется взаимодействие заряженных частиц (например, электронов), не могут быть обнаружены опытным путем. Частицы, которые участвуют в различных физических процессах, связанных с их взаимодействием и превращением (но, в принципе, не могут быть обнаружены за время их существования), называются *виртуальными*, а состояния, в которых они присутствуют — *промежуточными состояниями*. Энергия промежуточных состояний ΔE, связанных с обменом виртуальными частицами, и длительность их

существования Δt связаны между собой соотношением неопределенности Гейзенберга (61.7)

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar. \tag{71.8}$$

В случае электромагнитного взаимодействия энергия ΔE определяет частоту ω испущенного электроном виртуального фотона: $\Delta E = \hbar\omega$, который будет поглощен другим электроном через время $\Delta t \approx \hbar/\Delta E = \frac{1}{\omega}$. Виртуальный фотон может передать взаимодействие электронов, находящихся один от другого на расстоянии

$$R = c\Delta t = c/\omega. \tag{71.9}$$

Так как частота фотона ω изменяется от 0 до ∞, то величина R (71.9), характеризующая радиус действия электромагнитных сил, может быть сколь угодно большой. Этим объясняется наблюдаемый на опыте бесконечно большой радиус действия электромагнитных сил. Если виртуальные частицы характеризуются конечной массой покоя m, то радиус действия обусловленных ими сил будет конечным. Так, энергия промежуточного состояния при испускании одной виртуальной частицы массой m изменяется на величину $\Delta E = mc^2$. Через время $\Delta t \approx \hbar/mc^2$ она поглощается, пройдя путь

$$R = c\Delta t \approx c\frac{\hbar}{mc^2} = \frac{\hbar}{mc} = \lambda_c, \tag{71.10}$$

где λ_c — комптоновская длина волны данной частицы (для электрона см. (57.11) [57.2.1]) и предположено, что виртуальная частица движется со скоростью света c. Так как за время $\Delta t \approx \hbar/mc^2$ частица не может пройти расстояние, большее λ_c, то взаимодействие должно сильно спадать на расстояниях, больших λ_c. Если предположить, что одновременно происходит обмен n частицами, то соответствующие энергии промежуточных состояний будут $\Delta E = nmc^2$, а радиус такого взаимодействия будет $R = \lambda_c/n$. Отсюда следует, что: 1) большие расстояния R соответствуют одночастичному обмену; 2) чем больше масса m виртуальной частицы, тем на меньшее расстояние она переносит взаимодействие.

71.3.2. Модель ядерных сил Юкавы. Первой моделью ядерных сил, в которой использовалась идея о конечной массе виртуальных частиц, ответственных за сильное взаимодействие, была *β-теория ядерных сил* (И. Е. Тамм, Д. Д. Иваненко, 1934). В этой теории сильное взаимодействие описывалось как испускание и поглощение электрон-нейтринных пар. Однако это взаимодействие, как показали дальнейшие исследования, оказалось слишком слабым. Кроме того, комптоновская длина волны электрона $\lambda_c = 3{,}86 \cdot 10^{-11}$ см (57.12в) на два порядка больше радиуса действия ядерных сил $R \approx 10^{-13}$ см. Выбор электрона в качестве переносчика ядерного взаимодействия объяснялся тем, что во время создания β-теории было известно только пять частиц: нейтрон (n), протон (p), фотон (γ), электрон (e^-) и нейтрино (ν_e).

Идею об обменном характере короткодействующих ядерных сил использовал Юкава (1935), построивший *первую* последовательную *теорию сильного взаимодействия*. Основу теории составила гипотеза о существовании в природе частиц промежуточной между электроном и нуклоном массы, получивших название мезонов [75.4]. Масса этих частиц должна была быть около 200 m_e, где m_e — масса электрона. Частицы, обладающие требуемыми свойствами, были обнаружены

в космическом излучении (Оккиалини, Пауэлл, 1947) и получили название π-мезонов или пионов.

Теория сильного взаимодействия в простейшем варианте может быть построена на основе аналогии с электромагнитным взаимодействием [31.3; 44.1.2]. Так, скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$, созданный распределением зарядов $q\rho$ в вакууме, удовлетворяет уравнению Даламбера (31.21)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi q\rho, \tag{71.11}$$

где для удобства заряд q выделен в отдельный множитель так, что в соответствии с (44.18) плотность ρ будет нормирована на единицу. Предполагая, что распределение зарядов не зависит от времени $\rho = \rho(\mathbf{r})$, волновое уравнение (71.11) сведем к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi q\rho, \tag{71.12}$$

решение которого имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\,\frac{q\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{71.13а}$$

Для точечного заряда q, помещенного в начало координат, $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$, потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ (71.13а) сводится к кулоновскому

$$\varphi(\mathbf{r}) = q/r \tag{71.13б}$$

(ср. с (31.23), (44.14), (44.15), (44.17), (44.18)). При построении теории сильного взаимодействия Юкава постулировал, что поле ядерных сил Φ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (63.2) с правой частью

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\Phi = -4\pi g\rho, \tag{71.14}$$

где $g\rho$ есть источник поля Φ, g — интенсивность источника, ρ — его плотность вероятности. Предполагая, что эта плотность не зависит от времени $\rho(\mathbf{r}) = \rho$, уравнение (71.14) преобразуем к виду

$$(\Delta - \mu^2)\,\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi g\rho(\mathbf{r}), \quad \mu = \frac{mc}{\hbar} = \frac{1}{\lambda_c}. \tag{71.15}$$

Решение этого уравнения, которое убывает на бесконечности, имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = -g\int d\mathbf{r}'\,\frac{e^{-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\rho(\mathbf{r}'), \quad \int d\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) = 1. \tag{71.16а}$$

Для точечного источника сильного взаимодействия, расположенного в начале координат в точке $\mathbf{r}' = 0$, потенциал

$$\Phi(\mathbf{r}) = -g\frac{e^{-\mu r}}{r} \tag{71.16б}$$

называется *потенциалом Юкавы*. Поле (71.16б) быстро убывает с увеличением расстояния r от центра источника. Постоянная $\mu = 1/\lambda_c$ определяется комптоновской длиной волны кванта поля $\Phi(\mathbf{r})$. Масса полевого кванта m характеризует радиус действия межнуклонных сил.

Согласно квантовой механике для определения энергии взаимодействия двух частиц необходимо задать гамильтониан такой двухча-

стичной системы [62.2; 63.1]. Простейшее выражение для гамильтониана взаимодействия H_{f_0N} между квантом f_0 поля $\Phi(\mathbf{r})$ и фиксированным нуклоном N, характеризуемым функцией источника $\rho(\mathbf{r})$, согласно теории поля имеет вид

$$H_{f_0N} = g \int d\mathbf{r}\, \Phi(\mathbf{r})\, \rho(\mathbf{r}). \qquad (71.17)$$

Подставляя в (71.17) выражение (71.16б) и учитывая, что в рассматриваемом случае нуклон является точечным, для энергии взаимодействия двух нуклонов V_{NN} получаем формулу

$$V_{NN} = -g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}. \qquad (71.18)$$

Знак минус означает, что взаимодействие двух нуклонов является притягивательным, если силы их взаимодействия передаются квантами поля, описываемого уравнением (71.15) и гамильтонианом взаимодействия (71.17). Такой квант поля не имеет заряда и других характеристик, кроме массы m. Поэтому соответствующие ему частицы называют *нейтральными скалярными мезонами*. Взаимодействие (71.18) соответствует обмену f_0-мезонами, имеющими массу $m_{f_0} = 1300$ МэВ. Радиус действия таких сил $R_{f_0} \sim 0{,}15$ фм, т. е. f_0-мезоны ответственны за взаимодействие V_{NN} только на очень малых расстояниях. Кроме них существенную роль играют обмены η-, ρ (770)-, ω (783)-мезонами. Так, ω-мезон с массой $m_\omega = 783$ МэВ в значительной степени обусловливает отталкивательное взаимодействие нуклонов на расстояниях, меньших 0,3 фм (рис. 71.2). Все эти мезоны представляют собой резонансные состояния двух π-мезонов (ρ и f_0) или трех π-мезонов (η и ω).

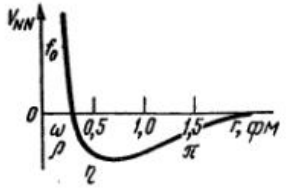


Рис. 71.2

На самых больших ядерных расстояниях взаимодействие нуклонов описывается обменом единичными пионами — самыми легкими из мезонов. Существует три вида пионов: π^+, π^0, π^-. Мезоны $\pi^\pm$ имеют электрические заряды $\pm e$ и равные массы: $m_{\pi^\pm} = 139{,}57$ МэВ. Мезон π^0 имеет равный нулю электрический заряд и массу $m_{\pi^0} = 134{,}96$ МэВ. Спины π-мезонов равны нулю: $J = 0$, т. е. они являются бозонами. Близость свойств трех видов π-мезонов позволяет считать их тремя зарядовыми (изоспиновыми) состояниями одной частицы — *пиона* [76.1.1]. Такое описание полностью аналогично описанию нейтрона и протона как двух зарядовых состояний одной частицы — *нуклона* [70.2.1]. Постулируется, что пион кроме пространственной переменной имеет дополнительную степень свободы — зарядовую координату, называемую *изоспином*. С этой переменной сопоставляется вектор $\mathbf{I}$ с модулем $I = 1$ в некотором фиктивном пространстве, называемом *изоспиновым пространством*. Проекция I_z изоспина $\mathbf{I}$ на некоторую ось квантования (ось z) может принимать только три значения: 0, ± 1. Значение $I_z = 0$ приписывают π^0-мезону, а значения $I_z = \pm 1$ — $\pi^\pm$-мезонам.

Опыт показывает, что четность пиона $\pi = (-1)^I$ отрицательна: $\pi = -1$ ($I = 1$). При таком описании пион является *псевдоскалярным бозоном* ($J^\pi = 0^-$) с изоспином $I = 1$. Его волновая функция Φ является псевдоскаляром в обычном пространстве и вектором в изоспиновом пространстве с компонентами Φ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, каждая из которых соответствует одному виду π-мезонов. Поле ядерных сил Φ, соответствующее обмену пионами, описывается неоднородным уравнением Клейна — Гордона для пион-нуклонной системы

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \mu^2\right]\Phi = 4\pi F_{\pi N}\, \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\rho, \qquad (71.19)$$

где $\mu = m_\pi c/\hbar$, $\rho = \Psi_N^* \Psi_N$ — плотность вероятности найти нуклон N в какой-либо точке пространства, $\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{I}$ — удвоенный нуклонный векторный изоспиновый оператор, $\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{S}/\hbar$ — оператор, связанный с нуклонным векторным спиновым оператором, $F_{\pi N}$ — константа взаимодействия пиона с нуклоном. В статическом пределе (нерелятивистское приближение) плотность ρ не зависит от времени: $\rho = \rho(\mathbf{r})$ и уравнение (71.19) сводится к более простому

$$(\Delta - \mu^2)\,\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = -4\pi F_{\pi N}\, \tau_\alpha\, \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\rho(\mathbf{r}), \qquad (71.20)$$

решение которого

$$\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = F_{\pi N}\, \tau_\alpha\, (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\, Y(\mathbf{r}),$$
$$Y(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}'\, \rho(\mathbf{r}')\, \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\mu\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (71.21)$$

Гамильтониан взаимодействия пионов с нуклоном, зафиксированным в начале системы координат и распределенным в пространстве с плотностью $\rho(\mathbf{r})$, имеет вид

$$H_{\pi N} = F_{\pi N} \int d\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r})\, \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{r})). \qquad (71.22)$$

Отсюда для гамильтониана взаимодействия двух источников пионов (двух нуклонов), разделенных расстоянием $\mathbf{r}_0$, находим выражение

$$H' = F_{\pi N} \int d\mathbf{r}\, [\rho(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\, \boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla\Phi(\mathbf{r})). \qquad (71.23)$$

Подставляя решение (71.21) в (71.23), находим, что энергия взаимодействия, создаваемая источником 1 в точке, где находится источник 2, равна

$$V_{NN}(\mathbf{r}_0) = F_{\pi N}^2\, (\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2) \int d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\, \rho(\mathbf{r}')\, \rho(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0) \times$$
$$\times\, (\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\nabla)\,(\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\nabla)\, \frac{e^{-\mu|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{\mu\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \qquad (71.24)$$

Для точечных источников это выражение дает

$$V_{NN}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{3} F_{\pi N}^2\, (\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)\left[(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2) + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{3}{\mu r_0} + \frac{3}{(\mu r_0)^2}\right) S_{12}\right] \frac{e^{-\mu r_0}}{\mu r_0} -$$
$$- 4\pi F_{\pi N}^2\, \delta(\mathbf{r}_0)\, (\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2)\, (\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2), \qquad (71.25)$$

где τ_1, τ_2 и σ_1, σ_2— операторы изоспина и спина нуклонов 1 и 2, S_{12}— тензорный оператор (71.5). Формула (71.25) описывает асимптотический вид потенциала, обусловленного *однопионным обменом*. Он однозначно определяется массой и свойствами симметрии π-мезона ($J^\pi = 0^-$, $I = 1$):

$$\mu = \frac{m_\pi c}{\hbar}, \quad \mu = 0{,}70 \text{ фм}^{-1},$$

$$f^2_{\pi NN} \equiv \frac{f^2}{4\pi} \equiv \frac{m_\pi^2}{4\pi\hbar^5 c} F^2_{\pi N}, \; f^2_{\pi NN} = 0{,}080 \pm 0{,}005, \qquad (71.26)$$

где $f^2_{\pi NN}$ — безразмерная *константа пион-нуклонной связи*, характеризующая процесс диссоциации нуклона N на нуклон и пион: $N \to N + \pi$. Эта константа определяется путем сравнения теоретических расчетов, использующих формулу (71.25), с данными об эффективных сечениях рассеяния π-мезонов нуклонами.

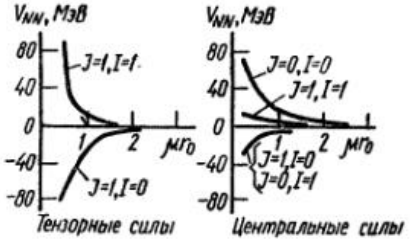


Рис. 71.3

Если источники пионов имеют конечные размеры, то поведение энергии $V_{NN}(\mathbf{r}_0)$ (71.25) на больших расстояниях r_0 не меняется, но слагаемое с дельта-функцией, описывающее контактное взаимодействие нуклонов, заменяется выражением

$$-4\pi F^2_{\pi N} (\tau_1 \cdot \tau_2)(\sigma_1 \cdot \sigma_2) \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0).$$

Для различных квантовых состояний, характеризуемых значениями спина J и изоспина I пары нуклонов, обменные силы (71.25) различны как по знаку, так и по величине (рис. 71.3).

71.4. Сравнение атомных и ядерных сил

Ядерное взаимодействие является более сильным по сравнению с другими типами известных в природе сил. Однако в пределах тех явлений, где реализуются ядерные силы, они оказываются сравнительно слабыми. Так, выбирая в качестве энергетических единиц величину $\hbar^2/Md^2$, где d — протяженность части потенциала, соответствующей отталкиванию, M — масса взаимодействующих частиц, найдем, что ядерные силы в дейтроне ^{2}H оказываются слабее химических сил, действующих между атомами двухатомной молекулы H_2 (рис. 71.4, Бор, Моттельсон, 1969).

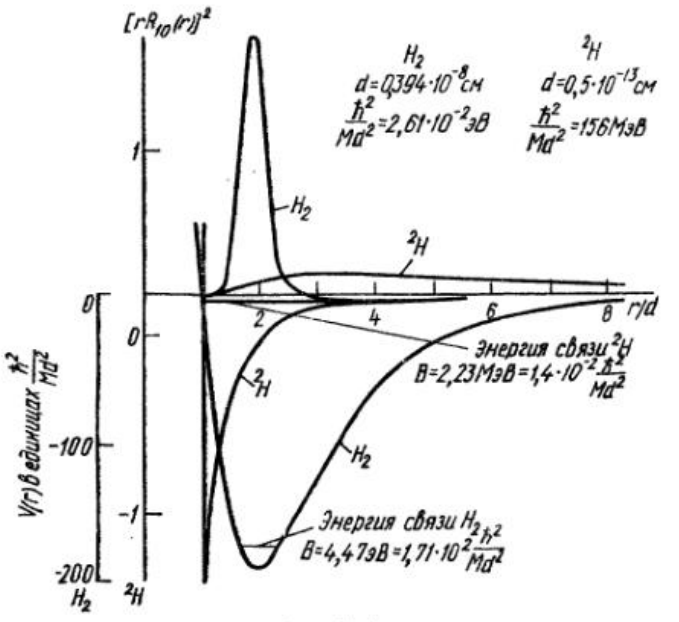


Рис. 71.4

72. СТРУКТУРА ЯДРА И ЯДЕРНЫЕ МОДЕЛИ

72.1. Классификация моделей

Сведения о структуре ядра, свойствах его взаимодействия с частицами и другими ядрами получают на основе сравнения экспериментальных данных об энергетических уровнях, эффективных сечениях, ядерных реакциях, с теоретическими представлениями о ядре как системе сильно взаимодействующих частиц — нуклонов. Однако на пути построения количественной теории ядра имеются две серьезные трудности, одна из которых связана с недостаточностью современных знаний о силах, действующих между нуклонами [71.2], а вторая с необходимостью строгого решения проблемы многих тел (A нуклонов) в рамках той или иной динамической схемы. Например, если исходить из многочастичного уравнения Шредингера (71.2) с гамильтонианом (71.3), то волновая функция ядра $\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_A; m_{s_1}, m_{s_2}, \ldots, m_{s_A})$ будет зависеть от $3A$ пространственных координат $\mathbf{r}_i$, описывающих положение нуклонов в ядре, и A спиновых переменных m_{s_i}, каждая из которых принимает по два значения, соответствующих двум возможным ориентациям спина нуклона. Уравнение (71.2) представляет собой систему 2^A уравнений, решение которой даже для средних ядер с $A \sim 50$ невозможно практически реализовать и с применением ЭВМ. Поэтому в теории ядра широкое распространение получил подход, при котором реальное ядро моделируется физической системой, которая, с одной стороны, описывает вполне определенную совокупность

свойств ядра, а с другой, являясь достаточно простой с математической точки зрения, допускает строгий количественный расчет.

При построении модели ядра поступают следующим образом: 1) определяют круг явлений, которые необходимо описать; 2) вводят соответствующие независимые степени свободы (переменные модели); 3) задают вид взаимодействия в рассматриваемой системе в переменных модели; 4) выбирают динамическую схему расчета (как правило, уравнение Шредингера, которое может содержать и релятивистские эффекты); 5) результаты расчета (по возможности точного) сравнивают с экспериментальными данными. Ясно, что чем больше фактических данных о ядре описывает модель, тем больше она соответствует действительности.

Несмотря на большое число моделей, используемых в теории ядра, они допускают простую классификацию, связанную с типом учитываемых (выделяемых как главные) степеней свободы — *одночастичных*, описывающих движение индивидуальных нуклонов (или связанных комплексов), и *коллективных*, соответствующих коррелированному (подверженному взаимному влиянию) движению большого числа частиц. В соответствии с этим ядерные модели разделяют на: 1) одночастичные; 2) коллективные; 3) обобщенные, использующие как одночастичные, так и коллективные степени свободы; 4) промежуточные.

К одночастичным моделям относят следующие.

1. Модель оболочек без остаточного взаимодействия. В этой модели считается, что нуклоны движутся независимо один от другого в самосогласованном поле [67.1.2; 67.1.3], создаваемом самими нуклонами. При построении модели исходят из того, что реальное взаимодействие нуклонов всегда можно представить в виде суммы самосогласованного взаимодействия и некоторого остатка, дополняющего его до реального. В данной модели это остаточное взаимодействие считается малым и не учитывается. Идея модели заимствована из атомной физики, обосновывающей допустимость оболочечного представления о строении атома [66]. Модель оболочек объясняет спины и четности основных состояний дважды магических ядер, спины, четности и магнитные моменты основных и некоторых возбужденных состояний ядер, отличающихся от магических на один (лишний или недостающий) нуклон [70.2.5].

2. Модель оболочек с учетом спаривания. В этой модели остаточное взаимодействие учитывается в виде возмущения на движение нуклонов в самосогласованном поле ядра, приводящего к спариванию одинаковых нуклонов в ядре. Под спариванием понимают такое объединение двух нуклонов одного сорта, при котором проекция полного момента импульса пары на ось квантования оказывается равной нулю, а четность — положительной. При нечетном числе нуклонов считается, что последний неспаренный нуклон определяет такие свойства ядер, как спин, четность и магнитный момент. Модель объясняет спины и четности основных состояний всех четно-четных ядер и почти всех ядер с нечетным A и их магнитные моменты.

К коллективным моделям относят следующие.

1. Капельная модель. В этой модели ядро рассматривается как заряженная капля жидкости. В качестве независимых степеней свободы выбираются объемное сжатие и первая основная частота колебаний поверхности. Модель объясняет зависимость энергии связи ядер от A и Z, дает качественное объяснение процесса деления [72.2].

2. Модель несферического ядра. Модель представляет ядро в виде нуклонов, заключенных в несферический объем. За независимые переменные принимаются его вращательные и колебательные степени свободы. Модель описывает низколежащие возбужденные уровни ядер, имеющих форму эллипсоида [72.5.2].

К обобщенным моделям ядра относят следующие.

1. Обобщенная модель со слабым взаимодействием. Ядро считается сферическим остовом, вокруг которого движется один или несколько внешних нуклонов. Остов описывается одной из коллективных моделей, а внешние нуклоны — одночастичными моделями. Взаимодействие степеней свободы внешних нуклонов и остова считается слабым. Модель объясняет расположение и характеристики низколежащих возбужденных уровней некоторых ядер с нечетным A.

2. Обобщенная модель с сильным взаимодействием. Ядро представляется несферическим остовом, вокруг которого в самосогласованном поле движутся нуклоны. Остов может вращаться как целое, вовлекая в это движение нуклоны. Такая модель является достаточно сложной, однако она успешно описывает расположение и характеристики (квантовые числа) большого числа низколежащих уровней многих ядер.

Кроме перечисленных используются и другие модели ядра. Среди них модель ферми-газа [72.3], представляющая собой наиболее простой вариант оболочечной модели [72.4]. Здесь нуклоны трактуются как идеальный ферми-газ, заключенный внутри большого объема. Такая модель позволяет понять свойство насыщения ядерных сил, большую энергию симметрии и др.

Для объяснения наблюдаемой плотности ядер, их удельной энергии, а также насыщения ядерных сил, используется представление о ядерной материи — гипотетической сплошной среде, состоящей из одинакового числа нейтронов и протонов. Кулоновское взаимодействие протонов не учитывается. Считается, что указанная ядерная среда занимает такой большой объем, что поверхностными эффектами можно пренебречь. По имеющимся данным такая ситуация реализуется в центральных областях тяжелых ядер ($A \gtrsim 200$).

Для объяснения свойств легких ядер применяется модель нуклонных ассоциаций, в которой более тяжелое ядро трактуется как связанное состояние более легких ядер, например, ${}^{6}_{3}\mathrm{Li} = {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{2}_{1}\mathrm{H}$; ${}^{12}_{6}\mathrm{C} = 3{}^{4}_{2}\mathrm{He}$; ${}^{5}_{2}\mathrm{He} = {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2n$; ${}^{18}_{9}\mathrm{F} = {}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{2}_{1}\mathrm{H}$ и др. Волновая функция представляется в виде суперпозиции волновых функций различных связанных состояний нуклонных комплексов, учитывающих принцип Паули.

В разных моделях ядро представляется различными, часто взаимоисключающими системами нуклонов. И тем не менее, дополняя и видоизменяя ядерные характеристики, они позволяют сделать некоторые общие заключения о главном свойстве ядерной структуры. Таким свойством является существование в ядре независимых движений, подобных одночастичным. Это означает, что ядро похоже на вырожденный ферми-газ. Такой газ является идеальным, состоящим из частиц, подчиняющихся принципу Паули, и имеющим достаточно большую плотность. Энергия этого газа, определяющая его температуру kT, намного меньше кинетической энергии последнего заполненного состояния в ядре. По своим характеристикам ядерный газ похож на электронный газ в кристаллах. Однако такой газ сохраняет конечный объем и имеет постоянную плотность. Это позволяет говорить о подобии ядра кристаллу, с одной стороны, и жидкости — с другой. Следовательно, ядро представляет собой состояние вещества, имеющего общие черты с ферми-газом, ферми-жидкостью и твердым телом. Поскольку дальнодействующие кулоновские силы не являются существенными в ядре, а плотность нуклонов значительна, ядро не имеет свойств, делающих его похожим на плазму [27.3].

72.2. Модель жидкой капли

72.2.1. Обоснование модели. В модели жидкой капли ядро рассматривается как капля несжимаемой жидкости с очень большой плотностью ρ_N (70.40). На аналогию между ядром и жидкостью указывают следующие особенности ядерного вещества.

1. Объем ядра V_N согласно (70.34) пропорционален массовому числу A:

$$V_N = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R_0 A. \qquad (72.1)$$

Если считать, что объем, занимаемый одним нуклоном, равен $\frac{4}{3}\pi R_0^3$, то ядро представляет собой систему плотно упакованных A нуклонов.

2. Удельная энергия B/A [70.2.3] для ядер с $A \geqslant 16$ является почти постоянной и равной ~ 8 МэВ (рис. 70.4). Это означает, что для удаления из ядра n нуклонов нужно затратить энергию, равную kn (k — константа).

3. Нуклон-нуклонный потенциал (рис. 71.2) подобен потенциалу Ленард-Джонса [15.3], действующему между двумя молекулами. Последний на больших расстояниях убывает очень быстро (как r^{-6}), имеет минимум при $r = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см для молекул средней величины, а при малых расстояниях притяжения сменяется бесконечно большим отталкиванием.

72.2.2. Формула Вайцзеккера. Модель жидкой капли позволяет записать следующее полуэмпирическое выражение для энергии связи любого ядра, состоящего из A нуклонов (N нейтронов и Z протонов):

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} - a_e \frac{\delta}{A^{3/4}}, \qquad (72.2)$$

где наилучшее согласие с экспериментом дают следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_v &= 15{,}75 \text{ МэВ}, \\ a_s &= 17{,}8 \text{ МэВ}, \\ a_c &= 0{,}71 \text{ МэВ}, \\ a_a &= 23{,}7 \text{ МэВ}, \\ a_e &= 34 \text{ МэВ}, \end{aligned} \qquad \delta = \begin{cases} -1 \text{ для четно-четных ядер}, \\ 0 \text{ для нечетных ядер}, \\ +1 \text{ для нечетно-нечетных ядер}. \end{cases} \qquad (72.3)$$

Выражение (72.2) называется **формулой Вайцзеккера.** Первый член этой формулы связан с *объемной энергией* ядра, обусловленной ядерными силами насыщения, приводящими к формуле (72.1) для объема ядра. Это слагаемое не содержит эффектов кулоновского отталкивания протонов и влияния поверхности, поэтому описывает энергию связи ядерной материи [72.1]:

$$E_v = a_v A. \qquad (72.4)$$

В действительности в ядре часть нуклонов находится на поверхности. Они меньше подвержены воздействию со стороны других нуклонов, чем нуклоны в глубине ядра. Второй член в (72.2) называется *поверхностной энергией* E_s и учитывает уменьшение энергии связи ядра за счет его поверхности. Энергия E_s пропорциональна поверхности ядра

$$S_N = 4\pi R^2 = 4\pi R_0^2 A^{2/3} \quad \text{(для сферического ядра)} \qquad (72.5)$$

и равна

$$E_s = a_s A^{2/3}, \qquad (72.6)$$

где a_s — константа, которая, в принципе, пропорциональна a_v и толщине поверхностного слоя. Энергия E_s доминирует для легких ядер, у которых все нуклоны расположены на поверхности.

Третье слагаемое учитывает *кулоновскую энергию* E_c взаимодействия протонов. Это взаимодействие отталкивательное. Если заряд ядра считать равномерно распределенным по объему сферы, то в этом случае

$$E_c = \frac{3}{5}\frac{Z(Z-1)e^2}{R} = \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}}, \quad a_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{R_{0c}}, \qquad (72.7)$$

где в качестве радиуса эквивалентной сферы взято выражение $R = R_{0c}A^{1/3}$ с величиной $R_{0c} \geqslant R_0$, $R_{0c} = 1{,}46$ фм, учитывающей размытие границ ядра из-за действия кулоновских сил. Для легких ядер вклад E_c мал, так как сильное взаимодействие превышает электромагнитное. Его увеличение с ростом Z связано с бесконечным радиусом кулоновского взаимодействия, охватывающего весь объем тяжелого ядра, тогда как радиус действия ядерных сил нуклона ограничен величиной $\sim 1{,}5$ фм.

72.2.3. Линия стабильности. Четвертое слагаемое в (72.2) называется *энергией симметрии* E_a, возникающей в силу принципа Паули. Энергия E_a отражает стремление ядра сохранить приблизительно одинаковое число протонов и нейтронов по мере увеличения A, как у стабильных легких ядер. Особенность ядер с $1 \ll A \ll 16$ группироваться вблизи линии $N = Z$ называется *эффектом симметрии*. Рассматривая ядро как ядерный ферми-газ [72.3], описываемый уравнением Шредингера (71.2) с гамильтонианом (71.3), можно показать, что энергия симметрии E_a состоит из двух разных по своей природе частей — кинетической T и потенциальной V. Наиболее стабильными являются ядра, у которых T минимально.

Поскольку вклады кинетической и потенциальной энергий противоположны (первая имеет знак плюс, а вторая описывает притяжение нуклонов и имеет знак минус), то минимуму T соответствует максимум V. При фиксированном A минимум T наблюдается при $N = Z$. Отход от линии стабильности $N = Z$ (рис. 72.1) как в сторону избытка нейтронов, так и в сторону избытка протонов приводит к уменьшению энергии связи (за счет роста кинетической энергии T). Однако в действительности при $Z > 20$ наблюдается рост избытка нейтронов. Это объясняется тем, что к потенциальной яме V сильного взаимодействия добавляется потенциальная энергия кулоновского отталкивания протонов, которой в случае средних и тяжелых ядер пренебрегать нельзя.

Стремление сильного взаимодействия установить равенство $\frac{A}{2} = N = Z$ и противодействие со стороны кулоновских сил добиться условия $A = N$ приводит к тому, что наиболее связанное (стабильное к β-распаду) ядро для каждого A будет иметь атомный номер

$$Z = A/[2 + (a_c/2a_a)A^{2/3}] = A/[2 + 0{,}015A^{2/3}]. \qquad (72.8)$$

Кривая, описываемая уравнением (72.8), проходит через область наиболее стабильных ядер (изобар) для всех значений A. Коэффициент a_a и выражение (72.8) следуют из условия обращения в нуль производной:

$$\frac{\partial B(A, Z)}{\partial (N-Z)} = 0, \qquad (72.9)$$

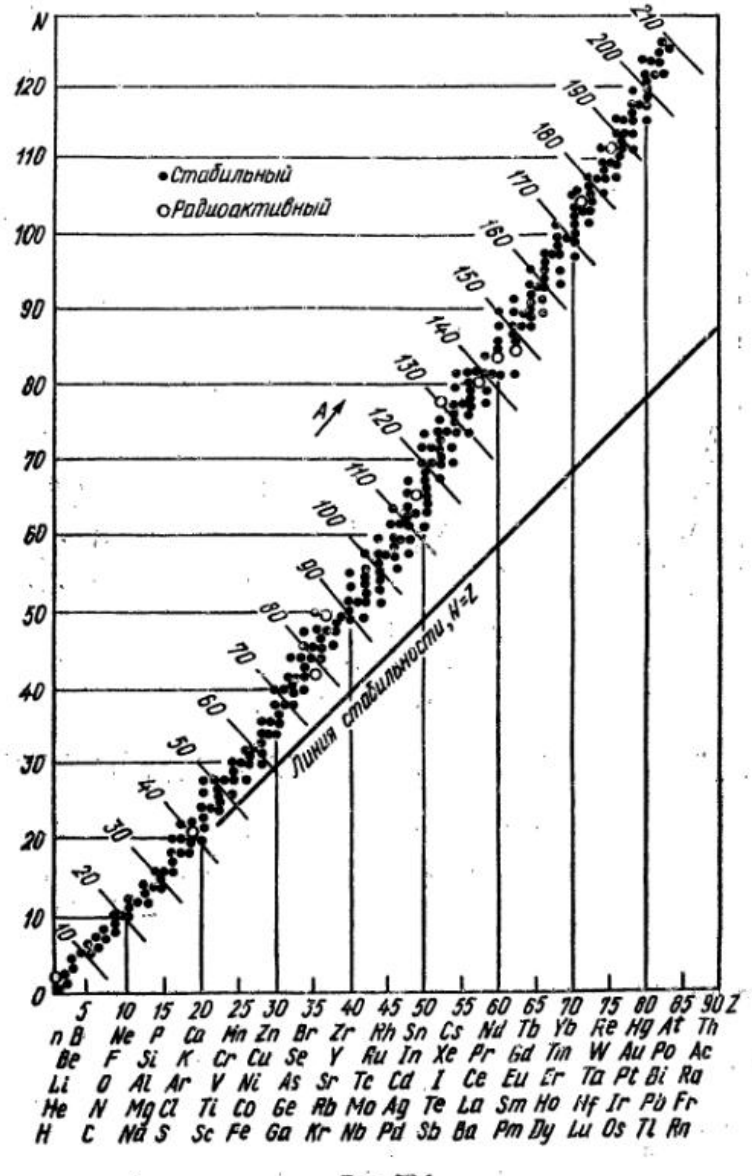


Рис. 72.1

где $B(A, Z)$ — энергия связи ядра (72.2), записанная в переменных A и $(N - Z)$. Числовые коэффициенты в (72.8) получаются при подстановке постоянных (72.3) в условие (72.9).

72.2.4. Бета-стабильность изобар. Последнее слагаемое в (72.2)

$$E_\delta = a_\delta \delta A^{-3/4} \tag{72.10}$$

связано с *энергией спаривания*. Оно вводится в формулу для энергии связи ядра для того, чтобы учесть отмечаемую в природе особую устойчивость четно-четных ядер по сравнению с нечетно-нечетными (стабильные изотопы последних встречаются в природе крайне редко). Его физическая природа заключается в *эффекте спаривания*, который состоит в том, что одинаковые нуклоны стремятся к образованию пар

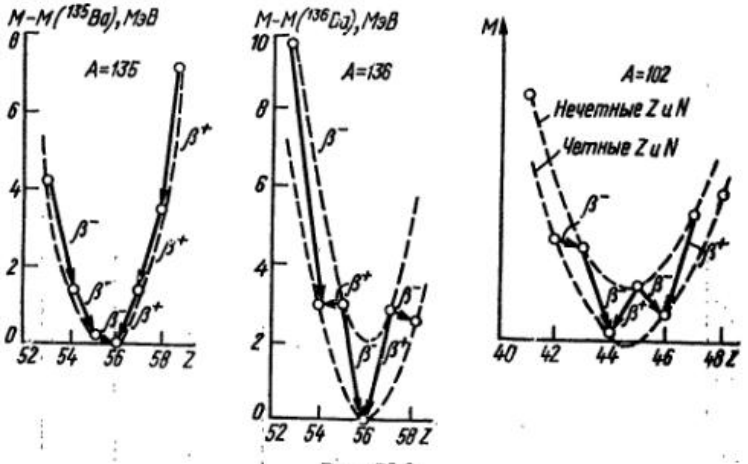


Рис. 72.2

в состояниях с нулевым относительным моментом. Так, на основании формулы Вайцзеккера (72.2) массу ядра (70.43) можно представить в виде

$$M(A, Z) = a_\delta Z^2 + b_\delta Z + c_\delta, \tag{72.11}$$

где a_δ, b_δ, c_δ — постоянные для данного δ (72.3), не зависящие от атомного номера Z, из которого следует, что массы изобар лежат на параболе. Для нечетных A имеем одну параболу, для четных A экспериментальные точки ложатся на две разные параболы: на нижней находятся четно-четные изобары, а на верхней — нечетно-нечетные. В количественном отношении различие парабол для четных A незначительное. На рис. 72.2 в качестве примера показана зависимость (72.11) для $A = 135$, $A = 136$ и $A = 102$. Из рис. 72.2 следует, что при $A = 135$ имеется лишь одно стабильное ядро — изобара $^{135}_{56}$Ba, тогда как при $A = 136$ их три $^{136}_{54}$Xe, $^{136}_{56}$Ba, $^{136}_{58}$Ce и все они четно-четные. Стрелками показаны цепочки β-распада ядер. Возможными оказываются β^-- и β^+-переходы. Ядра, лежащие на ветвях параболы, путем электронного (β^-) и позитронного (β^+) распада стремятся перейти в состояние с наименьшей энергией. Для $A = 135$ такой точкой является ядро $^{135}_{56}$Ba. Для $A = 136$ парабола для четно-четных ядер проходит ниже параболы

нечетно-нечетных изобар. Это означает, что первые из них имеют большую энергию связи и более устойчивы к β-распаду. Распады ядер $^{136}_{54}Xe$ и $^{136}_{58}Ce$ оказываются энергетически невыгодными. Аналогичные закономерности (рис. 72.2) наблюдаются для всех семейств изобар с четными и нечетными A [74.2.2].

74.2.5. Стабильность к испусканию тяжелых частиц. Формула масс (70.43) с энергией связи, вычисленной по формуле (72.2), позволяет сделать ряд общих заключений относительно способности ядер испускать тяжелые частицы. Энергетические условия для спонтанного (самопроизвольного) *испускания протонов* или *нейтронов ядрами* имеют вид

$$\begin{aligned} M(N, Z) &> M(N, Z-1) + m_p \quad \text{или} \quad (\partial M(N, Z)/\partial Z) > m_p, \\ M(N, Z) &> M(N-1, Z) + m_n \quad \text{или} \quad (\partial M(N, Z)/\partial N) > m_n, \end{aligned} \tag{72.12}$$

где $M(N, Z) \equiv M(A, Z)$ — масса ядра, имеющего N нейтронов и Z протонов, m_p и m_n — масса протона и нейтрона. На плоскости NZ эти уравнения определяют области, которые находятся от линии β-стабильности на нейтронно-избыточной и протонно-избыточной сторонах (рис. 72.3). Области нейтронной и протонной нестабильности пересекают линию β-стабильности только для очень больших значений A, которые в природе не встречаются. Это объясняет причину отсутствия радиоактивных ядер, испускающих протоны или нейтроны.



Рис. 72.3

Условие *испускания ядрами альфа-частицы* (α) имеет вид

$$M(N, Z) > M(N-2, Z-2) + M(2,2),$$

или

$$2\frac{\partial M}{\partial Z} + 2\frac{\partial M}{\partial N} > M(2,2) = \\ = 2m_p + 2m_n - 28 \text{ МэВ}, \tag{72.13}$$

где учтена энергия связи α-частицы $B(2, 2) = 28$ МэВ. Область α-нестабильности пересекает линию β-стабильности при $A \approx 150$. Самым легким α-активным ядром является ^{152}Sm. Естественные радиоактивные ряды начинаются с $A \approx 210$.

72.2.6. Возбужденные состояния. Ядра, как и атомы, имеют много возбужденных состояний. Нижние состояния могут быть объяснены возбуждением, т. е. переходом на более высокий энергетический уровень, одного нуклона. При сильном возбуждении в отличие от атома, где энергию возбуждения обычно несет один электрон, в ядре энергия возбуждения распределяется между всеми нуклонами. Для ядер, имеющих большое число нуклонов A, возбуждения могут быть описаны статистическими методами. При таком описании можно ввести понятие энтропии S [21.3]. Интерпретируя ее как логарифм вероятности реализации возбуждения в некотором интервале dE^* энергии возбуждения E^*, т. е. как логарифм числа состояний, имеющихся в интервале dE^*, можно записать

$$\rho(T) = \rho(0)\, e^{S/k}, \tag{72.14}$$

где $\rho(T)$ — плотность состояний при температуре ядра T, k — постоянная Больцмана. Температура ядра T определяется энергией возбуждения E^* и зависит от модели, принятой для описания ядерного вещества [72.3].

Модель жидкой капли есть модель конденсированного вещества. Поэтому возбужденные состояния здесь соответствуют колебаниям двух видов: объемные и поверхностные волны. Из-за большой плотности ядерного вещества его трудно сжать. Поэтому объемные волны имеют высокую частоту и большую энергию. При энергиях возбуждения порядка нескольких МэВ ими можно пренебречь. Оказывается, что в этом случае энтропия S и энергия возбуждения E^* связаны соотношением

$$S = \text{const}\, A^{2/7}\, E^{*4/7}, \tag{72.15}$$

откуда следует, что *плотность уровней*

$$\rho(T) \approx \exp(\text{const}\, A^{2/7}\, E^{*4/7}) \tag{72.16}$$

с увеличением A и E^* возрастает.

72.2.7. Деление ядер. Модель жидкой капли позволяет описать такое явление, как *деление ядра*. Возможность деления ядра на части является прямым следствием существования у него поверхностных колебаний. Если сферическое ядро испытывает деформацию, а плотность его не изменяется, то изменяются поверхностная E_s (72.6) и кулоновская E_c (72.7) энергии формулы Вайцзеккера (72.2). Величина E_s возрастает, поверхностные силы противодействуют деформации ядра. Энергия E_c уменьшается, электростатическое отталкивание увеличивает деформацию. Пусть R — радиус недеформированного сферического ядра, ε — параметр, характеризующий величину деформации. Пусть сфера радиусом R деформируется в эллипсоид (рис. 70.6) вдоль оси вращения с полуосями $c = R(1+\varepsilon)$ и $a = R/\sqrt{1+\varepsilon}$, при которых объем ядра сохраняется. Тогда

$$E_s = 17{,}8\, A^{2/3}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \cdots\right), \\ E_c = 0{,}71\, \frac{Z^2}{A^{1/3}}\left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \cdots\right). \tag{72.17}$$

Отсюда следует, что ядро нестабильно по отношению к делению, если

$$0{,}71 \cdot \frac{1}{5}\frac{Z^2}{A^{1/3}} > 17{,}8 \cdot \frac{2}{5} A^{2/3} \text{ или } \frac{Z^2}{A} > 50. \tag{72.18}$$

У β-стабильных ядер это неравенство выполняется для $Z \geqslant 120$ [73.3.5].

72.3. Модель ферми-газа

72.3.1. Энергия и импульс Ферми. В ядерной модели ферми-газа предполагается, что нуклоны свободно движутся в объеме

$$V = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A, \quad r_0 = 1{,}1 \text{ фм}. \tag{72.19}$$

Так как нуклоны подчиняются принципу Паули, т. е. являются фермионами [67.1.1], то в ядре они находятся в различных состояниях. Квантовая статистика дает следующее выражение для вероятности

того, что фермион будет находиться в состоянии с кинетической энергией E (рис. 72.4):

$$F(E) = \left[1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)\right]^{-1}, \qquad (72.20)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура термостата, с которым система фермионов находится в равновесии. Величина E_F определяет максимально возможную энергию фермиона и называется *энергией Ферми* системы. Если $E_F \gg kT$, то ферми-газ называется *вырожденным*. Это условие эквивалентно неравенству

$$n\lambda_T^3 \gg 1; \quad n \equiv \frac{N}{V}, \quad \lambda_T \equiv \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mkT}}, \qquad (72.21)$$

где n — число фермионов в единице объема, N — число фермионов в объеме V, λ_T — длина тепловой волны. Условие (72.21) означает, что ферми-газ вырожден, когда среднее расстояние между частицами газа много меньше длины тепловой волны λ_T, а это означает, что квантовые свойства такой системы существенны. Однако если $E_F \ll kT$, т. е. $n\lambda_T^3 \ll 1$, то систему фермионов можно описывать классическим распределением Максвелла [16.4.2]. Так, в типичном проводнике электроны представляют собой вырожденный ферми-газ, так как при нормальных условиях $n = 10^{23}$ электрон/см^3. $\lambda_T = 10^{-6}$ см и $n\lambda_T^3 \approx 10^5$. Напротив, водород при нормальной температуре ($T \approx 300$ К, $kT \approx 1/40$ эВ) и нормальном давлении ($p = 101{,}325$ кПа) характеризуется величинами $n \approx 3 \cdot 10^{19}$ атом/см^3, $\lambda_T \approx 2 \cdot 10^{-8}$ см, $n\lambda_T^3 \approx 2 \cdot 10^{-4}$, т. е. представляет собой классический газ.

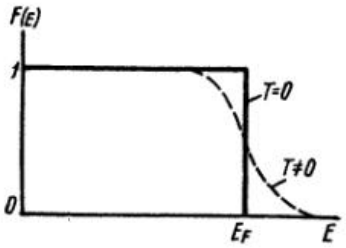


Рис. 72.4

В нерелятивистском приближении

$$E_F = p_F^2/2m, \qquad (72.22)$$

где m — масса фермиона, p_F — импульс Ферми. *Импульс Ферми* p_F определяется плотностью фермионов n (72.21). При $T = 0$К все состояния с $p < p_F$ заполнены, а с $p > p_F$ — свободны.

Пусть состояния фермионов характеризуются импульсом p. Объем элементарной ячейки в координатном пространстве ΔV характеризуется дебройлевской длиной волны фермиона и равен согласно (60.1) $\Delta V = h^3/\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$. Так как спин фермиона равен 1/2, то в каждую такую ячейку можно поместить не более двух частиц с разными проекциями спина $m_s = \pm 1/2$. Тогда в объеме V число ячеек $d\nu$, содержащих по два фермиона с импульсами от p до $p + dp$, будет

$$d\nu = 2V\frac{dp}{h^3} = 2V\frac{dp}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (72.23)$$

Величина dp/h^3 определяет число состояний в единице объема пространства импульсов. Интегрируя (72.23) от минимального $p = 0$ до максимально возможного $p = p_F$ импульса, находим полное число частиц N в системе при $T = 0$К:

$$N = \int_0^{p_F} 2V\frac{dp}{h^3} = 2\frac{V}{h^3}\int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3}Vp_F^3. \qquad (72.24)$$

Отсюда

$$p_F = h\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3} = \hbar\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} = \hbar(3\pi^2 n)^{1/3},$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}. \qquad (72.25)$$

72.3.2. Кинетическая энергия нуклонов. Ядро представляет собой смесь двух вырожденных ферми-газов: газа Z протонов и газа N нейтронов. Максимально возможные энергии протонов и нейтронов определяются соотношениями

$$E_F(p) = \frac{\hbar^2}{2m_p}\left(\frac{3\pi^2 Z}{V}\right)^{2/3}, \quad E_F(n) = \frac{\hbar^2}{2m_n}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}, \qquad (72.26)$$

где V — объем ядра (72.19). Если приближенно принять $Z = N = \frac{A}{2}$ (симметричный нуклонный газ), то получим

$$E_F(n) \approx E_F(p) \approx E_F(N) = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}\left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3}, \quad E_F(n) \approx 37 \text{ МэВ}, \qquad (72.27)$$

где $m \approx 2000\, m_e$, m_e — масса электрона. Опыт показывает, что плотность ядерного вещества $\rho = \frac{A}{V}$ практически одинакова для всех ядер. Для симметричного нуклонного газа

$$\rho = \frac{16\pi}{3h^3}p_F^3, \qquad (72.28)$$

т. е. значение p_F одинаково для разных ядер и определяет границу между заполненными и незаполненными состояниями. Нуклон с импульсом p_F наименее прочно связан в ядре по сравнению с другими нуклонами. Из опытов по фоторасщеплению известно, что энергия связи наименее связанного нуклона (нейтрона), равная потенциалу ионизации (для атома см. [65.2.2]), в среднем для тяжелых ядер равна $S_n \approx 8$ МэВ. Поэтому притяжение между отдельными парами нуклонов в модели ферми-газа заменяется общей потенциальной ямой (рис. 72.5) глубиной $V_0 = E_F(N) + S_n \approx 45$ МэВ.

Полная кинетическая энергия нейтронов в ядре

$$T(N) = \int_0^{p_F} \frac{p^2}{2m_n}\cdot 2\frac{V}{h^3}4\pi p^2 dp = \frac{3}{5}NE_F(n) = \text{const}\,\frac{N^{5/3}}{A^{2/3}}. \qquad (72.29)$$

Аналогично определяется кинетическая энергия протонов. Для полной кинетической энергии нуклонов имеем

$$T(A) = \frac{3}{5}[NE_F(n) + ZE_F(p)] = \text{const}\,\frac{1}{A^{2/3}}[N^{5/3} + Z^{5/3}]. \qquad (72.30)$$

Средняя кинетическая энергия на нуклон при $N = Z$

$$T(A)/A \approx \frac{3}{5} E_F \approx 22 \text{ МэВ} \qquad (72.31)$$

согласуется с оценками других подходов.

В реальном ядре нуклонный газ является *несимметричным* из-за действия электростатического отталкивания между протонами. Протонный и нейтронный газы заключены в двух разных потенциальных ямах, а их уровни энергии различны (рис. 72.6,. Если ядро стабильно по отношению к β-распаду, то уровни заполнены до одной и той же высоты. Если это не так, то с помощью последовательной цепи β-распадов установится указанное равенство высот. Так как глубина нейтронной ямы больше протонной, то у стабильного ядра имеется избыток нейтронов. Кинетическая энергия нейтронного газа $T(N)$ отличается от кинетической энергии протонного газа $T(Z)$. Полная энергия (72.30) больше, чем при $Z = N$.

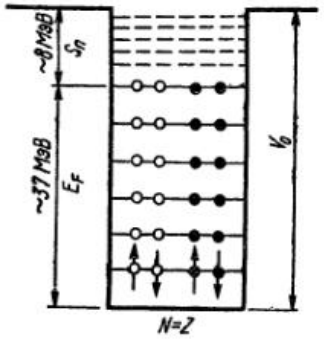


Рис. 72.5

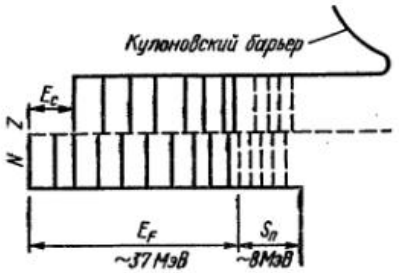


Рис. 72.6

72.3.3. Возбужденные состояния. Нуклоны, ответственные за возбужденное состояние ядра [72.2.5], не входят в состав ферми-газа. Они взаимодействуют с нуклонами ферми-газа тем сильнее, чем больше энергия возбуждения. По этой причине высоковозбужденные состояния ядер являются многочастичными состояниями. Энергия возбуждения распределяется здесь среди большого числа нуклонов. Для ферми-газа, состоящего из A нуклонов, энергия возбуждения E^* пропорциональна квадрату температуры T системы (ядра):

$$E^* = \frac{\pi^2}{4} A \frac{(kT)^2}{E_F} \approx \text{const } AT^2. \qquad (72.32)$$

Энтропия [21.3] ядра имеет вид

$$S = \int_0^T \frac{dE^*}{T} = \text{const} \sqrt{AE^*}. \qquad (72.33)$$

Поэтому плотность состояний $\rho(T)$ (72.14) в модели ферми-газа описывается формулой

$$\rho(T) \approx \exp(\text{const} \sqrt{AE^*}). \qquad (72.34)$$

Такая зависимость качественно подтверждается тем, что тяжелые ядра в среднем имеют большую плотность возбужденных состояний,

которая возрастает с энергией. Экспериментально плотность состояний ядра (ядерных уровней) определяется по изучению резонансного рассеяния нейтронов и анализу спектров испарения частиц при неупругом рассеянии нейтронов на ядрах [73.3.1].

72.4. Оболочечная модель ядра

72.4.1. Магические числа. Опыт показывает, что наибольшей устойчивостью и распространенностью в природе обладают ядра с числом протонов Z или нейтронов N, равным

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. \qquad (72.35)$$

Наиболее распространены ядра: $^4_2$He, $^{16}_8$O, $^{40}_{20}$Ca, $^{48}_{20}$Ca, $^{208}_{82}$Pb, $^{60}_{28}$Ni, $^{88}_{38}$Sr, $^{90}_{40}$Zr, $^{120}_{50}$Sn, $^{138}_{56}$Ba, $^{140}_{58}$Ce.

На рис. 72.7 показана относительная распространенность ядер. Условились распространенность H ядра Si принять равной 10^6. *Числа* (72.35) получили название *магических*. *Ядро*, у которого N или Z равно магическому числу, называют *магическим*. Если оба числа N и Z магические, то такое *ядро* называется *дважды магическим* (их всего пять: $^4_2$He, $^{16}_8$O, $^{40}_{20}$Ca, $^{48}_{20}$Ca, $^{208}_{82}$Pb).

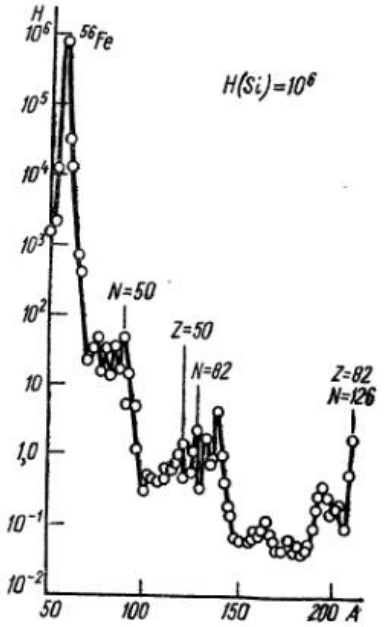


Рис. 72.7

Исследования процессов рассеяния и реакций, обусловленных фотонами, протонами, дейтронами и медленными (тепловыми) нейтронами, показали, что магические ядра характеризуются аномально малыми сечениями по сравнению с соседними ядрами и при взаимодействиях ведут себя подобно инертным газам [67.5]. У ядер при переходе числа протонов через магические числа изменяется величина и даже знак квадрупольного момента (табл. 70.3). Энергии первых возбужденных состояний E_1 ядер (рис. 72.8) имеют ярко выраженную периодическую зависимость от массового числа A. Максимумы наблюдаются у ядер с числом нуклонов, равным (72.35). Магические ядра выделены также и энергией отделения нуклонов S_p, S_n — у магических ядер она максимальна (рис. 72.9).

Периодические изменения свойств ядер и особенности магических ядер позволяют сделать вывод о том, что в ядрах аналогично атомам [67.5] существуют *замкнутые оболочки*. То, что магические числа (72.35) не совпадают с порядковыми номерами инертных газов, свидетельствует об отличном от атомного порядке заполнения оболочек в ядре, обусловленном особенностями ядерных сил.

72.4.2. Одночастичная оболочечная модель. В основе *оболочечной модели ядра* лежит допущение о том, что реальные силы, действующие между нуклонами, при начальном рассмотрении (т. е. в первом приближении) можно заменить общим для всех нуклонов полем ядерных

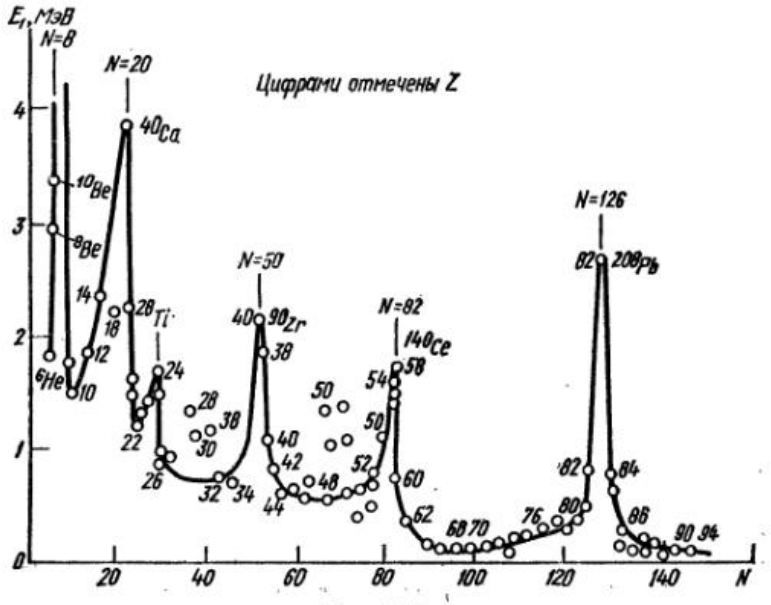


Рис. 72.8

сил. Это *поле* описывается потенциалом, усредненным по всему распределению ядерного вещества, поэтому называется *средним* или *самосогласованным*. Наличие самосогласованного поля предполагает, что нуклоны, подчиняясь принципу Паули, движутся независимо один от другого в некотором среднем поле, которое они сами создают. В такой модели независимых частиц в первом приближении взаимодействие нуклона с остальными $(A-1)$ нуклонами можно рассматривать как движение этого нуклона в некоторой потенциальной яме $U(\mathbf{r})$.

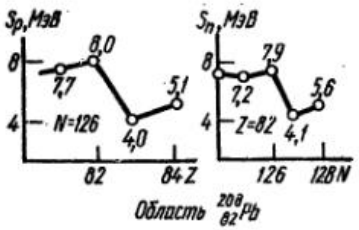


Рис. 72.9

Физическое обоснование модели независимых частиц состоит в том, что нуклоны, занимающие в невозбужденном ядре все наиболее низкие из возможных энергетических состояний, из-за действия принципа Паули не могут между собой обмениваться энергией. В противном случае после такого взаимодействия одни нуклоны должны перейти в незаполненные ранее состояния, а другие — опуститься ниже тех состояний, которые они занимали до взаимодействия, что невозможно. Поэтому если все нижайшие энергетические состояния заполнены, то средняя длина свободного пробега нуклона неограниченно возрастает.

Исследование зависимости длины свободного пробега нейтрона в ядерном веществе от энергии (с учетом принципа Паули) показало, что пробег нейтрона в несколько раз превышает размеры ядра. Длина L свободного пробега нейтрона в ядерном веществе дается формулой

$$L=\frac{1}{\eta}, \quad \eta=N\frac{Z\sigma_{np}+(A-Z)\,\sigma_{nn}}{A}f(E),$$

$$f(E)=1-\frac{7}{5}\frac{E_F}{E}+\frac{2}{5}\frac{E_F}{E}\left(2-\frac{E}{E_F}\right)^{5/2}, \qquad (72.36)$$

где E_F — энергия Ферми [72.3.1] для нуклона в ядре, E — энергия относительного движения нейтрона и нуклона ядра, σ_{np} и σ_{nn} — эффективные сечения рассеяния [64.4] нейтрона на свободных протоне и нейтроне. Величина η называется *коэффициентом поглощения нейтронов* в ядре. Функция $f(E)$ учитывает влияние принципа Паули для не очень больших относительных энергий E.

Таким образом, в модели оболочек энергия ядра E представляет собой сумму одночастичных энергий нуклонов E_α, а волновая функция ядра Ψ — антисимметризованное произведение (детерминанта Слэтера (67.9)) одночастичных функций Ψ_α:

$$E=\sum_{\alpha=1}^{A}E_\alpha, \quad \Psi(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_A)=\frac{1}{A!}\sum_{\nu}(-1)^\nu\hat{P}_\nu\prod_{\alpha=1}^{A}\Psi_\alpha(\mathbf{r}_\alpha), \quad (72.37)$$

где $\hat{P}_\nu$ — оператор перестановки частиц пары ν [67.1.1], а зависимость от спиновых переменных S_α нуклонов не указана в явном виде для простоты записи. Собственные значения E_α и собственные функции Ψ_α находятся из решения уравнения Шредингера

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+U(\mathbf{r})-E_\alpha\right)\Psi_\alpha(\mathbf{r})=0, \qquad (72.38)$$

где потенциал $U(\mathbf{r})$ описывает самосогласованное поле и для равновесной сферической формы ядра имеет вид

$$U(\mathbf{r})=V(r)-\lambda\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2\left(\frac{1}{r}\frac{dV(r)}{dr}\right)\mathbf{l}\mathbf{S}+V_c(r). \qquad (72.39)$$

Здесь $V(r)$ — центральная часть среднего потенциала, $\mu=m(A-1)\times\times m/mA\approx m$ — приведенная масса, m — масса нуклона, $\mathbf{l}$ — орбитальный момент нуклона, $\mathbf{S}$ — его спин, λ — постоянная спин-орбитального взаимодействия [66.4.1]. Вследствие короткодействующего характера ядерных сил потенциал $V(r)$ должен приближенно иметь ту же радиальную зависимость, что и плотность ядерного вещества [70.2.2]. Для средних и тяжелых ядер он хорошо аппроксимируется *потенциалом Вудса — Саксона*

$$V(r)=-\frac{V_{0N}}{1+\exp\left((r-R)/a\right)}, \qquad (72.40)$$

вид которого следует из распределения Ферми (70.27). Величины V_{0N}, R и a — подгоночные параметры, которые подбираются так, чтобы

наилучшим образом (для данного потенциала) описать экспериментальные данные. Обычно полагают

$$V_{0p} = V_0\left(1 + 0{,}63\,\frac{N-Z}{A}\right), \quad V_{0n} = V_0\left(1 - 0{,}63\,\frac{N-Z}{A}\right),$$
$$V_0 \approx 50 \text{ МэВ}, \; R = r_0 A^{1/3}, \; r_0 \approx 1{,}3 \text{ фм}, \; a \approx 0{,}684 \text{ фм}, \qquad (72.41)$$
$$\lambda\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \equiv 0{,}263\left(1 + 2\,\frac{N-Z}{A}\right) \text{ фм}^2.$$

Различие параметров V_{0p} и V_{0n} объясняется тем, что энергия np-взаимодействия в среднем превышает энергию nn- и pp-взаимодействий. Самосогласованный потенциал (72.40) является суммой взаимодействий одного из нуклонов p или n со всеми остальными. Так как в ядрах с $A > 20$ наблюдается избыток нейтронов, $N > Z$ (рис. 72.1), то $V_{0p} > V_{0n}$, что и отражено в эмпирических формулах (72.41). Из эксперимента следует, что для большинства ядер $\lambda \approx 10$. У легких ядер потенциал $V(r)$ близок к осцилляторному

$$V(r) = -V_0'[1 - (r/R)^2] = -V_0' + \frac{1}{2}\,\mu\omega_0^2 r^2, \; \omega_0 = \sqrt{\frac{2V_0'}{\mu R^2}}, \qquad (72.42)$$

где V_0' — глубина ядерного потенциала при $r = 0$, R — радиус осцилляторной ямы, определяемый условием $V(R) = 0$. Из экспериментальных данных следует, что

$$\hbar\omega_0 \approx 41\,A^{-1/3} \text{ МэВ}. \qquad (72.43)$$

Существенным является то обстоятельство, что средний потенциал $U(r)$ ядра зависит от взаимной ориентации спинового S и орбитального l моментов импульса нуклона. Нуклон притягивается к $(A-1)$ нуклону сильнее, когда его спин S направлен в ту же сторону, что и орбитальный момент l. Это является прямым следствием того, что нуклон-нуклонное взаимодействие V_{NN} (71.4) существенным образом зависит не только от взаимной ориентации спинов нуклонов, но и от их относительного импульса, т. е. содержит спин-орбитальное слагаемое. Спин-орбитальное взаимодействие в ядре со средним полем $U(r)$ (72.39) представляет собой усредненное значение потенциала парного спин-орбитального взаимодействия нуклонов. Включение в $U(r)$ спин-орбитального взаимодействия является принципиальным. По своей природе оно отличается от атомного спин-орбитального взаимодействия [66.4.1]. В последнем случае это взаимодействие является релятивистской поправкой. В ядре оно вносит вклад, сравнимый с вкладом центральной части $V(r)$. Конкретный расчет показывает, что без учета спин-орбитального взаимодействия в среднем потенциале ядра нельзя описать все магические числа (72.35).

Слагаемое $V_c(r)$ в (72.39) есть самосогласованный кулоновский потенциал. Для нейтронных состояний $V_c(r) = 0$. Для протонных состояний его выбирают в виде энергии взаимодействия точечного протона с равномерно заряженным шаром радиусом $R_c = r_{0c}A^{1/3}$ и заряда $(Z-1)e$:

$$V_c(r) = \begin{cases} \dfrac{(Z-1)\,e^2}{R_c}\left[\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{R_c}\right)^2\right] & \text{при } r < R_c = r_{0c}A^{1/3}, \\ \dfrac{(Z-1)\,e^2}{R_c} & \text{при } r > R_c = r_{0c}A^{1/3}. \end{cases} \qquad (72.44)$$

На рис. 72.10 в качестве примера показана схема уровней дважды магического ядра $^{208}_{82}Pb$, рассчитанная на основе решения уравнения (72.38) с потенциалом (72.39), (72.40), (72.44) и параметрами

$$V_{0p} = 58 \text{ МэВ}, \; V_{0n} = 44 \text{ МэВ}, \; R = 1{,}27\,A^{1/3}, \; a = 0{,}661 \text{ фм}, \; \lambda = 16. \qquad (72.45)$$

Расчеты хорошо согласуются с экспериментально наблюдаемой схемой уровней.

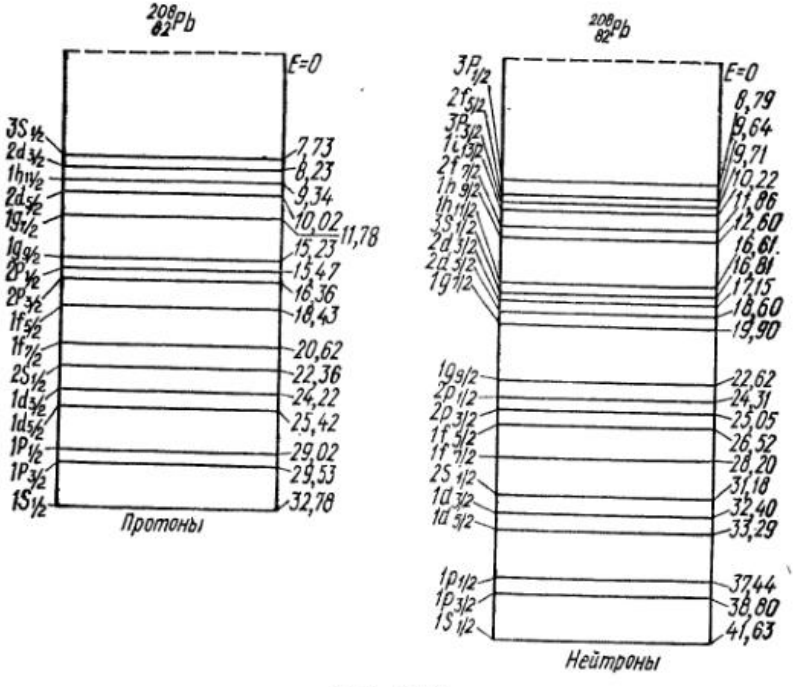


Рис. 72.10

Одночастичная оболочечная модель дает представления о магнитных [70.2.5] и квадрупольных [70.2.6] моментах ядер, их спине и четности.

72.4.3. Классификация одночастичных состояний. Классификацию ядерных энергетических уровней осуществляют так же, как и в атомной физике при наличии спин-орбитальной LS-связи [66.4.1]. Волновые функции $\Psi_\alpha(r)$ в (72.38) являются собственными функциями операторов: j^2 — квадрата полного момента импульса нуклона $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{S}$, j_z — его проекции на ось квантования (ось z), l^2 — квадрата орбитального момента, S^2 — квадрата спинового момента. Их собственные значения

$$|\mathbf{j}^2| = \hbar j(j+1), \; j_z = \hbar m_j, \; |\mathbf{l}^2| = \hbar l(l+1), \; |\mathbf{S}^2| = \hbar s(s+1) \qquad (72.46)$$

определяют совокупность квантовых чисел l, j, m_j, s, характеризующих состояние нуклона в потенциальной яме (72.39). Поэтому волновую функцию $\Psi_\alpha(\mathbf{r})$ можно представить в виде произведения

$$\Psi_\alpha \equiv \Psi_{nljm_j} = R_{nlj}(r)\, \mathcal{Y}_{l\frac{1}{2}jm_j}(\theta, \varphi), \qquad (72.47)$$

где спин-угловая функция

$$\mathcal{Y}_{ls jm_j} = \sum_{m+m_s=m_j} (lms m_s \mid j m_j)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)\, \chi_{sm_s} \qquad (72.48)$$

является собственной функцией состояния, в котором полный момент количества движения j и его проекция m_j имеют определенные значения. В этом состоянии определенные значения имеют также квадраты орбитального и спинового моментов (72.46). Величины $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ есть сферические функции (66.13), χ_{sm_s} — спиновая функция нуклона со спином $s = 1/2$ и проекцией m_s, $(lms m_s \mid j m_j)$ — так называемые *коэффициенты Клебша — Гордана*, определяющие вес состояний с различными m и m_s в волновой функции нуклона Ψ_α. Числовые значения коэффициентов Клебша — Гордана приводятся в справочниках в виде таблиц, соответствующих различным значениям l и j.

Радиальная волновая функция $R_{nlj}(r)$ при наличии спин-орбитального взаимодействия удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dr^2} R_{nlj} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} R_{nlj} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E_{nlj} - V(r) - V_c(r) + \frac{a_{lj}}{r}\frac{dV(r)}{dr} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2}\right] R_{nlj} = 0, \qquad (72.49)$$

где

$$a_{lj} = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \begin{cases} l & \text{при } j = l + 1/2, \\ -(l+1) & \text{при } j = l - 1/2. \end{cases} \qquad (72.50)$$

Так как коэффициент a_{lj} зависит от полного момента j, то вырождение уровней энергии по j снимается (рис. 72.11). Уровни энергии нуклона E_{nlj} зависят от трех квантовых чисел n, l, j. Квантовое число n равно числу нулей радиальной волновой функции $R_{nlj}(r)$ (без учета нуля при $r = 0$). Оно нумерует расположение уровней при одном и том же l, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Чем больше n, тем выше лежит уровень.

Для осцилляторного потенциала (72.42) решение уравнения (72.49) дается следующей формулой, описывающей нейтронные уровни энергии в ядре:

$$E_{nlj} = -V_0 + \left(N + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega - a_{lj}\mu\omega^2, \quad N = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (72.51)$$

где $N = 2(n-1) + l$ называется *главным квантовым числом*.

Различные состояния обычно обозначают с помощью символа nl_j, как в спектроскопии (66.21). Например: запись $1s^3_{1/2}$ означает, что три нуклона находятся в состоянии с $n = 1$, $l = 0$, $j = 1/2$; $2d_{5/2}$ — один

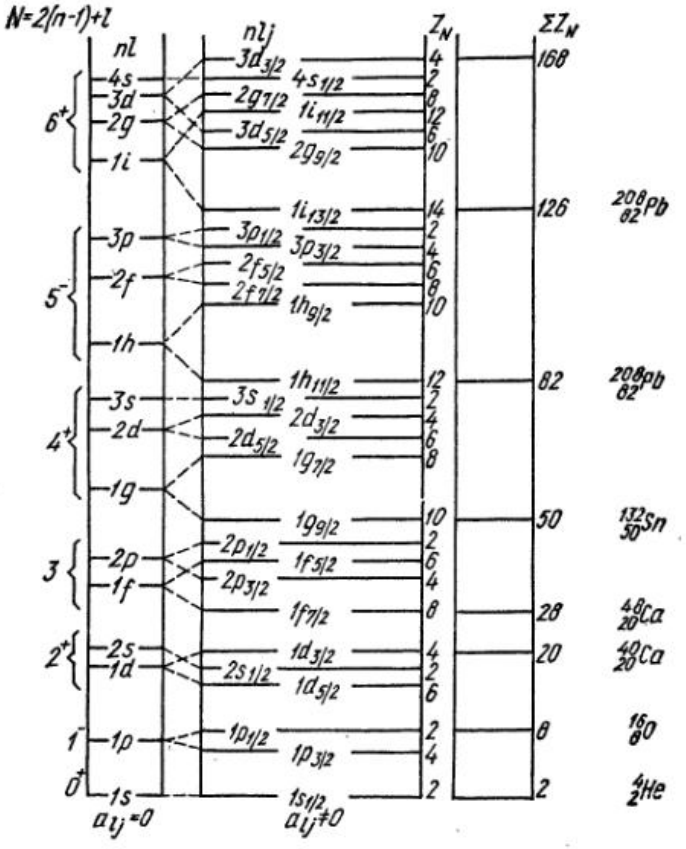


Рис. 72.11

нуклон находится в состоянии $n = 2$, $l = 2$, $j = 5/2$; $1i^{12}_{11/2}$ — двенадцать нуклонов находятся в состоянии с $n = 1$, $l = 6$, $j = 11/2$ и т. п.

Совокупность близких по энергии уровней, разделенных энергетическими интервалами, значительно превышающими расстояния между ними, в ядерной физике принято называть *оболочкой*. Магическими, с точки зрения модели оболочек, являются ядра, у которых полностью заполнены либо протонные, либо нейтронные оболочки.

Порядок заполнения ядерных оболочек определяется тремя факторами: 1) резким увеличением энергии уровня с ростом n за счет быстрого спадания потенциала $U(\mathbf{r})$ (72.39) с расстоянием; 2) уменьшением энергии уровня с ростом l за счет увеличения кинетической центробежной энергии $\frac{\hbar^2 l^2}{2m}\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nlj}$, соответствующей только орбитальному движению нуклона; 3) расщеплением уровня (nl) на два состояния: с $j = l + 1/2$ (ниже лежащее) и $j = l - 1/2$ (выше лежащее) за счет спин-орбитального взаимодействия.

Эмпирическая схема одночастичных уровней нуклона показана на рис. 72.11. Главное квантовое число N нумерует оболочки, Z_N — число нуклонов данного сорта, т. е. нейтронов или протонов, на данном уровне, ΣZ_N — полное число нуклонов данного сорта на замкнутой оболочке. Нуклонные конфигурации для легких ядер ($3 \leqslant A \leqslant 25$) приведены в табл. 72.1. Здесь же приведены спины J и четности π, согласующиеся с моделью оболочек.

Таблица 72.1. **Нуклонные конфигурации легких ядер (J^π — спин ядра и четность, μ — магнитный момент ядра в единицах ядерного магнетона μ_N (70.6))**

Ядро	J^π	μ/μ_N	Нуклонная конфигурация
^{3}H	$\frac{1^+}{2}$	2,97	$1s^3_{1/2}$
^{3}He	$\frac{1^+}{2}$	—2,13	$1s^3_{1/2}$
^{4}He	0^+	0	$1s^4_{1/2}$
^{6}Li	1^+	0,82	$1s^4_{1/2}2s^2_{1/2}$
^{7}Li	$\frac{3^-}{2}$	3,26	$1s^4_{1/2}1p^3_{3/2}$
^{9}Be	$\frac{3^-}{2}$	—1,17	$1s^4_{1/2}1p^5_{3/2}$
^{10}B	3^+	1,80	$1s^4_{1/2}1p^6_{3/2}$
^{12}C	0^+	0	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}$
^{13}C	$\frac{1^-}{2}$	0,70	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p_{1/2}$
^{14}N	1^+	0,40	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^2_{1/2}$
^{15}N	$\frac{1^-}{2}$	—0,28	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^3_{1/2}$
^{16}O	0^+	0	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^4_{1/2}$
^{17}O	$\frac{5^+}{2}$	—1,89	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^4_{1/2}1d_{5/2}$
^{19}F	$\frac{1^+}{2}$	2,63	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^4_{1/2}2s^3_{1/2}$
^{20}Ne	0^+	0	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^4_{1/2}2s^4_{1/2}$
^{22}Na	3^+	2,75	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^4_{1/2}2s^4_{1/2}2p^2_{1/2}$
^{25}Mg	$\frac{5^+}{2}$	—0,85	$1s^4_{1/2}1p^8_{3/2}1p^4_{1/2}1d^9_{5/2}$

Первая оболочка имеет 2 состояния $1s_{1/2}$. На ней могут разместиться два нуклона каждого сорта (нейтрона или протона) в соответствии с двумя возможными проекциями спина $\pm 1/2$. Все протонные и нейтронные состояния $1s_{1/2}$ заполнены в ядре гелия $^4_2$He.

Вторая оболочка имеет 4 состояния $1p_{3/2}$ и 2 состояния $1p_{1/2}$. На ней может разместиться 6 нуклонов одного сорта. Эта оболочка заполняется полностью, когда общее число таких нуклонов (с учетом двух в $1s_{1/2}$ состоянии) равно 8. Нейтронная и протонная $1p$-оболочка заполнена у ядра кислорода $^{16}_8$O.

Третья оболочка имеет 6 состояний $1d_{5/2}$, 2 состояния $2s_{1/2}$ и 4 состояния $1d_{3/2}$. На ней может разместиться 12 нуклонов одного сорта. Эта оболочка заполняется, когда общее число таких нуклонов (с учетом 8 на второй оболочке) равно 20. Третья оболочка замкнута по протонам и нейтронам у ядра кальция $^{40}_{20}$Ca.

Четвертая оболочка имеет 8 состояний $1f_{7/2}$, 4 состояния $2p_{3/2}$, 6 состояний $1f_{5/2}$, 2 состояния $2p_{1/2}$, 10 состояний $1g_{9/2}$. Состояния $1f$ выделены в отдельную подоболочку, так как у них $l = 3$ и величина a_{lj} значительна. Эта подоболочка заполнена по нейтронам у ядра $^{48}_{20}$Ca. Всего на четвертой оболочке имеется 30 нуклонов одного сорта. Поэтому в ядре с замкнутой оболочкой находится 50 таких нуклонов. Заполненная по протонам и нейтронам четвертая оболочка у ядра $^{132}_{50}$Sn. Это ядро имеет слишком много нейтронов и потому нестабильно.

Пятая оболочка содержит 8 состояний $1g_{7/2}$, 6 состояний $2d_{5/2}$, 4 состояния $2d_{3/2}$, 2 состояния $3s_{1/2}$, 12 состояний $1h_{11/2}$. Эта оболочка заполняется 82 нуклонами одного сорта. Заполненная пятая оболочка по протонам у ядра $^{208}_{82}$Pb.

Шестая оболочка имеет 10 состояний $1h_{9/2}$, 8 состояний $2f_{7/2}$, 6 состояний $2f_{5/2}$, 4 состояния $3p_{3/2}$, 2 состояния $3p_{1/2}$, 14 состояний $1i_{13/2}$, на которых можно разместить 44 нуклона одного сорта. Эта оболочка по нейтронам заполняется у ядра $^{208}_{82}$Pb.

Вопрос о существовании других оболочек у ядер пока остается открытым. Из теоретических оценок следует, что с увеличением массового числа A эффекты, связанные с формированием оболочек, должны уменьшаться.

72.5. Обобщенная модель ядра

Опыт показывает, что у большинства ядер кроме одночастичных степеней свободы, описываемых оболочечной моделью [72.4], проявляются также и коллективные степени свободы. Это подтверждается величинами квадрупольных моментов ядер [70.2.6], а также наличием возбужденных состояний, отвечающих вращательным и колебательным модам коллективных движений в ядре. Так называемая *обобщенная модель ядра* объединяет оболочечную [72.4] и капельную [72.2] модели в одну и рассматривает ядро с точки зрения представления о независимости движения отдельных нуклонов в медленно изменяющемся самосогласованном поле. При этом степени свободы, связанные с движением одного или нескольких слабосвязанных нуклонов в самосогласованном поле, учитываются, как в оболочечной модели, а коллективные степени свободы, связанные с изменением формы и ориентации ядра

в пространстве, учитываются так же, как в капельной модели. Обычно предполагают, что внутреннее и коллективное движения разделяются и, следовательно, могут быть рассмотрены независимо. Это означает, что в первом приближении волновую функцию Ψ любого состояния ядра можно представить в виде произведения

$$\Psi = \psi_{вн}\, \Phi_{кол}\, D_{вр},$$

где $\psi_{вн}$ — внутренняя волновая функция ядра, описывающая движение отдельных нуклонов, $\Phi_{кол}$ — волновая функция, связанная с изменением формы ядра без изменения его плотности, $D_{вр}$ — функция вращения ядра как целого при постоянной форме.

72.5.1. Поверхностные колебания сферических ядер. Расстояние от центра ядра до его поверхности в направлении полярных углов θ и φ [2.1.2], отсчитываемых в лабораторной системе координат, можно характеризовать величиной $R(\theta, \varphi)$, которая в случае отличия поверхности от сферической является функцией θ и φ. Эту функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (66.13):

$$R(\theta, \varphi) = R\left\{1 + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \alpha_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)\right\}, \qquad (72.52)$$

где R — радиус равновеликой сферы, величины α_{lm} называются *параметрами деформации*, характеризующими форму ядра. Они удовлетворяют условиям

$$a_{lm} = (-1)^m a^*_{l-m}, \quad \alpha_{00} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l,m} |\alpha_{lm}|^2, \qquad (72.53)$$

первое из которых следует из вещественности $R(\theta, \varphi)$, а второе — из условия сохранения объема (несжимаемости ядерного вещества). Поверхностные деформации характеризуются конечным числом параметров α_{lm}. Так как линейные размеры элемента поверхности должны быть больше среднего расстояния между нуклонами, то число l ограничено условием $l < A^{1/3}$. Если α_{lm} не зависят от времени, то формула (72.52) описывает постоянную деформацию ядра. Условие (72.53) несжимаемости ядра означает, что α_{00} можно не учитывать. При малых деформациях α_{00} есть величина второго порядка малости по сравнению с коэффициентами α_{lm}. Слагаемые с $l = 1$ описывают деформации со смещением центра масс ядра как целого. Поэтому их можно не учитывать, положив $\alpha_{1m} = 0$. Слагаемые с $l = 2$ описывают *квадрупольную или эллипсоидальную деформацию*, $l = 3$ — *октупольную деформацию* и т. д. В случае небольших отклонений от сферической формы параметры α_{lm} — малые величины. Если они зависят от времени, то энергия поверхностных колебаний ядра имеет вид

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \{B_l |\dot{\alpha}_{lm}|^2 + C_l |\alpha_{lm}|^2\}, \quad l \geqslant 2, \qquad (72.54)$$

где первая сумма описывает ее кинетическую, а второе слагаемое — потенциальную части, постоянная B_l называется *массовым коэффициентом*, а C_l — *коэффициентом деформации*. Вид B_l и C_l задается моделью ядерного вещества. Если ядро рассматривать как каплю идеальной несжимаемой жидкости с равномерным распределением заряда по объему, то

$$B_l = \frac{\rho}{l} R^5, \quad R = R_0 A^{1/3},$$

$$C_l = (l-1)(l+2)\sigma R^2 - \frac{3}{2\pi}[(l-1)/(2l+1)]\frac{Z^2e^2}{R}, \qquad (72.55)$$

где ρ — плотность ядерного вещества, σ — коэффициент поверхностного натяжения, определяющий коэффициент a_s поверхностной энергии (72.6) формулы Вайцзеккера (72.2):

$$a_s = 4\pi\sigma R_0^2.$$

Из (72.55) следует, что в результате конкуренции между поверхностной и кулоновской энергиями в потенциальной энергии формулы (72.54) ядро, имеющее сферическую равновесную форму, будет устойчивым относительно деформаций, если $C_l > 0$, т. е.

$$(l+2)\sigma R^2 > \frac{3}{2\pi}\frac{Z^2e^2}{(2l+1)R}. \qquad (72.56)$$

Для квадрупольной деформации ($l = 2$) условие устойчивости ядра по отношению к малым деформациям принимает вид $Z^2/A < 48$. Опыт показывает, что это условие выполняется для всех известных ядер.

Формула (72.54) описывает энергию колебания поверхности ядра с точки зрения классической физики. Здесь в качестве коллективных переменных выбраны параметры α_{lm}. Переход от (72.54) к квантовому оператору Гамильтона $\hat{H}$ осуществляется введением операторов обобщенных импульсов

$$\pi_{lm} \equiv \partial E/\partial\dot{\alpha}_{lm} = B_l\dot{\alpha}^*_{lm}, \qquad (72.57)$$

канонически сопряженных координатам α_{lm}:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{l,m}\left\{\frac{1}{B_l}|\pi_{lm}|^2 + C_l|\alpha_{lm}|^2\right\}. \qquad (72.58)$$

При этом постулируется, что между операторами π_{lm}, α_{lm} выполняются следующие перестановочные соотношения [62.1.2]:

$$[\pi_{lm}, \alpha_{l'm'}] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

$$[\alpha_{lm}, \alpha_{l'm'}] = [\pi_{lm}, \pi_{l'm'}] = 0. \qquad (72.59)$$

Решение уравнения Шредингера $\hat{H}\Psi = E_N\Psi$ с гамильтонианом (72.58) имеет вид

$$E_N = \sum_{l,m}\left(n_{lm} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_l, \quad \omega_l = \sqrt{C_l/B_l}, \qquad (72.60)$$

где $n_{lm} = 0, 1, 2, \ldots$ — положительные числа, определяющие число элементарных возбуждений определенного типа lm с энергией $\hbar\omega_l$. При переходе ядра из одного состояния в другое его энергия E_N изменяется на величину, равную сумме величин, кратных $\hbar\omega_l$. Так как

данному l соответствует $(2l+1)$ значений m, то возбужденное состояние с фиксированным l имеет вырождение, равное $(2l+1)$. В случае квадрупольной деформации колебание имеет момент количества движения, равный 2, и положительную четность: $J^\pi = 2^+$. По аналогии с физикой твердого тела элементарные возбуждения поверхностных колебаний ядра рассматривают как *квазичастицы — фонон*. Для квадрупольной деформации из (72.60) имеем

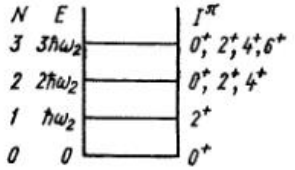


Рис. 72.12

$$E_N = \left(N + \frac{5}{2}\right)\hbar\omega_2, \quad N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{72.61}$$

где N описывает число фононов, имеющих момент количества движения, равный 2, и энергию $\hbar\omega_2$. Основное состояние ($N = 0$) не имеет фононов, в первом возбужденном состоянии имеется один фонон. ($N=1$), во втором возбужденном состоянии — два фонона ($N = 2$) и т. д.

Рассмотрим четно-четное ядро. В основном состоянии его спин равен нулю, а четность положительна: $J^\pi = 0^+$. Тогда первое возбужденное состояние будет 2^+. Два фонона имеют энергию $2\hbar\omega_2$, а при связывании их моментов количества движения возможны состояния 0^+, 2^+, 4^+ и т. д. Схематически энергетический спектр колебательных возбуждений ядра показан на рис. 72.12, где энергия основного состояния положена равной нулю. Примеры колебательных спектров некоторых реальных ядер показаны на рис. 72.13. Остаточное межнуклонное взаимодействие [72.1] снимает вырождение по состояниям 0^+, 2^+, 4^+.

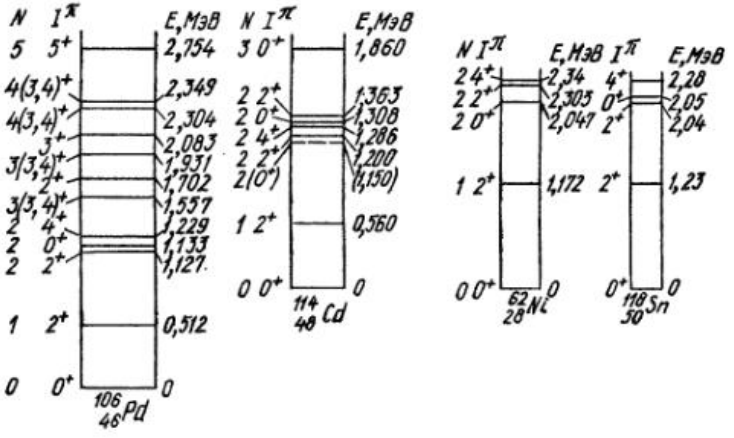


Рис. 72.13

Рассмотренная модель поверхностных колебаний сферических ядер для большинства из них дает качественное описание. Количественно спектры уровней четно-четных ядер она не описывает. Опыт показывает, что энергии возбужденных состояний четно-четных ядер сильно зависят от структуры ядер и характеризуются очень большим значением первого возбужденного состояния для магических ядер. Оказывается, что низкоэнергетические уровни ядер с большими квадрупольными моментами связаны не с колебаниями их поверхности, а с вращением ядер, подобным вращению твердых тел. Это указывает на то, что их равновесная форма отлична от сферической.

72.5.2. Коллективные вращательные состояния. Вращательная модель, в которой форма ядра предполагается фиксированной, является простейшим вариантом обобщенной модели. Эта модель наряду с вращением ядра как целого учитывает также возбуждения, связанные с его внутренними степенями свободы. Она хорошо описывает спектры уровней и другие характеристики деформированных ядер с массовыми числами $150 < A < 190$ и $A > 220$.

Опыт показывает, что в случае деформированных ядер с нечетным A имеются низколежащие уровни, которые связаны с возбуждением отдельных нуклонов. Каждому такому уровню соответствует своя вращательная полоса состояний.

Во вращательной модели гамильтониан ядра $\hat{H}$ имеет вид

$$\hat{H} = H_0(\xi) + H_r + H', \tag{72.62}$$

где $H_0(\xi)$ описывает движение отдельных нуклонов (соответствует внутренним степеням свободы ξ), H_r характеризует вращение ядра как целого, H' учитывает связь между вращением и внутренним движением. Вращательная часть гамильтониана

$$H_r = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_{x'}} R_{x'}^2 + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_{y'}} R_{y'}^2 + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_{z'}} R_{z'}^2 \equiv \sum_{k'} \frac{\hbar^2}{2\mathcal{J}_{k'}} R_{k'}^2, \tag{72.63}$$

где $\mathcal{J}_{x'}$, $\mathcal{J}_{y'}$, $\mathcal{J}_{z'}$ — моменты инерции относительно главных осей ядра, рассматриваемые как эмпирические параметры: $R_{x'}$, $R_{y'}$, $R_{z'}$ — моменты количества движения ядра относительно главных осей ядра. Между этими величинами существует связь

$$\hbar R_{k'} = \omega_{k'} \mathcal{J}_{k'}, \quad k' = x',\ y',\ z', \tag{72.64}$$

где $\omega_{k'}$ — угловая скорость относительно оси k'.

Пусть деформированное ядро представляет собой эллипсоид, произвольным образом ориентированный в пространстве. Форма его поверхности описывается выражением (72.52) при $l = 2$. В системе координат K', оси которой x', y', z' совпадают с главными осями эллипсоида, имеем уравнение поверхности

$$R(\theta', \varphi') = R\{1 + \alpha_0' Y_{20}(\theta', \varphi') + \alpha_1' Y_{21}(\theta', \varphi') + \alpha_2' Y_{22}(\theta', \varphi') + \alpha_{-2}' Y_{2-2}(\theta', \varphi') + \alpha_{-1}' Y_{2-1}(\theta', \varphi')\}, \tag{72.65}$$

где $\alpha_m' \equiv \alpha_{2m}'$. Так как эллипсоид симметричен, то

$$\alpha_1' = \alpha_{-1}', \quad \alpha_2' = \alpha_{-2}'. \tag{72.66}$$

Это значит, что в собственной системе деформации поверхности характеризуются только двумя вещественными параметрами: α_2' и α_0'. Вместо них деформации ядра принято характеризовать параметрами β и γ, такими, что

$$\alpha_0' = \beta\cos\gamma, \quad \alpha_2' = \frac{\beta}{\sqrt{2}}\sin\gamma, \quad \alpha_0'^2 + 2\alpha_2'^2 = \beta^2, \tag{72.67}$$

т. е. параметр β определяет общую деформацию ядра, а γ характеризует отклонение формы ядра от аксиально-симметричной. Из (72.65) — (72.67) следует, что главные полуоси ядра выражаются через β и γ следующим образом:

$$R_{k'} = \left\{1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k'\right)\right\} R,\quad k' = x', y', z'. \qquad (72.68)$$

Если $\gamma = 0$ и $\beta > 0$, то ядро представляет собой вытянутый эллипсоид с полуосями

$$R_{x'} = R_{y'} = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\right) R,\quad R_{z'} = \left(1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\right) R. \qquad (72.68а)$$

Если $\gamma = \pi$, $\beta > 0$, то ядро имеет форму сплюснутого эллипсоида вращения с полуосями

$$R_{x'} = R_{y'} = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\right) R,\quad R_{z'} = \left(1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\beta\right) R. \qquad (72.68б)$$

Чтобы задать ориентацию главных осей эллипсоида в пространстве, к параметрам β и γ нужно добавить три угла Эйлера ψ, θ, φ, как в случае вращения твердого тела [8.4]. Последнее соответствует переходу от функции $R(\theta', \varphi')$ (72.65), заданной в собственной системе координат эллипсоида, к функции $R(\theta, \varphi)$ (72.52) при $l = 2$ в произвольной (лабораторной) системе отсчета. Переход к собственной системе позволяет рассматривать вращение ядра как целого и колебания, связанные с изменением его формы [72.5.1], независимо. При этом гамильтониану H_r (72.63) соответствует энергия вращения ядра

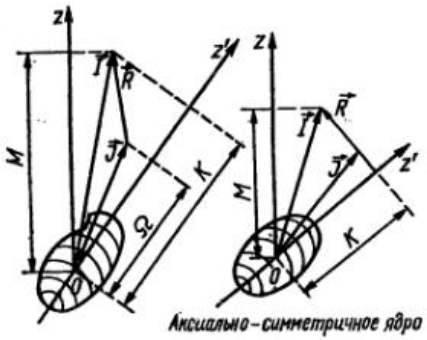


Рис. 72.14

$$T_r = \sum_{k'} (\hbar^2/2\mathcal{I}_{k'})\, R_{k'}^2, \qquad (72.69)$$

а коллективный гамильтониан ядра в случае малых деформаций имеет вид, в котором переменные β, γ и $R_{k'}$ разделяются:

$$\hat{H}_{\text{кол}} = H_r + H_v,\quad H_v = \frac{1}{2} B (\dot{\beta}^2 + \beta^2 \dot{\gamma}^2) + \frac{1}{2} C \beta^2, \qquad (72.70)$$

где $B = B_2$, $C = C_2$ — массовый коэффициент и коэффициент деформации из (72.54) при $l = 2$, а H_r — вращательный гамильтониан (72.63). Величины $R_{k'}$ в (72.63) при квантовомеханическом описании суть компоненты оператора $\mathbf{R}$ момента вращения ядра как целого вокруг оси, не являющейся осью симметрии ядра (рис. 72.14). Если $\mathbf{J}$ — момент количества движения ядра, связанный с внутренними степенями свободы, т. е. создаваемый быстрым движением независимых нуклонов внутри деформированной потенциальной ямы, то

$$\mathbf{I} = \mathbf{R} + \mathbf{J} \text{ и } \mathbf{R}^2 = \mathbf{I}^2 + \mathbf{J}^2 - 2\mathbf{I}\mathbf{J}, \qquad (72.71)$$

где $\mathbf{I}$ — полный момент количества движения ядра. Полная волновая функция ядра Ψ будет собственной функцией операторов $\mathbf{I}^2$, I_z, $I_{z'}$. Обозначим их собственные значения через I, M и K так, что

$$|\mathbf{I}^2| = \hbar I(I+1),\quad I_z = \hbar M,\quad I_{z'} = \hbar K, \qquad (72.72)$$

где K — проекция момента I на ось z' системы координат, связанной с ядром, M — его проекция на ось z лабораторной (неподвижной) системы координат. В соответствии с (72.71) и (72.72) одному и тому же состоянию с данным K могут отвечать различные значения полного момента

$$I = K,\quad K+1,\ K+2, \ldots \qquad (72.73)$$

О таких состояниях говорят, что они образуют *вращательную полосу*. Если $K = 0$, то возможны две вращательные полосы:

$$\begin{aligned} &I = 0^+,\ 2^+,\ 4^+, \ldots,\ \pi = +1,\\ &I = 1^-,\ 3^-,\ 5^-, \ldots,\ \pi = -1, \end{aligned} \qquad (72.74)$$

соответствующие четным ($\pi = +1$) и нечетным ($\pi = -1$) состояниям. В адиабатическом приближении, $H' = 0$, для аксиально-симметричного ядра, $\mathcal{I}_{x'} = \mathcal{I}_{y'} = \mathcal{I}$ уравнение Шредингера $\hat{H}\Psi = E_K \Psi$ с гамильтонианом (72.62) приводит к следующей формуле для собственных значений E_K, описывающей уровни энергии вращательной полосы с данным значением K:

$$E_K(I) = E_K^0 + \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}}\left[I(I+1) + a(-1)^{I+1/2}\left(I + \frac{1}{2}\right)\delta_{K,1/2}\right], \qquad (72.75)$$

где $\delta_{K,1/2} = 1$ при $K = 1/2$ и $\delta_{K,1/2} = 0$ при $K \neq 1/2$, E_K^0 — внутренняя энергия, не зависящая от $\mathbf{I}$, a — параметр связи, зависящий от внутреннего состояния нечетного нуклона ядра. Этот параметр возникает из-за слагаемого $2\mathbf{I}\mathbf{J}$ в (72.71) и имеет вид

$$a = \sum_j (-1)^{j-1/2}\left(j + \frac{1}{2}\right)|C_j|^2, \qquad (72.76)$$

где $|C_j|^2$ — вероятность того, что последняя нечетная частица имеет момент количества движения j.

У четно-четных ядер самой низкой является вращательная полоса с $K = 0^+$. Ей соответствуют спины $I = 0, 2, 4, \ldots$. Если энергию возбуждения отсчитывать от основного состояния ядра, то она будет

$$E_I = \frac{\hbar^2}{2\mathcal{I}} I(I+1). \qquad (72.77)$$

Отсюда следует следующее *правило интервалов* для уровней вращательной полосы $K = 0^+$:

$$E_2 : E_4 : E_6 : E_8 : E_{10} : \cdots = 1 : 10/3 : 7 : 12 : 55/3 : \cdots, \qquad (72.78)$$

которое в действительности выполняется для сильно деформированных ядер редкоземельных элементов ($155 < A < 190$) и актиноидов ($225 < A < 250$) (рис. 72.15).

У деформированных ядер с нечетным A также наблюдаются вращательные спектры. Если $K \neq 1/2$, то для отношения энергий возбужде-

ния имеем

$$\frac{E_{I_0+2}}{E_{I_0+1}} = 2 + \frac{1}{I_0+1}, \qquad (72.79)$$

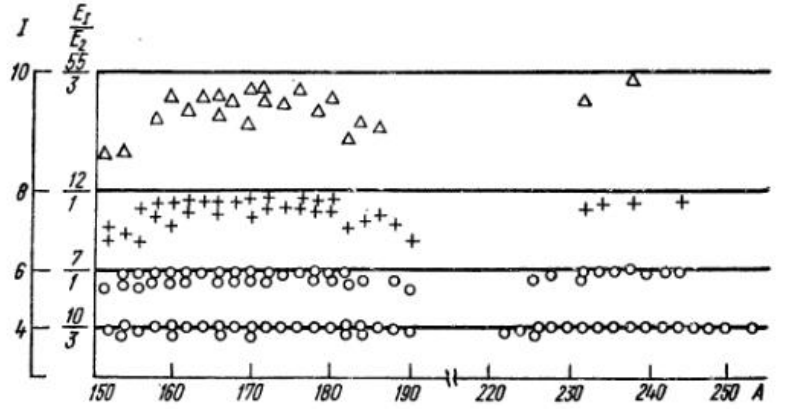


Рис. 72.15

где $I_0 = K$ — спин основного состояния. Для отдельных уровней вращательной полосы значения спинов равны I_0, I_0+1, I_0+2, ... Отношение (72.79) позволяет определить экспериментально спин ядра I_0 в основном состоянии. Так, для ядра $^{181}_{73}$Ta имеем $E_{I_0+2}/E_{I_0+1} = 2{,}23$ и $I_0 = 7/2$ (рис. 72.16). При $K = 1/2$ слагаемое с параметром связи a (72.76) в (72.75) отлично от нуля, и уровни энергии зависят от a и $\mathcal{I}$. Эти два параметра могут быть найдены эмпирическим путем по спектрам. Так, из спектра ядра $^{183}_{74}$W следует, что $a = 0{,}19$, $\mathcal{I} = 2{,}67 \cdot 10^{-47}$ г·см² (рис. 72.16). Для тяжелых ядер $-1 < a < 1$ и порядок уровней не изменяется. У легких ядер a может принимать большие значения, как, например, у ядра $^{25}_{13}$Al, где $a = -3{,}2$. Поэтому у таких ядер слагаемое с a в (72.75) может изменить порядок уровней, который был бы при $a = 0$.

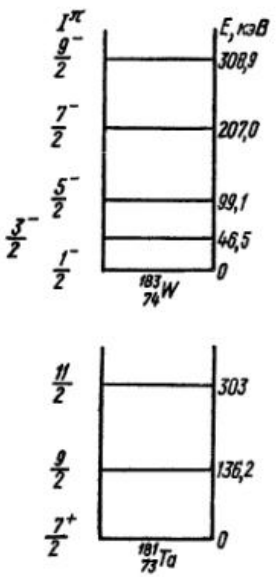


Рис. 72.16

Из данных по спектрам и формулам (72.75), (72.77), (72.79) можно определить момент инерции аксиально-симметричного ядра $\mathcal{I}$. У магических ядер, которые являются сферически симметричными, момент инерции мал, а для сильно деформированных ядер — велик. Абсолютная величина $\mathcal{I}$ существенно зависит от внутренней структуры ядра и может быть рассчитана в той или иной модели. В *модели твердого тела* эллипсоидальной формы, учитывая (72.68а), находим

$$\mathcal{I}_\text{т} = \frac{Am}{5}(R_{x'}^2 + R_{z'}^2) = \frac{2}{5} AmR^2\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta + \frac{25}{32\pi}\beta^2\right), \qquad (72.80)$$

где Am — масса ядра. Если ядро представить как *эллипсоидальный сосуд с жидкостью*, то, считая движение жидкости потенциальным, найдем

$$\mathcal{I}_\text{ж} = \frac{Am}{5}\frac{(R_{z'}^2 - R_{x'}^2)^2}{R_{z'}^2 + R_{x'}^2} = \frac{9Am\,R^2}{4\pi}\beta^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta\right)^2}{\left(2 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\beta + \frac{25}{16\pi}\beta^2\right)}. \qquad (72.81)$$

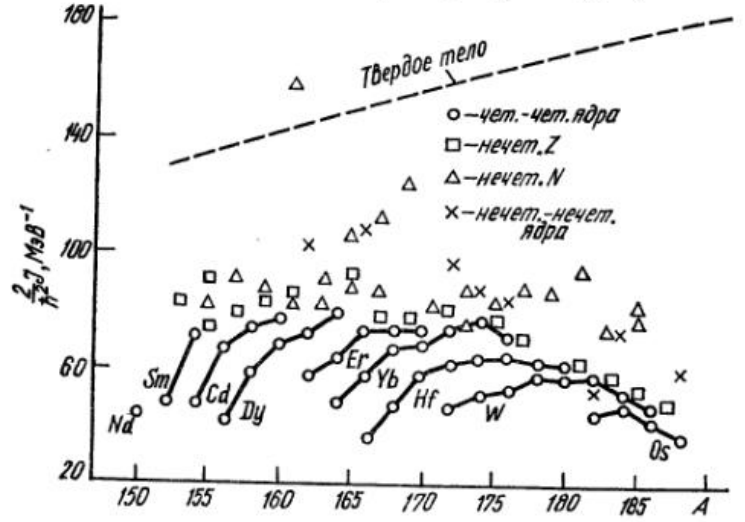


Рис. 72.17

Отношение моментов инерции ядра, рассчитанных в гидродинамической и твердотельной моделях, равно

$$\frac{\mathcal{I}_\text{ж}}{\mathcal{I}_\text{т}} \simeq \frac{45}{16\pi}\beta^2 \text{ при малых } \beta. \qquad (72.82)$$

Эмпирические значения моментов инерции ядер находятся между значениями, предсказываемыми этими моделями (рис. 72.17). Это свидетельствует о том, что ядро не является абсолютно твердым телом, а вращение нуклонов в ядре не полностью безвихревое. Экспериментальные значения момента инерции почти в два раза меньше $\mathcal{I}_\text{т}$ и в пять раз больше $\mathcal{I}_\text{ж}$. Отклонения наблюдаемых $\mathcal{I}$ от $\mathcal{I}_\text{т}$ обусловлены наличием корреляций между движением нуклонов. Остаточное взаимодействие, которое не учитывается в модели независимых частиц, приводит к замедлению вращения. Если бы взаимодействие нуклонов в ядре было достаточно сильным и приводило к тому, что средняя длина свободного пробега нуклона оказалась бы меньше размеров ядра, то была бы применима гидродинамическая модель. Последовательное рассмотрение $\mathcal{I}$ требует учета эффекта спаривания нуклонов.

73. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

73.1. Понятия и определения

73.1.1. Типы ядерных реакций. *Ядерными реакциями* называют различные процессы, в результате которых изменяется внутреннее состояние ядерных частиц или же происходит их взаимное превращение. Под ядерными частицами понимают атомные ядра и отдельные частицы (нуклоны, мезоны и др.). Ядерные реакции происходят также при столкновении электронов и фотонов с ядрами. Экспериментально ядерные реакции осуществляются в результате облучения мишеней из различных веществ пучками частиц, или же путем столкновения частиц, движущихся навстречу одна другой. В первом случае используются различные источники частиц и обычные ускорители, а во втором — ускорители на встречных пучках [33.5.2].

Ядерные реакции необходимы как для научных целей (изучение свойств и механизмов взаимодействия частиц и ядер, новых изотопов, структуры ядра и т. п.), так и для решения прикладных задач (использования ядерной энергии, получения радиоактивных изотопов и др.).

Наиболее распространенными являются реакции, при которых сталкиваются две ядерные частицы. Для ядерных реакций *бинарного типа*, когда и в конечном состоянии образуется две частицы, приняты обозначения

$$a + A \to B + b \text{ или } A\,(a,\ b)\,B. \qquad (73.1)$$

Такая запись означает, что ядерная частица a сталкивается с ядерной частицей A, в результате чего образуются новые частицы B и b. В общем случае столкновение частиц a и A может сопровождаться целой совокупностью реакций:

$$a + A \to \begin{cases} A + a, \\ A^* + a', \\ B + b, \\ C + b + c, \\ D + b + c + d, \\ \ldots\ldots \end{cases} \qquad (73.2)$$

Процесс $A\,(a,\ a)A$, при котором внутренние состояния частиц A и a не изменяются, называется *упругим рассеянием*. Все остальные процессы в (73.2) представляют собой *неупругие рассеяния*. При этом реакция $A\,(a,\ a')A^*$ идет с возбуждением частицы A и изменением за счет этого кинетической энергии частицы a. В других неупругих процессах (73.2) наблюдается перераспределение частиц и рождение новых.

Начальные и конечные состояния в реакциях характеризуют заданием сорта частиц и набора квантовых чисел, определяющих их внутренние состояния и энергию относительного движения. Совокупность всех таких характеристик называют *каналами реакции* и обозначают α, β, γ и т. д. Каналы реакции характеризуются различными начальными и конечными состояниями. О частицах a и A до столкновения говорят как о *входном* канале. Тогда результат столкновения соответствует *выходному* каналу. Упругое рассеяние называют также упругим каналом реакции. Например, при столкновении протона p с ядром $^{7}_{3}\mathrm{Li}$ возможны следующие выходные каналы:

$$p + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \to \begin{cases} p + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} & \text{— упругий,} \\ p' + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} & \text{— с возбуждением ядра } {}^{7}_{3}\mathrm{Li}, \\ \alpha + \alpha & \text{— рождение двух ядер } {}^{4}_{2}\mathrm{He}, \\ \alpha + \alpha + \gamma & \text{— с выходом фотона } \gamma, \\ p + \alpha + t & \text{— с выходом } {}^{4}_{2}\mathrm{He} \text{ и } {}^{3}_{1}\mathrm{H}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Протон p часто обозначают как ядро $^{1}_{1}\mathrm{H}$, а нейтрон n — как $^{1}_{0}n$. При столкновении частиц с ядрами ядерные процессы можно классифицировать по типам реакции $(\alpha,\ p)$, $(\alpha,\ n)$, $(p,\ pn)$, $(n,\ \gamma)$ и др.

Примеры ядерных реакций:

$$^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O} \quad \text{или} \quad {}^{14}\mathrm{N}\,(\alpha,\ p)\,{}^{17}\mathrm{O}$$

— реакция типа $(\alpha,\ p)$, которую впервые осуществил Резерфорд (1919)

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{0}n + {}^{30}_{15}\mathrm{P} \quad \text{или} \quad {}^{27}\mathrm{Al}\,(\alpha,\ n)\,{}^{30}\mathrm{P}$$

— реакция типа $(\alpha,\ n)$, позволившая открыть искусственную радиоактивность (И. и Ф. Жолио-Кюри, 1934);

$$^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{0}n + {}^{12}_{6}\mathrm{C} \quad \text{или} \quad {}^{9}\mathrm{Be}\,(\alpha,\ n)\,{}^{12}\mathrm{C}$$

— реакция типа $(\alpha,\ n)$, позволившая открыть нейтрон (Чэдвик, 1932);

$$^{63}_{29}\mathrm{Cu} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to {}^{1}_{0}n + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{62}_{29}\mathrm{Cu} \quad \text{или} \quad {}^{63}\mathrm{Cu}\,(p,\ pn)\,{}^{62}\mathrm{Cu}$$

— реакция типа $(p,\ pn)$, в которой в конечном состоянии имеются три ядерные частицы;

$$^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \to \gamma + {}^{8}_{4}\mathrm{Be} \quad \text{или} \quad {}^{7}\mathrm{Li}\,(p,\ \gamma)\,{}^{8}\mathrm{Be}$$

— реакция типа $(p,\ \gamma)$, служащая источником гамма-лучей с энергией $E_\gamma = 17$ МэВ;

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to \gamma + {}^{239}_{92}\mathrm{U} \quad \text{или} \quad {}^{238}\mathrm{U}\,(n,\ \gamma)\,{}^{239}\mathrm{U}$$

— первая ядерная реакция типа $(n,\ \gamma)$, в которой был получен новый трансурановый элемент;

$$^{26}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{27}_{12}\mathrm{Mg} \quad \text{или} \quad {}^{26}\mathrm{Mg}\,(d,\ p)\,{}^{27}\mathrm{Mg}$$

— реакция срыва $(d,\ p)$, изученная при создании атомной бомбы (Оппенгеймер, 1943—1945);

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + \gamma \to {}^{1}_{0}n + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \quad \text{или} \quad {}^{2}\mathrm{H}\,(\gamma,\ n)\,{}^{1}\mathrm{H}$$

— так называемая фотоядерная реакция $(\gamma,\ n)$;

$$^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{37}_{18}\mathrm{Ar} \quad \text{или} \quad {}^{27}\mathrm{Al}\,({}^{14}\mathrm{N},\ \alpha)\,{}^{37}\mathrm{Ar}$$

— ядерная реакция при столкновении ядер:

$$\pi^- + p \to n + \pi^0 \quad \text{или} \quad p(\pi^-, \pi^0)n$$

— реакция типа (π^-, π^0), в результате которой протон преобразуется в нейтрон.

73.1.2. Характеристики ядерных реакций. Количественной характеристикой ядерной реакции является ее *эффективное сечение* σ. При его определении исходят из предположения об аддитивности событий, происходящих на отдельных ядрах мишени, имеющей макроскопические размеры. Это означает, что отдельные ядра в слое вещества мишени действуют как независимые рассеивающие центры, т. е. их действие некогерентно. Опыт показывает, что во всех ядерных реакциях, кроме случая рассеяния очень медленных (тепловых) нейтронов в кристалле, это предположение оправдывается. Поэтому сечение реакции σ определяют следующим образом:

$$\sigma = \left(\frac{n}{n_0}\right) \Big/ \left(\frac{N_0}{S}\right) = \frac{W}{j}, \tag{73.3}$$

где $W = n/n_0$ — число ядерных превращений n за единицу времени, отнесенное к числу n_0 ядер мишени (вероятность реакции за единицу времени), $j = N_0/S$ — число частиц N_0, падающих за единицу времени на поверхность мишени площадью S, отнесенное к единице этой поверхности (плотность потока частиц, падающих на мишень). Из определения (73.3) следует, что σ имеет размерность площади и представляет собой коэффициент пропорциональности между вероятностью реакции W и плотностью потока j падающих частиц во входном канале. Переписав (73.3) в виде

$$n = n_0 j \sigma, \tag{73.4}$$

получим способ определения сечения σ опытным путем по числу ядерных превращений за единицу времени n, числу ядер мишени n_0 и плотности потока j.

Более детальной характеристикой ядерной реакции является ее *дифференциальное сечение*. Оно определяется как коэффициент пропорциональности $\sigma(\theta, \varphi)$ между элементарным сечением реакции $d\sigma$ и телесным углом $d\Omega$ (64.17) под которым из рассеивающего центра видна элементарная площадка dS, в пределах которой регистрируются продукты реакции (рис. 64.2):

$$d\sigma = \sigma(\theta, \varphi)\, d\Omega \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega. \tag{73.4}$$

Форма зависимости дифференциального сечения от углов θ и φ называется *угловым распределением*. Если частицы бесспиновые или же спины частиц во входном канале ориентированы произвольно (хаотично), то ядерный процесс обладает цилиндрической симметрией относительно оси, проходящей через мишень в направлении движения падающей частицы. В этом случае дифференциальное сечение зависит только от угла θ, отсчитанного от этой оси симметрии (см. (64.16) — (64.19)):

$$\frac{d\sigma}{\sin\theta\, d\theta} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\varphi = 2\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi\sigma(\theta). \tag{73.5}$$

Полное или интегральное сечение

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, d\Omega = \int \sigma(\theta)\, d\Omega \tag{73.6}$$

характеризует интенсивность реакции.

Если спины частиц во входном канале отличны от нуля, то сечение реакции зависит от ориентации спинов. О частицах, у которых спины имеют определенное направление, говорят, что они поляризованы. Количественно ориентацию спина частицы характеризуют *вектором поляризации*

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{S} \rangle / s, \tag{73.7}$$

равном отношению среднего значения $\langle \mathbf{S} \rangle$ вектора спина $\mathbf{S}$ в заданном состоянии к максимальному значению его проекции на ось квантования, $m_s = s$. Направление вектора поляризации $\mathbf{P}$ определяет направление ориентации спина частицы, а его модуль — степень поляризации, т. е. относительную вероятность ориентации спина в заданном направлении. Модуль вектора $\mathbf{P}$ называют просто *поляризацией* и выражают в процентах. Если вектор $\mathbf{P}$ не параллелен импульсу налетающей частицы, то угловое распределение может зависеть от угла φ.

Ядерные реакции характеризуют также *функциями возбуждения*, которые представляют собой зависимости эффективных сечений от энергии E относительного движения частиц во входном канале, $\sigma = \sigma(E)$. Функции возбуждения зависят от природы и свойств частиц выходного канала.

Выходом ядерной реакции Y называется отношение числа происшедших ядерных превращений n к числу упавших на мишень частиц N_0:

$$Y = \frac{n}{N_0} = \frac{n_0}{S}\sigma, \tag{73.8}$$

где n_0/S — число ядер, приходящихся на единицу площади мишени, σ — эффективное сечение реакции.

73.1.3. Следствия законов сохранения. Как и в химии, ядерные реакции могут идти как с выделением, так и с поглощением энергии. Разность кинетических энергий относительного движения частиц в выходном β и входном α каналах называют *тепловым эффектом* реакции $Q_{\alpha\beta}$,

$$Q_{\alpha\beta} = E_\beta - E_\alpha, \tag{73.9}$$

где E_α и E_β — кинетические энергии в каналах α и β. Из закона сохранения энергии для реакции (73.1)

$$E_\alpha + E_a + E_A = E_\beta + E_b + E_B, \tag{73.10}$$

где E_a и E_A — внутренние энергии частиц во входном канале, E_B и E_b — внутренние энергии частиц в выходном канале, следует, что

$$Q_{\alpha\beta} = E_a + E_A - E_b - E_B, \tag{73.11}$$

т. е. тепловой эффект реакции не зависит от кинетических энергий во входном и выходном каналах. Если $Q_{\alpha\beta} > 0$, то реакция называется *экзотермической*, т. е. идущей с выделением энергии. Если $Q_{\alpha\beta} < 0$, то реакция идет с поглощением энергии и называется *эндотермической*. Все реакции, обратные к экзотермическим, являются эндотермическими. При упругом рассеянии $Q_{\alpha\beta} = 0$. С учетом величины $Q_{\alpha\beta}$ реакцию (73.1) иногда записывают в виде

$$a + A \to B + b + Q_{\alpha\beta}. \tag{73.1a}$$

Например, $p + {}^7\mathrm{Li} \to \alpha + \alpha + 17$ МэВ.

Таблица 73.1. Тепловые эффекты Q некоторых ядерных реакций

Реакция	Q, МэВ	Реакция	Q, МэВ
$^2H\ (d,\ p)\ ^3H$	4,03	$^9Be\ (\alpha,\ n)^{12}C$	5,70
$^3H\ (d,\ n)\ ^4He$	17,59	$^{14}N\ (\alpha,\ p)^{17}O$	—1,19
$^4He\ (\gamma,\ n)\ ^3He$	—20,58	$^{28}Si\ (d,\ p)^{29}Si$	6,25
$^7Li\ (p,\ \alpha)\ ^4He$	17,35	$^{208}Pb\ (\alpha,\ l)^{209}Bi$	—16,04

Значения тепловых эффектов $Q_{\alpha\beta}$ для некоторых реакций приведены в табл. 73.1.

Выходной канал β называется *открытым*, если $E_\beta \geqslant 0$. Поэтому эндотермическая реакция возможна, если

$$E_\alpha \geqslant |Q_{\alpha\beta}|. \tag{73.12}$$

Минимальная кинетическая энергия сталкивающихся частиц, начиная с которой реакция становится энергетически возможной, называется *порогом реакции*:

$$E_{\text{порог}} = |Q_{\alpha\beta}|. \tag{73.13}$$

Порог реакции обычно задают в лабораторной (л) системе координат, в которой одна из частиц во входном канале (например, A) покоится, а другая налетает на нее. Связь между кинетической энергией относительного движения частиц a и A в системе центра инерции

$$E_\alpha = \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m_A} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_\alpha},$$

$$\mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_A \equiv \mathbf{p} = \mu_\alpha \mathbf{v},\ \mu_\alpha = m_a m_A/(m_a + m_A),$$

и кинетической энергией этих частиц в л-системе координат,

$$E_\alpha^L = \frac{(\mathbf{p}_a^L)^2}{2m_a} + \frac{(\mathbf{p}_A^L)^2}{2m_A} = \frac{m_a \mathbf{v}^2}{2} = \frac{m_a + m_A}{m_A}\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu_\alpha} = \frac{m_a + m_A}{m_A} E_\alpha,$$

дает для порога реакции в л-системе следующее выражение:

$$E_{\text{порог}}^L = \frac{m_a + m_A}{m_A} |Q_{\alpha\beta}|. \tag{73.14}$$

При $m_A \gg m_a$ имеем $E_{\text{порог}}^L \approx |Q_{\alpha\beta}|$. Релятивистское обобщение этой формулы имеет вид

$$E_{\text{порог}}^L = \frac{2(m_a + m_A)c^2 - |Q_{\alpha\beta}|}{2m_A c^2} |Q_{\alpha\beta}|. \tag{73.15}$$

Закон сохранения полного импульса в ядерных реакциях связывает импульсы частиц во входном и выходном каналах. Для бинарной реакции (73.1) в л-системе координат имеем

$$\mathbf{p}_b^L + \mathbf{p}_B^L = \mathbf{p}_a^L + \mathbf{p}_A^L, \tag{73.16}$$

в системе центра инерции

$$\mathbf{p}_b + \mathbf{p}_B = 0. \tag{73.17}$$

Законы сохранения энергии (73.10) и импульса (73.17) накладывают кинематические ограничения на возможные значения энергий и импульсов продуктов реакции. Если не учитывать внутренние степени свободы сталкивающихся частиц, то кинематические соотношения аналогичны рассматриваемым в классической механике [5.3].

В реакциях при низких энергиях большую роль играет закон сохранения момента количества движения. Из дискретного характера орбитального момента l относительного движения двух частиц, равного (в единицах $\hbar$) 0, 1, 2, ..., и ограниченного радиуса действия ядерных сил следует, что реакция возможна при значениях l, не превышающих некоторого граничного числа. При квазиклассическом рассмотрении момент $\hbar l$ частицы a, налетающей на ядро A, равен pb, где b — прицельный параметр (рис. 64.1) [64.4], p — импульс частицы. Реакция возможна, если $b \leqslant R$, где R — радиус действия сил между частицей a и ядром A. Отсюда следует, что возможные значения l ограничены условием

$$l \leqslant \frac{pb}{\hbar} \approx \frac{R}{\lambda}, \tag{73.18}$$

где λ — дебройлевская длина волны падающей частицы. Если полное сечение σ представить в виде суммы парциальных сечений $\sigma^{(l)}$, то расчет показывает, что при уменьшении импульса p сечение $\sigma^{(l)}$ быстро падает с ростом l. Для нейтральных частиц

$$\sigma = \sum_l \sigma^{(l)},\quad \sigma^{(l)} \sim (2l+1)\,p^{4l} \quad \text{при } p \to 0. \tag{73.19}$$

В частности, при $\lambda > R$ вклад в сечение дает только слагаемое с $l = 0$ (так называемое рассеяние в S-состоянии). Угловое распределение частиц в выходном канале изотропно — частицы сферически симметрично разлетаются во всех направлениях.

В ядерных реакциях при низких энергиях сохраняется число нуклонов. Этот закон является частным случаем более общего закона сохранения барионного заряда [75.6].

Для ядерных реакций справедлив закон сохранения электрического заряда и закон сохранения четности. Последний означает, в частности, что при упругом рассеянии относительный орбитальный момент l не может измениться на нечетное число, даже если это разрешено законом сохранения момента импульса за счет переориентации спинов. Законы сохранения момента импульса и четности определяют правила отбора для орбитальных моментов, спинов и четностей частиц в выходных каналах.

73.2. Матрица столкновений

Главной задачей теории ядерных реакций является расчет эффективных сечений. Согласно нерелятивистской квантовой механике различные процессы, возникающие при столкновении двух ядерных частиц, полностью описываются волновой функцией Ψ_α, являющейся решением уравнения Шредингера

$$(\hat{H}_0 + V)\,\Psi_\alpha = E\,\Psi_\alpha, \tag{73.20}$$

где $\hat{H}_0$ — оператор кинетической энергии, а V — потенциал взаимодействия всех частиц, входящих в состав системы. Состояниям рассеяния соответствуют состояния с полной энергией E, лежащей в области непрерывного спектра, $E > 0$, и граничным условием для волновой функции Ψ_α на бесконечности (ее асимптотики) в виде суперпозиции сходящейся волны во входном канале α и расходящихся рассеянных волн во всех открытых каналах. Канал реакции называют открытым, если выполняется условие (73.12). Если это условие не выполняется, то для эндотермической реакции соответствующий канал β будет *закрыт*,— реакция по такому каналу идти не может.

Определение волновой функции Ψ_α на основе уравнения (73.20) с указанным граничным условием эквивалентно полному решению задачи многих тел. Теория ядерных реакций, однако, устанавливает ряд важных закономерностей ядерных процессов, являющихся следствием общих физических законов, без прямого решения многочастичной задачи. Одним из них является возможность введения так называемой матрицы столкновений.

73.2.1. Бесспиновые ядерные частицы. Пусть в системе открыто N каналов. Тогда при заданной энергии E им будут соответствовать асимптотики N независимых функций Ψ_α, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, N$, различающиеся наличием сходящихся волн в разных каналах. Записывая Ψ_α реакции (73.1) в виде произведения функции $\psi_{\alpha\beta}$ относительного движения частиц b и B в канале β и внутренней функции χ_β канала β (представляющей собой произведение внутренних волновых функций частиц b и B),

$$\Psi_\alpha = \psi_{\alpha\beta}\,\chi_\beta, \tag{73.21}$$

для простого случая частиц a, A, b и B с нулевыми спинами и $l = 0$ в выходных каналах имеем следующие асимптотики:

$$\psi_{\alpha\alpha}(r_\alpha) = \frac{i}{2k_\alpha r_\alpha}\left[e^{-ik_\alpha r_\alpha} - S^{l=0}_{\alpha\alpha}\, e^{ik_\alpha r_\alpha}\right],\ r_\alpha \gg R_\alpha, \tag{73.22}$$

$$\psi_{\alpha\beta}(r_\beta) = \sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}}\,\frac{(-i)}{2\sqrt{k_\alpha k_\beta}\, r_\beta}\, S^{l=0}_{\beta\alpha}\, e^{ik_\beta r_\beta},\ \alpha \neq \beta,\quad r_\beta \gg R_\beta,$$

где $k_\alpha = \sqrt{2\mu_\alpha E_\alpha}/\hbar = 1/\lambda_\alpha$, $k_\beta = \sqrt{2\mu_\beta E_\beta}/\hbar = 1/\lambda_\beta$, $E_\alpha = E - E_a - E_A$, $E_\beta = E - E_b - E_B$; r_α, r_β — относительные расстояния между a, A и b, B соответственно; R_α, R_β — радиусы взаимодействия частиц a и A в канале α, b и B в канале β. При выбранных нормировочных постоянных падающая плоская волна $\exp(-ik_\alpha r_\alpha)$ характеризуется единичной амплитудой, а коэффициенты $S^l_{\alpha\alpha}$ и $S^l_{\beta\alpha}$ являются *амплитудами реакций*. Так как α и β пробегают по N значений, то эти амплитуды образуют N-рядную квадратную матрицу, которую называют *матрицей столкновений* или просто *S-матрицей*. Из эрмитовости [62.1.2] гамильтониана $\hat{H}_0 + V$ в (73.20) следует, что S-матрица унитарна, т. е. выполняется условие

$$\sum_{\gamma=1}^{N} S^{l*}_{\gamma\beta}\, S^l_{\gamma\alpha} = \delta_{\alpha\beta};\ S^+S = 1 \text{ или } S^+ = S^{-1}, \tag{73.23}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение, а крест — эрмитово сопряжение. Условие унитарности S-матрицы (73.23) имеет простой физический смысл: оно выражает закон сохранения полной вероятности всех процессов в системе. Это эквивалентно требованию равенства суммарных потоков вероятности для сходящихся и расходящихся волн. Условие (73.23) приводит к сокращению числа независимых параметров от $2N^2$ у любой N-рядной матрицы до $\frac{1}{2}N(3N-1)$ у S-матрицы: $2N^2 - \frac{1}{2}N(3N-1) = \frac{1}{2}N(N+1)$ — число соотношений между элементами $S_{\beta\alpha}$, задаваемых условием (73.23).

Полное сечение процесса $\alpha \to \beta$ описывается формулой

$$\sigma_{\alpha\beta} = \pi\lambda_\alpha^2 \sum_l (2l+1)\,|\,\delta_{\alpha\beta} - S^l_{\beta\alpha}\,|^2. \tag{73.24}$$

Полное сечение всех событий можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$\sigma_t = \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{el} + \sigma_r, \tag{73.25}$$

где σ_{el} — сечение упругого рассеяния, σ_r — сечение реакций, равное сумме всех неупругих процессов:

$$\sigma_{el} = \sum_l \sigma^{(l)}_{el},\ \sigma^{(l)}_{el} = \pi\lambda_\alpha^2(2l+1)\,|\,1 - S^l_{\alpha\alpha}\,|^2, \tag{73.26}$$

$$\sigma_r = \sum_l \sigma^{(l)}_r,\ \sigma^{(l)}_r = \pi\lambda_\alpha^2(2l+1)\sum_{\beta\neq\alpha}|\,S^l_{\beta\alpha}\,|^2 = \pi\lambda_\alpha^2(2l+1)(1 - |\,S^l_{\alpha\alpha}\,|^2). \tag{73.27}$$

Сечения $\sigma^{(l)}_{el}$ и $\sigma^{(l)}_r$ называют *парциальными сечениями*. Они описывают упругое рассеяние и реакции в состоянии с определенным моментом l. Существенно, что парциальные сечения выражаются только через диагональные элементы $S^l_{\alpha\alpha}$ матрицы столкновений.

Если в системе возможно только упругое рассеяние, то S-матрица диагональна, т.е.

$$S^l_{\beta\alpha} = S^l_{\alpha\alpha}\,\delta_{\alpha\beta}. \tag{73.28}$$

Из условия унитарности (73.23) следует равенство

$$|\,S^l_{\alpha\alpha}\,|^2 + \sum_{\beta\neq\alpha}|\,S^l_{\beta\alpha}\,|^2 = 1, \tag{73.23a}$$

которое с учетом (73.28) принимает вид

$$|\,S^l_{\alpha\alpha}\,| = 1,\ S^l_{\alpha\alpha} = e^{2i\delta_l(E_\alpha)}, \tag{73.29}$$

где $\delta_l(E_\alpha)$ — вещественная функция энергии E_α, называемая *фазой рассеяния*. В этом случае $\sigma_r = 0$, а сечение упругого рассеяния σ_{el} выражается через фазы рассеяния δ_l:

$$\sigma_{el} = \sum_l \sigma^{(l)}_{el},\ \sigma^{(l)}_{el} = 4\pi\lambda_\alpha^2(2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{73.30}$$

Если в системе возможны неупругие переходы, то $|S^l_{\alpha\alpha}|<1$ и $\sigma_r \neq 0$, $\sigma_{el} \neq 0$. Сечения σ_t, σ_{el} и σ_r удовлетворяют неравенствам (для $l=0$)

$$\sigma_t \leqslant 4\pi\lambda_\alpha^2, \quad \sigma_{el} \leqslant 4\pi\lambda_\alpha^2, \quad \sigma_r \leqslant \pi\lambda_\alpha^2. \tag{73.31}$$

Для произвольных l сечения $\sigma_{el}^{(l)}$ и $\sigma_r^{(l)}$ связаны соотношением

$$\sigma_r^{(l)} = \sqrt{4\pi\lambda_\alpha^2 (2l+1)\,\sigma_{el}^{(l)}} - \sigma_{el}^{(l)}, \tag{73.32}$$

определяющим область их допустимых значений (заштрихованная область на рис. 73.1).

Дифференциальное сечение процесса $\alpha \to \beta$ также определяется S-матрицей:

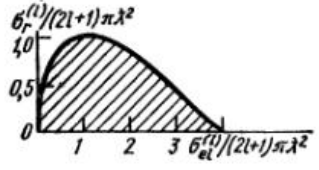


Рис. 73.1

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta) \equiv d\sigma_{\alpha\beta}/d\Omega_\beta = \frac{1}{4}\lambda_\alpha^2 \left| \sum_l (2l+1)(\delta_{\alpha\beta} - S^l_{\beta\alpha}) P_l(\cos\theta) \right|^2, \tag{73.33}$$

где $P_l(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра, связанные со сферической функцией $Y_{l0}(\theta, 0)$ (66.13) соотношением

$$P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{l0}(\theta, 0). \tag{73.34}$$

Частные значения: $P_0 = 1$, $P_1 = \cos\theta$, $P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$, $P_3 = \frac{1}{2} \times (5\cos^2\theta - 1)\cos\theta$.

С S-матрицей связана и другая, часто используемая в теории ядерных реакций, величина, называемая *амплитудой рассеяния* или *амплитудой реакции*

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta) \equiv f_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{\mu_\beta}{\mu_\alpha}}\sqrt{\lambda_\alpha \lambda_\beta}\sum_l (2l+1)(\delta_{\alpha\beta} - S^l_{\beta\alpha}) P_l(\cos\theta), \tag{73.35}$$

где θ — угол между волновыми векторами $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{n}/\lambda_\alpha$, $\mathbf{k}_\beta = \mathbf{n}'/\lambda_\beta$, $\mathbf{n}$ — орт вдоль направления импульса $\mathbf{p}_\alpha = \hbar\,\mathbf{k}_\alpha$ во входном канале, $\mathbf{n}' = \mathbf{r}_\beta/r_\beta$ — орт в выходном канале, направленный вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}_\beta$ относительного движения частиц b и B. Легко видеть, что дифференциальное сечение $\sigma_{\alpha\beta}(\theta)$ (73.33) в этом случае записывается в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{\mu_\alpha \lambda_\alpha}{\mu_\beta \lambda_\beta} |f_{\alpha\beta}(\theta)|^2, \quad \lambda_\alpha = \frac{1}{k_\alpha}, \quad \lambda_\beta = \frac{1}{k_\beta}. \tag{73.36}$$

Амплитуда $f_{\alpha\beta}(\theta)$ имеет простой физический смысл: она определяет плотность потока разлетающихся частиц

$$j_\beta = \frac{\hbar\, k_\beta}{\mu_\beta} |f_{\alpha\beta}(\theta)|^2 \frac{1}{r_\beta^2}, \tag{73.37}$$

с которым связана вероятность перехода $\alpha \to \beta$ в единицу времени

$$dW_{\alpha\beta} = j_\beta\, dS_\beta, \quad dS_\beta = r_\beta^2\, d\Omega_\beta. \tag{73.38}$$

Амплитуда $f_{\alpha\beta}(\theta)$ есть коэффициент при расходящейся волне

$$\Psi'_\alpha \equiv \Psi_\alpha - e^{ik_\alpha r_\alpha}\chi_\alpha \sim f_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta)\,\frac{e^{ik_\beta r_\beta}}{r_\beta}\chi_\beta \text{ при } r_\beta \to \infty, \tag{73.39}$$

где $\exp(ik_\alpha r_\alpha)\chi_\alpha$ — падающая волна во входном канале, χ_α — внутренняя функция канала α (равная произведению внутренних волновых функций частиц a и A реакции (73.1)).

73.2.2. **Ядерные частицы со спином.** Если частицы a, A, b, B реакции (73.1) обладают спинами S_a, S_A, S_b, S_B, то дифференциальное сечение $\sigma_{\alpha\beta}(\theta, \varphi)$ при фиксированных значениях их проекций на ось квантования m_a, m_A, m_b, m_B определяется амплитудой реакции $f_{\alpha\beta}$, которая является матрицей по этим квантовым числам:

$$\sigma_{\alpha m_a m_A \beta m_b m_B}(\theta, \varphi) = \frac{\mu_\alpha k_\beta}{\mu_\beta k_\alpha} |f_{\alpha m_a m_A \beta m_b m_B}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta)|^2. \tag{73.40}$$

Если проекции спинов не фиксированы, то сечение (73.40) следует усреднить по значениям начальных проекций спинов и просуммировать по значениям спинов в конечном состоянии. В результате имеем

$$\sigma_{\alpha\beta}(\theta) = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_A+1)}\frac{\mu_\alpha k_\beta}{\mu_\beta k_\alpha}\sum_{\substack{m_a m_A \\ m_b m_B}} |f_{\alpha m_a m_A \beta m_b m_B}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta)|^2 = \frac{1}{(2s_a+1)(2s_A+1)}\frac{\mu_\alpha k_\beta}{\mu_\beta k_\alpha}\sum_{s m s' m'} |f_{\alpha s m \beta s' m'}(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{k}_\beta)|^2. \tag{73.41}$$

Здесь s, m и s', m' — значения так называемых каналовых спинов и их проекций в начальном и конечном состояниях системы:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_a + \mathbf{S}_A, \quad \mathbf{S}' = \mathbf{S}_b + \mathbf{S}_B;$$
$$s = s_a + s_A,\ s_a + s_A - 1,\ \ldots,\ |s_a - s_A|,$$
$$s' = s_b + s_B,\ s_b + s_B - 1,\ \ldots,\ |s_b - s_B|;$$
$$S_z = \hbar m,\ m = 0, \pm 1, \ldots, \pm s;\ S'_z = \hbar m',\ m' = 0, \pm 1, \ldots, \pm s'.$$

Амплитуда $f_{\alpha m_a m_A \beta m_b m_B}$ выражается через $f_{\alpha s m \beta s' m'}$ с помощью коэффициентов Клебша — Гордана [72.4.3]

$$f_{\alpha m_a m_A \beta m_b m_B} = \sum_{s, s'} (s_a m_a s_A m_A | sm)(s_b m_b s_B m_B | s'm') f_{\alpha s m \beta s' m'}. \tag{73.42}$$

Полные сечения упругого рассеяния σ_{el} и реакции $\sigma_{\alpha\beta}$ записываются в следующем виде:

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{ss'll'j} g(j) \, |\delta_{ll'} \delta_{ss'} - S^j_{\alpha l' s' \alpha l s}|^2, \qquad (73.43)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta}(\theta) \, d\Omega_\beta =$$

$$= \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{ss'll'j} g(j) \, |S^j_{\beta l' s' \alpha l s}|^2, \ \beta \neq \alpha,$$

где $g(j) = (2j+1)/[(2s_a+1)(2s_A+1)]$ — статистический фактор, l и l' — относительные орбитальные моменты в начальном и конечном состояниях, j — полный момент системы, вектор которого $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{S}$, $S^j_{\beta l' s' \alpha l s}$ — матрица столкновений. Если взаимодействие центральное, то S-матрица диагональна по квантовым числам l и s:

$$S^j_{\beta l' s' \alpha l s} = S^j_{\beta \alpha l s} \, \delta_{ll'} \, \delta_{ss'}. \qquad (73.44)$$

73.2.3. Параметризация S-матрицы. Если в системе возможно только упругое рассеяние, то в случае бесспиновых частиц S-матрица может быть параметризована вещественными числами — фазами рассеяния $\delta_l(E)$ согласно (73.29). Это же справедливо, если взаимодействие частиц со спином центральное. В случае нецентральных сил матрица $S^j_{\beta l' s' \alpha l s}$ не имеет диагонального вида (73.44) и для ее параметризации задания фаз недостаточно.

Если частица со спином 1/2 упруго рассеивается на бесспиновом ядре, то при фиксированном $j = l \pm 1/2$ имеем

$$S^j_{\alpha l' 1/2 \alpha l 1/2} = S^j_{\alpha\alpha'} \, \delta_{ll'}, \ S^j_{\alpha\alpha l} = e^{2i\delta^j_l(E_\alpha)}, \qquad (73.45)$$

где $\delta^j_l(E_\alpha)$ — вещественная фаза, зависящая от полного момента системы j.

Если частица со спином 1/2 упруго рассеивается другой частицей, также имеющей спин 1/2, то S-матрица параметризуется тремя независимыми вещественными параметрами δ^j, η^j и ε^j (с учетом условия унитарности)

$$S^j_{\alpha l' s' \alpha l s} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon^j \, e^{2i\delta^j} & i \sin\varepsilon^j \, e^{i(\delta^j + \eta^j)} \\ i \sin\varepsilon^j \, e^{i(\delta^j + \eta^j)} & \cos\varepsilon^j \, e^{2i\eta^j} \end{pmatrix}, \qquad (73.46)$$

где индексы элементов строк и столбцов соответствуют состояниям $l = j-1$, $s=1$ и $l = j+1$, $s=1$ или $l=j$, $s=0$ и $l=j$, $s=1$.

С увеличением спинов частиц растет число независимых параметров, выбор которых оказывается неоднозначным.

Наиболее простой вид S-матрица имеет в модели *«черного» ядра*, радиус которого R значительно больше длины волны падающей частицы λ. Так как согласно (73.18) на такое ядро попадают все частицы с $l \leqslant R/\lambda$, то

$$S^l_{\alpha\alpha} = 0, \quad l\hbar < R,$$
$$S^l_{\alpha\alpha} = 1, \quad l\hbar \geqslant R. \qquad (73.47)$$

Тогда из (73.26) и (73.27) следует, что

$$\sigma_{el} = \sigma_r = \sum_{l=0}^{R/\hbar} (2l+1) \, \pi\lambda^2 \approx \pi R^2, \ \sigma_t \approx 2\pi R^2. \qquad (73.48)$$

Эти результаты подтверждаются экспериментально.

При параметризации S-матрицы следует использовать **теорему взаимности**

$$S_{\beta\alpha} = \beta^*_{-\alpha} \beta_{-\beta} S_{-\alpha-\beta}, \quad |\beta_{-\alpha}| = |\beta_{-\beta}| = 1, \qquad (73.49)$$

которая устанавливает общую связь между матричными элементами S-матрицы для прямых ($\alpha \to \beta$) и обращенных во времени ($-\beta \to -\alpha$) переходов. Под обращенным во времени переходом $-\beta \to -\alpha$ понимают переход из состояния $-\beta$ в состояние $-\alpha$, которые отличаются от конечного β и начального α состояний прямого перехода $\alpha \to \beta$ знаками всех величин, изменяющихся при обращении времени (т. е. при замене t на $-t$). Из (73.49) следует, что

$$k_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta} = k_\beta^2 \sigma_{-\beta-\alpha}, \qquad (73.50)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ и $\sigma_{-\beta-\alpha}$ — сечения прямого ($\alpha \to \beta$) (73.24) и обращенного во времени ($-\beta \to -\alpha$) переходов.

В системах, свойства которых инвариантны по отношению к вращениям и отражениям пространственных координат и обращению времени, выполняется *условие детального равновесия*

$$S_{\beta\alpha} = S_{\alpha\beta}, \ k_\alpha^2 \sigma_{\alpha\beta} = k_\beta^2 \sigma_{\beta\alpha} \qquad (73.51)$$

для прямого и обратного переходов.

Условие взаимности позволяет уменьшить число независимых вещественных параметров у S-матрицы на $N(N-1)$. С учетом унитарности общее число таких параметров

$$n = 2N^2 - \frac{1}{2} N(N+1) - N(N-1) = \frac{1}{2} N(N+1), \qquad (73.52)$$

где N — число открытых каналов.

Из принципа детального равновесия вытекают следующие важные соотношения для отношений дифференциальных и полных сечений прямых и обратных процессов:

$$\frac{d\sigma_{\alpha\beta}/d\Omega_\beta}{d\sigma_{\beta\alpha}/d\Omega_\alpha} = \frac{(2s_b+1)(2s_B+1) k_\beta^2}{(2s_a+1)(2s_A+1) k_\alpha^2},$$

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\sigma_{\beta\alpha}} = \frac{(2s_b+1)(2s_B+1) k_\beta^2}{(2s_a+1)(2s_A+1) k_\alpha^2}. \qquad (73.53)$$

Эти формулы позволяют определять спин одной из частиц по известным сечениям и спинам других.

Формула (73.41) дает общий вид сечений эндотермических и экзотермических реакций при низких энергиях $E_\alpha \ll |Q_{\alpha\beta}|$. Для нейтральных частиц имеем

$$\sigma_{экз} = \frac{\text{const}}{v_\alpha}, \quad \sigma_{энд} = \text{const} \sqrt{E - E_{порог}}, \qquad (73.54)$$

где в первом случае учтено, что импульс $p_\beta = \hbar k_\beta = \mu_\beta v_\beta = \sqrt{2\mu_\beta |Q_{\alpha\beta}|} = \text{const}$, а во втором — скорости в каналах равны соответственно $v_\alpha = \hbar k_\alpha/\mu_\alpha = \sqrt{2|Q_{\alpha\beta}|/\mu_\alpha} = \text{const}$, $v_\beta = \hbar k_\beta/\mu_\beta = \sqrt{2(E-E_{\text{порог}})/\mu_\beta}$. При низких энергиях $k_\alpha = k_\beta$ и сечение упругого рассеяния постоянно: $\sigma_{el} = \text{const}$ (рис. 73.2).

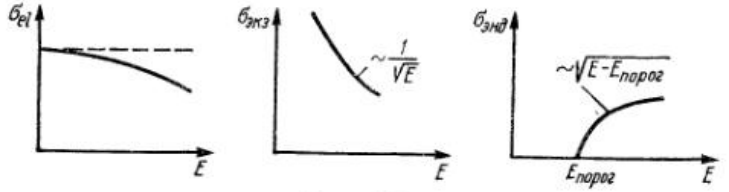


Рис. 73.2

73.3. Механизмы ядерных реакций

Ядерная реакция представляет собой сложный процесс, сопровождающийся перестройкой атомного ядра. Точное описание реакции требует решения задачи многих тел, поэтому практически невозможно. Здесь, как и при описании структуры ядра [72], большое применение нашли модели механизмов ядерных процессов. Несмотря на то что наблюдается большое разнообразие ядерных реакций, они могут быть условно разделены на две большие группы, в основе которых лежат два альтернативных представления о возможных механизмах ядерных процессов. К первой группе относят реакции с образованием составного ядра [73.3.1], а ко второй — прямые ядерные реакции [73.3.2]. Наблюдаются также реакции, занимающие промежуточное положение между указанными двумя группами. Их принято называть *предравновесными ядерными реакциями*.

73.3.1. Реакции с образованием составного ядра. При столкновении частицы a с покоящимся ядром A механизм их взаимодействия зависит от кинетической энергии падающей частицы a. Если эта энергия мала, то столкновение сопровождается поглощением частицы ядром, при котором ее энергия быстро распределяется между всеми частицами образовавшейся составной системы. Возможность поглощения частицы a ядром A обусловлена двумя факторами: короткодействием ядерных сил и малой энергией падающей частицы. Сильное взаимодействие нуклонов, подчиняющихся принципу Паули, позволяет рассматривать ядро A как ферми-газ [72.3] с импульсом Ферми $p_F = (\hbar/r_0)(9\pi/8)^{1/3}$, где $r_0 \approx 1{,}2$ фм. Считая среднее расстояние между нуклонами равным длине волны де Бройля $\lambda \approx \hbar/p_F$, можно оценить среднее время t_0 между столкновениями нуклонов в ядре по формуле $t_0 \sim \lambda/v_F = \hbar m_N/p_F^2 \sim 10^{-21}$ с. Время t_0 называют *характерным ядерным временем*. При малых энергиях время t свободного пролета частицей a области взаимодействия ее с нуклонами ядра A оказывается больше t_0. Образующаяся из ядра A и частицы a система C^* называется *составным (компаунд) ядром*. Составное ядро находится в возбужденном состоянии. Энергия возбуждения равномерно распределена между всеми степенями свободы ядра C^*. Поскольку вероятность концентрации энергии возбуждения только на одной из частиц ядра C^* мала, время его жизни оказывается значительно больше характерного ядерного времени. Ядро C^* существует до флуктуации, при которой одна из частиц приобретает достаточную для вылета энергию, или же до испускания γ-кванта, сопровождающегося перестройкой всей структуры ядра C^* с переходом его в основное состояние C. Таким образом, в модели составного ядра реакция (73.1) протекает в две стадии (Бор, 1936)

$$a + A \to C^* \to B + b. \tag{73.55}$$

Ее характерной особенностью является *независимость процесса распада* ядра C^* от способа его образования. Физическая причина независимости отдельных стадий реакций, идущих через составное ядро, заключается в большом времени жизни C^*, в течение которого дополнительная энергия, привнесенная частицей a, многократно перераспределяется между всеми частицами составной системы. Такая независимость позволяет записать сечение реакции (73.55) σ_{ab} в виде произведения

$$\sigma_{ab} = \sigma_{aC} W_{Cb}, \tag{73.56}$$

где σ_{aC} — сечение образования составного ядра, W_{Cb} — вероятность его распада с испусканием частицы b. Условия применимости выражения (73.56) имеют вид

$$\lambda_a \ll R_C, \quad E_a \ll (A-1)S_a, \tag{73.57}$$

где λ_a — среднее значение длины свободного пробега падающей частицы a в ядре C^*, R_C — радиус ядра C^*, E_a — энергия падающей частицы, A — число нуклонов ядра A, S_a — энергия отделения частицы a от ядра C^*. Эти условия выполняются для $A > 10$ при энергиях $E_a < 50$ МэВ, если положить $S_a \approx 8$ МэВ. Из (73.56) следует, что для реакций $A(a, b)B$, $A(a, b')B'$, $A(a, b'')B''$, ... и $A'(a', b)B$, $A'(a', b')B'$, $A'(a', b'')B''$, ... должно выполняться соотношение

$$\sigma_{ab} : \sigma_{ab'} : \sigma_{ab''} : \cdots = \sigma_{a'b} : \sigma_{a'b'} : \sigma_{a'b''} : \cdots, \tag{73.58}$$

которое может быть использовано для проверки гипотезы о составном ядре.

Другой особенностью реакций, идущих через составное ядро, является предсказываемая *симметрия углового распределения продуктов реакции* относительно угла рассеяния $\theta = 90^\circ$ (в системе центра инерции). Согласно теории ядерных реакций такая симметрия обусловлена тем, что составное ядро C^* характеризуется только одной векторной величиной — полным моментом, который складывается из спина $\mathbf{S}_a$ падающей частицы a и орбитального момента $\mathbf{l}$ относительного $a - A$ движения. Если частицы a неполяризованы, то направления их спинов симметричны по всем направлениям. Так как момент $\mathbf{l}$ перпендикулярен импульсу $\mathbf{p}_a$ налетающей частицы, $\mathbf{l} \perp \mathbf{p}_a$, и ориентирован в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{p}_a$, случайным образом, то распад ядра C^* будет обладать указанной симметрией. Из асимметрии углового распределения следует, что данная реакция идет не через составное ядро (рис. 73.3).

Реакции, идущие через составное ядро, разделяются на *резонансные* и *нерезонансные*. Возможность резонансного рассеяния связана с характером энергетического спектра ядра, представляющего собой дискретный ряд уровней [72.4]. Более точное исследование спектра ядра показывает, что представление об уровнях с точно фиксированной энергией является идеализацией, справедливой, строго говоря, только для основного состояния стабильного ядра. Все возбужденные состояния характеризуются конечным временем жизни из-за возможности

радиационных переходов в состояния с меньшей энергией (с излучением γ-кванта). Если энергию E_λ ядра C в каком-либо состоянии λ отсчитывать от энергии его основного состояния $E_C = m_C c^2$, то значение E_λ будет совпадать с энергией возбуждения. Энергия основного состояния ядра в этой системе отсчета будет $E_0 = 0$. Из соотношения неопределенности (61.7) следует, что с конечной величиной времени жизни ядра на данном уровне λ, $\tau_\lambda \approx \Delta t/2$, связана неопределенность энергии $\Delta E = \hbar/2\tau_\lambda = \Gamma_\gamma^\lambda/2$. Величина Γ_γ^λ, выраженная в энергетических единицах, называется *радиационной шириной уровня* λ. Ширина уровня λ тем больше, чем короче время жизни τ_λ ядра в состоянии λ. Ядро может возбуждаться, т. е. переходить в состояние λ, только в том случае, если ему будет сообщена энергия E_λ. Спектр ядра C схематически показан на рис. 73.4. Энергия $S_{\min}$, равная энергии нижайшего порога, при котором из ядра C может вылететь одна из его частиц, определяет границу между дискретным и квазидискретным спектрами.

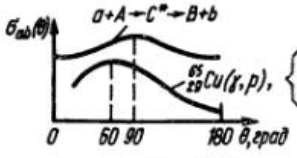


Рис. 73.3

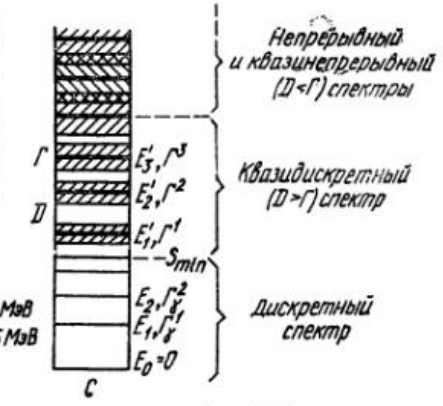


Рис. 73.4

Квазидискретный спектр характеризуется значительно большими, по сравнению с дискретным спектром, ширинами уровней Γ^λ, величина которых, однако, все еще меньше расстояний D^λ между ними, $\Gamma^\lambda < D^\lambda$. По мере увеличения энергии ширины Γ^λ увеличиваются и уровни переходят в область непрерывного спектра там, где они перекрываются. Переход в непрерывный спектр при $E_\lambda > S_{\min}$, где E_λ — энергия возбуждения ядра C, связан с возможностью распада этого ядра с вылетом одной из его частиц. Наличие между дискретным и непрерывным спектрами промежуточной области, где $\Gamma^\lambda < D^\lambda$, объясняется тем, что из-за наличия большого числа степеней свободы вероятность концентрации всей энергии возбуждения E_λ у одной частицы (для ее отделения от ядра) мала. Ширина квазидискретного уровня, таким образом,

$$\Gamma^\lambda = \sum_a \Gamma_a^\lambda + \Gamma_\gamma^\lambda, \qquad (73.59)$$

где Γ_a^λ — ширина, соответствующая испусканию частицы a ядром C в состоянии λ. В соответствии с (73.59) ширины Γ^λ и Γ_a^λ принято называть соответственно полной и парциальной шириной уровня E_λ. Суммирование в (73.59) производится по всем открытым каналам. При возрастании энергии E_λ полная ширина Γ^λ увеличивается за счет увеличения вероятности испускания большего числа частиц a (числа парциальных ширин Γ_a^λ) и вероятности испускания данной частицы a (увеличения ширины Γ_a^λ).

Выше области квазидискретного спектра, вообще говоря, находится квазинепрерывный спектр, который, несмотря на то что уровни перекрываются, при некоторых условиях может сохранить черты дискретного спектра. Истинный непрерывный спектр ядра расположен в области энергий возбуждения, сравнимых с его полной энергией связи, при которых вероятность вылета любой частицы из ядра равна единице.

Составное ядро C^*, образующееся в реакции (73.55), характеризуется энергией E_λ, находящейся в области квазидискретного спектра:

$$E_\lambda = E_A^* + E_a^\lambda + S_a, \qquad (73.60)$$

где E_A^* — энергия возбуждения ядра A, E_a^λ — энергия частицы a, испускаемой составным ядром в состоянии λ, S_a — энергия связи ядра C^* относительно распада на частицу a и ядро A, $S_a = (m_a + m_A - m_C)c^2$. Вероятность W_{Cb} распада составного ядра C^* с испусканием частицы b имеет вид

$$W_{Cb} = \Gamma_b^\lambda/\Gamma^\lambda, \quad \Gamma^\lambda = \Gamma_a^\lambda + \Gamma_b^\lambda + \Gamma_{b'}^\lambda + \cdots, \qquad (73.61)$$

где Γ^λ — полная ширина уровня образовавшегося составного ядра в состоянии λ, равная сумме парциальных ширин Γ_a^λ, Γ_b^λ, $\Gamma_{b'}^\lambda$, ..., соответствующих всем открытым каналам реакции (73.55). Если полная энергия E системы во входном канале близка к энергии изолированного уровня составного ядра E_λ, то зависимость парциального сечения $\sigma_{ab}^{(l)}$ реакции (73.55) от энергии E является резонансной и описывается формулой **Брейта — Вигнера** (1936) для изолированного уровня

$$\sigma_{ab}^{(l)} = \pi\lambda_a^2 (2l+1) \frac{\Gamma_a^\lambda \Gamma_b^\lambda}{(E - E_\lambda)^2 + \left(\frac{\Gamma^\lambda}{2}\right)^2}, \quad a \neq b, \qquad (73.62)$$

где, как и в (73.43), $\lambda_a = 1/k_a = \hbar/\sqrt{2\mu_\alpha E_a}$ — длина волны падающей частицы a, $\mu_\alpha = m_a m_A/(m_a + m_A)$ — приведенная масса системы во входном канале. В резонансе (при $E = E_\lambda$) сечение имеет вид

$$\sigma_{ab}^{(l)}(E = E_\lambda) = 4\pi\lambda_a^2 (2l+1) \Gamma_a^\lambda \Gamma_b^\lambda/(\Gamma^\lambda)^2. \qquad (73.63)$$

Из (73.56), (73.61) и (73.62) видно, что сечение $\sigma_{ab}^{(l)}$ можно представить в виде (73.56), где

$$\sigma_{aC}^{(l)} = \pi\lambda_a^2 (2l+1) \frac{\Gamma_a^\lambda \Gamma^\lambda}{(E - E_\lambda)^2 + \left(\frac{\Gamma^\lambda}{2}\right)^2} \qquad (73.64)$$

— сечение образования составного ядра через входной канал в состоянии с энергией E_λ. В случае процесса упругого рассеяния возникает интерференция между испусканием частицы a составным ядром и рас-

сеянием падающей частицы a ядром A. Поэтому сечение такого процесса σ_{aa} отличается от (73.62) наличием дополнительных слагаемых

$$\sigma_{aa}^{(l)} = \pi\lambda_a^2 (2l+1) \left| A_{\text{пот}}^{(l)} + \frac{i\Gamma_a^\lambda}{E - E_\lambda + \frac{i}{2}\Gamma^\lambda} \right|^2, \qquad (73.65)$$

где $A_{\text{пот}}^{(l)}$ называется *амплитудой потенциального рассеяния*. Она описывает рассеяние, происходящее при замене ядра абсолютно отражающей сферой радиусом R. В простейшем случае бесспиновых частиц и $l = 0$ имеем

$$A_{\text{пот}}^{(l=0)} = e^{2ik_aR} - 1. \qquad (73.66)$$

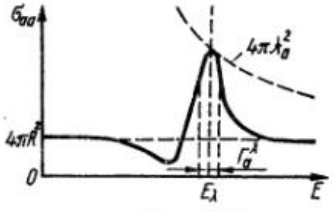


Рис. 73.5

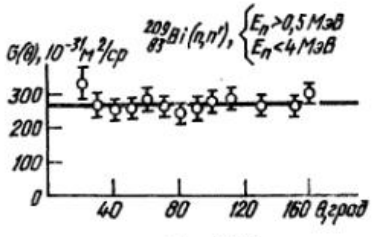


Рис. 73.6

Вдали от резонанса при $k_aR \ll 1$ сечение $\sigma_{aa} = 4\pi R^2$. Второе слагаемое в (73.65) называют *амплитудой резонансного рассеяния* $A_{\text{рез}}$. При $E < E_\lambda$ амплитуды $A_{\text{пот}}$ и $A_{\text{рез}}$ имеют противоположные знаки, а при $E > E_\lambda$ — одинаковые. Общий вид сечения показан на рис. 73.5.

Если пучок падающих частиц a не является монохроматическим по энергии E и разброс ΔE по энергиям превышает расстояния между уровнями D, $\Delta E \gg D$, то вычисленные выше сечения реакции нужно усреднять по значениям E:

$$\bar{\sigma}(E) = \int dE' f(E, E') \sigma(E'), \qquad (73.67)$$

где $\sigma(E)$ — истинное сечение, $f(E, E')$ — некоторая весовая функция, нормированная на единицу. Ее называют *функцией разрешения прибора*. В простейшем случае равновероятного распределения

$$\bar{\sigma}(E) = \frac{1}{\Delta E} \int_{E-\Delta E/2}^{E+\Delta E/2} dE' \sigma(E'), \qquad (73.68)$$

где ΔE — интервал усреднения.

Используя определение среднего сечения и учитывая, что вдали от резонанса сечения малы, а в окрестности резонанса функция $f(E, E')$ изменяется мало, для полного сечения σ_t (73.25), усредненного по энергии E в пределах ее неопределенности, находим выражение

$$\bar{\sigma}_t = \pi\lambda_a^2 \zeta, \quad \zeta = 2\pi (\bar{\Gamma}_a / \bar{D}), \qquad (73.69)$$

где $\bar{\Gamma}_a$ и $\bar{D}$ — усредненные по всем уровням в интервале ΔE парциальная ширина Γ_a^λ и расстояние между уровнями D_λ. Величина ζ называется коэффициентом *прилипания*, а отношение $\bar{\Gamma}_a/\bar{D}$ — *силовой функцией*. Коэффициент прилипания характеризует вероятность того, что частица a прилипнет к ядру A. Если частица a не имеет электрического заряда (нейтрон), то при $E \gg V$ имеем $\zeta \approx 1$, а при $E \ll V$ коэффициент $\zeta \sim v_a$, где V — потенциал взаимодействия нейтрона с ядром, v_a — скорость налетающего нейтрона.

При больших энергиях возбуждения составное ядро попадает в область квазинепрерывного или непрерывного спектра. Реакция (73.55) является нерезонансной и описывается *моделью испарения*. Согласно этой модели попавшая в ядро частица быстро теряет свою энергию, передавая ее всем нуклонам ядра. В составной системе устанавливается термодинамическое равновесие с температурой T, отличной от нуля [72.2.5; 72.3.3]. По истечении времени, равному времени жизни составного ядра, последнее распадается с вылетом одной из его частиц b. Согласно статистическому подходу этот процесс аналогичен процессу испарения частицы из капли жидкости. Число частиц b, испускаемых составным ядром с энергией в интервале ΔE, определяется выражением (Вайскопф, 1937)

$$N_b = W(E) \Delta E, \quad W(E) \sim E \sigma_{bC}(E) \rho_B(E_f), \qquad (73.70)$$

где W — функция распределения (спектр) вылетевших частиц, $E_f = E_C - E_b - S_b$ — энергия системы в конечном состоянии, E_C — энергия составного ядра, E_B — энергия возбуждения ядра B, S_b — энергия связи частицы b, $\sigma_{bC}(E)$ — сечение образования составного ядра по отношению к частице b, $\rho_B(E_f)$ — плотность уровней конечного ядра B (72.14). В модели ферми-газа плотность ρ_B описывается выражением (72.34).

Из модели испарения следует, что угловое распределение продуктов реакции (73.55) должно быть изотропным (рис. 73.6). Как правило, угловое распределение частиц в реакциях не обладает указанной изотропией. Это свидетельствует о том, что вылет частиц из составного ядра не является статистическим (испарительным). Кроме того, опыт показывает, что вместо монотонного роста сечений с увеличением массового числа A и уменьшения их с увеличением энергии падающих частиц, предсказываемых моделью составного ядра для системы C^* в области квазинепрерывного спектра, наблюдаются так называемые *гигантские резонансы* с шириной $\sim$ 1—2 МэВ. Модель составного ядра полностью пренебрегает эффектами одночастичных движений, которые при слабом поглощении оказываются существенными. Модель не учитывает влияние принципа Паули, приводящего к значительному ослаблению поглощения [73.3.3].

73.3.2. Прямые ядерные реакции. Ядерные процессы, в которых налетающая частица непосредственно передает энергию какой-либо простой степени свободы ядра (например, отдельному нуклону), называются *прямыми ядерными реакциями*. Степень свободы, которая получает энергию, может быть как коллективной, так и одночастичной. Продолжительность прямой реакции имеет порядок характерного ядерного времени $t_0 \sim 10^{-21}$ — 10^{-22} с [73.3.1] и равно времени пролета частицы через ядро. Прямые процессы идут без образования составного ядра. Они наблюдаются при взаимодействии любых налетающих частиц со всеми атомными ядрами. Из ядер в результате прямой реакции могут вылетать одиночные нуклоны, пары нуклонов, дейтроны $^2_1$H, ядра гелия $^3_2$He, $^4_2$He, лития Li, бериллия Be и другие более тяжелые ядра — осколки, называемые фрагментами.

Прямые процессы осуществляются в реакциях: 1) упругого рассеяния — (n, n); (p, p); 2) перезарядки — (n, p), (p, n); 3) срыва — (d, p), (d, n); 4) подхвата — (p, d), (n, d); 5) квазиупругого выбивания — $(p, 2p)$, (p, pn); 6) с участием сложных частиц — (n, t), $(n, {}^3_2\mathrm{H})$, (n, α), (p, α), (t, α); 7) с участием тяжелых ионов — ${}^{14}_{7}\mathrm{N}({}^{14}_{7}\mathrm{N}, {}^{13}_{7}\mathrm{N}){}^{15}_{7}\mathrm{N}$, ${}^{14}_{7}\mathrm{N}({}^{19}_{9}\mathrm{F}, {}^{18}_{9}\mathrm{F}){}^{15}_{7}\mathrm{N}$; 8) кулоновского возбуждения ядер и др.

При налетающих частицах с большой энергией $E \gtrsim 1$ ГэВ/нуклон прямые процессы приводят к так называемым *инклюзивным реакциям* типа

$$a + A \to b + X, \tag{73.71}$$

в которых регистрируется только одна частица b. Здесь под X подразумевают все допустимые продукты реакций, число которых может быть

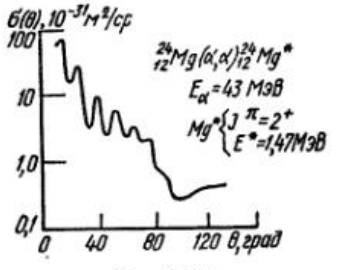


Рис. 73.7

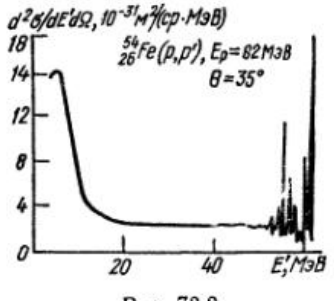


Рис. 73.8

очень велико. Большое число открытых каналов реакции (73.71) при высоких энергиях делает практически невозможной регистрацию всех без исключения вылетающих частиц. В инклюзивных реакциях наблюдается явление *ядерного скейлинга*, которое состоит в том, что энергетический спектр частиц b, вылетающих под углом $\theta \approx 180°$, не зависит от их природы, т. е. является универсальным, и простирается до очень высоких энергий, соответствующих столкновению частицы a с ядром A как целым.

Прямые процессы при низких энергиях происходят на поверхности ядра. Это объясняется тем, что при энергиях $E < 100$ МэВ вероятность пролета частицы через ядро без поглощения мала. Поверхностный характер ядерной реакции проявляется в том, что в угловых распределениях продуктов реакции наблюдаются отчетливые максимумы, положение которых (при малых θ) можно оценить по формуле (рис. 73.7)

$$\hbar \Delta L = 2 p_a R \sin \frac{\theta}{2},$$

где ΔL — переданный ядру A орбитальный момент, $J_A + J_B \geqslant \Delta L \geqslant |J_A - J_B|$, J_A, J_B — спины ядер A и B реакции (73.1), R — радиус поверхности, на которой происходит реакция, p_a — импульс частицы a. Для сечения реакции, приведенного на рис. 73.7, имеем

$$\Delta L = 2, \ \theta \approx 10°, \ R = R_\alpha + R_{\mathrm{Mg}} \quad R = 6 \text{ фм}.$$

Характерными особенностями прямых ядерных реакций являются: 1) вылет частиц преимущественно вперед; 2) энергия вылетающей частицы близка к энергии падающей частицы; 3) вероятности вылета протонов и нейтронов одинаковы. При низких энергиях (порядка десятков МэВ) прямые процессы сопровождаются другими механизмами ядерных реакций (например, механизмом испарения). Типичный энергетический спектр показан на рис. 73.8, где область энергий вылетающих протонов $5 \text{ МэВ} < E' < 7$ МэВ соответствует механизму их испарения, а $50 \text{ МэВ} < E' < 60$ МэВ — прямому процессу. Область $10 \text{ МэВ} < E' < 50$ МэВ является промежуточной между этими двумя случаями.

Прямые реакции срыва и подхвата широко используются для изучения структуры атомного ядра. Теория прямых ядерных реакций строится на основе формализма S-матрицы [73.2]. Широкое распространение получила также *дисперсионная теория прямых ядерных реакций*. В основу этой теории положена гипотеза о том, что амплитуды прямых процессов (элементы матрицы столкновений) являются аналитическими функциями кинематических переменных. Математический аппарат дисперсионного подхода заимствован из теории элементарных частиц.

73.3.3. Оптическая модель. Опыт показывает, что кроме узких резонансов, наблюдаемых при малых энергиях падающих частиц в сечениях рассеяния и реакции [73.3.1] в экспериментах с высоким разрешением, существуют гигантские резонансы с шириной $\Gamma_{\text{одн}} \sim 1$—2 МэВ. Такие широкие резонансы в сечениях объясняет *оптическая модель* (Фешбах, Портер, Вайскопф, 1953).

В оптической модели задача о движении многих нуклонов сводится к одночастичной задаче, в которой взаимодействие падающей частицы нуклона) с ядром описывается одночастичным комплексным потенциалом вида

$$V(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}) + i W(\mathbf{r}). \tag{73.72}$$

Вещественная часть $U(\mathbf{r})$ потенциала $V(\mathbf{r})$ характеризует усредненный потенциал ядра мишени, который учитывает как спин-орбитальные эффекты, так и поправки, связанные с искажениями формы ядра (отличие от сферической симметрии). Мнимая часть $W(\mathbf{r})$ учитывает связь рассеиваемого нуклона с внутренними степенями свободы ядра мишени, которые приводят к затуханию одночастичного движения. Физически это означает, что обмен энергией между нуклоном и мишенью приводит в конечном счете к образованию очень сложной конфигурации, которая не может быть описана на микроскопическом уровне и потому параметризуется мнимой добавкой к усредненному (одночастичному) потенциалу. При таком подходе гигантские резонансы представляют собой одночастичные резонансы в комплексном потенциале (73.72) и соответствуют состояниям модели оболочек [72.4] в непрерывном спектре.

Вводя коэффициент поглощения ядерного вещества Σ как величину, обратную длине свободного пробега λ нуклона в ядре,

$$\Sigma = \frac{1}{\lambda} = \rho_0 \sigma, \tag{73.73}$$

где ρ_0 — плотность нуклонов внутри ядра, σ — сечение двухнуклонного взаимодействия, используя уравнение Шредингера (62.38) с гамильтонианом (62.56), (73.72) и переходя к уравнению непрерывности [62.2.3], находим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} - 2W(\mathbf{r})\rho = 0, \quad W(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar}{2} v \Sigma, \tag{73.74}$$

где v — скорость нуклона, т. е. мнимая часть оптического потенциала пропорциональна коэффициенту поглощения Σ. Следует иметь в виду, что поглощение нуклонов ядерным веществом здесь условное. Волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ в (62.38) описывает движение выделенного нуклона в среднем потенциале $V(\mathbf{r})$ мишени. Все другие более сложные состояния движения, приводящие к уменьшению вероятности состояния $\Psi(\mathbf{r}, t)$, т. е. к распаду одночастичного состояния, описываются мнимой добавкой $W(\mathbf{r})$. Поэтому законы сохранения числа барионов и полной вероятности процесса в целом не нарушаются.

Так как гамильтониан (62.56) с потенциалом (73.72) неэрмитов [62.1.2], то энергия E системы, определяемая как среднее (62.34) от гамильтониана $\hat{H}$, не будет действительным числом. Вводя обозначения

$$E \equiv \langle \hat{H} \rangle = E_{\text{одн}} - i\frac{\Gamma_{\text{одн}}}{2}, \quad \Gamma_{\text{одн}} > 0, \tag{73.75}$$

легко показать, что

$$E_{\text{одн}} = \left\langle -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U \right\rangle, \quad \Gamma_{\text{одн}} = -2\langle W \rangle, \tag{73.76}$$

где $\Gamma_{\text{одн}}$ — ширина одночастичного состояния с энергией $E_{\text{одн}}$ [73.3.1], описывающая затухание одночастичного движения со временем (см. (62.72)). Случаю абсолютно черного ядра соответствует предельный переход $W \to -\infty$.

Форму и параметры оптического потенциала (73.72) подбирают по наилучшему согласованию с экспериментальными данными. Формально задача сводится к решению стационарного уравнения Шредингера (62.74) с потенциалом (73.72). В простейшем случае сферически симметричного ядра и в пренебрежении спинами оптический потенциал выбирают в виде

$$V(r) = -V f(r) - i W g(r), \tag{73.77}$$

где параметры V и W характеризуют глубины вещественной и мнимой частей потенциала, а функции $f(r)$ и $g(r)$ — их радиальные зависимости. Функция $f(r)$ должна приближенно совпадать с радиальной зависимостью распределения плотности в ядре (70.27) [70.2.2] и выбирается в форме потенциала Вудса — Саксона (72.40),

$$f(r) = \{1 + \exp[(r - R)/a]\}^{-1}, \quad R = r_0 A^{1/3}.$$

Если выбрать

$$f(r) = g(r), \tag{73.78}$$

то поглощение будет осуществляться всем объемом ядра (*объемное поглощение*). В случае тяжелых ядер происходит поверхностное поглощение ($E < 40$—50 МэВ). Его описывают мнимой частью оптического потенциала, которая отлична от нуля вблизи граничной поверхности ядра. Обычно для *поверхностного поглощения* полагают

$$g(r) = \exp[-(r - R)^2/b^2]$$

(гауссовая функция), где параметр b характеризует ширину области поглощения. Часто мнимую часть $W(r)$ задают в виде суммы объемного и поверхностного потенциалов, полагая

$$Wg(r) = W' f(r) + 4aW'' df(r)/dr, \tag{73.79}$$

где W' и W'' — глубины потенциалов объемного и поверхностного поглощений.

Оптическая модель не учитывает резонансную зависимость сечений от энергии, связанную с квазидискретной структурой спектра составного ядра [73.3.1]. В области узких резонансов она приводит к величинам, усредненным по интервалу энергий, содержащему большое число резонансов. Оптическая модель хорошо описывает взаимодействие нуклонов с ядрами в широком интервале энергий — от 0 до 100 МэВ.

73.3.4. Фотоядерные реакции. Эффект Мессбауэра. Опыт показывает, что атомные ядра взаимодействуют с электромагнитным полем. Процессы взаимодействия квантов электромагнитного поля — фотонов (γ-квантов) высокой энергии — сопровождающиеся испусканием протонов, нейтронов, дейтронов и других частиц, называют *фотоядерными реакциями*. Такие процессы могут осуществляться при условии, если энергия γ-кванта больше энергии связи нуклона в ядре, $E_\gamma > 8$ МэВ. Наиболее изучены фотоядерные реакции типа (γ, p), (γ, n), (γ, d), (γ, pn), (γ, α) и др.

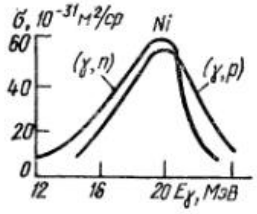


Рис. 73.9

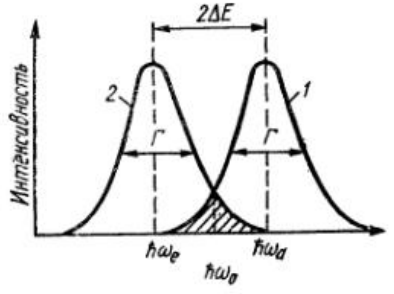


Рис. 73.10

К фотоядерным реакциям относят также процессы рождения π-мезонов при облучении γ-квантами водородной мишени,

$$\gamma + n \to p + \pi^-, \quad \gamma + p \to p + \pi^0. \tag{73.80}$$

Такие процессы возможны при $E_\gamma > 150$ МэВ.

Необходимые для реакции γ-кванты получают с помощью жесткого тормозного излучения, возникающего при торможении быстрых электронов [69]. Особенностью реакций типа (γ, n), (γ, p) и (γ, pn) являются функции возбуждения с широким максимумом при $E_\gamma \sim 12$—15 МэВ (рис. 73.9). Ширина этих максимумов (резонансов) $\Gamma \sim 2$—8 МэВ. Они называются *гигантскими резонансами*. Природа этих резонансов заключается в том, что при поглощении фотонов ядром в последнем возникают колебания протонов и нейтронов одних относительно других (А. Б. Мигдал, 1945).

В предположении, согласно которому протоны и нейтроны можно рассматривать как две несжимаемые жидкости, резонансная частота поглощения γ квантов $\omega_0 \sim R^{-1/2}$ и положение максимума сечения должно зависеть от массового числа ядра по закону $E = \hbar\omega_0 \sim A^{-1/6}$, что согласуется с опытными данными.

Если энергия γ-кванта в точности равна энергии одного из уровней возбуждения ядра, то происходит процесс его резонансного возбуждения. При ядерном резонансном поглощении γ-кванты, испускаемые при переходе из возбужденного состояния ядра в основное состояние, поглощаются при обратном переходе. Это явление трудно наблюдать в ядерной физике, так как линии поглощения $\hbar\omega_a$ (рис. 73.10, кривая 1)

и линии испускания $\hbar\omega_e$ (рис. 73.10, кривая 2), где ω_a и ω_e — частоты, смещены одна относительно другой на величину (рис. 73.10)

$$\Delta\omega = \Delta E/\hbar, \quad \Delta E = \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2Mc^2} \approx \frac{(\hbar\omega)^2}{2Mc^2}, \tag{73.81}$$

где ΔE — энергия отдачи ядра, которую оно приобретает при испускании фотона, M — масса ядра, $\hbar\omega = E^*$ — энергия возбуждения ядра, ω_0 — частота фотонов, которые испускало бы ядро при отсутствии отдачи. Для тяжелых ядер $\Delta E \sim 0{,}01$ эВ, для легких — $\Delta E = 10$—100 эВ. Это больше ширины Γ низких возбужденных уровней ядра. Для наблюдения резонансного возбуждения необходимо, чтобы линии поглощения и испускания совпадали. Если ядра сильно связаны в кристаллической решетке, то возможно испускание и поглощение γ-квантов без отдачи (Мессбауэр, 1958). *Явление упругого (без изменения внутренней энергии твердого тела) испускания и поглощения γ-квантов* называется эффектом Мессбауэра. Это явление приводит к тому, что спектр γ-лучей, испускаемых возбужденными ядрами, входящими в состав кристаллов твердого тела, содержит две компоненты (рис. 73.11): одну с энергией, равной энергии перехода E^*, а вторую — сдвинутую относительно E^* на величину ΔE. Первая компонента соответствует переходам, при которых внутренняя энергия кристалла не изменяется. Импульс отдачи здесь приобретает весь кристалл, масса которого много больше массы отдельного ядра и, следовательно, потери энергии на отдачу ничтожно малы. Линия, соответствующая этому упругому процессу, узкая. Вторая компонента — широкая линия, обусловленная процессами, сопровождающимися изменением колебательного состояния кристаллической решетки (возбуждением фононов). Интенсивность этой линии, характеризующей вероятность таких возбуждений, мала при $\Delta E < \hbar\omega_m = k\theta$, где ω_m — максимальная частота колебаний решетки, θ — так называемая *температура Дебая*, указывающая для каждого кристалла ту область, где становится существенным квантование энергии колебаний. Она учитывает тот факт, что колебания атомов в кристаллической решетке связаны между собой — смещение одного из атомов из положения равновесия влечет за собой смещения других соседних с ним атомов. Это соответствует модели кристалла в виде системы N упругосвязанных между собой атомов, имеющей $3N$ степеней свободы. У ядра ^{57}Fe $\Delta E \ll k\theta$, поэтому даже при комнатной температуре большинство ядерных переходов происходит упруго. У ядра ^{191}Ir $\Delta E \sim k\theta$, поэтому для наблюдения эффекта Мессбауэра нужно с помощью охлаждения системы уменьшить вероятность возбуждения колебаний решетки. С понижением температуры вторая компонента, называемая фоном, ослабевает, а доля упругих процессов (первая компонента) увеличивается. Однако вероятность последних никогда не становится равной единице. Одним из способов компенсации влияния отдачи ядра состоит во вращении источника γ-излучения из того же вещества, что и исследуемый образец с угловой скоростью, при которой разность $2\Delta E$ компенсируется за счет эффекта Доплера.

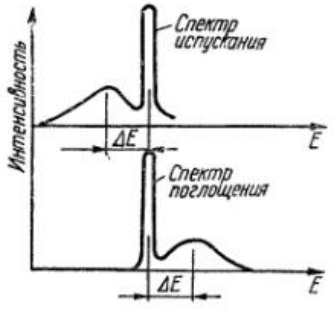


Рис. 73.11

В ядерной физике эффект Мессбауэра применяется для измерения времени жизни возбужденных состояний ядер, их спинов, магнитного момента, электрического квадрупольного момента. Эффект Мессбауэра позволил обнаружить наличие смещения частоты фотона при поглощении и испускании в ядре ^{57}Fe в условиях земной лаборатории (Паунд, Ребка) под действием гравитационного поля Земли, предсказываемого общей теорией относительности и качественно подтвержденного астрономическими наблюдениями.

73.3.5. Цепная ядерная реакция. При облучении урана нейтронами образуются элементы барий и лантан (Ферми, Амальди, Сегре, Понтекорво, 1934; И. Жолио-Кюри, Савич, 1938; Ган, Штрассман, 1938). Теоретически это явление можно интерпретировать (Мейтнер, Фриш, 1939) как расщепление ядра урана на два осколка с промежуточными атомными номерами. Этот процесс получил название деления ядра [72.2.6]

Дальнейшие исследования показали, что медленными (тепловыми) нейтронами, имеющими $E_n = 0{,}025$—$0{,}03$ эВ, делится лишь изотоп ^{235}U. Другой изотоп ^{238}U поглощает тепловые нейтроны без деления на осколки. При каждом акте деления ^{235}U выделяется в среднем энергия $Q = 197$ МэВ в виде кинетической энергии разлетающихся осколков (165 МэВ), нейтронов (5 МэВ), γ-излучения деления (5 МэВ), β- и γ-излучения осколков (11 МэВ), нейтрино (11 МэВ). Возможность выделения энергии связана с тем, что удельная энергия связи для ядер средней массы примерно на 1 МэВ больше, чем у тяжелых ядер [70.2.3]. При каждом акте деления высвобождается в среднем 2,47 нейтрона из-за относительного избытка нейтронов у тяжелых ядер по сравнению со средними (рис. 72.1). Большинство нейтронов испускаются при делении мгновенно за время, меньшее 10^{-14} с. Часть ($\sim 0{,}75$ %) — испускается с запаздыванием от 0,05 с до 1 мин. Эти нейтроны получили название *запаздывающих нейтронов*. Образующиеся в результате деления осколки, как правило, оказываются радиоактивными и претерпевают цепочку β^--превращений с излучением γ-квантов:

$$\begin{gathered} {}^{235}_{92}\mathrm{U} + n \to {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} + {}^{94}_{37}\mathrm{Rb} + 2n, \\ {}^{140}_{55}\mathrm{Cs} \to {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} \to {}^{140}_{57}\mathrm{La} \to {}^{140}_{58}\mathrm{Ce}, \\ {}^{94}_{37}\mathrm{Rb} \to {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} \to {}^{94}_{39}\mathrm{Y} \to {}^{94}_{40}\mathrm{Zr}. \end{gathered} \tag{73.82}$$

Ядра циркония ^{94}Zr и церия ^{140}Ce являются стабильными и завершают цепочку, сопровождающую деление ядра урана ^{235}U. Тепловыми нейтронами делятся ядра ^{235}U, ^{239}Pu, ^{233}U, ^{230}Th. При облучении нейтронами делятся торий ^{232}Th и протактиний $^{231}_{91}$Pa. Изотопы ^{233}U и ^{230}Th в природе не встречаются, они получаются искусственным путем. Нейтроны с энергией $E_n \sim 200$ МэВ могут вызвать деление и более легких ядер. Ядро ^{238}U делится только под действием быстрых нейтронов, $E_n \geqslant 1$ МэВ. При $E_n < 1$ МэВ ядро ^{238}U захватывает нейтрон, превращается в ядро ^{239}U (так называемый процесс радиационного захвата (n, γ)), которое в свою очередь претерпевает цепочку распадов с испусканием антинейтрино и γ-фотона (переходит в ядро ^{239}Np) и электрона (переходит в ядро ^{239}Pu):

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} + n \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow[\beta^-]{23\text{ мин}} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow[\beta^-]{2{,}3\text{ дня}} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}. \tag{73.83}$$

Ядро плутония $^{239}_{94}$Pu является α-радиоактивным с периодом полураспада $T = 24400$ лет, т. е. является практически стабильным. Ядро урана

^{233}U также α-радиоактивно с $T = 162000$ лет. Ядро тория ^{232}Th в процессе радиационного захвата и последующих распадов превращается в ядро ^{233}U:

$$^{232}_{90}Th + n \rightarrow {}^{233}_{90}Th \xrightarrow[\beta^-]{22\text{ мин}} {}^{233}_{91}Pa \xrightarrow[\beta^-]{27\text{ дней}} {}^{233}_{92}U. \qquad (73.84)$$

Эксперименты показывают, что деление ядер происходит в основном на осколки неравных масс. Испускание при делении ^{235}U, ^{239}Pu и ^{233}U дополнительных 2—3 нейтронов (Г. Н. Флеров, Л. И. Русинов, Жолио-Кюри, Ферми, Сцилард и др.) делает возможным осуществление *цепной ядерной реакции*, т. е. самоподдерживающейся цепочки ядерных реакций, вызванных последовательным делением ядер под действием испущенных в предыдущих актах деления дополнительных нейтронов. Вероятность деления ядер определяется эффективным сечением деления

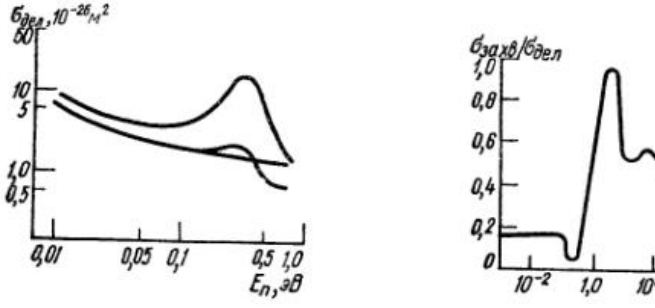


Рис. 73.12

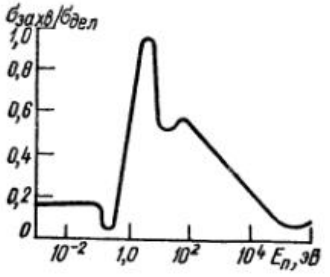


Рис. 73.13

$\sigma_{дел}$: она тем больше, чем больше сечение. Из зависимости сечения деления для ядер ^{233}U, ^{235}U и ^{239}Pu от энергии нейтронов в области малых энергий (рис. 73.12) видно, что при $E_n \sim 0{,}01$ эВ сечение $\sigma_{дел} \sim 10^{-25}$ м², а при $E_n > 1$ МэВ $\sigma_{дел} \sim 10^{-28}$ м².

Для получения максимума энергии от деления необходимо, чтобы как можно большее число нейтронов использовалось для осуществления деления. Конкурирующим к процессу деления является *радиационный захват*. Чем меньше величина $\alpha \equiv \sigma_{захв}/\sigma_{дел}$, тем меньше ядер не принимает участия в делении. Реакцию деления принято характеризовать коэффициентом

$$\eta = \nu\sigma_{дел}/(\sigma_{дел} + \sigma_{захв}) = \nu/(1 + \alpha), \qquad (73.85)$$

где ν — среднее число нейтронов, испускаемых в одном акте деления. Цепная реакция может идти только при $\eta > 1$. Величина η существенно зависит от энергии нейтронов, вызывающих процесс деления (рис. 73.13). Наибольшее значение коэффициент η достигает для тепловых нейтронов и для очень быстрых нейтронов с $E_n \sim 1$ МэВ. Значения ν и η для делящихся изотопов приведены в табл. 73.2.

Энергетический спектр нейтронов деления показывает (рис. 73.14), что их энергия $E_n \sim 0{,}7$ МэВ. Так как сечение $\sigma_{дел}$ при таких энергиях мало (рис. 73.12), то для осуществления самоподдерживающейся цепной реакции нейтроны деления необходимо замедлять до тепловых. В устройствах, позволяющих использовать освобождающуюся при делении энергию, называемых *ядерными реакторами*, в качестве замедлителей используются вещества, имеющие малое сечение захвата нейтронов (водород, дейтерий, бериллий, углерод и соединения на их основе — графит, вода и др.).

Таблица 73.2. Среднее число нейтронов ν, испускаемых в одном акте деления, и коэффициент η (73.85) для тепловых ($E_n = 0{,}025$ эВ) и быстрых ($E_n = 1$ МэВ) нейтронов

Нейтроны	Число нейтронов и коэффициент η	Ядро $^{233}_{92}U$	Ядро $^{235}_{92}U$	Ядро $^{239}_{94}Pu$
Тепловые	ν	2,52	2,47	2,91
	η	2,28	2,07	2,09
Быстрые	ν	2,7	2,65	3,0
	η	2,45	2,3	2,7

Важной характеристикой цепной реакции деления является *коэффициент k размножения нейтронов* в системе. Он равен отношению количества нейтронов в одном поколении к их количеству в предыдущем поколении. Если в первом поколении было N нейтронов, то в n-м поколении их будет Nk^n. При $k = 1$ реакция идет стационарно, при $k > 1$ интенсивность реакции взрывоопасно нарастает, при $k < 1$ реакция гаснет. При $k = 1$ режим реакции называют критическим, при $k > 1$ — надкритическим, при $k < 1$ — подкритическим. Среду, в которой происходят реакции деления, называют *активной зоной*. Так как активная зона всегда занимает конечный объем, то имеется возможность ухода нейтронов деления за ее пределы. Для учета потери нейтронов вводят понятия *критической массы* и *критических размеров*. Под критическим понимают размер активной зоны, при котором выполняется условие критического режима реакции, $k = 1$.

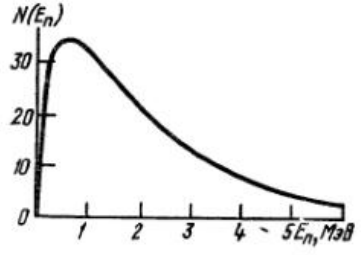


Рис. 73.14

Критической массой называется масса активной зоны, имеющая критические размеры. Критическая масса зависит как от вида делящегося изотопа, так и от внешних условий. Так, для урана $^{235}_{92}U$ критическая масса равна 50 кг, а для среды из этого изотопа, снабженной тонкими полиэтиленовыми прокладками и помещенной в отражающую оболочку из бериллия, критическая масса составляет всего 242 г. Каждый делящийся изотоп имеет так называемую минимальную критическую массу, меньше которой никакими внешними условиями нельзя добиться цепной реакции. В зависимости от конструкции и целей ядерного реактора критическая масса изменяется от 1 кг до 50 т.

Возможность осуществления управляемой цепной ядерной реакции связана с наличием запаздывающих нейтронов, испускаемых осколками деления. Так, записывая коэффициент размножения нейтронов в виде $k = k_{мгн} + k_{зап}$, где $k_{мгн}$ относится к мгновенно испу-

щенным нейтронам, $k_{зап}$ — к запаздывающим, для мощности P реактора в момент времени t

$$P = P_0 (k_{мгн} + k_{зап})^{t/t_1}, \qquad (73.86)$$

где P_0 — уровень мощности в момент времени $t = 0$, $t_1 \approx 10^{-3}$ с — время жизни одного поколения нейтронов для реакторов на тепловых нейтронах, находим, что при $k_{зап} = 0$ незначительное превышение $k_{мгн}$ над единицей (например, от $k_{мгн} = 1{,}0001$, при котором мощность увеличивается в e раз за $t = 10$ с, до $k_{мгн} = 1{,}005$) приводит к увеличению уровня мощности с колоссальной скоростью (в нашем примере $\sim (1{,}005)^{t/t_1}$), при которой нельзя избежать взрыва реактора. Расчет показывает, что для поддержания скорости реакции в приемлемых границах необходимо поддерживать изменение $k_{мгн}$ с точностью до пятого десятичного знака. Отличие $k_{зап}$ от нуля увеличивает период цепной реакции (время, в течение которого уровень мощности изменяется в $e = 2{,}718...$ раз) на несколько порядков. Это позволяет осуществлять управление реакцией с помощью изменения коэффициента размножения нейтронов. По определению

$$k = k_\infty W_n, \quad k_\infty = \nu \varepsilon p f \sigma_{дел}/\sigma_{полн},$$

где k_∞ — коэффициент размножения для идеальной среды бесконечных размеров, W_n — вероятность нейтрона покинуть активную зону, зависящая от состава активной зоны, ее размеров, формы и степени отражающей способности оболочки, окружающей активную зону, ν — среднее число быстрых нейтронов, появляющихся при делении одного ядра, ε — коэффициент, учитывающий увеличение числа нейтронов за счет деления ядер быстрыми нейтронами, $\nu\varepsilon$ — число нейтронов, поступающих в замедлитель, p — доля нейтронов, замедленных до тепловых (вероятность избежать захвата ядрами замедлителя), f — коэффициент использования тепловых нейтронов, $\nu\varepsilon pf$ — число нейтронов, захватываемых делящимся изотопом, из которых только часть $\sigma_{дел}/\sigma_{полн}$ вызывает деление, $\sigma_{полн}$ — полное сечение реакции, $\sigma_{дел}$ — сечение деления.

Захват нейтронов изотопами $^{238}_{92}$U и $^{232}_{90}$Th (73.83) и (73.84) позволяет осуществлять воспроизводство ядерного горючего $^{239}_{94}$Pu и $^{233}_{92}$U. В связи с тем, что запасы естественных делящихся изотопов ограничены, возможность осуществления процессов (73.83) и (73.84) в *реакторах на быстрых нейтронах* имеет принципиальный характер для будущего ядерной энергетики. Такие реакторы находятся в стадии исследований и проектирования.

73.3.6. Термоядерные реакции. Принципиальная возможность получения энергии в реакциях слияния легких ядер с образованием более тяжелых ядер связана с малой энергией связи, приходящейся на один нуклон, у легчайших ядер $^2_1$H, $^3_1$H, $^5_3$Li, $^6_3$Li и $^7_3$Li по сравнению с ядром $^4_2$He и более тяжелыми ядрами (рис. 70.4). *Реакциями ядерного синтеза*, идущими с выделением большого количества энергии, являются следующие процессы:

$$^3_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + n + 17{,}6 \text{ МэВ},$$
$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \to {}^3_2\text{He} + n + 3{,}94 \text{ МэВ},$$
$$^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \to {}^3_1\text{H} + p + 3{,}26 \text{ МэВ},$$
$$^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + p + 18{,}35 \text{ МэВ},$$
$$^3_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + n + n + 11{,}33 \text{ МэВ},$$
$$^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \to {}^4_2\text{He} + p + p + 12{,}86 \text{ МэВ},$$
$$^6_3\text{Li} + n \to {}^4_2\text{He} + {}^3_1\text{H} + 4{,}78 \text{ МэВ},$$
$$^6_3\text{Li} + p \to {}^4_2\text{He} + {}^3_2\text{He} + 4{,}02 \text{ МэВ}, \qquad (73.87)$$
$$^5_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \to {}^7_3\text{Li} + p + 5{,}01 \text{ МэВ},$$
$$^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} + 22{,}37 \text{ МэВ},$$
$$^7_3\text{Li} + p \to {}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He} + 17{,}3 \text{ МэВ}.$$

Реакция слияния ядер возможна тогда, когда ядра сближаются на расстояние действия ядерных сил притяжения. Кулоновское отталкивание препятствует такому сближению ядер. Поэтому в обычных условиях слияние легчайших ядер не происходит. Для преодоления сил дальнодействующего электростатического отталкивания ядрам нужно сообщить дополнительную энергию. С увеличением кинетической энергии их относительного движения эффективные сечения реакций (73.87) увеличиваются (рис. 73.15). В соответствии с этим возрастает и *выход* или скорость *реакции*, которую принято характеризовать средней величиной

$$\langle \sigma_r v \rangle = \int_0^\infty F(v)\, \sigma_r(v)\, v dv \Big/ \int_0^\infty F(v)\, dv, \qquad (73.88)$$

где σ_r — сечение реакции, v — скорость относительного движения ядер, $F(v)$ — функция распределения ядер по скоростям, выбираемая обычно в максвелловском виде (16.19). В ускорителе можно достичь энергий, необходимых для начала любой из реакций слияния (73.87). Однако для получения самоподдерживающейся управляемой реакции такой метод неприменим. Считается, что наиболее эффективным способом осуществления термоядерных реакций является разогрев приготовленной для этой цели рабочей смеси до очень высокой температуры $T \sim 10^8$ К (1 кэВ = $11{,}6 \cdot 10^6$ К), при которой кинетическая энергия ядер становится достаточной для преодоления ими кулоновского барьера. При такой температуре любое вещество превращается в полностью ионизованную плазму [27.3], поэтому осуществление управляемой термоядерной реакции связано с технологической проблемой создания и удержания высокотемпературной плазмы. Число актов реакции слияния ядер a и b за единицу времени в единице объема плазмы дается формулой

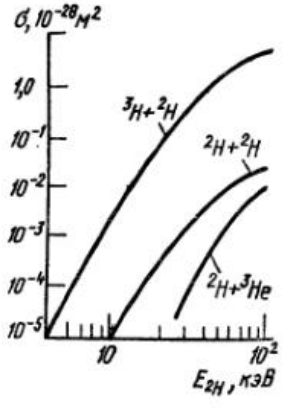


Рис. 73.15

$$R_{ab} = n_a n_b w_{ab}(T), \qquad (73.89)$$

где n_a и n_b — число частиц сортов a и b в единице объема (концентрация ядер a и b), $w_{ab}(T)$ — вероятность реакции, равная выходу реакции (73.88):

$$w_{ab}(T) = \langle \sigma_{ab} v_{ab} \rangle,$$

σ_{ab} — эффективное сечение, v_{ab} — относительная скорость. Вероятность w_{ab} зависит только от температуры плазмы T. Энергия W, высвобождаемая в единице объема за время τ

$$W = R_{ab} Q_{ab} \tau = n_a n_b w_{ab}(T) Q_{ab} \tau, \qquad (73.90)$$

где Q_{ab} — тепловой эффект реакции [73.1.3]. Например, в случае первой из реакций (73.87), описывающей синтез ядер трития ${}_1^3\mathrm{H}$ и дейтерия ${}_1^2\mathrm{H}$, при $n_a = n_b = 10^{15}$ частиц/см^3 и $T = 100$ кэВ выделяемая в единицу времени энергия равна 10^3 Вт/(см^3 с).

Устройство, в котором поддерживается термоядерная реакция, называется *термоядерным реактором*. Реактор будет давать выигрыш энергии, если в результате его работы будет выделяться больше энергии, чем ее требуется для нагревания и удержания плазмы. Это будет выполняется при условии, что

$$n^2 w_{ab} Q_{ab} \tau > 3nkT, \qquad (73.91)$$

где положено $n_a + n_b \approx 2n$, k — постоянная Больцмана. Правая часть неравенства (73.91) есть затраты энергии на нагревание $2n$ частиц. Величину $n\tau$ называют *параметром удержания*. Неравенству (73.91) для конкретных реакций из (73.87) соответствуют значения $n\tau$ и T, равные

$$\begin{aligned}
&{}_1^3\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H} \begin{cases} n\tau = 10^{14}\ \text{с} \cdot \text{см}^{-3}, \\ T = 10^8\ \text{К}, \end{cases} \\
&{}_1^2\mathrm{H} + {}_1^2\mathrm{H} \begin{cases} n\tau = 10^{16}\ \text{с} \cdot \text{см}^{-3}, \\ T = 10^8\ \text{К}, \end{cases} \qquad (73.92) \\
&{}_1^2\mathrm{H} + {}_2^3\mathrm{He} \begin{cases} n\tau = 10^{15}\ \text{с} \cdot \text{см}^{-3}, \\ T = 10^9\ \text{К}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Эти условия называют *критерием Лоусона* (1957). Он определяет параметр удержания плазмы и ее температуру, при которых можно ожидать работу термоядерного реактора с положительным выходом энергии. Из рис. 73.15 и условий (73.92) следует, что наиболее перспективной для получения энергии в макроскопических масштабах, достаточной для промышленного использования, является реакция ${}_1^2\mathrm{H} + {}_1^3\mathrm{H}$.

Параметр удержания $n\tau$ определяется реальными границами возможных значений плотности плазмы n и временем ее удержания τ. Положив, что объем плазмы ~ 100 м^3, мощность $\sim 10^6$ кВт, получим $n_{\min} = 10^{14}$ частиц/см^3 и $\tau \geqslant 1$ с. Нижняя граница $\tau_{\min}$ времени удержания определяется временем разлета плазмы при отсутствии удерживающих ее устройств. При рабочем объеме плазмы 1 м^3 имеем $\tau_{\min} = 10^{-6}$ с, т. е. выделение энергии происходит практически взрывом. Чтобы процесс не носил взрывного характера большой мощности (с разрушением реактора), размеры рабочего объема плазмы следует уменьшить до 1—2 мм. Тогда $\tau_{\min} = 10^{-9}$ с, а $n \geqslant 10^{23}$ см$^{-3}$. Следовательно, для удовлетворения критерия Лоусона можно идти как со стороны низких плотностей $n_{\min}$, так и со стороны малых времен удержания $\tau_{\min}$.

Для получения высоких температур $T \sim 10^8$ К можно использовать несколько *механизмов нагрева плазмы*: 1) джоулевой теплотой при пропускании тока через плазму (так как сопротивление плазмы быстро падает с ростом T, то этот метод эффективен только при начальной стадии нагрева); 2) сжатием электродинамическими силами при прохождении через нее тока (так называемый *пинч-эффект*); 3) высокочастотным электромагнитным полем; 4) пучком нейтральных атомов больших энергий; 5) лазером; 6) электронными пучками большой интенсивности. С помощью этих методов достижение необходимых температур считается практически возможным.

Создание электростанций, использующих энергию термоядерных реакций, прогнозируется на начало XXI в. Несмотря на то что в реакциях деления ядер урана, тория или плутония выделяется значительно больше энергии (~ 200 МэВ на один акт деления [73.3.5]), для промышленного использования реакции синтеза представляются более перспективными. Это связано прежде всего с тем, что выход энергии на грамм прореагировавшего вещества в реакциях деления и слияния приблизительно одинаков (из-за того, что в грамме рабочей смеси больше легких ядер, чем тяжелых, т. е. возможно большее число актов слияния, чем деления). Однако стоимость получения грамма рабочей смеси из легких элементов примерно в 100 раз меньше затрат на получение грамма делящихся изотопов. Кроме того, запасы такого элемента, как дейтерий ${}_1^2\mathrm{H}$, на Земле практически неисчерпаемы. Не последнюю роль играет экологическая чистота работы термоядерного реактора — продукты реакций синтеза не радиоактивны в отличие от продуктов реакций деления, требующих строительства специальных сооружений для их захоронения.

73.3.7. Источник энергии звезд и их эволюция. Согласно современным данным источником энергии звезд являются термоядерные реакции. Это означает, что звезды представляют собой системы, в которых ядерные процессы осуществляются в макроскопических масштабах. В результате ядерных превращений звезды претерпевают макроскопические изменения с течением времени. Представления о механизме этой эволюции не могут быть основаны на прямых астрономических наблюдениях по причине принципиальной недоступности прямых наблюдений процессов, происходящих внутри звезд. Представления об источнике энергии звезд и механизме их эволюции основаны на косвенных астрономических данных, обработанных с использованием теоретических моделей, заимствованных из данных о ядерных реакциях слияния, полученных в земных условиях (в лабораториях), и расчетов, учитывающих общие физические законы и принципы.

Наиболее изученной звездой является Солнце. Основные его параметры таковы:

Масса $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г,

Радиус $R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ см,

Средняя плотность $\rho_\odot = 1{,}4$ г/см^3,

Температура поверхности $T_e = 6000$ К,

Температура в центре $T = 1{,}5 \cdot 10^7$ К $= 1{,}3$ кэВ,

Плотность в центре $\rho = 100$ г/см^3,

Излучаемая энергия (светимость) $L_\odot = 4 \cdot 10^{26}$ Дж/с,

Уменьшение массы в единицу времени $(\Delta M/\Delta t)_\odot = 4{,}3 \cdot 10^{12}$ г/с,

Скорость выделения энергии на единицу массы $\left(\dfrac{\Delta E}{\Delta M \Delta t}\right)_\odot = 1{,}9 \times$ $\times 10^{-7}$ Дж/(с · г),

Химический состав $\begin{cases} \text{водород} \sim 74\ \% \\ \text{гелий} \sim 23\ \% \\ \text{углерод, азот, кислород, неон и др.} \sim 3\ \% \end{cases}$

Возраст $t_\odot \approx 4{,}6 \cdot 10^9$ лет.

В масштабах жизни Вселенной (10^{10} лет) Солнце является молодой звездой. Так как выделение энергии в недрах таких звезд представляет собой хорошо стабилизированный и практически равновесный процесс (величина $\Delta E/\Delta M \Delta t$ в 100 раз меньше, чем для живого организма), то его характеристики могут быть сравнительно легко рассчитаны теоретически. Основным источником энергии молодых звезд, находящихся на наиболее длительной и спокойной стадии эволюции, являются реакции, ведущие к превращению водорода в гелий-4. Цепочка реакций, приводящая к образованию гелия-4 из водорода, называется *водородным* или *протонно-протонным* (*pp*) *циклом* (Бете, 1938; Фаулер, Лауритсен, 1951; Солпитер, 1953). Этот цикл разделяют на три цепи.

Цепь *pp* I, в результате которой при сгорании водорода образуется гелий-4:

$$p + p \to {}^2_1\mathrm{H} + e^+ + \nu_e \qquad (Q = 1{,}44\ \text{МэВ},\ \tau = 14 \cdot 10^9\ \text{лет}),$$

$$p + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^3_2\mathrm{He} + \gamma \qquad (Q = 5{,}49\ \text{МэВ},\ \tau = 6\ \text{с}),$$

$${}^3_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^4_2\mathrm{He} + p + p \qquad (Q = 12{,}86\ \text{МэВ},\ \tau = 10^6\ \text{лет}),$$

суммарный процесс:

$$4p \to {}^4_2\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e + 2\gamma \qquad (Q = 26{,}72\ \text{МэВ},\ \tau = 10^{10}\ \text{лет}).$$

Цепь *pp* II:

$${}^4_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma,$$
$${}^7_4\mathrm{Be} + e^- \to {}^7_3\mathrm{Li} + \nu_e,$$
$${}^7_3\mathrm{Li} + p \to {}^8_4\mathrm{Be} + \gamma,$$
$${}^8_4\mathrm{Be} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He};$$

Цепь *pp* III:

$${}^4_2\mathrm{He} + {}^3_2\mathrm{He} \to {}^7_4\mathrm{Be} + \gamma,$$
$${}^7_4\mathrm{Be} + p \to {}^8_5\mathrm{B} + \gamma,$$
$${}^8_5\mathrm{B} \to {}^8_4\mathrm{Be} + e^+ + \nu_e,$$
$${}^8_4\mathrm{Be} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He}.$$

В цепях *pp*II и *pp*III гелий-4 является катализатором, ускоряющим его дальнейшее производство.

Первая реакция цепи *pp*I имеет очень малое эффективное сечение (при $E_p = 1$ МэВ, $\sigma_{pp}^{\text{теор}} = 10^{-21}$ фм^2), поэтому в лабораторных условиях не наблюдается. Она протекает с участием слабого взаимодействия [77.4]. Отличная от нуля вероятность слияния двух протонов в дейтрон ^{2}H на Солнце объясняется большой температурой и плотностью водорода в его центре. При этом в реакции слияния могут участвовать только протоны, имеющие достаточную для преодоления кулоновского барьера относительную кинетическую энергию. Таким протонам соответствует хвост максвелловского распределения. Эта реакция объясняет, почему молодые звезды могут существовать длительное время, сжигая лишь водород.

Вторая реакция цепи *pp*I происходит очень быстро (в среднем за 6 с), а третья — через 10^6 лет. Однако в недрах Солнца весь *pp*-цикл осуществляется одновременно. Поэтому огромные с точки зрения земных условий промежутки времени, в течение которых проходят отдельно взятые реакции, не препятствуют Солнцу и ему подобным звездам непрерывно излучать энергию с очень большим суммарным потоком.

Итогом *pp*-цикла является превращение четырех протонов в ядро изотопа гелия ${}^4_2$He с суммарным выделением энергии $Q = 26{,}72$ МэВ. Часть этой энергии (от 2 до 19 % в зависимости от завершения цикла по цепи *pp*II или цепи *pp*III) уносится нейтрино ν_e.

В действительности в молодых звездах кроме *pp*-цикла слияние $4p$ в $2{}^4_2$He может осуществляться и в других процессах. Наиболее известным из них является *цикл* CNO или *углеродно-азотный* (Бете, 1938):

$${}^{12}_6\mathrm{C} + p \to {}^{13}_7\mathrm{N} + \gamma \qquad (Q = 1{,}9\ \text{МэВ},\ \tau = 1{,}3 \cdot 10^7\ \text{лет}),$$
$${}^{13}_7\mathrm{N} \to {}^{13}_6\mathrm{C} + e^+ + \nu_e \qquad (Q = 2{,}2\ \text{МэВ},\ \tau = 14\ \text{мин}),$$
$${}^{13}_6\mathrm{C} + p \to {}^{14}_7\mathrm{N} + \gamma \qquad (Q = 7{,}54\ \text{МэВ},\ \tau = 2{,}7 \cdot 10^6\ \text{лет}),$$
$${}^{14}_7\mathrm{N} + p \to {}^{15}_8\mathrm{O} + \gamma \qquad (Q = 7{,}35\ \text{МэВ},\ \tau = 3{,}2 \cdot 10^8\ \text{лет}),$$
$${}^{15}_8\mathrm{O} \to {}^{15}_7\mathrm{N} + e^+ + \nu_e \qquad (Q = 2{,}71\ \text{МэВ},\ \tau = 3\ \text{мин}),$$
$${}^{15}_7\mathrm{N} + p \to {}^{12}_6\mathrm{C} + {}^4_2\mathrm{He} \qquad (Q = 4{,}97\ \text{МэВ},\ \tau = 10^3\ \text{лет});$$

$$\to {}^{16}_8\mathrm{O} + \gamma \qquad \text{(малая вероятность)},$$
$${}^{16}_8\mathrm{O} + p \to {}^{17}_9\mathrm{F} + \gamma,$$
$${}^{17}_9\mathrm{F} \to {}^{17}_8\mathrm{O} + e^+ + \nu_e,$$
$${}^{17}_8\mathrm{O} + p \to {}^{14}_7\mathrm{N} + {}^4_2\mathrm{He},$$

суммарный процесс:

$$4p \to {}^4_2\mathrm{He} + 2e^+ + 2\nu_e \qquad (Q = 26{,}72\ \text{МэВ},\ \tau = 3{,}3 \times 10^8\ \text{лет}).$$

Этот цикл сопровождается выделением 26,7 МэВ энергии, из которых около 1,7 МэВ уносит нейтрино.

Ядра ${}^{12}_6$C являются катализатором цикла CNO. Их число не уменьшается в результате происшедшей реакции. Считается, что 56 % гелия, образующегося на Солнце, получается за счет цепи *pp*I, 40 % — за счет цепи *pp*II, 0,05 % — за счет цепи *pp*III и 3,2 % — за счет цикла CNO.

Скорости выделения энергии в *pp*- и CNO-циклах зависят от температуры внутренних областей Солнца (рис. 73.16). Для CNO-цикла она растет как T^{24}, а в *pp*-цикле — как T^4. Так как сечение *pp*-реакции ограничено аномально малой величиной, $\sigma_{pp} \approx 10^{-21}$ фм^2, то при $T \sim 10^7$ К скорость выделения энергии в *pp*-цикле достигает насыщения. Сечение C*p*-реакции ограничено ядерным сечением $\sigma_{Cp} \approx 10^{-2}$ фм^2. Поэтому насыщение наблюдается при более высоких T. Скорости энерговыделения в обоих циклах одинаковы при $T = 13 \cdot 10^6$ К.

Кроме перечисленных выше циклов возможен и так называемый *неоновый* (Ne) *цикл*, в котором роль катализатора при соединении четырех протонов в ядра гелия-4 играет ядро ${}^{20}_{10}$Ne:

$${}^{20}_{10}\mathrm{Ne} + p \to {}^{21}_{11}\mathrm{Na} + \gamma,$$
$${}^{21}_{11}\mathrm{Na} \to {}^{21}_{10}\mathrm{Ne} + e^+ + \nu_e,$$

$$^{21}_{10}\mathrm{Ne} + p \to {}^{22}_{11}\mathrm{Na} + \gamma,$$
$$^{22}_{11}\mathrm{Na} \to {}^{22}_{10}\mathrm{Ne} + e^+ + \nu_e,$$
$$^{22}_{10}\mathrm{Ne} + p \to {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + \gamma,$$
$$^{23}_{11}\mathrm{Na} + p \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{20}_{10}\mathrm{Ne}.$$

Представление о термоядерной природе энергии звезд с учетом условия равновесия:

гравитационная энергия + энергия слияния ↔ энергия, уносимая излучением (73.93)

позволяет построить теорию их образования и эволюции. Основные

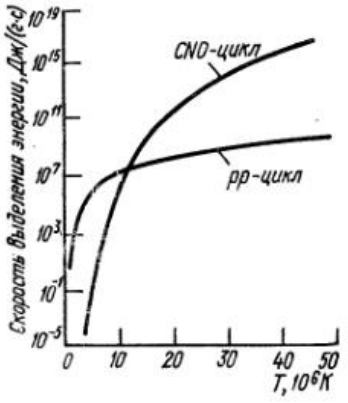


Рис. 73.16

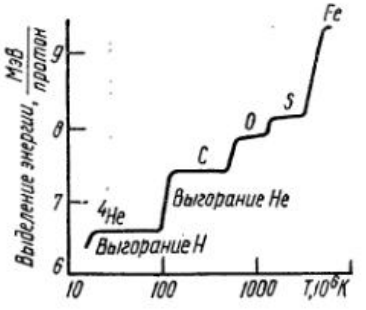


Рис. 73.17

черты этой теории такие. Рождение звезды происходит либо из первоначально существовавшего облака водорода путем его сжатия под действием собственного гравитационного поля (Хаяши), либо из первоначально существовавшего сверхплотного состояния вещества при его взрывах из-за нарушения условия равновесия (73.93) (В. А. Амбарцумян). В результате у образовавшейся звезды устанавливаются температура и плотность в центре такие, при которых выполняется условие (73.93). В случае сжатия водорода температура внутри звезды повышается до $T \approx 10^7$ К, а плотность достигает $\rho \approx 100$ г/см³. В таких условиях осуществляется *pp*-цикл с выделением энергии и образованием ядра ^{4}He (рис. 73.17). При накапливании гелия-4 баланс (73.93) нарушается, сердцевина звезды испытывает гравитационное сжатие. Температура в центре достигает значений $T \approx 2 \cdot 10^8$ К, а плотность $\rho \approx 10^5$ г/см³. При этих условиях становится возможным процесс «горения» гелия-4 в реакциях тройного соударения α-частиц

$$3^4_2\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C}^* \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \gamma \quad (Q = 7{,}65\ \text{МэВ}),$$

где $^{12}_{6}$C* — возбужденное ядро углерода с энергией возбуждения 7,65 МэВ (рис. 73.18). Процесс тройного соударения рассматривают как состоящий из двух стадий:

$$^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^8_4\mathrm{Be}, \quad {}^8_4\mathrm{Be} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \gamma.$$

Ядро $^8_4$Be нестабильно. Однако несмотря на малое время жизни ($\tau = 10^{-16}$ с) при $T \sim 10^8$ К и $\rho \sim 10^5$ г/см³, оно успевает провзаимодействовать с ядром гелия-4. Это взаимодействие является резонансным. Сечение реакции при соответствующей энергии велико. Возбужденное 0^+-состояние ядра ^{12}C с энергией 7,65 МэВ играет принципиальную роль в эволюции звезд и образовании элементов.

Звезды, у которых происходит слияние водорода, на *диаграмме Герцшпрунга — Рассела* (1905—1907, 1914), представляющей собой зависимость светимости звезды L от температуры ее поверхности T_e, полученную с помощью наблюдений, образуют так называемую главную последовательность (в этой области находится 80 % звезд видимой части Вселенной) (рис. 73.19). При переходе к условиям внутри звезды, при которых возможно слияние трех ядер гелия, происходит

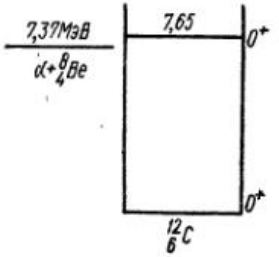


Рис. 73.18

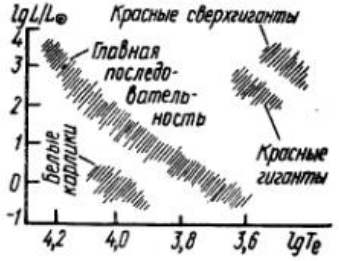


Рис. 73.19

взрыв внешней оболочки звезды. Физически это связано с тем, что по мере выгорания водорода сердцевина сжимается, а внешние слои звезды разбухают. Звезда увеличивается, ее светимость L растет, а поверхность охлаждается тем быстрее, чем больше расширяется звезда. В итоге, претерпев «гелиевую вспышку», звезда становится красным гигантом. В красном гиганте идет горение гелия и образование углерода. Накопление углерода делает возможным реакцию его слияния с $^4_2$He и образование кислорода, затем неона и магния:

$$^{12}\mathrm{C}\ (\alpha,\ \gamma)^{16}\mathrm{O}, \quad {}^{16}\mathrm{O}\ (\alpha,\ \gamma)^{20}\mathrm{Ne}, \quad {}^{20}\mathrm{Ne}\ (\alpha,\ \gamma)^{24}\mathrm{Mg}.$$

Выгорание гелия происходит за 10^5 лет (гораздо быстрее, чем водорода). Этим объясняется, почему красные гиганты встречаются сравнительно редко. Расчеты показывают, что Солнце станет красным гигантом через $5 \cdot 10^9$ лет.

Когда гелий выгорает, происходит третье гравитационное сжатие. Оно заканчивается при достижении в центре звезды температуры $T \approx 8 \cdot 10^8$ К и плотности $\rho \sim 10^5$ г/см³. При этом происходит выгорание углерода в реакциях

$$^{12}\mathrm{C}\ (^{12}\mathrm{C},\ \gamma)^{24}\mathrm{Mg}, \quad {}^{12}\mathrm{C}\ (^{12}\mathrm{C},\ p)^{23}\mathrm{Na}, \quad {}^{12}\mathrm{C}\ (^{12}\mathrm{C},\ n)^{23}\mathrm{Mg}.$$

При повышении температуры до $T \approx 10^9$ К идут реакции слияния кислорода

$$^{16}\mathrm{O}\ (^{16}\mathrm{O},\ \alpha)^{28}\mathrm{Si}, \quad {}^{16}\mathrm{O}\ (^{16}\mathrm{O},\ p)^{31}\mathrm{P}, \quad {}^{16}\mathrm{O}\ (^{16}\mathrm{O},\ n)^{31}\mathrm{S}$$

и звезда становится красным супергигантом (рис. 73.17; 73.19). Образующиеся в результате этих реакций α-частицы, протоны, нейтроны и γ-кванты принимают участие в различных процессах образования одних ядер и разрушения других.

Термоядерный цикл заканчивается синтезом элементов группы железа ^{56}Fe при $T \approx 4 \cdot 10^9$ К и $\rho \approx 10^8$ г/см^3.

Последняя стадия слияния, достигаемая звездой, определяется отношением массы звезды M к массе Солнца $M_\odot$:

Последняя стадия	$M/M_\odot$
Слияния нет	$< 0{,}1$
Слияние водорода	0,1—0,4
Слияние гелия	0,4—0,7
Слияние углерода	0,7—0,9
Слияние кислорода	$\geqslant 0{,}9$

Звезда, ставшая неактивной в конце своей эволюции, медленно сжимается. При достижении плотности $\rho \approx 10^6$—10^7 г/см^3 и температуры на поверхности $T_e \sim 10^4$ К она превращается в белый карлик. Такая звезда может иметь массу порядка солнечной и радиус, близкий к радиусу Земли.

Если масса звезды на последней стадии ее эволюции позволяет звезде пройти равновесную стадию, то происходит ее быстрое гравитационное сжатие, температура в центре достигает $5 \cdot 10^9$ К, сердцевина звезды, состоящая в основном из железа, коллапсирует, а оболочка взрывается. Это явление наблюдается как *вспышка сверхновой*. После взрыва оболочки остается неактивное ядро звезды. Если его масса меньше критической массы $M_c \approx 1{,}7\ M_\odot$, то оно достигает равновесного состояния, когда его радиус по оценкам равен 10 км, а плотность в центре достигает ядерной плотности $\rho \sim 10^{15}$ г/см^3. Такое образование называют *нейтронной звездой*. Если масса ядра звезды окажется больше критической массы M_c, то равновесия не может быть, продолжается гравитационное сжатие до образования *черной дыры*. Все эти объекты являются холодными — термоядерные реакции в таких образованиях невозможны.

Исследование эволюции звезд позволяет понять распространенность элементов в природе (рис. 72.7). Каждый из взрывов внешней оболочки обогащает межзвездный газ продуктами различных стадий слияния: ^{4}He, ^{12}C, ^{16}O, ^{28}Si и ^{56}Fe. Молодая звезда, образовавшаяся из такого обогащенного тяжелыми элементами облака, содержит эти элементы изначально в некоторых пропорциях, которые могут быть рассчитаны.

73.3.8. Дифракционная модель. Опыт показывает, что взаимодействие между частицами при достаточно высоких энергиях подобно дифракционному рассеянию света в оптике. Дифференциальное сечение рассеяния характеризуется резко выраженным максимумом при малых углах, ширина которого определяется величиной отношения длины волны относительного движения сталкивающихся частиц к размерам области взаимодействия. Дифракционный подход позволяет выразить амплитуду адрон-ядерного взаимодействия через амплитуды рассеяния адрона на отдельных нуклонах ядра-мишени и формфакторы, описывающие его структуру (Глаубер, А. Г. Ситенко, 1959). Так, в случае упругого рассеяния адрона на дейтроне амплитуда процесса (73.35), $f_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = F(\mathbf{q})$, имеет вид

$$F(\mathbf{q}) = [f_n(\mathbf{q}) + f_p(\mathbf{q})]\, s(\mathbf{q}/2) + \frac{i}{2\pi k}\int d\mathbf{q}' f_n\left(\frac{\mathbf{q}}{2} + \mathbf{q}'\right) f_p\left(\frac{\mathbf{q}}{2} - \mathbf{q}'\right) s(\mathbf{q}'),$$

где $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$ — импульсы адрона в начальном и конечном состояниях, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — переданный импульс, $f_n(\mathbf{q})$ и $f_p(\mathbf{q})$ — амплитуды рассеяния адрона на отдельных нуклонах (нейтроне и протоне), $s(\mathbf{q})$ — структурный формфактор дейтрона:

$$s(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}\, \varphi_0^2(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}},$$

$\varphi_0(\mathbf{r})$ — волновая функция дейтрона. Третье слагаемое в $F(\mathbf{q})$ учитывает одновременное рассеяние адрона на нуклонах дейтрона. Вследствие относительно больших размеров дейтрона, $R \approx 1/2\alpha = 2{,}16$ фм, где $\alpha = \sqrt{\varepsilon_0 M/\hbar}$, $\varepsilon_0 = 2{,}225$ МэВ — энергия связи дейтрона, формфактор $s(\mathbf{q})$ имеет резкий максимум в области малых переданных импульсов q.

Дифракционная теория хорошо согласуется с многочисленными экспериментальными данными по рассеянию высокоэнергетических нуклонов и других сильно взаимодействующих частиц на ядрах. Она позволяет извлекать из опытных данных сведения о структуре ядер и ядерном взаимодействии.

74. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

74.1. Законы радиоактивного распада

74.1.1. Сущность явления. *Радиоактивностью* называется явление самопроизвольного превращения путем распада одних атомных ядер в другие с испусканием одной или нескольких частиц. Ядра, подверженные такому распаду, называют *радиоактивными*, а не испытывающие распада,— *стабильными*. Из известных 1300 разновидностей ядер более 1000 из них являются радиоактивными. При радиоактивном распаде ядра претерпевают превращения, при которых изменяется: 1) число нуклонов в ядре (массовое число A); 2) протонно-нейтронный состав при постоянном A; 3) внутренняя энергия и спин ядра. Необходимым условием самопроизвольного (спонтанного) распада является энергетическая выгодность такого процесса — масса радиоактивного ядра должна быть больше суммы масс конечного ядра и частиц, образующихся в результате распада.

Характеристиками радиоактивного распада являются: 1) время протекания процесса; 2) сорт частиц — продуктов распада; 3) энергии испускаемых частиц; 4) углы разлета продуктов распада.

Процесс радиоактивного распада является экзотермическим

$$m_i c^2 = m_f c^2 + \sum m_s c^2 + Q, \qquad (74.1)$$

где m_i, m_f, m_s— массы покоя исходного ядра, конечного ядра и вылетающих частиц (сумма берется по всем таким частицам), Q — энергия, выделяющаяся при распаде в форме кинетической энергии продуктов распада. Распад ядра наблюдается только в том случае, когда $Q > 0$ и нет запретов со стороны строгих законов сохранения — момента импульса, электрического заряда, барионного заряда (числа нуклонов) и др.

Естественной радиоактивностью называют самопроизвольный распад ядер, существующих в природных условиях. Такие ядра имеют среднее время жизни, превышающее 10^8 лет, поэтому не успели полностью распасться за время существования видимой части Вселенной. К таким радиоактивным элементам относятся изотопы урана $^{238}_{92}$U, $^{235}_{92}$U, тория $^{232}_{90}$Th, калия $^{40}_{19}$K и др. (всего около двадцати изотопов).

Кроме долгоживущих радиоактивных изотопов в природных условиях встречаются элементы со сравнительно малым временем жизни. Это объясняется их постоянным воспроизводством за счет распада более долгоживущих изотопов (например, цепочки распадов $^{239}_{92}U$ (73.83) и тория $^{233}_{90}Th$ (73.84)) и ядерных реакций, осуществляющихся в естественных условиях. Однако большинство радиоактивных ядер в природе не встречается. Их получают искусственно путем бомбардировки стабильных ядер частицами. Радиоактивные ядра, полученные в результате ядерных реакций, называют *искусственными*. Возможность получения искусственных радиоактивных изотопов свидетельствует о том, что между явлением радиоактивности и распадом составного ядра [73.3.1] не существует физических различий. Тем не менее радиоактивность рассматривают как отдельный физический процесс. При этом к радиоактивным принято относить ядра, время жизни которых можно измерить радиотехническими методами. Это время составляет от 10^{-9} с до 10^{22} лет. Физически радиоактивными считаются ядра, время жизни которых заметно превышает характерное ядерное время $t_0 \sim 10^{-21}$—10^{-22} с [73.3.1].

Большие времена жизни радиоактивных ядер связаны в основном с двумя причинами: 1) с испусканием тяжелых положительно заряженных частиц (протонов ^1_1H, дейтронов ^2_1H, α-частиц ^4_2He и др.), сильно подавленным кулоновским барьером; 2) с малой интенсивностью взаимодействия, за счет которого происходит распад. Изменение времен жизни радиоактивных ядер в пределах нескольких порядков объясняется их сильной зависимостью от энергии Q, выделяющейся при распаде (если Q мало, то время жизни T велико), и величиной разности спинов исходного и конечного ядер (при $L\lambda \gg R$, где L — орбитальный момент конечного ядра и вылетающей частицы, λ — дебройлевская длина волны вылетающей частицы, R — радиус действия ядерных сил, распад исходного ядра сильно подавлен).

К радиоактивным процессам относят: 1) α-распад [74.2.1]; 2) β-распад [74.2.2]; 3) γ-излучение ядер; 4) спонтанное деление тяжелых ядер [74.2.3]; 5) протонную радиоактивность [74.2.5]

74.1.2. Теория радиоактивного распада. Теория радиоактивного распада (Резерфорд, Содди, 1902—1903) исходит из того опытного факта, что радиоактивность представляет собой статистический процесс. Одинаковые ядра распадаются за различное время, однако среднее время жизни ядра данного сорта не зависит от способа его получения и внешних условий (температуры, давления и агрегатного состояния вещества). Считая, что отдельные радиоактивные ядра претерпевают превращения независимо одно от другого, для количества ядер dN, распадающихся за промежуток времени dt, имеем соотношение

$$dN = -\lambda N dt, \tag{74.2}$$

где N — большое число радиоактивных ядер, имеющихся в момент времени t, λ — характерная для данного радиоактивного элемента величина (константа), называемая *постоянной распада*. Постоянная λ характеризует вероятность распада ядра за единицу времени: за единицу времени в среднем из большого числа N одинаковых нестабильных ядер будет распадаться λN ядер. Величину λN называют *активностью*. Она характеризует интенсивность излучения распадающегося вещества в целом. Единица активности в СИ — беккерель — 1 распад в 1 с (Бк). Ранее использовалась внесистемная единица кюри (Ки):

$$[\lambda N] = \text{Ки}, \quad 1\,\text{Ки} = 3{,}7 \cdot 10^{10} \text{ распад/с} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Бк} = 37\ \text{ГБк}. \tag{74.3}$$

Знак минус в (74.2) означает, что в процессе распада число ядер уменьшается. Так как по определению величина λ не зависит от времени, соотношение (73.2) легко интегрируется:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{74.4}$$

где N_0 — число радиоактивных ядер в произвольно выбранный начальный момент времени, принятый за начало отсчета, $t = 0$, N — количество нераспавшихся ядер к моменту времени t.

Формула (74.4) описывает **основной закон радиоактивного распада:** *число нераспавшихся ядер убывает со временем экспоненциально*. Из (74.5) следует, что за отрезок времени t количество распавшихся ядер

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \tag{74.5}$$

Периодом полураспада $t_{1/2}$ называется время, за которое распадается половина начального количества ядер:

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}, \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \simeq \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{74.6}$$

Периоды полураспада известных ядер находятся в пределах от $3 \cdot 10^{-7}$ с до $5 \cdot 10^{15}$ лет.

Определяя среднее время жизни τ радиоактивного ядра как величину

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t dN(t) = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \lambda N(t)\, dt, \tag{74.7}$$

для распада по закону (74.4) легко найти

$$\tau = 1/\lambda, \tag{74.8}$$

т. е. среднее время жизни ядра есть величина обратная постоянной распада λ. Оно равно промежутку времени, за который начальное число ядер уменьшится в e раз.

Из выражений (74.4), (74.5) для нераспавшихся и распавшихся ядер к моменту времени t следует, что уравнение (74.4) описывает лишь средние величины. В действительности распад претерпевает флуктуационные колебания. Эти статистические отклонения от закона (74.4) описываются *распределением Пуассона*

$$w_n = \frac{1}{n!} (N\lambda t)^n e^{-N\lambda t}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = 1, \tag{74.9}$$

где w_n — вероятность того, что за время t будет наблюдаться число распадов n, отличное от $n' = N\lambda t$. Формула (74.9) получена в приближении $n \ll N$, т. е. число регистрируемых частиц намного меньше полного числа радиоактивных ядер. В реальных экспериментах $N\lambda t \gg 1$. Функция w_n имеет максимум при $n = N\lambda t$.

В опытах число n, как правило, велико. В этом случае, считая n непрерывной переменной и используя формулу Стирлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}, \quad n \gg 1,$$

из (74.9) легко перейти к *гауссовому распределению*

$$w_n \approx w(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\{-n[\ln n - 1 - \ln(N\lambda t)] - N\lambda t\} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N\lambda t}} \exp\left[-\frac{(n - N\lambda t)^2}{2N\lambda t}\right], \quad \int_0^\infty w(n)\, dn = 1. \qquad (74.10)$$

Распределения (74.9) и (74.10) позволяют вычислять средние величины. Так, среднее число ядер $\bar{n}$, распавшихся за время t, равно

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n w_n = N\lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(N\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-N\lambda t} = N\lambda t. \qquad (74.11)$$

Статистическое отклонение от средних значений (дисперсия D) вычисляется по формуле

$$D \equiv \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n}^2 - \bar{n}^2 = \bar{n} = N\lambda t, \qquad (74.12)$$

где учтено, что

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n = \bar{n}^2 + \bar{n}, \quad \bar{n}^2 = (N\lambda t)^2. \qquad (74.13)$$

Величину

$$\delta = \sqrt{D} = \sqrt{\bar{n}}$$

называют *стандартным отклонением*, а

$$\Delta = \frac{\delta}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

— *относительной ошибкой*. В данном случае

$$\Delta = 1/\sqrt{N\lambda t}, \qquad \delta = \sqrt{N\lambda t}. \qquad (74.14)$$

Относительная ошибка δ, выраженная в процентах, определяет статистическую точность измерений.

Если распадающееся вещество содержит один сорт радиоактивных ядер, то логарифм активности линейно зависит от времени:

$$\ln\left(-\frac{dN}{dt}\right) = \ln(\lambda N_0) - \lambda t. \qquad (74.15)$$

Графически эта зависимость имеет вид прямой, тангенс угла наклона которой равен постоянной распада λ. Определяя на опыте активность λN, которая пропорциональна числу регистрируемых частиц за равные промежутки времени, и строя график логарифма этой активности от времени, по наклону прямой легко определить постоянную λ.

В случае сложного распада зависимость логарифма активности от времени является нелинейной. Под *сложным* понимают *распад* вещества, содержащего радиоактивные ядра с различными постоянными распада. Так, если вещество содержит два сорта нестабильных ядер, то

$$N = N_1 e^{-\lambda_1 t} + N_2 e^{-\lambda_2 t},$$

где N_1 и N_2 — количества ядер при $t = 0$, λ_1 и λ_2 — их постоянные распада, N — общее число нераспавшихся ядер, и логарифм активности описывается формулой (рис. 74.1)

$$\ln\left(-\frac{dN}{dt}\right) = \ln(N_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + N_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}). \qquad (74.16)$$

Практический интерес представляют случаи, когда λ_1 и λ_2 сильно различаются. При $\lambda_1 \gg \lambda_2$

$$\ln\left(-\frac{dN}{dt}\right) = \ln(N_1\lambda_1) - \lambda_1 t, \quad t \ll \frac{1}{\lambda_2},$$

$$\ln\left(-\frac{dN}{dt}\right) = \ln(N_2\lambda_2) - \lambda_2 t, \quad t \gg \frac{1}{\lambda_1}.$$

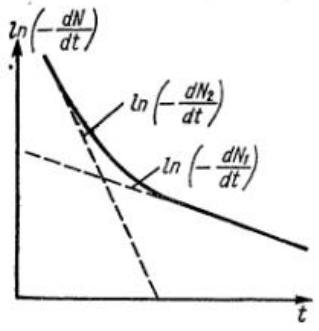


Рис. 74.1

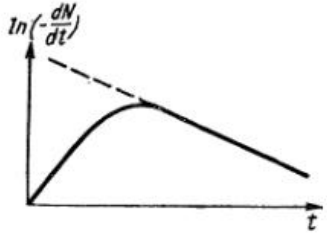


Рис. 74.2

Примером сложного распада является последовательный распад одного и того же ядра: $1 \to 2 \to 3$. Исходное *ядро* 1 называется *материнским*, а промежуточное *ядро* 2 — *дочерним*. В этом случае уравнения для активностей ядер 1 и 2 имеют вид

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1, \qquad (74.17)$$

где слагаемое $+\lambda_1 N_1$ во втором равенстве описывает пополнение дочерних ядер за счет распада материнских. Так как $N_1(0) = N_{10}$, $N_2(0) = 0$, то

$$N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t}, \quad N_2 = \frac{N_{10}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \qquad (74.18)$$

Логарифм полной активности, измеряемой на опыте, равен

$$\ln\left(-\frac{dN}{dt}\right) \equiv \ln(N_1\lambda_1 + N_2\lambda_2) = \ln\left\{N_{10}\lambda_1 \times \right.$$

$$\left. \times\left[\left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t}\right]\right\}. \qquad (74.19)$$

При $\lambda_1 > 2\lambda_2$ кривая логарифма полной активности имеет вид, показанный на рис. 74.1. При $\lambda_2 > \lambda_1$ зависимость логарифма активности от времени для распада $1 \to 2 \to 3$ представлена на рис. 74.2.

При больших временах ($\lambda_1 t \gg 1$) и $\lambda_2 > \lambda_1$ выполняется так называемое *вековое радиоактивное равновесие*, при котором отношение N_1 к N_2 становится независимым от времени

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1}. \qquad (74.20)$$

Вековое равновесие показывает, что для цепочки последовательных распадов $1 \to 2 \to 3 \to \ldots$ выполняется соотношение

$$N_1 : N_2 : N_3 : \cdots = t_{1/2}^{(1)} : t_{1/2}^{(2)} : t_{1/2}^{(3)} : \cdots, \qquad (74.21)$$

где $t_{1/2}^{(1)} \gg t_{1/2}^{(2)} \gg t_{1/2}^{(3)} \gg \cdots$, которое позволяет находить неизвестные N или $t_{1/2}$ по измеренным ранее величинам.

74.2. Типы радиоактивного распада ядер

74.2.1. Альфа-распад. Явление *α-распада* состоит в том, что тяжелое ядро самопроизвольно распадается с испусканием α-частицы — ядра гелия $^4_2$He. Схема распада имеет вид

$$^A_Z X \to ^{A-4}_{Z-2} Y + ^4_2\mathrm{He}, \qquad (74.22)$$

где X — материнское (исходное распадающееся) ядро, Y — дочернее (образовавшееся) ядро.

Пример:

$$^{238}_{92}U \to ^{234}_{90}\mathrm{Th} + ^4_2\mathrm{He}.$$

Альфа-распад имеет следующие характерные *особенности*, обнаруженные эмпирически.

1. Альфа-распад наблюдается у тяжелых ядер. Общее число таких ядер — более 200. Для них $Z > 83$. Имеется небольшая группа α-активных ядер в области $A = 140$—160 (редкоземельные элементы). Самый легкий из них — изотоп цезия $^{142}_{58}$Ce. Самым легким из всех α-активных ядер является изотоп бериллия $^8_4$Be ($t_{1/2} = 3 \cdot 10^{-16}$ с).

2. Периоды полураспадов α-активных ядер изменяются в широких пределах: $t_{1/2}$ ($^{215}_{86}$Rn) $= 10^{-6}$ с, $t_{1/2}$ ($^{204}_{82}$Pb) $= 1{,}4 \cdot 10^{17}$ лет.

3. Энергии вылетающих α-частиц находятся в узких пределах допустимых величин: 4—9 МэВ для тяжелых элементов и 2—4,5 МэВ для редкоземельных.

4. Период полураспада зависит от энергии вылетающих частиц и выражается **законом Гейгера — Неттола** (1912)

$$\log t_{1/2} = C + \frac{D}{\sqrt{E}}, \qquad (74.23)$$

где C, D — константы, не зависящие от A и слабо зависящие от Z, E — энергия вылетающей α-частицы, $t_{1/2}$ — период полураспада α-активного изотопа. Если E выражать в МэВ, то для $Z = 84$ имеем $C = -50{,}15$, $D = 128{,}8$, а для $Z = 90$ имеем $C = -51{,}94$; $D = 139{,}4$.

Эмпирический закон Гейгера — Неттола (74.23) можно обосновать теоретически в простейшей одночастичной модели, предполагающей, что α-частица существует и движется как целое в потенциальном поле

дочернего ядра (рис. 70.1) [70.2.2, Б]. Он хорошо описывает α-распад четно-четных ядер.

Энергия, равная разности энергии покоя материнского ядра X и суммы энергий покоя дочернего ядра Y и α-частицы, распределяется между α-частицей и ядром Y в виде их кинетических энергий обратно пропорционально массам. Опыт показывает, что α-активное ядро испускает несколько групп α-частиц близких, но различных энергий. Это объясняется тем, что дочернее ядро Y может возникать как в основном, так и возбужденном состояниях. На рис. 74.3 показаны

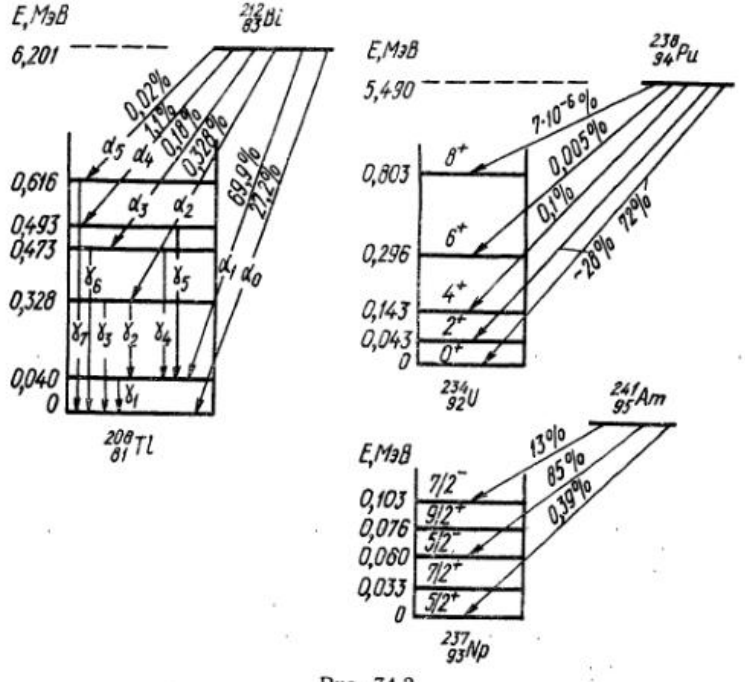


Рис. 74.3

схемы распадов некоторых α-активных ядер на различные энергетические уровни дочерних ядер. В результате таких переходов возникает тонкая структура энергетического спектра вылетающих α-частиц. Вероятности переходов, отмеченные на рис. 74.3 в процентных отношениях, показывают, что интенсивности α-распадов падают с увеличением энергии возбуждения конечного ядра. Изучение тонкой структуры α-распадов дает важную информацию о структуре тяжелых ядер и природе их нижайших возбужденных состояний.

Если в результате α-распада дочернее ядро оказывается в возбужденном состоянии, то за время τ, равное времени его жизни ($\tau \sim 10^{-8}$—10^{-15} с), оно переходит в основное или более низкое возбужденное состояние, испуская γ-фотон, энергия которого определяется расстоянием между уровнями дочернего ядра. Этим объясняется, почему α-распад обычно сопровождается излучением фотонов.

Энергия возбуждения дочернего ядра может быть выделена путем испускания какой-либо частицы (протона, нейтрона, электрона или

α-частицы) или же отдана непосредственно (без излучения γ-кванта) одному из электронов K-, L- или M-оболочки атома. В последнем случае наблюдается так называемая *внутренняя конверсия* (вылет электрона из атома), сопровождающаяся испусканием характерных рентгеновских лучей [69.2.2].

Общее условие испускания ядрами α-частиц имеет вид (72.13). Согласно имеющимся данным α-частица не существует в готовом виде в недрах ядра. Она образуется непосредственно перед вылетом из ядра в момент его распада. Теория α-распада основана на представлении о *туннельном эффекте* (Гамов, Гёрни, Кондон, 1928) — квантовом процессе, в результате которого α-частица с полной энергией в среднем $E_\alpha \sim 6$ МэВ имеет отличную от нуля вероятность пройти через потенциальный барьер значительно большей высоты $V(R)$ (рис. 70.1). Внутренняя область этого барьера обусловлена ядерными силами между α-частицей и ядром Y, а внешняя — силами кулоновского отталкивания между ними. Сведения о величине $V(R)$ дают опыты по рассеянию α-частиц на ядрах. В случае урана $^{238}_{92}$U она оказывается равной $V(R) = 25$ МэВ для α-частицы с орбитальным моментом $l = 0$. В общем случае полная высота потенциального барьера $V(r)$ может быть оценена по формуле

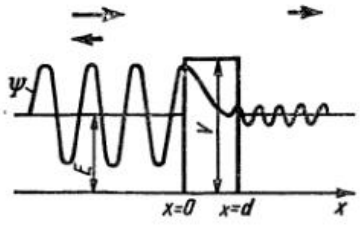


Рис. 74.4

$$V(r) = \frac{2(Z-2)e^2}{r} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{m_\alpha r^2} \quad \text{при } r \gg R, \qquad (74.24)$$

где m_α — масса α-частицы, R — эффективный радиус остаточного ядра после испускания α-частицы, $m_\alpha R^2/\hbar^2 \approx 20$ МэВ$^{-1}$.

Представление о теории туннельного эффекта дает модельная задача о *прохождении квантовой частицы через потенциальный барьер* прямоугольной формы (рис. 74.4). Пусть частица совершает одномерное движение вдоль оси x. Оно описывается уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + [V(x) - E]\Psi = 0, \qquad (74.25)$$

где $\Psi(x)$ — волновая функция частицы, E и m — ее энергия и масса, $V(x)$ — потенциал.

Пусть

$$V(x) = \begin{cases} V, & 0 < x < d, \\ 0, & x > d,\ x < 0. \end{cases} \qquad (74.26)$$

Здесь начало отсчета x для удобства совмещено с началом потенциального барьера. Частица с энергией $E < V$ налетает на барьер слева. Часть волны отражается от барьера, а часть, пройдя через него, движется свободно. Поэтому решение уравнения (74.25) с потенциалом (74.26) в зависимости от значений x описывается формулами

$$\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}E}, \quad x < 0;$$
$$\Psi(x) = Fe^{\varkappa x} + Ge^{-\varkappa x}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V-E)}, \quad 0 < x < d; \qquad (74.27)$$
$$\Psi(x) = Ce^{ikx}, \quad x > d,$$

где A, B и C — амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн, F и G — амплитуды экспоненциально растущей и затухающей частей волновой функции в подбарьерной области. Амплитуда A считается заданной. Тогда четыре неизвестные амплитуды B, C, F и G можно найти из условия непрерывности функции $\Psi(x)$ и ее производной $d\Psi/dx$ на границах барьера при $x = 0$ и $x = d$.

Прохождение частицы через барьер характеризуют *коэффициентами прохождения* $\mathcal{D}$ и *отражения* $\mathcal{R}$, которые по определению равны соответственно

$$\mathcal{D} = \left|\frac{C}{A}\right|^2, \quad \mathcal{R} = \left|\frac{B}{A}\right|^2, \quad \mathcal{D} + \mathcal{R} = 1, \qquad (74.28)$$

где последнее равенство отражает сохранение полной вероятности процесса. Легко показать, что в рассматриваемом случае потенциального барьера (74.26)

$$\mathcal{D} = \left[1 + \frac{V^2}{4E(V-E)}\operatorname{sh}^2 \varkappa d\right]^{-1}, \qquad (74.29)$$
$$\mathcal{R} = \frac{V^2}{4E(V-E)}\operatorname{sh}^2 \varkappa d\left[1 + \frac{V^2}{4E(V-E)}\operatorname{sh}^2 \varkappa d\right]^{-1},$$

где $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$.

При α-распаде ширина барьера значительно превосходит волновой вектор $\varkappa$ подбарьерной области, $\varkappa d \gg 1$. Поэтому

$$\mathcal{D} = \frac{16}{V^2}E(V-E)e^{-2\varkappa d} \approx \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_0^d \sqrt{2m(V-E)}\,dx\right\}. \qquad (74.30)$$

Связь постоянной распада λ с коэффициентом $\mathcal{D}$ (74.30) приближенно дается формулой (70.23):

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{R}\mathcal{D} \approx \frac{0{,}693}{t_{1/2}}, \qquad (74.31)$$
$$\lambda \approx \frac{v}{R}\exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_0^a \sqrt{2m(V-E)}\,dx\right\},$$

где v — скорость частицы в ядре с радиусом R [70.2.2]. Из этого результата в случае $V \gg E$ следует закон Гейгера — Неттола (74.23).

74.2.2. Бета-распад. Явление β-*распада* (β-*превращения*) состоит в том, что ядро самопроизвольно испускает электрон e^- и антинейтрино $\bar{\nu}_e$ или позитрон e^+ и нейтрино ν_e, превращаясь в ядро с тем же массовым числом A, или же поглощает один из электронов атомной оболочки (обычно K-оболочки [67.5.1]), испуская нейтрино ν_e:

$$\begin{aligned} &{}^A_Z X \to {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e && (\beta^-\text{-распад}), \\ &{}^A_Z X \to {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e && (\beta^+\text{-распад}), \\ &{}^A_Z X + e^- \to {}^A_{Z-1} Y + \nu_e && (\text{электронный захват}). \end{aligned} \qquad (74.32)$$

Примеры:

1) β^--распад —

$${}^{234}_{90}\mathrm{Th} \to {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + e^- + \bar{\nu}_e; \quad {}^6_2\mathrm{He} \to {}^6_3\mathrm{Li} + e^- + \bar{\nu}_e;$$

2) β^+-распад —

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \to {}^{13}_{6}\mathrm{C} + e^+ + \nu_e; \quad {}^{14}_{8}\mathrm{O} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^+ + \nu_e;$$

3) электронный захват —

$$e^- + {}^{40}_{19}\mathrm{K} \to {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \nu_e; \quad e^- + {}^{7}_{4}\mathrm{Be} \to {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + \nu_e.$$

Максимальная энергия испускаемых β-частиц равна

$$E_{\substack{\beta-\max \\ K\text{-захват}}} = (M_i - M_f)\, c^2, \quad E_{\beta^+\max} = (M_i - M_f - 2m_e)\, c^2, \qquad (74.33)$$

где M_i и M_f — массы исходного X и конечного Y ядер, m_e — масса электрона. Распад β^+ не может происходить, если

$$(M_i - M_f) < 2m_e.$$

Энергия, выделяющаяся при одном акте β-распада, изменяется в довольно широких пределах: от 0,02 МэВ для распада трития $^{3}_{1}\mathrm{H}$ до 13,4 МэВ для распада изотопа бора $^{12}_{5}\mathrm{B}$,

$$^{3}_{1}\mathrm{H} \to {}^{3}_{2}\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e + 0{,}02 \text{ МэВ}; \quad {}^{12}_{5}\mathrm{B} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + e^- + \bar{\nu}_e + 13{,}4 \text{ МэВ}.$$

Бета-распады наблюдаются всегда, когда они разрешены энергетически. Общие закономерности стабильности ядер по отношению к β-распаду дает формула Вайцзеккера (72.2) [72.2.2; 72.2.3].

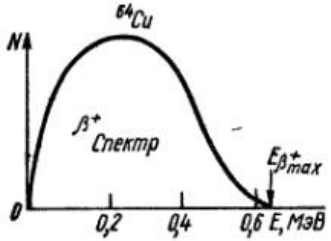


Рис. 74.5

В отличие от α-частиц, обладающих строго определенной энергией в процессах α-распада [74.2.1], спектр энергий β-частиц является непрерывным и принимает значения от 0 до $E_{\max}$, определяемого соотношениями (74.33) (рис. 74.5). Такой характер спектра объясняется тем, что в процессах β-распада вылетает из ядра две частицы (e^-, $\bar{\nu}_e$ или e^+, ν_e), между которыми и перераспределяется выделяемая энергия. В каждом одиночном акте это перераспределение энергии является статистическим. При очень большом количестве распадов одинаковых ядер происходит статистическое усреднение, которое имеет вполне определенный вид (как на рис. 74.5). Его называют *спектром электронов (позитронов) β-распада* или просто *β-спектром*. Если E — энергия β-частицы, то на долю нейтрино приходится энергия, равная $(E_{\max} - E)$. Непрерывность β-спектра исторически послужила первым доказательством существования элементарной частицы, названной *нейтрино* (Ферми, 1932). Эта частица теоретически была предсказана Паули (1930) на основе закона сохранения энергии при β-распаде и обнаружена экспериментально Рейнесом и Коуэном (1953), а также в опытах Коуэном и сотрудниками (1956).

Из закона сохранения энергии следует, что форма β-спектра $N(E) \equiv dN/dE$ описывается выражением

$$N(E) = N_0 B \sqrt{E(E + 2mc^2)}\,(E + mc^2)\,(E_{\max} - E)^2 F(Z, E), \qquad (74.34)$$

где N_0 — полное число распадов, dN — число распадов с вылетом β-частицы с энергией от E до $E + dE$, m — масса β-частицы, B — коэффициент, зависящий от структуры ядра, $F(Z, E)$ — функция, учитывающая кулоновские эффекты. Функции $F(Z, E)$ известны. Они обычно приводятся в виде таблиц. В пренебрежении кулоновскими эффектами $F(Z, E) = 1$. Спектр (74.34) называют *разрешенным*. Он наблюдается у ядер, у которых в результате β-распада не изменяется конфигурация нуклонов в ядре. Если спектр не описывается формулой (74.34), то его называют *запрещенным*. В этом случае он содержит информацию о влиянии структуры ядра на β-распад. Единственной величиной в (74.34), зависимой от таких эффектов, является коэффициент B. Его можно вычислить по известной величине периода полураспада $t_{1/2}$ [74.1.2]:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{1}{N_0}\int dN = \frac{1}{N_0}\int_0^{E_{\max}} N(E)\, dE = Bf(E_{\max}, Z), \qquad (74.35)$$

где $f(E_{\max}, Z)$ — сложная, но вполне определенная функция энергии $E_{\max}$ для β-частиц, Z — заряд исходного ядра. В ультрарелятивистском случае, $E_{\max} \gg mc^2 = 0{,}5$ МэВ, при $F(Z, E) = 1$ имеем

$$f(E_{\max}, Z) = \frac{2}{15} E_{\max}^5. \qquad (74.36)$$

Из (74.35) следует, что B определяется соотношением

$$B = \ln 2/(ft_{1/2}), \qquad (74.37)$$

где $ft_{1/2}$ — характерная для данного β-активного ядра величина, называемая *приведенным периодом полураспада*. Обычно β-переходы ядер классифицируют по значению $\lg(ft_{1/2})$, так как само произведение $ft_{1/2}$ изменяется в пределах многих порядков. Переходы, для которых $\lg(ft_{1/2}) \approx 5$, называют *нормально разрешенными*. При таких β-переходах в ядре происходит слабая перестройка путем изменения изоспина всего ядра при неизменных других квантовых числах нуклона, испытывающего β-распад, либо путем переориентации спина нуклона относительно орбитального момента при β-распаде. Переходы, у которых $\lg(ft_{1/2}) = 2{,}5$—$3{,}0$, называют *сверхразрешенными*. При таких β-переходах, как правило, структура ядра не изменяется.

Примеры:

1) нормально разрешенные β-переходы наблюдаются в распадах

$$^{49}_{20}\mathrm{Ca} \to {}^{49}_{21}\mathrm{Sc} + e^- + \bar{\nu}_e; \quad {}^{108}_{47}\mathrm{Ag} \to {}^{108}_{46}\mathrm{Pd} + e^+ + \nu_e;$$

2) сверхразрешенные β-переходы — в распадах

$$^{3}_{1}\mathrm{H} \to {}^{3}_{2}\mathrm{He} + e^- + \bar{\nu}_e; \quad {}^{14}_{8}\mathrm{O} \to {}^{14}_{7}\mathrm{N} + e^+ + \nu_e.$$

Переходы, у которых $\lg(ft_{1/2}) \approx 9$, называют *запрещенными первого порядка*, у которых $\lg(ft_{1/2}) \approx 15$ — *запрещенными второго порядка*, у которых $\lg(ft_{1/2}) \approx 18$ — *запрещенными третьего порядка*.

С точки зрения орбитального момента количества движения l, уносимого парой электрон — антинейтрино, значение $l = 0$ соответствует разрешенному переходу, а $l = 1$ — однократно запрещенному и т. д.

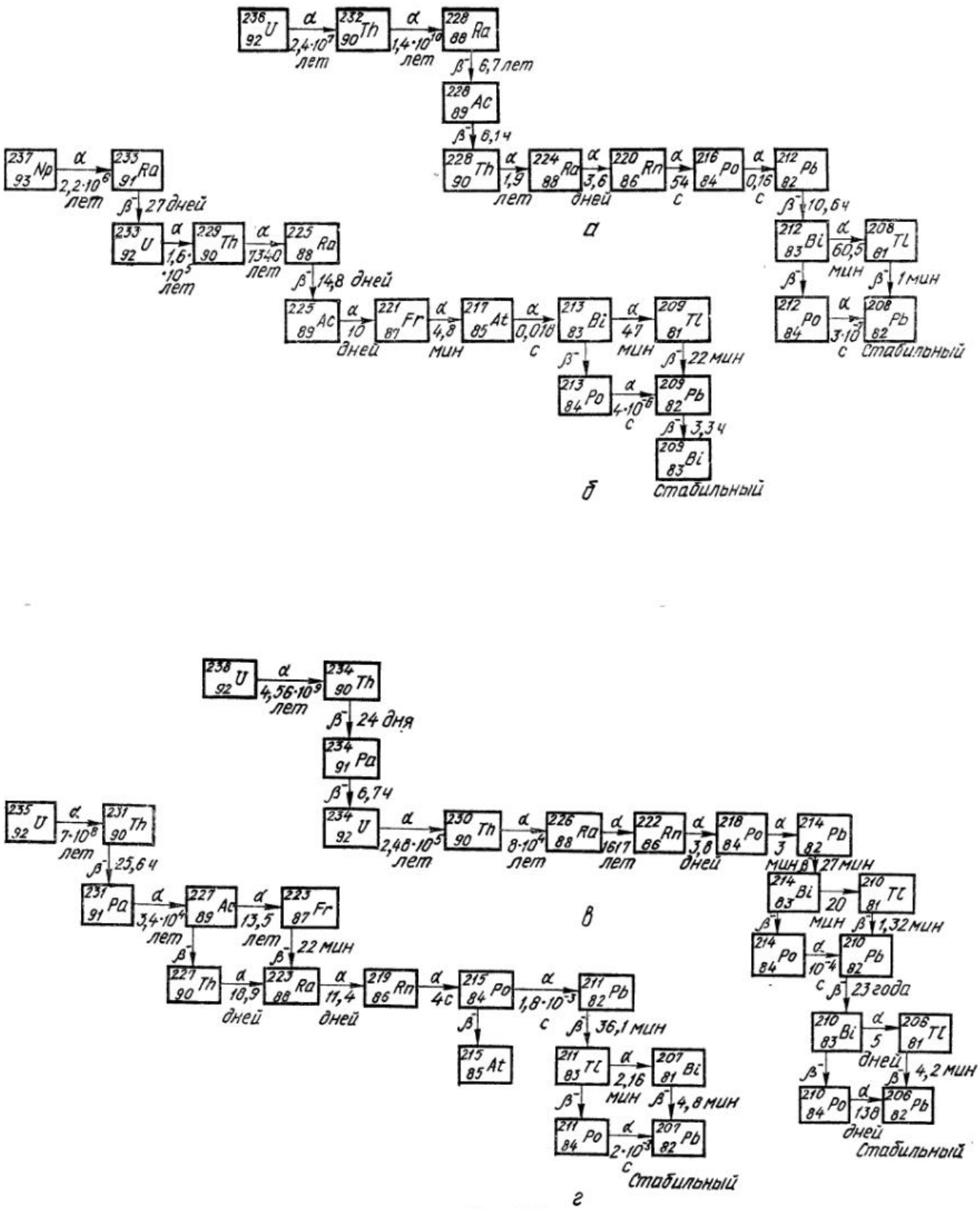


Рис. 74.6

Главной особенностью β-распада является то, что он обусловлен слабым взаимодействием [77.4]. Бета-распад является внутринуклонным процессом, т. е. он происходит в результате β-переходов отдельных нуклонов:

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad p \to n + e^+ + \nu_e. \tag{74.38}$$

Эти переходы вызывают перестройку внутренней структуры ядра, поскольку законы сохранения энергии и импульса при β-распаде выполняются. Эта перестройка описывается коэффициентом B (74.37), который определяет постоянную распада λ и его период $t_{1/2}$.

Отметим, что распад свободного протона согласно (74.38) невозможен, так как $m_p < m_n$ (т. е. по энергетическим соображениям). Когда протон находится в ядре, это ограничение снимается.

Согласно имеющимся данным электроны (позитроны) и антинейтрино (нейтрино) не существуют в ядрах. Они образуются непосредственно перед процессом β-распада. При изучении β-распадов было сделано одно из самых фундаментальных открытий — несохранение четности в слабых взаимодействиях (Ли, Ву, Янг, 1957) [77.4.3]. Известно более 700 искусственных β-изотопов. Эти изотопы практически равномерно распределены по всей периодической системе элементов Д. И. Менделеева, каждый элемент имеет хотя бы один β-активный изотоп. В результате β-перехода конечное ядро может оказаться в возбужденном состоянии. В этом случае β-распад сопровождается испусканием γ-квантов. В случае K-захвата на освобожденное место в электронной K-оболочке переходит электрон из вышележащей L-оболочки. Образовавшаяся вакансия снова заполняется электроном из вышележащего M-слоя и т. д. В результате таких переходов внутри атома возникают рентгеновские лучи [69]. Электронный захват легко обнаруживается на опыте по сопровождающему его рентгеновскому излучению.

74.2.3. Спонтанное деление тяжелых ядер. Явление *спонтанного деления тяжелых ядер* (Г. Н. Флеров, К. А. Петржак, 1939—1940) состоит в том, что некоторые тяжелые ядра могут самопроизвольно делиться на два примерно равных осколка, имеющих дефицит протонов, поскольку они принадлежат к середине периодической системы элементов. Кроме осколков в таком процессе выделяется 2—3 нейтрона.

Известно более 50 изотопов тяжелых элементов, у которых наблюдается самопроизвольное деление. В случае трансурановых элементов период полураспада $t_{1/2}$ (в секундах) описывается простым соотношением

$$\lg t_{1/2} = C - D\frac{Z^2}{A}, \quad C \approx 157, \quad D \approx 3{,}75. \tag{74.39}$$

Кроме изотопа $^{256}_{100}Fm$ для всех элементов с $Z \leqslant 102$ процесс спонтанного деления менее вероятен, чем α-распад. Для ядер с $N = 152$ период полураспада $t_{1/2}$ оказывается меньше, чем дает эмпирическая формула (74.39). Это обусловлено переходами пары нуклонов в результате деформации ядра на уровни с более низкой энергией. Выделяющаяся при такой перестройке структуры ядра энергия расходуется на его коллективное возбуждение как целого и ускоряет процесс деления. Здесь проявляется оболочечная структура ядра [72.4]. Теория предсказывает (Моттельсон, Нилссон, 1959), что в области ядер с $Z = 114$ и $N = 184$ должен существовать *«остров стабильности»* по отношению к делению. Предполагается, что ядро с $Z = 114$ и $N = 184$ будет обладать свойствами дважды магических ядер (при таких больших массовых числах магическим числом скорее всего будет $Z = 114$, а не $Z = 126$). Предсказывается, что некоторые из указанных сверхтяжелых ядер будут иметь время жизни от 10^3 до 10^1 лет. Такие ядра еще не обнаружены ни в природе (на Земле), ни в космосе, ни в реакциях на ускорителях.

74.2.4. Протонная радиоактивность. При протонной радиоактивности ядро в процессе распада испускает один или два протона (В. И. Гольданский, Г. Н. Флеров, 1963).

74.2.5. Радиоактивные ряды. Все ядра с $A > 209$ нестабильны по отношению к α-распаду за счет увеличения роли кулоновских сил. Если A значительно больше граничного значения $A = 209$, то это ядро переходит в стабильное через цепь нескольких последовательных распадов. Такие цепи распадов называют *радиоактивными рядами*. В них процессы α- и β-переходов чередуются. Остаток от деления массового числа на четыре одинаков для всех ядер одного и того же ряда. Поэтому существует всего четыре радиоактивных ряда: ториевый ($A = 4n$), нептуниевый ($A = 4n + 1$), уран-радиевый ($A = 4n + 2$) и урано-актиниевый ($A = 4n + 3$) (рис. 74.6, *а*, *б*, *в*, *г*). Радиоактивные ряды представляют интерес для ядерной техники, геологии, теории происхождения Земли, поскольку в этих рядах имеются изотопы, периоды полураспада которых сравнимы с временем жизни Солнечной системы ($\sim 10^9$ лет) [73.3.7].

Глава XVII

Элементарные частицы

75. СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

75.1. Предмет физики частиц

75.1.1. Единицы физических величин. Физика элементарных частиц изучает законы микромира на расстояниях порядка и меньше ядерных ($l \lesssim 10^{-13}$ см). Такие малые расстояния могут быть достигнуты только в опытах по столкновению частиц очень высоких энергий. Поэтому этот раздел физики называют также физикой высоких энергий. Из соотношения неопределенности для импульса $\mathbf{p}$ и координаты $\mathbf{r}$ (61.6) с учетом связи энергии E и импульса p для ультрарелятивистских частиц, $E = pc$ [6.3], следует, что

$$El \gtrsim 10^{-5}, \tag{75.1}$$

где E выражено в электронвольтах (эВ) (64.24), а расстояние в сантиметрах (см). Это означает, что расстояниям $l \lesssim 10^{-13}$ см соответствуют энергии $E \gtrsim 10^{8}$ эВ.

В качестве единицы измерения энергии в физике элементарных частиц используют кратные от эВ:

$$1\ \text{МэВ} = 10^{6}\ \text{эВ},\ 1\ \text{ГэВ} = 10^{9}\ \text{эВ},\ 1\ \text{ТэВ} = 10^{12}\ \text{эВ}. \tag{75.2}$$

Кроме того, практически удобной оказывается система единиц, в которой скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ принимаются равными единице, $c = \hbar = 1$. Из соотношений неопределенности (61.6) и (61.7), а также связей энергии и массы, $E = mc^2$, импульса и массы, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (где $\mathbf{v}$ — скорость, $l = vt$, l — длина, t — время) получаем, что в такой системе энергия E, импульс $\mathbf{p}$ и масса m имеют размерность обратной длины l^{-1}, а время t — размерность длины l:

$$[E] = [\mathbf{p}] = [m] = [l^{-1}],\ [t] = [m^{-1}] = [l] \tag{75.3}$$

при $\hbar = c = 1$.

Чтобы перейти к единицам СИ, нужно учесть, что

$$\frac{\hbar}{Mc} \approx 2 \cdot 10^{-14}\ \text{см},\ \frac{\hbar}{Mc^2} \approx 7 \cdot 10^{-25}\ \text{с},\ \frac{1}{M} \approx 6 \cdot 10^{23}\ \text{г}^{-1}, \tag{75.4}$$

$$1\ \text{ГэВ}^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-14}\ \text{см},$$

где M — масса протона.

75.1.2. Краткая хронология. В современной физике под *элементарными частицами* понимают большую группу мельчайших материальных частиц, в которую не входят такие сложные образования, как атомы и атомные ядра.

Первой открытой элементарной частицей был *электрон* (e^-) — носитель элементарного отрицательного электрического заряда (Томсон, 1897) [64.1]. Частицы с элементарным положительным электрическим зарядом и массой 1840 m_e, где m_e — масса электрона, были обнаружены среди частиц, выбитых из атомных ядер (Резерфорд, 1919). Эти частицы получили название *протонов* (p). Другая частица — *нейтрон* (n), не имеющая электрического заряда, с массой 1839 m_e была открыта Чэдвиком (1932). Прямые экспериментальные доказательства существования *фотона* (γ) — кванта электромагнитного излучения (Планк, 1900; Эйнштейн, 1905), дали Милликен (1912—1915) и Комптон (1922) [57.2]. *Электронное нейтрино* (ν_e), предсказанное Паули (1930) при объяснении β-распада нейтрона [72.2.4; 74.2.2; 77.4] открыли Райнес и Коуэн (1953). В составе космических лучей был обнаружен *позитрон* (e^+) — частица с массой электрона и положительным электрическим зарядом (Андерсон, 1932). Позитрон — первая открытая античастица [63.2.2]. Частицы с массой около 200 m_e и обоих электрических зарядов — *мюоны* (μ^+, μ^-) — также обнаружены впервые в космических лучах (Андерсон, Неддермейер, 1936). Пауэлл (1947) в космических лучах обнаружил частицы — кванты сильного взаимодействия, предсказанные Юкавой (1935) [71.3.2] и получившие название *пионов* (π^+, π^-). Первые частицы большой группы частиц, обладающие необычными свойствами и потому называемые *странными* — K^+-, K^--*мезоны* и Λ-*гипероны* — были обнаружены в космических лучах (40—50 гг.). Другие странные частицы (табл. 75.1, 75.2) были обнаружены в опытах на ускорителях заряженных частиц. С 50-х годов ускорители стали основным инструментом при исследовании свойств и взаимодействий элементарных частиц. С их помощью были открыты *антипротон* ($\bar{p}$) (1955), *антинейтрон* ($\bar{n}$) (1956), *анти-сигма гипероны* ($\bar{\Sigma}^{\pm}$, $\bar{\Sigma}^0$) (1960), *омега-минус гиперон* (Ω^-) (1964). В 1962 г. выяснилось, что кроме электронного нейтрино (ν_e) существует *мюонное нейтрино* (ν_μ). *Частицы* J/ψ и ψ', имеющие массы в 3—4 раза больше массы протона, обнаружены в 1974 г. Они положили начало новому семейству частиц, получивших название *очарованных* (табл. 75.1, 75.2). *Очарованные частицы* D^0, D^+ и Λ_c^+ были открыты в 1976 г. Частица, представляющая собой аналог тяжелого электрона (и мюона) — τ-*лептон*, обнаружена в 1975 г. В последующие годы были открыты Υ-*частицы* (1977) с массой порядка $10 m_p$, где m_p — масса протона, *красивые* (или *прелестные*) *мезоны* B^+, B^-, B^0, $\bar{B}^0$ (1981) и *промежуточные векторные бозоны* $W^{\pm}$, Z^0 (1983).

В 60-е годы на ускорителях было обнаружено большое число очень неустойчивых частиц со временем жизни $\sim 10^{-23}$ с, получивших название резонансов. Известно большое число так называемых *мезонных* и *барионных резонансов* (табл. 75.3. 75. 4). Они составляют основную часть элементарных частиц, количество которых превышает 350.

Опыт показывает, что для каждой частицы имеется своя античастица, отличающаяся от нее знаками аддитивных квантовых чисел [63.1; 63.2; 75.5].

Таблица 75.1. **Стабильные частицы**

Частица	$I^G(J^P)C$	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	Время жизни, с	Главная мода распада	Вероятность, %
Калибровочные (векторные) бозоны						
γ	(1^-)	$< 3 \cdot 10^{-33}$			Стабильна	
W^-, W^+	(1)	$81{,}0\ (1{,}3) \cdot 10^3$	$< 6{,}5 \cdot 10^3$	$\sim 10^{-25}$	$e\nu$, $\mu\nu$	
Z^0	?	$92{,}4\ (1{,}8) \cdot 10^3$	$< 5{,}6 \cdot 10^3$	$\sim 10^{-25}$	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$	
Лептоны, $\lvert L\rvert = 1$						
e^-, e^+	(1/2)	0,51099906(15)		$> 2 \cdot 10^{22}$ лет	Стабильны	
ν_e, $\bar{\nu}_e$	(1/2)	$< 18 \cdot 10^{-6}$		$> 3 \cdot 10^{-5} m_{\nu_e}$	Стабильны	
μ^-, μ^+	(1/2)	105,65839(6)		$2{,}19703\ (4) \cdot 10^{-6}$	$e^{\mp}\nu\bar{\nu}$	98,6 (4)
ν_μ, $\bar{\nu}_\mu$	(1/2)	$< 0{,}25$		$> 1{,}1 \cdot 10^5 m_{\nu_\mu}$	Стабильны	
τ^-, τ^+	(1/2)	$1784{,}1\left(^{+\,2{,}7}_{-\,3{,}6}\right)$		$3{,}04\ (9) \cdot 10^{-13}$	$\mu^{\mp}\bar{\nu}\nu$	17,6 (6)
ν_τ, $\bar{\nu}_\tau$	(1/2)	< 35		?	?	
Легкие мезоны, $\pi^+ = \bar{u}d$, $\pi^0 = (\bar{u}u - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $\pi^- = \bar{u}d$, $\eta = c_1(\bar{u}u + d\bar{d}) + c_2 s\bar{s}$						
π^+, π^-	$1^-\ (0^-)$	139,56755(33)	0,0	$2{,}6030\ (23) \cdot 10^{-8}$	$\mu^{\pm}\nu$	~ 100
π^0	$1^-\ (0^-) +$	134,9734 (25)	$7{,}57\ (32) \cdot 10^{-6}$	$0{,}84\ (06) \cdot 10^{-16}$	$\gamma\gamma$	98,799 (30)
η	$0^+\ (0^-) +$	548,8 (6)	$1{,}08\ (19) \cdot 10^{-3}$		$\gamma\gamma$	38,9 (4)
Странные мезоны, $\lvert S\rvert = 1$, $K^+ = \bar{u}s$, $K^0 = d\bar{s}$, $\bar{K}^0 = \bar{d}s$, $K^- = \bar{u}s$						
K^+, K^-	$\frac{1}{2}\ (0^-)$	493,46(9)		$1{,}2371\ (28) \cdot 10^{-8}$	$\mu^{\pm}\nu$	63,51 (16)
K^0, $\bar{K}^0$	$\frac{1}{2}\ (0^-)$	497,671(30)		50 % K_s, 50 % K_L		
K_s^0	$\frac{1}{2}\ (0^-)$			$0{,}8922\ (20) \cdot 10^{-10}$	$\pi^+\pi^-$	68,61 (24)
K_L^0	$\frac{1}{2}\ (0^-)$			$5{,}18\ (4) \cdot 10^{-8}$	$\pi^0\pi^0\pi^0$	21,5 (1,0)
Очарованные мезоны, $\lvert C\rvert = 1$, $D^+ = c\bar{d}$, $D^0 = \bar{c}u$, $\bar{D}^0 = \bar{c}u$, $D^- = \bar{c}d$, $D_s^+ = c\bar{s}$, $D_s^- = \bar{c}s$						
D^+, D^-	$\frac{1}{2}\ (0^-)$	1869,3 (6)		$10{,}69\left(^{0{,}34}_{-0{,}32}\right) \cdot 10^{-13}$	$e^{\pm}$ что угодно	18,2 (1,7)
D^0, $\bar{D}^0$	$\frac{1}{2}\ (0^-)$	1864,5 (6)		$4{,}28(11) \cdot 10^{-13}$	$e^{\pm}$ что угодно	7,0 (1,1)
D_s^+, D_s^-	$0\ (0^-)$	1969,3 (1,1)		$4{,}36\left(^{0{,}38}_{-0{,}32}\right) \cdot 10^{-13}$	$\Phi\pi^+$	
Прелестные (или красивые) мезоны, $\lvert B'\rvert = 1$, $B^+ = \bar{u}b$, $B^0 = d\bar{b}$, $\bar{B}^0 = \bar{d}b$, $B^- = \bar{u}b$						
B^+, B^-	$\frac{1}{2}\ (0^-)$	5277,6 (1,4)		$13{,}1\left(^{1{,}4}_{-1{,}3}\right) \cdot 10^{-13}$	$\bar{D}^0\pi^+$	1,1 (6)
B^0, $\bar{B}^0$	$\frac{1}{2}\ (0^-)$	5279,4 (1,5)			$\bar{D}^0\pi^+\pi^-$	7 (5)

Таблица 75.2. **Барионы, $B = 1$**

Частица	$I(J^P)$	Масса, МэВ	Время жизни, с	Главная мода распада	Вероятность, %
		Нуклоны, $p = uud$, $n = udd$			
p	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	938,27231 (28)	$> 1{,}6 \cdot 10^{25}$ лет $> 10^{31} - 3 \cdot 10^{32}$ лет	Стабилен	
n	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	939,56563 (28)	896 (10)	$pe^-\bar{\nu}$	100
		Странные барионы, $S = -1$, $\Lambda = uds$, $\Sigma^+ = uus$, $\Sigma^0 = uds$, $\Sigma^- = dds$			
Λ	$0\left(\frac{1^+}{2}\right)$	1115,63 (5)	$2{,}631\ (20) \cdot 10^{-10}$	$p\pi^-$	64,2 (5)
Σ^+	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	1189,37 (6)	$0{,}799\ (4) \cdot 10^{-10}$	$p\pi^0$	51,64 (30)
Σ^0	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	1192,55 (9)	$7{,}4\ (7) \cdot 10^{-20}$	$\Lambda\gamma$	100
Σ^-	$1\left(\frac{1^+}{2}\right)$	1197,43 (6)	$1{,}479\ (11) \cdot 10^{-10}$	$n\pi^-$	100
		Странные барионы, $S = -2$, $\Xi^0 = uss$, $\Xi^- = dss$			
Ξ^0	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	1314,9 (6)	$2{,}90\ (10) \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^0$	100
Ξ^-	$\frac{1}{2}\left(\frac{1^+}{2}\right)$	1321,32 (13)	$1{,}639\ (15) \cdot 10^{-10}$	$\Lambda\pi^-$	100
		Странные барионы, $S = -3$, $\Omega^- = sss$			
Ω^-	$0\left(\frac{3^+}{2}\right)$	1672,43 (32)	$0{,}822\ (12) \cdot 10^{-10}$	ΛK^-	67,8 (7)
		Очарованные барионы, $C = 1$, $\Lambda_c^+ = udc$			
Λ_c^+	$0\left(\frac{1^+}{2}\right)$	2284,9 (1,5)	$1{,}79\left(\begin{smallmatrix}0{,}23\\-0{,}17\end{smallmatrix}\right) \cdot 10^{-13}$	$pK^-\pi^+$	2,2 (1,0)

Таблица 75.3. **Мезонные резонансы**

Резонанс	$I^G(J^P)C$	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
		Неароматные мезоны			
$\pi^\pm$	$1^-(0^-)+$	139,57	0,0		
π^0		134,96	$(7{,}57 \pm 0{,}32) \cdot 10^{-6}$	См. табл. 75.1	
η	$0^+(0^-)+$	$548{,}8 \pm 0{,}6$	$(1{,}05 \pm 0{,}15) \cdot 10^{-3}$		
ρ (770)	$1^+(1^-)-$	770 (3)	153 (2)	$\pi\pi$	100
ω (783)	$0^-(1^-)-$	782,6 (2)	9,8 (3)	$\pi^+\pi^-\pi^0$	89,6 (5)
η' (958)	$0^+(0^-)+$	957,57 (25)	0,24 (3)	$\eta\pi\pi$	65,2 (1,6)
f_0 (975)	$0^+(0^+)+$	975 (4)	33 (6)	$\pi\pi$	78 (3)
a_0 (980)	$1^-(0^+)+$	983 (2)	54 (7)	$\eta\pi$	
Φ (1020)	$0^-(1^-)-$	1019,5 (1)	4,22 (13)	K^+K^-	49,5 (1,5)
h_1 (1190)	$0^-(1^+)-$	1190 (60)	320 (50)	$\rho\pi$	
b_1 (1235)	$1^+(1^+)-$	1233 (10)	150 (10)	$\omega\pi$	
f_2 (1270)	$0^+(2^+)+$	1274 (5)	176 (20)	$\pi\pi$	84,3 (1,2)

Продолжение табл. 75.3

Резонанс	$I^G(J^P)C$	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
a_1 (1270)	$1^-(1^+)+$	1275 (28)	316 (45)	$\rho\pi$	
f_1 (1285)	$0^+(1^+)+$	1283 (5)	25 (3)	$K\bar{K}\pi$	11 (3)
f_0 (1300)	$0^+(0^+)+$	~1300	150—400	$\pi\pi$	~90
π (1300)	$1^-(0^-)+$	1300 (100)	200—600	$\rho\pi$	
a_2 (1320)	$1^-(2^+)+$	1318 (5)	110 (5)	$\rho\pi$	70,1 (2,2)
f_1 (1420)	$0^+(1^+)+$	1422 (10)	56 (3)	$K\bar{K}\pi$	
η (1440)	$0^+(0^-)+$	1440 (20)	76 (8)	$K\bar{K}\pi$	
f_2' (1525)	$0^+(2^+)+$	1525 (5)	70 (10)	$K\bar{K}$	
f_0 (1590)	$0^+(0^+)+$	1587 (16)	287 (50)	$\eta'\eta$	
ρ (1600)	$1^+(1^-)-$	1590 (20)	260 (100)	4π	60 (7)
ω_3 (1670)	$0^-(3^-)-$	1668 (5)	166 (15)	3π	
π_2 (1680)	$1^-(2^-)+$	1680 (30)	250 (50)	$f_2(1270)\,\pi$	53 (5)
Φ (1680)	$0^-(1^-)-$	1685 (75)	130 (50)	$K^*\bar{K}+\bar{K}^*K$, $\omega\pi\pi$	
ρ_3 (1690)	$1^+(3^-)-$	1691 (5)	200 (20)	2π	23,8 (1,3)
f_2 (1720)	$0^+(2^+)+$	1716 (8)	134 (19)	$\eta\eta$, $K\bar{K}$	
Φ_J (1850)	$0^+(3^-)-$	1853 (10)	96 (32)	$K\bar{K}$, $K^*\bar{K}+\bar{K}^*K$	
f_4 (2030)	$0^+(4^+)+$	2026 (12)	200 (13)	$\pi\pi$	17 (2)
		$c\bar{c}$-мезоны			
η_c (2980)	$0^+(0^-)+$	2981 (2)	11 (4)	$K\bar{K}\pi$	5,4 (1,8)
J/ψ (3097)	$0^-(1^-)-$	3096,9 (1)	0,0063 (9)	e^+e^-, $\mu^+\mu^-$	6,9 (9)
χ_0 (3415)	$0^+(0^+)+$	3414,9 (1,1)		$2(\pi^+\pi^-)$	3,8 (8)
χ_1 (3510)	$0^+(1^+)+$	3510,7 (5)	<1,0	$\gamma J/\psi$ (3097)	25,8 (2,5)
χ_2 (3555)	$0^+(2^+)+$	3556,3 (4)	$2{,}9\left(\begin{smallmatrix}1{,}8\\-1{,}1\end{smallmatrix}\right)$	$\gamma J/\psi$ (3097)	14,8 (1,7)
ψ (3685)	$0^-(1^-)-$	3686,0 (1)	0,215 (40)	$e^+e^-+\mu^+\mu^-$	1,8 (3)
ψ (3770)	$(1^-)-$	3769,9 (2,4)	25 (3)	$D\bar{D}$	
ψ (4030)	$(1^-)-$	4030 (5)	52 (10)	e^+e^-	0,0014 (4)
ψ (4160)	$(1^-)-$	4159 (20)	78 (20)	e^+e^-	0,0010 (4)
ψ (4415)	$(1^-)-$	4415 (6)	43 (20)	e^+e^-	0,0011 (6)
		$b\bar{b}$-мезоны			
Υ (9460)	$(1^-)-$	9460,0 (2)	0,043 (3)	$\tau^+\tau^-$	3,2 (4)
χ_{b0} (9860)	$(+)+$	9859,8 (1,3)		$\gamma\Upsilon$ (9460)	< 6
χ_{b1} (9895)	$(+)+$	9891,9 (7)		$\gamma\Upsilon$ (9460)	35 (8)
χ_{b2} (9915)	$(+)+$	9913,3 (6)		$\gamma\Upsilon$ (9460)	22 (4)
Υ (10023)	$(1^-)-$	10023,4 (3)	0,030 (7)	$\pi^+\pi^-\Upsilon$ (9460)	18.7 (1.0)
χ_{b1} (10255)	$(+)+$	10255 (2)		$\gamma\Upsilon$ (9460)	
χ_{b2} (10270)	$(+)+$	10271 (2)		$\gamma\Upsilon$ (10023)	
Υ(10355)	$(1^-)-$	10355 (0,5)	0,012 (10)	$\gamma\chi_{b1}$ (10255)	15,6 (4,2)
Υ(10575)	$(1^-)-$	10577 (4)	24 (2)		
Υ(10860)	$(1^-)-$	10865 (8)	110 (13)		
Υ(11020)	$(1^-)-$	11019 (9)	79 (16)		
		Странные мезоны			
K^+	1/2 (0⁻)	493,67	См. табл. 75.1		
K^0		497,72			
$K^*(892)$	1/2 (1⁻)	892,1±0,3	51,1±0,8	$K\pi$	≈ 100
$K_1(1280)$ (был $Q(1280)$)	1/2 (1⁺)	1270±10	90±20	$K\rho$	42±6
				$K_0^*(1350)\,\pi$	28±4
				$K^*(892)\,\pi$	16±5
				$K\omega$	11±2
$K_0^*(1350)$ (был $k(1350)$)	1/2 (0⁺)	~1350	~250	$K\pi$	
$K_1(1400)$ (был $Q(1400)$)	1/2 (1⁺)	1406±10	184±9	$\pi K^*(892)$	94±6
				$K\rho$	3±3

Продолжение табл. 75.3

Резонанс	$I^G(J^P)C$	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
$K_2^*(1430)$	$1/2\,(2^+)$	1426 ± 2	99 ± 3	$K\pi$	$44{,}9\pm2{,}7$
(был $K^*(1430)$)				$\pi K^*(892)$	$23{,}6\pm1{,}8$
				$\pi\pi K^*(892)$	$13{,}5\pm2{,}7$
$K_2(1770)$	$1/2\,(2^-)$	~1770	~200	$\pi K_2^*(1430)$	Преобладает
(был $L(1770)$)					
$K_3^*(1780)$	$1/2\,(3^-)$	1780 ± 4	150 ± 17	$K\pi$	17 ± 5
(был $K^*(1780)$)				$K\pi\pi$	Большой
$K_4^*(2060)$	$1/2\,(4^+)$	2060 ± 30	210 ± 40	$K\pi$	7 ± 1
(был $K^*(2060)$)					
Очарованные нестранные мезоны					
D^+	$1/2\,(0^-)$	1869,3	См. табл. 75.1		
D^0		1864,6			
$D^*(2010)^+$	$1/2\,(1^-)$	$2010{,}1\pm0{,}7$	$<2{,}0$	$D^0\pi^+$	49 ± 8
				$D^+\pi^0$	34 ± 7
				$D^+\gamma$	17 ± 11
$D^*(2010)^0$	$1/2\,(1^-)$	$2007{,}2\pm2{,}1$	<5	$D^0\pi^0$	$51{,}5\pm7{,}6$
				$D^0\gamma$	$48{,}5\pm7{,}6$

Таблица 75.4. Барионные резонансы

Частица	J^P	L_{2I2J}	Масса, МэВ	Полная ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
N-резонансы ($S=0$, $I=1/2$) $N^+=uud$, $N^0=udd$						
p	$1/2^+$		938,3	См. табл. 75.2		
n	$1/2^+$		939,6			
$N(1440)$	$1/2^+$	P_{11}	1400—1480	120—350	$N\pi$	50—70
				(200)	$N\pi\pi$	30—50
					$\Delta\pi$	10—20
					$N\rho$	10—15
$N(1520)$	$3/2^-$	D_{13}	1510—1530	100—140	$N\pi$	50—60
				(125)	$N\pi\pi$	40—50
					$\Delta\pi$	20—30
					$N\rho$	15—25
$N(1535)$	$1/2^-$	S_{11}	1520—1560	100—250	$N\pi$	35—50
				(150)	$N\eta$	45—55
					$N\pi\pi$	10
$N(1650)$	$1/2^-$	S_{11}	1620—1680	100—200	$N\pi$	55—65
				(150)	$N\pi\pi$	20—35
					$N\rho$	5—30
					ΛK	~8
					$\Delta\pi$	<10
$N(1675)$	$5/2^-$	D_{15}	1660—1690	120—180	$N\pi$	35—40
				(155)	$N\pi\pi$	60—65
					$\Delta\pi$	55—60
					$N\rho$	<10
$N(1680)$	$5/2^+$	F_{15}	1670—1690	110—140	$N\pi$	55—65
				(125)	$N\pi\pi$	35—45
					$\Delta\pi$	10—15
					$N\rho$	10—20
$N(1700)$	$3/2^-$	D_{13}	1670—1730	70—120	$N\pi$	5—15
				(100)	$N\pi\pi$	80—90
					$\Delta\pi$	15—70
					$N\rho$	<20
$N(1710)$	$1/2^+$	P_{11}	1680—1740	90—130	$N\pi$	10—20
				(110)	$N\eta$	~25
					ΛK	~15
					ΣK	2—10
					$N\pi\pi$	<50
					$\Delta\pi$	10—20
					$N\rho$	5—35
$N(1720)$	$3/2^+$	P_{13}	1690—1800	125—250	$N\pi$	10—20
				(200)	$N\pi\pi$	<75
					$\Delta\pi$	<15
					$N\rho$	<75
$N(2190)$	$7/2^-$	G_{17}	2120—2230	200—500	$N\pi$	~14
				(350)	$N\eta$	~3
$N(2220)$	$9/2^+$	H_{19}	2150—2300	300—500	$N\pi$	~18
				(400)	$N\eta$	$\sim0{,}5$
$N(2250)$	$9/2^-$	G_{19}	2130—2270	200—500	$N\pi$	~10
				(300)	$N\eta$	~2
$N(2600)$	$11/2^-$	I_{111}	2580—2700	>300	$N\pi$	~5
				(400)		

Продолжение табл. 75.4

Частица	J^P	L_{2I2J}	Масса, МэВ	Полная ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
Δ-резонансы ($S=0$, $I=3/2$) $\Delta^{++}=uuu$, $\Delta^{+}=uud$, $\Delta^{0}=udd$, $\Delta^{-}=ddd$						
Δ (1232)	$3/2^+$	P_{33}	1230—1234	110—120 (115)	$N\pi$	99,4
					$N\gamma$	0,56—0,66
Δ (1620)	$1/2^-$	S_{31}	1600—1650	120—160 (140)	$N\pi$	25—35
					$N\pi\pi$	65—75
					$\Delta\pi$	60—70
					$N\rho$	10—20
Δ (1700)	$3/2^-$	D_{33}	1630—1740	190—300 (250)	$N\pi$	10—20
					$N\pi\pi$	80—90
					$\Delta\pi$	50—90
					$N\rho$	<35
Δ (1900)	$1/2^-$	S_{31}	1850—2000	130—300 (150)	$N\pi$	5—15
					ΣK	~ 10
Δ (1905)	$5/2^+$	F_{35}	1890—1920	250—400 (300)	$N\pi$	5—15
					$N\pi\pi$	<75
					$\Delta\pi$	~ 25
					$N\rho$	<50
Δ (1910)	$1/2^+$	P_{31}	1850—1950	200—330 (220)	$N\pi$	15—25
					ΣK	2—20
					$N\pi\pi$	<75
Δ (1920)	$3/2^+$	P_{33}	1860—2160	190—300 (250)	$N\pi$	15—20
					ΣK	~ 5
Δ (1930)	$5/2^-$	D_{35}	1890—1960	150—350 (250)	$N\pi$	5—15
					ΣK	<10
Δ (1950)	$7/2^+$	F_{37}	1910—1960	200—340 (240)	$N\pi$	35—45
					$N\pi\pi$	<40
					$\Delta\pi$	~ 30
					$N\rho$	<10
Δ (2420)	$11/2^+$	H_{311}	2380—2450	300—500 (300)	$N\pi$	5—15
Λ-резонансы ($S=-1$, $I=0$) $\Lambda^0=uds$						
Λ	$1/2^+$		1115,6	См. табл. 75.2		
Λ (1405)	$1/2^-$	S_{01}	1405±5	40±10	$\Sigma\pi$	100
Λ (1520)	$3/2^-$	D_{03}	1519,5±1,0	15,6±1,0	$N\bar{K}$	45±1
					$\Sigma\pi$	42±1
					$\Lambda\pi\pi$	10±1
Λ (1600)	$1/2^+$	P_{01}	1560—1700	50—250 (150)	$N\bar{K}$	15—30
					$\Sigma\pi$	10—60
Λ (1670)	$1/2^-$	S_{01}	1660—1680	25—50 (35)	$N\bar{K}$	15—25
					$\Sigma\pi$	20—60
					$\Lambda\eta$	15—35
Λ (1690)	$3/2^-$	D_{03}	1685—1695	50—70 (60)	$N\bar{K}$	20—30
					$\Sigma\pi$	20—40
					$\Lambda\pi\pi$	25
					$\Sigma\pi\pi$	20

Продолжение табл. 75.4

Частица	J^P	L_{2I2J}	Масса, МэВ	Полная ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
Λ (1800)	$1/2^-$	S_{01}	1720—1850	200—400 (300)	$N\bar{K}$	25—40
				50—250 (150)	$N\bar{K}$	20—50
Λ (1800)	$1/2^+$	P_{01}	1750—1850			
Λ (1820)	$5/2^+$	F_{05}	1815—1825	70—90 (80)	$N\bar{K}$	55—65
					$\Sigma\pi$	8—14
					$\Sigma(1385)\,\pi$	5—10
Λ (1830)	$5/2^-$	D_{05}	1810—1830	60—110 (95)	$N\bar{K}$	3—10
					$\Sigma\pi$	35—75
Λ (1890)	$3/2^+$	P_{03}	1850—1910	60—200 (100)	$N\bar{K}$	20—35
					$\Sigma\pi$	3—10
Λ (2100)	$7/2^-$	G_{07}	2090—2110	100—250 (200)	$N\bar{K}$	25—35
					$\Sigma\pi$	~ 5
					$\Lambda\omega$	<8
					$N\bar{K}^*(892)$	10—20
Λ (2110)	$5/2^+$	F_{05}	2090—2140	150—250 (200)	$N\bar{K}$	5—25
					$\Sigma\pi$	10—40
					$N\bar{K}^*(892)$	10—60
Λ (2350)	$9/2^+$		2340—2370	100—250 (150)	$N\bar{K}$	~ 12
					$\Sigma\pi$	~ 10
Σ-резонансы ($S=-1$, $I=1$) $\Sigma^+=uus$, $\Sigma^0=uds$, $\Sigma^-=dds$						
Σ^+	$1/2^+$		1189,4			
Σ^0			1192,5	См. табл. 75.2		
Σ^-			1197,3			
$\Sigma(1385)^+$	$3/2^+$	P_{13}	1382,8±0,4	36±1	$\Lambda\pi$	88±2
$\Sigma(1385)^0$			1383,7±1,0	36±5	$\Sigma\pi$	12±2
$\Sigma(1385)^-$			1387,2±0,6	39±2		
Σ (1660)	$1/2^+$	P_{11}	1630—1690	40—200 (100)	$N\bar{K}$	10—30
Σ (1670)	$3/2^-$	D_{13}	1665—1685	40—80 (60)	$N\bar{K}$	7—13
					$\Lambda\pi$	5—15
					$\Sigma\pi$	30—60
Σ (1750)	$1/2^-$	S_{11}	1730—1800	60—160 (90)	$N\bar{K}$	10—40
					$\Sigma\pi$	<8
					$\Sigma\eta$	15—55
Σ (1775)	$5/2^-$	D_{15}	1770—1780	105—135 (120)	$N\bar{K}$	37—43
					$\Lambda\pi$	14—20
					$\Sigma(1385)\,\pi$	8—12
					$\Lambda(1520)\,\pi$	17—23
Σ (1915)	$5/2^+$	F_{15}	1900—1935	80—160 (120)	$N\bar{K}$	5—15
					$\Sigma(1385)\,\pi$	<5
Σ (1940)	$3/2^-$	D_{13}	1900—1950	150—300 (220)	$N\bar{K}$	<20

Продолжение табл. 75.4

Частица	I^P	L_{2I2J}	Масса, МэВ	Полная ширина, МэВ	Главная мода распада	Вероятность, %
Σ (2030)	$7/2^+$	F_{17}	2025—2040	150—200 (180)	$N\bar{K}$	17—23
					$\Lambda\pi$	17—23
					$\Sigma\pi$	5—10
Σ (2250)	?		2210—2280	60—150 (100)	$N\bar{K}$	<10
Ξ-резонансы ($S=-2$, $I=1/2$) $\Xi^0=uss$, $\Xi^-=dss$						
Ξ^0	$1/2^+$		1314,9	См. табл. 75.2		
Ξ^-			1321,3			
$\Xi(1530)^0$	$3/2^+$	P_{13}	1531,8±0,3	9,1±0,5	$\Xi\pi$	100
$\Xi(1530)^-$			1535,0±0,6	10,1±1,9		
Ξ (1820)	$3/2^-$	D_{13}	1822±6	24^{+15}_{-10}	$\Lambda\bar{K}$	~45
					$\Xi(1530)\pi$	~45
Ξ (2030)	?		2025±6	20^{+15}_{-5}	$\Lambda\bar{K}$	~20
					$\Sigma\bar{K}$	~80

75.2. Стабильность частиц

Согласно имеющимся данным *абсолютно стабильными* являются только девять частиц: фотон (γ), протон (p), антипротон ($\bar{p}$), электрон (e^-), позитрон (e^+), электронное (ν_e) и мюонное (ν_μ) нейтрино, а также их античастицы ($\bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu$). Все остальные частицы самопроизвольно распадаются с различными периодами полураспада [74.1.2] $t_{1/2} \sim 10^3 - 10^{-23}$ с. Наиболее долгоживущим из нестабильных частиц является нейтрон с $t_{1/2} \sim 15$ мин. Время жизни резонансов имеет порядок характерного ядерного времени [73.3.1], $t_{1/2} \sim 10^{-22} - 10^{-23}$ с. В результате последовательных распадов *нестабильных* частиц в итоге рождаются стабильные частицы. Стабильные и нестабильные частицы могут рождаться и при взаимодействии стабильных частиц, если только их относительная кинетическая энергия больше масс покоя рождаемых частиц. Так, пара e^-e^+ может быть рождена в реакции $\gamma + \gamma \to e^- + e^+$, если относительная энергия двух фотонов $E_\gamma > 2m_e c^2$, где m_e — масса электрона. Возможен и обратный процесс, при котором частицы e^- и e^+ взаимно уничтожаются (аннигилируют), а энергия E_γ выделяется в виде кинетической энергии разлетающихся фотонов.

Примеры распадов и реакций:

$e^-e^+ \to e^-e^+$, $\gamma\gamma$, $\mu^+\mu^-$, $\pi^-\pi^+$, $\pi^-\pi^+\pi^0$

$D^0 \to K^+\pi^-$, $K^+\pi^+\pi^-\pi^-$, $K^0 \to \pi^+\pi^-$, $\Lambda^0 \to p\pi^-$, $K^+ \to \mu^+\nu_\mu$,

$p\pi^- \to \Lambda^0 K^0$, $\Sigma^- K^+$, nK^+K^-, $pp \to p\Sigma^+K^0$, ppK^+K^-

$e^-e^+ \to K^+K^-$, $\bar{p}p$, $\bar{n}n$, $D^0\bar{D}^0$,

$\Omega \to \Xi\pi \to \Lambda\pi \to N\pi$,

$pp \to p\Lambda K^+$.

Представление о типах распадов частиц дает табл. 75.5. Из этой таблицы следует, что адронный распад характеризуется временем $\sim 10^{-23}$ с, электромагнитный — $\sim 10^{-18}$ с и слабый распад — $\sim 10^{-10}$ с. Отношение этих времен приближенно равно отношению констант связи взаимодействий [77.1].

Таблица 75.5. Типы распадов некоторых частиц и их характеристики

Частица	Масса, МэВ/c^2	Основная мода распада	Энергия распада, МэВ	Время жизни, с	Тип распада
μ	106	$e\nu\bar{\nu}$	105	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	W
$\pi^\pm$	140	$\mu\nu$	34	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$	W
π^0	135	$\gamma\gamma$	135	$7{,}6 \cdot 10^{-17}$	EM
η	549	$\gamma\gamma$, $\pi\pi\pi$	549	$3 \cdot 10^{-19}$	EM
ρ	765	$\pi\pi$	485	$6 \cdot 10^{-24}$	H
n	940	$pe^-\bar{\nu}$	0,8	$0{,}93 \cdot 10^3$	W
Λ	1116	$p\pi^-$, $n\pi^0$	39	$2{,}5 \cdot 10^{-10}$	W
Δ	1236	$N\pi$	159	$6 \cdot 10^{-24}$	H

Примечание: W — слабое взаимодействие, EM — электромагнитное взаимодействие, H — адронное (сильное) взаимодействие.

Резонансы представляют собой распадающиеся состояния. Их энергии E не имеют точного значения и содержат малую мнимую добавку, $E = E_0 - \frac{i}{2}\Gamma$, вводимую для описания распада состояния. Плотность вероятности $R(E)$ найти энергию $E = \hbar\omega$ у резонанса описывается брейт-вигнеровой или лоренцевой кривой (37.22), где $E_0 = \hbar\omega_0$, согласно которой спектральная линия характеризуется естественной шириной $\Gamma = \hbar/\tau$, где τ — время жизни резонанса (74.8) (табл. 75.3; 75.4). Резонансы наблюдаются только у адронов — частиц, подверженных сильному взаимодействию. Согласно имеющимся данным адроны имеют структуру [76.2]. Резонансы являются их возбужденными состояниями и подобно атомным [66, 67] и ядерным [70.3; 73.3.1] системам образуют квазидискретный спектр (рис. 75.1, 75.2). Представление о возбужденных состояниях адронов и их теория строятся по аналогии с атомной физикой [XV].

Возможность рождения и уничтожения частиц в процессах их столкновений и самопроизвольного распада является одним из главных свойств элементарных частиц. Поскольку такие явления могут быть описаны только в рамках специальной теории относительности [6], учитывающей связь массы частицы с ее энергией, то *теория* элементарных частиц является существенно *релятивистской*. В связи с обнаруженными процессами взаимных превращений элементарных частиц термин «элементарные» по отношению к таким микрообъектам утратил

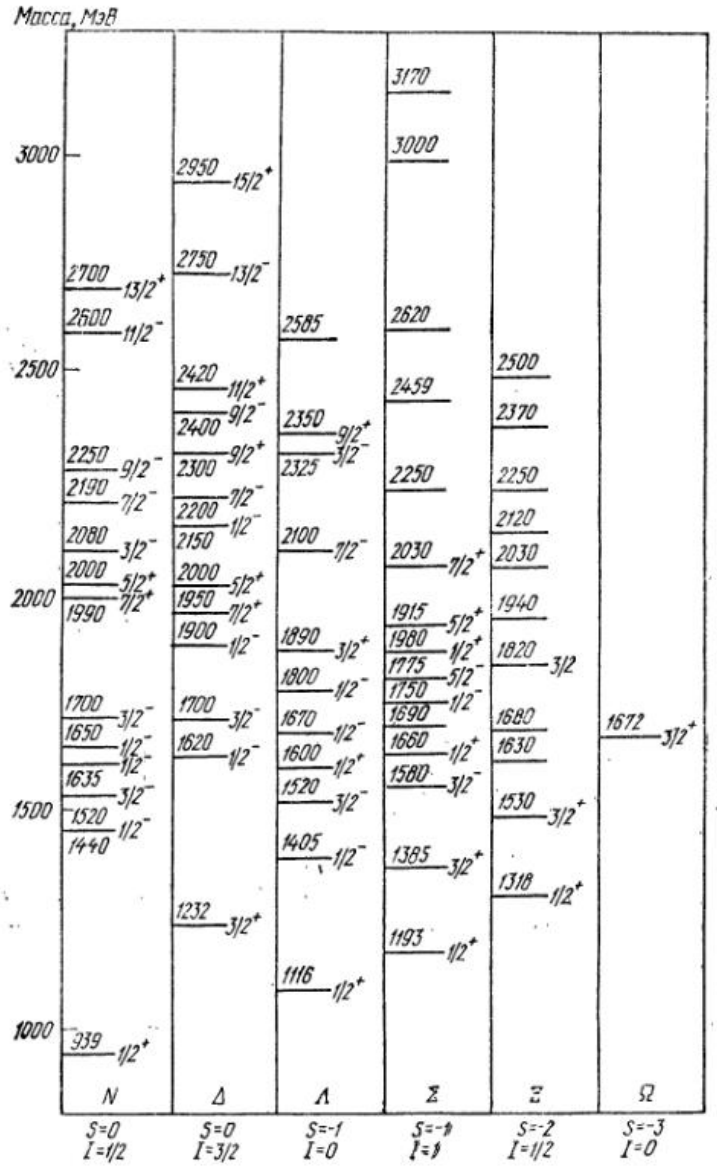


Рис. 75.1

свое первоначальное значение и, как и термин «атом», является условным. В научной литературе вместо термина «элементарные частицы» чаще используется термин «субъядерные частицы» или просто «частицы».

Главной задачей физики частиц является изучение закономерностей взаимных превращений субъядерных частиц, особенностей их взаимодействия и построение на этой основе последовательной картины микромира в области пространства с линейными размерами, меньшими ядерных.

75.3. Характеристики частиц

Основными характеристиками частиц являются: 1) масса m; 2) спин J; 3) электрический заряд Q; 4) барионный заряд B; 5) лептонные заряды L_e, L_μ, L_τ; 6) странность S; 7) очарование (шарм) C; 8) красота (прелесть) B'; 9) изотопический спин I; 9) время жизни τ $\left(\text{ширина } \Gamma = \frac{\hbar}{\tau}\right)$; 10) магнитный момент μ; 11) четности — пространственная P, зарядовая C, комбинированная CP, G-четность, временное отражение T.

Масса и *спин* частицы характеризуют ее инертные и гравитационные свойства. Масса определяет запас энергии в частице и по определению является положительно определенной величиной, $m \geqslant 0$.* Спин определяет статистические свойства частицы и принимает целые (у бозонов) и полуцелые (у фермионов) значения [67.1.1; 62.4.6].

Барионный B, лептонные L_e, L_μ, L_τ заряды, а также такие квантовые числа, как *странность S, очарование C, красота B'* целочисленны и отличны от нуля только у определенных групп частиц. Они вводятся в теорию полуфеноменологическим путем для объяснения наблюдаемых на опыте закономерностей [75.4]. Физическая природа этих чисел пока не известна. Эмпирически установлено, что для них справедливы законы сохранения [75.6].

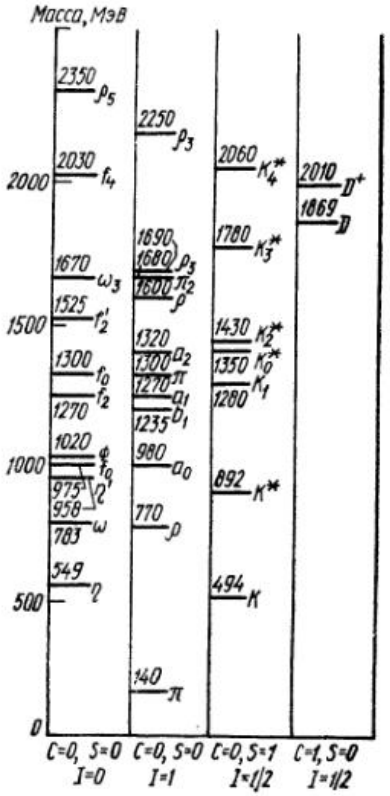


Рис. 75.2

Изотопический спин I отражает свойство зарядовой независимости сильных взаимодействий и позволяет объединять адроны, имеющие приблизительно равные массы и другие одинаковые характеристики, но разные электрические заряды, в группы частиц — мультиплеты, которые ведут себя одинаково в адронных процессах [76.1.1].

Квантовые числа четностей P, C, G, T связаны с симметрией протекания физических процессов и, следовательно, описывающих их уравнений движения в квантовой теории [XIV], по отношению к различным операциям отражения. Этим операциям соответствуют дискретные преобразования волновых функций частиц (называемых векторами состояний), приводящие к мультипликативным законам сохранения [62.4.5; 62.4.6].

Операции $\hat{P}$ соответствует физическая величина, называемая *P-четностью, пространственной четностью* или просто *четностью*. Эта операция состоит в изменении знаков импульсов частиц [62.4.5]. По отношению к ней симметричны сильные и электромагнитные взаимодействия, но не симметричны слабые.

Операция $\hat{C}$ называется *зарядовым сопряжением* [63.2.2]. Она состоит в изменении знаков всех без исключения зарядов

$$\hat{C}\,|B,\ Q,\ S,\ L\rangle = |-B,\ -Q,\ -S,\ -L\rangle,\ \hat{C}^2 = 1, \qquad (75.5)$$

где через $|\ldots\rangle$ обозначен вектор состояния частицы с соответствующими зарядами. Такая операция изменяет знаки всех аддитивных квантовых чисел, но оставляет импульс и спин неизменными. Операция $\hat{C}$ называется поэтому также операцией сопряжения частица — античастица. Она эрмитова и унитарна одновременно [62.4.1]. Из (75.5) следует, что собственные значения C оператора $\hat{C}$ равны ± 1. Число C называется *зарядовой четностью*. Определенную зарядовую четность имеют только частицы, у которых все заряды равны нулю, $B = Q = S = L = 0$. Такие частицы называются истинно нейтральными. Частицы с ненулевыми зарядами имеют неопределенную зарядовую четность C. Имеющиеся данные свидетельствуют о том, что оператор зарядового сопряжения $\hat{C}$ коммутирует с гамильтонианом $\hat{H}_h$ сильного взаимодействия

$$[\hat{C},\ \hat{H}_h] = 0,$$

и сильные и электромагнитные взаимодействия являются симметричными по отношению к операции зарядового сопряжения $\hat{C}$, а слабые взаимодействия — несимметричны.

Операции $\hat{G}$ соответствует физическая величина, называемая *G-четностью*. Она состоит из зарядового сопряжения $\hat{C}$ и поворота на 180° вокруг оси y в изотопическом пространстве. Так как поворот вокруг этой оси меняет знак третьей компоненты I_z изотопического спина (за ось квантования выбрана, как обычно, ось z), то операция $\hat{G}$ не изменяет электрический заряд и позволяет приписать определенную G-четность адронам, имеющим электрический заряд (например, пионам). G-четность сохраняется только в сильных взаимодействиях.

Операция $\hat{T}$ называется *временным отражением*. Она состоит в изменении знаков всех импульсов и моментов количества движения на противоположные, замене вектора состояния на комплексно сопряженный. Симметрия относительно операции $\hat{T}$ не ведет к закону сохранения какой-либо четности, но проявляется в принципе детального равновесия, который хорошо выполняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях (с точностью $\lesssim 1\,\%$) и нарушается в слабых взаимодействиях [77.4].

Операция $\hat{C}\hat{P}$ называется *комбинированной инверсией*. При такой операции отражения все импульсы и все заряды меняют знаки, т. е. частицы переходят в античастицы. Величина CP сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях, а также почти во всех слабых процессах. С нарушением CP-инвариантности идет только распад нейтрального каона: $W(K_L^0 \to \pi^- e^+ \nu_e)/W(K_L^0 \to \pi^+ e^- \bar{\nu}_e) = 1 + 5 \cdot 10^{-3}$, где W — вероятность распада по данному каналу.

Операция $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ состоит в изменении знаков моментов количества движения и зарядов. Импульсы при этой операции не меняются. Согласно CPT-**теореме Людерса — Паули** (1954—1955) симметрия относительно операции $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ существует в любых взаимодействиях. Эта теорема строго доказана в квантовой теории поля. Из нее следует, что при наличии симметрии относительно $\hat{C}\hat{P}$ наблюдается симметрия относительно $\hat{T}$, а из несохранения симметрии операции $\hat{C}$ в слабых взаимодействиях следует асимметрия слабых взаимодействий относительно операции $\hat{P}\hat{T}$, при которой изменяются знаки всех моментов количества движения.

На практике вместо странности S используют *гиперзаряд* Y, определяемый соотношением

$$Y = B + S. \qquad (75.6)$$

Так как барионный заряд B аддитивен, целочислен и сохраняется, то гиперзаряд обладает теми же свойствами, что и странность.

Квантовые числа Q, B, S и C (шарм) являются взаимозависимыми. Для всех адронов

$$Q = I_z + \frac{1}{2}(Y + C), \qquad (75.7)$$

где I_z — проекция изоспина адрона на ось z [76.1].

75.4. Классификация частиц

Частицы делят на следующие *классы* (табл. 75.1—75.4).

1. *Калибровочные (векторные) бозоны.* В этот класс частиц входят частицы-переносчики взаимодействий: фотон γ и промежуточные векторные бозоны $W^{\pm}$, Z^0. Фотоны представляют собой кванты электромагнитного поля. Они участвуют в электромагнитных взаимодействиях, но не обладают сильным и слабым взаимодействием. Промежуточные векторные бозоны представляют собой кванты — переносчики слабого взаимодействия. Квантовые числа калибровочных бозонов: $J = 1$, $Q = 0$ для γ и Z^0, $Q = +1$ для W^+ и $Q = -1$ для W^-. Фотон имеет отрицательную четность P. Четность $W^{\pm}$ и Z^0 экспериментально не измерена. Всем остальным квантовым числам приписывают нулевые значения: $B = L = S = C = T = 0$. К этому классу относят также глюоны — переносчики сильного взаимодействия [76.2.2] и гравитоны — переносчики гравитационного взаимодействия частиц. Гравитоны являются чисто теоретическими объектами и пока на опыте не обнаружены [77.2].

2. *Лептоны.* В этот класс частиц включают частицы, не участвующие в сильном взаимодействии. Это частицы e^-, ν_e, μ^-, ν_μ, τ^-, ν_τ и соответствующие им античастицы e^+, $\bar{\nu}_e$, μ^+, $\bar{\nu}_\mu$, τ^+, $\bar{\nu}_\tau$. Спин лептонов $J = 1/2$ — они являются фермионами. Лептоны e^-, μ^- и τ^- имеют электрический заряд $Q = -1$, а e^+, μ^+ и τ^+ — заряд $Q = +1$.

Каждому заряженному лептону соответствует нейтральная частица нейтрино — электронное, мюонное или тау. Масса нейтрино очень мала и в некоторых теориях принимается равной нулю. Вопрос

о массе нейтрино имеет принципиальное значение для космологии [78.6]. Твердо установлено, что существует три типа нейтрино, которые не эквивалентны между собой. Вопрос об общем количестве типов нейтрино N_ν в природе пока не выяснен. Данные космологии позволяют сделать вывод о том, что N_ν не может быть сколь угодно велико (Шварцман, 1969). Обилие легких элементов во Вселенной (таких, как ^{4}He, ^{2}H) такое, что $N_\nu \leqslant 3$, т. е. все нейтрино уже открыты. Согласно другим оценкам $N_\nu < 6$. Вопрос может быть однозначно решен путем исследования полной вероятности распада Z^0-бозона, который согласно теории должен распадаться на все типы нейтрино.

Согласно гипотезе *нейтринных осцилляций* свободное нейтрино одного типа со временем может превращаться в нейтрино другого типа. Как следствие, движущееся нейтрино на разных расстояниях должно рождать различные лептоны. Проведенные в этом направлении эксперименты (Мессбауэр и др., 80-е годы) не дали положительных результатов.

Лептонам приписывают так называемый лептонный заряд L, который равен $+1$ для e^-, μ^-, τ^-, ν_e, ν_μ, ν_τ и -1 для их античастиц. Введение этого заряда обосновано тем, что *во всех процессах, происходящих в замкнутой системе, разность между полным числом лептонов и числом антилептонов сохраняется, т. е.*

$$\sum_i L_i = \text{const}, \tag{75.8}$$

где L_i — лептонный заряд i-го лептона, а суммирование производится по всем лептонам системы. Опыт показывает, что нейтрино определенного типа может родить только соответствуюший ему лептон. Поэтому каждая пара лептонов (e^-, ν_e), (μ^-, ν_μ), (τ^-, ν_τ) обладает своим специальным лептонным зарядом соответственно L_e, L_μ, L_τ. Для указанных пар $L_e = +1$, $L_\mu = +1$, $L_\tau = +1$ и $L_e = -1$, $L_\mu = -1$, $L_\tau = -1$ для $(e^+, \bar{\nu}_e)$, $(\mu^+, \bar{\nu}_\mu)$, $(\tau^+, \bar{\nu}_\tau)$. Барионный заряд B, странность S и очарование C у лептонов полагаются равными нулю, $B = S = C = 0$.

3. *Мезоны.* К мезонам относят нестабильные частицы, участвующие в сильных и слабых взаимодействиях. Это — пионы $\pi^\pm$, π^0, это — мезон η, каоны $K^\pm$, K^0, $\bar{K}^0$, очарованные мезоны $D^\pm$, D^0, $\bar{D}^0$, $D_s^\pm$ и прелестные мезоны $B^\pm$, B^0, $\bar{B}^0$. Спин этих частиц $J = 0$ — они являются бозонами. Мезонам приписывают нулевые барионный B и лептонный L заряды, $B = L = 0$. Мезоны π^+, K^+, D^+, D_s^+, B^+ имеют электрический заряд $Q = +1$, а π^-, K^-, D^-, D_s^-, B^- — заряд $Q = -1$. У остальных мезонов $Q = 0$. Странность S и очарование C у мезонов различны:

$$\begin{aligned}
&S = 0, \quad C = 0 \quad \text{для } \pi^\pm,\ \pi^0,\ \eta,\\
&S = +1, \quad C = 0 \quad \text{для } K^+,\ K^0,\\
&S = -1, \quad C = 0 \quad \text{для } K^-,\ \bar{K}^0,\\
&S = 0, \quad C = +1 \quad \text{для } D^+,\ D^0,\ D_s^+,\\
&S = 0, \quad C = -1 \quad \text{для } D^-,\ \bar{D}^0,\ D_s^-.
\end{aligned}$$

4. *Барионы.* К барионам относят: протон p, нейтрон n, группу частиц, называемых гиперонами, Λ, $\Sigma^\mp$, Σ^0, Ξ^0, Ξ^-, Ω^-, Λ_c. Все барионы

имеют полуцелый спин и являются фермионами. Они участвуют в сильных взаимодействиях. За исключением протона все барионы нестабильны.

Барионам приписывают барионный заряд $B = \pm 1$, где знак плюс относится к частицам, а минус — к античастицам. Введение барионного заряда (числа) связано с эмпирически установленным фактом, согласно которому *величина, равная полному числу барионов минус число антибарионов, в замкнутой системе во всех процессах сохраняется*:

$$\sum_i B_i = \text{const}, \tag{75.9}$$

где B_i — лептонный заряд i-го бариона или антибариона; суммирование производится по всем этим частицам. Предел, до которого закон сохранения барионного заряда (75.9) выполняется, определяется временем жизни протона, которое больше 10^{31}—$3 \cdot 10^{32}$ лет.

Гипероны называют также странными частицами, имеющими отличные от нуля значения странности S. При этом полагают, что

$$\begin{aligned}
&S = -1 \quad \text{для частиц } \Lambda,\ \Sigma^+,\ \Sigma^0,\ \Sigma^-,\\
&S = +1 \quad \text{для античастиц } \bar{\Lambda},\ \bar{\Sigma}^+,\ \bar{\Sigma}^0,\ \bar{\Sigma}^-,\\
&S = -2 \quad \text{для каскадных частиц } \Xi^0,\ \Xi^-,\\
&S = +2 \quad \text{для античастиц } \bar{\Xi}^0,\ \bar{\Xi}^-,\\
&S = -3 \quad \text{для частицы } \Omega^-,\\
&S = +3 \quad \text{для античастицы } \bar{\Omega}^-.
\end{aligned}$$

Очарованный барион Λ_c^+ имеет $C = +1$, а его античастица $\bar{\Lambda}_c^+$ имеет очарование $C = -1$.

Так как барионы и мезоны обладают сильным взаимодействием, то их объединяют в одну группу частиц по этому признаку и называют *адронами*. Адроны с нулевой странностью, $S = 0$, называют обычными, с $S \neq 0$ — странными, с ненулевым очарованием, $C = \pm 1$ — очарованными (или шармированными).

Приписывание странностей различным адронам базируется на реакциях, которые происходят посредством сильных взаимодействий. Из этих реакций следует, что *полная странность замкнутой системы адронов является сохраняющейся величиной в электромагнитных и сильных взаимодействиях*:

$$\sum_i S_i = \text{const}, \tag{75.10}$$

где S_i — странность i-го адрона, суммирование производится по всем адронам (частицам и античастицам) рассматриваемой системы.

75.5. Частицы и античастицы

Понятие античастицы было введено Дираком (1928) в связи с проблемой интерпретации решений с отрицательной энергией [63.1; 63.2]. В предложенной им теории дырок [63.2.2] античастица отождествляется с отсутствием частицы на уровне с отрицательной энергией (дыркой). Существует другая более простая интерпретация состояний с отрицательной энергией (Штюкельберг, 1941; Фейнман, 1948).

Пусть частица массой m движется вдоль положительного направления x с положительным импульсом p и положительной энергией $E^+ =$

$= \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$. Ее траектория показана на рис. 75.3. Волновая функция частицы имеет вид

$$\Psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - E^+ t)},$$

$$px - E^+ t = \text{const}, \quad x = \frac{E^+}{p} t. \tag{75.11}$$

Для состояний с отрицательной энергией $E^- = -\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$ имеем волновую функцию

$$\Psi(x, t) = e^{\frac{i}{\hbar}(px - E^- t)}, \quad x = \frac{E^-}{p} t = -\frac{|E^-|}{p} t = \frac{|E^-|}{p}(-t). \tag{75.12}$$

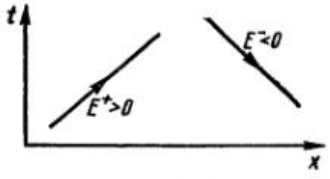


Рис. 75.3

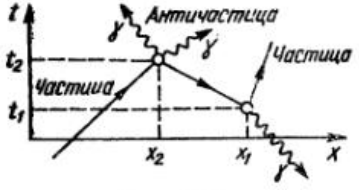


Рис. 75.4

Последнюю формулу можно интерпретировать как движение частицы назад по времени с положительной энергией $|E^-|$. Смысл движения частицы назад по времени можно объяснить, рассмотрев простой случай движения частицы с зарядом — q во внешнем магнитном поле $\mathbf{B}$ [33.3]. Оно описывается уравнением

$$m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{q}{c}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B}\right) = \frac{q}{c}\left(\frac{d\mathbf{x}}{d(-t)} \times \mathbf{B}\right), \tag{75.13}$$

из которого видно, что частица с зарядом q, движущаяся назад по времени, описывается тем же уравнением, что и частица с зарядом $-q$, движущаяся вперед по времени. Из совместного анализа формул (75.12) и (75.13) следует, что частица с зарядом q и отрицательной энергией ведет себя как частица с зарядом $-q$ и положительной энергией. Частица с зарядом $-q$ является античастицей частицы с зарядом q. Поэтому поведение частицы в состояниях с отрицательной энергией такое, как и античастицы.

Рассмотрим случай, когда в момент времени $t = t_1$ в точке $x = x_1$ в поле какого-то атомного ядра родилась пара частица — античастица; в точке $x = x_2$ при $t = t_2$ античастица уничтожилась, встретившись с другой частицей, а родившиеся в результате аннигиляции два γ-кванта стали распространяться вперед по времени (рис. 75.4). В соответствии с изложенным этот процесс можно рассматривать как движение одной частицы, которая в точке (t_2, x_2), испустив два фотона, повернула назад по времени и дошла до точки (t_1, x_1). Там она рассеялась на фотоне и стала снова двигаться вперед по времени. Преимущество такого описания по сравнению с теорией дырок состоит в том, что состояния с отрицательной энергией в нем не фигурируют. Вместо них рассматриваются античастицы с положительной энергией. Такое описание одинаково применимо как для фермионов, так и для бозонов. Из него следует, что частица и античастица должны иметь одинаковую

Таблица 75.6. Законы сохранения в физике частиц

Группа законов сохранения	Сохраняющаяся величина	Обозначение	Физическое происхождение	В каких взаимодействиях сохраняется
Законы сохранения, связанные с геометрией четырехмерного пространства-времени	Энергия	E	Однородность времени	H, EM, W, Γ
	Импульс	$\mathbf{p}$	Однородность пространства	H, EM, W, Γ
	Момент импульса	$\mathbf{L}$	Изотропность пространства	H, EM, W, Γ
	Центр инерции	$\mathbf{r}_c$	Равноправие инерциальных систем отсчета	H, EM, W, Γ
	Отражение пространственных осей	CP	Право-левая симметрия пространства	H, EM, W (кроме распада K^0)
	Отражение времени	T	Симметрия относительно изменения знака времени	H, EM ($\gtrsim 99$ %)
	CPT-симметрия	CPT	Комбинация CP и T свойств	H, EM, W, Γ
Заряды	Электрический	Q	Неизвестно	H, EM, W, Γ
	Барионный	B	Неизвестно	H, EM, W, Γ
	Лептонный 1-й	L_e	Неизвестно	H, EM, W, Γ
	Лептонный 2-й	L_μ	Неизвестно	H, EM, W, Γ (?)
	Лептонный 3-й	L_τ	Неизвестно	H, EM, W, Γ (?)
Приближенные законы сохранения	Полный изотопический спин	I	Изотопическая симметрия	H
	Зарядовое сопряжение	C	Неизвестно	H, EM
	Четность	P	Неизвестно	H, EM
	G-четность	G	Неизвестно	H
	Спонтанное нарушение симметрии		Неизвестно	Нарушено во всех взаимодействиях
	Странность (гиперзаряд)	S ($Y = B + S$)	Неизвестно	H, EM
	Очарование (шарм)	C	Неизвестно	H, EM

массу m и одинаковый спин J (речь идет об одной частице, «летящей» по времени), но противоположные по знаку аддитивные квантовые числа Q, B, L, S, C. Последнее вытекает из законов сохранения зарядов, странности (гиперзаряда), очарования [75.6].

75.6. Законы сохранения

В физике частиц имеют место законы сохранения. Есть все основания считать, что каждый закон сохранения связан с вполне определенной *симметрией законов природы*. Условно эти законы можно разделить на *три группы* в соответствии с их физической природой: 1) *законы сохранения, связанные с геометрией четырехмерного пространства-времени*, 2) *точные законы сохранения зарядов*. Физический смысл эмпирически установленных симметрий, связанных с каждым из пяти зарядов Q, B, L_e, L_μ, L_τ, не установлен, 3) *приближенные законы сохранения*, выполняющиеся только для некоторых фундаментальных взаимодействий. Указанные группы законов сохранения подытожены в табл. 75.6, где H, EM, W, Γ обозначают сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное взаимодействия [77].

Законы сохранения в физике частиц имеют первостепенное значение. Исследование различных симметрий, законов сохранения и их следствий позволяет систематизировать имеющиеся экспериментальные данные. Современная теория физики высоких энергий не имеет фундаментальных уравнений движения, аналогичных уравнениям Максвелла в классической электродинамике. Указанные фундаментальные уравнения субъядерного мира должны объяснить природу тех сохраняющихся величин, физическое происхождение которых пока не известно.

76. СТРУКТУРА ЧАСТИЦ

76.1. Унитарная симметрия

76.1.1. Изотопический спин. Введение понятия об изотопическом спине, обозначаемом I или T, или t, в ядерной физике основано на свойстве ядерных сил быть зарядово независимыми. Согласно этому свойству нейтрон и протон в сильных взаимодействиях ведут себя совершенно одинаково. Равные спины $J = {}^1/_2$, одинаковые четности $P = +1$, а также близкие массы позволяют считать эти частицы двумя различными зарядовыми состояниями одной и той же частицы — нуклона (Гейзенберг, 1933) [70.2.1]. В соответствии с этим представлением нуклону приписывается дополнительное квантовое число — *изотопический спин*, который сохраняется в сильных взаимодействиях. Дальнейшие исследования показали, что представление об изотопическом спине является весьма полезным и в физике частиц. Так, спектры масс восьми барионов с $J^P = {}^1/_2{}^+$ и десяти барионов с $J^P = {}^3/_2{}^+$ (рис. 76.1) обнаруживают свойство этих частиц группироваться в так называемые *изоспиновые мультиплеты*. Частицы одного мультиплета различаются только электрическим зарядовым состоянием, их массы очень близки и с точностью до электромагнитных поправок могут считаться практически одинаковыми. Действительно, относительная разность масс $\Delta M/M$ соседних зарядовых состояний по порядку величины равна отношению интенсивностей электромагнитного и сильного взаимодействий, имеющему порядок в несколько тысячных долей [77.1]. Для описания отмеченных закономерностей каждому зарядовому мультиплету приписывают динамическое квантовое число, обозначаемое I, определив его так, чтобы мультиплетность соответствующих ему зарядовых состояний равнялась $(2I + 1)$. Отдельным адронам приписываются различные значения проекции I_z изотопического спина на ось z в некотором фиктивном изоспиновом пространстве, в котором определены только повороты. Изотопический спин играет в нем роль, формально аналогичную той, которую играет собственный угловой момент (спин) частицы в обычном физическом пространстве. Значения I и I_z для различных частиц приведены в табл. 76.1.

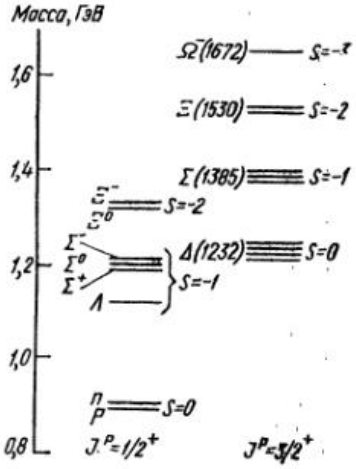


Рис. 76.1

76.1.2. Теория унитарной симметрии. Согласно теории унитарной симметрии (Гелл-Манн, Нейман, 1961) сильное взаимодействие инвариантно относительно специальных преобразований (принадлежащих к так называемой группе $SU(3)$ [78.2.3]) в некотором трехмерном комплексном векторном пространстве унитарного спина, которые сохраняют неизменными изотопический спин I и гиперзаряд Y (75.6). В этой теории частицы группируются в унитарные мультиплеты или супермультиплеты. Частицы — адроны, входящие в супермультиплет, имеют одинаковый спин J и четность P. Частицы наиболее известных супермультиплетов показаны на рис. 76.2. В теории унитарной симметрии в соответствии со спектром масс адронов (рис. 76.1) гамильтониан

Таблица 76.1. **Изотопический спин некоторых частиц**

Частица	Изотопический спин I	Проекция изотопического спина I_z				
		−1	−1/2	0	1/2	+1
Нуклон	1/2		$\frac{n}{p}$		$\frac{p}{n}$	
Λ-гиперон	0			$\frac{\Lambda}{\overline{\Lambda}}$		
Σ-гиперон	1	$\frac{\Sigma^-}{\overline{\Sigma}^+}$		$\frac{\Sigma^0}{\overline{\Sigma}^0}$		$\frac{\Sigma^+}{\overline{\Sigma}^-}$
Ξ-гиперон	1/2		$\frac{\Xi^-}{\overline{\Xi}^0}$		$\frac{\Xi^0}{\overline{\Xi}^-}$	
Ω-гиперон	0			$\frac{\Omega^-}{\overline{\Omega}^-}$		
Пион	1	π^-		π^0		π^+
Каон	1/2		$\frac{K^0}{K^-}$		$\frac{K^+}{\overline{K}^0}$	
η-мезон	0			η		

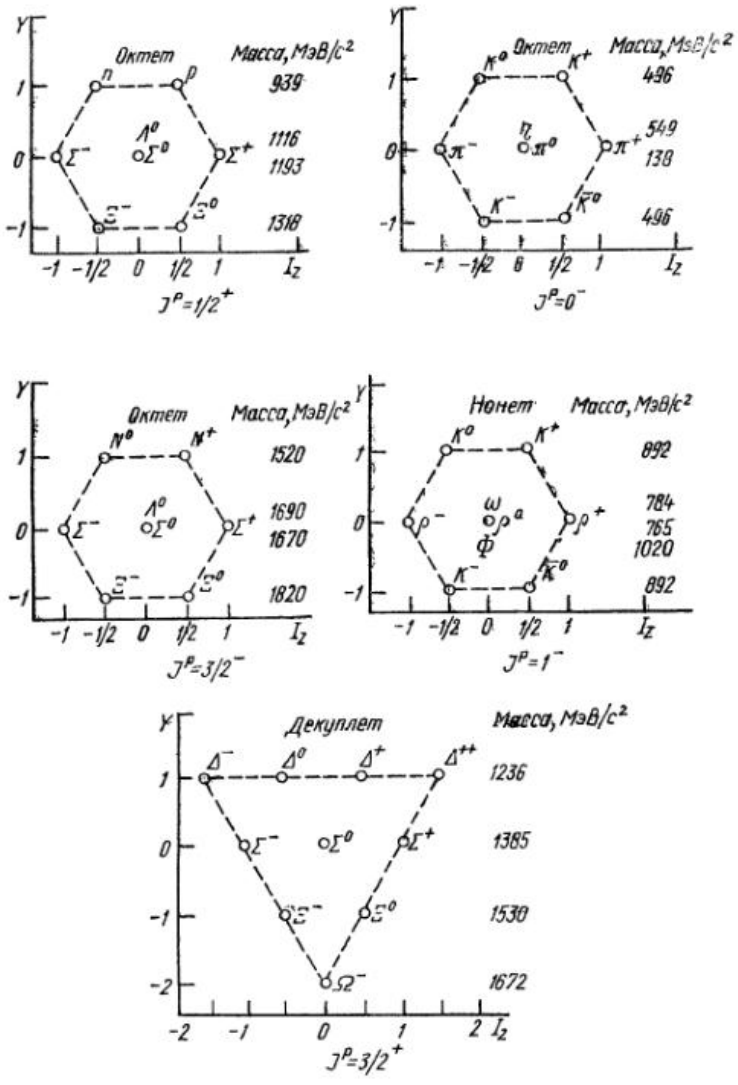


Рис. 76.2

сильного взаимодействия $\hat{H}_h$ и его собственные значения энергии (массы) M^h разбивают на два слагаемых:

$$\hat{H}_h = \hat{H}_0 + \hat{H}',$$
$$M^h_{\alpha,S,I} = \langle \hat{H}_h \rangle_{\alpha,S,I} = M^0_\alpha + \langle \hat{H}' \rangle_{\alpha,S,I}, \qquad (76.1)$$

где $\hat{H}_0$ — гамильтониан сильного взаимодействия, который приводит к массе M^0_α для всех частиц супермультиплета с заданными квантовыми числами $\alpha = (J, P, B)$, J — спин, P — четность, B — барионный заряд. Оператор $\hat{H}'$ снимает вырождение, которое было при $\hat{H}' = 0$, т. е. нарушает симметрию гамильтониана $\hat{H}_0$. В представлении гиперзаряда Y и изоспина I_z, связанных с электрическим зарядом Q соотношением (75.7) с очарованием $C = 0$, формула (76.1) приводит к простому выражению для массы адрона

$$M^h_{\alpha,Y,I} = M^0_\alpha + a_\alpha Y + b_\alpha \left[I(I+1) - \frac{Y^2}{4} \right], \qquad (76.2)$$

где M^0_α, a_α, b_α — в первом приближении константы для одного и того же супермультиплета. Соотношение (76.2) называется **массовой формулой Гелл-Манна и Окубо** (1962). Из нее, в частности, следует, что для октета барионов

$$\frac{1}{2}(M_N + M_\Sigma) = \frac{1}{4}(3M_\Lambda + M_\Sigma). \qquad (76.3)$$

Это равенство выполняется с точностью выше 1 %. В случае декуплета барионов с $J^P = 3/2^+$ имеем

$$M_\Sigma - M_\Delta = M_\Xi - M_\Sigma = M_\Omega - M_\Xi. \qquad (76.4)$$

Формула (76.4) позволила предсказать частицу Ω^- и описать ее квантовые числа до экспериментального обнаружения (1964): $M_\Omega = 1672$ МэВ (эксп.), 1679 МэВ (теор.); $J^P = 3/2^+$, $B = +1$, $Q = -1$, $I = 0$, $Y = -2$. Открытие Ω^--гиперона стало главным достижением теории унитарной симметрии. Существование супермультиплетов элементарных частиц ни у кого не вызывает сомнений.

Принцип инвариантности, охватывающий законы сохранения заряда Q и гиперзаряда Y, предсказывает существование октетов, декуплетов и триплета, исходя из которого можно построить все другие супермультиплеты. Составляющие этого триплета получили название кварков [76.2].

76.2. Кварковая модель

76.2.1. Аромат и цвет. Практически вся совокупность опытных фактов о структуре адронов и механизмах их взаимодействий может быть объяснена в рамках *кварковой модели*. По имеющимся данным все адроны построены из более фундаментальных частиц — *кварков* (q). Указание на существование кварков дают так называемые лептон-адронные эксперименты, которые состоят в зондировании адронов пучком лептонов. При энергиях лептонов, превышающих несколько десятков ГэВ, их угловое распределение в первом приближении оказывается энергонезависимым. Такое поведение согласуется с гипотезой масштабной инвариантности [77.5.3], если рассматривать адрон как связанную систему точечных частиц, взаимодействие которых убывает с уменьшением междучастичного расстояния так, что на малых расстояниях их можно считать практически свободными (асимптотическая свобода [78.4]). Эти гипотетические частицы, первоначально названные *партонами* (Фейнман, 1972), в современных моделях отождествляются с внутриадронными частицами — кварками, вводимыми в кварко-

вой модели, и глюонами, представляющими собой кванты кварк-кваркового взаимодействия [76.2.2].

Кварки являются фермионами, имеют спин $J = 1/2$ и отличную от нуля массу (табл. 76.2, 76.3). Их классифицируют по квантовым числам, получивших (исторически) название *аромата* и *цвета*. Существует 6 ароматов, каждый аромат существует в 3-х цветовых состояниях.

Таблица 76.2. **Свойства кварков (Q — электрический заряд, B — барионный заряд, J — спин, S — странность, C — очарование, B' — красота, T' — квантовое число t-кварка, цветовые состояния: r (от англ. *red* — красный), y (от англ. *yellow* — желтый), v (от англ. *violet* — синий), $\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$ — антицвета)**

Тип (аромат кварка)	Q	B	J	S	C	B'	T'	Цвет
u	$+2/3$	$+1/3$	1/2	0	0	0	0	r, y, v
d	$-1/3$	$+1/3$	1/2	0	0	0	0	r, y, v
s	$-1/3$	$+1/3$	1/2	-1	0	0	0	r, y, v
c	$+2/3$	$+1/3$	1/2	0	$+1$	0	0	r, y, v
b	$-1/3$	$+1/3$	1/2	0	0	-1	0	r, y, v
t	$+2/3$	$+1/3$	1/2	0	0	0	$+1$	r, y, v
$\bar{u}$	$-2/3$	$-1/3$	1/2	0	0	0	0	$\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$
$\bar{d}$	$+1/3$	$-1/3$	1/2	0	0	0	0	$\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$
$\bar{s}$	$+1/3$	$-1/3$	1/2	$+1$	0	0	0	$\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$
$\bar{c}$	$-2/3$	$-1/3$	1/2	0	-1	0	0	$\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$
$\bar{b}$	$+1/3$	$-1/3$	1/2	0	0	$+1$	0	$\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$
$\bar{t}$	$-2/3$	$-1/3$	1/2	0	0	0	-1	$\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$

Кварки u (от англ. *up* — вверх) и d (от англ. *down* — вниз) называются *обычными*, s-кварк (от англ. *strange* — странный, или *sideways* — боковой) называют *странным*, c-кварк (от англ. *charm* — шарм, очарование) — *шармированным* или *очарованным*, b-кварк (от англ *beauty* — красота, или *bottom* — нижний) — *красивым* или *прелестным*, t-кварк (от англ. *truth* — истинный) — *топ-кварком* (*top*). Каждому кварку соответствует *антикварк*.

Кварки u и d имеют квантовые числа изотопического спина. Кварки c, s, b и t являются тяжелыми. Они обладают своими квазисохраняющимися квантовыми числами — очарованием или шармом C, странностью S, красотой или прелестью B' и квантовым числом T' топ-кварка. В кварковой модели барионы являются комбинациями трех кварков (qqq) (табл. 76.4), а мезоны — кварка и антикварка ($q\bar{q}$) (табл. 76.5). Частицы, в состав которых входит s-кварк, называются *странными*, c-кварк — очарованными, b-кварк — красивыми (табл. 75.1, 75.2). Теоретически, заменяя один, два или три кварка в нуклоне (p, n), можно объяснить существование всех открытых странных барионов — гиперонов. При замене u- или d-кварка в пионе на s-кварк можно получить все обнаруженные в природе странные K-мезоны. Наблюдаемые очарованные частицы ($C \neq 0$) имеют в своем составе c-кварк.

Каждый кварк имеет дополнительное квантовое число, называемое *цветом* или *цветовым зарядом*. Необходимость введения этого квантового числа обусловлена действием принципа Паули. Согласно этому принципу комбинация трех одинаковых кварков, например *uuu* (Δ^{++}) или *ddd* (Δ^-), запрещена. Решение этого противоречия состоит во введении понятия о цвете кварка. Говорят, что каждый кварк (кварк каждого аромата) может существовать в трех цветовых состояниях. Так как цвет является отличительной характеристикой кварков, но не составленного из них адрона, то считается, что в каждый адрон могут входить только кварки таких разных цветов, смесь которых дает белый цвет. Постулируется, что адроны — бесцветные объекты. В качестве цветов условились брать желтый (y), синий (v) и красный (r). Например, в состав протона входят кварки: u (желтый), u (синий) и d (красный). Антикварк имеет цвет дополнительный (до белого) к цвету соответствующего кварка, называемого *антицветом* ($\bar{y}$, $\bar{v}$, $\bar{r}$). Смесь $q\bar{q}$, таким образом, также представляет собой бесцветную систему — мезон.

76.2.2. Глюоны. Цвет является аналогом электрического заряда, который может быть положительным и отрицательным. Наличие цвета у кварков объясняет их сильное взаимодействие. Аналогично тому, как электрические заряды взаимодействуют посредством фотонов [71.3.1], а нуклоны — посредством пионов [71.3.2], так взаимодействие цветовых зарядов осуществляют переносчики сильного взаимо-

Таблица 76.3. **Кварк-лептонные поколения**

Параметр частицы	По			
	1			
	u	d	ν_e	e
Электрический заряд Q	$+2/3$	$-1/3$	0	-1
Масса, МэВ	~ 4	~ 7	$< 3 \cdot 10^{-5}$	0,5

коление							
2				3			
c	s	ν_μ	μ	t	b	ν_τ	τ
$+2/3$	$-1/3$	0	-1	$+2/3$	$-1/3$	0	-1
1200	150	$< 0,5$	105	$\sim 4 \cdot 10^4$	$\sim 5 \cdot 10^3$	< 150	1784

Таблица 76.4. **Кварковая структура барионов** (Q — электрический заряд, J — спин, I — изоспин, I_z — проекция изоспина, S — странность)

Частица	Состав	Q	J	I	I_z	S	Масса, МэВ	Конфигурация спинов кварков
Δ^{++} (1232)	uuu	2	3/2	3/2	3/2	0	1232	↑↑↑
p	uud	1	1/2	1/2	1/2	0	939	↑↑↓
Δ^{+} (1232)	uud	1	3/2	3/2	1/2	0	1236	↑↑↓
n	udd	0	1/2	1/2	−1/2	0	940	↑↓↓
Δ^{0} (1232)	udd	0	3/2	3/2	−1/2	0	1236	↑↓↓
Δ^{-} (1232)	ddd	−1	3/2	3/2	−3/2	0	1241	↓↓↓
Σ^{+} (1385)	uus	1	3/2	1	1	−1	1383	↑↑↑
Σ^{+}	uus	1	1/2	1	1	−1	1189	↑↑↓
Σ^{0} (1385)	uds	0	3/2	1	0	−1	1384	↑↑↑
Σ^{0}	uds	0	1/2	1	0	−1	1192	↑↑↓
Λ	uds	0	1/2	0	0	−1	1116	↑↓↓
Σ^{-}	dds	−1	1/2	1	−1	−1	1197	↓↓↑
Σ^{-} (1385)	dds	−1	3/2	1	−1	−1	1387	↓↓↑
Ξ^{0} (1530)	uss	0	3/2	1/2	1/2	−2	1532	↑↓↓
Ξ^{0}	uss	0	1/2	1/2	1/2	−2	1315	↑↓↑
Ξ^{-}	dss	−1	1/2	1/2	−1/2	−2	1321	↓↓↑
Ξ^{-} (1530)	dss	−1	3/2	1/2	−1/2	−2	1535	↓↓↑
Ω^{-}	sss	−1	3/2	0	0	−3	1672	↑↑↑
Λ_c^{+}	udc	1	1/2	0	0	0	2281	↓↑↑

Таблица 76.5. **Кварковая структура мезонов** (J — спин, P — четность, I — изоспин, G — четность, I_z — проекция изоспина, Q — электрический заряд, S — странность, C — очарование, B' — красота)

Частица	Состав	J^P	I^G	I_z	Q	S	C	B'	Масса, МэВ
π^{+}	$u\bar{d}$	0^-	1^-	+1	+1	0	0	0	140
π^{0}	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	0^-	1^-	0	0	0	0	0	135
π^{-}	$\bar{u}d$	0^-	1^-	−1	−1	0	0	0	140
η	$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$	0^-	0^+	0	0	0	0	0	549
ρ^{+}	$u\bar{d}$	1^-	1^+	+1	+1	0	0	0	765
ρ^{0}	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	1^-	1^+	0	0	0	0	0	770
ρ^{-}	$\bar{u}d$	1^-	1^+	−1	−1	0	0	0	765
ω	$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$	1^-	0^-	0	0	0	0	0	783
K^{+}	$u\bar{s}$	0^-	1/2	+1/2	1	+1	0	0	494
K^{0}	$d\bar{s}$	0^-	1/2	−1/2	0	+1	0	0	498
K^{-}	$\bar{u}s$	0^-	1/2	−1/2	−1	−1	0	0	494

Продолжение табл. 76.5

Частица	Состав	J^P	I^G	I_z	Q	S	C	B'	Масса, МэВ
$\bar{K}^{0}$	$\bar{d}s$	0^-	1/2	+1/2	0	−1	0	0	498
η'	$s\bar{s}$	0^-	0^+	0	0	0	0	0	958
Φ	$s\bar{s}$	1^-	0^-	0	0	0	0	0	1020
D^{+}	$c\bar{d}$	0^-	1/2	+1/2	+1	0	+1	0	1869
D^{0}	$\bar{u}c$	0^-	1/2	−1/2	0	0	+1	0	1865
D^{-}	$\bar{c}d$	0^-	1/2	−1/2	−1	0	−1	0	1869
D_s^{+}	$c\bar{s}$	0^-	0	0	+1	1	1	0	1971
D_s^{-}	$\bar{c}s$	0^-	0	0	−1	−1	−1	0	1971
B^{+}	$u\bar{b}$	0^-	1/2	1/2	0	0	0	+1	5271
B^{0}	$d\bar{b}$	0^-	1/2	1/2	0	0	0	+1	5275
$\bar{B}^{0}$	$\bar{d}b$	0^-	1/2	−1/2	0	0	0	−1	5275
B^{-}	$\bar{u}b$	0^-	1/2	−1/2	0	0	0	−1	5271

действия — кванты поля, называемые *глюонами* (от англ. *glue* — клей). Эти кванты переносят цвет от одного кварка к другому, в результате чего кварки удерживаются вместе. Глюоны являются бозонами, имеют нулевую массу и спин $J = 1$, т. е. глюоны — векторные бозоны. У глюонов квантовые числа B, I, S, C и Q равны нулю, $B = 0$, $I = 0$, $S = 0$, $C = 0$, $Q = 0$. Каждый глюон обладает одним цветом и одним антицветом. Поэтому при поглощении или испускании глюона кварк может изменить цвет, но не аромат. Всего имеется девять независимых комбинаций различных цветов и антицветов. Одна суперпозиция, представляющая собой сумму трех комбинаций из цвета и его антицвета, $y\bar{y}+v\bar{v}+r\bar{r}$ (табл. 76.2), исключается из рассмотрения, так как такой глюон не изменяет цветового состояния кварка. Поэтому имеется 8 глюонов: $r\bar{y}$, $r\bar{v}$, $y\bar{v}$, $\bar{r}y$, $\bar{r}v$, $\bar{y}v$, $(r\bar{r}-y\bar{y})/\sqrt{2}$, $(r\bar{r}+y\bar{y}-2v\bar{v})/\sqrt{6}$.

В отличие от фотона, который не имеет электрического заряда и поэтому не взаимодействует сам с собой, глюоны обладают цветовым зарядом и взаимодействуют между собой. Этим объясняют явление *конфайнмента* — невылетания кварков из адронов. Несмотря на достаточно большие энергии частиц, достигнутые на ускорителях (табл. 33.1), кварки в свободном состоянии не наблюдаются. Это позволяет выдвинуть гипотезу, согласно которой кварки в природе существуют только в виде систем $(q\bar{q})$, (qqq) или более сложных образований, но обязательно таких, чтобы электрический заряд этих объектов оказывался целочисленным, а цветовое состояние было белым. При попытке получить кварк в свободном состоянии, т. е. удалить его на достаточно большое расстояние от адрона, в состав которого он входит, кварку необходимо сообщить очень большую энергию. При этом напряженность поля нескомпенсированного цветового заряда кварка оказывается столь сильной, что за счет сообщенной ему энергии из вакуума рождается пара $q\bar{q}$. Родившийся антикварк $\bar{q}$ движется вместе с кварком, который отрывают от адрона, а родившийся подобный ему кварк остается в адроне.

Аналогично объясняют причину ненаблюдаемости свободного глюона. Явление конфайнмента обусловлено малым радиусом сильного взаимодействия.

Область физики частиц, изучающая взаимодействие кварков и глюонов, называется квантовой хромодинамикой [78.4].

76.2.3. Три поколения кварков и лептонов. На современном уровне понимания элементарности фундаментальными составляющими материальных объектов являются: 6 лептонов, 6 антилептонов, 18 кварков ($6 \times 3 = 18$), 18 антикварков, 8 глюонов — квантов сильного взаимодействия, фотон-квант электромагнитного взаимодействия, $W^{\pm}$-, Z^0-бозоны — кванты слабого взаимодействия. Существование этих частиц считается подтвержденным (прямым и косвенным путем) в экспериментах. Аналогично лептонам кварки группируются в пары. Говорят, что имеет место *кварк-лептонная симметрия*: каждой паре лептонов соответствует пара кварков (табл. 76.3). Четыре частицы u, d, ν_e, e^- образуют так называемое *первое кварк-лептонное поколение*, частицы c, s, ν_μ, μ^- — *второе* поколение, а t, b, ν_τ, τ^- — *третье* поколение. Первое поколение содержит легкие кварки с массами 5—10 МэВ, а третье — более массивные частицы.

Трех поколений частиц достаточно для теоретического объяснения различия свойств частиц и античастиц. Имеющиеся данные космологии указывают на то, что других кварк-лептонных поколений в природе нет [78.6].

76.2.4. Структура кварков и лептонов. Большое количество (60) фундаментальных составляющих элементарных частиц позволяет предположить, что кварки и лептоны обладают внутренней структурой и могут быть построены из меньшего числа более фундаментальных составляющих.

Согласно *модели преонов* (от англ. *preons*) (Пати, Салам, 1974) каждый кварк и каждый лептон могут быть описаны тремя величинами: электрическим зарядом, цветом и номером поколения. Эти три параметра можно задать тремя группами составляющих частиц — преонов. Одна из них отвечает за электрический заряд, другая — за цвет (кварка или лептона) и третья имеет свойства, позволяющие отнести тот или иной кварк или лептон к одному из трех поколений (табл. 76.3).

Преоны, которые определяют номер поколения, называются *сомонами* (от англ. *somons*). Трем поколениям отвечают три сомона, обозначаемые s_1, s_2, s_3 (табл. 76.6). Цвет составной системы определяют преоны, называемые *хромонами* (от англ. *chromons*). Имеется четыре хромона: красный c_r, желтый c_y, синий c_v и бесцветный c_0. Группа преонов, которая задает электрический заряд, имеет только два преона, идентифицирующих кварк или лептон. Эти преоны называются *флавонами* (от англ. *flavons*) f_1 и f_2. С их помощью можно отличить u-кварк от d-кварка, c-кварк от s-кварка, нейтрино ν_e от электрона e^- и т. д.

В модели преонов классификация составных частиц непосредственно следует из комплектующих их преонов (рис. 76.3). Все лептоны различаются хромонами, а все частицы первого поколения имеют сомон из первого поколения и т. д. Распределение электрического заряда между преонами является более сложным по сравнению с другими характеристиками. Существует несколько вариантов, приводящих к правильным зарядам частиц. Один из них представлен в табл. 76.6. Электрический заряд кварка или лептона равен сумме электрических зарядов составляющих его преонов. Модель такого типа правильно описывает зарядовое состояние частицы, но при этом приходится отказаться от принципа, согласно которому каждый преон является носителем только одного свойства. Другая трудность модели преонов за-

Таблица 76.6. **Характеристики преонов**

Преон	Электрический заряд	Цвет	Номер поколения
f_1	$+\frac{1}{2}$	Бесцветный	0
f_2	$-\frac{1}{2}$	Бесцветный	0
c_r	$+\frac{1}{6}$	Красный	0
c_y	$+\frac{1}{6}$	Желтый	0
c_v	$+\frac{1}{6}$	Синий	0
c_0	$-\frac{1}{2}$	Бесцветный	0
s_1	0	Бесцветный	1
s_2	0	Бесцветный	2
s_3	0	Бесцветный	3

ключается в требовании, чтобы составная частица содержала только по одному преону из каждой группы, хотя нет, вообще говоря, запрета частице иметь, скажем, три хромона или два сомона. Обладающая экзотическими свойствами такая частица должна была бы себя проявить в экспериментах.

Существует несколько моделей преонов, построенных на основе той же идеи, что и модель Пати и Салама, но оперирующих с другими группами преонов.

Более простой моделью, описывающей структуру кварков и лептонов, является *модель ришонов* (Харари, 1979). Модель постулирует существование двух фундаментальных кирпичиков материи, называемых ришонами. Один ришон T имеет электрический заряд $Q_T = +1/3$, а другой V электрически нейтрален, $Q_V = 0$. Этим ришонам соответствуют два антиришона $\overline{T}$ и $\overline{V}$ с электрическими зарядами $Q_{\overline{T}} = -1/3$, $Q_{\overline{V}} = 0$. Кварки и лептоны строятся в виде комбинаций любых трех ришонов или любых трех антиришонов. Модель запрещает ришону и антиришону входить одновременно в состав частицы. Руководствуясь этими правилами, можно легко построить 16 кварков, антикварков, лептонов и антилептонов первого поколения. Так, комбинация TTT

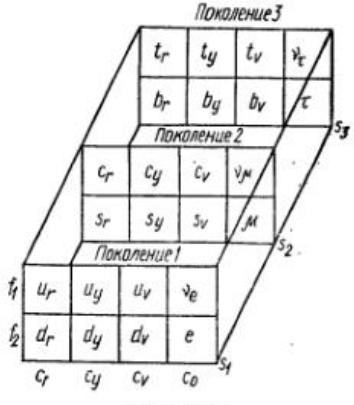


Рис. 76.3

имеет полный заряд $Q = +1$ и соответствует позитрону e^+, $\overline{TTT}$ имеет $Q = -1$ и описывает электрон e^-. Комбинации VVV и $\overline{V}\overline{V}\overline{V}$ электрически нейтральны и дают нейтрино ν_e и антинейтрино $\bar{\nu}_e$. Другие комбинации формируют заряженные кварки $TTV = u$ $(Q = 2/3)$, $TV\bar{V} = \bar{d}$ $(Q = 1/3)$, $\overline{V}\overline{V}T = d$ $(Q = -1/3)$, $\overline{V}\overline{T}\overline{T} = \bar{u}$ $(Q = -2/3)$.

Для описания цвета составных объектов постулируют, что T-ришон может иметь любой из трех цветов: красный (r), желтый (y), синий (v), тогда как V-ришон имеет антицвета $\bar{r}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$. Поэтому комбинации $\overline{T}\overline{T}\overline{T}$ и VVV, соответствующие лептонам, могут быть сделаны бесцветными за счет ришонов и антиришонов различных цветов и антицветов. Другие комбинации, приводящие к кваркам, могут иметь различные цвета. Например, TTV-состояние может иметь цвета r, v и $\bar{v}$. Так как v и $\bar{v}$ взаимно уничтожают один другого, то указанная комбинация ришонов является красной. Аналогично получаются другие цвета кварков.

Модель ришонов, очень просто описывающая первое кварк-лептонное поколение, имеет трудности в описании второго и третьего поколений. Наиболее простая идея состоит в рассмотрении кварков и лептонов более высоких поколений как возбужденных состояний соответствующих частиц первого поколения, например мюона μ как электрона e в более высоком энергетическом состоянии. Расчет разности масс $\Delta m = m_\mu - m_e$ в рамках модели ришонов приводит, однако, к сильно завышенному значению Δm по сравнению с наблюдаемым.

Другая возможность объяснения причины существования трех поколений кварков и лептонов состоит в предположении, что помимо ришонов более высокие поколения содержат частицы Хиггса [78.2.4], связанные с векторными бозонами $W^\pm$, Z^0 в теории электрослабого взаимодействия. Эти частицы являются бесспиновыми и имеют нулевые значения электрического и цветового зарядов. Их добавление к ришонам изменяет только массу составного объекта, но не изменяет другие квантовые числа. Поэтому мюон отличается от электрона одной дополнительной частицей Хиггса, а τ-лептон — двумя такими частицами.

Существует третий тип составных моделей, связывающих проблему структуры кварков и лептонов с другой фундаментальной проблемой — построением релятивистской квантовой теории гравитации. При этом исходят из того, что на расстояниях порядка 10^{-34} см гравитационные силы становятся достаточно сильными и являются существенными при взаимодействии субчастиц, более фундаментальных, чем кварки и лептоны.

Все составные модели кварков и лептонов являются условными. Существующие экспериментальные данные относятся к расстояниям $\gtrsim 10^{-16}$ см, поэтому не содержат сведений о природе и свойствах указанных субчастиц. Тем не менее теоретические исследования имеют первостепенное значение для понимания физики микромира в той области энергий (пространства), где уже достигнут значительный прогресс.

77. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЧАСТИЦ

77.1. Четыре вида взаимодействий

Известны четыре вида взаимодействий элементарных частиц: *сильное*, *электромагнитное*, *слабое* и *гравитационное*. Интенсивности этих взаимодействий принято характеризовать *константами связи*,

Таблица 77.1. Фундаментальные взаимодействия (M — масса нуклона, G_N — гравитационная постоянная, G — константа Ферми, J — спин кванта поля, P — его четность)

Взаимодействие	Квант поля	J^P	Масса кванта, ГэВ	Радиус взаимодействия, м	Источник	Безразмерная константа связи	Типичное сечение при 1 ГэВ, м²	Типичное время распада, с
Сильное	Глюон	1^-	0	$\leqslant 10^{-16}$	Цветовой заряд	$\alpha_s \sim 1$ для больших r $\alpha_s < 1$ для малых r	10^{-30}	10^{-23}
Слабое	Промежуточные бозоны $W^\pm$, Z^0	1^-; 1^+	82, 93	10^{-18}	Слабый заряд	$(Mc/\hbar)^2 G/\hbar c = 1{,}02 \cdot 10^{-5}$	10^{-44}	10^{-8}
Электромагнитное	Фотон γ	1^-	0	∞	Электрический заряд	$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$	10^{-33}	10^{-20}
Гравитационное	Гравитон	2^+	0	∞	Масса	$G_N M^2/\hbar c = 0{,}53 \cdot 10^{-38}$	—	—

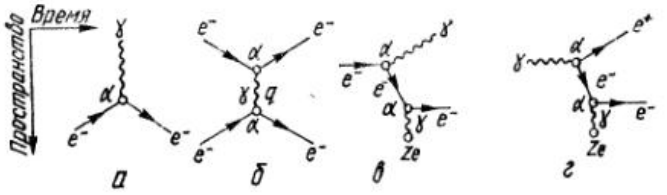


Рис. 77.1

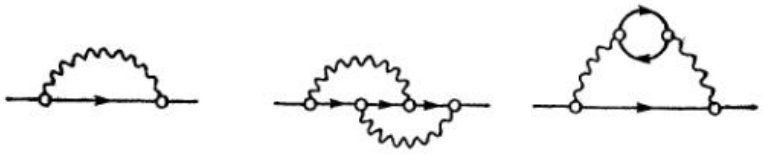


Рис. 77.2

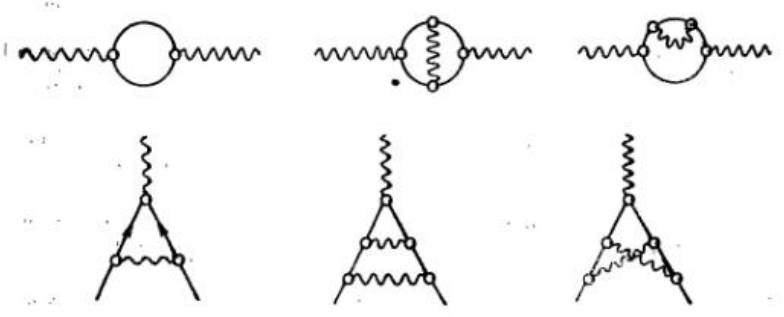


Рис. 77.3

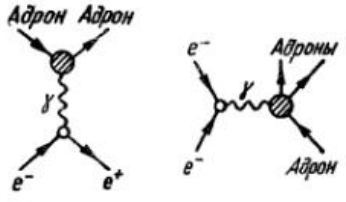


Рис. 77.4

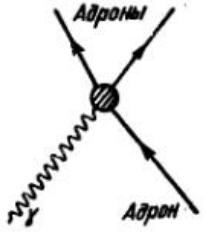


Рис. 77.5

которые представляют собой безразмерные параметры определяющие вероятность процессов, обусловленных данным видом взаимодействия. Основные характеристики фундаментальных взаимодействий представлены в табл. 77.1. С ними тесно связаны законы сохранения [75.6].

В классической физике взаимодействие на расстоянии описывается в терминах потенциала [5.2.3] или поля, посредством которого одна частица действует на другую [31]. В квантовой теории взаимодействие представляется как процесс обмена виртуальным квантом (бозоном), характерным для данного вида взаимодействия [71.3.1]. Этот процесс можно изобразить наглядно в виде замкнутых линий на рисунках, называемых *диаграммами Фейнмана*. Диаграммы Фейнмана, взятые в координатно-временном представлении, условно изображают движение частиц между актами их взаимодействий. Акты взаимодействий обозначаются точками, называемыми *вершинами (вертексами)*, а процессы распространения частиц — линиями. Примеры фейнмановских диаграмм показаны на рис. 77.1—77.5; 77.7. Эти диаграммы не только дают наглядную картину рассматриваемого явления, но и позволяют на основе разработанных правил *(правил Фейнмана)* рассчитывать количественно амплитуду и вероятность соответствующего процесса.

Взаимодействия составных частиц — адронов, атомных ядер, атомов и молекул — имеют многочастичную природу и представляют собой относительно сложные остаточные взаимодействия составляющих эти сложные системы субчастиц (табл. 77.2).

Таблица 77.2. **Многочастичные взаимодействия составных частиц**

Структура	Взаимодействие	Силы	Взаимодействие в терминах составляющих
Адрон	Адрон — адрон	Сильные (например, $p + p \to \pi^+ + n + p$)	Остаточное кварк-кварковое
Ядро	Ядро — ядро	Ядерные (например, $\alpha + {}^{14}\mathrm{N} \to p + {}^{17}\mathrm{O}$)	Остаточное кварк-кварковое
Молекула и атом	Молекула — молекула, атом — атом	Ван-дер-Ваальса, обмен электроном	Остаточное электромагнитное

77.2. Гравитационное взаимодействие

В физике частиц гравитационные взаимодействия не играют сколько-нибудь заметную роль на расстояниях $\sim 10^{-18}$ м. Они описываются законом всемирного тяготения Ньютона [3.8]. Интенсивность взаимодействия характеризуется гравитационной постоянной G_N. Для ее сравнения с другими взаимодействиями вводится безразмерная величина $G_N M^2/\hbar c$, где M — масса взаимодействующих частиц. Для шкалы масс, обычно встречающихся в физике высоких энергий, эта гравитационная константа связи оказывается пренебрежимо малой по сравнению с другими видами взаимодействий (табл. 77.1). Гравитационные квантовые эффекты могут быть важными только в том случае, когда

гравитационная энергия системы становится сравнимой с полной массой. Это достигается на расстоянии l между взаимодействующими равными массами, удовлетворяющем условию: $G_N M^2/l \approx Mc^2$. Отсюда находим $l \approx G_N M/c^2 \approx 10^{-54}$ м для протона. Эта величина называется *планковской длиной*. Она значительно меньше, чем размер протона (например, зарядовый радиус [70.2.2] протона равен 0,8 фм). Квантовые гравитационные эффекты становятся значительными только для таких точечных массивных частиц или систем, комптоновская длина волны которых $\lambda_c \sim l$. Этот предел определяется так называемой *планковской массой*, которая находится из условия $l = \hbar/Mc = G_N M/c^2$ или $G_N M^2/\hbar c = 1$. Отсюда имеем $Mc^2 = 10^{19}$ ГэВ, что в 10^5 раз больше, чем самые массивные фундаментальные частицы, существование которых может постулировать теория.

Приведенные оценки обосновывают широко используемое в теории элементарных частиц приближение, в котором гравитационные эффекты не учитываются.

Переносчиками гравитационного взаимодействия являются кванты гравитационного поля, называемые гравитонами. Так как гравитационные силы характеризуются бесконечным радиусом действия, то масса гравитонов равна нулю. Поскольку не существует отрицательных масс, то простейшим источником (излучателем) гравитонов является осциллирующий массовый квадруполь. Поэтому гравитон имеет спин $J = 2$. Несмотря на то что гравитоны в свободном состоянии не обнаружены, реальность этих объектов, вытекающая из самых общих теоретико-полевых представлений, не вызывает сомнения.

77.3. Электромагнитное взаимодействие

77.3.1. Константа связи. Электромагнитное взаимодействие осуществляется между частицами или системами, имеющими электрический заряд. Так как электрические заряды могут быть как положительными, так и отрицательными, то обусловленное ими взаимодействие может быть как притягивательным, так и отталкивательным [24.1]. Переносчиками электромагнитного взаимодействия являются кванты электромагнитного поля — фотоны. Так как радиус действия электромагнитных сил бесконечен, то масса фотонов равна нулю. Простейшим источником фотонов является электрический диполь — связанная система из отрицательного и положительного зарядов [25.2.2]. Поэтому фотон имеет спин $J = 1$.

Интенсивность взаимодействия заряженной частицы и фотона характеризуется константой связи, равной безразмерной постоянной тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137{,}0360}, \qquad (77.1)$$

определяющей величину спин-орбитального расщепления атомных спектров (их тонкую структуру) [66.4.3]. На рис. 77.1 показаны простейшие фейнмановские диаграммы некоторых процессов:

а) *фотоэлектрический эффект*, представляющий собой простой процесс поглощения или испускания реального фотона электроном. Из закона сохранения импульса следует, что такой процесс может осуществляться на электроне, связанном в атоме. Амплитуда процесса T_{fi} [78.1.1] пропорциональна $\sqrt{\alpha}$, а сечение

$$\sigma \sim |T_{fi}|^2 \sim \alpha; \qquad (77.2)$$

б) *кулоновское рассеяние электронов*, осуществляемое обменом одним виртуальным фотоном с импульсом q. Амплитуда процесса T_{fi} и сечение σ имеют вид

$$T_{fi} \sim \sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}/q^2, \quad \sigma \sim \alpha^2/q^4 \qquad (77.3)$$

(формула Резерфорда (64.21));

в) *излучение фотона электроном, ускоренное электрическим полем ядра* Ze. Для того чтобы импульс сохранялся, должен происходить обмен виртуальным фотоном. Наличие виртуального электрона обеспечивает возможность испускания реального фотона электроном без изменения его массы, как того требуют законы сохранения энергии и импульса. О таком виртуальном электроне говорят, что он находится «вне массовой поверхности». Сечение процесса

$$\sigma \sim Z^2\alpha^3; \qquad (77.4)$$

г) *рождение пары* e^+e^- *фотоном*, движущимся в поле ядра Ze. Сечение процесса также пропорционально α^3.

77.3.2. Квантовая электродинамика. Теория, описывающая взаимодействие фотонов с лептонами, называется *квантовой электродинамикой* (КЭД). Гамильтониан взаимодействия H_{em} в квантовой электродинамике строится исходя из **принципа минимальности электромагнитного взаимодействия** (Лармор, 1900): *фундаментальными постоянными являются только электрические заряды; токи создаются движущимися точечными зарядами*. Лептоны представляют собой точечные частицы. Плотность тока вероятности лептона в точке с радиусом-вектором $\mathbf{x}$, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$, определяется формулой

$$\mathbf{j}_{em}(\mathbf{x}) = \rho_{em}(\mathbf{x})\,\mathbf{v}, \qquad (77.5)$$

где $\rho_{em}(\mathbf{x})$ — плотность вероятности, нормированная на единицу: $\int \rho_{em}(\mathbf{x}) \times d^3x = 1$. Если лептон имеет электрический заряд $q = \pm e$, то плотность электрического тока описывается выражением

$$q\mathbf{j}_{em} = q\rho_{em}\mathbf{v}.$$

Гамильтониан взаимодействия лептона с внешним электромагнитным полем, описываемым скалярным φ и векторным $\mathbf{A}$ потенциалами, имеет вид ($\hbar = c = 1$):

$$\hat{H}_{em} = q\int d^3x\,[\rho_{em}(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x}) - \mathbf{j}_{em}(\mathbf{x})\,\mathbf{A}(\mathbf{x})] \equiv q\int d^3x j^\mu A_\mu, \qquad (77.6)$$

где $j^\mu = (\rho_{em}, \mathbf{j}_{em})$ — 4-ток, $A_\mu = (\varphi, -\mathbf{A})$ — 4-потенциал. Плотность ρ_{em} и ток $\mathbf{j}_{em}$ связаны между собой уравнением непрерывности. Воспользовавшись представлением (63.55) для 4-тока j^μ, можно записать (77.6) в явном виде через спинор Ψ, описывающий лептон. В теории поля обычно используют формализм функции Лагранжа [78.2.1; 78.2.2]. В качестве *лагранжиана взаимодействия* в КЭД выступает величина

$$\mathscr{L}_I = -qj^\mu A_\mu = -q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu. \qquad (77.7)$$

Для всех напряженностей полей, встречающихся на практике, величина $q\varphi$ является очень малой и ею можно пренебречь по сравнению с $q\mathbf{A}$. Если нет никаких внешних электрических зарядов, то $\varphi = 0$ и гамильтониан взаимодействия (77.6) преобразуется к виду

$$\hat{H}_{em} = -qq'\int d^3x d^3x' \frac{\mathbf{j}_{em}(\mathbf{x})\,\mathbf{j}_{em}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \qquad (77.8)$$

где учтено, что векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ создается плотностью тока $q'\mathbf{j}'_{em}(\mathbf{x}')$ [31.3] (движущимися зарядами q'),

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = q' \int d^3x' \frac{\mathbf{j}'_{em}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \qquad (77.9)$$

Формула (77.8) описывает *энергию взаимодействия тока* с током как процесс обмена виртуальным фотоном. Множитель $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ характеризует вид зависимости электромагнитных сил от расстояния — фотон имеет нулевую массу покоя и радиус действия сил бесконечен [71.3.2]. Если заряд q' размазан по некоторому объему с плотностью $q'\rho'_{em}(\mathbf{x}')$, то скалярный потенциал [31.3]

$$\varphi(\mathbf{x}) = q' \int d^3x' \frac{\rho'_{em}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \qquad (77.10)$$

а гамильтониан $\hat{H}_{em}$ принимает вид произведения 4-токов

$$\hat{H}_{em} = qq' \int d^3x d^3x' [\rho_{em}\rho'_{em} - \mathbf{j}_{em}\mathbf{j}'_{em}]/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \equiv$$
$$\equiv qq' \int d^3x d^3x' \frac{j^\mu(\mathbf{x})\, j'_\mu(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \qquad (77.11)$$

где $j^\mu = (\rho_{em}, \mathbf{j}_{em})$, $j'_\mu = (\rho'_{em}, -\mathbf{j}'_{em})$ — 4-токи.

Зная H_{em}, можно рассчитать вероятность перехода квантовой системы из одного состояния в другое [78.1.2].

Согласно КЭД одиночный лептон может испускать и поглощать виртуальные фотоны и пары. Примеры таких процессов показаны на диаграммах Фейнмана (рис. 77.2). Диаграммы такого типа являются поправочными. Они присутствуют во всех процессах взаимодействия фотонов с лептонами (рис. 77.3).

В результате испускания и обратного поглощения виртуального фотона одним и тем же лептоном его электрический заряд действует сам на себя. У лептона появляется разновидность потенциальной энергии, называемой *собственной энергией*. Эта энергия дает вклад в полную энергию лептона. В итоге его полная масса должна вычисляться как сумма механической и собственной электромагнитной масс.

В КЭД взаимодействие электрона с электромагнитным полем рассматривают исходя из уравнения Дирака [63.2] для электрона и уравнений Максвелла [31.2] для электромагнитного поля. Непосредственный расчет по теории возмущений [78.1.2] полной массы и заряда электрона, учитывающий его взаимодействие с собственным электромагнитным полем, приводит к не имеющим физического смысла бесконечным результатам. Поскольку константа связи α (77.1) электромагнитного взаимодействия мала, применение для расчетов квантовомеханической теории возмущений считается вполне обоснованным. Бессмысленные бесконечные результаты получаются в следующих после первого порядках теории возмущений. Математически это проявляется в расходимости интегралов по всем значениям энергий и импульсов $k = (E, \mathbf{k})$ промежуточных состояний системы частиц, возникающих в результате суммирования по всем этим состояниям. Трудности такого типа возникают уже в классической электродинамике [32.3], согласно которой энергия электростатического поля, создаваемого электроном с радиусом r_0, при $r_0 \to 0$ стремится к бесконечности как $1/r_0$, т. е. расходится линейно. В КЭД соответствующая величина имеет более слабую логарифмическую расходимость $\ln r_0$. Последнее связано с тем, что

вокруг точечного электрона рождаются виртуальные электрон-позитронные пары. Это приводит к эффективному заряду электрона, размазанному по конечной области пространства. Собственная энергия электрона при этом уменьшается, хотя и не становится конечной (Вайскопф, 30-е годы). При логарифмической расходимости оценка размеров электрона в классическом подходе [32.3] дает значение $\sim 10^{-30}$ см, что значительно меньше 10^{-13} см. Несмотря на то что такие области пространства недоступны для исследования на экспериментальных установках, указанные трудности являются принципиальными. Без их решения нельзя давать достоверные теоретические предсказания.

Процедура устранения расходимостей в КЭД получила название *перенормировки* (Г. Бете, С. Томонага, Ю. Швингер, Р. Фейнман, Ф. Дайсон, Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк, А. Салам, 1946—1956). Оказывается, что все расходящиеся величины можно выделить и собрать в небольшое число структур, которые могут быть интерпретированы как полевые добавки δm к массе и δe к заряду электрона,

$$m = m_0 + \delta m, \quad \alpha = \alpha_0 + \delta\alpha, \quad \delta\alpha \equiv \frac{2e\delta e}{\hbar c}, \qquad (77.12)$$

где m_0 и α_0 — исходные затравочные или «голые» масса и постоянная тонкой структуры электрона, m и α — наблюдаемые значения массы и α (77.1). В КЭД эффект радиационных поправок записывается не в виде сумм (77.12), а в виде произведений

$$m_0 + \delta m = Z_m m_0, \quad \alpha_0 + \delta\alpha = Z_\alpha \alpha_0$$

так, что *операция перенормировки* сводится к замене

$$m_0 \to Z_m m_0 = m, \quad \alpha_0 \to Z_\alpha \alpha_0 = \alpha, \qquad (77.13)$$

где Z_m и Z_α — некоторые безразмерные (сингулярные) множители. С физической точки зрения процедура (77.13) соответствует реальной ситуации, когда электрон создает вокруг себя облако из виртуальных электрон-позитронных пар, которое за счет отталкивания виртуальных электронов от реального электрона и притяжения к нему виртуальных позитронов экранирует его заряд. Наблюдаемое на больших расстояниях эффективное значение заряда электрона оказывается меньше истинного. При движении электрона движется вместе с ним и его облако. Это приводит к эффективному изменению его инерционных свойств, т. е. к изменению массы. Электрон не может быть освобожден от взаимодействия с собственным квантовым электромагнитным полем. Поэтому величины m_0 и α_0 в принципе ненаблюдаемы. На опыте наблюдается полная масса и полный электрический заряд электрона, которые нельзя разделить на части m_0 и α_0, соответствующие «голому» электрону, и части δm и $\delta\alpha$, связанные с окружающим его облаком.

Процедура перенормировки (77.13) приводит к конечным однозначным выражениям, которые в ряде случаев описывают экспериментальные данные с очень высокой точностью. Так, для аномального магнитного момента электрона μ_e и величины $\Delta E_{\text{лэмб}}$ лэмбовского сдвига [66.4.5] уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ атома водорода получены значения:

$$\mu_e = 1{,}001159652460\ (147)\ \mu_0 \ \text{(теор.)},$$
$$\mu_e = 1{,}001159652200\ (40)\ \mu_0 \ \text{(эксп.)},$$
$$\Delta E_{\text{лэмб}} = 1057{,}65\ (05)\ \text{МГц} \ \text{(теор.)},$$
$$\Delta E_{\text{лэмб}} = 1057{,}911\ (012)\ \text{МГц} \ \text{(эксп.)}, \qquad (77.14)$$

где $\mu_0 = e\hbar/2m_e c$ — магнетон Бора (67.59).

Квантовая электродинамика считается наиболее совершенной из всех существующих теорий. Перенормируемость КЭД является главным ее свойством. Это свойство оказывается близко связанным со свойством калибровочной инвариантности электромагнитного взаимодействия [78.2.2]. Согласно имеющимся данным все теории фундаментальных взаимодействий должны быть перенормируемыми калибровочными теориями.

Нерешенными в КЭД являются проблема квантования электрического заряда и вопрос о существовании *монополей Дирака*. Классическая электродинамика исходит из того, что в природе нет магнитных зарядов (монополей). Магнитное поле **B** создается магнитными диполями и описывается уравнением Максвелла (31.4). В теории магнитных монополей (Дирак, 1931) вместо уравнения (31.4) постулируется соотношение

$$\mathbf{VB} = 4\pi\rho_m, \qquad (77.15)$$

полностью аналогичное уравнению (31.3) для электрического поля **D**, где ρ_m — плотность магнитного заряда q_m. Квантовомеханическое рассмотрение приводит к следующему условию, связывающему электрический e и магнитный q_m заряды:

$$eq_m = fn\hbar c, \qquad (77.16)$$

где $f = 1/2$ (Дирак, 1948), $f = 2$ (Швингер, 1969), n — целое число. Из (77.16) следует, что: 1) существование магнитного монополя объясняет факт квантования электрического заряда; 2) безразмерная константа, описывающая взаимодействие двух монополей, равна

$$\frac{q_m^2}{\hbar c} \approx \frac{\hbar c}{e^2} \approx 137. \qquad (77.17)$$

Большая величина этой константы объясняет трудность экспериментального обнаружения магнитных монополей. Предполагают, что монополи Дирака — очень тяжелые частицы, которые не могут быть получены на имеющихся ускорителях. Согласно оценкам масса монополей достигает 10^{16} ГэВ [78.5.1].

77.3.3. Взаимодействие фотонов с адронами. Взаимодействие фотонов с адронами не описывается квантовой электродинамикой, поскольку это взаимодействие не определяется только электрическим зарядом. Информацию о взаимодействии фотона с адроном можно извлекать из трех типов экспериментов. В двух из них участвуют виртуальные фотоны (рис. 77.4), а в третьем — реальный фотон (рис. 77.5). Величиной, которую нужно определить, является фотон-адронная вершина (заштрихованный кружочек на рис. 77.4, 77.5).

Опыт показывает, что между фотонами и адронами существует взаимосвязь. Так, пион π^0 распадается на два фотона: $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Согласно имеющимся представлениям виртуальный фотон рождает адрон-антиадронную пару, частицы которой сильно взаимодействуют между собой, образуя связанное состояние — векторный мезон (мезон со спином $J = 1$). Это означает, что часть времени фотон находится в указанном адронном состоянии. Преобразование виртуального фотона в векторный мезон, следовательно, должно приводить к рождению мезонных резонансов, распады которых должны наблюдаться на экспериментах. Такие резонансы действительно наблюдаются в процессах

$$e^+e^- \to \rho^0 \to \pi^+\pi^-,\ e^+e^- \to \omega^0 \to \pi^+\pi^-\pi^0,\ e^+e^- \to \Phi^0 \to K^+K^-.$$

Характеристики векторных мезонов ρ^0, ω^0 и Φ^0 приведены в табл. 75.3. В e^+e^--экспериментах такой мезон наблюдается в виде максимума кривой числа пионов (каонов) или сечения σ как функции энергии $2E$ сталкивающихся лептонов e^+ и e^- при энергии, которая характеризует массу векторного мезона, а ширина максимума — время его жизни до распада на пионы (каоны) (рис. 77.6). Диаграммы Фейнмана, иллюстрирующие процессы рождения трех векторных мезонов, показаны на рис. 77.7.

Взаимодействия реальных фотонов (рис. 77.5) с адронами наблюдаются уже при низких энергиях γ-квантов. Примером может служить реакция фоторасщепления дейтрона

$$\gamma d \to pn,$$

открытая Чэдвиком и Голдгабером (1934). Кривые эффективных сечений поглощения γ-квантов ядрами имеют максимумы (рис. 70.8), соответствующие индивидуальным возбужденным состояниям ядер, а также максимум гигантского дипольного резонанса. Изучение таких процессов дает информацию о структуре ядра. С помощью γ-квантов можно изучать распределение электрических зарядов и токов в ядрах. При энергиях фотонов, меньших 100 МэВ, их адронные свойства никак не проявляются.

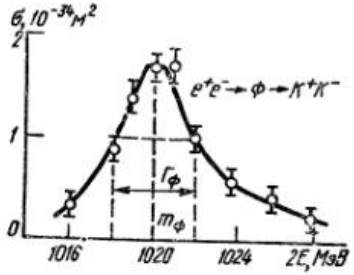


Рис. 77.6

Опыт показывает, что взаимодействие фотонов с адронами при энергиях порядка и больше нескольких ГэВ в значительной мере обусловлено рождением отдельным фотоном массивных адронных пар. Из закона сохранения энергии и импульса следует, что реальный фотон может родить реальную адронную пару только вблизи ядра, которое примет на себя избыток импульса системы в конечном состоянии. Однако принцип неопределенности [61.1] допускает нарушение закона сохранения энергии на величину ΔE за время меньшее $\hbar/\Delta E$ [71.3.1].

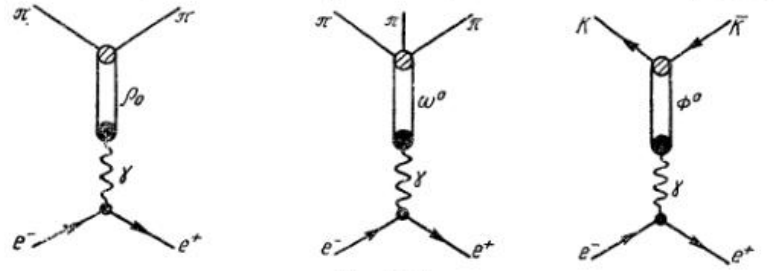


Рис. 77.7

Фотон может родить в свободном пространстве виртуальную пару или виртуальную частицу с теми же квантовыми числами, которые он имеет сам, и с полной энергией ΔE. Закон сохранения импульса требует, чтобы фотон и адрон имели одинаковый импульс $p = p_\gamma = E_\gamma/c$, где E_γ — энергия фотона. Энергия свободного адрона с массой m_h и импульсом p имеет вид [6.3]

$$E_h = [p^2c^2 + m_h^2c^4]^{1/2} = [E_\gamma^2 + m_h^2c^4]^{1/2},$$

а разность энергий виртуального адрона и фотона при малых и больших энергиях E_γ определяется выражением

$$\Delta E = E_h - E_\gamma = \begin{cases} m_h c^2 & \text{при } E_\gamma \ll m_h c^2, \\ \dfrac{m_h^2 c^4}{2E_\gamma} & \text{при } E_\gamma \gg m_h c^2. \end{cases} \quad (77.18)$$

Время жизни виртуального адрона

$$t = \frac{\hbar}{m_h c^2} \text{ при } E_\gamma \ll m_h c^2, \; t = \frac{2\hbar E_\gamma}{m_h^2 c^4} \text{ при } E_\gamma \gg m_h c^2. \quad (77.19)$$

Так как скорость адрона $v_h \lesssim c$, то за время t он может пройти расстояние

$$l \lesssim \frac{\hbar}{m_h c} = \lambda_h \text{ при } E_\gamma \ll m_h c^2, \; l \lesssim \frac{2\hbar E_\gamma}{m_h^2 c^3} = \lambda_h \frac{2E_\gamma}{m_h c^2} \text{ при } E_\gamma \gg m_h c^2. \quad (77.20)$$

Величина λ_h называется *приведенной комптоновской длиной волны адрона*. Из сохранения квантовых чисел следует, что самое низкое по массе адронное состояние фотона — это два пиона, $m_h = 2m_\pi$. Поэтому λ_h ограничено неравенством

$$\lambda_h \lesssim \frac{\hbar}{2m_\pi c}, \quad \lambda_h \approx 0{,}7 \text{ фм}. \quad (77.21)$$

В случае $m_h = m_\rho$ имеем $\lambda_h \approx 0{,}3$ фм. Из (77.20), (77.21) следует, что длина свободного пробега виртуального адрона меньше размеров отдельного нуклона и много меньше размеров ядра. Однако при $E_\gamma \gg m_h c^2$ (больше нескольких ГэВ) l может значительно превышать диаметр ядра.

Волновая функция фотона Ψ_γ в общем случае имеет вид

$$\Psi_\gamma = c_0 \Psi_0 + \sum_n c_n \Psi_n, \; |c_0|^2 + \sum_n |c_n|^2 = 1, \quad (77.22)$$

где Ψ_0 — электромагнитная часть волновой функции, соответствующая «голому» фотону, Ψ_n — ее адронная часть, описывающая адронное облако в n-м состоянии, величины $|c_0|^2$ и $|c_n|^2$ дают вероятности найти фотон в электромагнитном и n-м адронном состояниях соответственно. Теория предсказывает увеличение отношения c_n/c_0 с ростом энергии фотона E_γ. Действительно, решая уравнение Шредингера

$$(\hat{H}_h + \hat{H}_{em})\Psi_\gamma = E_\gamma \Psi_\gamma, \quad \hat{H}_h \Psi_n = E_n \Psi_n,$$

где $\hat{H}_h$ и $\hat{H}_{em}$ — адронная и электромагнитная части гамильтониана фотона, и учитывая, что электромагнитное взаимодействие $\hat{H}_{em}$ намного слабее адронного гамильтониана $\hat{H}_h$, по теории возмущений [62.6] для $E_\gamma \gg m_h c^2$ находим

$$c_n = \frac{\langle n | \hat{H}_{em} | 0 \rangle}{E_n - E_\gamma} \approx \frac{2E_\gamma}{m_h^2 c^4} \langle n | \hat{H}_{em} | 0 \rangle, \; c_0 \approx 1, \; c_n \ll 1, \quad (77.23)$$

где учтено (77.18) с $E_h = E_n$. Отсюда следует, что $c_n \sim E_\gamma$, а $|c_n|^2 \sim |\langle n | \hat{H}_{em} | 0 \rangle|^2 \sim \alpha$, где α — постоянная тонкой структуры (77.1). При $E_\gamma \ll m_h c^2$ фотон ведет себя как обычный световой квант.

Наличие у реального фотона адронной составляющей подтверждают эксперименты по рассеянию фотонов нуклонами. Если бы фотон взаимодействовал только с электромагнитным зарядом протона, то полные эффективные сечения поглощения фотона нуклонами были бы совершенно различными для нейтрона и для протона, так как их электромагнитные свойства различны. Если бы рассматриваемый фотон с высокой энергией взаимодействовал только с электрическими зарядами и токами, то поглощение на нейтроне было бы намного меньше поглощения на протоне. Опыт показывает, однако, что при энергиях, превышающих несколько ГэВ, оба сечения поглощения практически

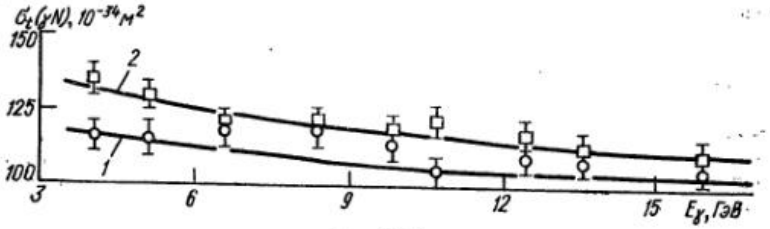


Рис. 77.8

совпадают,— поглощение происходит тогда, когда фотон находится в состоянии векторного мезона (рис. 77.8; *1* — поглощение фотонов нейтронами, *2* — поглощение фотонов протонами).

77.4. Слабое взаимодействие

77.4.1. Взаимодействие слабых токов. Исторически первое проявление слабого взаимодействия наблюдалось при β-распаде ядер [72.2.4; 74.2.2]. Первая успешная теория β-распада нейтрона, $n \to p e^- \bar{\nu}_e$ была развита Ферми (1934). Он использовал гипотезу Паули о существовании новой очень легкой незаряженной частицы, имеющей большую проникающую способность, получившей впоследствии название антинейтрино. Эта легкая частица уносит часть освобождающейся при распаде нейтрона энергии, что и объясняет наблюдаемый на опыте непрерывный спектр β-частиц — электронов e^- (рис. 74.5). Ферми постулировал, что протон, электрон и антинейтрино не входят в состав нейтрона, а рождаются в момент β-распада так, как рождается фотон, когда атом или ядро испускает его, переходя из возбужденного состояния в основное. Весь процесс рождения происходит в одной пространственно-временной точке. Акт взаимодействия проявляется в том, что в этой точке нейтрон уничтожается, а частицы p, e^- и $\bar{\nu}_e$ рождаются. Так как в этом акте участвуют четыре фермиона, то *взаимодействие* называется *четырехфермионным*. Обобщение теории Ферми на другие процессы позволило построить универсальную теорию слабых взаимодействий, согласующуюся с большой совокупностью экспериментальных данных.

Согласно имеющимся физическим представлениям слабые взаимодействия описываются единым образом в рамках так называемого *универсального взаимодействия Ферми*. Гамильтониан $\hat{H}_w$ этого взаимо-

действия можно получить путем обобщения выражения (77.11) на случай сил конечного радиуса действия R_w в предположении, что слабые 4-токи J_α мало изменяются на расстояниях порядка R_w:

$$\hat{H}_w = \frac{g^2}{4\pi}\int d^3x d^3x' J^\alpha(x)\, J^+_\alpha(x')\,\frac{\exp\{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/R_w\}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \approx$$

$$\approx \frac{G}{\sqrt{2}}\int d^3x J^\alpha(x)\, J^+_\alpha(x), \qquad (77.24)$$

где числовые коэффициенты выбраны в соответствии с установившейся традицией, а

$$G \equiv \sqrt{2} g^2 R_w^2, \qquad (77.25)$$

g — слабый заряд, аналогичный электрическому заряду e, $J^\alpha = (\rho_w, \mathbf{J}_w)$ — фермионный 4-ток, J^+_α — его эрмитовое сопряжение [62.4.1], $J_\alpha = (\rho_w, -\mathbf{J}_w)$, $x \equiv x^\alpha = (t, \mathbf{x})$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Величины ρ_w и $\mathbf{J}_w$ описывают плотность вероятности и плотность тока вероятности слабого тока.

Переносчиками слабого взаимодействия являются промежуточные векторные бозоны $W^\pm$ и Z^0 [78.3]. Их квантовые числа определяются законами сохранения электрического и лептонного зарядов, момента количества движения (табл. 75.1). Радиус действия сил слабого взаимодействия очень мал и равен

$$R_w = \frac{\hbar}{M_W c}, \quad R \approx 0{,}002 \text{ фм}. \qquad (77.26)$$

Величина G (77.25) называется *константой взаимодействия Ферми*. Она равна

$$\frac{G}{\sqrt{2}} \approx \frac{1{,}03\cdot 10^{-5}}{M^2}, \qquad (77.27)$$

где M — масса протона. Взаимодействие (77.24) задает лагранжиан Ферми [78.2.1]

$$\mathscr{L}_F = -\frac{G}{\sqrt{2}} J^\alpha(x)\, J^+_\alpha(x). \qquad (77.28)$$

Слабый ток $J^\alpha(x)$ аналогичен электромагнитному току [77.3.2]. Он является суммой *лептонного* $l^\alpha(x)$ и *адронного* $h^\alpha(x)$ *токов*:

$$J^\alpha(x) = l^\alpha(x) + h^\alpha(x). \qquad (77.29)$$

Опыт показывает, что в слабых взаимодействиях четность не сохраняется [77.4.3]. Это означает, что слабый ток представляется в виде линейной комбинации двух 4-векторов типа $V = (V_0, \mathbf{V})$ и $A = (A_0, \mathbf{A})$, которые во всех преобразованиях, кроме инверсии $\hat{P}$ пространственных координат, ведут себя одинаково, а при P-отражении их преобразования отличаются знаками:

$$\hat{P}V_0(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = V_0(-\mathbf{x}, t),\ \hat{P}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = -\mathbf{V}(-\mathbf{x}, t),$$
$$\hat{P}A_0(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = -A_0(-\mathbf{x}, t),\ \hat{P}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\hat{P}^{-1} = \mathbf{A}(-\mathbf{x}, t).$$

Величина V является вектором, а A — аксиальным вектором. Они могут быть построены из матриц Дирака γ^α, γ_5 и дираковских спиноров Ψ:

$$V \equiv V^\alpha(x, t) = \bar{\Psi}(x, t)\gamma^\alpha\Psi(x, t),$$
$$A \equiv A^\alpha(x, t) = \bar{\Psi}(x, t)\gamma^\alpha\gamma_5\Psi(x, t).$$

Учитывая это, в $V-A$ модели слабых взаимодействий (Маршак, Сударшан, Фейнман, Гелл-Манн, 1957 — 1958) лептонный ток $l^\alpha(x)$ записываем в виде

$$l^\alpha(x) = \bar{e}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_e(x) + \bar{\mu}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_\mu(x) +$$
$$+ \bar{\tau}(x)\gamma^\alpha(1-\gamma_5)\nu_\tau(x), \qquad (77.30)$$

где e, ν_e, μ, ν_μ, τ и ν_τ — операторы полей соответствующих частиц. В этой записи отражен эмпирически установленный факт сходства между электроном e и мюоном μ — во всех процессах эти лептоны ведут себя совершенно одинаково, имеют одинаковые квантовые числа и различаются только массами, $m_\mu \approx 200\, m_e$ (табл. 75.1). Соотношение (77.30) называют иногда *электрон-мюонной универсальностью*. Включение в эту схему τ-лептона основано на гипотезе о полной лептонной симметрии, отраженной в трех поколениях лептонов и кварков [76.2.3].

Матричный элемент от l^α между нейтринным и электронным состояниями принимает вид

$$\langle e | l^\alpha | \nu_e\rangle = \bar{u}_e\gamma^\alpha(1-\gamma_5)u_\nu, \qquad (77.31)$$

где u_e, u_ν — обычные дираковские спиноры в импульсном представлении. Ток l^α сохраняет электронное и мюонное числа в том смысле, что разрешены переходы $e \to \nu_e$ и $\mu \to \nu_\mu$, а переходы между e и ν_μ и μ и ν_e запрещены.

Структура адронной части h^α слабого тока более сложна. Все аспекты β-распада, включая распад нейтрона, указывают на то, что матричный элемент от h^α между протонным и нейтронным состояниями описывается подобным (77.31) выражением

$$\langle p | h^\alpha | n\rangle = \bar{u}_p\gamma^\alpha(G_V - G_A\gamma_5)u_n, \qquad (77.32)$$

где $G_V \approx 0{,}98$, $G_A \approx 1{,}24$, т. е. имеет $V-A$ форму,

$$h^\alpha(x) = V^\alpha(x) + A^\alpha(x). \qquad (77.33)$$

Опыт показывает (табл. 77.3), что при β-распаде адронов странность может как сохраняться, $\Delta S = 0$, так и изменяться на единицу, $\Delta S = 1$. Амплитуда процессов с $\Delta S = 1$ меньше амплитуды с $\Delta S = 0$. Если выбрать

$$\langle p | h^\alpha | \Lambda\rangle = \bar{u}_p\gamma^\alpha(G_V^{\Delta S=1} - G_A^{\Delta S=1}\gamma_5)u_\Lambda, \qquad (77.34)$$

то выполняется равенство (Кабиббо, 1963)

$$(G_V)^2 + (G_V^{\Delta S=1})^2 \approx 1.$$

Поэтому адронную часть слабого тока записывают в виде (77.33), где

$$V^\alpha = \cos\theta_c V^\alpha_{\Delta S=0} + \sin\theta_c V^\alpha_{\Delta S=1}, \qquad (77.35)$$
$$A^\alpha = \cos\theta_c A^\alpha_{\Delta S=0} + \sin\theta_c A^\alpha_{\Delta S=1}.$$

Таблица 77.3. **Экспериментальные данные лептон-адронных процессов распада** (J — спин адрона, P — четность адрона, $t_{1/2}$ — период полураспада, $ft_{1/2}$ — приведенный период полураспада, ΔS — изменение странности)

Распад	$\lvert\Delta S\rvert$	Тип распада $J^P \to J^P$	$t_{1/2}$, с	E_{max} для e, МэВ	$ft_{1/2}$, с
$\pi^\pm \to \pi^0 e\nu$	0	$0^- \to 0^-$	1,8	4,1	$2 \cdot 10^3$
$n \to pe\bar{\nu}$	0	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	640	0,78	$1{,}2 \cdot 10^3$
$\Sigma^- \to \Lambda^0 e\bar{\nu}$	0	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	79	$5 \cdot 10^3$
$K^+ \to \pi^0 e\nu$	1	$0^- \to 0^-$	$1{,}8 \cdot 10^{-7}$	230	$1 \cdot 10^5$
$\Lambda^0 \to pe\bar{\nu}$	1	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	$2 \cdot 10^{-7}$	160	$2 \cdot 10^4$
$\Sigma^- \to ne\bar{\nu}$	1	$\frac{1}{2}^+ \to \frac{1}{2}^+$	$0{,}95 \cdot 10^{-7}$	230	$7 \cdot 10^4$

Величина θ_c называется *углом Кабиббо*. Он определяет относительные вклады V^α- и A^α-токов в полный адронный слабый ток:

$$\langle p \mid V^\alpha \mid n\rangle = \cos\theta_c \langle p \mid V^\alpha_{\Delta S=0} \mid n\rangle \to \cos\theta_c \bar{u}_p \gamma^\alpha u_n, \qquad (77.36)$$
$$\langle p \mid V^\alpha \mid \Lambda\rangle = \sin\theta_c \langle p \mid V^\alpha_{\Delta S=1} \mid \Lambda\rangle \to \sin\theta_c \bar{u}_p \gamma^\alpha u_\Lambda.$$

Отсюда следует, что $G_V = \cos\theta_c$, $G_V^{\Delta S=1} = \sin\theta_c$.

Угол Кабиббо находится из соотношения

$$\operatorname{ctg}^2\theta_c = ft_{1/2}^{\Delta S=1} / ft_{1/2}^{\Delta S=0}, \qquad (77.37)$$

где $ft_{1/2}$ — приведенный период полураспада [74.2.2]. Он связан с матричным элементом перехода из начального состояния $\mid N\rangle$ в конечное $\mid N'e\nu\rangle$ под действием слабых сил

$$\overline{|\langle N'e\nu \mid \hat{H}_w \mid N\rangle|^2} = \frac{2\pi^3}{f\tau} \frac{\hbar^7}{m_e^5 c_4}, \qquad (77.38)$$

$$\overline{|\langle N'e\nu \mid \hat{H}_w \mid N\rangle|^2} = \frac{43 \cdot 10^{-6}\ \text{МэВ}^2 \cdot \text{фм}^6 \cdot \text{с}}{ft_{1/2}},$$

где $ft_{1/2} = f\tau \ln 2$ взято в секундах, τ — время жизни распадающегося состояния $\mid N\rangle$, коэффициент при $f\tau$ выбран так, чтобы универсальная функция f была безразмерной, черта сверху означает усреднение по углам между направлениями разлета e и ν. Так как $\hat{H}_w$ предполагается одним и тем же для всех процессов слабого распада, различие в значениях $ft_{1/2}$ связывают с волновыми функциями $\mid N\rangle$ и $\mid N'e\nu\rangle$. Имеющиеся данные дают для угла Кабиббо значение

$$\sin\theta_c = 0{,}230 \pm 0{,}003 \quad (\theta_c \approx 13°). \qquad (77.39)$$

Адронную часть h^α слабого тока можно записать в явном виде через операторы полей u-, d- и s-кварков:

$$h^\alpha = \bar{u}\gamma^\alpha (1 - \gamma_5)(\cos\theta_c \cdot d + \sin\theta_c \cdot s). \qquad (77.40)$$

В такой модели процессы слабого взаимодействия адронов рассматриваются на микроскопическом уровне как процессы взаимодействия кварков. В случае β-распада нейтрона имеем диаграмму, приведенную на рис. 77.9, из которой видно, что изменение претерпевает один из d-кварков. В приведенных выше обсуждениях структуры слабого тока $J^\alpha(x)$ нигде в явном виде не использовалось предположение об обменной природе слабого взаимодействия. Включение в эту схему промежуточных бозонов $W^\pm$ и Z^0 означает, что распад d-кварка описывается диаграммой рис. 77.10.

Если в результате слабого процесса электрический заряд частицы изменяется, то это означает, что процесс идет с участием $W^\pm$-бозонов.

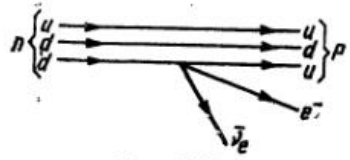


Рис. 77.9

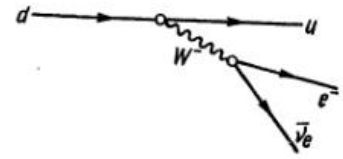


Рис. 77.10

Описывающие его токи называются *заряженными токами*. К числу слабых процессов, которые связаны с заряженными токами, относятся процессы

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e, \ \mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$
$$\nu_\mu \to n + p + \mu^-, \ \Lambda \to p + e^- + \bar{\nu}_e \qquad (77.41)$$

и др. Если в результате слабых процессов частицы переходят сами в себя, то такие процессы идут с участием Z^0-бозона и описываются *нейтральными токами*. Слабые процессы, обусловленные нейтральными токами, были впервые обнаружены экспериментально (1973) в так называемых безмюонных процессах по рассеянию мюонных нейтрино на нуклонах:

$$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + \text{адроны}, \ \bar{\nu}_\mu + N \to \bar{\nu}_\mu + \text{адроны}. \qquad (77.42)$$

Такие процессы описываются произведениями нейтрального нейтринного тока на нейтральные кварковые токи. Гамильтониан взаимодействия имеет вид (77.24), где под 4-токами J_α следует понимать нейтральные токи. Открыты (1982) и другие слабые нейтральные лептонные токи. Простейшие фейнмановские диаграммы слабых процессов, связанных с заряженным и нейтральным током, показаны на рис. 77.11. Заряженные токи переносятся $W^\pm$-бозонами, а нейтральные связаны с Z^0-бозоном. Отметим, что с точки зрения введенной здесь терминологии обычный электромагнитный ток j_{em} является нейтральным: переносчик взаимодействия — фотон — является нейтральным [77.3.2]. Строгую теорию слабых взаимодействий дает модель Вайнберга — Салама [78.3].

77.4.2. Классификация слабых процессов. В основу общей классификации слабых процессов положено деление слабых токов J^α на лептонные l^α и адронные h^α (77.29).

1. *Лептонные процессы.* Они описываются лагранжианом $\frac{G}{\sqrt{2}} \times$ $\times\, l^{\alpha}(x)\, l^{+}_{\alpha}(x)$. Токи $l^{\alpha}(x)$ (77.30) хорошо изучены в электродинамике [77.3.2]. Такие процессы легко рассчитываются, теория очень хорошо согласуется с экспериментом. В настоящее время на эксперименте обнаружен только один чисто лептонный распад, а именно распад мюона

$$\mu \to e \nu_e \bar{\nu}_\mu. \tag{77.43}$$

К лептонным относятся процессы рассеяния нейтрино на заряженных лептонах

$$\nu_e e^- \to \nu_e e^-, \quad \nu_\mu e^- \to \nu_e \mu^-, \tag{77.44}$$

в которых электромагнитные и адронные взаимодействия не проявляются.

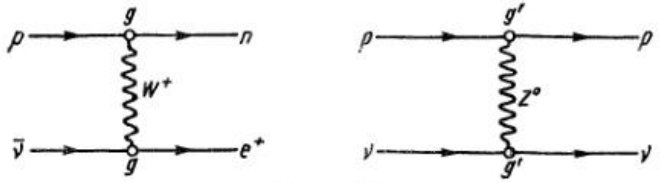


Рис. 77.11

2. *Лептон-адронные процессы.* Лагранжиан этих процессов имеет вид $\frac{G}{\sqrt{2}}[l^{\alpha}(x)\, h^{+}_{\alpha}(x) + h^{\alpha}(x)\, l^{+}_{\alpha}(x)]$. В таких процессах один ток обязательно лептонный, а другой — адронный. Примеры лептон-адронных распадов приведены в табл. 77.3. Лептон-адронными реакциями, являются процессы с участием нейтрино и нуклонов,

$$\nu_\mu n \to \mu^- p, \quad \bar{\nu}_\mu p \to \mu^+ n. \tag{77.45}$$

3. *Адронные процессы.* Такие процессы описываются произведениями только адронных токов: $\frac{G}{\sqrt{2}} h^{\alpha}(x)\, h^{+}_{\alpha}(x)$. Примерами слабых распадов, в которых участвуют только адроны, являются процессы

$$K^+ \to \pi^+\pi^0, \quad \pi^+\pi^+\pi^-, \quad \pi^+\pi^0\pi^0; \quad \Lambda^0 \to p\pi^-, \quad n\pi^0. \tag{77.46}$$

В этих процессах выполняется *правило отбора по гиперзаряду*: $|\Delta Y| = 1$.

Во всех трех типах слабых распадов нарушаются закон сохранения четности и инвариантность относительно зарядового сопряжения. Важной особенностью слабых взаимодействий является то, что в отличие от адронных и электромагнитных взаимодействий, при которых сохранение странности и гиперзаряда постулируется ($\Delta S = 0$, $\Delta Y = 0$), в слабых процессах выполняются следующие *правила отбора по гиперзаряду и странности*: $\Delta Y = 0, \pm 1$; $\Delta S = 0, \pm 1$.

77.4.3. Несохранение четности. В электромагнитных и адронных взаимодействиях четность P сохраняется, однако в слабых взаимодействиях закон сохранения четности нарушается. Первые указания на несохранение четности были получены в распадах K^+-мезона (77.46). Так как четность системы равна произведению внутренних четностей ее частиц [62.4.5] и множителей, описывающих четности их относительных движений, то учитывая, что внутренняя четность пиона отрицательна, а их относительные орбитальные моменты равны нулю (это следует из того факта, что спины каонов и пионов равны нулю, а энергии распада невелики), находим, что при распаде K^+ на два пиона его четность положительна, $P = +1$, а при распаде на три пиона — отрицательна, $P = -1$.

Идея о нарушении закона сохранения четности в слабых распадах была высказана Ли и Янгом (1956) и экспериментально доказана в опытах Ву и сотрудников (1957). Они изучали β-распад ядер изотопа кобальта $^{60}_{27}$Co, поляризованных во внешнем магнитном поле **B**:

$$^{60}\mathrm{Co} \to {}^{60}\mathrm{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e.$$

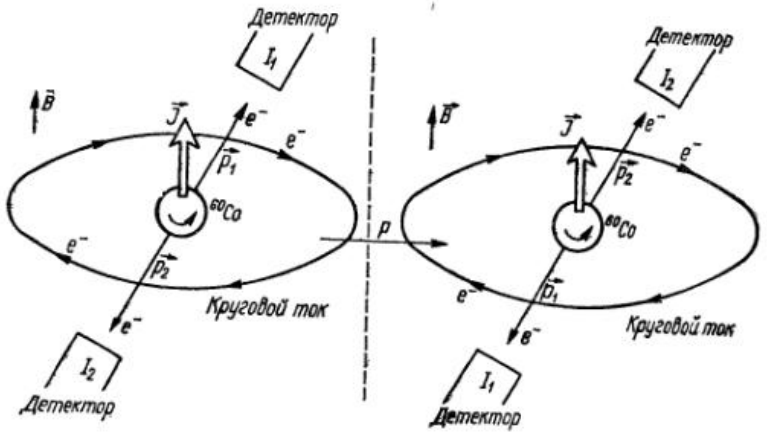


Рис. 77.12

Магнитное поле **B** создавалось круговым током. Под действием этого поля собственные магнитные моменты ядер кобальта, определяемые направлением спина ядра **J** [67.4.2], ориентируются вдоль поля **B**. Вся система зеркально симметрична плоскости, в которой расположен круговой ток (рис. 77.12). По разные стороны этой плоскости измерялись интенсивности I_1 и I_2 испущенных электронов с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. При преобразовании четности [62.4.5] спин **J** ядра не изменяет своего направления, а импульсы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ — изменяют. Поэтому действие оператора четности $\hat{P}$ на произведение **Jp** дает

$$\hat{P}\,(\mathbf{Jp})\,\hat{P}^{-1} = -\mathbf{Jp}.$$

Требование сохранения четности означает, что интенсивности электронов, испущенных в направлении спина **J** и противоположно ему, должны быть в точности равны. Так как среднее значение оператора **Jp** характеризует скорость переходов в конечное состояние ядра ^{60}Co, то проверка закона сохранения сводится к измерению этой величины при фиксированных ориентациях **J** и **p**.

Состояние — **Jp** можно получить, обращая направление векторов **J** или **p**. В опытах Ву обращалось направление **J** путем изменения направления магнитного поля **B**, т. е. изменялась поляризация ядер ^{60}Co на противоположную. Была обнаружена сильная асимметрия в интенсивностях излучаемых электронов: различие средних ожидаемых

величин J_p и $-J_p$ достигало 40 %. Это убедительно демонстрировало нарушение четности в процессе распада ядра ^{60}Co. Несохранение четности в слабых взаимодействиях было подтверждено и в ряде других экспериментов.

Несохранение четности является универсальным свойством всех слабых процессов. Оно доказывает единство слабых взаимодействий всех видов. Теоретически эта особенность слабых сил описывается введением дополнительной к векторной аксиально-векторной составляющей слабого тока [77.4.1].

77.5. Сильное взаимодействие

77.5.1. Особенности сильных взаимодействий. Сильные взаимодействия осуществляются между частицами, которые называют *адронами*. К адронам относятся мезоны, барионы и их резонансы [75.4]. Сильные взаимодействия не универсальны, они не действуют на лептоны и калибровочные векторные бозоны. Эти взаимодействия характеризуются высокой интенсивностью и малым радиусом действия (табл. 77.1). В области энергий от 5 до 10 ГэВ (в ц-системе) адроны ведут себя как абсолютно непроницаемые шары радиусом R, а упругое σ_{el}, неупругое σ_r и полное σ_t сечения рассеяния адрона на адроне описываются формулами [73.2.3]

$$\sigma_{el} = \pi R^2, \quad \sigma_r = \pi R^2, \quad \sigma_t = 2\pi R^2. \qquad (77.47)$$

Из опыта следует, что $\sigma_t = 2-4$ фм^2. Отсюда следует оценка $R \approx 1$ фм. Величину R называют *геометрическим радиусом адрона*. Отличие R от нуля указывает на то, что адроны не являются точечными объектами, а обладают структурой, радиус которой имеет порядок R. В пользу того, что адроны состоят из одних и тех же субчастиц, называемых *партонами*, свидетельствуют данные по неупругим процессам, т. е. реакциям рассеяния и взаимопревращения адронов. В частности, сечение $d\sigma/dp_\perp$, где $p_\perp$ — поперечная составляющая переданного импульса, инклюзивной реакции $p + p \to \pi + X$ с энергией $E = 52{,}7$ ГэВ (рис. 77.13) с увеличением $p_\perp$ убывает не по экспоненциальному закону, как было бы в случае точечных протонов, а по степенному. Кроме того, глубоко неупругий характер реакции указывает на то, что протон состоит из нескольких партонов, которые имеют размеры, по крайней мере в 10^3 раз меньшие размеров адрона. Масса адрона не распределена равномерно по его объему, а сосредоточена в очень малых (практически точечных) областях, с которыми и отождествляются партоны. По имеющейся большой совокупности опытных данных можно заключить, что роль партонов в адронах играют глюоны и кварки [76.2]. Теорией сильных взаимодействий в кварк-партонной модели является квантовая хромодинамика [78.2.6].

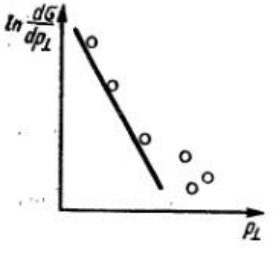


Рис. 77.13

Важной особенностью сильных взаимодействий является их ярко выраженный резонансный характер. Сечения рассеяния адронов изменяются с ростом энергии не монотонно, а имеют отчетливые резонансы. В качестве примера на рис. 77.14 приведены экспериментальные зависимости от энергии полных сечений столкновений положительных (π^+) и отрицательных (π^-) пионов с протонами (p). Максимумам кривых соответствуют барионные резонансы (табл. 75.4). Эти резонансы характеризуются шириной Γ, которая определяет их среднее время жизни [75.2]. Для каждого резонанса законами сохранения разрешено большое количество типов распадов, отличающихся видами частиц в конечном состоянии. Вероятность различных распадов определяется энергией Q, выделяющейся при распаде, и величиной разности ΔJ спинов резонанса и продуктов его распада. Вероятность распада понижается с уменьшением энергии Q и с увеличением разности спинов ΔJ

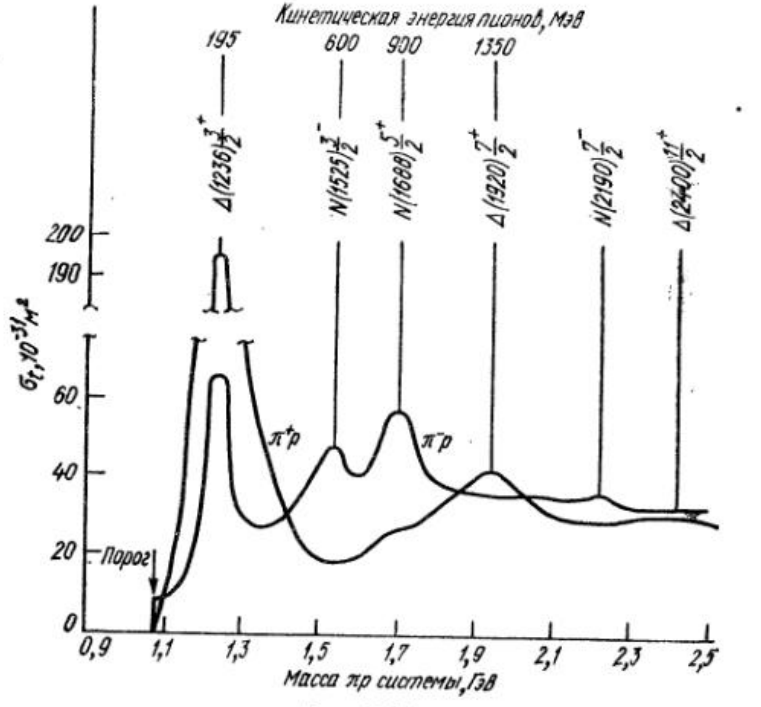


Рис. 77.14

(при малых энергиях). Чем меньше сумма масс продуктов распада, тем выше вероятность такого распада.

Кварковая модель адронов дает простое объяснение процессов распада резонансов (рис. 77.15). Эмпирическим путем установлено **правило Цвейга:** *наиболее вероятны такие распады адрона, при которых рождается минимальное число пар кварк — антикварк.*

77.5.2. Шармоний. В процессах e^+e^--столкновений возникают мезонные состояния, которые можно рассматривать как состоящие из шармированного кварка c и его антикварка $\bar{c}$. Эти состояния получили название *шармоний*. Они проявляются в реакции $e^+e^- \to$ адроны в виде резонансных пиков в сечении. Энергетические уровни шармония аналогичны состояниям *позитрония* — связанного состояния позитрона e^+ с электроном e^- (рис. 77.16). Спектр позитрония с большой точностью описывается квантовой электродинамикой, а спектр шармония —

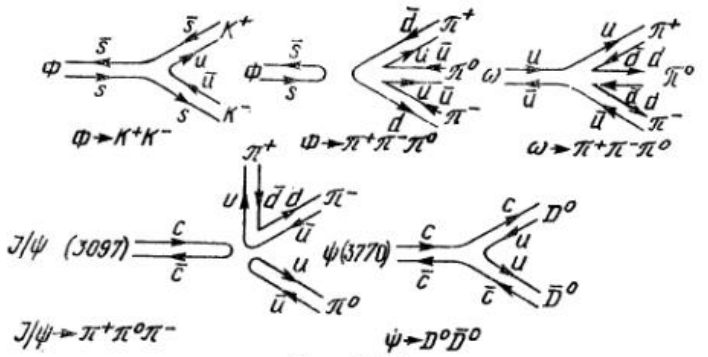


Рис. 77.15

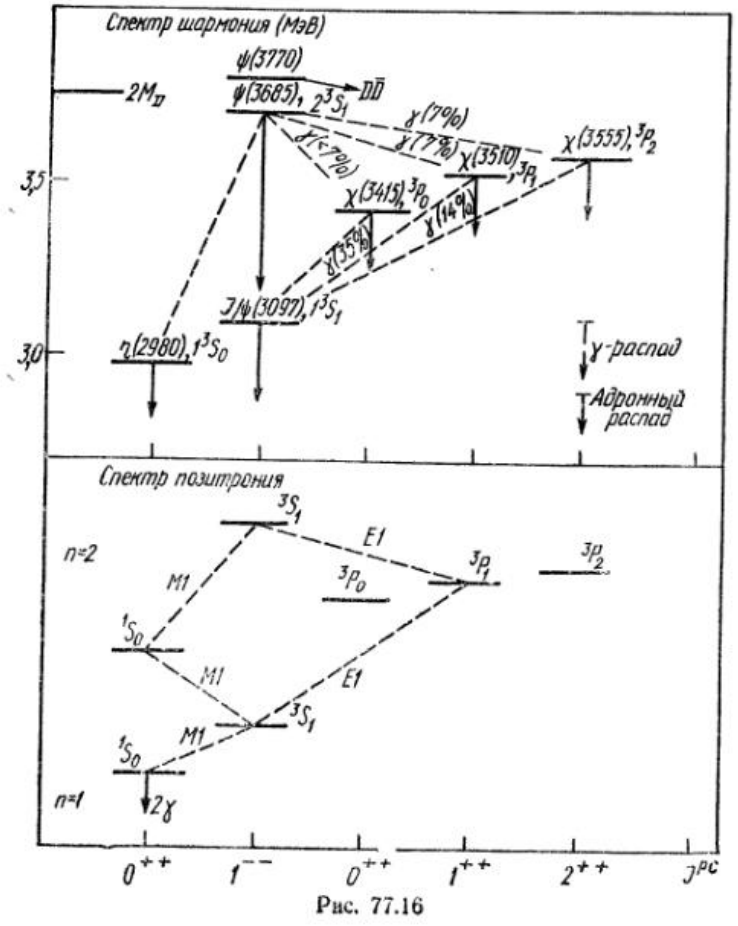


Рис. 77.16

квантовой хромодинамикой. Все свойства шармония можно объяснить в рамках теории, в которой взаимодействие кварка c с антикварком $\bar{c}$ описывается нерелятивистской потенциальной моделью. Так как в шармонии c-кварк имеет эффективную массу $\sim 1{,}6$ ГэВ, а его энергетические уровни занимают полосу, ширина которой намного меньше удвоенной массы c-кварка, то движения частиц c и $\bar{c}$ в шармонии в хорошем приближении можно считать нерелятивистскими. При этом $c\bar{c}$-взаимодействие описывается потенциалом [78.4]

$$V = -\frac{k_1}{r} + k_2 r, \qquad (77.48)$$

где k_1 и k_2 — произвольные константы. Из данных об адрон-адронных взаимодействиях следует, что $k_1 \approx 0{,}5$, $k_2 = 0{,}2$ ГэВ$^{-2}$ ($\hbar = c = 1$). Первое слагаемое в (77.48) соответствует $c\bar{c}$-взаимодействию на малых расстояниях, обусловленному обменом глюонами [76.2.2], а второе описывает экспериментальный факт, согласно которому кварки не могут существовать в свободном состоянии. На больших расстояниях r потенциал (77.48) увеличивается так, что кварки всегда остаются внутри адрона (явление конфайнмента [76.2.2]). Модель (77.48) предсказывает, что J/ψ-частица является низшим S-состоянием шармония, спины кварков которого параллельны (*ортошармоний*). В спектроскопических обозначениях, принятых в атомной физике [66.3.2], — это 1^3S_1-состояние. P-состояниям ортошармония соответствуют χ-резонансы (рис. 77.16, табл. 75.3). Уровень ψ (3685) относится к первому возбужденному S-состоянию 2^3S_1 *парашармония* (спины кварков c и $\bar{c}$ антипараллельны). Уровень ψ (3770) лежит выше порога распада на очарованные мезоны $\psi \to D^0\bar{D}^0$.

77.5.3. Адрон-адронные столкновения. Адрон-адронные столкновения являются основным источником информации о динамических свойствах адронов, определяемых механизмом сильных взаимодействий. На рис. 77.17 представлены полные сечения рассеяния различных частиц на протонных мишенях. Из этих данных следует, что по полной энергии (в ц-системе) E_{cm} адрон-адронные процессы можно разделить на три области: 1) резонансную ($E_{cm} \lesssim 2$ ГэВ); 2) асимптотическую ($2 \lesssim E_{cm} \lesssim 10$ ГэВ); 3) область роста радиуса взаимодействия ($E_{cm} \gtrsim 10$ ГэВ). В области 1) сечения σ_t наиболее велики и характеризуются отчетливыми резонансами. Здесь большую роль играют корреляции между частицами — продуктами процесса. Кварковая структура при этом проявляется лишь в том, что потенциал взаимодействия адронов имеет сложную структуру и представляет собой остаточное кварк-кварковое взаимодействие (табл. 77.2).

В областях 2) и 3) дебройлевская длина волны λ налетающей частицы много меньше геометрических размеров адрона R, определяемого формулами (77.47), $\lambda \ll R$. В области 2) зависимость σ_t от E_{cm} является плавной, адроны ведут себя как черные шары. Область 3) есть область ультрарелятивистских энергий, $E_{cm} \gg M_t$, где M_t — масса любого адрона, участвующего в процессе. При таких больших энергиях наблюдается универсальный рост полных сечений с энергией по закону (Фруассар, 1961)

$$\sigma_t < \text{const}\,(\log E_{cm}^2)^2. \qquad (77.49)$$

При высоких энергиях выполняется **теорема Померанчука** (1958): *полные сечения рассеяния частиц a и античастиц $\bar{a}$ на данной мишени b начнут совпадать, когда энергии падающих на мишень частиц будут*

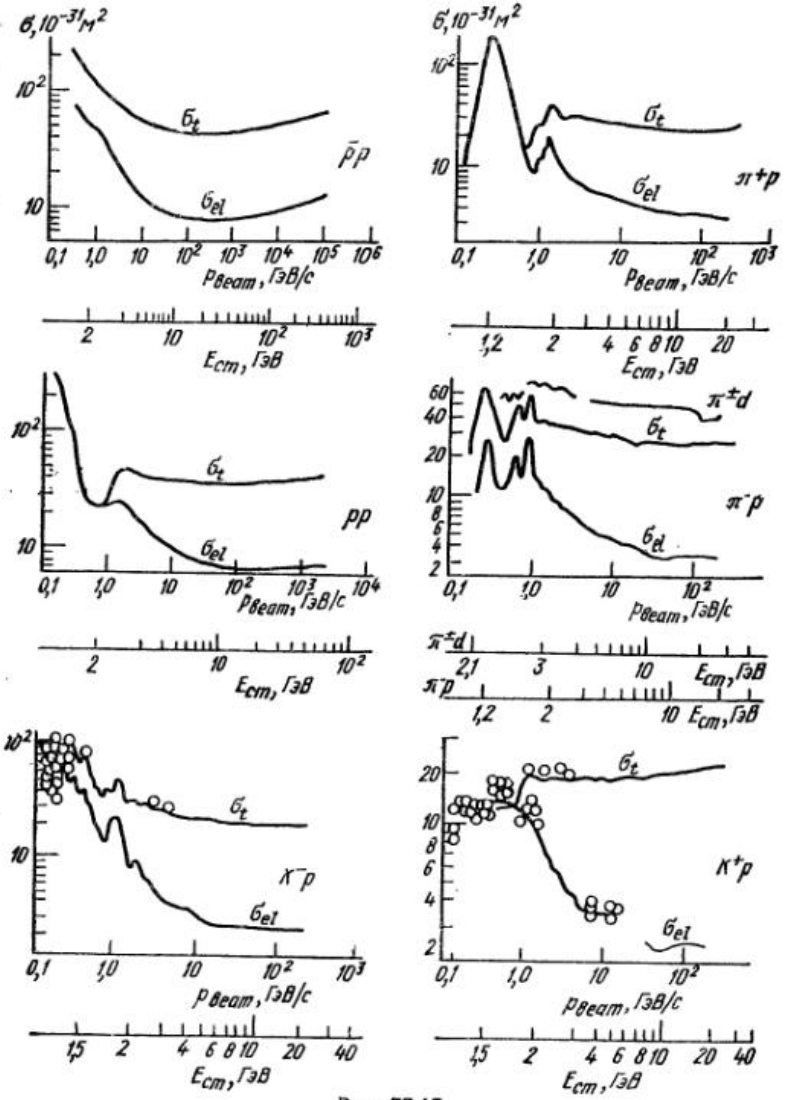


Рис. 77.17

стремиться к бесконечности, т. е.

$$\frac{\sigma_t(\bar{a}+b)}{\sigma_t(a+b)} \to 1 \text{ в асимптотической области.}$$

Для инклюзивной реакции

$$a + h \to b + X, \qquad (77.50)$$

где h — адрон, a и b — частицы (не обязательно адроны), X — остальные (кроме b) частицы в конечном состоянии, наблюдается так называемая *масштабная инвариантность* или *фейнмановский скейлинг*: при $p_T < 1$ ГэВ/с инвариантная функция

$$F(p_T,\ p_L;\ E_{cm}) \equiv E_p \frac{d\sigma_{incl}}{dp_T^2 dp_L} = E_p \frac{d\sigma_{incl}}{d\mathbf{p}}, \qquad (77.51)$$

определяемая дифференциальным сечением $d\sigma_{incl}/d\mathbf{p}$ инклюзивной реакции (77.50), равным по определению сумме дифференциальных сечений всех процессов с вылетом частицы b, каждое из которых проинтегрировано по всем переменным остальных частиц, является функцией только двух переменных p_T и $x = 2p_L/E_{cm}$, т. е. при асимптотических энергиях и фиксированных x

$$\lim_{E_{cm}\to\infty} F(p_T,\ p_L;\ E_{cm}) = f(p_T,\ x), \qquad (77.52)$$

где p_T, p_L — поперечная и продольная (вдоль оси столкновения) компоненты импульса $\mathbf{p}$ вылетающей частицы b, $E_p = c\sqrt{p^2 + M^2c^2}$, M — масса частицы b, E_p — полная энергия частицы b (в ц-системе), E_{cm} — полная энергия системы. Переменная x называется *фейнмановской скейлинговой переменной* (Фейнман и др., 1969). Она характеризует величину энергии переданной вторичной частице. При анализе распределений вылетающих частиц b по продольным импульсам p_L используют величину y, называемую *быстротой*. По определению

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E_{cm} + p_L}{E_{cm} - p_L}\right). \qquad (77.53)$$

При одномерном движении $p_T = 0$ и быстроты аддитивны: $y_2 = y_1 + v$, где y_1 и y_2 — быстроты в разных системах отсчета, т. е. $\Delta y = y_2 - y_1$ — разность быстрот двух частиц одинакова во всех движущихся системах отсчета. В случае трехмерного движения с $p_T \ll p_L$ это свойство выполняется приближенно. При столкновении двух протонов с $E_{cm} = 60$ ГэВ имеем $\Delta y = 8{,}2$. Отметим, что закон сложения быстрот аналогичен закону сложения скоростей в нерелятивистской механике [3.2.3]: $v_2 = v_1 + v$, где v_1 и v_2 — скорости частицы, измеренные в системах координат, одна из которых движется со скоростью v относительно другой. Легко видеть, что при одномерном движении (77.53) имеет вид

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{c+v}{c-v},$$

где c — скорость света.

Опыт показывает, что в результате адрон-адронного столкновения продукты реакции группируются в сгустки частиц, которые принято называть *кластерами*. Разброс по быстротам у частиц кластера имеет порядок $\Delta y = 1$. Величина (77.53) позволяет выделить три типа кластеров. Первому типу соответствуют кластеры, которые по быстротам группируются около одной из быстрот, например $y(h)$, сталкивающихся частиц a и h. В таком процессе частица a рассеивается как целое квазиупруго на частице h. Частица h возбуждается, а затем теряет возбуждение, испуская вторичные частицы, которые и образуют кластер (рис. 77.18). Кластер имеет суммарные квантовые числа и

среднюю быстроту частицы h. Второму типу кластеров соответствует так называемый *процесс фрагментации налетающей частицы*. В этом случае быстроты вылетающих частиц также группируются вокруг быстроты одной из сталкивающихся частиц $y(a)$ или $y(h)$, но суммарные квантовые числа кластера не совпадают с квантовыми числами частицы a или h. К третьему типу относят кластеры, частицы которых имеют быстроты y в области $y(a) < y < y(h)$. Эти кластеры называют *струями*. Они в основном состоят из пионов, поэтому указанную область быстрот называют *областью пионизации*.

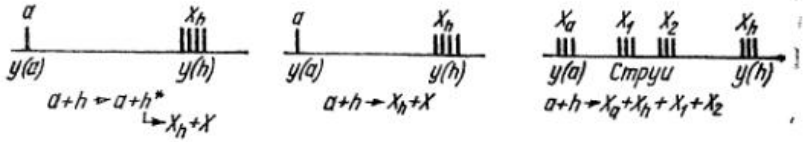


Рис. 77.18

В области роста радиуса взаимодействия ($E_{cm} > 10$ ГэВ) выполняется условие

$$|y(a) - y(h)| \gg 1,$$

при котором проявляются динамические свойства партонов, составляющих адроны. При описании сильных взаимодействий в этой области энергий приходится использовать различного рода модельные представления и допущения, которые диктуются имеющимися экспериментальными данными. В кварк-партонной модели используют следующие *гипотезы о характере движений и взаимодействий партонов*: 1) в начальный момент столкновения каждый адрон можно рассматривать как систему свободных партонов, в которую кроме валентных кварков, включаются виртуальные кварки, антикварки и глюоны; 2) распределение $n(y)$ партонов в адроне a высокой энергии по быстротам имеет вид плато с y в пределах от нуля до $y(a) = \ln 2p_L$, $|p_L| \gg cM_a$ (рис. 77.18); 3) на малых расстояниях между партонами имеется свойство асимптотической свободы, т. е. чем меньше расстояние между партонами, тем слабее они взаимодействуют; 4) на больших расстояниях между партонами имеется конфайнмент, т. е. партоны не могут вылететь из адрона. Взаимодействию адронов a и h соответствует ситуация, когда они соединяются в единую систему по быстротам (рис. 77.19). При этом нарушается стационарная картина для каждого адрона в отдельности, и осуществляется взаимодействие партонов, имеющих близкие быстроты, но сильно разделенных один от другого пространственно. В результате образуются мезоны, барионы и антибарионы, которые свободно разлетаются. Следует иметь в виду, что описанный механизм рождения вторичных частиц, среди которых могут быть и струи, носит качественный характер. Количественный расчет сильно затруднен тем обстоятельством, что не все детали процесса на кварк-партонном уровне выяснены до конца.

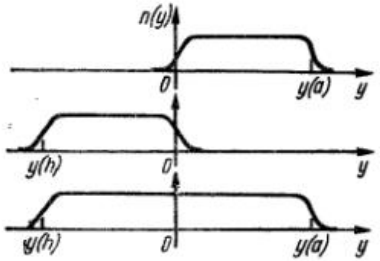


Рис. 77.19

Важной характеристикой адронных столкновений является множественность $\langle n \rangle$. *Множественностью* называют среднее число частиц, рождающихся в единичном акте столкновения. Величина $\langle n \rangle$ зависит от вида сталкивающихся адронов и от энергии столкновения. Наблюдаемые на опыте множественности малы. Так, в одном акте pp-столкновений рождается в среднем 4—5 пионов и 0,2 антипротона при энергиях 20—30 ГэВ. Так как число вторичных частиц мало, они имеют большие энергии. Опыт показывает, что среднее число $\langle n_{зар} \rangle$ заряженных вторичных частиц зависит от энергии падающего протона в лабораторной системе E_L по закону

$$\langle n_{зар} \rangle = \text{const}\, E_L^{1/4}. \qquad (77.54)$$

Столкновение адронов представляет собой частный случай ядерной реакции, поэтому оно может быть описано с помощью понятий, принятых в теории ядерных реакций [73]. Одним из наиболее используемых является формализм матрицы столкновений [73.2], представляющий собой удобный способ параметризации опытных данных.

78. СОВРЕМЕННЫЕ КОНЦЕПЦИИ ФИЗИКИ ЧАСТИЦ

78.1. Формализм S-матрицы

78.1.1. Распад и столкновение частиц. Общая постановка задачи о столкновении частиц состоит в следующем: по заданному состоянию системы, представляющей собой некоторую совокупность свободных частиц, найти вероятности различных возможных конечных состояний, возникающих в результате взаимодействия частиц. Если начальное состояние обозначить символом $|i\rangle$, то в результате столкновения система перейдет в некоторое новое состояние, описываемое суперпозицией конечных состояний $|f\rangle$:

$$|i\rangle \to \sum_f |f\rangle \langle f|\hat{S}|i\rangle, \quad \langle f|\hat{S}|i\rangle \equiv S_{fi}, \qquad (78.1)$$

где суммирование производится по всем возможным конечным состояниям $|f\rangle$. Коэффициенты разложения (78.1) S_{fi} называются матричными элементами S-матрицы [73.2]. Их квадраты $|S_{fi}|^2$ дают вероятности переходов в определенное состояние $|f\rangle$. Сумма в (78.1) содержит слагаемое, которое описывает ситуацию, когда рассеяния не происходит, т. е. между частицами нет взаимодействия. Такому процессу соответствует единичная S-матрица: $\langle f|\hat{S}|i\rangle = \delta_{fi}$, где $\delta_{fi} = 1$ при $f = i$ и $\delta_{fi} = 0$ при $f \neq i$ (символ Кронекера). Удобно выделить эту единицу из матрицы рассеяния S. Тогда

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i)\, T_{fi}, \quad T_{fi} = \langle f|\hat{T}|i\rangle, \qquad (78.2)$$

где T_{fi} — так называемая T-матрица или амплитуда процесса $i \to f$,

$$\delta^4(p_f - p_i) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{i(p_f - p_i)x} = \delta(\varepsilon_f - \varepsilon_i)\,\delta(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i);$$

$p_i^\mu = (\varepsilon_i, \mathbf{p}_i)$ и $p_f^\mu = (\varepsilon_f, \mathbf{p}_f)$ — 4-импульсы системы в начальном и конечном состояниях, ε_i и ε_f — полные энергии системы в i- и f-состоя-

ниях, $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}_f$ — обычные (трехмерные) полные импульсы системы, $px \equiv p_\mu x^\mu = \varepsilon t - \mathbf{px}$, $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ — 4-координата, $d^4x = dt\, d^3x$. Множитель $i(2\pi)^4$ выделен из соображений удобства. Вероятность перехода в единицу времени для процесса $i \to f$

$$w(i \to f) = \frac{|S_{fi}|^2}{t} = (2\pi)^4 \delta^4 (p_f - p_i) |T_{fi}|^2 V, \qquad (78.3)$$

где V — некоторый большой, но конечный объем, t — интервал времени.

В случае *распада частицы* вероятность перехода в единицу времени и в единицу объема в определенное конечное состояние дается формулой

$$d\Gamma(i \to f) = w(i \to f) \frac{dN_f}{\rho_i}, \qquad (78.4)$$

$$\rho_i = 2\varepsilon_i, \quad dN_f = \frac{1}{V} \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2\varepsilon_j}. \qquad (78.5)$$

Здесь ρ_i — плотность распадающегося состояния, dN_f — плотность конечных состояний в единице нормировочного объема V, n — число частиц в конечном состоянии. Полная скорость распада

$$\Gamma(i \to f) = \frac{1}{2\varepsilon_i} \int \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2\varepsilon_j} (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_i - \sum_{j=1}^{n} p_j\right) |T_{fi}|^2 \Lambda, \quad (78.6)$$

где $\Lambda = \prod \frac{1}{m_i!}$ — статистический множитель, учитывающий присутствие m одинаковых частиц в конечном состоянии.

Если при распаде образуются две частицы с импульсами $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$ и энергиями ε_1', ε_2', то в системе покоя распадающейся частицы $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2' \equiv \mathbf{p}'$, $\varepsilon_1' + \varepsilon_2' = m$ и

$$d\Gamma(i \to f) = \frac{1}{(2\pi)^2} |T_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \frac{1}{4\varepsilon_1'\varepsilon_2'} \delta(\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2') \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - m)\, d^3p_1' d^3p_2'.$$

Интегрируя по d^3p_f' и используя представление $d^3p_1' = d^3p' = \mathbf{p}'^2 d|\mathbf{p}'| \times d\Omega' = |\mathbf{p}'| d\Omega' \varepsilon_1' \varepsilon_2' d(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')/(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$, находим

$$d\Gamma(i \to f) = \frac{|\mathbf{p}'|}{32\pi^2 m^2} |T_{fi}|^2 d\Omega', \qquad (78.7)$$

где $d\Omega'$ — телесный угол, в который попадают вылетающие частицы с импульсами $\mathbf{p}'$.

В случае *столкновения двух частиц* $a_1 + a_2 \to f$ с импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и энергиями ε_1, ε_2 сечение процесса дается формулой

$$d\sigma(i \to f) = w(i \to f) \frac{dN_f}{J_i}, \qquad (78.8)$$

где вероятность $w(i \to f)$ определяется формулой (78.3), dN_f описывает плотность конечных состояний (78.5), J_i — фактор потока налетающих частиц:

$$J_i = \rho_1 \rho_2 v = 2\varepsilon_1 2\varepsilon_2 \left| \frac{\mathbf{p}_1}{\varepsilon_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{\varepsilon_2} \right| = 4 |\mathbf{p}_1| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) =$$
$$= 4 \left[(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}. \qquad (78.9)$$

Выражение (78.9), где $\rho_1 = 2\varepsilon_1$, $\rho_2 = 2\varepsilon_2$ — плотности начального состояния, а v — относительная скорость между двумя частицами в начальном состоянии, справедливо в любой системе отсчета. Из (78.8), (78.3) и (78.9) находим

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 - p_f)}{4 \left[(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}} |\langle f | \hat{T} | i \rangle|^2 \prod_{j=1}^{n} \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2\varepsilon_j} \Lambda, \qquad (78.10)$$

где Λ — статистический множитель, как в (78.6).

Если в конечном состоянии имеется только две частицы, то выражение (78.10) можно упростить, проинтегрировав его по дельта-функциям. В результате получим

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |T_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}| \varepsilon^2} d\Omega', \qquad (78.11)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$ — полная энергия системы, $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}' \equiv \mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$ — начальный и конечный импульсы, $d\Omega'$ — телесный угол, в который попадают рассеянные частицы с импульсами $\mathbf{p}'$. Формулу (78.11) принято записывать через инвариантную величину

$$t \equiv (p_1 - p_1')^2 = m_1^2 + m_1'^2 - 2(p_1 p_1') = m_1^2 + m_1'^2 -$$
$$- 2\varepsilon_1 \varepsilon_1' + 2 |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_1'| \cos\theta, \qquad (78.12)$$

где θ — угол между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_1'$. В системе центра инерции импульсы $|\mathbf{p}|$ и $|\mathbf{p}'|$ определяются только полной энергией ε, и при заданном ε имеем

$$d\Omega' = -d\varphi\, d\cos\theta = \frac{d\varphi\, d(-t)}{2 |\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|},$$

где φ — азимутальный угол.

Из (78.11) следует, что

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi} |T_{fi}|^2 \frac{a(-t)}{J_i^2} \frac{d\varphi}{2\pi}. \qquad (78.13)$$

В общем случае T-матрица имеет структуру вида

$$T_{fi} = \bar{u}_1 \bar{u}_2 \ldots \hat{O} v_1 v_2 \ldots,$$

где v_1, v_2, ... и u_1, u_2, ... — амплитуды волновых функций начальных и конечных частиц, $\hat{O}$ — некоторая матрица по отношению к индексам компонент волновых функций всех частиц. В случае фермионов она содержит матрицы Паули σ [78.1.2].

78.1.2. Инвариантная теория возмущений. Теория возмущений в нерелятивистской формулировке [62.6] не удовлетворяет требованию релятивистской инвариантности. Это обстоятельство сильно усложняет

вычисления. В последовательной релятивистской теории возмущений (Фейнман, 1948—1949) исходят из формального представления S-матрицы в виде

$$\hat{S} = \hat{T} \exp\left\{-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}(t)\, dt\right\}. \qquad (78.14)$$

Ряду теории возмущений соответствует разложение

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \ \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \hat{T}\{\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2) \ \ldots \ \hat{V}(t_n)\}. \qquad (78.15)$$

Здесь символ $\hat{T}$ означает, что в каждой области значений переменных t_1, t_2, ..., t_n соответствующие операторы $\hat{V}(t_1)$, $\hat{V}(t_2)$, ..., $\hat{V}(t_n)$ следует располагать в хронологическом порядке справа налево в порядке возрастания значений t (Дайсон, 1949). Величина $\hat{T}$ есть хронологический оператор Дайсона (62.121а). Операторы $\hat{V}(t)$ в (78.15) имеют вид

$$\hat{V}(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t}, \qquad (78.16)$$

где $\hat{H}_0$ — невозмущенный гамильтониан системы, $\hat{V}$ — оператор взаимодействия, который явно не зависит от времени. Полный гамильтониан системы, очевидно,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}.$$

Рассеяние электрона на электроне. В случае электромагнитного поля [63.2.2; 77.3.2] имеем

$$\hat{V}(t) = e \int d^3x j^{\mu} A_{\mu}, \qquad (78.17)$$

где j^{μ} — оператор тока (63.55), содержащий в случае рассеяния электронов их Ψ-операторы (спиноры), A_{μ} — оператор, описывающий фотон. Пусть p_1 и p_2 — 4-импульсы электронов, а k — 4-импульс фотона. В первом порядке теории возмущений ($n = 1$ в (78.15)) учитываются три частицы — два электрона и один фотон. Закон сохранения энергии и импульса запрещает их взаимодействие. Так, сохранение 4-импульса означает, что $k = p_2 - p_1$ или $k = p_2 + p_1$. С другой стороны, для фотона $k^2 = 0$, а $(p_2 \pm p_1)^2 \neq 0$. Во втором порядке теории возмущений

$$\hat{S}^{(2)} = -\frac{e^2}{2!} \int d^4x\, d^4x' \hat{T}[j^{\mu}(x) A_{\mu}(x) j^{\nu}(x') A_{\nu}(x')]. \qquad (78.18)$$

Отсюда для матричных элементов между состояниями $|i\rangle = |p_1 p_2\rangle$, $|f\rangle = |p_3 p_4\rangle$ находим

$$S_{fi}^{(2)} = ie^2 \int d^4x\, d^4x' D_{\mu\nu}(x - x') \{(\bar{\Psi}_{p_4} \gamma^{\mu} \Psi_{p_2})(\bar{\Psi}'_{p_3} \gamma^{\nu} \Psi'_{p_1}) - (\bar{\Psi}_{p_4} \gamma^{\mu} \Psi_{p_1})(\bar{\Psi}_{p_3} \gamma^{\nu} \Psi'_{p_2})\}, \qquad (78.19)$$

где

$$D_{\mu\nu}(x - x') = i\langle 0 | \hat{T} A_{\mu}(x) A_{\nu}(x') | 0\rangle \qquad (78.20)$$

— так называемая *фотонная функция распространения (пропагатор)*, $|0\rangle$ — состояние фотонного вакуума. Здесь использованы представления волновых функций Ψ электронов, входящих в произведения $j = \bar{\Psi}\gamma\Psi$ в виде сумм

$$\Psi = \sum_{\mathbf{p}}{}' (a_{\mathbf{p}} \Psi_p + b_{\mathbf{p}}^{+} \bar{\Psi}_{-p}), \quad \bar{\Psi} = \sum_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{+} \bar{\Psi}_p + b_{\mathbf{p}} \Psi_{-p}), \qquad (78.21)$$

где $a_{\mathbf{p}}^{+}$ и $a_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения электрона с импульсом $\mathbf{p}$, $\langle 0 | a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{+} | 0\rangle = 1$, $b_{\mathbf{p}}^{+}(b_{\mathbf{p}})$ — операторы рождения (уничтожения) позитрона; p_1, p_2 и p_3, p_4 — 4-импульсы электронов до и после взаимодействия;

$$\langle p_3 p_4 | \hat{T}(j^{\mu}(x) j^{\nu}(x')) | p_1 p_2\rangle = \langle 0 | a_{p_3} a_{p_4} \hat{T}(j^{\mu}(x) j^{\nu}(x')) a_{p_2}^{+} a_{p_1}^{+} | 0\rangle,$$
$$\Psi \equiv \Psi(x), \quad \Psi' \equiv \Psi(x').$$

Воспользовавшись представлением для электронной волновой функции в виде плоской волны (63.44), (63.45),

$$\Psi_p = u_p e^{-ipx}, \quad \bar{u}_p u_p = 2m,$$

и представлением (78.2), для T-матрицы во втором порядке теории возмущений получим выражение

$$T_{fi}^{(2)} = e^2 \{(\bar{u}_{p_4} \gamma^{\mu} u_{p_2}) D_{\mu\nu}(p_4 - p_2)(\bar{u}_{p_3} \gamma^{\nu} u_{p_1}) - (\bar{u}_{p_4} \gamma^{\mu} u_{p_1}) D_{\mu\nu}(p_4 - p_1)(\bar{u}_{p_3} \gamma^{\nu} u_{p_2})\}, \qquad (78.22)$$

где

$$D_{\mu\nu}(k) = \int d^4\xi D_{\mu\nu}(\xi) e^{ik\xi}$$

— фотонный пропагатор в импульсном представлении. Он имеет вид

$$D_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} D(k^2) + k_{\mu} k_{\nu} D^{(e)}(k^2), \qquad (78.23)$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор ($g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$; $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$), D и $D^{(e)}$ — скалярные функции. В случае *калибровки Фейнмана* полагают $D^{(e)} = 0$ и

$$D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} D(k^2) = \frac{4\pi}{k^2 + i0} g_{\mu\nu}; \qquad (78.24)$$

для *калибровки Ландау* $D^{(e)} = -D/k^2$ и

$$D_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{k^2}\right), \qquad (78.25)$$

при этом $D_{\mu\nu} k^{\nu} = 0$, что эквивалентно калибровке Лоренца $A_{\mu} k^{\mu} = 0$. Таким образом, в случае калибровки Фейнмана для процесса рассеяния электронов,

$$e^{-}(p_1) + e^{-}(p_2) \to e^{-}(p_3) + e^{-}(p_4),$$

во втором порядке теории возмущений имеем

$$T_{fi}^{(2)} = e^2 \left\{\bar{u}_{p_4} \gamma^{\mu} u_{p_2} \frac{1}{(p_4 - p_2)^2} \bar{u}_{p_3} \gamma_{\mu} u_{p_1} - \bar{u}_{p_4} \gamma^{\mu} u_{p_1} \frac{1}{(p_4 - p_1)^2} \bar{u}_{p_3} \gamma_{\mu} u_{p_2}\right\}. \qquad (78.26)$$

Аналогично находятся T-матрицы процессов *рассеяния электрона на позитроне*,

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \to e^-(p_1') + e^+(p_2'),$$

$$T_{fi}^{(2)} = e^2 \left\{ \bar{u}_{p_1'} \gamma^\mu u_{p_1} \frac{1}{(p_1' - p_1)^2} \bar{u}_{p_2'} \gamma_\mu u_{p_2} - \right.$$

$$\left. - \bar{u}_{p_1'} \gamma^\mu u_{p_2} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}_{p_2'} \gamma_\mu u_{p_1} \right\}, \qquad (78.27)$$

и *электрона на мюоне*,

$$e^-(p_1) + \mu(p_2) \to e^-(p_1') + \mu(p_2'),$$

$$T_{fi}^{(2)} = e^2 \bar{u}_{p_1'} \gamma^\nu u_{p_1} \frac{1}{(p_1' - p_1)^2} \bar{u}_{p_2'} \gamma_\nu u_{p_2}. \qquad (78.28)$$

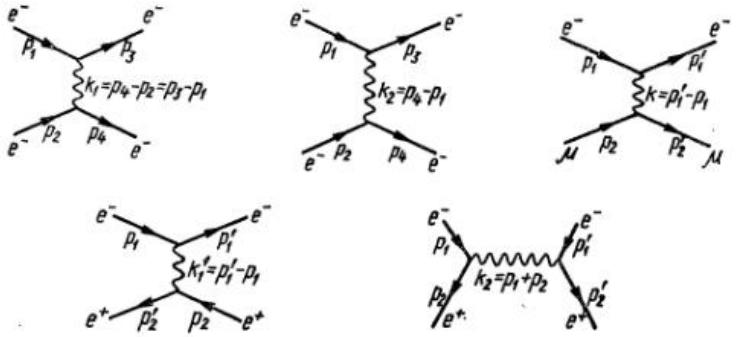


Рис. 78.1

Диаграммы Фейнмана этих процессов показаны на рис. 78.1. В соответствии с формулами (78.26) — (78.28) процессы e^-e^- и e^-e^+ описываются двумя слагаемыми, каждому из которых соответствует своя диаграмма. Подстановка T_{fi}^2 в формулу (78.13) дает дифференциальное сечение рассматриваемого процесса во втором порядке теории возмущений.

78.2. Калибровочные поля

78.2.1. Принципы квантования полей. Квантовая теория поля является физической теорией элементарных частиц и их взаимодействий. Поле представляет собой физическую систему с бесконечным числом степеней свободы. В классической физике оно описывается некоторой функцией $\Phi(\mathbf{x}, t) \equiv \Phi(x)$, зависящей от временной t и пространственных $\mathbf{x}$ координат. Эта функция может иметь несколько компонент, $\Phi_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ В теории поля величины $\Phi(x)$ считаются динамическими переменными. Они удовлетворяют вполне определенным уравнениям движения, которые задают свойства (специфику) поля. Современный формализм, позволяющий получать из самых общих представлений как уравнения движения, так и сохраняющиеся во времени величины, соответствующие свойствам инвариантности относительно трансляций [62.4.3], сдвига во времени [62.4.7] и вращений [62.4.4], основан на функции Лагранжа [7.2].

Функция Лагранжа L является функцией времени t и зависит от динамических переменных системы. В случае системы с конечным числом степеней свободы она записывается в виде суммы по всем материальным точкам системы. В случае волнового поля, характеризуемого бесконечным числом таких точек, эта сумма заменяется интегралом по пространственным переменным от *плотности функции Лагранжа* $\mathscr{L}(t, \mathbf{x})$:

$$L(t) = \int d^3x \mathscr{L}(t, \mathbf{x}). \qquad (78.29)$$

Функцию $\mathscr{L}(t, \mathbf{x}) \equiv \mathscr{L}(x)$ называют в теории поля *лагранжианом*. Уравнения движения могут быть получены с помощью **принципа наименьшего действия**, согласно которому реальное движение происходит таким образом, что действие

$$S = \int dt L(t) = \int dt d^3x \mathscr{L}(t, \mathbf{x}) = \int d^4x \mathscr{L}(x) \qquad (78.30)$$

оказывается экстремальным, т. е. его вариация обращается в нуль,

$$\delta S = 0. \qquad (78.31)$$

Постулируя, что уравнения движения должны представлять собой дифференциальные уравнения порядка не выше второго, приходим к заключению, что лагранжиан $\mathscr{L}$ должен быть функцией поля $\Phi(x)$ и первых производных $\partial_\mu \Phi(x)$, т. е. $\mathscr{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$. Здесь и далее будем использовать обозначения, принятые в теории поля ($\hbar = c = 1$):

метрический тензор

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (78.32а)$$

контравариантная координата

$$x \equiv x^\mu = (t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}), \qquad (78.32б)$$

ковариантная координата

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\mathbf{x}), \qquad (78.32в)$$

скалярное произведение

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A_\mu g^{\mu\nu} B_\nu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \qquad (78.32г)$$

4-импульс частицы массой m

$$p \equiv p^\mu = (E, \mathbf{p}) = (E, p_x, p_y, p_z), \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \qquad (78.32д)$$

производные

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \qquad (78.32е)$$

четырехмерная дивергенция

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}. \qquad (78.32ж)$$

В рассматриваемом случае действие имеет вид

$$S = \int d^4x \mathscr{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi), \tag{78.33}$$

и условие экстремума (78.31) приводит к *уравнению движения Эйлера — Лагранжа*

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi)} - \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \Phi} = 0, \tag{78.34}$$

которое определяет функцию поля $\Phi(x)$.

Для перехода к квантовой теории классическое поле $\Phi(x)$ должно быть проквантовано. Существует два эквивалентных метода квантования.

1. *Канонический формализм квантования.* Постулируется, что функция $\Phi(x)$ является оператором, который удовлетворяет следующим каноническим коммутационным соотношениям [62.1.2]:

$$\begin{aligned}[\pi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{x}', t)] &= -i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),\\ [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] &= [\Phi(\mathbf{x}, t), \Phi(\mathbf{x}', t)] = 0,\end{aligned} \tag{78.35}$$

где $[A, B] \equiv AB - BA$, $\pi(\mathbf{x}, t) \equiv \pi(x)$ — сопряженный импульс,

$$\pi(x) = \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta (\partial_0 \Phi)}. \tag{78.36}$$

Гамильтониан системы

$$\hat{H} = \int d^3x [\pi(x) \partial_0 \Phi(x) - \mathscr{L}(x)] \tag{78.37}$$

задает ее динамику с помощью уравнений временной эволюции

$$\begin{aligned}\partial_0 \Phi(\mathbf{x}, t) &= i[\hat{H}, \Phi(\mathbf{x}, t)],\\ \partial_0 \pi(\mathbf{x}, t) &= i[\hat{H}, \pi(\mathbf{x}, t)].\end{aligned} \tag{78.38}$$

Пример 1. Свободное скалярное поле.

Лагранжиан поля

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}[(\partial_\lambda \Phi)(\partial^\lambda \Phi) - \mu^2 \Phi^2]. \tag{78.39}$$

Из (78.34) следует уравнение Клейна—Гордона [63.1]

$$(\partial^2 + \mu^2)\Phi(x) = 0. \tag{78.40}$$

Сопряженный импульс $\pi(x) = \partial_0 \Phi(x)$ и гамильтониан $\hat{H}_0$ имеет вид

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\int d^3x [(\partial_0 \Phi)^2 + (\nabla \Phi)^2 + \mu^2 \Phi^2]. \tag{78.41}$$

Решение уравнения (78.40) дается представлением

$$\Phi(x) = \int \frac{d^3k}{[(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2}} \left[a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{kx} - \omega_k t)} + a^+(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{kx} - \omega_k t)} \right], \tag{78.42}$$

где $\omega_k = (k^2 + \mu^2)^{1/2}$, коэффициенты разложения $a(\mathbf{k})$ и $a^+(\mathbf{k})$ называются *операторами уничтожения и рождения* частицы (кванта скалярного поля) с импульсом $\mathbf{k}$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^+(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = 0. \tag{78.43}$$

Гамильтониан $\hat{H}_0$ (78.41) выражается через операторы a^+ и a с помощью выражения

$$\hat{H}_0 = \int d^3k \omega_k a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \tag{78.44}$$

из которого следует, что a^+a есть оператор числа частиц в системе, а гамильтониан $\hat{H}_0$ описывает систему невзаимодействующих частиц.

Если $|0\rangle$ — состояние, в котором нет частиц (вакуум), то одночастичное состояние с импульсом $\mathbf{k}$ можно получить действием оператора рождения на вакуумное состояние:

$$|\mathbf{k}\rangle = [(2\pi)^3 2\omega_k]^{1/2} a^+(\mathbf{k})|0\rangle, \quad \langle \mathbf{k}'|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \tag{78.45}$$

Функция распространения кванта скалярного поля массой μ (фейнмановский пропагатор [78.1.2]) определяется вакуумным средним хронологического произведения двух полей:

$$\begin{aligned}i\Delta(x_1 - x_2) \equiv \langle 0|\hat{T}(\Phi(x_1)\Phi(x_2))|0\rangle &= \theta(t_1 - t_2)\langle 0|\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle +\\ + \theta(t_2 - t_1)\langle 0|\Phi(x_2)\Phi(x_1)|0\rangle &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i0} e^{ik(x_1 - x_2)},\end{aligned} \tag{78.46}$$

где $\theta(t) = 1$ при $t > 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ (функция Хевисайда или ступенька).

Пример 2. Скалярное поле со взаимодействием $\lambda\Phi^4$ (модель Φ^4). Лагранжиан поля

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\lambda \Phi)(\partial^\lambda \Phi) - \mu^2 \Phi^2] - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4, \quad \mathscr{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}\Phi^4. \tag{78.47}$$

Уравнение движения

$$(\partial^2 + \mu^2)\Phi(x) = -\frac{\lambda}{3!}\Phi^3(x). \tag{78.48}$$

Гамильтониан системы $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$, где $\hat{H}_0$ есть (78.41),

$$\hat{H}_I = \int d^3x \mathscr{H}_I(\Phi), \quad \mathscr{H}_I(\Phi) = \frac{\lambda}{4!}\Phi^4, \tag{78.49}$$

есть гамильтониан взаимодействия. Используя решение (78.42) невозмущенной задачи, можно при малых значениях параметра λ найти решение уравнения (78.48) путем последовательного разложения по степеням λ.

Пример 3. Свободное поле Дирака (поле фермионов с массой m). Лагранжиан

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x), \tag{78.50}$$

где $\Psi(x)$ — операторы поля, γ^μ — матрицы Дирака (63.48). Из (78.34) и (78.50) следует уравнение Дирака (63.47)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0. \tag{78.51}$$

Сопряженный импульс $\pi(x) = i\Psi^+(x)$ и операторы поля $\Psi(x)$ удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\{\Psi(\mathbf{x}, t), \Psi^+(\mathbf{x}', t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$
$$\{\Psi(\mathbf{x}, t), \Psi(\mathbf{x}', t)\} = \{\Psi^+(\mathbf{x}, t), \Psi^+(\mathbf{x}', t)\} = 0, \qquad (78.52)$$

где $\{A, B\} = AB + BA$. Фейнмановский пропагатор

$$iS_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} \equiv \langle 0 | \hat{T}(\Psi_\alpha(x_1)\,\overline{\Psi}_\beta(x_2)) | 0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{i}{\hat{k} - m + i0}\right)_{\alpha\beta} e^{-ik(x_1 - x_2)}. \qquad (78.53)$$

2. *Квантование с использованием формализма фейнмановских функциональных интегралов.* В этом подходе матричный элемент перехода между начальным и конечным состояниями выражается непосредственно через сумму вкладов по всем возможным траекториям между начальным и конечным состоянием, взятых с весовыми множителями в виде экспонент от действия, умноженного на i ($\hbar = 1$) для каждой траектории. Так, в случае одномерного движения матричный элемент перехода между начальным $|q, t\rangle$ и конечным $|q', t'\rangle$ состояниями определяется функциональным интегралом вида

$$\langle q', t' | q, t\rangle \equiv \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q\rangle =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{m}{2\pi i\delta t}\right)^{n/2}\int\prod_{t}^{t'-\delta t} dq_t \exp\left(i\sum_{i=1}^{n}\delta t\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_t - q_{t-1}}{\delta t}\right)^2 - V\right]\right) \equiv$$
$$\equiv N\int [dq]\exp\left\{i\int_t^{t'} d\tau L(q, \dot{q})\right\}, \quad L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q), \qquad (78.54)$$

где L — лагранжиан, N — нормировочный множитель, $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ — гамильтониан системы, $[dq]$ означает предел, к которому стремится произведение $dq_1 \ldots dq_{n-1}$ при уменьшении временных отрезков $\delta t = (t' - t)/n$ к нулю при $n \to \infty$.

В теории поля важно уметь вычислять так называемые *функции Грина*. Простейшая двухточечная функция Грина определяется равенством

$$G(t_1, t_2) = \langle 0 | \hat{T}(Q(t_1)\,Q(t_2)) | 0\rangle, \qquad (78.55)$$

где $|0\rangle$ — основное состояние, $Q(t)$ — оператор координаты q частицы,

$$Q(t) = e^{iHt}\hat{Q}e^{-iHt}, \quad \hat{Q}|q\rangle = q|q\rangle,$$

$\hat{T}$ — хронологический оператор Дайсона. С помощью функциональных интегралов функция Грина (78.55) может быть записана в виде

$$G(t_1, t_2) = \lim_{\substack{t'\to-i\infty\\ t\to i\infty}} \frac{\langle q', t' | \hat{T}(Q(t_1)\,Q(t_2)) | q, t\rangle}{\langle q', t' | q, t\rangle} =$$
$$= \lim_{\substack{t'\to-i\infty\\ t\to i\infty}} \frac{1}{\langle q', t' | q, t\rangle}\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] q(t_1)\,q(t_2)\exp\left(i\int_t^{t'} d\tau\,[p\dot{q} - H(p, q)]\right), \qquad (78.56)$$

где фактор $\langle q', t' | q, t\rangle$ равен (78.54). Это представление обобщается на случай n-точечной функции Грина

$$G(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \langle 0 | \hat{T}(q(t_1)\,q(t_2)\ldots q(t_n)) | 0\rangle =$$
$$= \lim_{\substack{t'\to-i\infty\\ t\to i\infty}} \frac{1}{\langle q', t' | q, t\rangle}\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right] q(t_1)\,q(t_2)\ldots q(t_n)\times$$
$$\times\exp\left(i\int_t^{t'} d\tau\,[p\dot{q} - H(p, q)]\right). \qquad (78.57)$$

Эта функция Грина может быть получена с помощью *производящей функции*

$$W[J] = \lim_{\substack{t'\to-i\infty\\ t\to i\infty}} \frac{1}{\langle q', t' | q, t\rangle}\int\left[\frac{dqdp}{2\pi}\right]\times$$
$$\times\exp\left(i\int_t^{t'} d\tau\,[p\dot{q} - H(p, q) + J(\tau)\,q(\tau)]\right) \qquad (78.58)$$

по формуле

$$G(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{(-i)^n\delta^n W[J]}{\delta J(t_1)\,\delta J(t_2)\ldots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0}. \qquad (78.59)$$

Физический смысл производящей функции $W[J]$ состоит в том, что она соответствует амплитуде перехода между основным состоянием в момент времени t и основным состоянием в момент t' в присутствии внешнего источника $J(\tau)$:

$$W[J] = \langle 0 | 0\rangle_J. \qquad (78.60)$$

Обобщение формулы (78.58) на случай N степеней свободы имеет вид

$$W[J_1, \ldots, J_N] \sim \lim_{\substack{t'\to-i\infty\\ t\to i\infty}}\int\prod_{i}^{N}[dq_i dp_i]\exp\left(i\int_t^{t'} d\tau\left[\sum_i^N p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i) + \sum_i^N J_i q_i\right]\right) \sim \lim_{\substack{t'\to-i\infty\\ t\to i\infty}}\int\prod_{i}^{N}[dq_i]\times$$
$$\times\exp\left(i\int_t^{t'} d\tau\left[L(q_i, \dot{q}_i) + \sum_i^N J_i q_i\right]\right) \qquad (78.61)$$

Рассматривая поле как квантовомеханическую систему с бесконечным числом степеней свободы, из (78.61) получаем

$$W[J] \sim \int [d\Phi d\pi]\exp\left(i\int d^4x\,[\pi(x)\,\partial_0\Phi(x) - \mathscr{H}(\pi, \Phi) + J(x)\,\Phi(x)]\right) \sim \int [d\Phi]\exp\left(i\int d^4x\,[\mathscr{L}(\Phi(x)) + J(x)\,\Phi(x)]\right), \qquad (78.62)$$

где $\pi(x)$, $\mathscr{L}(\Phi(x))$ и $\mathscr{H}(\pi, \Phi)$ — импульс, канонически сопряженный полю $\Phi(x)$, лагранжева плотность (лагранжиан) и гамильтонова плотность соответственно. В этом случае $W[J]$ есть амплитуда вакуум-вакуумного перехода в присутствии внешнего источника $J(x)$.

Отметим, что нефизические пределы $t' \to -i\infty$, $t \to i\infty$ имеют смысл в евклидовом пространстве, где время t заменяется на $-it$. Производящий функционал, в котором выполнена такая замена, называют *евклидовым* и обозначают $W_E[J]$.

Пример 4. Модель Φ^4.

Евклидов производящий интеграл скалярного поля с взаимодействием $\lambda\Phi^4$, описываемого лагранжианом (78.47), определяется формулой

$$W_E[J] = \int [d\Phi] \exp\left(-\int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\mu^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\Phi^4 + J\Phi\right]\right). \qquad (78.63)$$

Пример 5. Поле фермионов.

Производящий функционал системы фермионов имеет вид

$$W[\eta, \bar{\eta}] = \int [d\Psi(x)][d\bar{\Psi}(x)] \exp\left(i\int d^4x [\mathscr{L}(\Psi, \bar{\Psi}) + \bar{\Psi}\eta + \bar{\eta}\Psi]\right), \qquad (78.64)$$

где $\Psi(x)$, $\bar{\Psi}(x)$ и $\eta(x)$, $\bar{\eta}(x)$ — классические фермионные поля и поля источников. Поля источников удовлетворяют антикоммутационным соотношениям, подобным (78.52):

$$\{\eta(x), \eta(x')\} = \{\eta(x), \bar{\eta}(x')\} = \{\bar{\eta}(x), \bar{\eta}(x')\} = 0. \qquad (78.65)$$

78.2.2. Электромагнитное поле как калибровочное. В последнее время в физике частиц был достигнут большой прогресс, обусловленный в значительной мере использованием в теории **принципа калибровочной симметрии**. В соответствии с этим принципом считается, что *сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия являются калибровочными взаимодействиями*. При этом обнаруживается, что определенный класс релятивистских теорий поля, использующих принцип калибровочной симметрии и называемых калибровочными теориями, приводит к таким необычным свойствам, как явление Хиггса [78.2.4], асимптотическая свобода [78.4.1], удержание кварков [78.4.2], различные аномалии, которые позволяют понять природу взаимодействий элементарных частиц на более глубоком (фундаментальном уровне).

В качестве аксиом калибровочные теории принимают **принципы локальности, причинности, перенормируемости**. Важной особенностью этих теорий является то, что они полностью согласуются с ранее установленными принципами теории относительности и квантовой механики. Есть все основания полагать, что калибровочные теории дают полное и правильное описание всей негравитационной физики.

Простейшим примером калибровочной теории является квантовая электродинамика (КЭД). Лагранжиан (78.50) свободного электронного поля $\Psi(x)$ является инвариантным относительно изменений фазы поля

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{-i\alpha}\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\Psi}(x). \qquad (78.66)$$

В этом случае параметр α не зависит от координаты x пространства и о лагранжиане (78.50) говорят, что он обладает глобальной $U(1)$-симметрией [62.4.1; 78.2.3]. Преобразование (78.66) отражает физический закон сохранения электрического заряда, несущего полем $\Psi(x)$ [62.4.2]. Преобразование (78.66) называется *глобальным фазовым преобразованием*. Фазовое преобразование называется *локальным*, если параметр α в (78.66) зависит от пространственно-временных точек x:

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\Psi(x), \quad \bar{\Psi}(x) \to \bar{\Psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\Psi}(x). \qquad (78.67)$$

Это преобразование соответствует предположению о том, что произвол в выборе фазового множителя у волновой функции поля физической системы может иметь локальный характер.

Относительно преобразований (78.67) лагранжиан (78.50) не инвариантен. Инвариантность можно восстановить, если ввести в рассмотрение дополнительное векторное поле A_μ, преобразующееся одновременно с (78.67) по закону

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \qquad (78.68)$$

а производные ∂_μ заменить на калибровочно-ковариантную производную D_μ с законом преобразования для $D_\mu\Psi(x)$ вида

$$D_\mu\Psi(x) \to [D_\mu\Psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\Psi(x), \qquad (78.69)$$

т. е. действие калибровочно-ковариантной производной на поле не должно изменять его трансформационных свойств. Ковариантная производная однозначно связана с векторным полем A_μ:

$$D_\mu\Psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi. \qquad (78.70)$$

Величина e является свободным параметром теории. Векторное поле A_μ называют *калибровочным полем*, а выражение (78.70) — *удлиненной производной*.

Кроме указанных замен к лагранжиану (78.50) следует добавить слагаемое, описывающее свободное поле

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (78.71)$$

Это выражение калибровочно-инвариантно, так как $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$.

В результате приходим к *лагранжиану КЭД*:

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \qquad (78.72)$$

Из (78.72) следует, что поле A_μ является безмассовым. Его отождествляют с электромагнитным полем, а параметр e — с электрическим зарядом. Электромагнитное поле, введенное через ковариантные производные (78.70), выступает как калибровочное поле, компенсирующее изменение калибровки электронного поля $\Psi(x)$. Переход от лагранжиана (78.50) к лагранжиану КЭД (78.72) приводит к появлению взаимодействия исходного поля Ψ с калибровочным полем A_μ, т. е. к взаимодействию электрона с фотоном. Взаимодействие, введенное в теорию с помощью ковариантных производных $D_\mu\Psi$ (78.70), называется *минимальным электромагнитным взаимодействием*. Другие калибровочно-инвариантные взаимодействия более высокой размерности, такие, как $\bar{\Psi}\sigma_{\mu\nu}\Psi F^{\mu\nu}$, отбрасываются требованием перенормируемости КЭД. Лагранжиан (78.72) не содержит слагаемого, соответствующего самодействию калибровочного поля, так как фотон не обладает зарядом.

78.2.3. Поля Янга — Миллса. КЭД является *абелевой калибровочной теорией*. Это означает, что фазовые преобразования $\hat{U} = \exp(i\alpha)$ образуют *группу* $U(1)$, элементы которой подчиняются условию унитарности (62.79) и обладают свойством коммутативности: $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i\beta}e^{i\alpha}$. В общем случае *унитарная группа* $U(n)$ состоит из множества унитарных матриц размером $n \times n$, которые не обладают коммутативностью

по отношению к их перемножению. В этом случае говорят, что группа $U(n)$ является *неабелевой*, а соответствующие симметрии — *неабелевыми симметриями*. Важным примером неабелевой группы является группа унитарных матриц $n \times n$, определитель которых равен единице. Эта группа называется *специальной унитарной группой* $SU(n)$.

Принцип калибровочной симметрии можно распространить на неабелевы симметрии (Янг, Миллс, 1954). Простейшей из них является группа симметрии изоспина $SU(2)$. *Локальному* $SU(2)$*-преобразованию симметрии* соответствует операция

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \hat{U}(\theta)\,\Psi(x), \tag{78.73}$$

где

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}(\theta) = \exp\left(-\frac{i\,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}(x)}{2}\right). \tag{78.74}$$

Здесь Ψ есть фермионное поле, являющееся изоспиновым дублетом, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ — зарядовые матрицы (63.8) (матрицы Паули), удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[\tau_i, \tau_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\tau_k; \quad i, j, k = 1, 2, 3, \tag{78.75}$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор Леви — Чивиты;

$$\varepsilon_{123} = -1, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{78.76}$$

— параметры преобразования из группы $SU(2)$, которые предполагаются зависящими от пространственно-временных точек x.

Свободный лагранжиан (78.50) инвариантен относительно *глобальных* $SU(2)$-преобразований (когда θ не зависит от x) и не инвариантен относительно локальных преобразований. Эту инвариантность можно восстановить, если подобно абелевому случаю [78.2.2] ввести *векторное калибровочное поле* A^i_μ, $i = 1, 2, 3$, и определить минимальное взаимодействие с помощью ковариантной производной D_μ согласно правилу

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - ig\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{A}_\mu}{2}\right)\Psi, \tag{78.77}$$

где $\mathbf{A}_\mu = (A^1_\mu, A^2_\mu, A^3_\mu)$, g — константа связи, аналогичная e в (78.70). Из трансформационного свойства

$$D_\mu \Psi \to (D_\mu \Psi)' = \hat{U}(\theta)\, D_\mu \Psi \tag{78.78}$$

следует условие преобразования для калибровочных полей A_μ:

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}'_\mu = \frac{1}{2}\hat{U}(\theta)(\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}_\mu)\hat{U}^{-1}(\theta) - \frac{i}{g}[\partial_\mu \hat{U}(\theta)]\hat{U}^{-1}(\theta). \tag{78.79}$$

При $\theta(x) \ll 1$ преобразование (78.74) является инфинитезимальным [62.4.1],

$$\hat{U}(\theta) \approx 1 - \frac{i}{2}\boldsymbol{\tau}\theta(x), \tag{78.80}$$

и выражение (78.79) принимает вид

$$A^i_\mu \to A^{i'}_\mu = A^i_\mu + \varepsilon^{ijk}\theta^j A^k_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^i, \quad \varepsilon^{123} = +1. \tag{78.81}$$

Второе слагаемое показывает, что в отличие от абелева калибровочного поля A_μ (78.68) неабелево поле A^i_μ несет заряды.

Полный калибровочно-инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие между калибровочными полями A^i_μ и полями Ψ, составляющими $SU(2)$-дублет (78.74), дается выражением

$$\mathscr{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}, \tag{78.82}$$

где

$$F^i_{\mu\nu} = \partial_\mu A^i_\nu - \partial_\nu A^i_\mu + g\varepsilon^{ijk}A^j_\mu A^k_\nu, \tag{78.83}$$

а $D_\mu \Psi$ есть (78.77). Закон преобразования тензора $F^i_{\mu\nu}$ имеет вид

$$(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}'_{\mu\nu})\hat{U}(\theta)\Psi = \hat{U}(\theta)(\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu})\Psi. \tag{78.84}$$

При инфинитезимальных преобразованиях (78.80) он сводится к условию

$$F^i_{\mu\nu} \to F^{i'}_{\mu\nu} = F^i_{\mu\nu} + \varepsilon^{ijk}\theta^j F^k_{\mu\nu}. \tag{78.85}$$

Тензор $F^i_{\mu\nu}$ определяется следующим квадратичным по D_μ выражением:

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\Psi \equiv ig\left(\frac{\boldsymbol{\tau}^i F^i_{\mu\nu}}{2}\right)\Psi. \tag{78.86}$$

Калибровочное поле A^i_μ называется *полем Янга — Миллса*. Оно может быть простым способом обобщено на группы больших размерностей. Так, для $SU(3)$-группы число компонент поля Янга — Миллса равно $i = 1, 2, \ldots, 8$, а генераторы группы τ_i являются матрицами представления, к которому принадлежит мультиплет Ψ, и могут быть выражены через единичный антисимметричный тензор ε:

$$\tau_k = 2t_k, \quad (t_k)_{ab} = -i\varepsilon_{kab}.$$

Согласно (78.82) инвариантный *лагранжиан свободного поля Янга — Миллса* имеет вид

$$\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^{i\mu\nu}. \tag{78.87}$$

Он содержит слагаемые трилинейные и четырелинейные по A^i_μ, которые соответствуют самодействиям неабелевых калибровочных полей. Подобно электромагнитному полю, поля Янга — Миллса являются безмассовыми. Число безмассовых калибровочных полей равно числу генераторов группы калибровочной симметрии [62.4.1].

Требование локальной симметрии приводит к возникновению в теории безмассовых векторных частиц — квантов калибровочных полей.

Калибровочная инвариантность теории отражает тот факт, что на динамические переменные рассматриваемой системы наложены связи. Это означает, что среди них есть переменные, которые не соответствуют истинным динамическим степеням свободы. Фиктивные степени свободы можно устранить с помощью надлежащего выбора условия, фиксирующего калибровку. Наиболее простым и прямым способом квантования в неабелевых калибровочных теориях является формализм функциональных интегралов [78.2.1]. В формализме квантования с помощью функциональных интегралов интегрирование производится с учетом ограничений, соответствующих калибровочному условию. Последовательный учет этих ограничений и квантование полей неабеле-

вой теории выполнили Л. Д. Фаддеев и В. Н. Попов (1967). Их метод состоит во введении в классический лагранжиан (78.82) Янга — Миллса дополнительных скалярных ферми-полей $c_\alpha(x)$, взаимодействующих с полями A^i_μ. Поля $c_\alpha(x)$ называют *духами Фаддеева — Попова*. В диаграммах теории возмущений духовые частицы содержатся лишь в промежуточных состояниях в виде замкнутых петель на диаграммах Фейнмана. Они компенсируют соответствующие вклады от нефизической бесспиновой продольной составляющей четырехвекторного поля A^l_μ и восстанавливают унитарность S-матрицы в пространстве физических состояний.

78.2.4. Спонтанное нарушение калибровочной симметрии. Свободное калибровочное поле является безмассовым [78.2.2; 78.2.3]. Это свойство существенно ограничивает возможности использования калибровочных моделей взаимодействия полей. Единственным безмассовым векторным полем, встречающимся в природе, является электромагнитное поле A_μ. Для того чтобы сделать калибровочное поле массовым, т. е. ввести в теорию массивные векторные бозоны, необходимо нарушить ее калибровочную симметрию. Механизм, позволяющий ввести массу в калибровочное поле, взаимодействующее с некоторым скалярным полем, описывающим реальные частицы, называется *спонтанным (самопроизвольным) нарушением симметрии*. Говорят, что система находится в состоянии со спонтанно нарушенной симметрией, если это состояние является устойчивым и характеризуется более низкой симметрией по сравнению с симметрией уравнений движения и граничных условий. Другими словами, такое реальное физическое состояние системы, отвечающее частному решению уравнений движения, не имеет той симметрии, которой обладают сами уравнения (и ее лагранжиан). Спонтанное нарушение симметрии имеет два главных свойства: 1) оно всегда вырождено, т. е. несколько состояний имеют одну и ту же энергию; 2) изменение какого-либо параметра системы (температуры, давления и т. п.) может его снять. Состояние со спонтанно нарушенной симметрией возникает тогда, когда в наиболее низком симметричном состоянии система не обладает минимально возможной энергией. Сколь угодно малое возмущение переводит ее в энергетически более выгодное состояние, которое, однако, не является симметричным по отношению к рассматриваемому преобразованию.

Механизм возникновения массового поля в результате спонтанного нарушения симметрии можно проследить на простом примере абелевой калибровочной теории с группой симметрии $U(1)$ [78.2.2]. Рассмотрим лагранжиан вида

$$\mathscr{L} = (D_\mu \Phi)^+ (D^\mu \Phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V(\Phi), \tag{78.88}$$

где

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\Phi, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{78.89}$$

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^+ \Phi + \lambda (\Phi^+ \Phi)^2. \tag{78.90}$$

Поля $\Phi(x)$ и $A_\mu(x)$ инвариантны относительно локальных калибровочных преобразований

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \Phi(x),$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x). \tag{78.91}$$

При $\mu^2 > 0$ минимум потенциала (78.90), определяемый условием $\partial V(\Phi)/\partial\Phi = 0$, находится в точке (рис. 78.2)

$$|\Phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad v \equiv (\mu^2/\lambda)^{1/2}. \tag{78.92}$$

На языке теории квантовых полей основное состояние является вакуумом. Классические поля, отвечающие состоянию (78.92), представляют собой среднее значение оператора Φ по состояниям вакуума $|0\rangle$:

$$|\langle 0|\Phi|0\rangle| = v/\sqrt{2}. \tag{78.93}$$

Заметим, что при $\mu^2 < 0$ потенциал $V(\Phi)$ (78.90) имеет один минимум в точке $\Phi = 0$, соответствующий основному состоянию, инвариантному относительно преобразования (78.91) для Φ. Поле Φ для $\mu^2 > 0$ можно выразить через два вещественных поля $\eta(x)$ и $\xi(x)$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} |v + \eta(x)| e^{i\xi(x)/v} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta(x) + i\xi(x) + \ldots]. \tag{78.94}$$

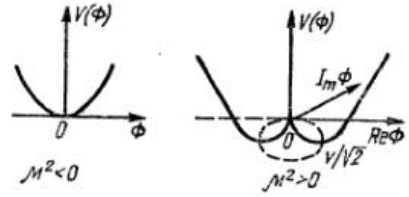


Рис. 78.2

Эти поля выберем так, что

$$\langle 0|\eta(x)|0\rangle = v, \quad \langle 0|\xi(x)|0\rangle = 0. \tag{78.95}$$

Это означает, что поле $\eta(x)$ является полем скалярного мезона с массой $m = \sqrt{2}\mu$, а поле $\xi(x)$ безмассовое. Слагаемое $|D_\mu \Phi|^2$ в (78.88) приводит к появлению в лагранжиане $\mathscr{L}$ слагаемого $gvA^\mu \partial_\mu \xi$, в котором поля A_μ и ξ смешаны. Для устранения этого слагаемого произведем преобразование, исключающее поле $\xi(x)$. Это преобразование называется *унитарной калибровкой* и сводится к введению нового поля

$$B_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{gv} \partial_\mu \xi(x). \tag{78.96}$$

Используя (78.94) и (78.96), лагранжиан (78.88) можно свести к виду

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_I, \tag{78.97}$$

где

$$\mathscr{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2}(gv)^2 B_\mu B^\mu, \tag{78.98}$$

$$\mathscr{L}_I = \frac{1}{2} g^2 B_\mu B^\mu \eta (2v + \eta) - \lambda v^2 \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4, \tag{78.99}$$

из которого следует, что $\mathscr{L}_0$ является свободным лагранжианом векторного бозона с массой $M = gv$ и скалярного мезона с массой $m = \sqrt{2}\mu$. Массивному бозону соответствует калибровочное поле B_μ с тремя состояниями поляризации, а скалярному мезону — одно поле η. До спонтанного нарушения симметрии было два скалярных поля η и ξ и одно калибровочное поле A_μ, соответствующее безмассовому бозону, с двумя состояниями поляризации. Таким образом, в результате всех преобразований число степеней свободы системы не изменилось. Объе-

динение безмассового калибровочного поля A_μ с безмассовым скалярным полем ξ привело к массивному векторному полю B_μ (78.96). При этом поле ξ исчезло из лагранжиана. Появление поля ξ на промежуточном этапе объясняется **теоремой Голдстоуна**, согласно которой *спонтанное нарушение симметрии связано с существованием безмассовых бесспиновых частиц* (Намбу, 1960; Голдстоун, 1961). Эти скалярные частицы называют *бозонами Намбу — Голдстоуна* или *голдстоуновскими бозонами*. Процесс превращения безмассового калибровочного поля в массивное поле с одновременным исчезновением голдстоуновских бозонов называется *эффектом (или механизмом) Хиггса* (1964). Поле $\xi(x)$ называется *несостоявшимся голдстоуновским бозоном*, поле $\eta(x)$ — *полем Хиггса*, а соответствующий ему скалярный мезон — *хиггсовым бозоном*.

Механизм Хиггса непосредственно обобщается на случай неабелевых калибровочных полей Янга—Миллса [78.2.3]. Так, в случае $SU(2)$-теории появляются массивный хиггсовый бозон и три массивных векторных поля как результат объединения трех безмассовых калибровочных бозонов с тремя несостоявшимися голдстоуновскими бозонами.

Механизм Хиггса нарушения симметрии используется в стандартной теории электрослабых взаимодействий [78.3].

78.3. Теория электрослабых взаимодействий

В слабых взаимодействиях участвуют массивные промежуточные векторные бозоны. Наличие в выражении (77.24), описывающем слабые взаимодействия, размерной константы G (77.27) (ее размерность (масса)$^{-2}$) делает теорию неперенормируемой. Расчет вероятности процессов методом теории возмущений [78.1] даже при малых G не приводит к хорошему результату, так как чем выше порядок используемого приближения, тем сильнее расходимость соответствующих выражений. Последние нельзя собрать в отдельные слагаемые — полевые добавки к исходным затравочным (голым) параметрам — так, как это делается в КЭД [77.3.2]. Другим недостатком взаимодействия (77.24) является то, что оно даже в самом низком порядке теории возмущений приводит к неверному поведению сечений процессов σ в области высоких энергий. Так, для упругого процесса $e + \nu_e \to e + \nu_e$ в системе центра масс имеем

$$\sigma = \frac{4}{\pi} G^2 k^2 \text{ для } k^2 \gg m_e^2, \tag{78.100}$$

где k — импульс относительного $e\nu_e$-движения. С другой стороны, из самых общих представлений следует, что сечение процесса рассеяния точечных частиц ограничено величиной (условие унитарности)

$$\sigma < \pi/2k^2. \tag{78.101}$$

Поэтому при $k^4 \approx \pi^2/8G^2$, т. е. $k \approx 300$ ГэВ/с, сечение (78.100), вычисленное на основе взаимодействия (77.24), нарушает условие унитарности (78.101)

Исследования показали, что эти две проблемы тесно связаны между собой: нарушение унитарности при высоких энергиях в низших порядках теории возмущений приводит к неперенормируемости выражений более высокого порядка, так как вклады высоких порядков являются интегралами от выражений, соответствующих низшим порядкам.

Эти противоречия теории были разрешены в калибровочных теориях со спонтанным нарушением симметрии. Оказалось, что в перенормируемой теории слабые взаимодействия объединяются с электромагнетизмом. Калибровочной группой симметрии в единой теории является группа, объединяющая $SU(2)$ и $U(1)$ в одну группу, обозначаемую $SU(2) \times U(1)$ [78.2.3].

Идея объединения слабых и электромагнитных взаимодействий принадлежит Швингеру (1957). Модель с калибровочной $SU(2) \times U(1)$-симметрией предложил Глэшоу (1961). Теория Глэшоу неперенормируема, в ней массы промежуточных векторных бозонов вводятся как дополнительные параметры. Перенормируемую теорию с массами, возникающими за счет механизма Хиггса [78.2.4], построили Вайнберг (1967) и независимо Салам (1968). Теория, основанная на идее промежуточных бозонов как квантов неабелева калибровочного поля с $SU(2) \times U(1)$-симметрией, называется стандартной теорией электрослабого взаимодействия. Перенормируемость калибровочных теорий со спонтанным нарушением симметрии доказал т'Хоофт (1973, 1974). Стандартную теорию принято называть *моделью Вайнберга — Салама* (или *Глэшоу — Вайнберга — Салама*).

В модели Вайнберга — Салама полный лагранжиан взаимодействия калибровочных бозонов $W^\pm$, Z^0 с лептонами и адронами (кварками) имеет вид

$$\mathscr{L}_I = \mathscr{L}_e + \mathscr{L}_e^0 + \mathscr{L}_h + \mathscr{L}_h^0, \tag{78.102}$$

где

$$\mathscr{L}_e = M_W \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, e W_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, \nu_e W_\mu^-] + \\ + \text{мюонные слагаемые} + \tau\text{-лептонные слагаемые} \tag{78.103}$$

— заряженное слабое лептонное взаимодействие;

$$\mathscr{L}_e^0 = -\sqrt{2} M_Z \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} \left[\bar{e}\gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5)\, e + \frac{1}{2}\, \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, \nu_e + \right. \\ \left. + \text{мюонные слагаемые} + \tau\text{-лептонные слагаемые}\right] Z_\mu \tag{78.104}$$

— нейтральное слабое лептонное взаимодействие;

$$\mathscr{L}_h = M_W \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} \{[\bar{u}\gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, (\cos\theta_c d + \sin\theta_c s) + \\ + \bar{c}\gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, (\cos\theta_c s - \sin\theta_c d)]\, W_\mu^+ + [(\cos\theta_c \bar{d} + \sin\theta_c \bar{s})\, \gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, u + \\ + (\cos\theta_c \bar{s} - \sin\theta_c \bar{d})\, \gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, c]\, W_\mu^-\} \tag{78.105}$$

— заряженное слабое адронное взаимодействие;

$$\mathscr{L}_h^0 = \sqrt{2} M_Z \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} \left[\bar{u}\gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\gamma_5\right) u + \right. \\ + \bar{c}\gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}\gamma_5\right) c + \bar{d}\gamma^\mu \left(\frac{2}{3}\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5\right) d + \\ \left. + \bar{s}\gamma^\mu \left(\frac{2}{3}\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5\right) s\right] Z_\mu \tag{78.106}$$

— нейтральное слабое адронное взаимодействие. Здесь символами частиц (лептонов ν_e, $\bar{\nu}_e$, e, $\bar{e}$; бозонов W^+_μ, W^-_μ, Z_μ, кварков u, $\bar{u}$, d, $\bar{d}$, s, $\bar{s}$, c, $\bar{c}$) обозначены их векторы состояний,

$$g_V = 2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2}, \quad g_A = -\frac{1}{2} \tag{78.107}$$

— константы связи векторной и аксиальной составляющих слабого тока, θ_W — *угол Вайнберга*, θ_c — угол Кабиббо. Углы θ_W и θ_c являются параметрами теории и находятся из экспериментальных данных [77 4.1]. В модели Вайнберга — Салама угол θ_W определяется отношением электрического e и слабого g зарядов. С учетом выбора g в (77.26) имеем

$$\sin\theta_W = \frac{e}{2\sqrt{2}g}. \tag{78.108}$$

В стандартной теории промежуточные векторные бозоны W, Z являются массивными калибровочными бозонами, возникающими в результате спонтанного нарушения $SU(2) \times U(1)$-симметрии. Их массы

$$M_W = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{\sqrt{2}G}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin\theta_W} = \frac{37{,}3\ \text{ГэВ}}{\sin\theta_W},$$
$$M_Z = \left(\frac{e^2}{\sqrt{2}G}\right)^{1/2}\frac{1}{\sin 2\theta_W} = \frac{74{,}6\ \text{ГэВ}}{\sin 2\theta_W}. \tag{78.109}$$

Относительная интенсивность реакций с заряженными и нейтральными токами дается соотношением

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2\cos^2\theta_W}. \tag{78.110}$$

Данные по нейтринным процессам с нейтральными токами приводят к значениям

$$\rho = 0{,}998 \pm 0{,}050, \quad \sin^2\theta_W = 0{,}224 \pm 0{,}015. \tag{78.111}$$

Стандартная теория предсказывает величину $\rho = 1$. При $\rho = 1$ усредненные данные нейтринных экспериментов дают $\sin^2\theta_W = 0{,}227 \pm 0{,}010$ и

$$M_W = (78{,}5 \pm 1{,}7)\ \text{ГэВ}, \quad M_Z = (89{,}3 \pm 2)\ \text{ГэВ}.$$

Учет радиационных поправок от слабых процессов и зависимости константы связи от энергии приводит к зависимости угла Вайнберга θ_W от энергии. При значении энергии, равном M_W, имеем

$$\sin^2\theta_W(M_W) = 0{,}215 \pm 0{,}10 \pm 0{,}04, \tag{78.112}$$

где $\pm 0{,}04$ есть теоретическая неопределенность в вычислениях радиационных поправок. Выбирая постоянную тонкой структуры при M_W равной [78.5.1]

$$\alpha(M_W) = \frac{1}{127{,}49}, \tag{78.113}$$

для масс калибровочных бозонов находим значения

$$M_W = \frac{38{,}5\ \text{ГэВ}}{\sin\theta_W(M_W)} = (83{,}0 \pm 2{,}4)\ \text{ГэВ}, \tag{78.114}$$
$$M_Z = M_W/\cos\theta_W(M_W) = (93{,}8 \pm 2{,}0)\ \text{ГэВ},$$

которые согласуются с данными (табл. 75.1), полученными из реакций $\bar{p} + p \to W^\pm + X$, $W^\pm \to e^\pm + \nu$ при высоких энергиях (CERN, 1983).

Модель Вайнберга — Салама имеет следующие характерные черты: 1) в области энергий $\lesssim 50$ ГэВ слабое взаимодействие лептонов, основанное на поле Янга — Миллса, переходит во взаимодействие Ферми, константа G выражается через универсальную калибровочную константу взаимодействия; 2) модель объединяет слабые и электромагнитные взаимодействия лептонов, объясняет происхождение масс промежуточных бозонов как результат спонтанного нарушения симметрии с введением одного хиггсова бозона; 3) предсказала существование нейтральных слабых токов, которые обнаружены экспериментально; 4) описывает слабые взаимодействия адронов через калибровочное взаимодействие составляющих их кварков, предсказала существование очарованного c-кварка, обнаруженного на опыте [77.5.2]; 5) все предсказания модели выражаются через три параметра: e, G, θ_W; 6) модель допускает существование трех кварк-лептонных поколений (табл. 76.3).

Единая теория слабых и электромагнитных взаимодействий является первым успешным применением теории Янга — Миллса.

78.4. Квантовая хромодинамика

78.4.1. Цветовая калибровочная симметрия. *Квантовая хромодинамика (КХД)* представляет собой калибровочную теорию сильных взаимодействий. Она является синтезом различных идей и представлений (кварки, партоны, цвет, асимптотическая свобода, конфайнмент и т. п.), развитых в физике адронов. Одним из наиболее важных свойств КХД является свойство *асимптотической свободы*, т. е. уменьшение константы взаимодействия на малых расстояниях. Прогресс в этом направлении был достигнут только после того, как было показано, что теории без полей Янга — Миллса не являются асимптотически свободными (Гросс и Вильчек, 1973; Политцер, 1973—1974). В теориях Янга — Миллса константа связи убывает на малых расстояниях. Эта особенность КХД противоположна абелевой теории КЭД, в которой эффективная константа взаимодействия с увеличением расстояния уменьшается за счет усиления диэлектрической ($\varepsilon > 1$) экранировки облаком виртуальных электрон-позитронных пар взаимодействующих зарядов. Антиэкранирующий эффект в КХД объясняется наличием виртуальных калибровочных частиц, являющихся бозонами, несущими цветовой заряд и спин. Облако этих бозонов делает вакуум Янга—Миллса похожим на парамагнитную среду ($\mu > 1$), в которой частицы, обладающие магнитным моментом, стремятся выстроиться вдоль внешнего поля. Такой вакуум антиэкранирует заряды.

Сильные взаимодействия в КХД описываются *полями Янга — Миллса с цветовой калибровочной группой* $SU(3) \equiv SU(3)_c$. Хотя сам цвет ненаблюдаем, его введение в кварковую модель позволяет разрешить трудности, связанные с принципом Паули [76.2]. Существует несколько экспериментальных указаний на трехцветность кварков.

Так, в рамках кварковой модели доказывается, что

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-)} \sim N_c, \quad \Gamma_{\pi^0 \to 2\gamma} \sim N_c^2,$$

где N_c — число цветов, $\Gamma_{\pi^0 \to 2\gamma}$ — ширина указанного распада пиона. Теорию можно согласовать с экспериментом, положив $N_c = 3$.

На опыте наблюдаются только цветовые синглеты. Это означает, что силы, действующие между цветными кварками, зависят от цвета. Данные о реакциях $\pi^0 \to 2\gamma$ и $e^+e^- \to$ адроны свидетельствуют в пользу существования в природе точной цветовой симметрии. КХД представляет собой теорию, в которой цветовая симметрия является калибровочной, а сама теория удовлетворяет требованию перенормируемости. Ее лагранжиан имеет вид

$$\mathscr{L} = \sum_k^{n_f} \bar{q}_k (i\gamma^\mu D_\mu - m_k) q_k - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \qquad (78.115)$$

где

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu],$$
$$D_\mu q_k = (\partial_\mu - igA_\mu) q_k, \qquad (78.116)$$
$$A_\mu = \sum_{a=1}^{8} A_\mu^a \lambda^a/2.$$

Здесь λ^a — так называемые *матрицы Гелл-Манна:*

$$\lambda^j = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; j = 1, 2, 3; \; \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (78.117)$$

σ^j — матрицы Паули (63.32). Матрицы $\lambda^a/2$ являются генераторами группы $SU(3)$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям и условию нормировки:

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}, \quad \operatorname{Sp}(\lambda^a\lambda^b) = 2\delta^{ab},$$

где $f^{abc} = -f_{abc}$ — структурные константы, среди которых отличными от нуля являются

$$f_{123} = 2f_{147} = 2f_{246} = 2f_{257} = 2f_{345} = -2f_{156} =$$
$$= -2f_{367} = \sqrt{\frac{2}{3}} f_{458} = \sqrt{\frac{2}{3}} f_{678} = 1.$$

Значком Sp обозначена операция следа произведения двух матриц. Калибровочные поля сильных взаимодействий A_μ^a называются глюонами [76.2.2], поля q_k — полями кварков, где индекс $k = 1, 2, \ldots, n_f$ нумерует число кварковых ароматов: u, d, s, c, b, t (табл. 76.2).

Лагранжиан КХД (78.115) сохраняет зарядовую и пространственную четности, странность. Он обладает *киральной симметрией* $SU_L(3) \times SU_R(3)$, т. е. симметричен по ароматам u, d, s.

Из-за асимптотической свободы калибровочных полей A_μ^a кварк-глюонное взаимодействие ослабевает с ростом энергии. Поэтому в ультрафиолетовом пределе кварки и глюоны ведут себя как квазисвободные точечные объекты, отождествляемые с партонами [76.2.1; 77.5.1; 77.5.3]. Действительно, в КХД калибровочное сильное взаимодействие характеризуется некоторой функцией $\alpha_s(Q^2)$ квадрата 4-импульса Q, играющей роль эффективной константы связи. Расчет по теории возмущений дает

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \beta\alpha_s(\mu^2)\ln(Q^2/\mu^2)} + O(\alpha_s^2), \qquad (78.118)$$

где μ — масштабный параметр (точка вычитания) такой, что $\alpha_s(\mu^2) \equiv g^2/4\pi \equiv \alpha_s$ — физическая константа связи. Величина β зависит от структуры используемой группы симметрии. Для цветовой калибровочной группы $SU(3)_c$

$$\beta = \frac{1}{12\pi}(33 - 2n_f),$$

где n_f — число кварковых ароматов. При $n_f \leqslant 16$ имеем $\beta > 0$. В этом случае $\alpha_s(Q^2)$ стремится логарифмически к нулю при $Q^2/\mu^2 \to \infty$ и теория является асимптотически (или ультрафиолетово) свободной. Заметим, что для КЭД, как и для любой абелевой калибровочной теории, всегда $\beta < 0$ [78.5.1].

Функцию $\alpha_s(Q^2)$ можно выразить только через один свободный параметр Λ, определив его условием

$$\ln\Lambda^2 = \ln\mu^2 - \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)\beta}.$$

Для рассматриваемого случая группы $SU(3)_c$ имеем

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right)\ln(Q^2/\Lambda^2)}. \qquad (78.119)$$

Величина Λ называется *масштабным параметром* КХД. Этот параметр служит мерой масштаба энергий, при которых α_s становится большой (при $Q^2 = \Lambda^2$ имеем $\alpha_s = \infty$). Константа α_s входит в качестве поправочного члена КХД в сечения различных процессов. Так,

$$R(Q^2) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{адроны})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)} = 3\sum_k^{n_f} e_k^2 \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 (1{,}98 - 0{,}116n_f)\right],$$

где e_k^2 — квадраты зарядов кварков; при этом учтено, что

$$\sigma(e^+e^- \to \text{адроны}) \equiv \sum_k^{n_f} \sigma(e^+e^- \to q_k\bar{q}_k).$$

78.4.2. Модель струны. Согласно имеющимся данным кварки не могут покинуть адрон, т. е. наблюдается конфайнмент (удержание)

кварков в пределах адрона [76.2.2]. Качественные соображения о природе удержания дает модель, в которой кварки связаны между собой *струнами* или узкими трубками из силовых линий цветового потока. Предполагается, что вакуум КХД представляет собой конденсат, состоящий из глюонов и легких кварк-антикварковых пар. При удалении кварков одного от другого происходит разрыв струны, который сопровождается рождением пары кварк — антикварк (рис. 78.3). Из трансляционной инвариантности следует, что плотность энергии глюонного поля вдоль трубки постоянна. Поэтому полная энергия поля пропорциональна расстоянию. Это означает, что на больших расстояниях кварки удерживаются линейным потенциалом

$$V_{q\bar{q}}(R) \sim KR \text{ при } R \to \infty, \tag{78.120}$$

где R — расстояние между источниками (кварками), величина K называется *натяжением струны*. По порядку величины

$$K \approx \frac{1}{5}\ \text{ГэВ}^2. \tag{78.121}$$



Рис. 78.3

После образования пары $q\bar{q}$ энергетически выгоден разрыв связывающей их струны на несколько отдельных струн, каждая из которых имеет длину, характерную для размера адрона ~ 1 фм ($\sim 5\ \text{ГэВ}^{-1}$). При этом первоначальная пара $q\bar{q}$ превращается в набор адронов с массами около 1 ГэВ.

78.4.3. Теория поля на решетке. Для изучения свойств КХД на больших расстояниях Вильсон (1974—1975) развил *калибровочную теорию на решетке*, в которой вместо пространственно-временного континуума вводится дискретное пространство-время. Здесь длины волн не могут быть меньше удвоенного шага решетки a, т. е. область изменения импульсов ограничена значением π/a. В такой формулировке теория поля подобна статистической механике, где накоплен большой опыт решения прикладных задач. В теории Вильсона вместе с обрезанием по импульсам возникает ограничение на кинетическую энергию. В пределе сильной связи ее можно рассматривать как возмущение. Это соответствует разложению при высоких температурах в статистической механике. В случае конечной решетки число переменных конечно и четырехмерное интегрирование заменяется конечной суммой:

$$\int d^4x \to a^4 \sum_n .$$

Пример 1. Скалярное поле.

Действие $S(\Phi)$ (78.33) в случае скалярного поля $\Phi(x)$ с взаимодействием $\lambda\Phi^4$ имеет вид

$$S(\Phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 + \frac{1}{2} m^2\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4\right]. \tag{78.122}$$

В теории Вильсона поле Φ существует в каждом узле решетки n:

$$\Phi(x) \to \Phi_n, \quad \partial_\mu \Phi(x) \to \frac{1}{a}(\Phi_{n+\hat{\mu}} - \Phi_n),$$

где $\hat{\mu}$ — 4-вектор длиной a в направлении μ. Для решеточного действия находим

$$S(\Phi) = \sum_n \left[\frac{a^2}{2}\sum_{\mu=1}^{4}(\Phi_{n+\hat{\mu}} - \Phi_n)^2 + a^4\left(\frac{m^2}{2}\Phi_n^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi_n^4\right)\right]. \tag{78.123}$$

Действие (78.123) можно проквантовать с помощью фейнмановских функциональных интегралов, использовав выражение для вакуумного среднего

$$\langle 0|\,\Phi_{n_1}\Phi_{n_2}\ldots\Phi_{n_e}|\,0\rangle = \frac{1}{Z}\int \prod_n [d\Phi_n](\Phi_{n_1}\Phi_{n_2}\ldots\Phi_{n_e})e^{-S(\Phi)}, \tag{78.124}$$

где

$$Z = \int \prod_n [d\Phi_n]\, e^{-S(\Phi)}, \tag{78.125}$$

а квадратные скобки обозначают то же, что и в формуле (78.54). Выражение (78.124) обладает той же структурой, что и статистическая сумма в статистической механике. В этом легко убедиться, если ввести замену $\Phi'_n = \sqrt{\lambda}\Phi_n$, $S(\Phi) = \frac{1}{\lambda}S'(\Phi')$ и положить $\lambda \equiv 1/kT$.

Пример 2. Фермионное поле.

Действие для свободного фермионного поля имеет вид

$$S_0(\Psi) = \sum_n \left[\frac{a^3}{2}\sum_{\mu=1}^{4}\bar{\Psi}_n\gamma_\mu(\Psi_{n+\hat{\mu}} - \Psi_{n-\hat{\mu}}) + ma^4\bar{\Psi}_n\Psi_n\right]. \tag{78.126}$$

В импульсном пространстве это действие дается выражением

$$S_0(\Psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\bar{\Psi}(-k)\left\{i\sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m\right\}\Psi(k), \tag{78.127}$$

где

$$\Psi_n = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikn}\Psi(k) \tag{78.128}$$

и интегрирование производится только по одной зоне Бриллюэна обратной решетки: $-\frac{\pi}{a} \leqslant k_\mu \leqslant \frac{\pi}{a}$ для каждого μ, $k_\mu = k\hat{\mu}$. Из (78.127) следует дисперсионное соотношение

$$S(k) = \frac{1}{a^2}\sin^2 ak_\mu + m^2. \tag{78.129}$$

Оно определяет вклад каждой моды по k в действие (78.127). В случае непрерывных теорий $S(k) = m^2 + k^2$. При малых k вблизи $k = 0$ непрерывная и решеточная теории дают близкие результаты (рис. 78.4). Минимумы в точках $k = \pm\pi/a$ приводят к бесконечным импульсам при $a \to 0$. Для обеспечения непрерывного перехода от дискретного распределения пространственно-временных точек к непрерывному

подынтегральное выражение в (78.127) должно быть регуляризовано. Например (Вильсон):

$$S_0(\Psi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \overline{\Psi}(-k) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu \frac{\sin ak_\mu}{a} + m - \sum_\mu \frac{\cos ak_\mu - 1}{a} \right\} \Psi(k). \tag{78.130}$$

Здесь последняя сумма не изменяет поведение подынтегральной функции при малых k, но устраняет нежелательные минимумы при $k = \pm\frac{\pi}{a}$.

В калибровочной теории КХД на решетке ее калибровочно-инвариантное действие записывают в виде суммы кварковой и глюонной частей:

$$S_{\text{КХД}} = S(q) + S(A),$$

$$S(q) = \sum_n \left\{ \frac{a^3}{2} \sum_\mu \overline{\Psi}_n [(1+\gamma_\mu) U(n, n+\hat{\mu}) \Psi_{n+\hat{\mu}} + (1-\gamma_\mu) U(n, n-\hat{\mu}) \Psi_{n-\hat{\mu}} + 2\Psi_n] - ma^4 \overline{\Psi}_n \Psi_n \right\},$$

$$S(A) = -\frac{1}{2g^2} \sum_p \operatorname{Sp} U_p \approx -\frac{1}{2g^2} \sum_p \operatorname{Sp} e^{ia^2 F_{n,\mu\nu} + O(a^3)}, \tag{78.131}$$

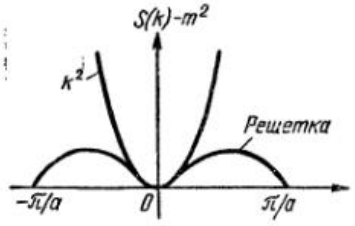


Рис. 78.4

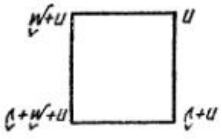


Рис. 78.5

где

$$\partial_\mu A_{n,\nu} \equiv (A_{n+\mu,\nu} - A_{n,\nu})/a,$$

$$U(n+\mu, n) = \exp\left\{ iag \frac{\lambda^i}{2} A^i_{n,\mu} \right\},$$

$$F_{n,\mu\nu} = \partial_\mu A_{n,\nu} - \partial_\nu A_{n,\mu} - ig[A_{n,\mu}, A_{n,\nu}], \tag{78.132}$$

$$U_p = U(n, n+\hat{\mu}) U(n+\hat{\mu}, n+\hat{\mu}+\hat{\nu}) U(n+\hat{\mu}+\hat{\nu}, n+\hat{\nu}) U(n+\hat{\nu}, n).$$

Здесь $U(n+\hat{\mu}, n)$ и т. п.— решеточный вариант матрицы параллельного переноса между соседними узлами решетки: $n \to n+\mu$; U_p— произведение этих матриц, взятых в четырех узлах решеточного квадрата, называемого *плакетом* (рис. 78.5); суммирование по p есть суммирование по всем плакетам решетки; $A_{n,\mu}$ — глюонное поле $A^i_\mu \lambda^i/2$ в узле n. В теории поля на решетке доказывается, что на больших расстояниях R между кварками потенциал их взаимодействия имеет вид

$$V(R) = KR, \quad K = \ln(g^2/a^2),$$

т. е. теория описывает удержание кварков, а в пределе слабой связи он эквивалентен кулоновскому

$$V(R) \sim \frac{1}{R},$$

т. е. теория сохраняет свойство асимптотической свободы. Поскольку получение результатов в аналитическом виде при таком дискретном подходе сильно затруднено, основные вычисления проведены здесь с использованием ЭВМ. Численные методы позволили установить отсутствие фазовых переходов в области промежуточных констант связи и их наличие в пределе сильной связи. Они позволили получить соотношения между натяжением струны, описывающим взаимодействие на больших расстояниях, и константами калибровочного взаимодействия на малых расстояниях. Для масштабного параметра КХД Λ было найдено неравенство $100\ \text{МэВ} \leqslant \Lambda \leqslant 300\ \text{МэВ}$.

78.5. Теории великого объединения

78.5.1. Модели объединения. Теориями великого объединения называют различные варианты единой теории трех взаимодействий: слабого, электромагнитного и сильного. Включение в эти схемы гравитационного взаимодействия наталкивается на принципиальные трудности, связанные прежде всего с неперенормируемостью квантовой теории гравитационного поля (в ее современной формулировке). Поскольку квантовые гравитационные эффекты могут проявиться в физике частиц лишь при энергиях порядка планковской [77.2], они пока не доступны для экспериментального изучения.

Простейший вариант единой теории состоит в формальном объединении цветовой калибровочной $SU(3)$-группы КХД и калибровочной группы $SU(2) \times U(1)$ модели Вайнберга — Салама в калибровочную группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Такая стандартная модель содержит три независимые константы связи α_3, α_2 и α_1, отвечающие сильному, слабому и электромагнитному взаимодействиям. В нее входят три поколения кварков и лептонов, 12 векторных бозонов (8 глюонов, $W^\pm$- и Z^0-бозоны и фотон). Кроме того, теория предполагает существование (пока не обнаруженных) массивных скалярных хиггсовых бозонов, связанных с нарушением $SU(2)$-симметрии. Большое число произвольных параметров и фактически независимое рассмотрение трех взаимодействий не дают оснований считать указанную теорию последовательной и отвечающей требованию единого рассмотрения всех сил. Существует, однако, уверенность, что вплоть до расстояний 10^{-16} см взаимодействия частиц правильно описываются калибровочной $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-теорией.

Самой простой калибровочной группой, на основе которой можно объединить все три взаимодействия с известными кварками и лептонами, является *группа* $SU(5)$ (Джорджи, Глэшоу, 1974). Так как константы α_3, α_2 и α_1 существенно различаются, то такое объединение должно проявиться при достижении энергий порядка 10^{14} ГэВ, соответствующих расстояниям $\sim 10^{-28}$ см

Строгое рассмотрение, учитывающее радиационные поправки, показывает, что интенсивность взаимодействия в любом процессе характеризуется не константой связи, входящей в соответствующий лагранжиан, а некоторой функцией квадрата переданного 4-импульса Q^2, $\alpha_i = \alpha_i(Q^2)$. Указанные радиационные поправки возникают из-за вакуумных флуктуаций и проявляются в эффекте частичного экрани-

рования (антиэкранировании) соответствующего заряда. Так, в КЭД для измерения электрического заряда его необходимо поместить в электромагнитное поле и исследовать реакцию поля. Однако кванты электромагнитного поля — фотоны — на пути к заряду могут виртуально диссоциировать на пару e^+e^-, которая, образуя эффективный диполь, дает эффект экранировки. Его вклад пропорционален постоянной тонкой структуры. Выбором $\alpha_1(0) = \frac{1}{137}$ фиксируют одну из кривых теоретически допустимого семейства $\alpha_1(Q^2)$. Оказывается, что в неабелевых калибровочных теориях эффективная константа с ростом Q^2 убывает, а в абелевых теориях растет (рис. 78.6). Закон зависимости $\alpha_i(Q^2)$ имеет вид

$$\alpha_i(Q^2) = \frac{\alpha_i(\mu_i^2)}{1 + \beta\alpha_i(\mu_i^2)\ln(Q^2/\mu_i^2)}, \qquad (78.133)$$

где $\alpha_i(\mu_i^2)$ — экспериментально определяемое значение при фиксированной энергии μ_i [78.4.1], коэффициент β определяет скорость изменения эффективной константы и зависит от вида полей, участвующих во взаимодействии. В данном случае $\beta > 0$ для α_3 и α_2 и $\beta < 0$ для α_1. Эффективные константы α_3 и α_2 с ростом энергии Q уменьшаются, а α_1 увеличивается. В области энергий $Q \sim 10^{15}$ ГэВ (расстояния $R \sim 10^{-29}$ см) все три эффективные константы становятся примерно равными. Этот факт позволяет предположить, что физическая природа сильного и электрослабого взаимодействий одна и та же, и на расстояниях $R \lesssim 10^{-29}$ см существует единое взаимодействие с одной константой связи $\alpha_G \sim 1/45$. Из рис. 78.6 видно, что кривые в точке $Q = 10^{15}$ ГэВ не расходятся в разные стороны, а сливаются в одну.

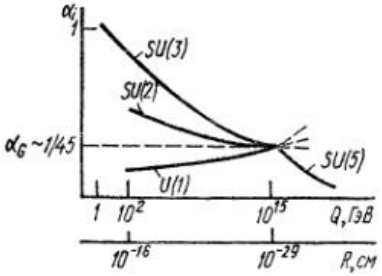


Рис. 78.6

Модель с группой $SU(5)$ имеет два масштаба масс: 1) массы калибровочных бозонов X, Y — переносчиков нового взаимодействия, возникающих вследствие спонтанного нарушения $SU(5)$-симметрии, 2) массы промежуточных бозонов W, Z, появляющихся при нарушении $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-симметрии, т. е.

$$SU(5) \xrightarrow{X,Y} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{W,Z} SU(3) \times U(1). \qquad (78.134)$$

Калибровочные бозоны X и Y становятся массивными за счет явления Хиггса [78.2.4], сохраняющего перенормируемость теории. Расчет показывает, что $M_{X,Y} \approx 10^{15}$ ГэВ, т. е. бозоны X и Y оказываются супертяжелыми: $M_{X,Y} \gg M_{W,Z}$.

Таким образом, если предположить, что при энергиях порядка 10^2—10^{15} ГэВ (расстояниях от 10^{-16} до 10^{-29} см) не происходит новых, неизвестных еще физических явлений и существуют только известные частицы, то наблюдается следующая картина. В области сверхвысоких энергий $Q > 10^{15}$ ГэВ массы всех частиц несущественны, и осуществляется единое взаимодействие, описываемое калибровочной теорией $SU(5)$ (или другой ей подобной). При увеличении расстояний до $R \sim 10^{-29}$ см появляются первые массы $M_{X,Y} \sim 10^{15}$ ГэВ. Они нарушают

симметрию относительно группы $SU(5)$ до симметрии объединенной группы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Последняя группа также нарушается до $SU(3) \times U(1)$-симметрии на расстояниях $R \gtrsim 10^{-16}$ см. Здесь возникают массы $M_{W,Z} \sim 10^2$ ГэВ.

В модели с группой $SU(5)$ имеется 24 калибровочных векторных поля: 12 полей модели $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ (8 глюонов, $W^{\pm}$, Z-бозоны и фотон) и 12 полей — переносчиков нового взаимодействия (X-, Y-бозоны). Каждое из X- и Y-полей принимает три значения цветового заряда и имеет электрические заряды, равные 4/3 и 1/3 соответственно. Векторные бозоны X и Y вызывают переход кварков и лептонов одного в другой, поэтому называются *лепто-кварками*.

Важнейшим следствием кварк-лептонных взаимодействий является существование процессов с несохранением барионного и лептонного зарядов. В частности, единые теории предсказывают распад протона. Возможные схемы распада в модели $SU(5)$ иллюстрируют диаграммы на рис. 78.7.

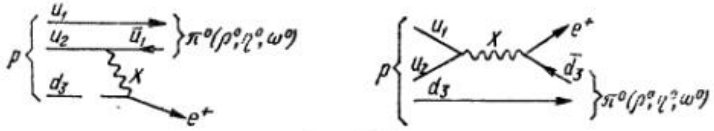


Рис. 78.7

Согласно имеющимся экспериментальным данным время жизни протона $\tau_p > 10^{31} - 3 \cdot 10^{32}$ лет (возраст Вселенной $\tau \sim 10^{10}$ лет). Модель $SU(5)$ предсказывает значение $\tau(p \to e^+\pi^0) < 10^{31}$ лет. Это противоречит опыту.

В основу единого взаимодействия может быть положена и некоторая другая группа G, реализующая принцип локальной симметрии и включающая в себя группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ для сохранения установленной последовательности (78.134) появления масс калибровочных полей, где $SU(5)$ заменяется на G. Имеющиеся отличные от $SU(5)$ схемы великого объединения предсказывают значения $\tau_p \gtrsim 10^{31}$ лет, однако другие их следствия пока остаются недоступными для экспериментальной проверки. В частности, эти теории допускают существование монополей Дирака [77.3.2] как результата нарушения симметрии группы G до симметрии $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-модели (т'Хоофт, А. М. Поляков, 1974). Масса этих монополей M_m связана с массами M_X простым соотношением $M_m \sim M_X/\alpha_G$. Для $M_X \sim 10^{15}$ ГэВ и $\alpha_G \sim 1/45$ имеем $M_m \sim 10^{16}$ ГэВ. Не участвуя сам во взаимодействиях, монополь может индуцировать процессы, идущие с нарушением барионного заряда, играя роль катализатора. Например: процесс

$$p + \text{монополь} \to e^+ + \text{мезоны} + \text{монополь}$$

должен иметь сечение, сравнимое с сечением адронных процессов.

78.5.2. Суперсимметрии. Модели объединения ограничены. Они не учитывают возможность наличия новых явлений на расстояниях R от 10^{-16} до 10^{-29} см (калибровочная пустыня) и не включают гравитацию, которая на расстояниях $R \sim 10^{-33}$ см ($Q \sim 10^{19}$ ГэВ) становится существенной. В связи с этим развиваются совершенно новые теории, основанные на идее суперсимметрии.

Суперсимметрией называют симметрию, которая связывает квантовые поля с различной статистикой. Согласно теории суперсимметрии каждая частица имеет своего двойника — частицу, идентичную почти во всем обычной частице, за исключением спина J. Фермиону соответ-

ствует суперсимметричный бозон, а бозону — суперсимметричный фермион: электрон ($J = 1/2$) → сэлектрон ($J = 0$); кварк ($J = 1/2$) → скварк ($J = 0$); фотон ($J = 1$) → фотино ($J = 1/2$); глюон ($J = 1$) → глюино ($J = 1/2$); хиггс ($J = 0$) → хиггсино ($J = 1/2$) и т. д. Массы партнеров возникают в результате нарушения симметрии и оказываются значительно больше масс частиц. Так, имеются экспериментальные указания на то, что массы сэлектрона и электрона связаны соотношением

$$m_{\text{сэл}} \approx 4 \cdot 10^4 m_{\text{эл}}.$$

Несмотря на то что теория суперсимметрии предсказывает фактическое удвоение числа известных частиц, ни один из партнеров не обнаружен на эксперименте. Интерес к этой теории обусловлен одной ее важной чертой — компенсацией расходимостей при учете суперсимметрии. Кроме того, ее идеи могут быть распространены на гравитацию. Появляется возможность построения суперсимметричной общей теории относительности, получившей название *супергравитации*. В этой теории гравитону ($J = 2$) ставится в соответствие партнер — гравитино ($J = 3/2$). В отличие от обычной теории суперсимметрии, характеризующейся глобальной суперсимметрией, супергравитация имеет локальную суперсимметрию. В основе моделей супергравитации лежит гипотеза о том, что при энергиях $Q > 10^{19}$ ГэВ ($R \lesssim 10^{-33}$ см) происходит объединение всех четырех взаимодействий.

78.6. Физика частиц и космология

На стыке физики частиц и космологии развивается новое научное направление, ставящее перед собой цель получить важную информацию о фундаментальных частицах микромира из данных астрономических наблюдений. В основе исследований лежит теория, рассматривающая эволюцию Вселенной как эволюцию системы, находившейся на ранней стадии своего развития в состоянии очень плотной и горячей плазмы. Такая теория получила название *модели горячей Вселенной*. Основные этапы эволюции Вселенной в этой модели показаны на рис. 78.8, где t — время, прошедшее с начала расширения, T_r — температура излучения.

В первичной плазме находились все частицы, рождение которых было возможно при температуре $T \gtrsim 10^{12}$ К. После *большого взрыва* началось расширение Вселенной. Ее температура падала, переставали рождаться наиболее массивные частицы, они аннигилировали, общее число частиц и античастиц в сопутствующем объеме (т. е. в объеме, расширяющемся в темпе расширения Вселенной) убывало по закону $\exp(-mc^2/kT)$. Когда концентрация частиц стала достаточно малой, их взаимная аннигиляция прекратилась и дальнейшее падение концентрации происходило лишь за счет расширения. Это явление называют *закалкой концентрации*. Концентрация слабовзаимодействующих частиц должна быть близка к концентрации $n_\gamma \approx 500$ см$^{-3}$ фотонов микроволнового фонового излучения с $T \approx 3$ К, называемого *реликтовым излучением*. Реликтовое излучение заполняет (изотропно) все видимое пространство Вселенной. Оно было открыто Пензиасом и Вильсоном (1965).

Расчет показывает, что число реликтовых нейтрино каждого сорта велико и равно $n_\nu = n_{\bar\nu} \approx 75$ см$^{-3}$. Это согласуется в числом n_γ, если учесть три вида нейтрино и три вида антинейтрино: $\sum_i n_{\nu_i} + \sum_i n_{\bar\nu_i} \approx$

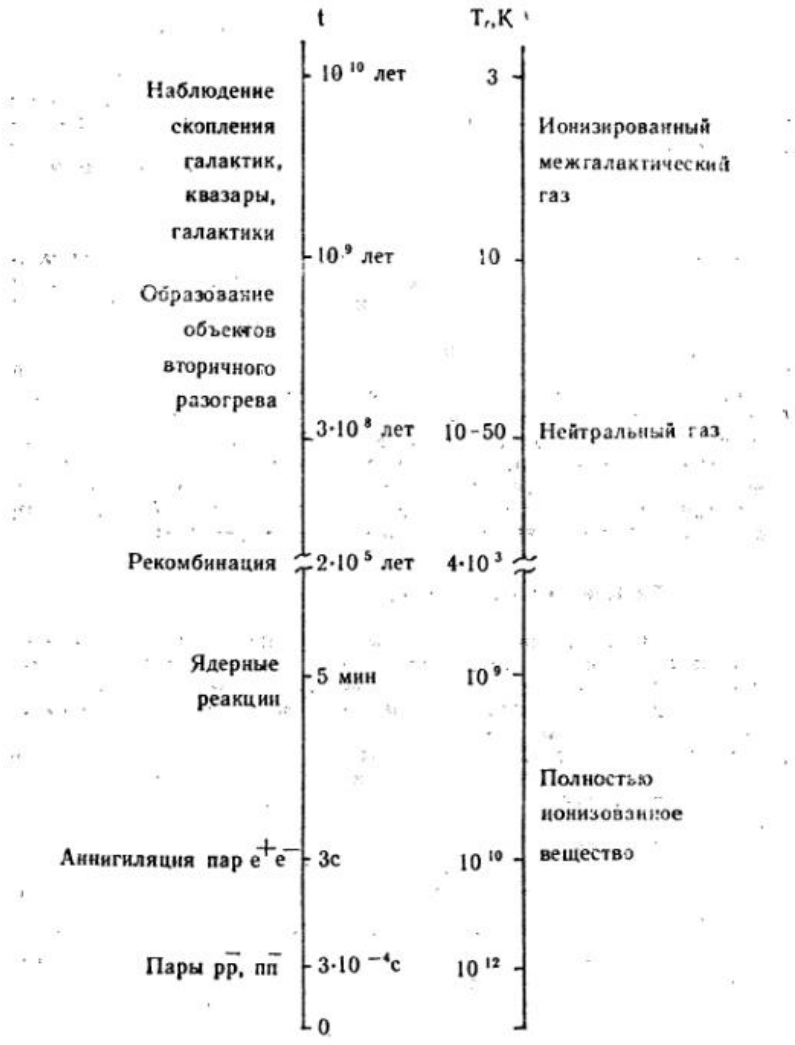


Рис. 78.8

$\approx 6n_\nu$, $6n_\nu = 450$ см$^{-3}$. Величина n_ν приводит к строгому ограничению на величину допустимой массы нейтрино $m_\nu < 35$ эВ. Такая оценка согласуется с возрастом Вселенной, установленным достоверно по значению постоянной Хаббла H (1929).

По красному смещению излучения удаленных галактик установлено, что Вселенная расширяется. Если представить Вселенную в виде расширяющейся сферы радиусом $R(t)$, где t — время, то величина

$H(t) = \frac{1}{R}\,dR/dt$ оказывается независящей от R. Ее называют *постоянной Хаббла*. Возраст Вселенной определяется как $t_B = 1/2H$. Из наблюдений известно, что $H \approx 60$ км/(с · Мпк) ≈ 18 км/(с · св. год). Отсюда следует, что $t_B \approx 10^{10}$ лет. Критическая плотность ρ_c вещества во Вселенной также определяется величиной H:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N},\quad \rho_c \approx 5 \cdot 10^{-30}\ \text{г/см}^3 \approx 3\ m_p/\text{м}^3, \qquad (78.135)$$

где $G_N = 6 \cdot 10^{-39} m_p^{-2}$ — гравитационная постоянная. Наблюдаемая плотность ρ вещества во Вселенной близка к ρ_c. Если $\rho > \rho_c$, то расширение Вселенной должно смениться сжатием (через некоторое время), если $\rho < \rho_c$, то расширение Вселенной будет происходить неограниченно долго.

Между возрастом t_B Вселенной и ее температурой T существует простая связь

$$t_B = \left(\frac{3}{32\pi\sigma\varkappa G_N}\right)^{1/2} \frac{1}{T^2}, \qquad (78.136)$$

где $\sigma = \pi^2/15$ — постоянная Стефана — Больцмана [23.3.3] ($\hbar = c = 1$), если $[T] =$ МэВ, то $[t_B] = c$;

$$\varkappa = \varkappa(T) = 1 + \frac{7}{8} N_\nu + \frac{7}{4} N_e + \Delta\varkappa(T) \qquad (78.137)$$

— функция, определяемая числом частиц во Вселенной; первое слагаемое в (78.137) соответствует вкладу фотонов, второе — вкладу нейтрино, третье — вкладу других лептонов, для которых $2m_e \ll T$; N_ν и N_e — числа различных типов нейтрино и лептонов; четвертое — вкладу кварков, глюонов (при $T \gtrsim 1$ ГэВ) и W- и Z-бозонов (при $T \geqslant 100$ ГэВ). Множители в (78.137) учитывают различие плотностей распределений лептонов и фотонов. Формулы (78.136), (78.137) показывают, что время жизни Вселенной при заданной температуре определяется числом различных типов нейтрино N_ν. Заключение о числе N_ν можно сделать на основе изучения распространенности ядра ^{4}He во Вселенной. Имеющиеся данные указывают на то, что доля ^{4}He по массе в веществе Метагалактики составляет 22—25 %. Это число согласуется с теорией, если положить $N_\nu = 3$, т. е. в природе существует три типа нейтрино (и следовательно, три кварк-лептонных поколения [76.2.3]). Однако более осторожные оценки указывают на то, что $N_\nu \ll 6$.

Зная температуру микроволнового фонового излучения $T \approx 3$ К, можно провести экстраполяцию в прошлое, воспользовавшись твердо установленными данными из механики, статистической, атомной и ядерной физики, физики частиц. Эта экстраполяция возможна вплоть до планковского времени $t \sim t_{пл} \approx 10^{-43}$ с. Реально, однако, приходится ограничиваться временами $t \geqslant 3 \cdot 10^{-4}$ с и температурами $T \leqslant 10^{12}$ К, так как при больших температурах зависимость T от времени неизвестна.

Увеличение длины волны фотонов (уменьшение их энергии) в ходе расширения Вселенной свидетельствует в пользу того, что раньше температура излучения была выше, чем температура реликтового излучения. В период времени, когда температура составляла $\sim 3 \cdot 10^9$ К, концентрация протонов и нейтронов была порядка 10^{20}—10^{21} см$^{-3}$ (это превышает концентрацию частиц земной атмосферы). При таких температурах концентрации фотонов, электронов и позитронов оказываются одинаковыми: $n_\gamma \approx n_{e^-} \approx n_{e^+}$. Это объясняется интенсивными процессами $\gamma\gamma \to e^+e^-$ и $e + e^- \to \gamma\gamma$. На более ранней стадии развития Вселенной при $t \lesssim 3 \cdot 10^4$ с и $T \gtrsim 10^{12}$ К в равновесии с излучением находились различные виды мезонов, гипероны, пары $p\bar{p}$, $n\bar{n}$, $\nu\bar{\nu}$ и другие частицы. Их концентрации имели порядок величины n_γ. Мир был практически зарядово-симметричен — частицы и античастицы были представлены одинаково. Разницу в числе нуклонов и антинуклонов, а также отличный от нуля барионный заряд Вселенной можно объяс-

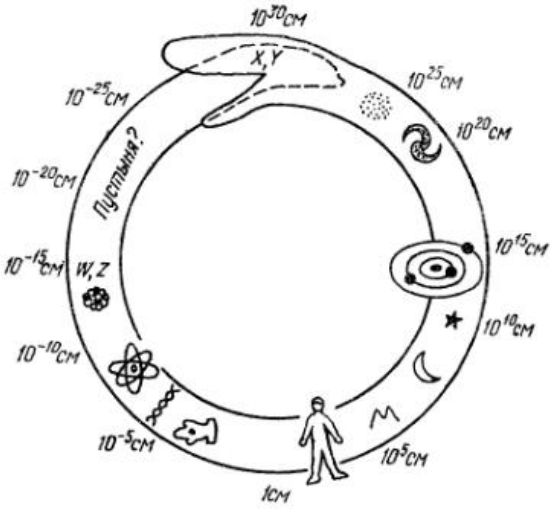


Рис. 78.9

нить, если предположить, что при $t \leqslant 3 \cdot 10^4$ с число нуклонов n_N отличалось от числа антинуклонов $n_{\bar{N}}$ на величину $(n_N - n_{\bar{N}})/n_N \sim 10^{-9}$. Другая возможность решения этой проблемы состоит в несохранении барионного заряда, предсказываемого теориями великого объединения [78.5].

Космология позволяет получать сведения о частицах и процессах при энергиях, не доступных имеющимся ускорителям. Одно из направлений исследований связано с поисками монополей и кварков среди реликтовых частиц.

Пересечение объектов исследований космологии, изучающей явления космических масштабов на огромных расстояниях во Вселенной, с физикой высоких энергий, исследующей свойства вещества на предельно малых пространственных интервалах, служит указанием на наличие глубинных взаимосвязей между бесконечно большим и бесконечно малым. Развитие этих взаимосвязей схематически показано на рис. 78.9 (Глэшоу, 1983).

Взаимодействие частиц при сверхбольших энергиях $Q > 10^{15}$ ГэВ может стать причиной рождения новой Вселенной.

Приложение

1. Основные формулы электродинамики и теории электромагнитных колебаний в гауссовой системе

В гауссовой системе единицы электрических величин совпадают с единицами СГСЭ [25, 26], а магнитных — с единицами СГСМ [29.1.4].

Закон Кулона

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r_{12}^3}\mathbf{r}_{12} \qquad (25.9)$$

Напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q\mathbf{r}}{\varepsilon r^3} \qquad (25.11)$$

Электрическое поле диполя

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{pr})}{\varepsilon r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{\varepsilon r^3}, \qquad (25.23)$$

$$E_x = \frac{3p}{r^3}\sin\theta\cos\theta, \quad E_z = \frac{p}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$$

Напряженность шара

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r} \text{ при } r > a \qquad (25.28)$$

Поле внутри шара

$$\mathbf{E}_1 = \frac{4}{3\varepsilon_1}\pi\rho\mathbf{r} \text{ при } r < a \qquad (25.29)$$

Поле бесконечной равномерно заряженной пластинки

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon} \qquad (25.30)$$

Поле плоскопараллельной пластинки:
внутри пластинки

$$E_1 = \frac{4\pi\rho x}{\varepsilon_1} \qquad (25.31а)$$

вне пластинки

$$E = \frac{4\pi\rho a}{\varepsilon} \qquad (25.31б)$$

Граничное условие

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon E_n = 4\pi\sigma$$

Поле между равномерно заряженными параллельными пластинками

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \qquad (25.32)$$

Поле вблизи поверхности заряженного проводника

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \qquad (25.33)$$

Поле цилиндра и длинной прямой линии

$$E = \frac{2}{\varepsilon}\frac{\varkappa}{r} \qquad (25.34)$$

$$E = \frac{2\pi\rho r}{\varepsilon_1} \qquad (25.35)$$

Вектор поляризации для изотропной среды

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} \qquad (25.37)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon = 1 + 4\alpha \qquad (25.38)$$

Вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} \qquad (25.39)$$

Поток электрического смещения

$$\Phi_\varepsilon \equiv \oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = 4\pi\sum_i q_i \qquad (25.43)$$

Теорема Гаусса

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho \qquad (25.46)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \qquad (25.49)$$

Поле неподвижного точечного заряда

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r}$$

Работа

$$A_{12} = \frac{qQ}{\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (25.54)$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\varphi(r) = \frac{q}{\varepsilon r} \qquad (25.65)$$

Потенциал поля системы точечных зарядов

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i} \tag{25.67}$$

Потенциал непрерывно распределенных электрических зарядов:
в однородном диэлектрике

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')\, dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')\, dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{25.68}$$

в неоднородном диэлектрике

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}') + \rho_{\text{пол}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dV' + \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}') + \sigma_{\text{пол}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dS' \tag{25.69}$$

Потенциал поля шара с равномерно распределенным по поверхности зарядом:
вне шара

$$\varphi(r) = \frac{q}{\varepsilon r} \tag{25.70}$$

внутри шара

$$\varphi(a) = \frac{q}{\varepsilon_1 a} = \text{const} \tag{25.71}$$

Потенциал поля шара, равномерно заряженного по объему

$$\varphi = \frac{2\pi\rho}{3\varepsilon_1}(3a^2 - r^2), \quad r < a \tag{25.72}$$

Потенциал поля равномерно заряженной бесконечной плоскопараллельной пластинки:
внутри пластинки

$$\varphi(x) = -\frac{2\pi\rho}{\varepsilon_1}(x^2 + a^2) + C \tag{25.74}$$

вне пластинки

$$\varphi(x) = \begin{cases} -4\pi\rho a x/\varepsilon + C & \text{при } x > a, \\ 4\pi\rho a x/\varepsilon + C & \text{при } x < a \end{cases} \tag{25.75}$$

Потенциал поля цилиндра, равномерно заряженного:
по объему

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\varepsilon_1}\rho(a^2 - r^2) + C & \text{при } r \leqslant a \\ -\dfrac{2\pi a^2 \rho}{\varepsilon} \ln\dfrac{r}{a} + C & \text{при } r \geqslant a \end{cases} \tag{25.76}$$

по поверхности

$$\varphi(r) = \begin{cases} C & \text{при } r \leqslant a, \\ -\dfrac{2\pi a\sigma}{\varepsilon} \ln\dfrac{r}{a} + C & \text{при } r \geqslant a \end{cases} \tag{25.77}$$

Потенциал поля тонкого прямолинейного проводника

$$\varphi(r) = -\frac{2\varkappa}{\varepsilon} \ln r + C \tag{25.78}$$

Потенциал плоского конденсатора

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} x \tag{25.80}$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \tag{25.82}$$

Граничное условие

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \tag{25.85}$$

Потенциальная энергия двух неподвижных зарядов

$$U = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon} \frac{1}{r_{12}} \tag{25.88}$$

Потенциальная энергия шара

$$U = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{\varepsilon a} \tag{25.92}$$

Потенциальная энергия тонкого сферического слоя

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon a} \tag{25.93}$$

Полная энергия электрического поля

$$U = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\, dV \tag{25.94}$$

Объемная плотность энергии

$$u_\varepsilon = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \tag{25.95}$$

$$u_\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E}\, d\mathbf{D} \tag{25.96}$$

Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \frac{(\mathbf{pr})}{r^3} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{p \cos\theta}{r^2} \tag{25.102}$$

Потенциальная энергия двух взаимодействующих диполей

$$U = \frac{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2}{\varepsilon r^3} - \frac{3(\mathbf{r}\mathbf{p}_1)(\mathbf{r}\mathbf{p}_2)}{\varepsilon r^5} \tag{25.103}$$

Емкость уединенного шара

$$C = \varepsilon a \tag{25.116}$$

Разность потенциалов на обкладках плоского конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{4\pi\sigma d}{\varepsilon} \tag{25.122}$$

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \tag{25.123}$$

Емкость шарового конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon}{1/a - 1/b} \tag{25.124}$$

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln (b/a)} \tag{25.125}$$

Емкость двухпроводной линии

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln (d^2/ab)} \tag{25.126}$$

Радиус Дебая

$$D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} \tag{27.20}$$

Эффективное поперечное сечение столкновения электрона с ионом

$$\sigma = \pi L \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \tag{27.24}$$

Удельная проводимость плазмы

$$\lambda = \frac{(3kT)^{3/2}}{\pi Z e^2 L \sqrt{m}} \tag{27.25}$$

Постоянная Холла

$$R = \frac{1}{nec} \tag{28.2}$$

Число электронов, приходящееся на один атом металла

$$z = \frac{A}{Rc\rho F} \tag{28.4}$$

Сила, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле

$$F_{m\perp} = \frac{q}{c} vB \tag{29.1}$$

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{29.2}$$

$$F_m = \frac{q}{c} vB \sin \varphi \tag{29.3}$$

Магнитное поле в среде

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{29.5}$$

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \tag{29.6}$$

Магнитный момент

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{c} IS\mathbf{n} \tag{29.7}$$

Магнитное поле движущегося заряда

$$\mathbf{B} = \frac{q}{cr^3} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \tag{29.14}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \tag{29.15}$$

Сила взаимодействия точечных зарядов

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_2}{c} (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1) = \frac{q_1 q_2}{c^2 r_{12}^3} (\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_{12})),$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1}{c} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_2) = \frac{q_1 q_2}{c^2 r_{21}^3} (\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_{21})) \tag{29.16}$$

Сила Ампера

$$d\mathbf{F} = \frac{e}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dN = \frac{ne}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\, dV = \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})\, dV \tag{29.17}$$

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{29.19}$$

$$\mathbf{F} = \int \frac{I}{c} (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \tag{29.20}$$

Сила Ампера для прямолинейного проводника

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} (\mathbf{l} \times \mathbf{B}), \quad F = \frac{I}{c} lB \sin \varphi \tag{29.21}$$

Магнитная индукция постоянного тока

$$\mathbf{B} = \oint \frac{I}{c} \frac{(d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} = \int \frac{(\mathbf{j} \times \mathbf{r})}{cr^3} dV \tag{29.24}$$

Магнитное поле:
бесконечно длинного проводника с током

$$B = \frac{\mu}{c} \frac{2I}{r} \tag{29.25}$$

проводника конечной длины с током

$$B = \frac{\mu}{c} \frac{I}{r} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \tag{29.26}$$

кругового тока

$$dB_z = \frac{\mu}{c}\frac{I\,dl}{r^2}\cos\theta,\quad B = B_z = \frac{\mu}{c}\frac{2\pi a^2 I}{r^3} \tag{29.27}$$

$$\mathbf{B} = \mu\frac{2\mathbf{p}_m}{r^3} \tag{29.28}$$

на оси соленоида

$$B = \frac{\mu}{c}\,2\pi n I\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \tag{29.29}$$

на оси соленоида бесконечной длины

$$B = \frac{\mu}{c}\,4\pi I n \tag{29.30}$$

в точке, равноудаленной от краев соленоида

$$B = \frac{\mu}{c}\frac{4\pi n I h}{\sqrt{4a^2 + L^2}} \tag{29.31}$$

на концах оси длинного соленоида

$$B = \frac{\mu}{c}\,2\pi n I \tag{29.32}$$

тороида

$$B = \frac{\mu}{c}\frac{2NI}{r} \tag{29.33}$$

прямоугольного витка с током

$$B = \frac{\mu}{c}\frac{8I\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \tag{29.34}$$

контура с током и магнитным моментом

$$\mathbf{B} = \mu\frac{3(\mathbf{p}_m\mathbf{r})\,\mathbf{r} - \mathbf{p}_m r^2}{r^5} \tag{29.35}$$

Сила взаимодействия:
двух элементов тока

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu}{c^2}\frac{I_1 I_2}{r_{12}^3}(d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})),$$

$$d\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu}{c^2}\frac{I_1 I_2}{r_{21}^3}(d\mathbf{l}_1 \times (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{r}_{21})) \tag{29.36}$$

двух бесконечно длинных проводников с токами

$$F = \frac{\mu}{c^2}\frac{2I_1 I_2}{r}\,l \tag{29.37}$$

двух одинаковых квадратных контуров

$$F = \frac{8}{c^2}\,I_1 I_2\left[\frac{a^2 + 2d^2}{d\sqrt{a^2 + d^2}} - \frac{d\sqrt{2a^2 + d^2}}{a^2 + d^2} - 1\right] \tag{29.38}$$

двух длинных соленоидов на одной оси

$$F = \frac{\mu}{c^2}\frac{1}{d^2}\,I_2 n_2 S_2 I_1 n_1 S_1 \tag{29.39}$$

Работа в магнитном поле:
элементарная

$$\delta A = \frac{1}{c}\,I B_n\,dS = \frac{1}{c}\,I d\Phi_m \tag{29.42}$$

при перемещении проводника конечной длины с постоянным током

$$A = \frac{1}{c}\,I\Phi_m \tag{29.46}$$

замкнутого контура

$$A = \frac{1}{c}\,I\Delta\Phi = \frac{1}{c}\,I\,(\Phi_2 - \Phi_1) \tag{29.47}$$

Теорема о циркуляции

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{s} = \frac{4\pi}{c}\,I \tag{29.51}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} \tag{29.53}$$

Уравнение Пуассона

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j} \tag{29.57}$$

Решение уравнения Пуассона

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(x', y', z')}{r}\,dV'$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{29.60}$$

Преобразование электромагнитного поля

$$\begin{aligned} &E_x' = E_x,\ E_y' = \gamma(E_y - \beta B_z),\quad E_z' = \gamma(E_z + \beta B_y),\\ &B_x' = B_x,\ B_y' = \gamma(B_y + \beta E_z),\quad B_z' = \gamma(B_z - \beta E_y), \end{aligned} \tag{29.61}$$

$$\mathbf{B} = 0,\ \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{E}';\quad \mathbf{E} = 0,\ \mathbf{E}' = -\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B}' \tag{29.62}$$

Основной закон электромагнитной индукции

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{30.1}$$

Закон индукции Фарадея

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{s} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi_m}{\partial t} \tag{30.3}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{30.4}$$

Магнитный поток через замкнутую поверхность

$$\Phi_m = \frac{1}{c} LI \tag{30.7}$$

ЭДС самоиндукции

$$\mathscr{E}_{инд} = -\frac{L}{c^2}\frac{dI}{dt} \tag{30.8}$$

Взаимная индукция

$$\mathscr{E}_{12} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(L_{12}I_2) \tag{30.14}$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{c} L_{12} I_2 \tag{30.15}$$

Магнитная энергия

$$dU_m = \frac{1}{c} I d\Phi_m \tag{30.23}$$

$$U_m = \frac{1}{c}\int I d\Phi_m \tag{30.24}$$

Объемная плотность магнитной энергии

$$u_m = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H} d\mathbf{B} \tag{30.26}$$

$$u_m = \frac{1}{8\pi}\mu H^2 = \frac{1}{8\pi}\mathbf{HB} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \tag{30.28}$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \tag{30.29}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{31.1}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{31.2}$$

$$\text{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{31.3}$$

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{31.4}$$

Плотность тока смещения

$$j_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} \tag{31.5}$$

Материальные уравнения

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \lambda\mathbf{E} \tag{31.9}$$

Граничные условия

$$\begin{gathered} D_{n_1} - D_{n_2} = 4\pi\sigma, \\ B_{n_1} = B_{n_2}, \\ E_{\tau_1} = E_{\tau_2}, \\ (\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1) - (\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{i} \end{gathered} \tag{31.10}$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S}, \tag{31.11}$$

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S}, \tag{31.12}$$

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = 4\pi\int_V \rho\,dV, \tag{31.13}$$

$$\oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0 \tag{31.14}$$

Напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{31.16}$$

Калибровка Лоренца

$$\text{div}\,\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{31.18}$$

Уравнение для функции ψ

$$\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\text{div}\,\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{31.19}$$

Уравнение Даламбера

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j} \tag{31.20}$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho \tag{31.21}$$

Векторный и скалярный потенциалы

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t \pm \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{31.22}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t \pm \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{31.23}$$

Элементарная работа поля

$$\delta A' = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}) + j\mathbf{E}\,dt \tag{32.2}$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$u = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\,d\mathbf{B} \tag{32.4}$$

Вектор Пойнтинга

$$\gamma = \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \qquad (32.8)$$

Полная энергия поля

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\, dV \qquad (32.8)$$

Плотность потока импульса

$$\mathbf{g} = \frac{\mu \mathbf{v}}{c^2} = \frac{\gamma}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \qquad (32.9)$$

Электромагнитная масса электрона

$$m_0 = \frac{e^2}{2c^2 a} \qquad (32.20)$$

Классический радиус электрона

$$r_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} \qquad (32.21)$$

Уравнение движения точечной частицы в электромагнитном поле

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) \qquad (33.1)$$

Ларморовый радиус

$$R = \frac{mcv_\perp}{qH} \qquad (33.20)$$

Угловая частота

$$\omega = \frac{qH}{mc} \qquad (33.21)$$

Стклонение частицы в магнитном поле

$$z = \frac{qHx^2}{2mcv} \qquad (33.24)$$

Магнитный момент

$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{cv_\perp R}{2c} = \frac{mv_\perp^2}{2H} = \frac{W_\perp}{H} = \text{const} \qquad (33.31)$$

Скорость смещения ларморовой окружности

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{q}\frac{(\mathbf{F} \times \mathbf{H})}{H^2} \qquad (33.33)$$

Электрический дрейф

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{H^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \qquad (33.35)$$

Дрейф в гравитационном поле

$$\mathbf{v}_d = \frac{mc}{q}\frac{(\mathbf{g} \times \mathbf{H})}{H^2} \qquad (33.37)$$

Ларморовый радиус

$$R = \frac{pc}{qH} = \frac{m_0 cv}{qH\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad (33.41)$$

Циклотронная частота

$$\omega = \frac{qH\sqrt{1-(v/c)^2}}{m_0 c} \qquad (33.42)$$

Векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' \qquad (44.3)$$

Электрическое дипольное излучение

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{cr}; \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{n}}{c^2 r},$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \frac{\left(\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \mathbf{n}\right) \times \mathbf{n}}{c^2 r} \qquad (44.5)$$

Интенсивность электрического дипольного излучения

$$dI = \frac{c}{4\pi}\mathbf{n}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, r^2\, d\Omega = \frac{\left[\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2 \sin^2\theta\, d\Omega}{4\pi c^3},$$
$$I = \int \frac{dI}{d\Omega}\, d\Omega = \frac{2\left[\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]^2}{3c^3} \qquad (44.7)$$

Дипольное (электрическое и магнитное) и электрическое квадрупольное излучения

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{6c^2 r} + \frac{\mathbf{n}}{6c^2 r}\int \ddot{\rho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) r'^2\, dV', \qquad (44.8)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\int (\mathbf{r}' \times \mathbf{j})\, dV', \quad \dot{\mathbf{m}} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}; \qquad (44.9)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{c^2 r}(\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{m}}) + \frac{1}{6c^3 r}(\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n},$$
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}) + \frac{1}{c^2 r}(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c^3 r}(\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}) \qquad (44.12)$$

Интенсивность магнитного дипольного и электрического квадрупольного излучений

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{(\ddot{\mathbf{m}} \times \mathbf{n})^2}{4\pi c^3} + \frac{(\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n})^2}{144\pi c^5} + \frac{\ddot{\mathbf{m}}(\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n})}{12\pi c^4},$$
$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{Q}_{\alpha\beta}^2 \qquad (44.13)$$

Поле на близких расстояниях

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV', \tag{44.15}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{p}(t)\,\mathbf{r}}{r^3} + \ldots,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{p}}(t)}{cr} + \frac{\mathbf{m}(t)\times\mathbf{n}}{r^2} + \ldots, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{44.17}$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{p}}\times\mathbf{r}}{cr^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} + \ldots \tag{44.19}$$

Кулоновский потенциал

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R(t')}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{44.23}$$

Потенциалы Лиенара — Вихерта

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R - \mathbf{v}\mathbf{R}/c} = \frac{e}{R(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)},$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{c(R-\mathbf{v}\mathbf{R}/c)} = \frac{e\mathbf{v}}{cR(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R} \tag{44.24}$$

Электрическое и магнитное поле релятивистской заряженной частицы

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{44.25}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{R^2(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{e\mathbf{n}\times\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right]}{c^2R(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3}, \tag{44.26}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{v}\times\mathbf{n})}{cR^2(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3} + \frac{e\{c\mathbf{v}\times\mathbf{n} + \mathbf{n}\times[(\mathbf{v}\times\mathbf{v})\times\mathbf{n}]\}}{c^2R(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)^3}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n}(t')\times\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{R(t')}\mathbf{R}(t')\times\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \tag{44.27}$$

Интенсивность поля на больших расстояниях от частицы:

$$dI = \gamma\mathbf{n}R^2\,d\Omega = \frac{c}{4\pi}E^2R^2\,d\Omega = \frac{e^2|\mathbf{n}\times((\mathbf{n}-\mathbf{v}/c)\times\mathbf{v})]^2}{4\pi c^3(1-\mathbf{n}\mathbf{v}/c)^6}\,d\Omega \tag{44.28}$$

для нерелятивистской частицы

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta \tag{44.29}$$

для ультрарелятивистской частицы

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\mathbf{v}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3|1-(v/c)\cos\theta|^6}, \quad \mathbf{v}\parallel\mathbf{v} \tag{44.30}$$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\mathbf{v}^2}{4\pi c^3}\left[\frac{1}{|1-(v/c)\cos\theta|^4} - \frac{(1-v^2/c^2)\sin^2\theta}{|1-(v/c)\cos\theta|^6}\cos^2\varphi\right], \tag{44.31}$$
$$\mathbf{v}\perp\mathbf{v}$$

Формула Лармора:
для нерелятивистской частицы

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^2\mathbf{v}^2(t')}{3c^3} \tag{44.34}$$

для релятивистской частицы

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3}\left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right], \quad \gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{44.35}$$

в случае внешнего электромагнитного поля

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^3}\left[\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})^2\right], \tag{44.36}$$

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\parallel} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}, \tag{44.37}$$

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\perp} = \frac{2e^4\gamma^2H^2v_{\perp}^2}{3m^2c^5} \tag{44.38}$$

Вектор Герца

$$\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{Z}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{Z}}{\partial t}, \tag{44.40}$$

$$\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z} - 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{Z}, \tag{44.43}$$

$$\Delta\mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{Z}}{\partial t^2} = -4\pi\mathbf{P}, \tag{44.44}$$

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' \tag{44.45}$$

Излучение линейной антенны

$$\mathbf{Z}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z\frac{2J_0c}{\omega^2r}\frac{\exp(ikr - i\omega t)}{\sin^2\theta}\begin{cases} -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n\text{— четное}, \\ i\cos\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n\text{— нечетное}, \end{cases} \tag{44.48}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi\frac{2J_0}{cr}\frac{e^{ikr-i\omega t}}{\sin\theta}\begin{cases} -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n\text{ — четное}, \\ i\cos\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right), & n\text{ — нечетное}, \end{cases} \tag{44.49}$$

$$\frac{d\overline{I}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{8\pi}|\mathbf{H}|^2 = \frac{J_0^2}{2\pi c}\begin{cases} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & n\text{ — четное}, \\ \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}, & n\text{ — нечетное}. \end{cases} \tag{44.50}$$

Средняя мощность излучения вибратора Герца

$$\overline{I} = \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2 = \frac{p_0^2 c}{3}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \qquad (44.52)$$

Средняя мощность излучения рамочной антенны

$$\overline{I} = \frac{S^2\omega^4}{3c^5} J_0^2 = \frac{S^2}{3c}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 J_0^2 \qquad (44.54)$$

Сопротивление излучению

$$R_r = \frac{2S^2\omega^4}{3c^5} = \frac{2S^2}{3c}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \qquad (44.55)$$

Энергия, испускаемая электроном на единице пути L

$$\frac{d\mathcal{E}}{L} = \frac{e^2}{c^2}\int\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right)\omega\, d\omega \qquad (44.58)$$

Интенсивность излучения атома водорода в модели диполя

$$dI = \frac{\dot{\mathbf{p}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, d\Omega = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}\frac{\omega^4 E_0^2 \sin^2\omega t}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\sin^2\theta\, d\Omega \qquad (45.6)$$

Плотность потока энергии излучения

$$I = \frac{c}{4\pi}E^2 = \frac{c}{4\pi}E_0^2\sin^2\omega t, \qquad (45.7)$$

Сечение рассеяния электромагнитной волны атомом водорода в модели диполя

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\sin^2\theta\, d\Omega \qquad (45.8)$$

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \qquad (45.9)$$

2. Математические термины, символы и обозначения

1. *Функция.* Если задано правило, по которому каждому данному действительному или комплексному числу x из множества всех возможных его значений ставится в соответствие некоторое действительное или комплексное число y, то говорят, что задана функция y от x. Записывается это так:

$$y = y(x) \text{ или } y = f(x).$$

При этом x называется независимой переменной или аргументом, а y — зависимой переменной или функцией. Величина y может быть функцией нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ или } y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Говорят, что функция $y = y(x)$ имеет обратную функцию $x = x(y)$, если из $y = y(x)$ следует $x = x(y)$. Функция четная, если $f(-x) = f(x)$, нечетная, если $f(-x) = -f(x)$, и периодическая с периодом T, если $f(x + T) = f(x)$.

2. *Предел.* Функция $f(x)$ имеет необходимо единственный предел

$$\lim_{x\to a} f(x) = M = \text{const}$$

при x, стремящемся к конечному значению $x = a$, если для каждого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$ функция $f(x)$ определена и $|f(x) - M| < \varepsilon$.

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$. Говорят, что:

а) $f(x)$ есть функция не высшего порядка малости, чем $g(x)$ при $x \to a$, если существует окрестность точки a, в которой при $x \neq a$ отношение $f(x)/g(x)$ ограничено, и записывают

$$f(x) = O[g(x)];$$

б) $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же порядок при $x \to a$, если предел $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ существует и отличен от нуля;

в) $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)] = 1$, и записывают

$$f(x) \sim g(x);$$

г) $f(x)$ есть функция более высокого порядка малости, чем $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)] = 0$, и записывают

$$f(x) = o[g(x)].$$

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = a$, непрерывна при $x = a$ (в точке a), если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \qquad (1)$$

Если функция $f(x)$ имеет предел при приближении к точке a слева ($x \to a - 0$) или справа ($x \to a + 0$), то

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \equiv f(a-0), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) \equiv f(a+0).$$

Запись (1) означает, что

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a).$$

Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на интервале I, если она непрерывна в I всюду, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода. Функция $f(x)$ непрерывна в точке справа или слева, если $f(a+0) = f(a)$ или $f(a-0) = f(a)$. Точка разрыва первого рода действительной функции $f(x)$ есть точка a, в которой $f(x)$ разрывна (т. е. не непрерывна) и существуют пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$. Наибольшая разность между двумя из чисел $f(a+0)$, $f(a)$ $f(a-0)$ задает скачок функции $f(x)$ в точке разрыва a.

3. *Производная.* Первая производная (производная первого порядка) функции $y = f(x)$ по x в точке x есть предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx}f(x) \equiv f'(x) \equiv y',$$

производные высшего порядка определяются формулами

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} f'(x) = f''(x), \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$$

(если соответствующие пределы существуют).

Частная производная (первого порядка) функции многих переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по x_1 в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть предел

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1} = \frac{dy}{dx_1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} f = f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при фиксированных значениях остальных независимых переменных $x_2, \ldots, x_n$. Аналогично определяются частные производные $\partial y/\partial x_2, \ldots$ $\partial y/\partial x_n$.

Частные производные более высокого порядка функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяются выражениями (если соответствующие пределы существуют)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial y}{\partial x_k} = f''_{x_k x_k}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_k} = f''_{x_i x_k},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = f'''_{x_i x_j x_k}, \quad \ldots$$

При $i \neq k$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_i}.$$

Если $y = f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, а $u_i = u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то частная производная функции f по x_k в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

4. *Дифференциал.* Функция $y = f(x)$ имеет в точке x (первый) дифференциал, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) = A\,dx + o(dx),$$

где A не зависит от dx. При этом ее дифференциал

$$dy = f'(x)\,dx, \quad f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (первый) дифференциал, если ее приращение в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots + A_n dx_n + o\left(\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}\right),$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят от $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. При этом ее дифференциал равен

$$dy = df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Второй, третий и т. д. дифференциалы нужное число раз дифференцируемой функции f находятся по формулам

$$d^2 f(x) = d(df) = d\left(\frac{dy}{dx}\,dx\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\,dx^2,$$

$$d^2 f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2,$$

$$d^n f(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n-k} \partial x_2^k} dx_1^{n-k} dx_2^k,$$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Если $y = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, а $u_i = u_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то

$$df[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)] = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{du_i}{dx}\right) dx,$$

$$d^2 f[u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)] = d(df) = \frac{d^2 f}{dx^2}\,dx^2 =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_k} \frac{du_i}{dx} \frac{du_k}{dx} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{d^2 u_k}{dx^2}\right) dx^2$$

5. *Интеграл.* Интегральной суммой называется выражение

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

где действительная функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$, разбитом на n частичных интервалов точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

ξ_i — произвольная точка на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$. Если существует предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего частичного интервала разбиений, $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой в смысле Римана на отрезке $[a, b]$. Предел этой суммы

$$\lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в смысле Римана (интеграл Римана). Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а a и b — пределами интегрирования. Если функция $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неотрицательна, то интеграл (2) выражает площадь, ограниченную кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. П. 1). Если $f(x) \leqslant 0$, то этот интеграл выражает эту площадь, взятую со знаком минус.

Правило Лейбница (дифференцирование по параметру):

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} f(x, \lambda)\, dx = \int_{u(\lambda)}^{v(\lambda)} \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)\, dx + f(v(\lambda), \lambda)\frac{dv}{d\lambda} - f(u(\lambda), \lambda)\frac{du}{d\lambda}.$$

В частности,

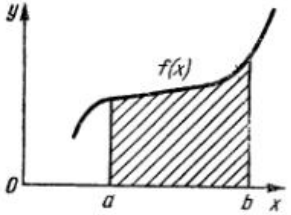


Рис. П.1

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\, d\xi = f(x), \quad \frac{d}{d\lambda}\int_a^b f(x, \lambda)\, dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x, \lambda)\, dx,$$

где a и b — константы, не зависящие от x и λ.

Среднее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$

$$\langle y\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Если интервал неограничен: $(0, +\infty)$ или $(-\infty, +\infty)$, то под средним $\langle y\rangle$ понимают предел

$$\langle y\rangle = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b}\int_0^b f(x)\, dx \text{ или } \langle y\rangle = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} f(x)\, dx$$

(если эти пределы существуют).

Теоремы о среднем значении.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в интервале (a, b) существует такое число c, что

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a).$$

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и $g(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$ или $g(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$, то в интервале (a, b) существует такое число c, что

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c)\int_a^b g(x)\, dx.$$

Криволинейным интегралом от ограниченной функции $f(x, y, z)$ для данной спрямляемой дуги C, описываемой уравнениями (в пространстве)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{3}$$

называется предел

$$\lim_{\max\Delta s_i\to 0}\sum_{i=1}^{m} f(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\,\Delta s_i = \int_C f(x, y, z)\, ds, \tag{4}$$

где

$$\Delta s_i = \{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2\}^{1/2},$$
$$a \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b, \quad t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Дуга C называется спрямляемой, если существует предел длины ломаной, вписанной в эту дугу, при стремлении к нулю длины наибольшего звена этой ломаной. Длина бесконечно малой дуги регулярной кривой (3), соответствующей промежутку $[t, t + dt]$, называется элементом дуги

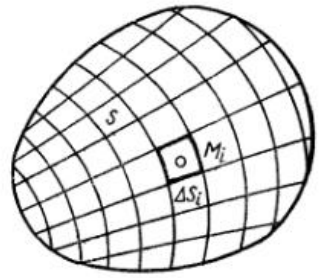


Рис. П.2

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \frac{ds}{dt}\, dt.$$

Длина $s(C)$ кривой C на отрезке $[t_0, t]$ равна

$$s = s(C) = \int_C ds = \int_{t_0}^{t}\frac{ds}{dt}\, dt.$$

Криволинейный интеграл (4) можно вычислить по формуле

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f[x(t), y(t), z(t)]\frac{ds}{dt}\, dt.$$

Интегрирование по области S. Функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по области S в смысле Римана, если существует предел интегральной суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$$

при $\Delta S_i \to 0$, где ΔS_i — площадь элементарной области S_i, образованной в результате разбиения области S сеткой кусочно-гладких кривых (рис. П. 2) на конечное число элементарных областей S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$); x_i и y_i — координаты произвольной точки M_i в области S_i. Если этот предел существует, то он называется двойным интегралом Римана и

обозначается

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i = \int_S f(x, y)\,dS = \iint_S f\,dx\,dy. \qquad (5)$$

Если область S задается соотношениями (рис. П. 3)

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad (6)$$

то двойной интеграл (5) вычисляется по формуле

$$\int_S f(x, y)\,dS = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\, f(x, y).$$

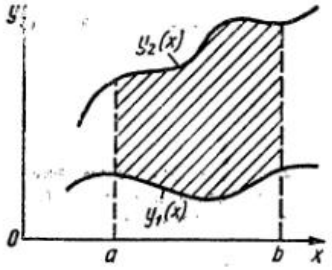


Рис. П.3

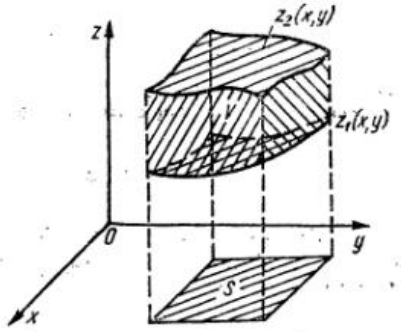


Рис. П.4

Интегрирование по объему V. Функция $f(x, y, z)$ называется интегрируемой по ограниченной пространственной области V, если существует предел соответствующей интегральной суммы:

$$\lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i = \int_V f(x, y, z)\,dV = \iiint_V f\,dx\,dy\,dz. \qquad (7)$$

Здесь ΔV_i — объем элементарной области V_i, образованной разбиением области V на конечное число элементарных областей V_i ($i = 1, 2, \ldots, n$); x_i, y_i, z_i — координаты произвольной точки M_i в каждой элементарной области V_i. Если предел (7) существует, то он называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ по области V.

Если область V является цилиндрическим телом (проекция которого на плоскость xy есть область S), ограниченным снизу и сверху поверхностями $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$, то тройной интеграл вычисляется по формуле (рис. П. 4)

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_S dS \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz f(x, y, z),$$

которая интегрированием по z сводится к двойному интегралу по области S. Если область S определена неравенствами (6), то

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz f(x, y, z).$$

Площадь S и объем V можно вычислить как двойной и тройной интегралы

$$S = \int_S dS = \iint_S dx\,dy, \quad V = \int_V dV = \iiint_V dx\,dy\,dz.$$

Интеграл Стилтьеса. Интегралом Римана — Стилтьеса от функции $f(x)$ с интегрирующей функцией $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел

$$\lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] = \int_a^b f(x)\,dg(x),$$

где $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $x_{i-1} \leqslant \zeta_i \leqslant x_i$. Интеграл Стилтьеса включает в себя обычный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

6. *Разложение функций в бесконечный ряд.* Если действительная функция $f(x)$ имеет на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ n-ю производную $f^{(n)}(x)$, то ее можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x - a)^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(x - a)^{n-1} + R_n(x),$$

где $|R_n(x)| < (|x - a|^n / n!) \sup_{a < \xi < x} |f^{(n)}(\xi)|$ — остаточный член.

Если для действительной периодической функции $f(t)$ с периодом T, $f(t + T) = f(t)$, существует интеграл $\int_{-T/2}^{T/2} |f(\tau)|\,d\tau$, то эта функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_0 t},$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cos k\omega_0 \tau\,d\tau, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \sin k\omega_0 \tau\,d\tau,$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-ik\omega_0 \tau}\,d\tau, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

на каждом открытом промежутке, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, а $f(t) = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)]$ в каждой точке разрыва.

7. Интеграл Фурье. Если $f(t)$ — действительная функция, для которой существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\, d\tau$, то на каждом открытом интервале, на котором $f(t)$ и $f'(t)$ кусочно-непрерывны, а в каждой точке разрыва $f(t) = \frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)]$, для $f(t)$ справедливо представление

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \quad c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

8. Векторная алгебра. Векторы можно складывать и умножать на действительное число (скаляр). При этом справедливы соотношения

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c},$$
$$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a},$$
$$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a},$$
$$0 \cdot \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a} - \mathbf{a} = 0,$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор, $|0| = 0$, α, β — числа.

Любой вектор $\mathbf{a}$ в трехмерном пространстве может быть разложен по трем линейно независимым векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3,$$

где коэффициенты α_1, α_2, α_3 называются координатами вектора $\mathbf{a}$ по отношению к базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. В декартовых координатах (рис. 2.2)

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты) осей x, y, z,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad |a_x\mathbf{i}| = a_x, \quad |a_y\mathbf{j}| = a_y, \quad |a_z\mathbf{k}| = a_z.$$

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ есть скаляр, определяемый формулой

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\gamma,$$

γ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. При этом

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 \geqslant 0, \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{b}^2}},$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) =$$
$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z,$$
$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

Векторное произведение двух векторов $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ есть вектор, модуль которого

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\gamma;$$

его направление перпендикулярно обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его повороте от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ на угол меньший π. При этом

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0,$$
$$(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0.$$

В декартовых координатах

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} +$$
$$+ (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}.$$

Смешанное произведение

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [abc] = [bca] = [cab] = -[bac] = -[cba] = -[acb],$$
$$[abc]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \end{vmatrix}, \quad [abc]\,[def] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{e} & \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} \end{vmatrix}.$$

В декартовых прямоугольных координатах

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

Двойное векторное произведение

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) & (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

Другие произведения:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2,$$
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [acd]\,\mathbf{b} - [bcd]\,\mathbf{a} = [abd]\,\mathbf{c} - [abc]\,\mathbf{d}.$$

9. Дифференциальные операторы. Оператор набла ∇ определяется формулой

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

При этом в декартовых координатах (2.1) (рис. 2.2) имеем

$$\nabla\Phi(x, y, z) \equiv \operatorname{grad}\Phi(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \equiv \operatorname{div}\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$
$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \equiv \operatorname{rot}\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k},$$

где

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

— векторная функция точки с координатами (x, y, z), $\Phi(x, y, z)$ — скалярная функция этой точки, i, j, k — орты.

В цилиндрических координатах (2.3) рис. (2.6)

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z,$$

где

$$F_\rho = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi,$$
$$F_\varphi = -F_x\sin\varphi + F_y\cos\varphi,$$
$$F_z = F_z.$$

В сферических координатах (2.4) (рис. 2.6)

$$\nabla\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial\theta},$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial F_\rho}{\partial\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta F_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_\rho,$$

где

$$F_\theta = F_x\cos\theta\cos\varphi + F_y\cos\theta\sin\varphi - F_z\sin\theta,$$
$$F_\varphi = -F_x\sin\varphi + F_y\cos\varphi.$$
$$F_\rho = F_x\sin\theta\cos\varphi + F_y\sin\theta\sin\varphi + F_z\cos\theta.$$

Действия с оператором ∇:

$$\nabla(\Phi+\Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi,\ \nabla(\alpha\Phi) = \alpha\nabla\Phi,\ \alpha = \text{const},$$
$$\nabla\times(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \nabla\times\mathbf{F} + \nabla\times\mathbf{G},\ \nabla\times(\alpha\mathbf{F}) = \alpha\nabla\times\mathbf{F},$$
$$\nabla(\Phi\Psi) = \Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi,$$
$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}),$$
$$\nabla\cdot(\Phi\mathbf{F}) = \Phi\nabla\cdot\mathbf{F} + (\nabla\Phi)\cdot\mathbf{F},$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\nabla\times\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{G},$$
$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\Phi\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G}\cdot\nabla\Phi) + \Phi(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F},$$
$$\nabla\times(\Phi\mathbf{F}) = \Phi\nabla\times\mathbf{F} + \nabla\Phi\times\mathbf{F},$$
$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}),$$
$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} = \frac{1}{2}[\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) + \nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) - \mathbf{F}(\nabla\cdot\mathbf{G}) + \mathbf{G}(\nabla\cdot\mathbf{F}) -$$
$$- \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{F})]$$

Легко показать, что

$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\Phi = G_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + G_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + G_z\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$
$$(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} = G_x\frac{\partial F}{\partial x} + G_y\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + G_z\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z} =$$
$$= (\mathbf{G}\cdot\nabla F_x)\,\mathbf{i} + (\mathbf{G}\cdot\nabla F_y)\,\mathbf{j} + (\mathbf{G}\cdot\nabla F_z)\,\mathbf{k}.$$

Оператор Лапласа Δ определяется формулой

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Его действия на скалярную $\Phi = \Phi(x, y, z)$ и векторную $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ функции равны соответственно

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$
$$\Delta\mathbf{F} = \Delta F_x\mathbf{i} + \Delta F_y\mathbf{j} + \Delta F_z\mathbf{k}.$$

Если функция Φ задана в цилиндрических координатах (2.3), $\Phi = \Phi(\rho, \varphi, z)$, действие оператора Лапласа сводится к следующему выражению:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

Если Φ задана в сферических координатах (2.4), $\Phi = \Phi(\rho, \theta, \varphi)$, то

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\rho^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}.$$

Операции второго порядка даются формулами

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi,$$
$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) = \Delta\mathbf{F} + \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}),$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F},$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Phi = \nabla\times(\nabla\Phi) = 0,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) = 0.$$

Пусть заданы скалярная $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, t)$ и векторная $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ функции кривой, описываемой радиусом-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (2.5) или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, и параметром t. Их полные производные вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ по отношению к парамегру t равны соответственно

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial t},$$
$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t} = \frac{dF_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dF_z}{dt}\mathbf{k} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}.$$

Производные по направлению, заданному единичным вектором $\mathbf{v} = \cos\alpha_x\mathbf{i} + \cos\alpha_y\mathbf{j} + \cos\alpha_z\mathbf{k}$, представляют собой скорости изменения функций

Φ и $\mathbf{F}$ по отношению к величине перемещения s точки $\mathbf{r}$ вдоль выбранного направления:

$$\frac{d\Phi}{ds} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cos\alpha_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cos\alpha_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cos\alpha_z,$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{F} = \frac{dF_x}{ds}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{ds}\mathbf{j} + \frac{dF_z}{ds}\mathbf{k};\quad \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

Величина s есть длина дуги кривой, касающейся вектора $\mathbf{u}$.

10. *Интегральные теоремы.* Пусть V — некоторый объем в пространстве, ограниченный поверхностью S. Если область V является ограниченной и пространственно односвязной, т. е. любая простая замкнутая кривая целиком принадлежащая V, может быть стянута в точку с помощью непрерывной деформации, не выходя из области V, поверхность S замкнута и регулярна, т. е. функция, задающая ее параметрическое описание, имеет отличные от нуля частные производные во всех точках поверхности, а функции $\Phi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ однозначны и непрерывны в V и на S, то справедливы следующие теоремы.

1. Теорема Гаусса — Остроградского (о дивергенции)

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r})\,dV = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}.$$

2. Теорема о градиенте

$$\int_V \nabla\Phi(\mathbf{r})\,dV = \int_S \Phi(\mathbf{r})\,d\mathbf{S}.$$

3. Теорема о роторе

$$\int_V \nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r})\,dV = \int_S d\mathbf{S}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

4. Теорема Гаусса

$$\int_V \Delta\Phi\,dV = \int_S d\mathbf{S}\cdot\nabla\Phi = \int_S \frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dS.$$

5. Теорема Грина

$$\int_V \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi\,dV + \int_V \Psi\Delta\Phi\,dV = \int_S d\mathbf{S}\cdot(\Psi\nabla\Phi) = \int_S \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dS,$$

$$\int_V (\Psi\Delta\Phi - \Phi\Delta\Psi)\,dV = \int_S d\mathbf{S}\,(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi) =$$

$$= \int_S \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)dS,$$

где нормальная производная $\partial\Phi/\partial n$ определяется выражением

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dS \equiv (d\mathbf{S}\cdot\nabla)\,\Phi$$

и представляет собой производную по направлению нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S, направленной наружу.

6. Теорема Стокса

$$\int_S d\mathbf{S}\,(\nabla\times\mathbf{F}(\mathbf{r})) = \oint_C d\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

где C — замкнутая кривая, ограничивающая поверхность S.

7. Другие теоремы:

$$\int_S (d\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}),$$

$$\int_S d\mathbf{S}\times\nabla\Phi(\mathbf{r}) = \oint_C d\mathbf{r}\,\Phi(\mathbf{r}).$$

Все теоремы остаются справедливыми и для неограниченной области V, если подынтегральные функции имеют порядок $O(1/r^3)$ при $r\to\infty$ в поверхностных интегралах и $O(1/r^2)$ при $r\to\infty$ в криволинейных.

11. *Матрицы.* Под матрицей размером $m\times n$ понимают прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, составленную из скаляров a_{ik}:

$$A \equiv [a_{ik}] \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Скаляры a_{ik} называются элементами матрицы A. Матрица размером $n\times n$ называется квадратной матрицей порядка n. Если $a_{ik} = 0$ при $i\neq k$, то матрица называется диагональной. Если $a_{ik} = \delta_{ik}$, где $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ и $\delta_{ik} = 0$ при $i\neq k$, то матрица называется единичной.

Матрица размером $n\times 1$ называется столбцом, а матрица $1\times n$ — строкой:

$$x \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad x^{\mathrm{T}} = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n).$$

Матрица A^{T} называется транспонированной к A, если элементы ее строк расставлены по столбцам, а элементы столбцов — по строкам:

$$A^{\mathrm{T}} = [a^{\mathrm{T}}_{ik}] = [a_{ki}].$$

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,\quad I = [\delta_{ik}].$$

Матрица A^{+}, эрмитово-сопряженная с A, есть матрица

$$A^{+} = [a^{*}_{ki}],\ \text{т. е.}\ A^{+} = (A^{*})^{\mathrm{T}},$$

где элемент a^{*}_{ki} представляет собой число, комплексно сопряженное к a_{ki}.

Квадратная матрица $A \equiv [a_{ik}]$ называется:

симметричной, если $A^T = A$, т. е. $a_{ik} = a_{ki}$;
кососимметричной, если $A^T = -A$, т. е. $a_{ik} = -a_{ki}$;
эрмитовой (самосопряженной), если $A^+ = A$, т. е. $a_{ik} = a^*_{ki}$;
косоэрмитовой, если $A^+ = -A$, т. е. $a_{ik} = -a^*_{ki}$;
ортогональной, если $A^T A = AA^T = I$, т. е. $A^T = A^{-1}$;
унитарной, если $A^+ A = AA^+ = I$, т. е. $A^+ = A^{-1}$.

Операции над матрицами определяются с помощью операций над их элементами. Пусть даны матрицы $A = [a_{ik}]$, $B = [b_{ik}]$ и $C = [c_{ik}]$. Тогда по определению:

равенство матриц $A = B$ при $a_{ik} = b_{ik}$;

сумма матриц $A + B = C$ при $a_{ik} + b_{ik} = c_{ik}$;

произведение матриц $AB = C$ при $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$; где A есть матрица размером $m \times n$, B — размером $n \times r$, а C — размером $m \times r$;

произведение матрицы A на скаляр α

$$\alpha A \equiv \alpha [a_{ik}] \equiv [\alpha a_{ik}].$$

Следом матрицы $A = [a_{ik}]$ размером $n \times n$ называется величина, равная сумме ее диагональных элементов:

$$\mathrm{Tr}A \text{ (или } \mathrm{Sp}A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Свойства операции следа:

$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}\,A + \mathrm{Tr}B, \quad \mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}A,$$
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA), \quad \mathrm{Tr}(AB - BA) = 0.$$

Если матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & A_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

то о ней говорят как о прямой сумме матриц A_1, A_2, ... и записывают

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \qquad (9)$$

При этом

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}A_1 + \mathrm{Tr}A_2 + \ldots$$

Прямым произведением $A \otimes B$ матрицы $A = [a_{ik}]$ размером $m \times n$ и матрицы $B = [b_{i'k'}]$ размером $m' \times n'$ называют матрицу

$$A \otimes B = [c_{jh}], \quad c_{jh} = a_{ik} b_{i'k'}$$

размером $mm' \times nn'$, где индекс j обозначает порядковый номер пары (i, i') в последовательности $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, m'), (2, 1), \ldots, (m, m')$, а индекс h — порядковый номер пары (k, k') в аналогичной последовательности. При этом

$$\mathrm{Tr}A \otimes B = \mathrm{Tr}A \mathrm{Tr}B.$$

Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице A ((8) при $m = n$), называется число

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (10)$$

где M_{ij} — минор элемента a_{ij} матрицы A. Минором M_{ij} любого элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель порядка $n - 1$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца, т. е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Номер строки i в (10) может быть любой. Значение $\det A$ от его выбора не зависит. Формула (10) сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителя порядка $n - 1$. Последовательное применение (10) позволяет определитель любого порядка привести к виду, в котором не вычисленными останутся только определители второго порядка. По определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Легко видеть, что определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Для двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \det B.$$

Для прямой суммы (9) справедлива формула

$$\det A = \det A_1 \det A_2 \ldots$$

12. *Дельта-функция Дирака.* Функция Дирака $\delta(x)$ действительной переменной x определяется выражением $(a < b)$

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-c)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } c < a \text{ или } c > b, \\ \frac{1}{2} f(c) & \text{при } c = a \text{ или } c = b, \\ f(c) & \text{при } a < c < b, \end{cases}$$

где $f(x)$ — произвольная функция, непрерывная в точке $x = c$. Функция $\delta(x)$ есть обобщенная (символическая) функция, удовлетворяющая условиям

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

Она может быть представлена интегралом Фурье

$$\delta(x-c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-c)},$$

или аппроксимирована непрерывно дифференцируемыми функциями вида

$$\delta(x,\ \alpha) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2x^2+1)} \to \delta(x) \text{ при } \alpha \to \infty,$$

$$\delta(x,\ \alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2x^2} \to \delta(x) \text{ при } \alpha \to \infty,$$

$$\delta(x,\ \alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\frac{\sin \alpha x}{\alpha x} \to \delta(x) \text{ при } \alpha \to \infty.$$

При этом

$$\lim_{\alpha\to\infty}\delta(x,\ \alpha) = 0\ (x \neq 0),\ \lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x,\ \alpha)\,dx = 1,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-c,\ \alpha)\,dx = \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right]$$

при условии, что $f(x-0)$ и $f(x+0)$ существуют.

В приложениях часто полезными оказываются следующие формальные соотношения, содержащие $\delta(x)$:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x),\ a>0,$$

$$\delta(-x) = \delta(x),$$

$$f(x)\,\delta(x-a) = \frac{1}{2}\left[f(a-0)+f(a+0)\right]\delta(x-a),$$

$$x\delta(x) = 0,$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2a}\left[\delta(x-a)+\delta(x+a)\right],\ a>0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a-x)\,\delta(x-b)\,dx = \delta,(a-b).$$

3. Вычисление погрешностей

При экспериментальном измерении различных физических величин, а также при вычислениях с помощью формул возникает необходимость учета погрешностей или ошибок измерений. Ошибки разделяют на систематические и случайные. Систематические погрешности возникают в результате неисправностей измерительных приборов, ошибочности самого метода измерений или других упущений со стороны наблюдателя. Случайные ошибки обусловлены неточностью считывания данных и другими отклонениями вероятностного типа. Для получения наиболее достоверных величин необходимо проводить большое число измерений.

Пусть $N_1, N_2, \ldots, N_n$ — результаты n измерений некоторой физической величины. Тогда по определению среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$N = \frac{N_1+N_2+\cdots+N_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i.$$

Погрешности среднего результата измерений даются формулами:

средняя абсолютная ошибка

$$\rho \equiv \Delta N = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|N-N_i|,$$

относительная ошибка отдельного измерения

$$E = \frac{\Delta N}{N},$$

средняя квадратичная ошибка

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(N-N_i)^2},$$

вероятная ошибка

$$\eta = 0{,}6745\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(N-N_i)^2},$$

средняя квадратичная ошибка среднего арифметического

$$\sigma_N = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(N-N_i)^2}.$$

Если число измерений $n > 30$, то между σ и ρ существует простая связь

$$\sigma = 1{,}25\rho.$$

Так как ошибки измерений, как правило, малы по сравнению с измеряемыми величинами, то для их вычисления по заданным формулам можно пользоваться дифференциальным исчислением. Это значительно упрощает расчет ошибок при сложных функциональных зависимостях измеряемых и наблюдаемых величин. Так, пусть наблюдаемая величина N не может быть непосредственно измерена. Вместо нее может быть измерена другая величина x, связанная с N известной функциональной зависимостью

$$N = f(x).$$

Пусть средняя абсолютная ошибка измерения величины x есть $\pm dx$. Эта ошибка вызовет ошибку в искомой величине $\pm dN$. Последняя определяется выражением

$$dN = \pm dx\frac{df(x)}{dx}.$$

Относительная ошибка измерения

$$E = \pm\frac{dN}{N} = \pm\frac{dx}{f(x)}\frac{df(x)}{dx}.$$

Если величина N является функцией нескольких независимо измеряемых переменных:

$$N = f(x, y, z, \ldots),$$

то средняя квадратичная ошибка определения N дается формулой

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\sigma_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\sigma_y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\sigma_z\right)^2 + \cdots}, \qquad (12)$$

где σ_x, σ_y, σ_z, ... — средние квадратичные ошибки измерений величин x, y, z, ... Максимальная ошибка при этом будет

$$\Delta N_{max} = \left|\frac{\partial f}{\partial x}dx\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}dy\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}dz\right| + \cdots \qquad (13)$$

Для конкретных математических величин формулы для вычисления погрешностей по измеряемым параметрам x, y, z, ... приведены ниже:

Наблюдаемая величина	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
x^n	$\pm nx^{n-1}\Delta x$	$\pm n\frac{\Delta x}{x}$
$\sqrt[n]{x}$	$\pm \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\Delta x$	$\pm \frac{1}{n}\frac{\Delta x}{x}$
$\sin x$	$\pm \cos x \cdot \Delta x$	$\pm \operatorname{ctg} x \cdot \Delta x$
$\cos x$	$\pm \sin x \cdot \Delta x$	$\pm \operatorname{tg} x \cdot \Delta x$
$\operatorname{tg} x$	$\pm \frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\pm \frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\pm \frac{\Delta x}{\sin^2 x}$	$\pm \frac{2\Delta x}{\sin 2x}$
	Средние квадратичные ошибки	
$x+y+z$	$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2}$	$\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2}}{x+y+z}$
$x-y$	$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$	$\frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}{x-y}$
xyz	$[(yz\sigma_x)^2+(xz\sigma_y)^2+(xy\sigma_z)^2]^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{x^2}+\frac{\sigma_y^2}{y^2}+\frac{\sigma_z^2}{z^2}}$
$\frac{x}{y}$	$\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{y^2}+\left(\frac{x}{y^2}\right)^2\sigma_y^2}$	$\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{x^2}+\frac{\sigma_y^2}{y^2}}$

Продолжение

Наблюдаемая величина	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
	Максимальные ошибки	
$x+y+z+\cdots$	$\pm(\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots)$	$\pm\frac{\Delta x+\Delta y+\Delta z+\cdots}{x+y+z+\cdots}$
xyz	$\pm(xy\,\Delta z+xz\,\Delta y+yz\,\Delta x)$	$\pm\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}\right)$
$\frac{x}{y}$	$\pm\frac{y\,\Delta x+x\,\Delta y}{y^2}$	$\pm\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right)$
$x-y$	$\pm(\Delta x+\Delta y)$	$\pm\frac{\Delta x+\Delta y}{x-y}$

4. Соотношения для перевода различных единиц физических величин в СИ

1 Å = 10^{-10} м (точно) = 0,1 нм (точно);
1 икс.-ед. = 1,00206 · 10^{-13} м = 0,100206 пм;
1 дюйм = 0,0254 м;
1 фут = 12 дюйм = 0,3048 м;
1 ярд = 3 фут = 0,9144 м;
1 миля = 1760 ярд = 1609,344 м;
1 морская миля = 1852 м;
1 астрономическая единица (а. е.) = 1,49598 · 10^{11} м;
1 световой год (св. год) = 9,4605 · 10^{15} м;
1 пк (парсек) = 3,0857 · 10^{16} м;
1 б (барн) = 10^{-28} м^2 (точно);
1 л (литр) = 1 дм^3;
1 галлон британский = 4,546 дм^3;
1 галлон США = 3,785 дм^3;
1 бушель = 8 галлон британский = 36,37 дм^3;
1 тропический год (в 1900 г.) = 31 556 925,9747 с;
1 ц = 100 кг (точно);
1 унция = 0,02835 кг;
1 карат = 0,2 · 10^{-3} кг;
1 фунт (русский) = 1/40 пуда = 0,409512 кг;
1 фунт (торговый британский) = 0,453592 кг;
1 □° = 3,0462... · 10^{-4} ср;
1 миля/ч = 1,609 км/ч = 0,477 м/с;
1 узел/ч = 1 морская миля/ч = 1,852 км/ч = 0,514 м/с;
1 Гал = 10^{-2} м/с^2 (точно);
1 дин = 10^{-5} Н (точно) = 10 мкН (точно);
1 кгс = 9,80665 Н (точно);
1 гс = 9,80665 мН (точно);
1 тс = 9,80665 кН (точно);
1 кгс/м^2 = 9,80665 Па (точно);
1 кгс/см^2 = 98,0665 кПа (точно);
1 кгс/мм^2 = 9,80665 МПа (точно);

1 мм вод. ст. = 9,80665 Па (точно);
1 мм рт. ст. = 133,322 Па;
1 Торр = 133,322 Па;
1 эрг = 10^{-7} Дж;
1 л. с. = 735,499 Вт;
1 л. с. (британская) = 745,7 Вт;
1 Ст (стокс) = 10^{-4} м²/с;
1 сСт (сантистокс) = 1 мм²/с;
1 П (пуаз) = 0,1 Па · с;
1 сП (сантипуаз) = 1 мПа · с;
1 Ом · мм²/м = 10^{-6} Ом · м = 1 мкОм · м;
1 Мкс (максвелл) = 10^{-8} Вб (точно) = 10 нВб (точно);
1 Гс (гаусс) = 10^{-4} Тл (точно) = 100 мкТл;
1 Гб (гильберт) = [10 / (4π)]А = 0,795775 А;
1 Э (эрстед) = [10^3/(4π)] А/м = 79,5775 А/м;
1 кал = 4,1868 Дж (точно);
1 кал (термохимическая) = 4,1840 Дж;
1 $кал_{15}$ (15-градусная) = 4,1855 Дж;
1 рад = 0,01 Гр = 10 мГр;
1 бэр = 0,01 Дж/кг = 10 мДж/кг;
1 Р (рентген) = 2,58 · 10^{-4} Кл/кг (точно) = 0,258 мКл/кг (точно);
1 Ки (кюри) = 3,700 · 10^{10} Бк (точно) = 37,00 ГБк (точно);
1 аком = 10^5 Па · с/м³ (точно);
1 ампер-виток (Ав) = 1 А;
1 атм (атмосфера физ.) = 101,325 кПа;
1 ат (атмосфера техн.) = 98,0665 кПа;
1 Вт/кг (ватт на килограмм) = 1 Гр/с [для мощности поглощенной дозы излучения];
1 гамма (γ) [для массы] = 1 мкг;
1 гамма (γ) [для напряженности магнитного поля] = 0,795775 мА/м;
1 градус (град) [для разности температуры] = 1 К;
1 градус Кельвина (°К) = 1 К;
1 грамм-атом соответствует 1 моль;
1 грамм-ион соответствует 1 моль;
1 грамм-моль (грамм-молекула) соответствует 1 моль;
1 грамм-эквивалент соответствует n моль, где $n = \frac{m_{e'}}{M} < 1$ ($m_{e'}$ — эквивалентная масса, г; M — молярная масса, г/моль);
1 джоуль на килограмм (Дж/кг) = 1 Гр [для поглощенной дозы излучения];
1 инерта или 1 техническая единица массы (т.е.м.) = 9,80665 кг;
1 литр-атмосфера (л. атм) = 101,325 Дж;
1 магн = 1 Гн/м;
1 махе ≈ 13,5 · 10^{-3} м⁻³ · с⁻¹;
1 мехом = 10^3 Н · с/м = 1 кН · с/м;
1 микромикрон (мкмк) = 1 пм = 10^{-12} м;
1 микрон (мк) = 1 мкм = 10^{-6} м;
1 миллимикрон (ммк) = 1 нм = 10^{-9} м;
1 миллипьеза = 1 Па;
1 нормальный кубический метр (нм³) = 1 м³;
1 ньютон на квадратный метр (Н/м²) = 1 Па;
1 ньютон-секунда на квадратный метр (Н · с/м²) = 1 Па · с;
1 пьеза = 1 кПа;
1 савар ≈ 3,32 мокт;
1 св (свеча) = 1 кд (кандела);
1 складочный кубический метр = 1 м³;

1 стен = 1 кН;
1 стен-метр = 1 кДж (для работы и энергии);
1 термия = 4,1868 МДж;
1 укм (условный квадратный метр) = 1 м²;
1 фригория = 4,1868 кДж;
1 цент ≈ 0,833 мокт;
1 экм (эквивалентный квадратный метр) = 1 м²;
1 эман = 3,7 · 10^3 м⁻³ · с⁻¹.

5. Универсальные физические постоянные

Постоянная	Обозначение	Числовое значение
Атомная единица массы	а. е. м.	1,6605655 (86) · 10^{-27} кг = 931,5016 (26) МэВ/с²
Гравитационная постоянная	G_N	6,6720 (41) · 10^{-11} Н · м² × × кг⁻² = 6,7065 (41) · 10^{-39} × × $\hbar c \left(\frac{\text{ГэВ}}{c^2}\right)^{-2}$
Заряд электрона	e	1,6021892 (46) · 10^{-19} Кл
Классический радиус электрона	r_0	2,8179380 (70) · 10^{-15} м
Комптоновская длина волны:		
электрона	λ_e	3,8615905 (64) · 10^{-13} м
протона	λ_p	2,103139 (14) · 10^{-16} м
нейтрона	λ_n	2,100243 (14) · 10^{-16} м
Магнетон Бора	μ_B	9,274078 · 10^{-24} Дж · Тл⁻¹
Магнитная постоянная	μ_0	4π · 10^{-7} Гн · м⁻¹ = 1,2566370614 · 10^{-6} Гн · м⁻¹
Магнитный момент:		
протона (в единицах μ_N)	μ_p	2,7928456
нейтрона (в единицах μ_N)	μ_n	1,91315
Масса атома:		
водорода (^{1}H)		1,007825036 а. е. м.
дейтерия (^{2}H)		2,014101795 а. е. м.
гелия-4 (^{4}He)		4,002603267 а. е. м.
Масса покоя:		
электрона	m_e	9,109534 (47) · 10^{-31} кг = 5,4858026 · 10^{-4} а. е. м.
протона	m_p	1,6726485 (86) · 10^{-27} кг = 1,007276470 а. е. м.
нейтрона	m_n	1,6749543 · 10^{-27} кг = 1,008665012 а. е. м.
Молярная газовая постоянная	R	8,31441 Дж · моль⁻¹ · К⁻¹
Объем моля идеального газа при нормальных условиях (101,325 кПа, 273,15К)	V_m	22,41383 · 10^{-3} м³ · моль⁻¹
Отношение массы протона к массе электрона	m_p/m_e	1836,15152 (70)

Продолжение

Постоянная	Обозначение	Числовое обозначение
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}022045\ (31) \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	k	$1{,}380662\ (44) \cdot 10^{-23}$ Дж · К$^{-1}$
Постоянная Планка	h	$6{,}626176\ (36) \cdot 10^{-34}$ Дж · с
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1{,}0545887\ (57) \cdot 10^{-34}$ Дж · с
	$\hbar c$	$197{,}32858\ (51) \cdot 10^{-15}$ МэВ · м
Постоянная Ридберга	R_∞	10973731,77 м$^{-1}$
Постоянная тонкой структуры	α	0,0072973506
	$1/\alpha$	137,03604 (11)
Постоянная Фарадея	F	96484,56 Кл · моль$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	a_0	$0{,}52917706\ (44) \cdot 10^{-10}$ м
Скорость света в вакууме	c	$2{,}99792458 \cdot 10^8$ м · с$^{-1}$
Удельный заряд электрона	e/m_e	$1{,}7588047 \cdot 10^{11}$ Кл · кг$^{-1}$
Ускорение свободного падения (стандартное)	g	9,80665 м · с$^{-2}$
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}854187818\ (71) \times \times 10^{-12}$ Ф · м$^{-1}$
Энергия покоя:		
электрона	$m_e c^2$	0,5110034 (14) МэВ
протона	$m_p c^2$	938,2796 (27) МэВ
нейтрона	$m_n c^2$	939,5731 МэВ
дейтрона	$m_d c^2$	1875,6280 (53) МэВ
Энергия Ридберга	hcR_∞	13,605804 (36) эВ
Ядерный магнетон	μ_N	$5{,}050824 \cdot 10^{-27}$ Дж · Тл$^{-1}$

6. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		русское	международное
10^{18}	экса	Э	E
10^{15}	пета	П	P
10^{12}	тера	Т	T
10^{9}	гига	Г	G
10^{6}	мега	М	M
10^{3}	кило	к	k
10^{2}	гекто	г	h
10^{1}	дека	да	da
10^{-1}	деци	д	d
10^{-2}	санти	с	c
10^{-3}	милли	м	m
10^{-6}	микро	мк	μ
10^{-9}	нано	н	n
10^{-12}	пико	п	p
10^{-15}	фемто	ф	f
10^{-18}	атто	а	a

7. Латинский и греческий алфавиты

Латинский алфавит		Греческий алфавит	
Буквы	Название буквы	Буквы	Название буквы
A a	а	Α α	альфа
B b	бе	Β β	бета
C c	це	Γ γ	гамма
D d	де	Δ δ	дельта
E e	е	Ε ε	эпсилон
F f	эф	Ζ ζ	дзета
G g	ге (же)	Η η	эта
H h	ха (аш)	Θ ϑ (θ)	тета
I i	и	Ι ι	йота
J j	йот (жи)	Κ κ	каппа
K k	ка	Λ λ	ламбда
L l	эль	Μ μ	ми (мю)
M m	эм	Ν ν	ни (ню)
N n	эн	Ξ ξ	кси
O o	о	Ο ο	омикрон
P p	пе	Π π	пи
Q q	ку	Ρ ρ	ро
R r	эр	Σ σ	сигма
S s	эс	Τ τ	тау
T t	тэ	Υ υ	ипсилон
U u	у	Φ φ	фи
V v	ве	Χ χ	хи
W w	дубль-ве	Ψ ψ	пси
X x	икс	Ω ω	омега
Y y	игрек		
Z z	зет		

Примечание. В скобках дано другое название или начертание букв.

Рекомендуемая литература

Механика

Голдстейн Г. Классическая механика.— М.: Наука, 1975.— 416 с.
Киттель Ч., Найт У., Рудерман Н. Механика.— М.: Наука, 1975.— 480 с.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Т. I. Механика.— М.: Наука, 1965.— 204 с.
Матвеев А. Н. Механика и теория относительности.— М.: Высш. шк. 1986.— 320 с.
Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 1. Механика. Молекулярная физика.— М.: Наука, 1986.— 432 с.
Сивухин Д. В. Общий курс физики: Т. I. Механика.— М.: Наука, 1974.— 520 с.

Молекулярная физика и термодинамика

Кикоин И. К., Кикоин А. К. Молекулярная физика.— М.: Физматгиз, 1963.— 500 с.
Матвеев А. Н. Молекулярная физика.— М.: Высш. шк., 1987.— 360 с.
Рейф Ф. Статистическая физика.— М.: Наука, 1977.— 352 с.
Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 1. Механика. Молекулярная физика.— М.: Наука, 1986.— 432 с.
Сивухин Д. В. Общий курс физики: Т. II. Термодинамика и молекулярная физика.— М.: Наука, 1975.— 552 с.

Электродинамика

Ахиезер А. И. Общая физика. Электрические и магнитные явления.— Киев : Наук. думка, 1981.— 472 с.
Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А. Магнетизм — что это? — Киев : Наук. думка, 1981.— 207 с.
Бредов Н. Н., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н. Классическая электродинамика.— М.: Наука, 1985.— 400 с.
Калашников С. Г. Электричество.— М.: Наука, 1985.— 576 с.
Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм.— М.: Высш. шк., 1983.— 463 с.
Парселл. Электричество и магнетизм.— М.: Наука, 1975.— 440 с.

Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.— М.: Наука, 1982.— 496 с.
Сивухин Д. В. Общий курс физики: Т. III. Электричество.— М.: Наука, 1977.— 688 с.

Колебания и волны

Крауфорд Ф. Волны.— М.: Наука, 1976.— 528 с.
Матвеев А. Н. Механика и теория относительности.— М.: Высш. шк., 1986.— 320 с.
Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.— М.: Наука, 1982.— 496 с.
Сивухин Д. В. Общий курс физики: Т. III. Электричество.— М.: Наука, 1977.— 688 с.

Оптика

Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика.— М.: Наука, 1982.— 496 с.
Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц.— М.: Наука, 1987.— 320 с.
Сивухин Д. В. Общий курс физики: Оптика.— М.: Наука, 1985.— 752 с.

Атомная физика

Вихман Э. Квантовая физика.— М.: Наука, 1977.— 416 с.
Савельев И. В. Курс общей физики: Т. 3. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц.— М.: Наука, 1987.— 320 с.
Сивухин Д. В. Общий курс физики: Атомная и ядерная физика.— Ч. I. Атомная физика.— М.: Наука, 1986.— 416 с.
Фано У., Фано А. Физика атомов и молекул.— М.: Наука, 1980.— 656 с.
Шпольский Э. В. Атомная физика: В 2-х т.—М.: Наука, 1984.

Ядерная физика

Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. Н., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1980.— 704 с.
Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Квантовые поля.— М.: Наука, 1980.— 320 с.
Валантэн Л. Субатомная физика: Ядра и частицы: В 2-х т.— М.: Мир, 1986.
Вальтер А. К., Залюбовский И. И. Ядерная физика.— Харьков : Вища школа, 1978.— 424 с.
Фраунфельдер Г., Хенли Э. Субатомная физика.— М.: Мир, 1979.— 736 с.
Хенли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 316 с.
Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц.— М.: Мир, 1987.— 624 с.
Широков Ю. М., Юдин Н. П. Ядерная физика.— М.: Наука, 1980.— 728 с.

Дополнительная литература

Физический энциклопедический словарь.— М.: Сов. энцикл., 1987.— 944 с.

Фолта Я., Новы Л. История естествознания в датах. Хронологический обзор.— М.: Прогресс, 1987.— 496 с.

Храмов Ю. А. Физики. Биографический справочник.— М.: Наука, 1983.— 400 с.

Чолаков В. Нобелевские премии. Ученые и открытия : Пер. с болг.— М.: Мир, 1986.— 368 с.

Перечень таблиц

Таблица 3.1. Плотность ρ различных веществ
Таблица 3.2. Коэффициенты трения покоя μ и трения скольжения μ'
Таблица 5.1. Коэффициент восстановления k при ударе тел со скоростями, меньшими 3 м/с
Таблица 10.1. Модуль Юнга E, коэффициент Пуассона μ, модуль сдвига G для некоторых веществ
Таблица 12.1. Коэффициент сжимаемости $\varkappa$ жидкостей при $T_s = 20^\circ$ С
Таблица 13.1. Динамическая вязкость η некоторых жидкостей и газов при $T = 20^\circ$ С и $P = 101{,}3$ кПа
Таблица 13.2. Коэффициент лобового сопротивления c для некоторых тел
Таблица 15.1. Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ некоторых веществ
Таблица 16.1. Коэффициент взаимной диффузии D_{12} для некоторых смесей газов
Таблица 16.2. Коэффициент теплопроводности $\varkappa$ некоторых газов
Таблица 20.1. Удельная теплоемкость c_P некоторых веществ в твердом и жидком состояниях
Таблица 20.2. Удельные теплоемкости c_V и c_P некоторых газов при $T = 20^\circ$ С, $P = 101{,}325$ кПа
Таблица 22.1. Температура плавления $T_{пл}$ и удельная теплота плавления λ при $P = 101{,}325$ кПа для некоторых веществ
Таблица 22.2. Температура кипения $T_{кип}$ и удельная теплота испарения r при $P = 101{,}325$ кПа для некоторых веществ
Таблица 25.1. Поляризованность α атомов некоторых веществ
Таблица 25.2. Относительная диэлектрическая проницаемость ε некоторых веществ
Таблица 26.1. Температура T_k перехода некоторых веществ в сверхпроводящее состояние
Таблица 29.1. Магнитная проницаемость μ некоторых веществ
Таблица 33.1. Крупнейшие ускорители на встречных пучках (по состоянию на 1988 г.)
Таблица 36.1. Добротность Q некоторых систем
Таблица 40.1. Скорость звука c в различных средах
Таблица 43.1. Шкала электромагнитных волн

Таблица 46.1. Показатель преломления n газов (паров) для желтой линии натрия ($\lambda = 589{,}3$ нм)
Таблица 46.2. Показатель преломления n жидкостей (относительно воздуха при $T = 20$ °С, $P = 101{,}3$ кПа для желтой линии натрия $\lambda = 589{,}3$ нм)
Таблица 46.3. Показатель преломления n твердых тел при $t = 20$ °С (относительно воздуха при $t = 20°$ С, $P = 101{,}3$ кПа для желтой линии натрия $\lambda = 589.3$ нм)
Таблица 46.4. Зависимость показателя преломления n от длины волны λ светового излучения
Таблица 52.1. Длины волн λ спектральных линий испускания некоторых элементов в видимой части спектра
Таблица 52.2. Фраунгоферовы линии
Таблица 66.1. Параметры, характеризующие протоны, нейтроны и электроны
Таблица 67.1. Энергии основных состояний атомов
Таблица 67.2. Электронные конфигурации элементов
Таблица 70.1. Параметры распределения заряда (70.27), радиусы ядер (все в 10^{-13} см) и максимальная плотность нуклонов (в единицах 10^{39} нуклон/см^3)
Таблица 70.2. Спины J и четности π основных состояний некоторых атомных ядер ($\pi = \pi_n (-1)^L$) (экспериментальные данные)
Таблица 70.4. Квадрупольные моменты Q (в 10^{-24} см^2) некоторых атомных ядер (экспериментальные данные)
Таблица 72.1. Нуклонные конфигурации легких ядер
Таблица 73.1. Тепловые эффекты Q некоторых ядерных реакций
Таблица 73.2. Среднее число нейтронов ν, испускаемых в одном акте делсния, и коэффициент η (73.85) для тепловых ($E_n = 0{,}025$ эВ) и быстрых ($E_n = 1$ МэВ) нейтронов
Таблица 75.1. Стабильные частицы
Таблица 75.2. Барионы, $B = 1$
Таблица 75.3. Мезонные резонансы
Таблица 75.4. Барионные резонансы
Таблица 75.5. Типы распадов некоторых частиц и их характеристики
Таблица 75.6. Законы сохранения в физике частиц
Таблица 76.1. Изотопический спин некоторых частиц
Таблица 76.2. Свойства кварков
Таблица 76.3. Кварк-лептонные поколения
Таблица 76.4. Кварковая структура барионов
Таблица 76.5. Кварковая структура мезонов
Таблица 76.6. Характеристики преонов
Таблица 77.1. Фундаментальные взаимодействия
Таблица 77.2. Многочастичные взаимодействия составных частиц
Таблица 77.3. Экспериментальные данные лептон-адронных процессов распада

Справка имен

Авогадро Амедео (Avogadro A., 1776—1856), итальянский физик и химик

Альварец Луис Уолтер (Alvarez L., p. 1911), американский физик-экспериментатор

Амага Эмиль (Amagat E., 1841—1915), французский физик

Амальди Эдоардо (Amaldi E., p. 1908), итальянский физик-экспериментатор

Амбарцумян Виктор Амазаспович (р. 1908), советский физик и астроном . . . . . .

Ампер Андре Мари (Ampere A. M., 1775—1836), французский физик, математик и химик

Андерсон Карл Дэвид (Anderson C. D., p. 1905), американский физик

Архимед из Сиракуз (ок. 287—212 до н. э.), древнегреческий математик, механик и астроном

Бабине Жак (Babinet J., 1794—1872), французский физик и астроном

Бак Эрнст (Back E., 1881—1959), немецкий физик-экспериментатор

Бальцмер Иоганн Якоб (Balmer J., 1825—1898), швейцарский физик и математик

Бардин Джон (Bardeen J., p. 1908), американский физик

Баркла Чарльз Гловер (Barkla Ch., 1877—1944), американский физик

Бартнетт Сэмуел Джексон (Barnett S., 1873—1956), американский физик

Басов Николай Геннадиевич (р. 1922), советский физик

Беднорц И. Г. (Bednorz I. G.), немецкий физик

Беккерель Александр Эдмон (Becquerel A. H., 1852—1908), французский физик

Беннет Уиллард Харрисон (Bennet W. R., p. 1903), американский физик

Бер А. (Beer A., XIX в.), немецкий физик

Бернулли Даниил (Bernoulli D., 1700—1782), швейцарский математик и физик

Бертло Марселен (Berthelot M., 1827—1907), французский химик

Бессель Фридрих Вильгельм (Bessel F. W., 1784—1846), немецкий астроном

Бете Ханс Альбрехт (Bethe H. A., p. 1906), немецкий и американский физик-теоретик

Био Жан Батист (Biot J. B., 1774 — 1862), французский физик

Блох Феликс (Bloch F., 1905—1983), американский физик

Блэкетт Патрик Мейнард Стюарт (Blackett P. M. S., 1897—1974), американский физик

Боголюбов Николай Николаевич (р. 1909), советский физик-теоретик и математик

Бозе Шатьендранат (Bose Sh., 1894—1974), индийский физик

Бойль Роберт (Boyle R., 1627—1691), английский химик и физик

Больцман Людвиг (Boltzmann L., 1844—1906), австрийский физик-теоретик

Бор Нильс Хендрик Давид (Bohr N. H. D., 1885—1962), датский физик-теоретик

Бор Оге (Bohr A., p. 1922), датский физик-теоретик

Боте Вальтер Вильгельм Георг (Bothe W. W. G., 1891—1957), немецкий физик

Браге Тихо (Brahe T., 1546—1601), датский астроном

Брейт Грегори (Breit G., p. 1899), американский физик

Бройль Луи де (Broglie L. de, p. 1892), французский физик-теоретик

Броун Роберт (Brown R. J., 1773—1858), английский ботаник

Брэгг Уильям Лоренс (Bragg W. L., 1890—1971), английский физик

Брюстер Дейвид (Brewster D., 1781—1868), шотландский физик и астроном

Бугер Пьер (Bouger P., 1698—1758), французский математик, астроном и физик

Бунзен Роберт Вильгельм (Bunsen R. W., 1811—1899), немецкий химик и геолог

Вавилов Сергей Иванович (1891—1951), советский физик и общественный деятель

Вайнберг Стевен (Weinberg S., 1933),) американский физик-теоретик

Вайскопф Виктор Фредерик (Weisskopf V., p. 1908), американский физик-теоретик

Вайцзеккер Карл (Weizsacker C. von, p. 1912), немецкий физик-теоретик и астрофизик

Ван де Грааф Роберт Джемисон (Van de Graaff R. J., 1901—1967), американский физик

Ван-дер-Ваальс Иоханнес Дидерик (Van der Waals J. D., 1837—1923), нидерландский физик

Вебер Вильгельм Эдуард (Weber W. E., 1804—1891), немецкий физик

Вейль Герман (Weyl H., 1885—1955), немецкий математик

Верде М. (Verdet M., 1824—1866), французский математик

Вигнер Юджин Поль (Wigner E. P., p. 1902), американский физик-теоретик

Вильсон Кеннет Геддес (Wilson K., p. 1936), американский физик-теоретик

Вильсон Роберт Вудров (Wilson R. W., p. 1936), американский физик-экспериментатор

Вильсон Чарльз Томсон Рис (Wilson Ch. Th. R., 1869—1959), английский физик

Вильчек Фрэнк (Wilczek F.), американский физик-теоретик

Вин Вильгельм Карл Вернер (Wien W., 1864—1928), немецкий физик

Вихерт Эмиль (Wiechert E., 1861—1928), немецкий физик и геофизик

Власов Анатолий Александрович (1908—1975), советский физик-теоретик

Вольта Алессандро (Volta A., 1745—1827), итальянский физик, химик и физиолог

Вольфке Мечислав (Wolfke M., 1883—1947), польский физик

Ву Изиньсян (Wu C. S. / W-Chyen-Su, p. 1913), американский физик-экспериментатор

Вульф Георгий (Юрий) Викторович (1863—1925) русский советский физик

Гааз Вандер Иоханес де (Haaz W. de, 1878—1960), нидерландский физик

Габор Денис (Gabor D.,1900—1979), венгерский и английский физик

Галилей Галилео (Galilei G., 1564—1642), итальянский физик и математик

Гамильтон Уильям Роуан (Hamilton W. R.,1805—1865), ирландский математик и физик

Гамов Джордж (Георгий Антонович) (Gamov G., 1904—1968), американский физик-теоретик

Ган Отто (Hahn O., 1878—1968), немецкий радиохимик и физик

Гаудсмит Сэмюэл Абрахам (Goudsmit S. A., 1902—1979), американский физик-теоретик

Гаусс Карл Фридрих (Gauss C. F., 1777—1855), немецкий математик, астроном и физик

Гей-Люссак Жозеф Луи (Gay-Lussac J. L., 1778—1850), французский физик и химик

Гейгер Ханс Вильгельм (Geiger H. W., 1882—1945), немецкий физик-экспериментатор

Гейзенберг Вернер Карл (Heizenberg W. K., 1901—1976), немецкий физик-теоретик

Гелл-Манн Марри (Gell-Mann M., p. 1929), американский физик-теоретик

Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд фон (Helmholtz H. L. F. von, 1821—1894), немецкий естествоиспытатель

Герлах Вольтер (Gerlach W., 1889—1979), немецкий физик-экспериментатор

Герни Рональд Уилфрид (Gurney R., 1899—1953), английский физик-теоретик

Герц Генрих Рудольф (Hertz H. R., 1857—1894), немецкий физик

Герц Густав Людвиг (Hertz G., 1887—1975), немецкий физик

Герцшпрунг Эйнар (Hertzsprung E., 1873—1967), датский астроном

Гиббс Джозайя Уиллард (Gibbs J., 1839—1903), американский физик-теоретик

Глезер Дональд Артур (Glazer D. A., p. 1926), американский физик

Глэшоу Шелдон Ли (Glashow Sh. L., p. 1932), американский физик-теоретик

Голдгабер Морис (Goldhaber M., p. 1911), американский физик

Голдстоун Джеффри (Goldstone J., p. 1933), английский физик-теоретик

Гольданский Виталий Иосифович (р. 1923), советский физико-химик

Гордон Вальтер (Gordon W., 1893—1939), немецкий физик-теоретик

Гордан Пауль Альберт (Gordan P. A., 1837—1912), немецкий математик

Грин Джордж (Green G., 1793—1841), английский математик и физик

Гросс Давид (Gross D. J.), американский физик-теоретик

Гук Роберт (Hooke R., 1635—1703), английский физик

Гюйгенс Христиан (Huygens Ch., 1629—1695), голландский физик, математик и астроном

Дайсон Фримен Джон (Dyson F. J., p. 1923), американский физик-теоретик

Даламбер Жан Лерон (D'Alambert J. L., 1717—1783), французский математик, физик и философ

Дальтон Джон (Dalton J., 1766—1844), английский физик и химик

Дебай Петр Йозеф Вильгельм (Debye P. J. W., 1884—1966), немецкий физик и химик

Денисюк Юрий Николаевич (р. 1927), советский физик

Джаван Али (Javan A., p. 1926), американский физик

Джермер Люстер Халберт (Germer L. H., 1896—1971), американский физик

Джинс Джеймс Хопвуд (Jeans J. H., 1877—1946), английский физик и астрофизик

Джорджи Говард (Georgi H.), американский физик-теоретик

Джоуль Джеймс Прескотт (Juolie J. P., 1818—1889), английский физик

Дирак Поль Андриен Морис (Dirac P. A. M., 1902—1984), английский физик-теоретик и математик

Доплер Иоганн Кристиан (Doppler J. Ch., 1803—1853), австрийский физик, математик и астроном

Дьюар Джеймс (Dewar J., 1842—1923), английский химик и физик

Дэвиссон Клинтон Джозеф (Davisson C. J., 1881—1958), американский физик

Жолио-Кюри Ирен (Joliot-Curie I., 1897—1956), французский физик и радиохимик

Жолио-Кюри Фредерик (Joliot-Curie F., 1900—1958), французский физик

Жуковский Николай Егорович (1847—1921), русский механик

Завойский Евгений Константинович (1907—1976), советский физик-экспериментатор

Зееман Питер (Zeeman P., 1865—1943), нидерландский физик

Зоммерфельд Арнольд Иоганн Вильгельм (Sommerfeld H., 1868—1951), немецкий физик-теоретик

Иваненко Дмитрий Дмитриевич (р. 1904), советский физик-теоретик

Иоффе Абрам Федорович (1880—1960), советский физик

Ирншоу С. (Earnshaw S., XIX в.), английский математик и физик

Камерлинг-Оннес Гейне (Kamerlingh-Onnes, 1853—1926), нидерландский физик

Капица Петр Леонидович (1894—1984), советский физик

Карно Никола Леонидович Сади (Carnot N., 1796—1832), французский физик и инженер

Кеплер Иоганн (Kepler I., 1571—1630), немецкий физик, астроном и математик

Кениг Артур (Konig A., 1856—1901), немецкий физик

Кирхгоф Густав Роберт (Kirchhof G. R., 1824—1887), немецкий физик

Клапейрон Бенуа Эмиль (Clapeyron B. P. E., 1799—1864), французский физик и инженер

Клаузиус Рудольф Юмус Эмануэль (Clausius R. E., 1822—1888), немецкий физик-теоретик

Клебш Рудольф Юлиус Фридрих Альфред (Clebsch R. J. F. A., 1833—1872), немецкий математик

Клейн Оскар Бенджамин (Klein O. B., 1894—1977), шведский физик-теоретик

Книппинг Пауль (Knipping P., 1883—1935), немецкий физик-экспериментатор
Кольрауш Рудольф Герман Арнут (Kohlrausch R., 1809—1858), немецкий физик
Кольрауш Фридрих Вильгельм Георг (Kohlrausch F., 1840—1910), немецкий физик-экспериментатор
Комптон Артур Холли (Compton A. H., 1892—1962), американский физик
Кондон Эвард (Condon E., 1902—1974), американский физик
Коперник Николай (Kopernik M., 1473—1543), польский астроном
Кориолис Гюстав Гаспар (Coriolis G. G. de, 1792—1843), французский инженер и математик
Корню Мари Альфред (Cornu M. A., 1841—1902), французский физик
Кортевег Дидерик Иоганнес (Korteweg D. I., 1848—1941), нидерландский математик и механик
Коуэн Клайд Лорейн (Cowan C. L., 1919—1974), американский физик
Кулон Шарль Огюстен (Coulomb Ch. A., 1736—1806), французский физик и военный инженер
Купер Леон (Cooper L. N., p. 1930), американский физик-теоретик
Кюри (Склодовская) Мария (Sklodowska-Curie M., 1867—1934), польский и французский физик и химик
Кюри Пьер (Curie P., 1859—1906), французский физик
Лагерр Эдмонд (Laguerre E., 1834—1886), французский математик
Лагранж Жозеф Луи (Lagrange J. L., 1736—1813), французский математик и механик
Ламберт Иоганн Генрих (Lambert I. H., 1728—1777), немецкий математик, астроном, физик и философ
Ландау Лев Давыдович (1908—1968), советский физик-теоретик
Ланде Альфред (Lande A., 1888—1975), немецкий физик-теоретик
Лаплас Пьер Симон (Laplace P. S., 1749—1827), французский астроном, математик и физик
Лармор Джозеф (Larmor J., 1857—1942), английский физик-теоретик и математик
Лауритсен Чарлз Кристиан (Lauritsen Ch., 1892—1968), американский физик
Лауэ Макс Феликс Теодор фон (Laue M. von, 1879—1960), немецкий физик-теоретик
Лебедев Петр Николаевич (1866—1912), русский физик-экспериментатор
Лежандр Адриан Мари (Legendre A. M., 1752—1833), французский математик

Ленард Филипп Эдуард Антон (Lenard Ph. E. A., 1862—1947), немецкий физик
Ленард-Джонс Джон Эдвард (Lenard-Jones J., 1894—1954), английский физик-теоретик
Ленгмюр Ирвинч (Langmuir I., 1881—1957), американский физик
Лену Эмилий Христианович (1804—1865), русский физик
Лехер Эрнст (Lecher E., 1856—1926), австрийский физик
Ли Гзундао (Lee T. D., p. 1926), американский физик-теоретик
Лиссажу Жюль Антуан (Lissajous J. A., 1822—1880), французский физик
Лиувилль Жозеф (Liouville J., 1809—1882), французский математик
Лоренц Хендрик Антон (Lorentz H. A., 1853—1928), нидерландский физик
Лошмидт Иоганн Йозеф (Loschmidt J., 1821—1895), австрийский физик
Лэмб Уиллис Юджин (Lamb W., p. 1913), американский физик
Людерс Герхарт Клаус Фридрих (Luders G., p. 1920), немецкий физик-теоретик
Магнус Генрих Густав (Magnus H., 1802—1870), немецкий физик и химик
Майер Джозеф Эдвард (Mayer J., p. 1904), американский физик-теоретик и химик
Майкельсон Альберт Абрахам (Michelson A. A., 1852—1931), американский физик
Максвелл Джеймс Клерк (Maxwell J. Cl., 1831—1879), английский физик
Малюс Этьен Луи (Malus E. L., 1775—1812), французский физик
Мандельштам Леонид Исаакович (1879—1944), русский советский физик
Мариотт Эдм (Mariotte E., 1620—1684), французский физик и физиолог
Марсден Эрнст (Marsden E., 1889—1970), новозеландский физик
Мах Эрнст (Mach E., 1838—1916), австрийский физик и философ
Мейтнер Лизе (Meitner L., 1878—1968), австрийский физик и радиохимик
Менделеев Дмитрий Иванович (1834—1907), русский химик
Мессбауэр Рудольф Людвиг (Mossbauer R. L., p. 1929), немецкий физик-экспериментатор
Мещерский Иван Всеволодович (1859—1935), русский механик
Мигдал Аркадий Бейнусович (р. 1911), советский физик-теоретик
Милликен Роберт Эндрус (Millikan R. A., 1868—1953), американский физик

Мозли Генри Гвин Джефрис (Moseley H. G. J., 1887—1915), английский физик

Мотт Невилл Фрэнсис (Mott N., p. 1905), английский физик-теоретик

Моттельсон Бен (Mottelson B., p. 1926), датский физик-теоретик

Намбу Йоширо (Nambu Y., p. 1921), японский физик-теоретик

Неддермейер Сет Генри (Neddermeyer S. H., p. 1907), американский физик

Нернст Вальтер Фридрих Герман (Nernst W. F. H., 1864—1941), немецкий физик и физикохимик

Нишина Уэшио (Nishina Y., 1890—1951), японский физик

Новиков Иван Иванович (р. 1916), советский ученый в области теплофизики и теплотехники

Ньютон Исаак (Newton I., 1642—1727), английский физик, математик и астроном

Оккиалини Джузеппе Станиславо (Occhialini G., p. 1907), итальянский физик

Окубо Сусуму (Okubo S., p. 1930), японский физик-теоретик

Ом Георг Симон (Ohm G., 1787—1854), немецкий физик

Оппенгеймер Роберт (Oppenheimer R., 1904—1967), американский физик-теоретик

Оствальд Вильгельм Фридрих (Ostwald W., 1853—1932), немецкий физикохимик и философ

Остроградский Михаил Васильевич (1801—1862), русский математик и механик

Парасюк Остап Степанович (р. 1921), советский физик-теоретик и математик

Паскаль Блез (Pascal B., 1623—1662), французский математик и физик

Паули Вольфганг (Pauli W., 1900—1958), австрийский физик-теоретик

Паунд Роберт Вивиан (Pound R. V., p. 1919), американский физик-экспериментатор

Пауэлл Сесиль Фрэнк (Powell S. F., 1903—1969), английский физик

Пашен Фридрих (Paschen F., 1865—1947), немецкий физик-экспериментатор

Пензиас Арно Аллан (Penzias A., p. 1933), американский физик-экспериментатор

Перрен Жан Батист (Perrin J. B., 1870—1942), французский физик и физикохимик

Петржак Константин Антонович (р. 1907), советский физик

Пито Анри (Pitot H., 1695—1771), французский математик, физик, астроном, инженер

Планк Макс Карл Эрнст Людвиг (Planck M. K. E. L., 1858—1947), немецкий физик-теоретик

Пойнтинг Джон Генри (Poynting G., 1852—1914), английский физик

Понтекорво Бруно Максимович (р. 1913), советский физик

Портер Джордж (Porter G., p. 1920), английский физикохимик

Прохоров Александр Михайлович (р. 1916), советский физик

Пуазейль Жак Луи Мари (Poiseuille J., 1799—1869), французский физиолог и физик

Пуассон Симеон Дени (Poisson S. D., 1781—1840), французский математик, механик и физик

Раби Исидор Айзер (Rabi I. I., p. 1898), американский физик

Резерфорд Эрнест (Rutherford E., 1871—1937), английский физик

Рейнес Фредерик (Reines F., p. 1918), американский физик-экспериментатор

Рейнольдс Осборн (Reynolds O., 1842—1912), английский физик и инженер

Рентген Вильгельм Конрад (Roentgen W. C., 1845—1923), немецкий физик-экспериментатор

Реомюр Рене Антуан Ферчо де (Reaumur R. A. F., 1683—1757), французский ученый

Рессел Генри Норис (Russell H. N., 1877—1939), американский астроном

Ридберг Иоганнес Роберт (Rydberg J. R., 1854—1919), шведский физик и математик

Риман Георг Фридрих Бернхард (Riemann G. F. B., 1826—1866), немецкий математик

Ричардсон Оуэн Уилланс (Richardson O. W., 1879—1959), английский физик

Роско Генри Энфилд (Roskoe H. E., 1833—1915), английский химик

Росси Бруно (Rossi B., p. 1905), итальянский физик

Рэлей (Стретт) Джон Уильям (Rayleigh J. W. S., 1842—1919), английский физик

Савар Феликс (Savart F., 1791—1841), французский физик

Савич Павле (Savic P., p. 1909), югославский физик и химик

Салам Абдус (Salam A., p. 1926), пакистанский физик-теоретик

Семенов Николай Николаевич (1896—1986), советский физик и химик

Ситенко Алексей Григорьевич (р. 1927), советский физик-теоретик

Скобельцын Дмитрий Васильевич (р. 1892), советский физик

Снеллиус Виллеброрд (van Snell W., 1580—1626), голландский ученый

Содди Фредерик (Soddy F., 1877—1956), американский физик и химик

Солпитер Эдвин Эрнест (Salpeter E., p. 1924), американский физик-теоретик и астрофизик

Стефан Йозеф (Stefan J., 1835—1893), австрийский физик
Стилтьес Томас Иоганнес (младший) (Stieltjes Th. J., 1856—1894), нидерландский математик
Стирлинг Джеймс (Stirling J., 1692—1770), шотландский математик
Стокс Джордж Габриэль (Stokes G., 1819—1903), английский физик и математик
Столетов Александр Григорьевич (1839—1896), русский физик
Струхаль В. (Strouhal V., 1850—1923), чешский физик
Сцилард Лео (Szilard L., 1898—1964), венгерский и американский физик
Тамм Игорь Евгеньевич (1895—1971), советский физик-теоретик
Таунс Чарльз Хард (Townes Ch., p. 1915), американский физик
Томонага Синьитиро (Tomonaga S., 1906—1979), японский физик-теоретик
Томсон Джозеф Джон (Thomson J., 1856—1940), английский физик
Томсон (Кельвин) Уильям (Thomson (Kelvin) W., 1824—1907), английский физик
Торричелли Эванджелиста (Torricelli E., 1608—1647), итальянский физик и математик
Уленбек Джордж Юджин (Uhlenbeck G., p. 1900), американский физик
Фаддеев Людвиг Дмитриевич (р. 1934), советский физик-теоретик и математик
Фарадей Майкл (Faraday M., 1791—1867), английский физик
Фаренгейт Даниэль Габриэль (Fahrenheit D. G., 1686—1736), немецкий и голландский физик
Фаулер Уильям Альфред (Fowler W. A., p. 1911), американский физик
Ферма Пьер (Fermat P., 1601—1665), французский математик и физик, юрист по профессии
Фейнман Ричард Филлипс (Feynman R., 1918—1988), американский физик-теоретик
Ферми Энрико (Fermi E., 1901—1954), итальянский физик
Фешбах Герман (Feschbach H., p. 1917), американский физик-теоретик
Физо Арман Ипполит Луи (Fizeau A. H. L., 1819—1896), французский физик
Флеров Георгий Николаевич (р. 1913), советский физик-экспериментатор
Фок Владимир Александрович (1898—1974), советский физик-теоретик

Франк Джеймс (Frank J., 1882—1964), немецкий физик
Фраунгофер Иозеф (Fraunhofer J., 1787—1826), немецкий физик
Френель Огюст Жан (Fresnel A. J., 1788—1827), французский физик
Фридрих Вальтер (Friedrich W., 1883—1968), немецкий физик и биофизик
Фриш Отто Роберт (Frisch O., 1904—1979), английский физик-экспериментатор
Фруд У. (Froute W., 1810—1879), английский физик
Фуко Жан Бернар Леон (Foucault J. B. L., 1819—1868), французский физик-экспериментатор
Фурье Жан Батист Жозеф (Fourier J. B. J., 1768—1830), французский математик и физик
Хаббл Эдвин Пауэлл (Hubble E. P., 1899—1953), американский астроном
Хартри Дуглас Рейнер (Hartree D. R., 1897—1958), английский физик-теоретик и математик
Холл Эдвин Герберт (Hall E. H., 1855—1938), американский физик
Цвейг Джордж (Zweig G., p. 1937), американский физик
Цельсий Андерс (Celsius A., 1701—1744), шведский астроном и физик
Циолковский Константин Эдуардович (1857—1935), русский советский теоретик космонавтики, изобретатель, математик
Черенков Павел Алексеевич (р. 1904), советский физик
Чэдвик Джеймс (Chadwick J., 1891—1974), английский физик-экспериментатор
Швингер Юлиан (Schwinger J., p. 1918), американский физик-теоретик
Шредингер Эрвин (Schrodinger E., 1887—1961), австрийский физик-теоретик
Шриффер Джон Роберт (Schrieffer J. R., p. 1931), американский физик
Штарк Иоганн (Stark J., 1874—1957), немецкий физик
Штерн Отто (Stern O., 1888—1969), немецкий физик-экспериментатор
Штрассман Фриц (Strassmann F., 1902—1980), немецкий физик и химик
Штюкельберг Эрнст Карл Герлах (Stueckelberg E. K. G., p. 1905), швейцарский физик-теоретик
Шустер Артур (Schuster A., 1851—1934), английский физик
Эйлер Леонард (Euler L., 1707—1783), швейцарский и немецкий математик, механик и физик
Эйнштейн Альберт (Einstein A., 1879—1955), немецкий физик-теоретик

Эренфест Пауль (Ehrenfest P., 1880—1933), австрийский физик-теоретик

Эрстед Ханс Кристиан (Oersted H. K., 1777—1851), датский физик

Юкава Хидэки (Yukawa H., 1907—1981), японский физик-теоретик

Юнг Томас (Young T., 1773—1829), английский ученый

Якоби Борис Семенович (1801—1874), русский физик и электротехник

Янг Чженьнин (Yang C. N., p. 1922), американский физик-теоретик

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Кузьмичев Валентин Евдокимович

ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ФИЗИКИ

СПРАВОЧНИК

Оформление художника *В. Г. Самсонова*
Художественный редактор *А. В. Косяк*
Технический редактор *А. М. Капустина*
Корректоры *С. Е. Ноткина, Т. В. Пантелеймонова*

ИБ № 9757

Сдано в набор 28.10.88. Подп. в печ. 05.09.89. БФ 02583.
Формат 84×108/32. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Выс. печ.
Усл. печ. л. 45,36. Усл. кр.-отт. 45,68. Уч.-изд. л. 60,39.
Тираж 100000 экз. Заказ 8-943. Цена 3 р. 40 к.

Издательство «Наукова думка». 252601 Киев 4, ул. Репина, 3.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе, 310057 Харьков 57, Донец-Захаржевская, 6/8.