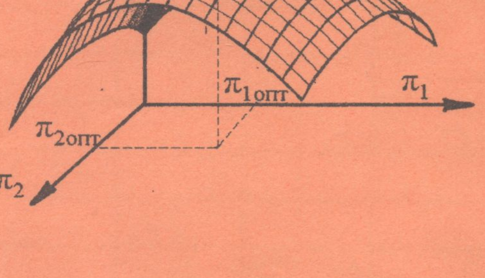
Лежнюк П.Д.
Зелінський В.Ц.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД



Міністерство освіти і науки України

Вінницький національний технічний університет

Лежнюк П.Д., Зелінський В.Ц.

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Затверджено Вченою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник для студентів енергетичних спеціальностей. Протокол № 10 від 29 травня 2003 р.

Вінниця ВНТУ 2004

УДК 519.6
Л 49

Рецензенти:
Доманський В. Г., доктор технічних наук, професор
Рогальський Б. С., доктор технічних наук, професор
Пауткіна Л. Р., кандидат технічних наук

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Лежнюк П.Д., Зелінський В. Ц.
Л 49 **Методи оптимізації в електроенергетиці. Симплексний метод.** Навчальний посібник. - Вінниця: ВНТУ, 2004. - 90 с.

Даний навчальний посібник є введенням у теорію оптимізації, знайомить з додатками цієї теорії до розв'язання ряду задач, що виникають в інженерній практиці Розглядається один з обчислювальних методів – симплексний метод, який дозволяє отримувати чисельні розв'язки для лінійних оптимізаційних моделей. Метою посібника є розробка системного підходу, що дозволяє аналізувати і правильно інтерпретувати будь-яку конкретну модель з всіма складними взаємозв'язками, що є в ній. Посібник призначений для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 7.090601 та 7.090602 і може бути корисний для студентів інших енергетичних спеціальностей та інженерів-енергетиків.

УДК 519.6

ЗМІСТ

ВСТУП

У найбільш загальному змісті теорія оптимізації являє собою сукупність фундаментальних математичних результатів і чисельних методів, орієнтованих на перебування й ідентифікацію найкращих варіантів з безлічі альтернатив, що дозволяють уникнути повного перебору й оцінювання можливих варіантів. Процес оптимізації лежить в основі всієї інженерної діяльності, оскільки класичні функції інженера полягають у тому, щоб, з одного боку, проектувати нові, більш ефективні і менш дорогі технічні системи і, з іншого боку, розробляти методи підвищення якості функціонування існуючих складних технічних систем, до яких повною мірою відноситься і електроенергетична система.

Ефективність оптимізаційних методів, що дозволяють здійснити вибір найкращого варіанта без безпосередньої перевірки всіх можливих варіантів, тісно пов'язана із широким використанням досягнень в області математики шляхом реалізації ітеративних обчислювальних схем, що спираються на обґрунтовані логічні процедури й алгоритми, на базі застосування обчислювальної техніки. Тому для викладу методологічних основ оптимізації потрібно залучення найважливіших результатів теорії матриць, елементів лінійної алгебри і диференціального числення, а також положень математичного аналізу. Математичні поняття і конструкції використовуються не тільки для того, щоб підвищити рівень точності представлення параметрів електроенергетичних систем в процесі оптимізації їх параметрів, але і тому, що вони складають термінологічну базу подання, що дозволяє спростити описання і визначення структурних елементів розглянутих обчислювальних процедур і полегшити їхнє розуміння.

Оскільки розмірність інженерних задач, які розв'язуються при моделюванні параметрів ЕЕС та їх подальшій оптимізації, як правило, досить велика, а розрахунки відповідно до алгоритмів оптимізації вимагають значних витрат часу, всі оптимізаційні методи орієнтовані на реалізацію за допомогою ЕОМ. Однак незважаючи на те, що виклад методологічних принципів ведеться в посібнику з урахуванням зазначеної орієнтації, автори не вважали доцільним докладно зупинятися на питаннях, пов'язаних зі складанням програм для ЕОМ і програмуванням. Головна увага приділяється математичним і логічним побудовам, що лежать в основі досліджуваних методів, факторам, що обумовлюють вибір тих чи інших аналітичних схем, а також розгляду найважливіших прикладних аспектів теорії методів оптимізації в електроенергетичних задачах.

1. МЕТОДОЛОГІЧНІ ОСНОВИ ОПТИМІЗАЦІЇ

1.1 Необхідні умови застосування методів оптимізації

Для того щоб використовувати математичні результати і чисельні методи теорії оптимізації для розв'язання конкретних інженерних задач, необхідно визначити кількісний критерій оптимізації, на основі якого можна зробити аналіз варіантів з метою виявлення «найкращого», здійснити вибір змінних системи, які використовуються для визначення характеристик і ідентифікації варіантів, і, нарешті, побудувати модель, що відбиває взаємозв'язки між змінними параметрами системи, яка оптимізується. Ця послідовність дій складає зміст процесу *постановки* задачі інженерної оптимізації. Коректна постановка задачі служить ключем до успіху оптимізаційного дослідження і практичної реалізації отриманих результатів. Мистецтво постановки задач осягається в практичній діяльності на прикладах успішно реалізованих розробок і ґрунтується на чіткому представленні переваг, недоліків і специфічних особливостей різних методів теорії оптимізації. З цих причин викладення матеріалу посібника супроводжується великою кількістю практичних прикладів, запозичених зі спеціальної літератури, а також побудованих авторами на основі власного інженерного досвіду. Крім того, поряд з описанням оптимізаційних методів у книзі висвітлюються питання, що стосуються їхніх відносних переваг і недоліків; у ряді випадків приводяться результати розрахунків, що підтверджують обґрунтованість зроблених висновків, і даються посилання на відповідні публікації.

Наступні підрозділи присвячені більш докладному розгляду етапів постановки задачі, що завершується аналізом формулювань декількох практичних задач.

1.1.1. Визначення границь системи

Перш ніж приступити до оптимізаційного дослідження, важливо чітко визначити границі досліджуваної системи. У даному контексті система з'являється як деяка ізольована частина реального світу. Границі системи задаються межами, що відокремлюють систему від зовнішнього середовища, і служать для виділення системи з її оточення. При проведенні аналізу звичайно передбачається, що взаємозв'язок між системою і зовнішнім середовищем зафіксований на деякому обраному рівні представлення. Проте, оскільки такі взаємозв'язки завжди існують, визначення границь системи є першим кроком у процесі наближеного опису реальної системи.

У ряді випадків може виявитися, що первісний вибір границі є недуже підходящим. Для більш повного аналізу даної інженерної системи може виникнути необхідність розширення встановлених границь системи шляхом включення інших підсистем, що роблять істотний вплив на функціонування досліджуваної системи. Припустимо, наприклад, що електроенергетична розподільна мережі напругою 35 - 10 кВ, яка потребує оптимізації параметрів режимів з метою зниження втрат, має сполучення через понижувальні трансформатори з магістральними лініями електропередач номінальною напругою 330 - 110 кВ. Режимні параметри роботи цих мереж тісно пов'язані. Тому на першій стадії моделювання доцільно розглядати та оптимізувати параметри магістральних ліній електропередач напругою 330-110 кВ ізольовано від інших ліній, які є розподільними. Режим їх роботи істотно залежать від особливостей функціонування та параметрів магістральних мереж. Таким чином, виникає необхідність при оптимізації парметрів мереж напругою 35-10кВ враховувати параметри точок потокорозподілу цих мереж з магістральними мережами. Тобто, прийняти рішення про розширення границь системи шляхом включення в неї додаткових параметрів. Зрозуміло, розширення границь системи підвищує розмірність і складність багатокомпонентної системи і, отже, значною мірою утрудняє її аналіз. Очевидно, що в інженерній практиці виникає проблема, наскільки це можливо, прагнути до розбивки великих складних систем на відносно невеликі підсистеми, які можна вивчати окремо. Однак при цьому необхідно мати впевненість у тому, що така декомпозиція не приведе до зайвого спрощення реальної ситуації і ми отримаємо результати, які з достатньою для практичної реалізації точністю будуть реалізовані в системах керування режимами ЕЕС в цілому.

1.1.2 Вибір характеристичних критеріїв

Якщо визначена система, яка підлягає дослідженню, і її границі встановлені, то на наступному етапі постановки задачі оптимізації необхідно здійснити вибір критерію, на основі якого можна оцінити характеристики системи, для того щоб виявити «найкращу» чи безліч «найкращих» умов функціонування системи. В інженерних задачах звичайно вибираються критерії економічного характеру. Однак спектр можливих формулювань таких критеріїв дуже широкий; при визначенні критерію можуть використовуватися такі економічні характеристики, як капітальні валові витрати, витрати в одиницю часу, чистий прибуток в одиницю часу, доходи від інвестицій, відношення витрат до прибутку. А електроенергетичних системах, наприклад, це зниження втрат активної та реактивної потужності в лініях ЕЕС, витрат пального на електричних станціях тощо. В інших технічних системах критерій може ґрунтуватися на деяких інших технологічних факторах, наприклад, кола потрібно мінімізувати тривалість процесу виробництва виробу, максимізувати темпи виробництва, мінімізувати кількість споживаної енергії, максимізувати величину крутильного моменту, максимізувати навантаження і т.п. Незалежно від того, який критерій вибирається при оптимізації, «найкращому» варіанту завжди відповідає *мінімальне* чи *максимальне* значення характеристичного показника якості функціонування системи.

Важливо відзначити, що незалежно від змісту оптимізаційних методів тільки *один* критерій (і, отже, характеристична міра) може використовуватися при визначенні оптимуму, тому що неможливо одержати рішення, що, наприклад, одночасно забезпечує мінімум витрат, максимум надійності і мінімум споживаної енергії. Тут ми знову зіштовхуємося з істотним спрощенням реальної ситуації, оскільки в ряді практичних випадків було б дуже бажаним знайти рішення, яке б було «найкращим» з позицій декількох різних критеріїв.

Один зі шляхів обліку сукупності суперечливих цільових постанов полягає в тому, що який-небудь із критеріїв вибирається в якості первинного, тоді як інші критерії вважаються вторинними. У цьому випадку первинний критерій використовується при оптимізації як характеристична міра, а вторинні критерії породжують обмеження оптимизаційної задачі, що встановлюють діапазони змін відповідних показників від мінімального до прийнятного максимального значення.

Зокрема, у прикладі з оптимізацією параметрів оптимальних режимів розподільних мереж 35-10 кВ та магістральних мереж 330-110 кВ можуть бути обрані такі критерії.

1. Диспетчер, який керує режимами роботи розподільних мереж, віддає перевагу плану, відповідно до якого забезпечується оптимальний рівень напруг у споживачів, забезпечується певна якість електроенергії та оптимальний режим компенсації реактивної потужності. При цьому мінімізується втрати потужності в розподільних мережах, але ці дії обмежуються умовами, які накладаються специфікою експлуатації регулювального обладнання (в першу чергу, трансформаторів з РПН та автотрансформаторів, джерел реактивної потужності) вищих ієрархічних рівнів диспетчерського керування.

2. Диспетчер, який керує режимами роботи магістральних мереж, віддає перевагу плану, відповідно до якого забезпечується оптимальний план генерації та розподілу з найменшими втратами електроенергії, генерованої на електричних станціях, до розподільних підстанцій у певній кількості згідно з добовим графіком навантаження з дотриманням певних обмежень по якості електроенергії.

Але ці критерії не можуть бути реалізовані при оптимізації магістральних та розподільних електричних мереж одночасно. Прийнятним компромісом є вибір у якості первинного характеристичного показника якості функціонування системи в цілому мінімізації показника сумарних втрат активної та реактивної потужності в першу чергу в магістральних мережах з наступним формуванням необхідних умов, яких повинні дотримуватись у заздалегідь установлених границях диспетчерські служби розподільних мереж.

На закінчення відзначимо, що для застосування розглянутих у посібнику методів необхідно сформулювати оптимизаційну задачу, що має єдиний характеристичний критерій. За останні роки розроблено ряд методів рішення мультикритеріальних оптимізаційних задач різних типів, однак обговорення цього нового аналітичного апарату, що постійно вдосконалюється і виходить за рамки даного посібника. Зацікавлений читач може звернутися до спеціальних робіт, які недавно вийшли у світ. [1,2].

1.1.3 ВИБІР НЕЗАЛЕЖНИХ ЗМІННИХ

На третьому основному етапі постановки задачі оптимізації здійснюється вибір незалежних змінних, які повинні адекватно описувати припустимі проекти чи умови функціонування системи. У процесі вибору незалежних змінних варто взяти до уваги ряд важливих обставин, що розглядаються нижче.

По-перше, необхідно визначити розбіжності між змінними, значення яких можуть змінюватися в досить широкому діапазоні, і змінними, значення яких фіксовані і визначаються зовнішніми факторами. Так, у прикладі з електроенергетичною системою постійними вважаються топологічні характеристики мереж, активні та реактивні опори ліній електропередач тощо, які відносяться до числа параметрів системи. З іншого боку, величини рівнів напруг, величини струмів у лініях, коефіцієнти трансформації трансформаторів, представляються як параметри режиму, значення яких можуть варіюватися при зміні графіка навантажень ЕЕС.

Далі важливо визначити розбіжності між тими параметрами системи, що можуть бути постійними, і параметрами, що можуть змінюватися внаслідок впливу зовнішніх чи неконтрольованих факторів. Зокрема, у прикладі з електроенергетичною системою необхідно враховувати ресурс трансформаторів з РПН, аварійні вимкнення окремих ЛЕП або обладнання, погодні умови, які можуть призвести до аварійних режимів роботи мереж тощо. Ясно, що істотні зміни цих важливих параметрів системи повинні бути прийняті до уваги при постановці задачі виробничого планування, якщо потрібно, щоб складений оптимальний план був реалістичним і здійсненним.

По-друге, при постановці задачі варто враховувати всі основні змінні, які впливають на функціонування системи. Наприклад, зміна коефіцієнта трансформації приведе до зміни величини напруги не тільки в даному вузлі, але і у всіх інших вузлах, зміняться величини, а можливо і напрямки перетоків реактивної потужності в мережах системи, що приведе до зміни величини втрат потужності в мережах Незалежні змінні повинні вибиратися таким чином, щоб усі найважливіші техніко-економічні рішення знайшли відображення у формулюванні задачі. Виключення можливих альтернатив у загальному випадку приводить до одержання субоптимальних рішень.

Нарешті, ще одним істотним фактором, що впливає на вибір змінних, є рівень деталізації при дослідженні системи. Дуже важливо ввести в розгляд всі основні незалежні змінні, але не менш важливо не «перевантажувати» задачу великою кількістю дрібних, несуттєвих деталей. При виборі незалежних змінних доцільно керуватися правилом, відповідно до якого варто розглядати тільки ті змінні, які впливають на характеристичний критерій, обраний для аналізу складної системи.

1.1.4 Побудова моделі системи

Після того як характеристичний критерій і незалежні змінні обрані, на наступному етапі постановки задачі необхідно побудувати модель, що описує взаємозв'язки між змінними задачі і відбиває вплив незалежних змінних на ступінь досягнення мети, обумовленої характеристичним критерієм. У принципі оптимизаційне дослідження можна провести на основі безпосереднього експериментування із системою. Для цього варто зафіксувати значення незалежних змінних системи, реалізувати процедуру спостереження за функціонуванням системи в цих умовах і оцінити значення характеристичного показника якості функціонування системи, виходячи з зареєстрованих характеристик. Потім за допомогою оптимізаційних методів можна скорегувати значення незалежних змінних і продовжити серію експериментів. Але на практиці при дослідженні складних технічних систем, до яких в першу чергу відноситься електроенергетична система, оптимізаційні дослідження проводяться на основі спрощеного математичного представлення системи, що носить назву *математичної моделі*. Застосування моделей обумовлене тим, що експерименти з реальними системами звичайно вимагають занадто великих витрат засобів і часу, а також у ряді випадків виявляються пов'язаними з ризиком. Моделі широко використовуються при інженерному проектуванні, оскільки це відкриває можливості для реалізації найбільш економічного способу вивчення впливу змін у значеннях основних незалежних змінних на показник якості функціонування системи.

У найзагальнішому представленні структура моделі включає основні рівняння матеріальних і енергетичних балансів, співвідношення, пов'язані з проектними рішеннями, а також рівняння, що описують фізичні процеси, що протікають у системі. Ці рівняння звичайно доповнюються нерівностями, що визначають область припустимих значень незалежних змінних, дозволяють визначити вимоги, що накладаються на верхні чи нижні границі зміни характеристик функціонування системи, і установити ліміти наявних ресурсів. Таким чином, елементи моделі містять всю інформацію, що звичайно використовується при розрахунку проекту чи прогнозуванні характеристик інженерної системи. Очевидно, що процес побудови моделі є дуже трудомістким і вимагає чіткого розуміння специфічних особливостей розглянутої системи. У наступних розділах питання конструювання моделей будуть розглянуті більш докладно. Тут же доцільно обмежитися констатацією того факту, що модель являє собою деякий набір рівнянь і нерівностей, що визначають взаємозв'язок між змінними системи й обмежують область припустимих змін змінних.

З вищевикладеного випливає, що задача у вигляді, придатному для застосування оптимізаційних методів, поєднує мету досліджень (характеристичну міру), безліч незалежних змінних і модель, що відбиває взаємозв'язок змінних. Оскільки вимоги до оптимізаційних задач є дуже загальними і носять абстрактний характер, область застосування методів оптимізації може бути досить широкою. Дійсно, багато методів оптимізації знаходять застосування при вирішенні різних задач науки і техніки, включаючи задачі оптимального проектування структурних елементів систем і процесів, планування стратегій капітальних вкладень, компонування мереж складських приміщень, визначення оптимальних маршрутів руху вантажного транспорту, планування в охороні здоров'я, дислокації збройних сил, проектування механічних вузлів і ряд інших задач.

1.2 Застосування методів оптимізації в інженерній практиці

Теорія оптимізації знаходить ефективне застосування у всіх напрямках інженерної діяльності, і в першу чергу в таких чотирьох її областях:

1) проектування технічних систем і їхніх складових частин;

2) планування і аналіз функціонування існуючих технічних систем;

3) інженерний аналіз технологічних процесів в системі і обробка інформації;

4) керування динамічними системами.

У даному розділі коротко розглядаються типові додатки методів оптимізації в кожній з перших трьох перерахованих областей технічних знань інженерної діяльності. Така важлива область інженерної діяльності, як керування динамічними системами, також допускає застосування методів оптимізації, однак аналіз відповідних прикладів вимагає від читача спеціальної підготовки і буде розглядатись в наступних розділах.

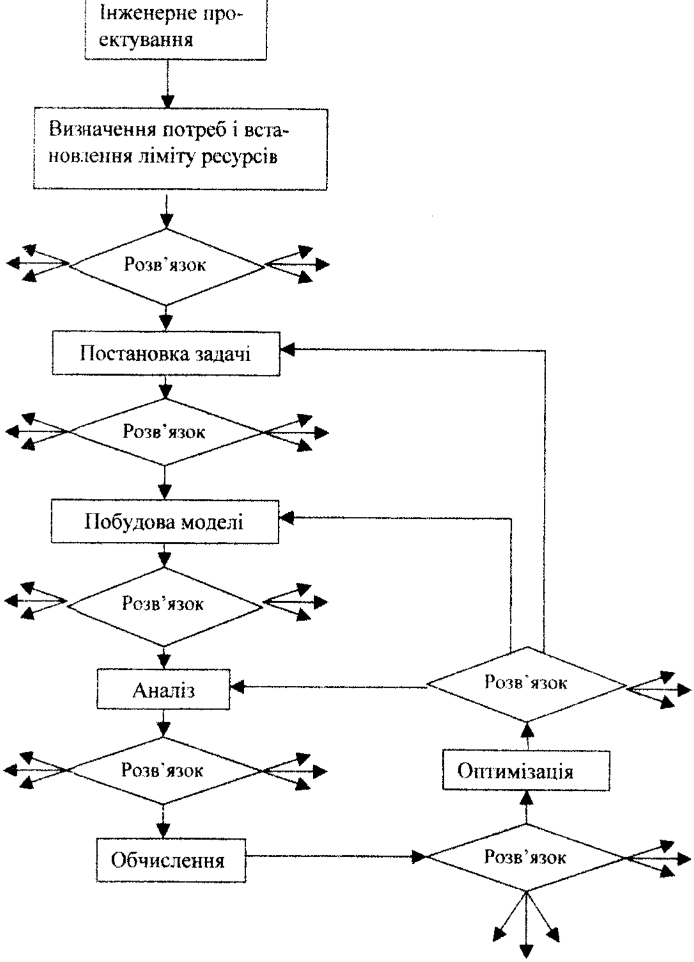


Рисунок 1.1 - Етапи процесу інженерного проектування

Під час розгляду додатків методів оптимізації при проектуванні й аналізі функціонування систем варто мати на увазі, що оптимізація — усього лише один етап у процесі формування оптимального проекту умов ефективного функціонування системи. Зазначений процес, як показано на рис. 1.1, є циклічним і включає синтез (визначення) структури системи, побудову моделі, оптимізацію параметрів моделі й аналіз отриманого рішення. При цьому оптимальний проект чи новий план функціонування системи будується на основі розв'язування серії оптимізаційних задач, що сприяє подальшому удосконалюванню структури системи. Для стислості викладу розглянуті в даному розділі приклади ілюструють лише один цикл процесу проектування і пов'язані головним чином з підготовкою до етапу оптимізації. Таку орієнтацію прикладів не слід інтерпретувати як підкреслення провідної ролі оптимізаційних методів в інженерному проектуванні й у процесі аналізу систем. Незважаючи на те що методи теорії оптимізації відрізняються універсальністю, їхнє успішне застосування значною мірою залежить від професійної підготовки інженера, який повинен мати чітке уявлення про специфічні особливості досліджуваної системи. Основна мета розгляду прикладів, що нижче приводяться, полягає в тому, щоб продемонструвати розмаїтість постановок оптимізаційних задач, що виникають у процесі проектування й аналізу, на тлі спільності їхньої форми.

1.2.1 Використання методів оптимізації при проектуванні

Сфера застосування оптимізаційних методів в інженерному проектуванні досить широка: від проектування окремих структурних елементів технічних систем до проектування вузлів устаткування і складання попередніх проектів промислових підприємств у цілому. В електроенергетиці застосування методів оптимізації при проектуванні є доволі поширеним, наприклад, як при проектуванні нових об'єктів (підстанцій, ліній електропередач тощо), так і при модернізації вже існуючих об'єктів (вибір параметрів та траси нових ЛЕП в існуючих ЕЕС). Для того щоб використовувати методи оптимізації, необхідно розробити «принципову схему» функціонування системи, з'ясувати її структуру; тоді задача оптимізації зводиться до вибору таких значень змінних, що характеризують розміри окремих систем або пристроїв і режими їхньої роботи, яким відповідає найкраще значення характеристичного показника якості функціонування системи. Розглянемо застосування методів оптимізації на прикладі простих технічних задач, які базуються на знаннях з фізики, механіки та хімії, які набуто студентами на молодших курсах, оскільки проектування параметрів ЕЕС потребує спеціальних знань, які вивчаються на старших курсах.

Приклад 1.1 Проектування системи постачання киснем

Описання задачі. Кисневий конвертор, який використовується у виробництві сталі, це хімічний реактор періодичної дії, що споживає чистий кисень. Процес функціонування конвертора — циклічний. Руда і флюс завантажуються в реактор протягом визначеного періоду часу, а потім продукти взаємодії виводяться назовні. Цей циклічний процес пов'язаний з періодичними змінами швидкості споживання кисню. Як показано на рис. 1.2, кожен цикл складається з тимчасового інтервалу довжини t_1 на який витрата кисню в одиницю часу невелика і дорівнює D_0, і тимчасового інтервалу $(t_2 - t_1)$, якому відповідає висока швидкість споживання D_1. Кисень, який використовується у конверторі виробляється на спеціальній установці відповідно до розповсюдженого технологічного способу, що дозволяє одержувати кисень з повітря шляхом охолодження і дистиляції. Кисневі установки відрізняються високим рівнем автоматизації і, як правило, мають високу продуктивність.

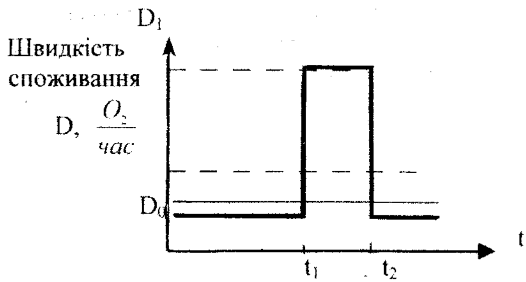


Рисунок 1.2 - Цикл споживання кисню, приклад 1.1

$$\begin{cases} D_0 \text{ для } 0 \le t \le t_1 \\ D = D_1 \text{ для } t_1 \le t \le t_2, \text{ з повторенням у кожному циклі } t_2 \end{cases}$$

Для того щоб з'єднати кисневу установку безперервної дії з конвертором, що функціонує за певним циклом, необхідно розробити проект простої системи керування запасами (рис. 1.3), що складається з компресора і резервуара для збереження кисню. Розглянемо можливі проекти. У найпростішому випадку продуктивність кисневої установки можна вибрати рівною D1, найбільшої швидкості споживання кисню. Протягом інтервалу часу, якому відповідає низька витрата кисню, надлишок газу прийдеться випускати в атмосферу. З іншого боку, можна вибрати кисневу установку з такою продуктивністю, що дозволила б протягом одного циклу одержувати кількість кисню, необхідну для забезпечення нормальної роботи конвертора. В інтервалі часу, коли витрата газу невелика, надлишок кисню під тиском накопичувався б у резервуарі для наступного використання протягом інтервалу часу, якому відповідає висока швидкість споживання. Усі проміжні проекти відрізняються від розглянутих різними сполученнями запасів і втрат кисню. Задача полягає в тому, щоб вибрати оптимальний проект.

П о с т а н о в к а   з а д а ч і. Досліджувана система складається з установки для виробництва кисню, компресора і резервуара для зберігання газу. Характеристики кисневого конвертора і циклу споживання кисню передбачаються заданими, тому що визначаються зовнішніми стосовно системи факторами. Характеристичний показник якості

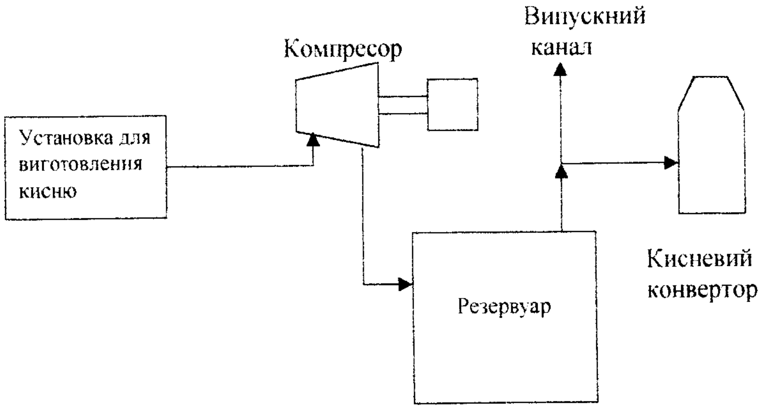


Рисунок 1.3 - Проект системи постачання киснем, приклад 1.1

проекту природно вибрати у вигляді повних витрат за одиницю часу, що включають витрати на виробництво кисню (постійні і змінні), витрати на експлуатацію компресора, а також постійні витрати, пов'язані з придбанням компресора і резервуара для зберігання кисню. Основними незалежними змінними є

- продуктивність кисневої установки F (кг·O_2/ч),
- проектна потужність компресора H (л. с.),
- проектна ємність резервуара V ($м^3$) і
- максимальний тиск у резервуарі p($Н/м^2$).

Передбачається, що киснева установка є стаціонарною і тому характеризується заданою продуктивністю. Крім того, передбачається також, що резервуар відповідає вимогам звичайного проекту і призначений для збереження кисню.

Модель системи включає основні співвідношення, за допомогою яких можна описати взаємозв'язок між незалежними змінними.

Нехай $I_{макс}$— максимальна кількість кисню, який може зберігатись в резервуарі. Використовуючи скоректоване рівняння газового стану, одержимо

$$V = \left(\frac{I_{макс}}{M}\right)\left(\frac{RT}{p}\right)z \qquad (1.1)$$

де R — універсальна газова стала, T — температура газу (передбачається постійною), z — коефіцієнт стискання, M — молекулярна маса кисню.

З рис. 1.2 випливає, що максимальна кількість кисню, який повинен зберігатись в резервуарі, дорівнює площі, обмеженої кривою споживання між точками t_1 і t_2, D_1 і F. Таким чином,

$$I_{макс}=(D_1-F)(t_1-t_2) \tag{1.2}$$

Підставивши вираз (1.2) в (1.1), одержимо

$$V=\frac{(D_1-F)(t_2-t_1)}{M}\frac{RT}{p}z \tag{1.3}$$

Конструкція компресора повинна забезпечувати керування потоком газу що має швидкість $(D_1-F)(t_1-t_2)/t_1$, і підвищення тиску газу до максимального значення p. У припущенні, що газ ідеальний, а процес стискання ізотермічний, маємо [3]

$$H=\frac{(D_1-F)(t_2-t_1)}{t_1}\frac{RT}{k_1k_2}\ln\frac{p}{p_0} \tag{1.4}$$

де k_1— коефіцієнт переведення, k_2— коефіцієнт корисної дії компресора, p_0 — початковий тиск кисню.

Рівняння (1.3) і (1.4) необхідно доповнити нерівністю, яка встановлює, що продуктивність кисневої установки F не повинна бути меншою середньої швидкості споживання кисню, тобто нерівністю

$$F\geq\frac{D_0t_1+D_1(t_2-t_1)}{t_2} \tag{1.5}$$

Крім того, максимальний тиск у резервуарі повинне перевищувати початковий тиск кисню:

$$p\geq p_0 \tag{1.6}$$

Характеристичний показник якості проекту включає витрати на виробництво кисню:

$$C_1(грн./рік)=a_1+a_2F \tag{1.7}$$

де a_1 і a_2 — емпірично обумовлені параметри для установок розглянутого типу, пов'язані з витратами на паливо, воду і робочу силу.

Капітальні витрати на придбання резервуара для збереження кисню знаходяться за допомогою такої залежності:

$$C_2(грн.)=b_1V^{b_2} \tag{1.8}$$

де b_1 і b_2 — емпірично обумовлені постійні, що відбивають специфічні особливості конструкції резервуара. Капітальні витрати, пов'язані з придбанням компресора, обчислюються за допомогою аналогічної формули:

$$C_3(грн.) = b_3 V^{b_4} \tag{1.9}$$

Витрати на експлуатацію компресора приблизно описуються виразом $b_5 t_1 H$, де b_5— витрати на експлуатацію компресора одиничної потужності в одиницю часу. Таким чином, функцію повних витрат можна записати в такому вигляді:

$$\text{Пр} = a_1 + a_2 F + d\{b_1 V^{b_2} + b_3 H^{b_4}\} + N b_5 t_1 H, \tag{1.10}$$

де *Пр* - повні річні витрати, N — число циклів споживання кисню, реалізованих протягом року, d — ваговий коефіцієнт.

Задача оптимізації полягає в тому, щоб мінімізувати функцію (1.10) шляхом відповідного вибору значень F, V, H і p, що задовольняють рівняння (1.3) і (1.4), а також нерівності (1.5) і (1.6).

Розв'язання сформульованої задачі істотно залежить від вибору параметрів циклу (N, D_0, D_1, t_1 і t_2), вартісних параметрів (a_1, a_2, b_1 — b_5 і d) і фізичних параметрів (T, p_0, k_2, z і M).

У принципі цю задачу можна розв'язати шляхом виключення V і H з формули (1.10) за допомогою (1.3) і (1.4); у результаті виходить задача з двома, змінними. Якщо потім зобразити лінії рівня функції повних витрат на площині з координатами F і p, а також врахувати нерівності (1.5) і (1.6), то можна знайти мінімуму функції. Але ряд методів дозволяють одержати розв'язок з набагато меншими витратами праці.

У прикладі 1.1 представлена постановка задачі попереднього проектування системи, що складається з декількох агрегатів. Наступний приклад ілюструє процес проектування окремого структурного елемента системи.

Приклад 1.2 Проектування навантаженої балки

Описання задачі. Балка А кріпиться на твердій опорі В за допомогою звареного з'єднання. Балка виготовляється зі сталі марки 1010 і повинна витримувати навантаження F=6000 фунт. Розміри балки вибираються таким чином, щоб повні витрати були мінімальними. Схематичне креслення системи приведене на рис. 1.4.

Постановки задачі. Система складається з балки А і зварного шва, необхідного для прикріплення балки до опори В. Незалежними, чи керованими, змінними служать розміри h, l, t і b, що показані на рис. 1.4. Довжина балки L передбачається рівною 14 дюймів. Для зручності запису представимо введені змінні як компоненти невідомого вектора x:

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]_4^T = [h, l, t, b]$$

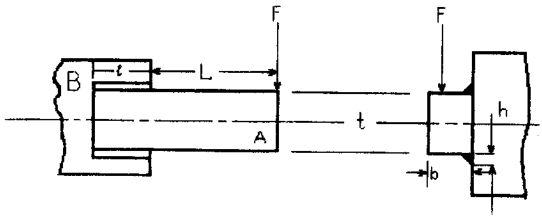


Рисунок 1.4 - Навантажена балка, приклад 1.2

Характеристичним показником якості проекту служать витрати на зварювальні роботи. Основними вартісними характеристиками такої групи є (1) витрати на підготовчі роботи, (2) витрати на зварювальні роботи і (3) вартість матеріалів, тобто

$$F(x)=c_0+c_1+c_2,$$

де $F(x)$ — функція витрат, c_0— витрати на підготовчі роботи; c_1— витрати на зварювальні роботи, c_2— вартість матеріалів.

Витрати на підготовчі роботи c_0. Рішення про проектування розглянутого структурного елемента у вигляді зварного вузла було основано на наявності апарата для зварювання прямолінійним швом у замовника проекту. Далі припустимо, що всі пристрої, необхідні для установки і підтримки балки в положенні, зручному для проведення зварювальних робіт, також є у наявності. У цьому випадку витрати c_0 можна не враховувати при побудові моделі.

Витрати на зварювальні роботи c_1. Припустимо, що зварювання буде проводитися апаратом, під час використання якого повні витрати складають 10 грн./рік (включаючи експлуатаційні витрати і витрати на технічне обслуговування і поточний ремонт). Далі нехай зварювальний апарат накладає один кубічний дюйм зварного шва за 6 хв. Тоді витрати на зварювальні роботи рівні

$$c_1=\left(10\frac{грн.}{4}\right)\left(\frac{1}{60}\frac{год}{хв.}\right)\left(6\frac{хв}{дюйм^3}\right)V_\omega=1\left(\frac{грн.}{дюйм^3}\right)V_\omega ,$$

де $V_и$ — обсяг зварного шва в кубічних дюймах.

Вартість матеріалів c_2.

$$c_2=c_3V_\omega+c_4V_B,$$

де c_3 = вартість /об'єм звареного шва = (0, 37)·(0, 283) (грн./дюйм^3); з$_4$ = вартість /об'єм балки = (0, 17)·(0, 283) (грн./дюйм^3); V_B = об'єм балки А в кубічних дюймах.

З геометричних співвідношень випливає, що

$$V_{ш}=2(^{1\;2}h^2l)=h^2l,$$
$$V_B=tb(L+l).$$

Маємо

$$c_2=c_3h^2l+c_4tb(L+l)$$

Отже, функція витрат приймає такий вигляд:

$$F(x)=h^2l+c_3h^2l+c_4tb(L+l) \qquad (1.11)$$

чи (якщо виразити її через змінні x)

$$F(x)=(1+c_3)x_1^2x_2+c_4x_3x_4(L+x_2). \qquad (1.12)$$

Відмітимо, що всі комбінації значень x_1, x_2, x_3 і x_4 можуть виявитися припустимими, якщо балка витримує задане навантаження. Необхідно побудувати кілька функціональних співвідношень між керованими змінними, що дозволяють звузити область їхніх припустимих значень. Ці співвідношення, записані у формі нерівностей, представляють модель системи. Спочатку приведемо ці нерівності, а потім інтерпретуємо їх. Маємо

$$g_1(x)=\tau_d-\tau(x)\geq 0 \qquad (1.13)$$
$$g_2(x)=\sigma_d-\sigma(x)\geq 0 \qquad (1.14)$$
$$g_3(x)=x_4-x_1\geq 0 \qquad (1.15)$$
$$g_4(x)=x_2\geq 0 \qquad (1.16)$$
$$g_5(x)=x_3\geq 0 \qquad (1.17)$$
$$g_6(x)=P_c(x)-F\geq 0 \qquad (1.18)$$
$$g_7(x)=x_1-0,125\geq 0 \qquad (1.19)$$
$$g_8(x)=0,25-\delta(x)\geq 0 \qquad (1.20)$$

де τ_d — розрахункова напруга в зварному шві при зрушенні; $\tau(x)$— максимальна напруга в зварному шві при зрушенні, функція x; σ_d — розрахункова нормальна напруга для матеріалу балки; $\sigma(x)$ — максимальна нормальна напруга в балці, функція x; $P_c(x)$ — критичне навантаження на балку, функція x; $\delta(x)$ — величина прогину кінця балки, функція x. Для того щоб завершити побудову моделі, необхідно ввести в розгляд кілька формул з теорії опору матеріалів.

Напруга в зварному шві $\tau(x)$. Напругу в зварному шві можна розкласти на дві складові τ' і τ'', де τ'— первинна напруга в площині поперечного перерізу зварного шва, а τ''— вторинна напруга при крутінні:

$$\tau' = \frac{F}{\sqrt{2}x_1x_2} \quad \text{і} \quad \tau'' = \frac{MR}{J}$$

При цьому

$$M = F\left[L + (x_2/2)\right]$$

$$R = \left\{\frac{x_2^2}{4} + \left[\frac{x_3 + x_1}{2}\right]^2\right\}^{1/2}$$

$$J = 2\left\{0.707x_1x_2\left[\frac{x_2^2}{12} + \left(\frac{x_3 + x_1}{2}\right)^2\right]\right\}$$

де M — момент сили F що діє до центра ваги звареної групи, J — полярний момент інерції звареної групи. Напруга τ у звареному шві обчислюється за формулою

$$\tau(x) = \left[(\tau')^2 + 2\tau'\tau''\cos\theta + (\tau'')^2\right]^{1/2}$$

де $\cos\theta = x_2/2R$

Напруга при вигині балки σ(x). Можна показати, що максимальна напруга при вигині дорівнює

$$\sigma(x) = 6FL/x_4x_3^2.$$

Критичне навантаження на балку $P_c(x)$. З ростом співвідношення $t/b = x_3/x_4$ спостерігається тенденція до втрати стійкості балки. Ті комбінації значень x_3 і x_4, для яких можлива втрата стійкості, необхідно виключити з числа припустимих. Для балок, близьких до прямокутних, критичне навантаження приблизно описується таким виразом:

$$P_c(x) = \frac{4{,}013\sqrt{EI\alpha}}{L^2}\left[1 - \frac{x_3}{2L}\sqrt{\frac{EI}{\alpha}}\right]$$

де E- модуль Юнга = 30×10^6 фунт/дюйм^2, $I=(1/12)x_3x_4^3$, $\alpha=(1/3)Gx_3x_4^3$, G – модуль зрушення = $12\cdot10^6$ фунт/дюйм^2.

Прогин балки δ(x). Щоб обчислити величину прогину, припустимо, що балка це консоль з вильотом L. Тоді

$$\delta(x) = (4FL^3)/(Ex_3^3x_4).$$

Інші нерівності інтерпретуються таким чином: $g_3 \geq 0$ встановлює практичну неможливість одержання зварного шва, ширина якого перевищує ширину балки, а $g_4 \geq 0$ і $g_5 \geq 0$ відбивають вимоги незаперечності x_2 і x_3. Відмітимо, що незаперечність x_1 і x_4 випливає з нерівностей $g_3 \geq 0$ і $g_7 \geq 0$. Обмеження $g_6 \geq 0$ гарантує, що критичне навантаження на балку не буде перевищене. Нерівність $g_7 \geq 0$ доводить той факт, що фізично неможливо зробити зварний шов, ширина якого менше деякого граничного значення.

Нарешті, параметри τ_d і σ_d, що фігурують у g_1 і g_2, залежать від матеріалу конструкції. Для сталі марки 1010 відповідні значення цих параметрів рівні τ_d=13600 фунт/дюйм^2 і σ_d= =30 000 фунт/дюйм^2.

Оптимізаційна задача проектування включає функцію витрат (1.12) і складну систему нерівностей, що отримується підстановкою вищенаведених формул у (1.13) — (1.20). При цьому усі функції виражаються через чотири незалежні змінні.

Дана задача досить складна і, як легко побачити, не може бути вирішена графічним способом.

1.2.2 Використання методів оптимізації при плануванні і аналізі функціонування системи

Друга найважливіша область застосування оптимізаційних методів в інженерній практиці пов'язана з удосконаленням існуючих систем і розробкою виробничих планів для високопродуктивних техніко-економічних процесів. Задачі аналізу функціонування систем звичайно виникають у тих випадках, коли потрібно адаптувати існуючу виробничу систему до нових умов функціонування, відмінних від тих умов, що були передбачені проектом цієї системи. Причини, що породжують вимоги такого роду, як правило, пов'язані з необхідністю

1) збільшення загального обсягу випуску продукції;

2) використання інших видів сировини і розширення асортименту виробів;

3) удосконалювання технологічних операцій, що відрізняються низьким рівнем проектних рішень.

Тому для розв'язання зазначених задач потрібно вибрати новий температурний режим, тиск чи характеристики потоку; встановити додаткове устаткування; розробити нові технологічні операції. Методи оптимізації у виробничому плануванні орієнтовані головним чином на складання програм виробництва декількох видів продукції на окремому підприємстві, а також на координування виробничих планів підприємств, що зв'язані господарськими відносинами. Оскільки в таких додатках передбачається, що основне устаткування встановлене і функціонує, предметом дослідження є тільки функції змінних витрат.

Задачі, що виникають при цьому, найчастіше можна сформулювати за допомогою лінійних і квазілінійних моделей. Як ілюстрацію цього класу додатків оптимізаційних методів розглянемо задачу планування виробництва нафтопродуктів.

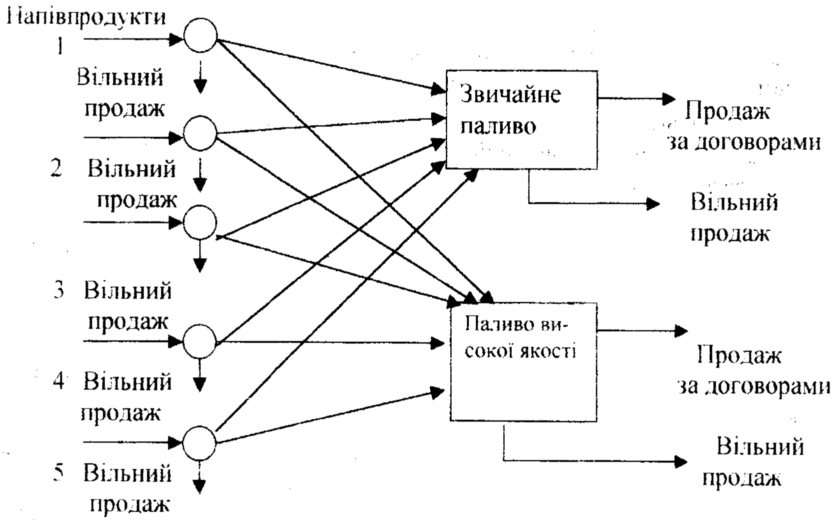


Рисунок 1.5 - Схема до задачі планування нафтопереробного виробництва, приклад 1.3

Приклад 1.3 Планування виробництва нафтопродуктів

Опис задачі. У процесі переробки сирої нафти виробляється визначена кількість бензинових напівпродуктів, що потім послідовно змішуються з метою одержання двох видів палива для двигунів внутрішнього згорання — звичайного палива і палива вищої якості. Для кожного напівпродукту відоме значення показника його ефективності, максимальний вихід і фіксована ціна одиниці об'єму напівпродукту. Для кожного виду палива встановлене мінімальне значення показника ефективності і продажна ціна, а також відомі питомі витрати на змішування палива. Мінімальний рівень виробництва обох видів палива визначається договірними зобов'язаннями. Інше зроблене паливо і невикористані напівпродукти можуть бути реалізовані за допомогою вільного продажу за відомими цінами. Потрібно скласти оптимальний план виробництва палива протягом заданого періоду часу.

П о с т а н о в к а з а д а ч і. На схемі, зображеній на рис. 1.5, показано, що досліджувана система включає ряд бензинових напівпродуктів, технологічну операцію змішування і два види рідкого моторного палива. Процеси переробки нафти і виробництва напівпродуктів виключені з розгляду поряд з підсистемами керування запасами і розподілу сирої нафти, напівпродуктів і кінцевої продукції. Оскільки устаткування, необхідне для виконання операції змішування, до початку планового періоду встановлене і функціонує, варто розглянути тільки вартісні характеристики виробничого процесу.

Характеристичним показником якості функціонування системи в даному випадку є чистий прибуток, реалізований протягом планового періоду. Чистий прибуток складається з доходу від продажу палива і напівпродуктів за винятком витрат на змішування і виробництво напівпродуктів. Незалежні змінні виражають величини потоків по орієнтованих дугах, зображеним на рис. 1.5. Таким чином, з кожним з напівпродуктів асоційовані три змінні. Одна зі змінних виражає кількість напівпродукту, що направляється на виробництво звичайного палива, друга — кількість напівпродукту, що направляється на виробництво палива вищої якості, і третя — кількість напівпродукту, що надходить у вільний продаж.

Отже, для кожного напівпродукту з номером i

x_i — кількість напівпродукту, використовуваного для виробництва звичайного палива,

y_i — кількість напівпродукту, використовуваного для виробництва палива вищої якості,

z_i — кількість напівпродукту, що направляється у вільний продаж.

З кожним видом виробленого палива у свою чергу асоційовані дві змінні, одна з яких представляє кількість палива, яке продається за договорами, а інша — кількість палива, що надходить у вільний продаж.

Таким чином, для кожного виду палива з номером j

u_j — кількість палива, яке продається за договорами,

v_j — кількість палива, що надходить у вільний продаж.

У модель варто включити балансові співвідношення для кожного напівпродукту і кожного виду палива, обмеження, пов'язані з технологічною операцією змішування і що дозволяють врахувати задані рівні ефективності двох видів палива, а також обмеження, що випливають з наявності договірних зобов'язань.

1. Балансове співвідношення для напівпродукту з номером i записується у вигляді нерівності

$$x_i + y_i + z_i \leq a_i \tag{1.21}$$

де a_i — вихід напівпродукту i за плановий період.

2. Балансові співвідношення для кінцевої продукції мають наступний вигляд:

$$\sum_i x_i = u_1 + v_1 \ , \quad \sum_i y_i = u_2 + v_2 \ . \qquad (1.22)$$

3. Технологічні обмеження, пов'язані з операцією змішування, записуються у вигляді

$$\sum_i \beta_i x_i \geq \gamma_1(u_1 + v_1) \ , \qquad \sum_i \beta_i y_i \geq \gamma_2(u_2 + v_2), \qquad (1.23)$$

де β_i— значення показника ефективності напівпродукту i; γ_j— мінімальне значення показника ефективності палива виду j.

4. Обмеження, обумовлене договірними зобов'язаннями, для палива виду j задається нерівністю

$$u_j \geq \delta_j \qquad (1.24)$$

де δ_j — мінімальний обсяг виробництва палива виду j, передбачений договорами.

Характеристичний показник якості функціонування системи (чистий прибуток) визначається з виразу

$$\sum c_j^{(1)} u_j + \sum c_j^{(2)} v_j + \sum c_i^{(3)} z_i - \sum_i c_i^{(4)}(x_i + y_i + z_i) - \sum_i c_i^{(5)}(x_i + y_i) \ ,$$

де $c_j^{(1)}$ — ціна продажу одиниці кінцевої продукції виду j відповідно до договорів; $c_j^{(2)}$ — ринкова ціна одиниці кінцевої продукції виду j; $c_i^{(3)}$ — ринкова ціна одиниці напівпродукту i; $c_i^{(4)}$ — витрати на виробництво одиниці напівпродукту i; $c_i^{(5)}$ — технологічні витрати на змішування в розрахунку на одиницю напівпродукту i.

З урахуванням даних, приведених у табл. 1.1, задача планування приймає такий вигляд:

мінімізувати

$40u_1+55u_2+46v_1+60v_2+6z_1+8z_2+7{,}5z_3+7{,}50z_4+ +20z_5$ —$25(x_1+y_1)$— 28 (x_2+y_2)— 29,50 (x_3+y_3)— 35.50 (x_4+y_4)— 41,50(x_5+y_5)

при наступних обмеженнях:

обмеження типу (1.21):

$$x_1+y_1+z_1 \leq 2 \cdot 10^5,$$
$$x_2+y_2+z_2 \leq 4 \cdot 10^5,$$
$$x_3+y_3+z_3 \leq 4 \cdot 10^5,$$
$$x_4+y_4+z_4 \leq 5 \cdot 10^5,$$
$$x_5+y_5+z_5 \leq 5 \cdot 10^5;$$

обмеження типу (1.22):

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=u_1+v_1,$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=u_2+v_2;$$

обмеження типу (1.23):

$$70x_1+80x_2+85x_3+90x_4+99x_5\geq 85(u_1+v_1),$$

$$70y_1+80y_2+85y_3+90y_4+99y_5\geq 95(u_2+v_2);$$

обмеження типу (1.24):

$$u_1\geq 5\cdot 10^5,\quad u_2\geq 4\cdot 105.$$

Таблиця 1.1 – Дані для прикладу 1.3

Номер напівпродукту	Вихід Напівпродукту a_i, літр/період	Показник ефективності β_i	Продажна ціна $c_i^{(3)}$	Витрати на виробництво $c_i^{(4)}$	Технологічні затрати $c_i^{(5)}$
1	$2\cdot 10^5$	70	30,00	24,00	1,00
2	$4\cdot 10^5$	80	35,00	27,00	1,00
3	$4\cdot 10^5$	85	36,00	28,50	1,00
4	$5\cdot 10^5$	90	42,00	34,50	1,00
5	$5\cdot 10^5$	99	60,00	40,00	1,50

Продовження табл.1.1

Вид палива	Мінімальний обсяг виробництва δ_j	Максимальне значення показника ефективності v_j	Продажна ціна, грн./літр	
			за договорами $c_i^{(1)}$	за договорами $c_i^{(2)}$
звичайне (1)	$5\cdot 10^5$	85	40,00	46,00
вищої якості (2)	$4\cdot 10^5$	95	55,00	60,00

Крім того, усі змінні повинні приймати невід'ємні значення; у іншому випадку розв'язок задачі може і не мати «фізичної» інтерпретації. У цілому задача оптимізації включає 19 змінних і 11 обмежень, а також умови незаперечності змінних. Відмітимо, що всі змінні, що фігурують у моделі функції, є лінійними щодо незалежних змінних.

Взагалі, в процесі нафтопереробки виробляється значно більша кількість різних напівпродуктів і видів кінцевої продукції, ніж це передбачалося в розглянутому прикладі. Крім того, у ряді практичних ситуацій доцільно ввести додаткові змінні, що відбивають динаміку керування запасами, а також розширити модельні побудови на кілька послідовних планових періодів. В останньому випадку кожна змінна повинна бути позначена іншим індексом, наприклад: x_{ik} — кількість напівпродукту i, що використовується для виробництва звичайного палива в плановому періоді k.

При цьому розмірність результуючої моделі виробничого планування істотно зростає. Особливо складними є також задачі оптимізації параметрів електроенргетичних систем, де кількість змінних може перевищувати тисячу. На практиці розв'язання задач такого типу здійснюється на основі спеціальних алгоритмів.

1.2.3 Використання методів оптимізації для аналізу і обробки інформації

Ще одна широка область застосування оптимізаційних методів в інженерній практиці пов'язана з задачами інженерного аналізу, зокрема з задачами нелінійного регресивного аналізу. Серед найбільш загальних проблем, що виникають у процесі розробки інженерних моделей, можна виділити проблему визначення параметрів деякої напівемпіричної моделі на основі заданої безлічі експериментальних даних. Такого роду задачі обробки інформації, чи задачі регресивного аналізу, через нескладні перетворення приводяться до виду оптимізаційних задач, оскільки вибір значень параметрів моделі здійснюється відповідно до критерію якості опису наявних даних за допомогою цієї моделі.

Припустимо, що деяка змінна y залежить від деякої незалежної змінної x, а зв'язок між ними задається рівнянням $y=f(x, \theta_1, \theta_2)$, у якому фігурують два параметри θ_1 і θ_2. Для того, щоб визначити відповідні значення θ_1 і θ_2, необхідно провести серію експериментів, у кожному з який задається значення незалежної змінної x і реєструється значення залежної змінної y. Результатом серії з N експериментів є безліч пар чисел (y_i, x_i), $i=1, \ldots, N$. Потім на основі отриманої інформації робиться спроба підібрати значення θ_1 і θ_2 таким чином, щоб забезпечити високу точність опису експериментальних даних за допомогою функції f. Найчастіше на практиці міра якості описання експериментальних даних визначається так званим *критерієм найменших квадратів*, відповідно до якого потрібно мінімізувати функцію

$$L(\theta_1,\theta_2) = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - f(x_i,\theta_1,\theta_2)\right]^2 \tag{1.25}$$

Різниця $y_i - f(x_i,\theta_1,\theta_2)$ між зареєстрованим значенням y_i і теоретичним значенням $f(x_i,\theta_1,\theta_2)$ показує, наскільки точно обрана модель описує наявні дані, і називається *залишком*. Сума квадратів залишків по всіх експериментальних точках є мірою точності опису даних. Дійсно, якщо значення $L(\theta_1, \theta_2)$ дорівнює нулю, то зроблений вибір θ_1 і θ_2 забезпечує точний опис, оскільки експериментальні дані, збігаються з теоретичною кривою. Таким чином, задачу опису даних можна розглядати як задачу оптимізації, у якій потрібно знайти значення параметрів θ_1 і θ_2, мінімізуючих функцію $L(\theta_1, \theta_2)$.

Приклад 1.4 Нелінійна регресія

Опис задачі. Відомо, що співвідношення між тиском, молярним обємом і температурою реальних газів відрізняється від аналогічного співвідношення для ідеального газу, що записується у вигляді

$$Pv=R\,T,$$

де P — тиск (атм), v — молярний обєм (см^3/г·моль); T — температура (К), R — універсальна газова стала (82,06 атм·см^3/г·моль·К).

Напівемпіричне рівняння Редліха - Куонга [3]

$$P=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{T^{1/2}v(v+b)} \tag{1.26}$$

орієнтоване на те, щоб компенсувати відхилення властивостей реального газу від властивостей ідеального газу, і містить параметри a і b, значення яких визначаються на основі експериментальних даних.

Таблиця 1.2 - Результати вимірювань тиску, молярного об'єму і температури вуглекислого газу

Номер експерименту	Тиск P, атм	Молярний обєм v, см^3/г·моль	Температура T, К
1	33	500	273
2	43	500	323
3	45	600	373
4	26	700	273
5	37	600	323
6	39	700	373
7	38	400	273
8	63,6	400	373

У табл. 1.2 приведені результати вимірювань тиску, молярного об'єму і температури вуглекислого газу (CO_2), що використовуються при розрахунку нелінійної регресії для оцінювання значень a і b.

Постановка задачі. Значення параметрів a і b знаходяться шляхом мінімізації суми квадратів залишків (1.25). У даному випадку ця функція має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^{8}\left[P_i - \frac{RT_i}{v_i - b} + \frac{a}{T_i^{1/2} v_i (v_i + b)}\right]^2 \qquad (1.27)$$

де P_i — результат вимірювання тиску в експерименті з номером i, а інші два доданки в дужках представляють відповідні члени рівняння (1.26) в умовах експерименту з номером i і залежать від параметрів a і b. Наприклад, доданок суми, що відповідає першому експерименту, дорівнює

$$\left(33 - \frac{82.06(273)}{500 - b} + \frac{a}{(273)^{1/2}(500)(500 + b)}\right)^2$$

Функція (1.27) являє собою функцію двох змінних, яка підлягає мінімізації шляхом відповідного вибору значень незалежних змінних a і b. Якби рівняння Редліха - Куонга точно описувало наявні дані, то мінімальне значення функції (1.27) дорівнювало б нулю. Однак наявність експериментальних помилок у результатах вимірювань, а також окремі спрощення, прийняті при побудові рівняння, приводять до того, що досліджувана модель лише приблизно описує властивості вуглекислого газу, і, отже, функція (1.27) не прирівнюється до нуля у точці оптимуму. Зокрема, оптимальним значенням a=6,377·10^7 і b=29,7 відповідає сума квадратів залишків, рівна 9,7·10^{-2}.

Крім задач регресивного аналізу в інженерній практиці виникає безліч інших задач, які можна формулювати і розв'язувати як задачі оптимізації. Класична інженерна задача, яку можна сформулювати і вирішити як задачу оптимізації, пов'язана з визначенням величин сталих струмів в електричному ланцюзі, складеної з активних опорів. Якщо відомі величини опорів і повний струм у колі, то значення струмів через опори можна визначити розв'язанням задачі мінімізації повної втрати потужності в колі (I^2R) з урахуванням лінійних обмежень, що забезпечують виконання закону Кірхгофа для кожного вузла кола.

1.3 Структура оптимізаційних задач

Незважаючи на те що прикладні задачі, розглянуті в попередньому розділі. відносяться до зовсім різних областей інженерної практики і представляють різні системи, вони мають загальну форму. Усі ці задачі можна класифікувати як задачі мінімізації узагальненої функції $f(x)$ *N-мірного* векторного аргументу $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$, компоненти якого задовольняють системі рівнянь $h_k(x)=0$, набору нерівностей $g_j(x)\geq 0$, а також обмежені зверху і знизу, тобто $x_i^{(U)} \geq x_i \geq x_i^{(L)}$.

Надалі функцію $f(x)$ будемо називати *цільовою функцією*, рівняння $h_k(x)=0$ — *обмеженнями у вигляді рівностей*, а нерівності $g_j(x)\geq 0$ — *обмеженнями у вигляді нерівностей.*

В загальному вигляді задача оптимізації представляється так:

мінімізувати функцію

$$f(x)$$

при обмеженнях

$$h_k(x)=0, \qquad k=1,\dots,K$$

$$g_j(x)\geq 0, \qquad j=1,\dots,J$$

$$x_i^{(U)} \geq x_i \geq x_i^{(L)}, \qquad i=1,\dots,N$$

Зокрема, у прикладах 1.1, 1.2 і 1.3 розглянуті задачі умовної оптимізації. Задача, у якій немає обмежень. тобто

$$J=K=0 \quad \text{і}$$

$$x_i^{(U)} = -x_i^{(L)} = \infty \quad i=1, \dots N,$$

називається оптимизаційною задачею без обмежень або задачею *безумовної* оптимізації. У прикладі 1.4 представлена задача без обмежень.

Задачі оптимізації можна класифікувати відповідно до виду функцій f, h_k, g_j і розмірності вектора x.

Задачі без обмежень, у яких x є одновимірний вектор, називаються задачами *з одією змінною* і складають найпростіший, але разом з тим дуже важливий підклас оптимізаційних задач.

Задачі умовної оптимізації, у яких функції h_k і g_j є лінійними, називаються задачами *з лінійними обмеженнями.* У таких задачах цільові функції можуть бути або лінійними, або нелінійними. Задачі, що містять тільки лінійні функції вектора безупинних змінних x, називаються *задачами лінійного програмування. У задачах цілочислового програмування* компоненти вектора x повинні приймати тільки цілі значення. Одна з задач лінійного програмування розглянута в прикладі 1.3.

Задачі з нелінійною цільовою функцією і лінійними обмеженнями іноді називають *задачами нелінійного програмування з лінійними обмеженнями.* Оптимізаційні задачі такого роду можна класифікувати на основі структурних особливостей нелінійних цільових функцій. Якщо $f(x)$ — квадратична функція, то ми маємо справу з *задачею квадратичного програмування;* якщо є відношення лінійних функцій, то відповідна задача називається задачею дрібно-лінійного програмування, і т.д. Розподіл оптимізаційних задач на ці класи становить значний інтерес, оскільки специфічні особливості тих чи інших задач відіграють важливу роль при розробці методів їхнього розв'язання.

2 ОСНОВИ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

2.1 Загальна характеристика методів лінійного програмування

При знаходженні розв'язків для моделей лінійного програмування в реальних задачах процедури ручного розрахунку практично ніколи не використовуються. Такого роду робота здійснюється за допомогою сучасних ЕОМ. Але тоді може виникнути цілком законне питання: для чого заглиблюватися в *теорію* лінійного моделювання? Чи не досить одного уміння будувати лінійні моделі? Тому, хто ще не оволодів основи лінійного програмування, на ці питання важко відповісти переконливо. Однак значний досвід використання методів лінійного програмування при вирішенні виробничих задач підтвердив, що фахівець (як керівник так і інженер) повинен розуміти принципи методів оптимізації, щоб добиватися дійсно ефективного і обгрунтованого застосування цього інструмента організаційного управління в першу чергу для оптимального керування технологічними процесам.

Викладену вище точку зору корисно пояснити за допомогою аналогій описаних нижче. При освоєнні основних елементів управління автомобілем (уміння регулювати швидкість, змінювати напрям руху і т.д.) не потрібно великих розумових зусиль. Однак, щоб стати першокласним водієм, необхідні певні знання та уміння застосовувати їх на практиці. Наприклад, треба мати уявлення про правила експлуатації акумуляторної батареї інакше можна допустити помилку, залишивши на тривалий час включеним радіоприймач при вимкненому запалюванні. Під час руху по слизькому шосе, знання пристрою гальмової системи допоможе зберегти автомобіль керованим під час заносів. У разі перегріву двигуна для вживання потрібних заходів необхідно розуміння принципу дії радіатора. Таким чином, щоб бути хорошим водієм, потрібне не тільки уміння управляти автомобілем в ідеальних умовах. Щоб виявитися в змозі попередити або обійти небезпеку всякий раз, коли це можливо, потрібно досить добре знати будову автомобіля. З іншого боку, можна бути відмінним водієм без тієї постійної практики, яку мають автомеханіки.

Міркуючи аналогічно, потрібно відмітити, що керівник, який наполегливо ухиляється від ознайомлення з інструментом, що грає головну роль в практичному використанні математичних методів дослідження операцій, поводиться необачно. Якщо він дійсно збирається постійно тримати контроль в своїх руках, йому треба розібратися в суті даного підходу і розвинути в собі певну інтуїцію. Щоб досягнути належного рівня знань, потрібні лише вельми скромні зусилля; при цьому ні в якому разі не треба ставати кваліфікованим теоретиком.

Розмірковуючи про те, наскільки може бути корисним вивчення теоретичних основ лінійного програмування, можна задати і ще одне дуже серйозне питання: чи є гарантія в тому, що відомі в цей час методи збережуть свою значущість і через декілька років, особливо якщо врахувати швидкі темпи розвитку прикладних наук? Відносно майбутнього можна, зрозуміло, лише будувати ті або інші припущення. Однак історія розвитку науки і техніки повинна послужити надійним орієнтиром. У зв'язку з цим корисно знов звернутися до прикладу з автомобілем. Досить одного погляду на автомобіль однієї з найбільш типових моделей раннього періоду, щоб впізнати в ньому саме автомобіль. Незважаючи на численні технічні удосконалення автомобільних конструкцій, багато що з того, що було покладено в їх основу, не зазнало істотних змін.

Успіхи в розробці методів розв'язання для лінійних оптимізаційних моделей демонструють аналогічне явище. В наукових дослідженнях методи розв'язання задач лінійного програмування, основані на використанні електронно-обчислювальної техніки, кожне десятиріччя зазнають значних змін. Проте, багато які початкові принципи витримали перевірку часом і продовжують залишатися основою будь-якого підходу до розв'язання згаданих задач. Ці принципи і є предметом подальшого розгляду.

2.2 Загальне ознайомлення з симплексним методом

У цьому розділі розглядається обчислювальний метод, або *алгоритм,* що дозволяє отримувати чисельні розв'язки для лінійних оптимізаційних моделей. При цьому задача полягає не тільки в тому, щоб встановити послідовність дій, що приводять в результаті до того або іншого розв'язку.

Метою даного розгляду є розробка системного підходу, що дозволяє аналізувати і правильно інтерпретувати будь-яку конкретну модель з всіма складними взаємозв'язками, що є в ній. Ця мета є виключно важливою, оскільки при практичному застосуванні лінійного програмування завжди прагнуть отримати більш змістовну інформацію, ніж відповідь в чисто числовому вигляді. Як правило, бажано мати точне уявлення про міру залежності результату від вхідних параметрів. Іншими словами, необхідно знати, наскільки чутливим ***виявляється*** отриманий розв'язок до вибору початкових даних. Важливість аналізу на чутливість очевидна, оскільки вибір параметрів, що характеризують той або інший процес, часто засновується лише на стадії попередніх міркувань, а обмеження, що враховуються, оцінюються дуже приблизно. Крім того, при попередньому розгляді деякі з реальних обмежень можуть не братися до уваги, а цільова функція може бути побудована без урахування ряду чинників, що впливають на кінцевий результат.

У рівній мірі важливою є також інша мета даного розгляду. Вона полягає в освоєнні принципів побудови алгоритмів оптимізації. Приведений в даному розділі докладний опис так званої *симплексної техніки* дозволить отримати належне уявлення про алгоритмічний метод. Це в свою чергу буде сприяти розвитку потрібної інтуїції і більш глибокому засвоєнню підходів до вивчення інших моделей та методів оптимізації.

Перш ніж дати вичерпне формулювання симплексного алгоритму, доцільно розглянути задачу в спрощеному вигляді, щоб поступово ввести читача в курс справи. Інакше можна заплутатися в подробицях і недостатньо чітко відтінити основні ідеї, які часто сприймаються лише інтуїтивно. Можна з упевненістю стверджувати, що, закінчивши вивчення даного розділу, читач розбереться у всіх деталях, які необхідні для успішного застосування алгоритму, що розглядається, до *будь-якої* моделі лінійного програмування.

Попередній аналіз. Перш ніж приступити до вивчення симплексного алгоритму, проведемо короткий аналіз однієї простої моделі лінійного програмування, щоб отримати певне уявлення про ті «перешкоди», які доводиться долати за допомогою різного роду технічних прийомів. Розглянемо таку задачу:

Максимізувати

$$2x_1+3x_2+7x_3+9x_4 \tag{2.1}$$

при обмеженнях

$$1x_1+1x_2+1x_3+1x_4+1x_5 =9, \tag{2.2}$$

$$1x_2+2x_2+4x_3+8x_4+ \quad +1x_6 = 24, \tag{2.3}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots , 6).$$

Для початку спробуємо шукати розв'язок даної задачі, надавши максимально можливе значення x_4, т. т. тієї змінної, яка входить у вираз для цільової функції з *найбільшим* коефіцієнтом. Легко пересвідчитися, що це пробне значення x_4 дорівнює $24/8 = 3$ і повністю визначається коефіцієнтами в рівнянні (2.3). Цільова функція приймає при цьому значення $9•3 = 27$. Якщо розглянути інший випадок, вибравши як пробний розв'язок максимальне значення x_3, яке, як не важко пересвідчитися, дорівнює $24/4 = 6$, то цільова функція прийме значення $7•6 = 42$, т. т. більше в порівнянні з попереднім варіантом. Таким чином, через наявність обмежень використання лише тієї змінною, яка має найбільшу питому вартість, не завжди досягається найкращий результат.

Легко показати, що якщо $x_3 = 6$, то $x_5 = 3$. Оскільки цільова функція не залежить від x_3, можна спробувати поліпшити розв'язок, вибираючи різні комбінації інших змінних. Якби не існували деякі прості правила, що дозволяють відразу ж виключити з розгляду явно незадовільні розв'язки, перебір різних пробних комбінацій навіть для такої простої задачі, як сформульована вище, був би дуже виснажливим.

Передбачимо, наприклад, що оптимальний розв'язок можна знайти, задаючи позитивні значення x_2 і x_3 при нульових значеннях x_1, x_4, x_5 *і* x_6.

Необхідно перевірити, чи є дане положення правильним. Це не важко. Необхідне лише уміння маніпулювати співвідношеннями (2.2) і (2.3), використовуючи звичайні прийоми елементарної алгебри, що застосовуються при розв'язанні системи, що складається з двох лінійних рівнянь. У математиці такий підхід часто називають методом **виключення змінних** або **методом Гауса.**

Заздалегідь перенесемо x_1, x_4, x_5 і x_6 в рівняннях (2.2) і (2.3) в праві частини:

$$1x_2 + 1x_3 = 9 - 1x_1 - 1x_4 - 1x_5, \qquad (2.4)$$
$$2x_2 + 4x_3 = 24 - 1x_1 - 8x_4 - 1x_6. \qquad (2.5)$$

Потім з (2.5) виключимо x_2. Для цього досить помножити обидві частини рівняння (2.4) на 2 і отриманий результат відняти з (2.5). Виконавши вказані вище операції, отримаємо

$$1x_2 + 1x_3 = 9 - 1x_1 - 1x_4 - 1x_5, \qquad (2.6)$$
$$2x_3 = 6 + 1x_1 - 6x_4 + 2x_5 - 1x_6. \qquad (2.7)$$

Після цього зробимо *нормування* коефіцієнта при x_3 в рівнянні (2.7). Для цього необхідно розділити обидві частини даного рівняння на 2. В результаті будемо мати

$$1x_2 + 1x_3 = 9 - 1x_1 - 1x_4 - 1x_5, \qquad (2.8)$$
$$1x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6. \qquad (2.9)$$

Нарешті, з (2.8) потрібно *виключити* x_3, що досягається відніманням (2.9) з (2.8). У результаті отримаємо

$$x_2 = 6 - \frac{3}{2}x_1 + 2x_4 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_6, \qquad (2.10)$$
$$x_3 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6. \qquad (2.11)$$

Поєднання нормування з операцією виключення змінної іноді називають **пошуком опорного плану.**

Згідно з припущенням, $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Тепер за допомогою (2.10) і (2.11) знаходимо $x_2 = 6$ і $x_3 = 3$. Легко показати, що при цьому задовольняються рівняння (2.2) і (2.3).

Для даного розв'язку цільова функція приймає значення 3•6 + 7•3 = 39. Пригадаємо, що вище вже розглядався розв'язок $x_3 = 6$, для якого цільова функція приймає значення 42. Отже, щойно запропонований варіант розв'язку ($x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, $x_2 = 6$ і $x_3 = 3$) не є оптимальним. Спробуємо знайти простий спосіб, що дозволяє перевірити на оптимальність набір значень, що розглядається при змінних x_i (i=1, 2,. .., 6) без будь-яких *попередніх* спроб.

Для цього підставимо x_2 і x_3, задані співвідношеннями (2.10) і (2.11) у вираз для цільової функції:

$$2x_1 + 3(6 - \frac{3}{2}x_1 + 2x_4 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_6) + 7(3 + \frac{1}{2}x_1 - 3x_4 + 1x_5 - \frac{1}{2}x_6) + 9x_4 =$$

$$=39 + 1x_1 - 6x_4 + 1x_5 - 2x_6. \tag{2.12}$$

З цього співвідношення видно, що якщо взяти $x_1 > 0$ і $x_5 > 0$, то значення цільової функції перевищить 39. Дійсно, якщо звернутися до виразу (2.12), то легко пересвідчитися, що при збільшенні на одиницю значення будь-якої з цих змінних, то рівно на одиницю зростає значення цільової функції.

Зауважимо що ми вирішили збільшувати значення x_1. Яка при цьому допустима межа? За допомогою формул (2.10) і (2.11), що являють собою перетворені рівняння (2.2) і (2.3), можна показати, що при $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ збільшення значення x_1 на одиницю приводить до зменшення значення x_2 на 3/2 і одночасного зростання значення x_3 на 1/2. Однак допустимий розв'язок повинен задовольняти умову $x_j \geq 0$. Отже, значення x_1 не може перевищувати 4, оскільки при $x_4 = 4$ значення x_2 перетворюється в нуль. При цьому, згідно з співвідношенням (2.12), відповідне значення цільової функції дорівнює $39 + 1 \cdot 4 = 43$.

Продовжуючи пошук оптимального розв'язку, розглянемо тепер інший пробний варіант, вважаючи, що x_1 і x_3 можуть приймати позитивні значення, а значення всіх інших змінних рівні нулю. Використовуючи прийоми, за допомогою яких були отримані рівняння (2.10) і (2.11), легко розв'язати (2.2) і (2.3) відносно x_1 і x_3.

У результаті отримаємо

$$x_1 = 4 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_6, \tag{2.13}$$

$$x_3 = 5 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6. \tag{2.14}$$

Вважаючи $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, отримуємо $x_1 = 4$ і $x_3 = 5$. При цьому цільова функція приймає значення $2 \cdot 4 + 7 \cdot 5 = 43$. Зазначимо, що дане значення збігається з тим, яке було отримане за допомогою (2.12), і є поліпшеним в порівнянні з попереднім пробним варіантом.

З метою перевірки пробного варіанту, що розглядається на оптимальність можна, як і в попередньому випадку, підставити (2.13) і (2.14) у вирази для цільової функції. У результаті отримаємо

$$43 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{14}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{5}{3}x_6. \tag{2.15}$$

Неважко пересвідчитися, що при *будь-якому* позитивному прирості змінних x_2 , x_4, x_5 і x_6 цільова функція приймає значення, менші в порівнянні з щойно отриманим. *Отже, даний розв'зок дійсно є оптимальним.*

Інтуїція підказує, що ідеї, викладені в ході проведеного вище аналізу, можна привести в належну систему і представити у вигляді деякої сукупності правил. Внаслідок цього повинен з'явитися алгоритм, що дозволяє обґрунтовано вибирати пробні варіанти і, встановлюючий критерій оцінки міри оптимальності кожного з пробних розв'язків, що розглядаються. Тим, хто прагне швидше увійти в курс справи, а також читачам, для яких алгоритм оптимізації є дуже незвичним поняттям, рекомендується тимчасово упустити наступний розділ, з тим, щоб повернутися до нього після ознайомлення з симплексним алгоритмом, опис якого даний в підрозділі 2.4. Після засвоєння згаданого вище алгоритму, питання, розглянуті в наступному підрозділі, набудуть більш важливого значення. Однак тим, хто віддає перевагу методу дедукції, потрібно продовжити вивчення даного розділу в запропонованій тут послідовності. При цьому не треба особливо турбуватися, якщо матеріал, що викладається нижче спочатку досить важкий для розуміння. Після опрацювання даного розділу всі неясності зникнуть.

2.3 Алгоритмічний метод

У даному посібнику розглянуто різні типи алгоритмів. Найчастіше застосовується метод ітерацій, коли при виборі кожного пробного розв'язку, починаючи з самого першого, за допомогою деякого заданого передбачення визначають, як діяти далі: припинити обчислення або перейти до наступного пробного варіанту. Важливо знати, в яких випадках схема обчислень, що пропонується дійсно являє собою алгоритм розв'язання задачі.

Розглянемо, наприклад, процедуру, за допомогою якої була розв'язана проста задача, сформульована в попередньому розділі. Всякий раз, коли ми хотіли перевірити на оптимальність ту або іншу конкретну пару змінних, однозначне визначення їх значень, що задовольняють всі обмеження, що є, не викликало ніяких труднощів. Можливо, справа тільки у випадковому успіху? Нарівні з цим був запропонований простий спосіб виявлення можливостей поліпшення пробного розв'язку за рахунок використання інших змінних. Чи завжди такий прийом приводить до необхідного результату? Ми пересвідчилися, що спроба включити в пробний розв'язок одну з невикористаних змінних зумовлює виключення з нього іншої цілком певної змінної, що раніше фігурувала в пробному варіанті. Чи є це правило заміни абсолютно жорстким? Оптимальний розв'язок вдалося знайти дуже швидко. Чи можна стверджувати, що це в порядку речей?

Для засвоєння симплексного методу, а також інших алгоритмів, які будуть розглядатись надалі, корисно мати уявлення про деякі основні моменти, що враховуються при використанні будь-якої обчислювальної процедури.

Оцінюючи той або інший обчислювальний алгоритм, необхідно, зокрема, розглянути такі його характеристики:

1. Повнота алгоритму. Чи є правила, визначені даним алгоритмом, абсолютно однозначними? Чи існує практичний спосіб побудови першого пробного розв'язку, що дозволяє почати реалізацію алгоритму? Чи сформульовані правила, що описують метод, що розглядається, настільки чітко, щоб людина або електронно-обчислювальна машина могли слідувати їм, володіючи лише умінням прочитувати інформацію і не вдаючись ні до яких додаткових міркувань і розумових висновків?

2. Межі застосовності. Для розв'язання яких математичних задач призначений даний алгоритм? Наскільки легко визначити, чи попадає конкретна задача, що розглядається, в клас, що покривається областю застосовності методу? Чи можна стверджувати, що заключний пробний варіант, що завершує обчислення, завжди є точним розв'язком задачі? Якщо це не так, чи можна довести, що точний розв'язок існує, і розкрити причину допущеної помилки?

3. Властивості збіжності. Чи завжди обчислювальна процедура, що визначається даним алгоритмом, забезпечує збіжність? Якщо збіжність має місце, чи завжди вона приводить до правильного розв'язку? Чи вичерпується дана процедура кінцевим числом ітерацій? Скільки ітерацій необхідно виконати при розв'язанні тієї або іншої практичної задачі, щоб отримати необхідний результат? Чи є збіжність рівномірною? Якщо обчислення припинені до того, як отриманий оптимальний розв'язок, чи можна заключний пробний розв'язок вважати досить хорошим з практичної точки зору?

4. Вимоги до обчислювальних процедур. Наскільки складними і трудомісткими виявляються обчислення, які необхідно виконати для отримання належного розв'язку? При якій точності обчислень метод, що розглядається приводить до задовільних результатів?

Фахівець в області прикладної математики може отримати відповіді на багато з цих питань шаблонним шляхом. Однак при розгляді питань, що стосуються уточнення властивостей збіжності, потрібний більш тонкий аналіз. Незважаючи на те, що проблема збіжності при застосуванні алгоритмічних методів є дуже складною, ряд міркувань, що відіграють в зв'язку з цим важливу роль, можна пояснити на прикладі простої моделі. З метою ілюстрації передбачимо, що при наявності певних обмежень потрібно максимізувати деяку задану цільову функцію. Саме так йде справа при розв'язуванні задач лінійного програмування. На приведених нижче графіках (рис. 2.1 - 2.5) показано, як змінюється значення цільової функції при переході від кожної заданої ітерації до наступної для різних конкретних алгоритмів.

Випадок 1. Поліпшення значення цільової функції спостерігається при кожній ітерації. Ряд пробних значень сходиться до оптимального розв'язку після виконання кінцевого числа ітерації. У приведеному прикладі оптимум досягається на сьомій ітерації.

Випадок 2. Поліпшення значення цільової функції спостерігається при кожній ітерації, однак ітераційний процес містить нескінченне число ітерацій. При цьому кожний подальший пробний варіант дещо поліпшує розв'язок, але це поліпшення із зростанням номера ітерації стає все менш і

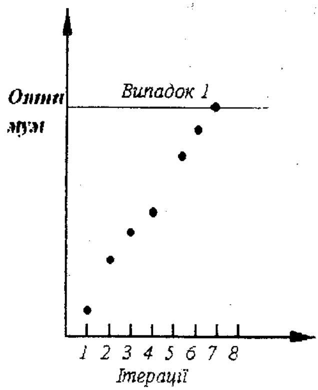


Рисунок 2.1- Приклад ходу ітераційних процесів – випадок 1

менш значним. Іншими словами, оптимальний розв'язок досягається в цьому випадку лише асимптотично.

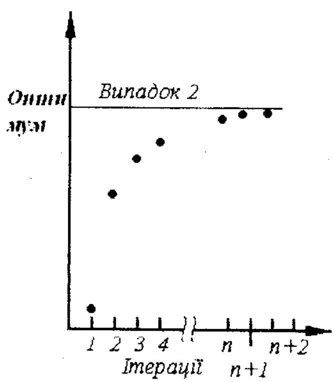


Рисунок 2.2 - Приклад ходу ітераційних процесів – випадок 2

Випадок 3. Значення цільової функції поліпшується при кожній ітерації. Як і в попередньому випадку, ітераційний процес містить нескінченне число ітерацій. Однак цільова функція прямує до деякого значення, що лежить нижче *оптимального*.

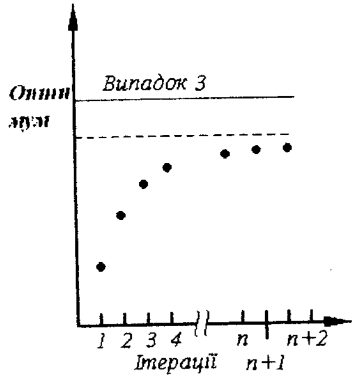


Рисунок 2.3 - Приклад ходу ітераційних процесів – випадок 3

Випадок 4. Ряд пробних значень сходиться до оптимального за кінцеве число ітерації, причому при кожній подальшій ітерації, принаймні, не відбувається погіршення попереднього результату. Однак при деяких ітераціях значення цільової функції фактично не поліпшується. Такого роду ситуація спостерігається при третій, сьомій і восьмій ітераціях.

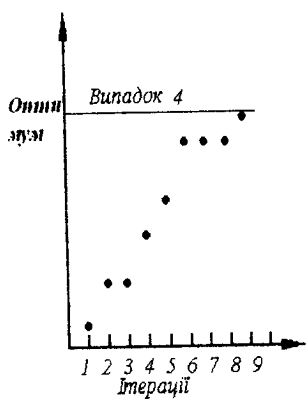


Рисунок 2.4 - Приклад ходу ітераційних процесів – випадок 4

Випадок 5. Стабільній збіжності передує убування значення цільової функції, що спостерігається при деяких ітераціях. На рис. 2.5 це має місце при четвертій і п'ятій ітераціях.

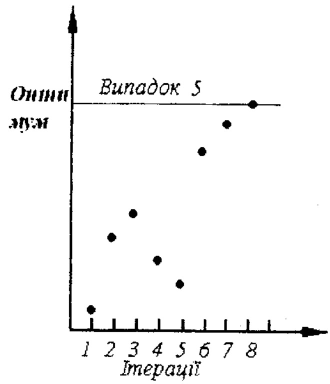


Рисунок 2.5 - Приклад ходу ітераційних процесів – випадок 5

Таким чином, не будь-який алгоритм забезпечує збіжність ряду пробних значень цільової функції до деякого граничного значення за кінцеве число ітерації. У тих випадках, коли збіжність має місце, межа, до якого прагне цільова функція, не завжди збігається з її оптимальним значенням. Крім того, не при будь-якому алгоритмі кожна подальша ітерація поліпшує значення цільової функції.

2.4 Введення в симплексний алгоритм

Для розв'язання задач лінійного програмування запропоновано немало різних алгоритмів. Однак найбільш ефективним серед них виявився алгоритм, розглянутий нижче. При цьому потрібно підкреслити, що при розв'язанні деяких частинних задач (як, наприклад, задач, пов'язаних з оптимізацією потоків в мережах) можуть виявитися більш ефективними інші алгоритми.

Спробуємо весь хід міркувань, що забезпечує розв'язання задачі, розглянутої в попередньому розділі, описати в словесній формі.

Згадана модель містить два рівняння.

Пробні розв'язки вибиралися таким чином: допускалося, що дві змінні приймають деякі позитивні значення, а інші змінні передбачалися тотожно рівними нулю. Прагнучи до узагальнення, можна передбачити, що в тих випадках, коли модель містить m рівнянь, для побудови пробних розв'язків використовуються m змінних, що приймають деякі позитивні значення при нульових значеннях інших змінних. Спочатку допустимо, що розв'язок існує, причому оптимальне значення цільової функції кінцеве.

У цьому випадку обчислювальна процедура буде виглядати таким чином:

Крок 1. Виберемо m змінних, що задають допустимий пробний розв'язок. Виключимо ці змінні з виразу для цільової функції.

Крок 2. Перевіримо, чи не можна за рахунок однієї із змінних, прирівняної спочатку до нуля, поліпшити значення цільової функції, надаючи їй відмінні від нуля (причому позитивні) значення. Якщо це можливе, перейдемо до кроку 3. Інакше припинемо обчислення.

Крок 3. Знайдемо граничне значення змінної, за рахунок якої можна поліпшити значення цільової функції. Збільшення значення цієї змінної допустиме до тих пір, доки одна з m змінних, що ввійшли в пробний розв'язок, не обернеться в нуль. Виключимо з виразу для цільової функції щойно згадану змінну і введемо в пробне розв'язання ту змінну, за рахунок якої результат може бути поліпшений.

Крок 4. Розв'яжемо систему m рівнянь відносно змінних, що ввійшли в нове пробне розв'язання. Виключимо ці змінні з виразу для цільової функції. Повернемося до кроку 2.

Важливо зазначити, що при однозначному розумінні даного розпорядження запропонований алгоритм дійсно приводить до оптимального розв'язку для будь-якої моделі лінійного програмування за кінцеве число ітерацій. Такий спосіб розв'язання задач лінійного програмування часто називають **симплексним алгоритмом**.

Звернемося спочатку до однієї простої задачі, що не має ніяких «аномалій», і спробуємо з її допомогою отримати загальне уявлення про **симплексний метод.** До більш докладного аналізу даного методу повернемося трохи пізніше.

Приклад.

Розглянемо наступну задачу:

максимізувати

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

при обмеженнях

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

Визначимо через x_0 значення цільової функції і введемо в розгляд вільні змінні. У результаті отримаємо таку систему рівнянь:

$$
\begin{array}{llll}
1x_0-4x_1-5x_2-9x_3-11x_4 & =0 & \text{(рядок 0)}, & \\
\quad 1x_1+1x_2+1x_3+1x_4+1x_5 & =15 & \text{(рядок 1)}, & \\
\quad 7x_1+5x_2+3x_3+2x_4 \quad +1x_6 & =120 & \text{(рядок 2)}, & (2.15) \\
\quad 3x_1+5x_2+10x_3+15x_4 \quad +1x_7 & =100 & \text{(рядок 3)}, &
\end{array}
$$

де *всі* змінні можуть приймати лише негативні значення. Помітимо, що введення в розгляд змінної x_0 (рядок 0) дозволяє записати вираз для цільової функції у вигляді рівняння.

Ітерація I . Задача кроку 1 полягає в тому, щоб вибрати первинний допустимий розв'язок системи рівнянь (2.15). Існує безліч таких розв'язків, однак зручніше всього почати з $x_0 = 0$, $x_5 = 15$, $x_6 = 120$, $x_7 = 100$ при нульових значеннях інших змінних. Іншими словами, будується перше пробне розв'язання за допомогою тільки вільних змінних.

Назвемо його початковим **базисним розв'язком,** а змінні x_0, x_5, x_6, x_7 **базисними змінними** або скорочено **базисом.** Інші змінні логічно назвати **небазисними.**

2.4.1 Базисні та небазисні змінні

Термін «базис» (або «базисне розв'язання») відображає тут ту обставину, що відповідно до числа лінійних співвідношень моделі, що розглядається, розв'язок містить лише чотири змінні, причому значення цих чотирьох змінних однозначно визначаються константами, що стоять в правих частинах рівнянь (2.15). Потрібно підкреслити, що симплексний метод оперує лише базисними *пробними* розв'язаннями. Незважаючи на обмеження, що накладаються на клас допустимих розв'язків, цей метод дозволяє отримати оптимальний розв'язок, якщо, зрозуміло, він існує.

Якщо під x_0 розуміти прибуток, то щойно запропонований пробний розв'язок явно є не дуже вигідним. Але його, безсумнівно, можна поліпшити. Звернемо увагу на коефіцієнти при тих змінних, які фігурують в рядку 0 і які в запропонованому вище пробному варіанті не є базисними (тобто коефіцієнти при x_1, x_2, x_3 і x_4). Легко пересвідчитися, що кожний негативний коефіцієнт в цьому рядку визначає величину позитивного приросту x_0 при збільшенні значення відповідної змінної на одиницю. Інтерпретація коефіцієнтів в рядку 0 залишається в силі протягом всієї процедури складання пробних розв'язань. Таким чином, справедливе таке положення.

Інтерпретація коефіцієнтів в рядку 0.

Кожен коефіцієнт в рядку 0 визначає позитивний (якщо перед ним стоїть знак мінус) або негативний (якщо перед ним стоїть знак плюс) приріст x_0 при збільшенні на одиницю відповідної небазисної змінної.

Крок 2 симплексного методу встановлює правило, яке легко реалізовується, що дозволяє визначити, які змінні повинні увійти в черговий пробний базис.

Симплекс-критерій I *(максимізація)*. Якщо в рядку 0 є небазисні змінні, коефіцієнти при яких негативні, потрібно вибрати змінну (визначимо її через x_j) з найбільшим абсолютним, значенням коефіцієнта, що стоїть перед нею, тобто ту змінну, яка забезпечує найбільший питомий приріст значення цільової функції. У випадку, коли всі небазисні змінні рядки 0 мають позитивні або нульові коефіцієнти, оптимальний розв'язок можна вважати отриманим.

Відповідно до **критерію I** в базис потрібно ввести змінну x_4. Кожний одиничний приріст x_4 приводить до збільшення значення x_0 на 11. Абсолютно очевидно, що чим більше значення x_4, тим сильніше зростає значення x_0. Але потрібно пам'ятати про обмеження (2.15). Зауважимо, що збільшення значення x_4 можливе лише за рахунок зменшення значень базисних змінних в кожному рядку, що містить x_4 з позитивним коефіцієнтом.

Так, наприклад, при збільшенні x_4 на одиницю

1) значення x_5 повинно бути зменшене на 1, щоб задовольнялося обмеження, приведене в рядку 1;

2) значення x_6 повинно бути зменшене на 2, щоб задовольнялося обмеження, приведене в рядку 2;

3) значення x_7 повинно бути зменшене на 15, щоб задовольнялося обмеження, приведене в рядку 3.

Яким же великим повинно бути значення x_4, щоб значення однієї з вибраних спочатку базисних змінних досягло своєї нижньої границі, тобто нуля? Легко перевірити, що така межа для x_4 дорівнює 100/15 = 6,67; при цьому $x_7 = 0$. Відповідно, в базис треба включити x_4, виключивши з нього x_7.

Резюмуючи викладене вище, сформулюємо правило для кроку 3.

Симплекс-критерій II.

а) Розглянемо співвідношення чисел, що стоять в правих частинах (2.15), до відповідних коефіцієнтів при новій базисній змінній x_j (не звертаючи увагу на співвідношення, в яких знаменник рівний нулю або являє собою негативне число);

б) Виберемо співвідношення з найменшим значенням - в черговому пробному розв'язку x_j прирівнюється саме до цього значення. Нехай найменше з усіх співвідношень правих частин (2.15) до відповідних коефіцієнтів при x_j відповідає змінній x_k, що входила в попереднє розв'язку; тоді в черговому пробному розв'язку потрібно вважати $x_k = 0$. Результати обчислень приведені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Базисні змінні	Пробні розв'язки	Коефіцієнти при x_4	Значення співвідношень	Мінімальне значення	Наступний пробний розв'язок
x_0	0	-11	-		
x_5	15	1	15		
x_6	120	2	60		
x_7	100	15	6,66	6,66	$x_4 = 6,66,\ x_7 = 0$

Тепер, коли відомо, що в пробному базисі x_7 потрібно замінити на x_4, перейдемо до *кроку 4*.

Перепишемо співвідношення (2.15) таким чином, щоб в рядку 3 коефіцієнт при x_4 був рівний одиниці, а в рядках 0, 1 і 2 - нулю. Процедуру, з допомогою якої це досягається, називають операцією заміни **базису або** операцією заміни **опорного плану.**

Спочатку розділимо обидві частини рівняння в рядку 3 на коефіцієнт при x_4, тобто на 15:

$$
\begin{array}{llll}
1x_0 - 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4 & & =0 & \text{(рядок 0)},\\
\quad 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 & & =15 & \text{(рядок 1)},\\
\quad 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & +1x_6 & =120 & \text{(рядок 2)},\\
\quad \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 1x_4 & +\frac{1}{15}x_7 & = \frac{20}{3} & \text{(рядок 3)}
\end{array}
\qquad (2.16)
$$

У результаті коефіцієнт при x_4 в рядку 3 прийняв значення, рівне одиниці. Потрібно зазначити, що виконана математична операція є цілком законною, оскільки вона полягала в єдиній дії розподілі рівних величин на одне і те ж число. Обернемо в нулі коефіцієнти при x_4 в рядках 0, 1 і 2, діючи за такою схемою:

1) помножити рядок 3 на 11 і результат додати до рядка 0;

2) помножити рядок 3 на 1 і результат додати до рядка 1;

3) помножити рядок 3 на 2 і результат додати до рядка 2.

Виконавши вказані вище дії, отримаємо

$$1x_0 - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 \qquad + \frac{11}{15}x_7 = \frac{220}{3} \quad \text{(рядок 0)},$$

$$\frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \qquad +1x_5 \qquad - \frac{1}{15}x_7 = \frac{25}{3} \quad \text{(рядок 1)}, \qquad (2.17)$$

$$\frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 \qquad +1x_6 - \frac{2}{15}x_7 = \frac{320}{3} \quad \text{(рядок 2)},$$

$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 1x_4 \qquad + \frac{1}{15}x_7 = \frac{20}{3} \quad \text{(рядок 3)}.$$

Як і в попередньому випадку, пророблені математичні операції є цілком законними, оскільки вони полягають в множенні правих і лівих частин рівнянь, що розглядаються на константу і в подальшому складанні правих і відповідно лівих частин рівнянь, отриманих внаслідок виконання першої операції.

Таблиця 2.2 - Другий пробний базисний розв'язок

x_0	220/3
x_5	25/3
x_6	320/3
x_4	20/3

Отже, незважаючи на те, що система рівнянь (2.17) виглядає інакше, ніж система (2.15), можна стверджувати, що вони еквівалентні. Зручність представлення системи рівнянь у вигляді (2.17) полягає в тому, що, вважаючи $x_1 = x_2 = x_3 = x_7 = 0$, можна відразу ж визначити значення змінних для нового пробного базисного розв'язку (табл. 2.2).

Для нового базису прибуток x_0 дорівнює 220/3; при цьому чисельне значення прибутку для пробного розв'язку, що розглядається визначається за такою формулою:

Прибуток для нового пробного розв'язку = Прибуток при попередньому пробному базисі + Значення нової базисної змінної.

Питомий внесок нової базисної змінної в приріст прибутку:

$$\frac{220}{3} = 0 + \frac{20}{3} \cdot 11.$$

Значення *критерію II* стає тепер більш ясним. Якби замість x_7 з первинного базису ми виключили x_5 (або x_6), то x_4, x_7 і x_6 (або x_5) прийняли б негативні значення, що суперечить припущенню про те, що жодна із змінних не може бути негативною. Дане твердження легко перевірити за допомогою простих обчислень.

Ітерація 2. Завершивши першу ітерацію, потрібно повернутися до кроку 2, з тим, щоб визначити, чи є отриманий розв'язок оптимальним. Якщо оптимум ще не досягнуто, необхідно відповідно до симплексного алгоритму приступити до наступної ітерації.

Згідно з *критерієм I*, можливість поліпшити розв'язок дійсно існує. При цьому в черговий базис вигідно включити або x_1 або x_2, або x_3. На основі критерію I вибір падає на x_1, *оскільки* ця змінна забезпечує найбільший питомий приріст для значення цільової функції. Зробивши даний вибір, потрібно перейти до обчислень, передбачених кроком 3, використовуючи при цьому *критерій II* (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 - Ітерація 2: включення x_1 в черговий базис (згідно з критерієм II).

Базисні змінні	Пробний розв'язок, що розглядається.	Коефіцієнти при x_4	Значення співвідно шень	Мінімальне значення	Наступний пробний розв'язок
x_0	220/3	9/5	—		
x_5	25/3	4/5	125/12	125/12	x_1=125/12,x_5=0
x_6	320/3	33/5	1600/99		
x_7	20/3	1/5	100/3		

Відповідно до таблиці 2.3 в черговому пробному розв'язку x_5 потрібно замінити на x_4. Тепер з урахуванням зробленої заміни треба відповідним чином перетворити систему рівнянь (2.17).

Обчислювальну процедуру, що дозволяє змінити пробний базис (див. крок 4), можна реалізувати в декілька прийомів. Спочатку виконаємо нормування коефіцієнта при x_1 в рядку 1:

$$
\begin{aligned}
&1x_0 - \frac{9}{5}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{11}{15}x_7 = \frac{220}{7} && \text{(рядок 0)},\\
&1x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{5}{4}x_5 - \frac{1}{12}x_7 = \frac{125}{12} && \text{(рядок1)},\\
&\frac{33}{5}x_1 + \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + 1x_6 - \frac{2}{15}x_7 = \frac{320}{3} && \text{(рядок 2)},\\
&\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 1x_4 + \frac{1}{15}x_7 = \frac{20}{3} && \text{(рядок 3)}.
\end{aligned}
\qquad (2.18)
$$

Потім, завершуючи операцію пошуку чергового опорного плану, виключимо x_1 з рівнянь в рядках 0, 1 і 3, діючи за такою схемою:

1) помножити рядок 1 на 9/5 і результат скласти з рядком 0;

2) помножити рядок 1 на 33/5 і результат скласти з рядком 2;

3) помножити рядок 1 на 1/5 і результат скласти з рядком 3.

В результаті отримаємо

$$
\begin{aligned}
&1x_0+\frac{1}{6}x_2-\frac{11}{12}x_3+\frac{9}{4}x_5+\frac{7}{12}x_7=\frac{1105}{12} && \text{(рядок 0)},\\
&1x_1+\frac{5}{6}x_2+\frac{5}{12}x_3+\frac{5}{4}x_5-\frac{1}{12}x_7=\frac{125}{12} && \text{(рядок 1)},\\
&\frac{-7}{6}x_2-\frac{13}{12}x_3-\frac{33}{4}x_5+1x_6+\frac{5}{12}x_7=\frac{455}{12} && \text{(рядок 2)},\\
&\frac{1}{6}x_2+\frac{7}{12}x_3+1x_4-\frac{1}{4}x_5+\frac{1}{12}x_7=\frac{55}{12} && \text{(рядок 3)}.
\end{aligned}
\qquad (2.19)
$$

Третій пробний базисний розв'язок представлений в табл. 2.4.

Таблиця 2.4 – Третій пробний базисний розв'язок

x_0	220/3
x_5	25/3
x_6	320/3
x_4	20/3

Відмітимо, що на кожній ітерації коефіцієнт при змінній, що не ввійшла в базис, визначає зміну базисних змінних, зумовлених одиничним приростом відповідної небазисної змінної (у випадку якщо останню включити в пробне розв'язання). Так, наприклад, за рахунок одиничного приросту x_1 в (2.17) значення x_5, x_6 і x_7, зменшуються відповідно на 4/5, 33/5 і 1/5 Правильність даного твердження можна ще раз перевірити на прикладі третього пробного розв'язку, для якого x_1 = 125/12. Потрібно зазначити, що до включення в базис x_1 в системі рівнянь (2.17) нашу увагу привертала інша змінна x_2. Внаслідок же включення в базис x_1 сталося зниження «важливості» x_2.

Ітерація 3. Завершивши другу симплекс-ітерацію, знову розглянемо коефіцієнти при змінних в рядку 0 з метою перевірки отриманого розв'язку на оптимальність. Тепер ми бачимо, що розв'язок може бути поліпшений за рахунок x3. Результати обчислень, що дозволяють ліпшений за рахунок x3. Результати обчислень, що дозволяють з'ясувати, яка із змінних повинна бути виключена з базису, представлені в табл..2.5. Відповідно до цієї таблиці з числа базисних потрібно виключити змінну x_4, що ввійшла в розв'язання при першій ітерації. У процесі застосування симплексного методу випадки, коли та або інша змінна при деякій ітерації входить в пробне розв'язання, а потім виключається з нього при одній з наступних ітерацій, виникають нерідко. Саме ця обставина заважає заздалегідь визначити максимальне число симплекс-ітерацій, яке приводило б до розв'язання будь-якої задачі лінійного програмування.

Таблиця 2.5 – Ітерація 3: введення x_3 в черговий базис (згідно з критерієм II)

Базисні змінні	Пробне розглядуване розв'язання	Коефіцієнти при x_3	Значення співвідношення	Мінімальне значення	Наступні пробні розв'язки
x_0	1105/12	-11/12	—	55/7	x_3=55/7,x_4=0
x_1	125/12	5/12	25		
x_6	455/12	-13/12	—		
x_4	55/12	7/12	55/7		

Як і в попередніх ітераціях, пронормуємо коефіцієнт при x_3 в рядку 3 шляхом ділення обох частин відповідного рівняння на 7/12. Система рівнянь прийме вигляд

$$
\begin{aligned}
&1x_0 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{11}{12}x_3 + \frac{9}{4}x_5 + \frac{7}{12}x_7 = \frac{1105}{12} && \text{(рядок 0)},\\
&1x_1 + \frac{5}{6}x_2 + \frac{5}{12}x_3 + \frac{5}{4}x_5 - \frac{1}{12}x_7 = \frac{125}{12} && \text{(рядок 1)},\\
&\frac{-7}{6}x_2 - \frac{13}{12}x_3 - \frac{33}{4}x_5 + 1x_6 + \frac{5}{12}x_7 = \frac{455}{12} && \text{(рядок 2)},\\
&\frac{2}{7}x_2 + 1x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} && \text{(рядок 3)}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Тепер виключимо x_3 з рівнянь в рядках 0, 1 і 2, діючи за такою схемою:

1) помножити рядок 3 на 11/12 і результат скласти з рядком 0;

2) помножити рядок 3 на (- 5/12) і результат скласти з рядком 1;

3) помножити рядок 3 на 13/12 і результат скласти з рядком 2.

У результаті математичних перетворень отримаємо

$$
\begin{aligned}
&1x_0 + \frac{3}{7}x_2 - \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7} && \text{(рядок 0),}\\
&1x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{7}x_4 + \frac{10}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_7 = \frac{50}{7} && \text{(рядок 1),}\\
&-\frac{6}{7}x_2 + \frac{13}{7}x_4 - \frac{61}{7}x_5 + 1x_6 + \frac{4}{7}x_7 = \frac{325}{7} && \text{(рядок 2),}\\
&\frac{2}{7}x_2 + 1x_3 + \frac{12}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 = \frac{55}{7} && \text{(рядок 3).}
\end{aligned}
\qquad (2.21)
$$

При виконанні даної ітерації бралася до уваги специфіка обчислювальної процедури, передбачена *критерієм II*. Якби ми спробували виключити з пробного базису змінну з від'ємним коефіцієнтом (таким, згідно з табл. 2.5 є x_6), то змінна x_3 могла б приймати тільки від'ємні значення. За умовою задачі це недопустимо. Отже, за наявності від'ємного коефіцієнта в тому або іншому рядку процедура заміни базису повинна виконуватися з урахуванням відповідної вимоги *критерію II*. Аналогічно виявляється, неможливо виключити базисну змінну з рядка, в який змінна, включена в нове пробне розв'язок, входить з нульовим коефіцієнтом. Спроба здійснити вказану операцію була б зв'язана з діленням на нуль, що неможливо.

Таким чином, критерій II гарантує виконання умови невід'ємності базисних змінних для будь-якого пробного розв'язку.

Ітерація 4. У рядку 0 системи рівнянь (2.21) всі коефіцієнти позитивні і, отже, згідно з *критерієм I*, отриманий розв'язок є оптимальним (табл.2.6). Таким чином, на кроці 2 обчислення припиняються. Залишається пересвідчитися, що значення змінних, наведені в табл.2.6, дійсно задовольняють (2.15).

2.4.2 Алгоритм обчислень

У короткому викладі алгоритм обчислень за симплексним методом складається з таких кроків:

Крок1. Вибирається початковий базис.

Крок2 Використовується *критерій I*. Якщо пробний розв'язок, що розглядається, не є оптимальним, здійснюється перехід до кроку 3. В іншому випадку обчислення припиняються.

Крок3. Виконується процедура, вказана *за критерієм II.*

Крок4. Змінюється базис, після чого повертаються до кроку 2.

Обчислювальні процедури, що виконуються відповідно до симплексного алгоритму, легко інтерпретувати геометрично в просторі розв'язків. При цьому кожний пробний базис відповідає вершині опуклої поліедральної безлічі допустимих розв'язків. Перехід від одного базису до іншого геометрично виглядає як перехід від однієї екстремальної точки до іншої (причому суміжної) екстремальної точки. Таким чином, можна стверджувати, що пошук оптимального розв'язку симплексним методом полягає в послідовному *сходженні вздовж ребер згаданого багатогранника від однієї його вершини до сусідньої.*

2.4.3 Оптимальність розв'язків

Доказ того, що отриманий розв'язок дійсно є оптимальним, не викликає ніяких труднощів. Оскільки співвідношення (2.21) отримані з початкових рівнянь (2.15) за допомогою елементарних алгебраїчних дій (множення рівних величин на одне і те ж число і складання рівних величин з рівними величинами), системи рівнянь (2.15) і (2.21), незважаючи на зовнішню відмінність, являють собою математичне формулювання однієї і тієї ж задачі. Передбачимо, що з самого початку ми маємо (2.21). Після простого перетворення рядка 0 цільову функцію можна записати у вигляді

$$x_0=\frac{695}{7}-\frac{3}{7}x_2-\frac{11}{7}x_4-\frac{13}{7}x_5-\frac{5}{7}x_7. \qquad (2.22)$$

При будь-якому відмінному від нуля допустимому значенні хоча б однієї з небазисних змінних x_2, x_4, x_5 або x_7 цільова функція приймає, згідно (2.22), значення, менше в порівнянні з отриманим вище, тобто менше в порівнянні з 695/7.

Коефіцієнти при змінних в остаточному варіанті рядка 0 іноді називають **прихованими витратами**. Кожний коефіцієнт визначає відхилення значення цільової функції від оптимального при збільшенні значення відповідною небазисною змінною на одиницю; при цьому передбачається, що базис, побудований на заключній ітерації, залишається допустимим.

Таблиця 2.6 - Четвертий пробний базисний розв'язок, що є оптимальним

x_0	220/3
x_5	25/3
x_6	320/3
x_4	20/3

Покладемо, наприклад, $x_2 = 1$. Це спричинить зниження значення x_0 на $^3/_7$. При цьому значення базисних змінних також зміняться, в чому можна пересвідчитися за допомогою співвідношень, приведених в рядках 1, 2 і 3. Розглянемо базисну змінну в рядку 1 системи рівнянь (2.21):

$$x_1 = \frac{50}{7} - \frac{5}{7}x_2 + \frac{5}{7}x_4 - \frac{10}{7}x_5 + \frac{1}{7}x_7 \tag{2.23}$$

Вважаючи $x_2 = 1$, ми зменшуємо значення x_1 на $^5/_7$.

Альтернативні оптимальні розв'язки. Задача лінійного програмування може мати декілька оптимальних розв'язків. Графічний розгляд для двовимірного випадку показує, що якщо лінійна модель має більше ніж один оптимальний розв'язок, то вона має нескінченну кількість оптимальних розв'язків. Виявляється справедливим узагальнення даного твердження і на випадок більшої кількості вимірювань.

Намагаючись розібратися, внаслідок чого це відбувається, розглянемо такий приклад.

Передбачимо, що замість (2.15) ми маємо іншу модель, в яку входить нова змінна x_8.

У рядки системи рівнянь (2.15) внесені такі зміни:

$$\begin{array}{rl} -2x8 & \text{(рядок 0)}, \\ +1x8 & \text{(рядок 1)}, \\ +9x8 & \text{(рядок 2)}, \\ +0{,}2x8 & \text{(рядок 3)}. \end{array} \tag{2.24}$$

За допомогою простих обчислень можна показати, що на заключній ітерації ми будемо мати такі доповнення до рядків системи рівнянь (2.21):

$$\begin{array}{rl} 0x_8 & \text{(рядок 0)}, \\ +1x_8 & \text{(рядок 1)}, \\ +9x_8 & \text{(рядок 2)}, \\ +0{,}2x_8 & \text{(рядок 3)}. \end{array} \tag{2.25}$$

Неважко пересвідчитися, що якщо x_8 включити в базис, то, згідно з *критерієм II*, x_1 вийде з базису і альтернативний оптимальний базисний розв'язок прийме такий вигляд:

$$\begin{array}{ll} x_0 = \frac{695}{7}, & x_8 = \frac{50}{9.8} = 5.1 \\ x_6 = \frac{3045}{7\cdot(9.8)} = 44.39 & x_3 = \frac{679}{7\cdot(9.8)} = 9.9 \end{array} \tag{2.26}$$

Легко показати, що будь-яке позитивно-зважене середнє двох отриманих оптимальних базисних розв'язків також є альтернативно допустимим оптимальним розв'язком

$$x_0=\frac{695}{7}$$

$$x_1=\omega\left(\frac{50}{7}\right)+(1-\omega)0, \qquad (2.27)$$

$$x_3=\omega\left(\frac{55}{7}\right)+(1-\omega)9{,}9,$$

$$x_6=\omega\left(\frac{325}{7}\right)+(1-\omega)44.39,$$

$$x_8=\omega(0)+(1-\omega)5.1,$$

де w - ваговий коефіцієнт, *що задовольняє* умову $0 < w < 1$.

Задачі лінійного програмування великої розмірності нерідко мають більше двох альтернативних оптимальних базисних розв'язків. Це зумовлене відсутністю двох або більше небазисних змінних в рядку 0 на етапі заключної ітерації. Існують детально розроблені методи визначення всіх *оптимальних* базисних розв'язків. Будь-яке позитивно-зважене середнє альтернативних базисних розв'язків також є розв'язком. Зазначимо, що при цьому набір *змінних* не складає *базису*. Даний набір містить змінні в кількості, що перевищує число обмежень, і, отже, одного переліку змінних, що ввійшли в згаданий набір, не досить для однозначного визначення їх чисельних значень.

Висновок. Можна з повною впевненістю стверджувати, що оптимальний розв'язок навіть для такої простої задачі, яка щойно розглянута, не був спочатку очевидним. У разі моделей більшої розмірності необхідність в системному підході до отримання оптимальних розв'язків не вимагає аргументації. Обговоримо тепер симплексний алгоритм з точки зору тих чотирьох характеристик, які викладені в попередньому розділі.

2.5 Повнота алгоритму

При деяких ітераціях обчислювальні процедури, передбачені симплексними критеріями I і II, в частині, що стосується переходу від одного базису до іншого, можуть виявитися неоднозначно визначеними. Наприклад, коли внаслідок оцінки коефіцієнтів в рядку 0 дві або більше двох змінних є за *критерієм I* в рівній мірі «перспективними», з точки зору поліпшення пробного розв'язку, вибір однієї з цих змінних здійснюється довільно. Наприклад, можна взяти змінну з найменшим значенням індексу або змінну, яка з деяких попередніх міркувань повинна увійти в базис на останній ітерації.

Якщо, згідно з *критерієм II*, дві або більше двох змінних проміжного базису повинні одночасно прийняти нульові значення внаслідок включення в черговий базис нової змінної, з старого базису виключенню підлягає тільки одна з них. Інші із згаданих змінних залишаються в базисі, приймаючи при цьому нульові значення. Базис, що отримується внаслідок такої заміни, називається **виродженим.**

Повне усунення неоднозначності в обчислювальних процедурах пов'язане з великими труднощами теоретичного характеру. Поки спеціально не обумовлені правила вибору змінних, що підлягають виключенню з базису, збіжність симплексного алгоритму не може бути строго доведена. Але численні випадки застосування симплексного методу приводять до висновку, що при розв'язанні будь-якої практичної задачі правила вибору в разі неоднозначності можна не уточнювати - імовірність того, що збіжність не буде забезпечена, виявляється абсолютно незначною.

Якщо на етапі застосування *критерію II* при виконанні якої-небудь ітерації виявляється, що ні в один з рядків змінна, включена в черговий базис, не входить з позитивним коефіцієнтом, то оптимальний розв'язок є *необмеженим.* У цьому випадку значення нової базисної змінною можна (без порушення умови невід'ємності інших змінних) вибирати будь-яким великим, що приводить до необмеженого зростання значення цільової функції. Таким чином, зроблене раніше припущення відносно обмеженості оптимального значення цільової функції можна тепер відкинути. Симплексний алгоритм сам дозволяє визначати ті випадки, коли оптимальний розв'язок виявляється необмеженим. Щоб врахувати дану обставину, формулювання *критерію II* потрібно належним чином видозмінити.

Початковий базис. Повернемося до питання про вибір початкового базису, що дозволяє почати обчислювальну процедуру відповідно до симплексного алгоритму. Оскільки в моделі, розглянутій в попередньому розділі, кожне з обмежень має вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \qquad \text{де } b_i \ge 0, \tag{2.28}$$

введення в розгляд вільних змінних (по одній вільній змінній в кожному співвідношенні, що задає відповідне обмеження) і включення тільки цих змінних в початковий базис дозволяє просто виконати крок 1 (тобто побудова першого пробного розв'язку). Як було показано раніше, *співвідношенням* (2.28) не охоплюються всі можливі типи обмежень, що зустрічаються в лінійних оптимізаційних моделях. Але проведений раніше аналіз дає підставу стверджувати, що в задачах лінійного програмування обмеження будь-якого вигляду можна записати в формі

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \; b_i \ge 0, \tag{2.29}$$

Якщо при цьому деяка змінна входить тільки в i-е співвідношення, причому з коефіцієнтом, рівним одиниці (як це має місце для кожної з вільних змінних), то її можна включити в початковий базис. Однак в i-му співвідношенні такої змінної може не виявитися. Тоді можна застосувати такий прийом.

Запишемо обмеження у вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + 1y_i = b_i \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,m).\ b_i \geq 0, \tag{2.30}$$

де $y_i \geq 0$.

Виберемо y_i в якості базисної змінної, відповідної i-му співвідношенню. Змінну y_i називають штучною, оскільки вона з'явилася внаслідок математичного перетворення, мета якого полягає в тому, щоб побудувати початковий пробний розв'язок. Чи є використаний прийом законним? Відповідь буде позитивною, якщо виконується *умова А*.

Умова А. Щоб остаточний розв'язок мав значення, кожна штучна змінна y_i на заключній симплекс-ітерації повинна перетворюватися в нуль.

Якщо обмеження такі, що задача не має допустимих розв'язків, задовольнити умови А виявиться неможливим: на останній симплекс-ітерації принаймні одна із змінних y_i увійде в базис з позитивним значенням, що означає несумісність умов задачі. Таким чином, припущення про існування допустимого розв'язку виявляється зайвим. Якщо задача не має жодного допустимого розв'язку, то це можна визначити за допомогою симплексного алгоритму.

Отже, можна стверджувати, що розпорядження щодо реалізації симплексного алгоритму задовольняють вимоги повноти і визначеності. Їх можна запрограмувати, і вони дійсно перекладені на мову машинних програм.

Потрібно зазначити, що більшість сучасних програм, що реалізовують симплексний алгоритм, складені таким чином, що немає необхідності представляти кожне з обмежень в формі (2.29). Іншими словами, *обмеження, що містяться в моделі можуть бути використані в їх первинному записі*. Додавання вільних і (якщо це необхідне) штучних змінних, а також виконання *умови А* забезпечуються автоматично програмним шляхом. Для деяких програм користувачем може навіть бути заданий конкретний набір змінних, призначених для формування початкового базису. Цей прийом називають зсувом **стартової точки;** він служить для скорочення числа необхідних ітерацій. Існують інші (аналогічного характеру) прийоми, що дозволяють заздалегідь визначити ті змінні, які ймовірніше усього увійдуть в базис на заключній ітерації. Уміле застосування різного роду обчислювальних «трюків», що прискорюють процес збіжності, є одним з виявів мистецтва практичного використання симплексного алгоритму.

Метод «великих штрафів». Виконання *умови А* можна забезпечити різними обчислювальними прийомами. Незважаючи на те, що ці прийоми для фахівців в області дослідження операцій, взагалі кажучи, представляють певний інтерес, ми не будемо заглиблюватися в їх вивчення і обмежимося викладом одного простого і дуже грубого підходу.

Додамо до цільової функції, що підлягає максимізації, суму всіх штучних змінних y_i із загальним коефіцієнтом значення якого виберемо досить великим:

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} M y_i = 0 \qquad (2.31)$$

Коефіцієнт M має значення від'ємного *питомого прибутку*. Почнемо реалізацію алгоритму з вилучення з (2.31) всіх змінних y_i. За допомогою формули (2.30) отримаємо

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = -M \sum_{i=1}^{m} b_i, \qquad (2.32)$$

або в більш зручній формі

$$x_0 - \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + M \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) x_j = -M \sum_{i=1}^{m} b_i \qquad (2.33)$$

Якщо існує хоча б один допустимий розв'язок, то сам метод оптимізації автоматично приводить до того, що в результаті всі змінні y_i звертаються в нуль. (Потрібно, до речі, зазначити, що якщо на деякій ітерації одна із змінних y_i виявляється виключеною з базису, то при подальших ітераціях необхідність у використанні цією змінною відпадає, тобто при всіх подальших обчисленнях дана змінна не береться до уваги). Метод, що пропонується можна пояснити за допомогою простого прикладу.

Розглянемо таку задачу:

Максимізувати

$$-3x_1 - 2x_2 \qquad (2.34)$$

при обмеженнях

$$1x_1 + 1x_2 = 10, \qquad (2.35)$$

$$1x_1 \geq 4 \qquad (2.36)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \qquad (2.37)$$

Після додавання у (2.36) вільної змінної x3 з коефіцієнтом -1 дана модель може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} x_0 + 3x_1 + 2x_2 &= 0 && \text{(рядок 0)}, \\ 1x_1 + 1x_2 &= 10 && \text{(рядок 1)}, \\ 1x_1 - 1x_3 &= 4 && \text{(рядок 2)}. \end{aligned} \qquad (2.38)$$

Введемо тепер штучні змінні y_1 і y_2 і приймемо $M = 10$. У результаті будемо мати

$$\begin{aligned} &x_0+3x_1+2x_2+10y_1+10y_2=0 && \text{(рядок 0)},\\ &1x_1+1x_2+1y_1 \qquad =10 && \text{(рядок 1)},\\ &1x_1-1x_2 \qquad +1y_2=4 && \text{(рядок 2)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Приступаючи до обчислень відповідно до симплексного алгоритму, передусім виключимо з (2.39) y_1 і y_2 шляхом віднімання рядків 1 і 2, помножених на 10 (M=10), з рядка 0:

$$\begin{aligned} &x_0-17x_1-8x_2+10x_3 \qquad =140 && \text{(рядок 0)},\\ &1x_1+1x_2 \qquad +1y_1 \qquad =10 && \text{(рядок 1)},\\ &1x_1 \qquad -1x_3 \qquad +1y_2 =4 && \text{(рядок 2)}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

3 ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДУ

3.1 Межі застосування методу

Багато задач лінійного програмування зводяться до мінімізації деякої лінійної функції. Задача мінімізації переходить в задачу максимізації, якщо змінити знаки при всіх коефіцієнтах у виразі для цільової функції. По відношенню до отриманої таким чином лінійної форми *критерій I* (максимізація) як і раніше виявляється застосовним. Але з метою подальшого розгляду є доцільним сформулювати *критерій I* і на той випадок, коли вирішується задача мінімізації при збереженні цільової функції в її первинному вигляді.

Симплекс-критерій I(мінімізація). Якщо в рядку 0 є небазисні змінні, коефіцієнти при яких позитивні, то потрібно вибрати змінну (визначимо її через x_j) з найбільшим позитивним коефіцієнтом. У випадку коли всі небазисні змінні рядки 0 мають негативні або нульові коефіцієнти, оптимальний розв'язок можна вважати отриманим.

Дану процедуру можна пояснити за допомогою прикладу. Розглянемо тривіальну задачу лінійного програмування:

мінімізувати

$$-2x_1+3x_2 \tag{3.1}$$

при умовах

$$0 \le x_1 \le 6, \quad 0 \le x_2 \le 10. \tag{3.2}$$

Можна приступити до розв'язання цієї задачі, змінивши спочатку як знаки у виразі (3.1), так і «суть» оптимізації, тобто написавши замість (3.1):

максимізувати

$$2x_1 - 3x_2. \tag{3.3}$$

При такому переході оптимальні значення x_1 і x_2 не змінюються. Тоді, діючи відповідно до симплексного алгоритму, викладеному в попередньому розділі, ми почали б ітераційний процес з розгляду такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
x_0 - 2x_1 + 3x_2 \qquad\qquad &= 0 \quad \text{(рядок 0)},\\
1x_1 \qquad + 1x_3 \qquad &= 6 \quad \text{(рядок 1)},\\
1x_2 \qquad + 1x_4 &= 10 \quad \text{(рядок 2)}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

При цьому, згідно з *критерієм I* (максимізація), в базис увійшла б змінна x_1.

Але, замість того щоб діяти по щойно запропонованій схемі, можна вийти безпосередньо з (3.1) і після введення в розгляд змінної x_0 записати початкову систему рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} x_0 - 2x_1 - 3x_2 \qquad\qquad &= 0 \qquad \text{(рядок 0)},\\ 1x_1 \quad + 1x_3 \qquad &= 6 \qquad \text{(рядок 1)},\\ 1x_2 \quad + 1x_4 &= 10 \qquad \text{(рядок 2)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

У цьому випадку був би застосований *критерій I* (мінімізація) і на найпершій ітерації змінна x_1 була б вибрана як базисна, оскільки в рядку 0 коефіцієнт при x_1 рівний +2.

При розв'язанні задачі мінімізації ніяких змін в формулюванні *критерію II* не потрібно, оскільки цільове призначення останнього полягає лише в тому, щоб забезпечити допустимість кожного базисного розв'язку.

Про одну властивість оптимальних розв'язків. Підводячи підсумок проведеного вище аналізу симплексного методу, можна зробити такі висновки:

1) симплексний алгоритм застосуємо до *всіх* лінійних оптимізаційних моделей;

2) відповідь, отримана внаслідок заключної ітерації, є точним розв'язком задачі.

Ми поки що не встановили, чи може симплексний метод привести до розв'язання будь-якої задачі лінійного програмування за кінцеве число ітерацій. Це питання обговорюється в наступному розділі. Але, якщо передбачити, що збіжність має місце, то виявляється справедливою така важлива теорема.

Теорема про базис. *Якщо задача лінійного програмування має кінцевий (обмежений) оптимальний розв'язок, то для неї існує базисний оптимальний розв'язок.*

Потрібно нагадати, що для лінійної моделі з *m* обмеженнями базис являє собою набір *m* змінних з однозначно певними значеннями, що задовольняють обмеження, що існують. При цьому значення всіх інших змінних приймаються рівними нулю.

Щоб пересвідчитися в тому, що дана теорема дійсно грає виключно важливу роль, розглянемо таку ситуацію. Передбачимо, що потрібно знайти розв'язок задачі лінійного програмування з 50 лінійно незалежними обмеженнями і 300 невідомими. Якщо сформульована вище теорема справедлива, то можна стверджувати, що в цьому випадку існує оптимальний розв'язок, що містить не більш ніж 50 змінних (з позитивними значеннями). Введення в розгляд інших змінних може поліпшити оптимальне значення цільової функції, однак число змінних, необхідних для отримання оптимального розв'язку, не повинне при цьому перевищувати 50.

Звернемо увагу на те, що збільшення числа лінійно незалежних обмежень в тій або іншій моделі приводить до розширення базису. Отже, кількість змінних, що входять в оптимальний розв'язок, тим більша, чим більше обмежень містить модель.

Звідки випливає, що теорема про базис справедлива? Доведення даної теореми є зайвим з тієї простої причини, що симплексний метод дає рецепт фактичної *побудови оптимального* базисного розв'язку.

Історична справка. Формулюючи теорему про базис, ми вийшли з самого факту справедливості симплексного методу. У роботах з лінійного програмування, що відносяться до більш раннього періоду, можна зустріти доведення даної теореми, що не спирається на практичний метод побудови оптимального розв'язку (так звана теорема про існування). При цьому спостерігалося зворотне явище: теорема про базис використовувалася як засіб обґрунтування симплексного методу, який трактувався як послідовний пошук в межах безлічі наборів базисних змінних.

3.2 Властивості збіжності

Доведення збіжності звичайно є найбільш важкою самостійною задачею, яка виникає при розробці будь-якого алгоритму. Постараємося зрозуміти, чим це пояснюється.

Ми пересвідчилися, що в процесі реалізації *симплекс-критеріїв I і II* кожен подальший пробний розв'язок виявляється допустимим, причому значення цільової функції при переході від одного пробного розв'язку до іншого не гіршає. Тимчасово передбачимо, що на кожній ітерації значення максимізуючої цільової функції строго зростає. Одного цього припущення для доведення збіжності ряду пробних значень до оптимального за кінцеве число ітерацій недостатньо. Зростання значення цільової функції при збільшенні номера ітерацій може ставати все менш і менш «значним (див. рис. 2.2), і, що ще гірше, значення цільової функції може прямувати до межі, що лежить нижче оптимального значення (див. рис. 2.3).

Як було показано, симплексний метод полягає в переході від одного базисного розв'язку до іншого. Оскільки значення змінних для кожного пробного базису визначені однозначно, припущення відносно обов'язкового поліпшення значення цільової функції при переході від одного пробного варіанта до іншого виключає повтори у виборі пробних базисів. Число базисних наборів обмежене і для n-вимірної задачі з *m* обмеженнями не може перевищувати число сполучень з *n* по *m*, тобто

$$(n\backslash m) = n!/[m!\,(n-m)!].$$

Відповідно, число ітерацій кінцеве, і розв'язок, отриманий на заключній ітерації, *є оптимальним*.

Чи можна вважати доведеним, що збіжність завжди має місце? На жаль, не можна. У попередньому розділі наші міркування основувалися на припущенні, що при кожній черговій ітерації значення цільової функції зростає. Однак для багатьох лінійних оптимізаційних моделей збільшення значення цільової функції на деяких ітераціях припиняється. Це відбувається таким чином.

На одній з ітерацій при перевірці за *критерієм II* може виявитися, що серед всіх співвідношень правих частин рівнянь, що задають обмеження, до коефіцієнтів при новій базисній змінній найменше відношення дорівнює нулю. (Така ситуація може виникнути в тому випадку, коли внаслідок включення в базис нової змінної на попередній ітерації дві або більше двох змінних, що входили раніше в базис, перетворюються в нуль. Таким чином, при ітерації, що розглядається, значення принаймні однієї базисної *змінної* виявляється рівним нулю, тобто базисний розв'язок є виродженим.) Звідси слідує, що нова базисна змінна приймає нульове значення, а значення інших змінних, так само як і значення цільової функції, не змінюються. Реалізація кроку 4 в процесі заміни базису з необхідністю приводить до зміни коефіцієнтів в рядку 0. Тому на етапі використання критерію II на наступній ітерації найменше з всіх співвідношень вказаного вище типу виявляється строго позитивним. Однак цілком можлива нова затримка в зростанні значення цільової функції. Такі ситуації можуть виникати неодноразово, причому не виключено, що на якомусь етапі ми прийдемо до одного з попередніх базисних розв'язків. У цьому випадку обчислювальний процес виявляється «зацикленням» і збіжність відсутня.

Таким чином, збіжність за кінцеве число ітерацій була б доведеною, якби строго позитивний приріст значення цільової функції був забезпечений при всіх ітераціях без винятку. Щоб заспокоїти читача, відразу ж завіримо його в тому, що проблема збіжності вирішувана. Якщо скористатися трохи більш складним (в порівнянні з тим, що застосовується тут) математичним апаратом, то можна показати, що симплексний метод при належному поводженні з ним виявляється спроможний забезпечити строге зростання значення цільової функції. Щоб довести наявність збіжності, необхідно дещо переглянути критерій II, з тим щоб усунути неоднозначність процедури виключення змінною з базису у випадку, коли виявляються допустимими різні варіанти вибору. Крім того, потрібно належним чином уточнити, що розуміти під «строгим зростанням значення цільової функції».

Виродженість базису практично не впливає на число ітерацій, необхідне для знаходження розв'язку задачі лінійного програмування. Досвід показує, що при розв'язанні більшості практичних задач число ітерацій, необхідне для отримання остаточного результату, лежить в межах від 1,5 m до 3m, де m *число* обмежень (Дана оцінка справедлива лише в тому випадку, якщо початковий базис містить тільки вільні або штучні змінні.)

Як було показано на прикладі, приведеному в підрозділі 1.4, одна із змінних (в згаданій задачі x_4) спочатку була включена в базис, а потім з нього випала. Саме цим пояснюється той факт, що число ітерацій перевищує число співвідношень, задаючих обмеження. Для розвитку інтуїтивного уявлення про те, що може статися в процесі виконання симплекс-ітерацій, корисно розглянути такий приклад:

максимізувати $1y$ (I)

при обмеженнях

$$3x - 2y + 4z + 1u = -2,$$

$$3x - 8z + 1v = 6,$$

$$15x - 6y - 12z + 1w = 222, \qquad \text{(II)}$$

$$1x + 4z + 1t = 12,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad w \geq 0, \quad t \geq 0.$$

В табл. 3.1 показана послідовність пробних розв'язків. Зауважимо, що при переході від первинного розв'язку до наступного змінна t замінюється на z, а при переході від четвертого пробного розв'язку до п'ятого в останньому замість z з'являється t.

Нарешті, при переході від шостого пробного розв'язку до сьомого t знову замінюється на z. Змінна z в початковому варіанті в базис не входить. Потім вона стає базисною. Після цього її знов виключають з базису.

Таблиця 3.1 - Приклад повільної збіжності

Пробний розв'язок (порядковий номер)	Значення змінних						
	x	**y**	**z**	**u**	**v**	**w**	**t**
Початкове		1			6	216	12
2		7	3		30	216	
3	6	13	1,5			72	
4	6	25	1,5	24			
5	2	32		56			10
6		37		72	6		12
7		43	3	72	30		

І нарешті, змінна z знову виявляється в числі базисних. Змінна t спочатку є базисною, потім випадає з базису, на наступній ітерації знову стає базисної, а потім випадає з базису остаточно. Звернемо увагу також на те, що змінна x в третьому пробному розв'язку замінює v, *а* в шостому пробному варіанті замість x знов фігурує v. *В* підсумку після семи симплекс-ітерацій процес збіжності завершується. (Потрібно зазначити, що в цьому випадку значення цільової функції поліпшується на кожній ітерації.)

Намагаючись довести збіжність симплекс-процедури за кінцеве число ітерацій, ми констатували лише принципову можливість зациклювання.

Поки не було дано жодного прикладу, коли зациклювання у разі неоднозначності вибору нових базисних змінних, зумовлених виродженністю базису, дійсно має місце. Нижче приводиться приклад, що ілюструє саме таку ситуацію. (Її вдалося «сфабрикувати» чисто штучним шляхом.)

У цьому прикладі використовується встановлене довільним чином правило вибору для критерію II. Якщо з базису необхідно виключити відразу дві змінні, то перевага віддається змінній з меншим значенням індексу.

Розглянемо задачу

максимізувати

$$\frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 \qquad \text{(III)}$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 &= 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 &= 0, \qquad \text{(IV)} \\ 1x_3 + \qquad + x_7 &= 1 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,7). \end{aligned}$$

Послідовність пробних розв'язків для даної моделі показана в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 - Приклад зациклювання

Пробний розв'язок	Коефіцієнти при змінних в рядку 0							Базисні змінні, що приймають значення			Значення цільової функції
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	0	0	0	
Початкове	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0	X_5	X_6	X_7	0
2	0	-30	-7/50	33	3	0	0	X_1	X_6	X_7	0
3	0	0	-2/25	18	1	1	0	X_1	X_2	X_7	0
4	1/4	0	0	-3	-2	3	0	X_3	X_2	X_7	0
5	-1/2	120	0	0	-1	1	0	X_3	X_4	X_7	0
6	-7/4	330	1/50	0	0	-2	0	X_5	X_4	X_7	0
7	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0	X_5	X_6	X_7	0

Примітка: Оптимальним є розв'язок X_1=1/25, X_3=1, X_5=3/100; при цьому цільова функція приймає значення 1/20.

Критерій I при кожній з ітерацій інтерпретується абсолютно однозначно.

Таким чином, змінна x_1 входить в початковий базис. Через наявність виродження при першій ітерації з базису можна виключити або x_5, або x_6. У відповідності з щойно запропонованим уточненим формулюванням критерію II вибір падає на x_5. Помітимо, що сьомий пробний розв'язок тотожний первинному, і, отже, має місце зациклювання. Звернемо також увагу на те, що значення цільової функції після кожної ітерації залишається рівним нулю, тоді як її оптимальне значення становить 0,05. Зациклювання можна усунути, якщо математично більш строго визначити правило вибору нової базисної змінної в тих випадках, коли має місце невизначеність вказаного вище типу.

3.3 Вимоги до обчислювальних процедур

Для більшості практичних задач моделі лінійного програмування містять декілька десятків, а нерідко декілька сотень обмежень. Отже, питання про трудомісткість обчислювальних симплекс-процедур потрібно обговорювати з орієнтацією на використання сучасних швидкодійних електронно-обчислювальних машин. У попередніх розділах давався опис основних етапів реалізації алгоритму, що розглядається. Будь-яка програма, складена для симплексного методу, включає в тому або іншому вигляді всі вказані вище етапи обчислювального процесу. Однак в рамках основних розпоряджень симплексного алгоритму структури машинних програм можуть варіюватися. Специфіка обчислювальних програм, що визначається різним нюансом їх побудови, може вплинути вирішальний чином на кількість ітерацій, які необхідно виконати, щоб забезпечити повну збіжність.

Деякі обчислювальні програми для ЕОМ побудовані за принципом, яким користуються шахісти: такого роду програми передбачають перебір різних варіантів на декілька ітерацій уперед і вибирають найбільш вигідну стратегію для ряду (найближчих) операцій переходу від одного базису до іншого. Такий спосіб програмування збільшує об'єм обчислень на кожному кроці, але скорочує сумарну кількість ітерацій, необхідну для знаходження остаточного розв'язку. Інші програми будуються таким чином, щоб при кожній ітерацій пошук відповідно до критерію I обмежувався лише деякою підмножиною змінних. Коли можливості поліпшення розв'язку в межах деякої підмножини вичерпуються, здійснюється перехід до розгляду іншої підмножини. Обчислювальний процес закінчується, коли оптимізаційні можливості всіх підмножин виявляються повністю вичерпаними. Такий метод побудови програм скорочує об'єм обчислень на кожній ітерації, але може збільшити число ітерацій, що забезпечують збіжність до граничного значення.

Таким чином, сумарне число обчислювальних операції, необхідне для розв'язання якої-небудь конкретної задачі симплексним методом, як правило, значною мірою залежить від програм, що використовуються для

ЕОМ. При розв'язанні практичних задач число арифметичних операцій звичайно досягає порядку декількох мільйонів. Як показує, досвід, трудомісткість обчислень, зростає в грубому наближенні пропорційно кубу числа обмежень. Таким чином, для розв'язання задачі, що містить 200 рівнянь, найвірогідніше, буде потрібно в 8 раз більше обчислень в порівнянні з моделлю, число рівнянь в якій дорівнює 100.

Потрібно мати на увазі, що завдяки успіхам в області електронно-обчислювальної техніки, а також в області програмного забезпечення методів оптимізації, заснованих на використанні лінійних моделей, в цей час виявляється цілком можливим розв'язання задач, що містять декілька сотень обмежень. Новітні науково-технічні досягнення ще більш розширюють область застосування лінійного програмування, дозволяючи розглядати моделі, число обмежень в яких перевищує 1000.

Тим, кому доводилося шукати ручним способом розв'язок для систем, що містять відносно невелике число лінійних рівнянь (скажемо, для систем, що складаються з п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими), добре відомо, що обчислювальні похибки, що виникають в процесі заокруглення тих або інших чисел, можуть нагромаджуватися дуже швидко. Дійсно, якщо при обчисленнях зберігати тільки дві або три значущі цифри, остаточна відповідь може виявитися «дуже неточною» і тому не придатною для використання. У випадку ж, коли число рівнянь в системі велике (а саме з такою ситуацією ми стикаємося при практичному застосуванні методів лінійного програмування), небезпека «втрати точності» виявляється особливо серйозною. З урахуванням цих обставин у багато машинних програми, що призначені для реалізації симплексного методу, вводять спеціальні процедури контролю за похибками, що з'являються внаслідок заокруглення. Однак навіть в цьому випадку необхідна точність не завжди забезпечується. Тому при знаходженні розв'язків для тієї або іншої лінійної оптимізаційної моделі потрібно вживати належних заходів обережності. При цьому рекомендується перевіряти остаточний результат шляхом підстановки отриманих чисельних значень в початкові рівняння, задаючі обмеження.

Оскільки машинні коди можуть вміщувати лише обмежену кількість значущих цифр, деякі похибки, що з'являються в процесі обчислень за рахунок заокруглення, неминучі. Отже, при виконанні перевірок відповідно до критеріїв I і II на такого роду обчислювальні похибки необхідно робити поправки. Так, наприклад, машинний код може зупинити обчислювальний процес, як тільки всі коефіцієнти в рядку 0 будуть визначені з точністю до 0,00001.

3.4 Табличне зображення

При переході від одного пробного розв'язку до наступного ми кожен раз виписували всі змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$, *що фігурують* в моделі, що розглядається. Однак це, з одного боку, громіздко, а з іншого - не викликано ніякою необхідністю, оскільки в процесі обчислення використовуються лише коефіцієнти при незалежних змінних. Тепер, коли зрозуміла проста логіка симплексного алгоритму, об'єм супутніх записів можна істотно скоротити, якщо весь обчислювальний процес зобразити у вигляді зручної таблиці, відомої під назвою симплекс-таблиці. Таблиці на рис. 3.3 і 3.4 являють собою опис двох різних підходів до розв'язання задачі, яка як приклад приведена в розд. 1.4. У таблиці 3.3 стовпці, що відповідають базисним змінним, мають настільки тривіальне значення, що їх без втрати для однозначності розуміння можна із згаданої таблиці виключити. У результаті отримуємо редукований варіант табличного запису, приведений в табл. 3.4. У цьому випадку після кожної ітерації необхідно вводити один додатковий рядок, призначений для нового набору небазисних *змінних*.

Таблиця 3.3 – Симплекс-таблиця для задачі розподілу ресурсів

Ітерація	Базис	Пробні значення	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Рядок
1	x_0	0	-4	-5	-9	-11				0
	x_5	15	1	1	1	1	1			1
	x_6	120	7	5	3	2		1		2
	x_7	100	3	5	10	$\boxed{15}$			1	3
2	x_0	220/3	-9/5	-4/3	-5/3				11/15	0
	x_5	25/3	$\boxed{4/5}$	2/3	1/3		1		-1/15	1
	x_6	320/3	33/5	13/3	5/3			1	-2/15	2
	x_4	20/3	1/5	1/3	2/3	1			1/15	3
3	x_0	1105/12		1/6	-11/12		9/4		7/12	0
	x_1	125/12	1	5/6	5/12		5/4		-1/12	1
	x_6	455/12		-7/6	-13/12		-33/4	1	5/12	2
	x_4	55/12		1/6	$\boxed{7/12}$	1	-1/4		1/12	3
4	x_0	695/7		3/7		11/7	13/7		5/7	0
	x_1	50/7	1	5/7		-5/7	10/7		-1/7	1
	x_6	325/7		-6/7		13/7	-61/7	1	4/7	2
	x_3	55/7		2/7	1	12/7	-3/7		1/7	3

Таблиця 3.4 – Редукована симплекс-таблиця для задачі розподілу ресурсів

Ітерація	Базис	Пробні значення	x_1	x_2	x_3	x_4	Рядок
	x_0	0	-4	-5	-9	-11	
1	x_5	15	1	1	1	1	0
	x_6	120	7	5	3	2	1
	x_7	100	3	5	10	$\boxed{15}$	2
							3
			x_1	x_2	x_3	x_7	
2	x_0	220/3	-9/5	-4/3	-5/3	-11/15	0
	x_5	25/3	$\boxed{4/5}$	2/3	1/3	-1/15	1
	x_6	320/3	33/5	13/3	5/3	-2/15	2
	x_4	20/3	1/5	1/3	2/3	11/15	3
			x_5	x_2	x_3	x_7	
3	x_0	1105/12	9/4	1/6	-11/12	7/12	0
	x_1	125/12	5/4	5/6	5/12	-1/12	1
	x_6	455/12	-33/4	-7/6	-13/12	5/12	2
	x_4	55/12	1/4	1/6	$\boxed{7/12}$	11/12	3
			x_5	x_2	x_4	x_7	
4	x_0	695/7	13/7	3/7	11/7	5/7	0
	x_1	50/7	10/7	5/7	-5/7	-1/7	1
	x_6	325/7	-61/7	-6/7	13/7	4/7	2
	x_3	55/7	-3/7	2/7	12/7	1/7	3

3.5 Матричне зображення

У даному розділі, так само як і в наступному, при викладанні симплексного методу і різних його модифікацій кожне з рівнянь моделі записується в явному вигляді. Якщо скористатися матричними позначеннями, то математичне формулювання методу прийме більш компактний вигляд.

Матричний запис лінійної моделі виглядає таким чином: *максимізувати*

$$cx \tag{3.6}$$

при обмеженнях

$$Ax \le b, \tag{3.7}$$

$$x \ge 0. \tag{3.8}$$

У прийнятих позначеннях відповідну симплекс-таблицю на етапі першої ітерації можна зобразити у вигляді

$$\begin{bmatrix} 0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & A_1 & A_2 & \dots & A_n & U_1 & U_2 & \dots & U_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

де $\begin{bmatrix} 0 \\ U_i \end{bmatrix}$ - стовпець з одиницею на перетині з i-им рядком і з нулями на перетині з всіма іншими рядками. (Рядку 0 в матриці (3.9) прийнято відводити саму верхню позицію.) У ще більш компактному вигляді замість (3.9) будемо мати

$$\begin{bmatrix} 0_{11} & -c & 0_{1m} \\ b & A & I_m \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

де 0_{pq} матриця з p рядками і q стовпцями, що складається тільки з нулів, а Im - *m-вимірна* одинична матриця.

Виділимо в (3.10) m стовпців, що відповідають пробному базису на етапі деякої заданої ітерації. Позначимо отриману таким чином матрицю через [B^{-c_B}]. При цьому перший стовпець відповідає базисній змінній, що фігурує в рядку 1, другий стовпець відповідає базисній змінній, що фігурує в рядку 2, і т. д. Тоді для даної ітерації симплекс-таблиця приймає такий вигляд:

$$\begin{bmatrix} c_B B^{-1} b & c_B B^{-1} A - c & c_B B^{-1} \\ B^{-1} b & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Неважко пересвідчитися, що матриця (3.11) отримана з матриці (3.10) шляхом множення останньої на

$$\begin{bmatrix} 1 & c_B B^{-1} \\ 0_{m1} & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c_B \\ 0_{m1} & B \end{bmatrix}^{-1}. \tag{3.12}$$

*Симплекс-критерій I (*максимізація) зводиться до знаходженні найбільшого за модулем від'ємного матричного елемента в $\left[c_B B^{-1} A - c_B B^{-1}\right]$, тобто в рядку 0 матриці (3.11). Вважатимемо, що найбільший за модулем від'ємний матричний елемент у $\left[c_B B^{-1} A - c \quad c_B B^{-1}\right]$ відповідає x_j. Тоді, згідно з критерієм II, ми звертаємося в (3.11) до коефіцієнтів при x_j:

$$\begin{bmatrix} c_B B^{-1} A_j - c_j \\ B^{-1} A_j \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} r_{0j} \\ r_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{mj} \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Слід відмітити, що якщо x_j являє собою i-у вільну змінну, то в (3.13) $c_j = 0$ і $A_j = U_i$. Допустимо, що вибір за критерієм II падає на рядок k. Наступна обчислювальна процедура, пов'язана із заміною базису, зводиться до множення матриці (3.11) зліва на

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & -r_{0j}/r_{kj} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & -r_{1j}/r_{kj} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/r_{kj} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r_{mj}/r_{kj} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.14}$$

де співвідношення фігурують в (k + 1)-ому стовпці матриці E. Множення (3.11) на (3.14) часто називають операцією *елементарного перетворення.*

Помітимо, що значення для пробного базису є оптимальними, коли

$$c_B B^{-1} A - c \geq 0, \qquad c_B B^{-1} \geq 0 \tag{3.15}$$

Відповідне значення цільової функції при цьому дорівнює

$$c_B B^{-1} b \tag{3.16}$$

4 ПРАКТИЧНІ ТА ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

4.1 Контрольні вправи

1. а) Розв'яжіть приведену в підрозділі 2.2 систему рівнянь (2.2) і (2.3) відносно x_1 і x_3. Результат перевірте за допомогою (2.14) і (2.15).

б) Підставте в формулу для цільової функції отримані в п. а) вирази для x_1 і x_3. Результат порівняєте з виразом (2.15), наведеним в підрозділі 2.2.

У вправах 2-4 за основу береться модель, розглянута в підрозділі 2.4, з декількома зміненими даними.

2. Яку із змінних потрібно включити в базис на першій симплекс-ітерації, якщо цільова функція, що підлягає максимізації, має вигляд

а) $14\ x_1+5\ x_2+9\ x_3+11\ x_4$?

в) $4\ x_1+5\ x_2-9\ x_3+11\ x_4$?

б) $4\ x_1+5\ x_2+9\ x_3+8\ x_4$?

г) $-4\ x_1-5\ x_2-9\ x_3-11\ x_4$?

3. Нехай на першій ітерації в базис увійшла змінна x_4. Яка змінна підлягає при цьому вилученню з базису і яким буде нове значення x_4, якщо:

а) в правій частині рівняння, відповідного рядка 2, стоїть число 20? 12?

б) в правій частині рівняння, відповідного рядка 3, стоїть число 300? 75?

в) коефіцієнт при x_4 в рядку 3 рівний 20? 24? 15?

г) коефіцієнт при x_4 в рядку 2 рівний 24?

д) в правих частинах рівнянь в рядках 1, 2 і 3 стоять відповідно числа 40, 60 і 20, а коефіцієнти при x_4 у вказаних рядках рівні відповідно 5, 10 і 2?

4. Нехай на першій ітерації в базис увійшла змінна x_4. Якими будуть нові значення базисних змінних, якщо:

а) замість x_7, з базису вилучити x_5?

б) замість x_7 з базису вилучити x_6?

Чи є значення, отримані в п. а) і б), допустимими? Дайте відповідні пояснення.

У вправах 5-14 за основу береться модель, розглянута в підрозділі 2.4. Дана модель варіюється шляхом зміни різних кількісних характеристик. У кожному випадку потрібно знайти оптимальний розв'язок і відповідне значення цільової функції. Кожну задачу передусім треба ретельно продумати, оскільки може виявитися, що для отримання розв'язку зо-

всім не обов'язково відтворювати весь обчислювальний процес, викладений в підрозділі 2.4.

5. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо цільова функція, що підлягає максимізації, має вигляд:

а) $4x_1+\frac{33}{7}x_2+9x_3+10x_4$;

б) $5x_1+5x_2+9x_3+11x_4$;

в) $5x_1+\frac{33}{7}x_2+9x_3+10x_4$.

6. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо:

а) в правій частині рівняння в рядку 2 стоїть число 140;
б) в правій частині рівняння в рядку 2 стоїть число 60;
в) в правій частині рівняння в рядку 1 стоїть число 12;
г) в правій частині рівняння в рядку 1 стоїть число 10;
д) в правій частині рівняння в рядку 1 стоїть число 20.

7. Знайдіть оптимальний розв'язок, передбачивши, що цільова функція, що підлягає максимізації, має вигляд $5x_1+5x_2+9x_3+11x_4$, а в правій частині рівняння в рядку 1 стоїть число 20.

8. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо перше обмеження (до введення в розгляд вільної змінної) має вигляд $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 30$.

9. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо:

а) коефіцієнт при x_2 в рядку 3 рівний 10;
б) коефіцієнт при x_4 в рядку 3 рівний 20;
в) коефіцієнт при x_2 в рядку 2 рівний 4;
г) коефіцієнт при x_4 в рядку 2 рівний 1;
д) коефіцієнт при x_1 в рядку 2 рівний 10;
е) коефіцієнт при x_3 в рядку 2 рівний 6.

10. Знайдіть оптимальний розв'язок, якщо в рядках 0, 1, 2 і 3:

а) коефіцієнти при x_1 рівні відповідно 40, 10, 70 і 30;
б) коефіцієнти при x_2 рівні відповідно 20, 4, 20 і 20;
в) коефіцієнти при x_3 рівні відповідно 90, 10, 30 і 100.

11. Розв'яжіть задачу припускаючи, що має місце додаткова вимога $x_4 = 4$.

12. а) Розглянемо змінну x_8, задану співвідношенням (2.24) в підрозділі 2.4. Обчисліть коефіцієнти при x_8 на кожній з симплекс-ітерацій (див. (2.16) - (2.21) в підрозділі 2.4).

б) Перевірте справедливість співвідношення (2.26) з підрозділі 2.4, якщо змінна x_8 на четвертій ітерації включена в базис.

в) Нехай в співвідношенні (2.27) $w = 0{,}5$. Потрібно знайти оптимальні значення для x_1, x_3, x_6, і x_8, а також пересвідчитися, що ці значення задовольняють початкові обмеження і дають для значення цільової функції число, рівне 695/7

13. Розглянемо змінну x_8, задану співвідношенням (2.24) в підрозділі 2.4. Потрібно з'ясувати, чи буде поліпшено розв'язок внаслідок включення на четвертій ітерації змінної x_8 в базис, якщо:

а) коефіцієнт при x_8 в рядку 2 покласти рівним 8 замість 9;

б) коефіцієнт при x_8 в рядку 2 покласти рівним 10 замість 9;

в) коефіцієнт при x_8 в рядку 3 покласти рівним 1 замість 0,2;

г) коефіцієнт при x_8 в рядку 3 покласти рівним 0,1 замість 0,2.

14. Передбачимо, що модель, розглянута в підрозділі 2.4, «розширена» за рахунок нової змінної z. Нехай на четвертій ітерації коефіцієнти при z в кожному з рівнянь системи (2.21) рівні -1. Яким буде оптимальний розв'язок? Потрібно показати, що має місце розв'язок, для якого цільова функція приймає значення, рівне 100.

15. Розгляньте модель, описану співвідношеннями (2.34) - (2.37) в підрозділі 2.5. У кожному з приведених нижче пунктів потрібно застосувати метод великих штрафів з $M = 10$ і знайти початкову систему рівнянь, аналогічну (2.40). Розгляньте такі варіанти:

а) обмеження для x_2 має вигляд $x2 \geq 2$;

б) замість (2.35) має місце обмеження $5x_1 + 6x_2 = 56$;

в) замість (2.35) має місце обмеження $-5x_4 + 6x_2 = 16$.

16. Нехай для прийнятої системи обмежень пробний базис, що складається тільки з вільних змінних, визначає деякий допустимий розв'язок. Яка змінна вводиться в базис на першій симплекс-ітерації, якщо цільова функція, що підлягає мінімізації, має вигляд:

а) $4x_1 + 5x_2\ 9x_3 + 11x_4$?

б) $-4x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 11x_4$?

в) $-4x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 11x_4$?

г) $4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$?

д) Нехай відповідь на поставлене питання для кожного з цих чотирьох пунктів отримана. Потрібно визначити, яка вільна змінна в кожному з вказаних випадків випадає з базису за умови, що вхідні в модель обмеження задаються рядками 1, 2 і 3 системи рівнянь (2.15), приведеної в підрозділі 2.4.

17. Поясніть значення таких термінів:
- алгоритм;
- вилучення змінної методом Гауса;
- збіжність;
- базис і базисний розв'язок;
- базисна змінна;
- небазисна змінна;
- заміна базису;
- пошук опорного плану;
- приховані витрати;
- приховані ціни;
- додатно-зважене середнє;
- ваговий коефіцієнт;
- вироджений базисний розв'язок;
- штучна змінна;
- коефіцієнт від'ємного прибутку;
- зациклювання;
- симплекс-таблиця;
- елементарне перетворення.

4.2 Вправи для для розвитку обчислювальних навичок

18. За допомогою симплексного методу максимізувати $5P_1+6P_2$ при обмеженнях

$$0{,}2P_1 + 0{,}3P_2 \le 1{,}8,$$
$$0{,}2P_1 + 0{,}1P_2 \le 1{,}2,$$
$$0{,}3P_1 + 0{,}3P_2 \le 2{,}4,$$
$$P_1 \ge 0, \quad P_2 \ge 0.$$

19. За допомогою симплексного методу розв'язати таку задачу: максимізувати $15x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 2x_4$
при обмеженнях

$$2x_1+x_2+5x_3+0{,}6x_4 \le 10$$
$$3x_1+x_2+3x_3+0{,}25x_4 \le 12$$
$$7x_1 \qquad\qquad +x_4 \le 35$$
$$x_j \ge 0 \qquad (j=1,2,3,4).$$

(УМОВА: для знаходження оптимального розв'язку повинно бути виконано не більше трьох ітерацій.)

20. а) Використовуючи симплексний метод, максимізувати

$$30x_1 + 23x_2 + 29x_3$$

при обмеженнях

$$6x_1+5x_2+3x_3 \le 26,$$
$$4x_1+2x_2+5x_3 \le 7,$$
$$x_j \ge 0 \quad (j=1, 2, 3).$$

(УМОВА: для знаходження оптимального розв'язку повинно бути виконано не більше трьох ітерацій.)

б) Розв'яжіть задачу, сформульовану в п. а), замінивши число 26 в правій частині першої нерівності на 31, а число 7 в правій частині другої нерівності на 20.

(УМОВА: оптимальний розв'язок повинен бути отриманий з використанням не більше трьох ітерацій.)

21. За допомогою симплексного методу максимізувати

$$60 x_1+26 x_2+15 x_3+4{,}75 x_4$$

при обмеженнях

$$20 x_1+9 x_2+6 x_3+1 x_4 \leq 20$$
$$10 x_1+4 x_2+ 2 x_3+1 x_4 \leq 10$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

(УМОВА: число ітерацій, що приводить до оптимального розв'язку, повинно бути не більшим п'яти). Чи при всіх ітераціях значення цільової функції зростає? Чи є оптимальний розв'язок єдиним?

22. Альтернативні оптимальні розв'язки.

а) Розв'яжіть симплексним методом таку задачу:

максимізувати $1x_1+1x_1 \leq 3$

при обмеженнях

$$1x_1 \quad \leq 2$$
$$+1x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

б) Прийміть коефіцієнти при x_1 рівними 10 замість 1 як в обмеженнях, так і у виразі для цільової функції. Знайдіть розв'язок для видозміненої таким чином моделі за допомогою симплексного методу.

в) Прийміть коефіцієнти при x_2 рівними 10 замість 1 як в обмеженнях, так і у виразі для цільової функції. Знайдіть розв'язок для видозміненої таким чином моделі за допомогою симплексного методу.

г) Поясніть, виходячи з яких міркувань в пп. а) - в) можна зробити висновок про існування альтернативних оптимальних розв'язків. Використовуючи формули, аналогічні (2.27) з підрозділу 2.4, приведіть вирази для всіх оптимальних розв'язків.

23. *Необмежений оптимальний розв'язок.* Нехай задані обмеження

$$x_1 \ -x_2 \leq 1,$$
$$-x_1 +x_2 \leq 1,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Використайте симплексний метод для розв'язання таких задач:

а) максимізувати x_1;

б) максимізувати x_2;

в) максимізувати $x_1 + x_2$;
г) для кожного з пп. а) в) вкажіть допустимий розв'язок, при якому значення цільової функції дорівнює 100.

24. Розгляньте обмеження функції:

$$-x_1 + x_2$$
$$6x_1 + 4x_2$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 2.$$

Потрібно знайти початковий базис, використовуючи метод великих штрафів при $M = 10$, а також отримати симплексним методом оптимальний розв'язок таких задач:

а) мінімізувати x_1; г) максимізувати $-x1 + 2x2$;
б) мінімізувати $x_1 + x_2$; д) максимізувати $x1 - 2x2$;
в) максимізувати $x_1 + x_2$; е) максимізувати $-3x_1 - 2x_2$.

Встановіть, в яких випадках оптимальний розв'язок *єдиний,* і знайдіть альтернативні оптимальні розв'язки, коли єдиність не має місця.

25. Розв'яжіть задачу 24, прийнявши $x_1 \leq 5$.

26. Розв'яжіть задачу 24, прийнявши $x_2 \leq 4$.

27. В задачі, що не має допустимих розв'язків максимізувати

$$x_1 + x_2$$

при наявності обмежень

$$-x_1 + x_2 \leq -1,$$
$$x_1 - x_2 \leq -1,$$
$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Використайте для розв'язання даної задачі метод великих штрафів і покажіть, до чого це приводить. Пересвідчіться, що умова *A*, сформульована в підрозділі 2.5, не може бути задоволена ні при яких значеннях М.

28. Розв'яжіть задачу в якій необхідно максимізувати

$$x_1 - x_3$$

при обмеженнях

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 = 40,$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10,$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Використовуючи метод великих штрафів, знайдіть оптимальний розв'язок при умові, що приведена вище модель доповнена обмеженням вигляду

а) $6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 50$; б) $6x_1 + 4x_2 + x_3 = 50$.

4.3 Лабораторна робота "Дослідження лінійної функції симплексним методом"

Мета: виконати дослідження лінійної функції за допомогою симплексного методу.

1. В процесі підготовки до виконання лабораторної роботи вивчити матеріал, який пояснює суть симплексного методу розв'язування систем лінійних рівнянь. В звіті по роботі навести короткі теоретичні відомості.

2. Порядок виконання роботи

1. Записати цільову функцію і обмеження згідно зі своїм варіантом в таблиці 4.1.
2. За допомогою MS EXCEL здійснити машинний пошук оптимального розв'язку.
3. Знайти оптимальний розв'язок, використовуючи алгоритм симплекс-методу та метод Гауса без зворотного ходу для розв'язання системи лінійних рівнянь.
4. Порівняти отримані результати.
5. Зробити висновки по роботі.

3. Контрольний приклад

Задано:

цільова функція:

$$y=17*x1-5*x2+x3+x4-8*x5 \to max$$

обмеження:

$$3*x1-x2-x3+4*x4+7*x5 \le 7$$
$$x1+6*x2-5*x3-x4+2*x5 \ge 8$$
$$x1+x2+x3+3*x4-5*x5=4$$

Машинний розрахунок:

1. Запускаємо на ЕОМ програму MS EXCEL.
2. Записуємо матрицю коефіцієнтів обмеження разом із значеннями цих обмежень.

Примітка: для введення чисел в комірки рядка потрібно ввести число і натиснути клавішу TAB; для переходу на наступний рядок – клавіша ENTER; якщо символи не поміщаються в одну комірку, можна здійснити об'єднання комірок (як це зроблено в нашому прикладі), для цього виділяємо дві (можна декілька) сусідніх комірок і натискаємо клавішу ОБЪЕДИНИТЬ И ПОМЕСТИТЬ В ЦЕНТРЕ, що знаходиться на панелі ФОРМАТИРОВАНИЕ (рис. 4.1):

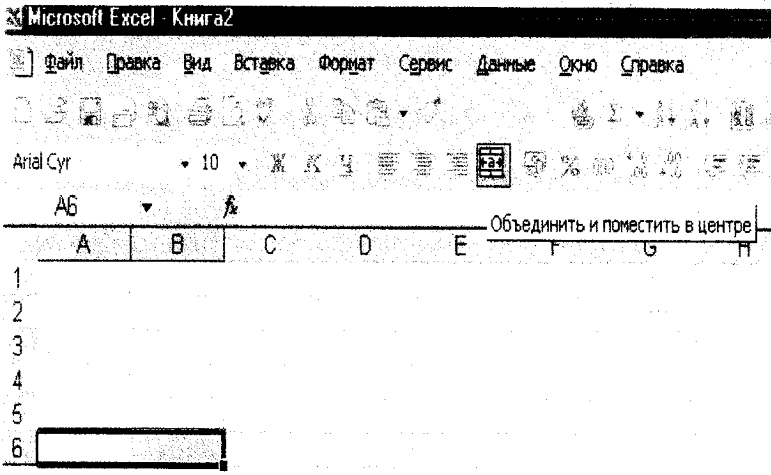


Рисунок 4.1 - Об'єднання комірок

Відкриваємо вікно, що зображене на рис. 4.2:

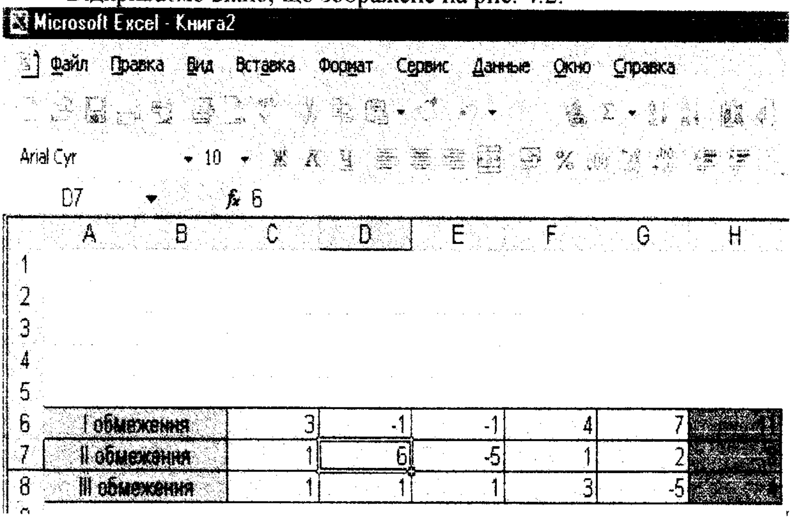
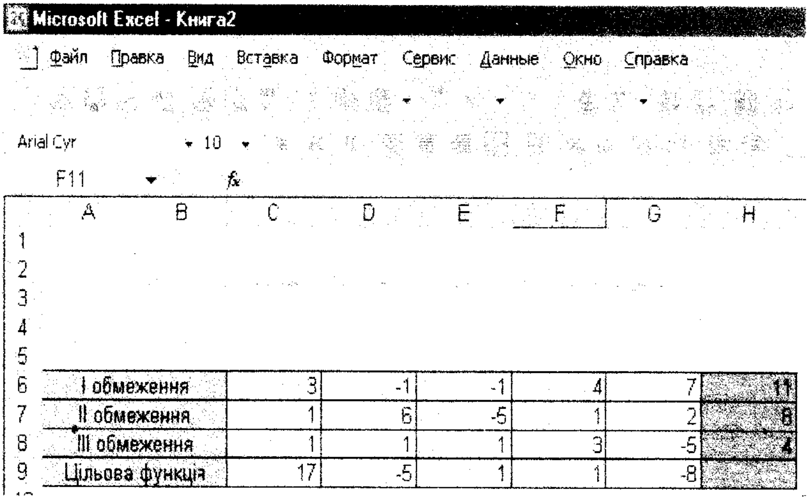


Рисунок 4.2 - Введення коефіцієнтів обмежень

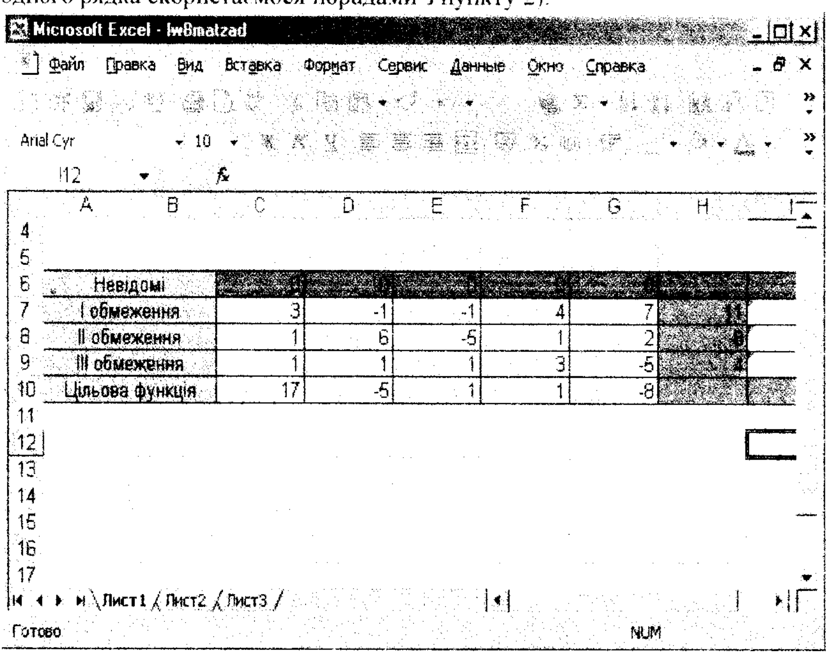
3. Записуємо коефіцієнти цільової функції (рядки і стовпчики формуємо так само, як і в попередньому пункті) , що проілюстровано на рис.4.3:



	A–B	C	D	E	F	G	H
6	I обмеження	3	-1	-1	4	7	11
7	II обмеження	1	6	-5	1	2	8
8	III обмеження	1	1	1	3	-5	4
9	Цільова функція	17	-5	1	1	-8	

Рисунок 4.3 - Введення коефіцієнтів цільової функції

4.Додаємо ще вектор-рядок оптимальних значень (рис.4.4), всі елементи якого спочатку будуть рівними нулю (для формування ще одного рядка скористаємося порадами з пункту 2):



	A–B	C	D	E	F	G	H
6	Невідомі	0	0	0	0	0	
7	I обмеження	3	-1	-1	4	7	11
8	II обмеження	1	6	-5	1	2	8
9	III обмеження	1	1	1	3	-5	4
10	Цільова функція	17	-5	1	1	-8	

Рисунок 4.4 - Додавання рядка невідомих

5.Додаємо вектор-стовпчик, кожний елемент якого рівний сумі добутків відповідного елемента обмеження на відповідний елемент вектора невідомих. Примітка: для цього, натискаємо на клавішу f_x(ВСАВКА ФУНКЦИИ), зробивши перед цим активною комірку 17 (рис. 4.5):

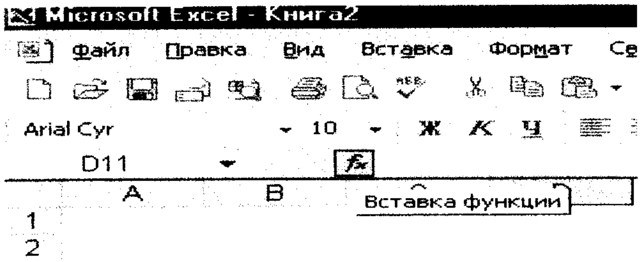


Рисунок 4.5 - Клавіша ВСТАВКА ФУНКЦИИ

Відкриється діалогове вікно, що проілюстровано на рис.4.6:

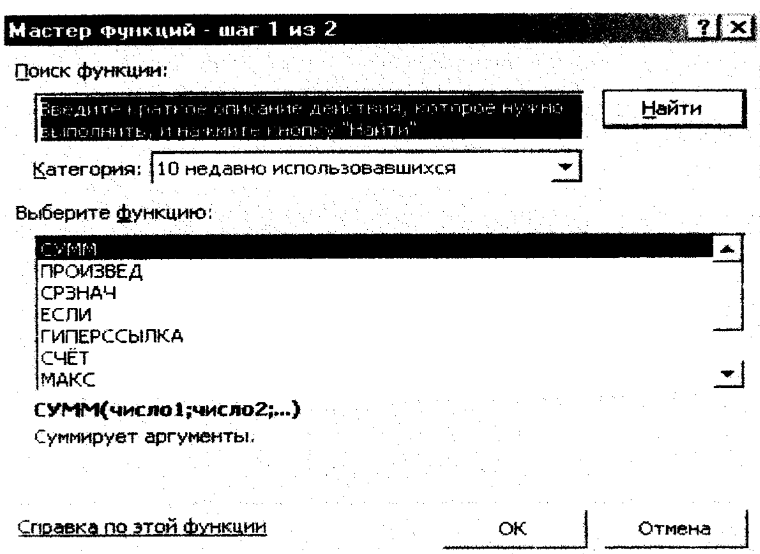


Рисунок 4.6 - Вікно МАСТЕР ФУНКЦИЙ

В КАТЕГОРИЯ виберемо ПОЛНЫЙ АЛФАВИТНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ (рис.4.7):

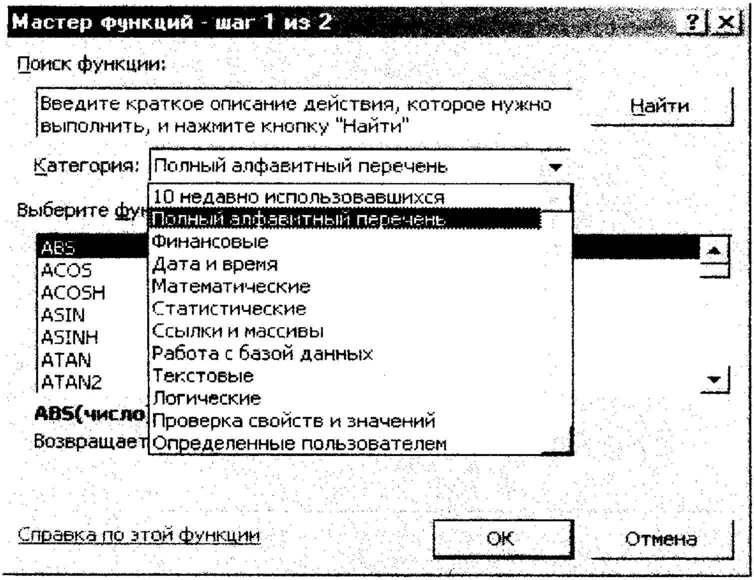


Рисунок 4.7 - Вибір повного алфавітного переліку функцій

В розділі ВЫБЕРИТЕ ФУНКЦИЮ виберемо СУММПРОИЗВ і натиснемо ОК. Отримаємо вікно, що зображено на рис. 4.8 :

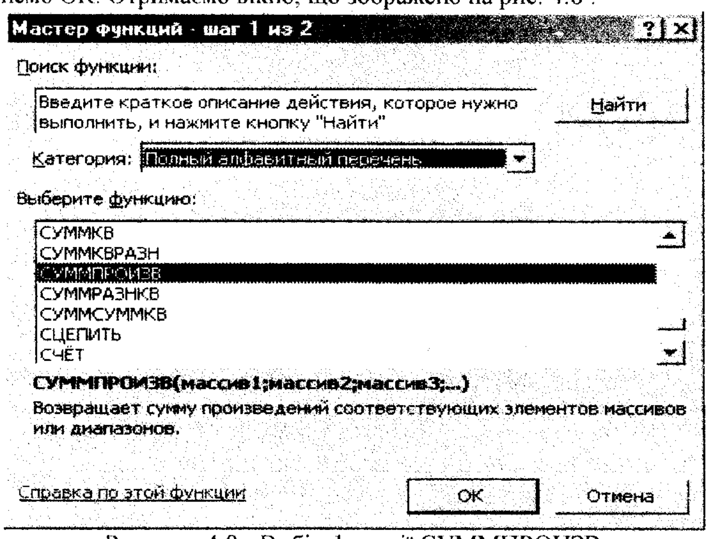


Рисунок 4.8 - Вибір функції СУММПРОИЗВ

відкриється діалогове вікно АРГУМЕНТЫ ФУНКЦИИ, що зображено на рис. 4.9:

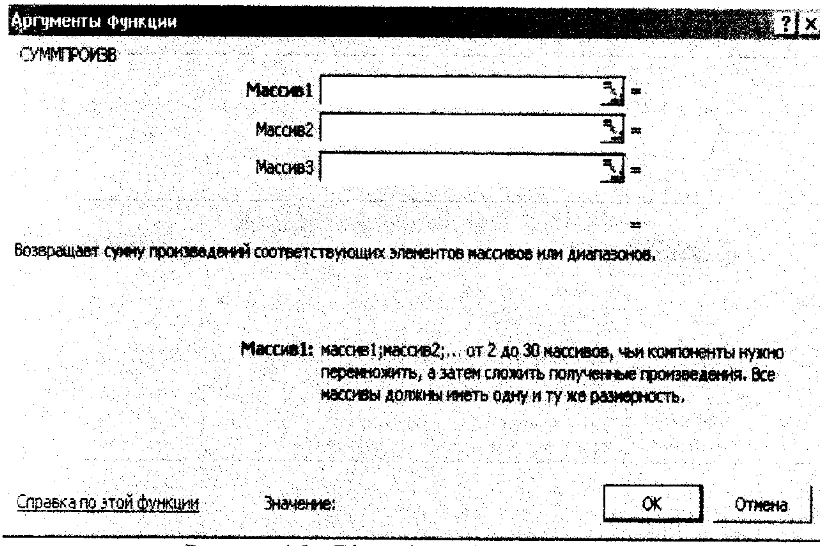


Рисунок 4.9 - Вікно функції СУММПРОИЗВ

так само в поле МАССИВ 2 вводимо елементи першого обмеження, починаючи з комірки C6 і закінчуючи коміркою G6 (рис. 4.10):

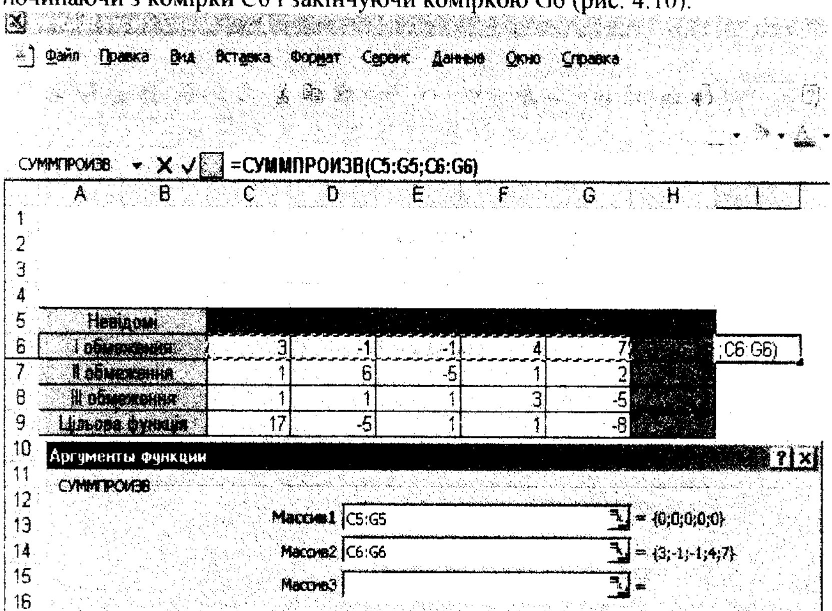


Рисунок 4.10 - Заповнення поля МАССИВ2 функції СУММПРОИЗВ

Далі натискуємо клавішу ОК.

Так само робимо для комірок І7, І8, І9. Отримаємо вікно, що зображено на рис. 4.11:

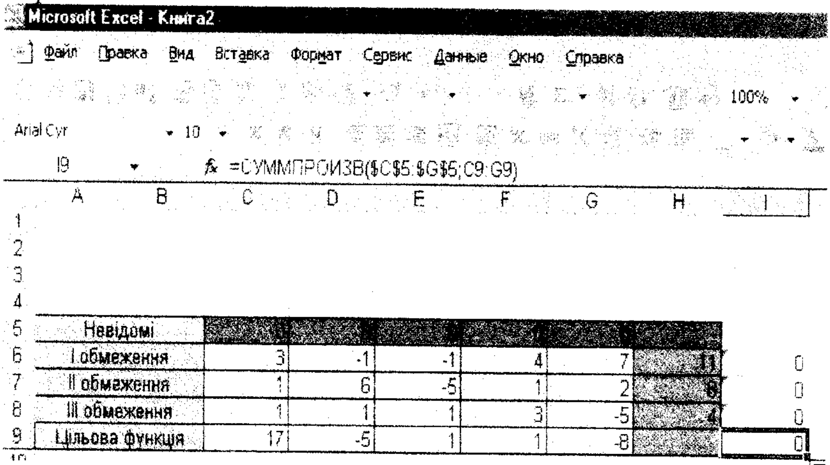


Рисунок 4.11 - Кінцевий вигляд вікна введення даних

Виділяємо останню комірку останнього рядка.

Заходимо в меню СЕРВИС-ПОИСК РЕШЕНИЯ.

Відкриється діалогове вікно, що проілюстровано на рис.4.12:

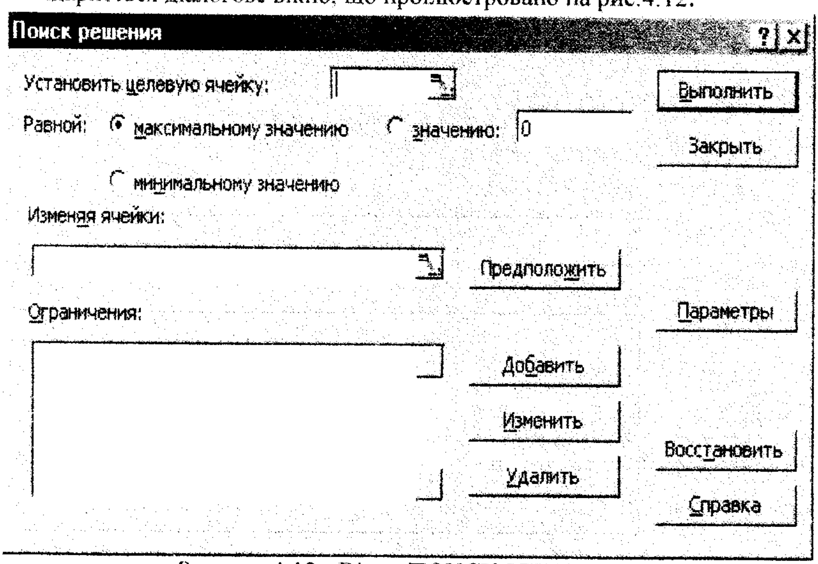


Рисунок 4.12 - Вікно ПОИСК РЕШЕНИЯ

В полі УСТАНОВИТЬ ЦЕЛЕВУЮ ЯЧЕЙКУ вводимо адресу останньої комірки останнього рядка (рис.4.13):

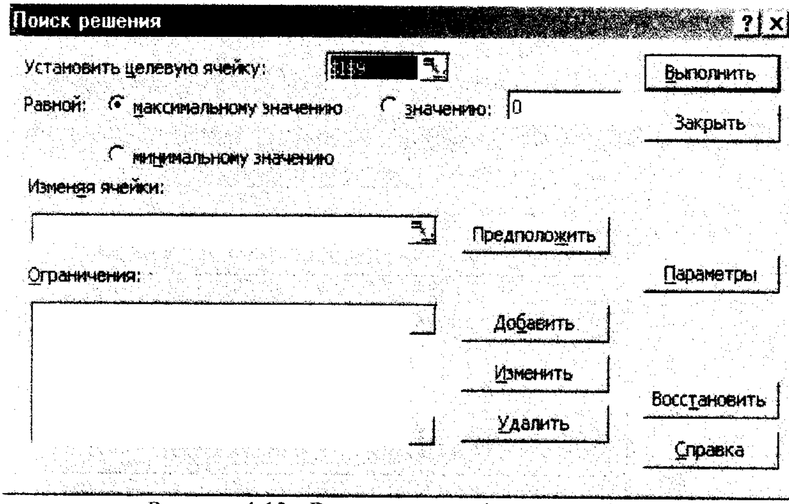


Рисунок 4.13 - Встановлення цільової комірки

Перемикач ставимо відповідно МАКСИМАЛЬНОМУ ЗНАЧЕНИЮ.

Активізувавши поле ИЗМЕНЯЯ ЯЧЕЙКИ, виділяємо курсором верхній рядок з нулями (вектор оптимальних розв'язків) , що зображено на рис. 4.14:

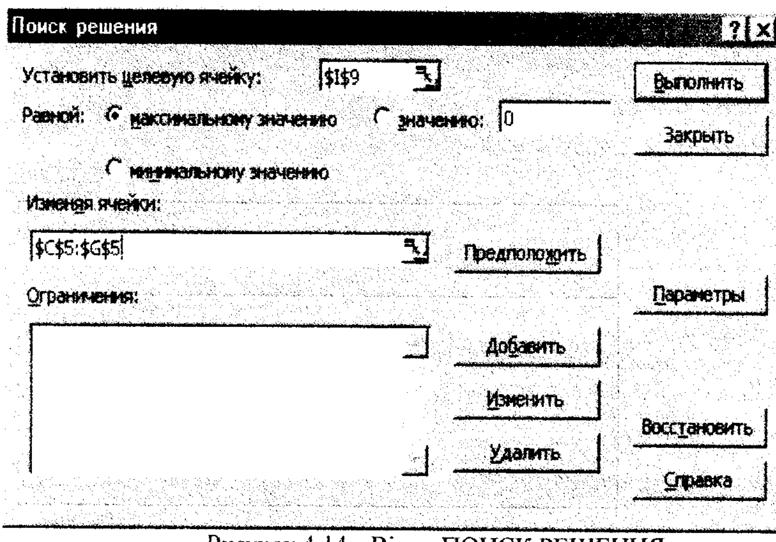


Рисунок 4.14 - Вікно ПОИСК РЕШЕНИЯ

Активізувавши поле ОГРАНИЧЕНИЯ, Натискаємо ДОБАВИТЬ. Відкривається вікно, що проілюстровано на рис.4.15:

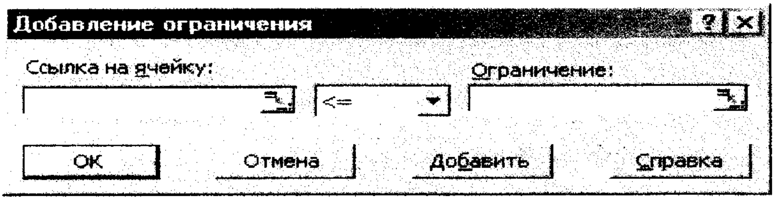


Рисунок 4.15 - Вікно ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

В поле вводимо ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ адресу останнього елемента відповідного рядка-обмеження; вибираємо відповідний знак; в поле ОГРАНИЧЕНИЕ вводимо адресу передостаннього елемента відповідного рядка-обмеження. Отримаємо вікно (див. рис. 4.16):

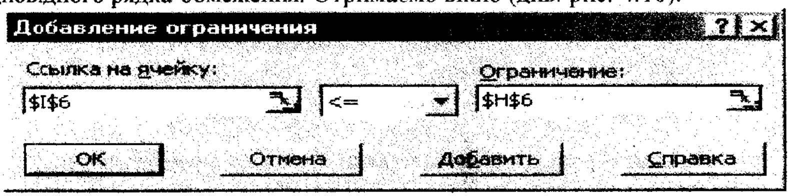


Рисунок 4.16 - Заповнення вікна ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

в загальному випадку (рис.7.17):

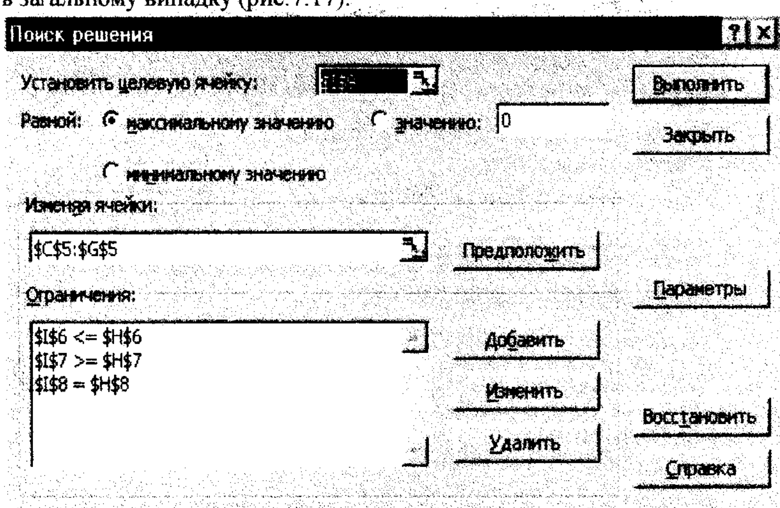


Рисунок 4.17 - Кінцевий вигляд вікна ПОИСК РЕШЕНИЯ

Натискаємо ПАРАМЕТРЫ. Ставимо ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ, НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ (рис. 4.18):

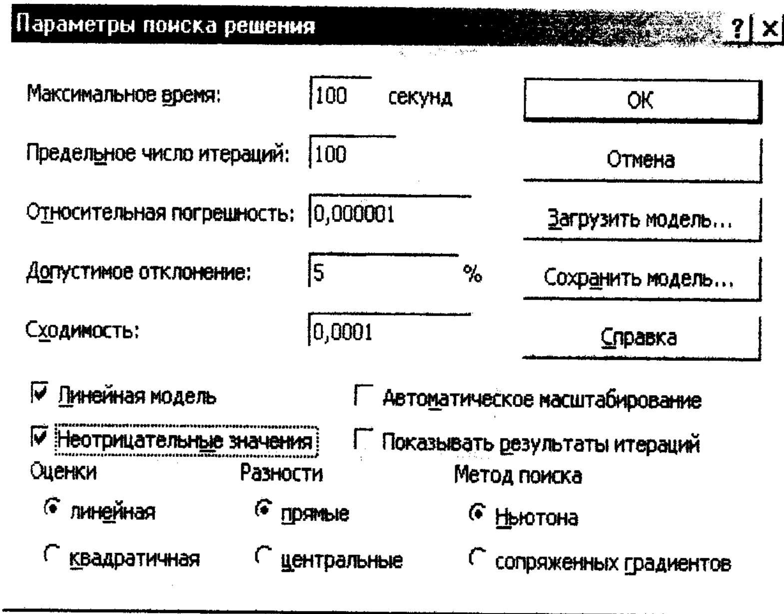


Рисунок 4.18 - Зміна параметрів пошуку розв'язку

Натискаємо ВЫПОЛНИТЬ. Отримуємо вікно, що проілюстровано на рис.4.19:

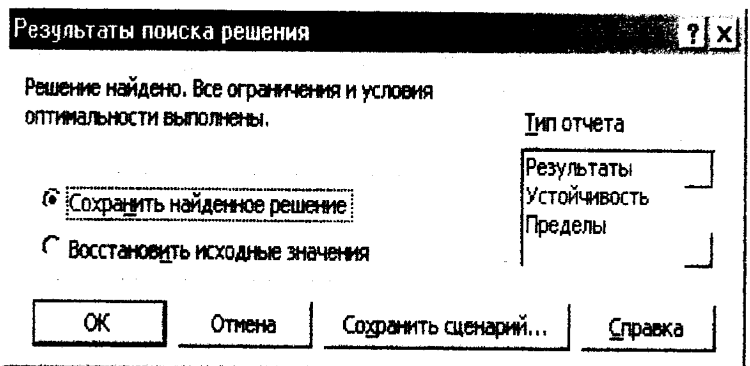


Рисунок 4.19 - Вікно аналізу отриманого розв'язку

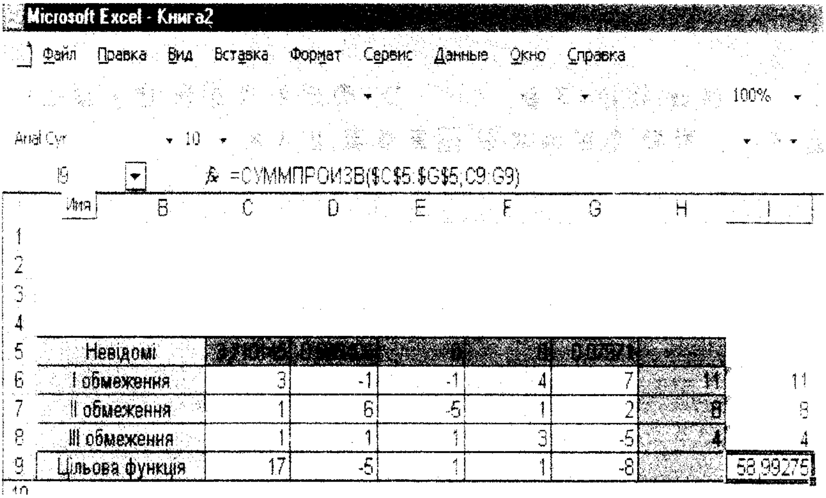


Рисунок 4.20 - Отриманий результат

Розшифровка отриманих значень: оптимальний розв`язок:

x1=3.710145;

x2=0.688406;

x5=0.07971;

x3=x4=0;

ymax=-58.99275.

Ручний розрахунок

Записуємо матрицю коефіцієнтів разом із вектором-стовпцем результатів (рис. 4.21):

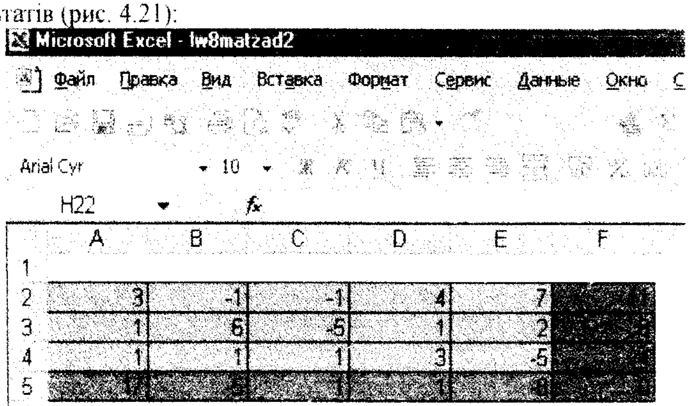
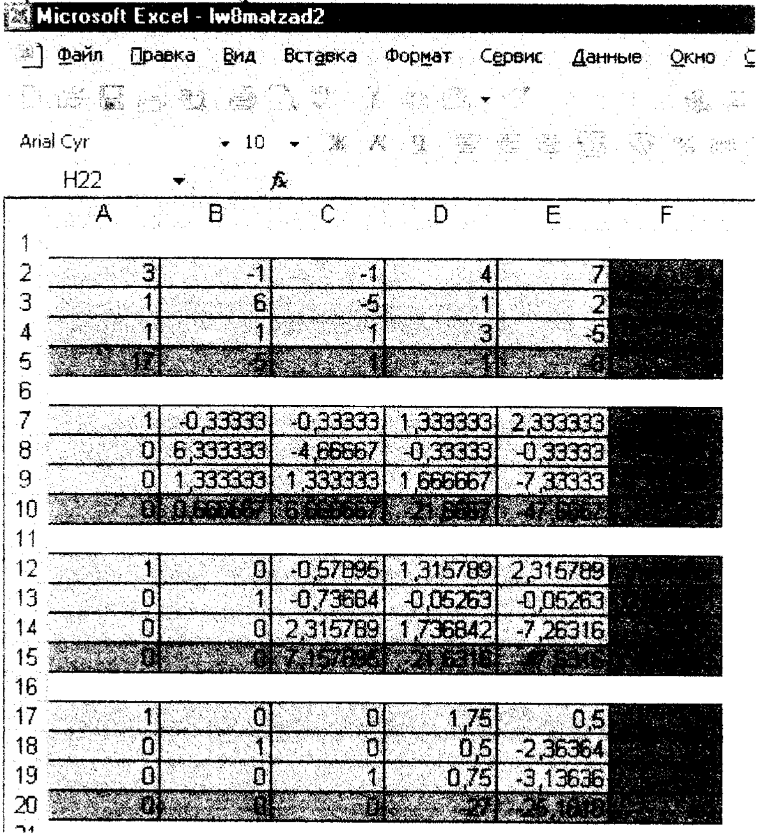


Рисунок 4.21 - Введення початкових даних

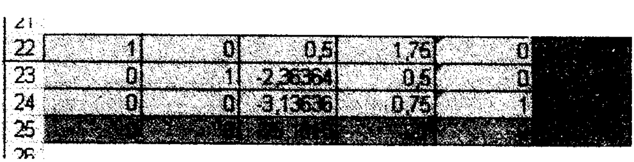
Використаємо метод Гауса для базисної чистини матриці. Пошарово цей процес виглядає так (рис.4.22):



	A	B	C	D	E	F
1						
2	3	-1	-1	4	7	
3	1	6	-5	1	2	
4	1	1	1	3	-5	
5	17	-5	1	1	-6	
6						
7	1	-0,33333	-0,33333	1,333333	2,333333	
8	0	6,333333	-4,66667	-0,33333	-0,33333	
9	0	1,333333	1,333333	1,666667	-7,33333	
10	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
11						
12	1	0	-0,57895	1,315789	2,315789	
13	0	1	-0,73684	-0,05263	-0,05263	
14	0	0	2,315789	1,736842	-7,26316	
15	0	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
16						
17	1	0	0	1,75	0,5	
18	0	1	0	0,5	-2,36364	
19	0	0	1	0,75	-3,13636	
20	0	0	0	-27	[illegible]	

Рисунок 4.22 - Результати першої ітерації

Оскільки отримали від'ємний результат в останньому рядку для одного з обмежень, то для того, щоб позбутися від'ємного результату треба зробити відповідні перестановки. Для цього вибираємо в цьому рядку від'ємний елемент і стовпець з цим елементом (в даному випадку 5) міняємо місцями з 3 стовпцем. Отримаємо вікно, що зображено на рис. 4.23:



21						
22	1	0	0,5	1,75	0	
23	0	1	-2,36364	0,5	0	
24	0	0	-3,13636	0,75	1	
25						
26						

Рисунок 4.23 - Перестановка стовпців

Далі застосовуємо метод Гауса без зворотного ходу і як результат отримуємо вікно, що проілюстроване на рис.4.24:

26					
27	1	0	0	1,869565	0,15942
28	0	1	0	-0,06522	-0,75362
29	0	0	1	-0,23913	-0,31884
30	0	0	0	[illegible]	[illegible]
31					

Рисунок 4.24 - Остаточний варіант

Висновок:

Оскільки треба було дослідити функцію на максимум, то в останньому рядку даної матриці всі елементи, крім останнього повинні бути менші нуля, що й було отримали в процесі виконання роботи. Тому даний розв'язок є оптимальним.

4.3.1 Варіанти завдань до лабораторної роботи

1	$x_1+2x_2-3x_3 \to max$ $-x_1+2x_2+2x_3<=1$ $x_1+x_2-x_3=0$ $x_1,x_2,x_3>=0$	2	$5x_1+2x_2+x_3 \to max$ $x_1+2x_2-x_3<=1$ $-x_1+x_2+3x_3<=6$ $x_1-x_2+2x_3<=4, x_i>=0$
3	$17x_1-5x_2+x_3+x_4-8x_5 \to max$ $3x_1-x_2-x_3+4x_4+7x_5<=11$ $x_1-5x_2-5x_3+x_4+2x_5>=8$ $x_1+x_2+x_3+3x_4-x_5=4$ $x_1>=0, x_4>=0$	4	$4x_1-6x_2-2x_3+3x_4+x_5 \to min$ $x_1+2x_2-3x_3+x_4-3x_5>=-5$ $2x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5>=1$ $-2x_1-x_2-x_4-x_5<=3$
5	$3x_1-2x_2+x_4 \to min$ $-x_1+x_3-x_4=5$ $2x_1+x_2-2x_3+2x_4<=7$ $x_i>=0$	6	$4x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5 \to max$ $4x_1+x_2-x_3-x_4-3x_5>=9$ $x_1+x_2-x_3+x_4+6x_5=10$ $-x_1-3x_2+5x_3<=1$ $x_i>=0$
7	$6x_1+3x_2-x_3-2x_4 \to max$ $3x_1+2x_2+x_3+4x_4<=0$ $2x_1+2x_2-x_3-x_4=1$ $x_i>=0, i=2,\dots,4$	8	$2x_1+4x_2-x_3-x_4 \to max$ $2x_1+2x_2-x_3-x_4<=-2$ $x_1-x_2+x_3<=1$ $3x_1+x_2+x_4=5$ $x_1>=0, x_2>=0, x_3>=0$
9	$-x_1+3x_2+31x_3+25x_4-4x_5 \to max$ $x_1+4x_3+3x_4+x_5=2$ $x_2+x_3+x_4-x_5=1$ $x_1+x_2+10x_3+8x_4+x_5<=5$ $2x_1-x_2+9x_3+6x_4+5x_5<=0$ $x_1>=0, x_2>=0, x_5>=0$	10	$4x_1-8x_2-7x_3-2x_4 \to max$ $3x_2-4x_3-x_4+2x_5<=1$ $4x_1+x_2+2x_3+5x_4-3x_5=-4$ $x_1+x_2+x_3+2x_4-x_5=-1$ $x_i>=0, i=1,\dots,4$
11	$2x_1-4x_2-4x_3+2x_4-x_5 \to min$ $7x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5<=-7$ $2x_1-x_2+x_3+3x_5<=-2$ $5x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=7$ $x_1>=0, x_2>=0, x_4>=0$	12	$x_1+3x_2-4x_3-x_4 \to min$ $4x_1+x_2-3x_3-3x_4=-2$ $-3x_1+2x_2-x_3+x_4>=-1$ $x_i>=0$
13	$10x_1+2x_2+6x_3+5x_4 \to min$ $2x_1+2x_2+2x_3-x_4<=1$ $5x_1+x_2+3x_3+x_4>=2$ $x_i>=0$	14	$13x_1+3x_2+4x_3 \to max$ $5x_1-2x_2+3x_3<=6$ $-3x_1+4x_2+x_3<=2$ $4x_1+x_2-7x_3<=-2$ $x_i>=0$
15	$4x_1+5x_2+6x_3 \to max$ $-x_1+4x_2-2x_3<=10$ $3x_1+2x_2+3x_3<=9$ $4x_1-x_2+5x_3<=2$ $x_i>=0$	16	$y=17*x1-5*x2+x3+x4-8*x5 \to max$ $3*x1-x2-x3+4*x4+7*x5 \le 7$ $x1+6*x2-5*x3-x4+2*x5 \ge 8$ $x1+x2+x3+3*x4-5*x5=4$

Література

1.Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х книгах. Пер. с англ.- М.: Мир, 1986.- 320 с.

2.Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 1. Пер. с англ.- М.: Мир, 1972.- 335 с.

3.Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования.-М.: Советское радио, 1961.

4.Вентцель Е. С. Введение в иследовоние операций. – М.:Сов. радио, 1984.

5.Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его обобщения и применение.-М.: Прогресс, 1966.

6.Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию.-М.: Высшая школа, 1975.

7. Данциг Дж. Линейное программирование.-М.: Прогрес. 1968.

8.Кудрявцев Е. М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и програмах. – М.:Радио и связь, 1984.

9. Аоки М. Введение в методы оптимизации. Пер. с англ. – М.:Наука, 1977. – 344 с.

10. Лебедев А.Н. Моделирование в научно-технических исследованиях.-М.: Радио и связь, 1989. –224 с.

11. Дамбраускас А.П. Симплексный поиск. – М.: Энергия, 1979.

Навчальне видання

Петро Дем'янович Лежнюк
Віктор Цезарович Зелінський

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено авторами
Редактор С.А. Малішевська

Навчально-методичний відділ ВНТУ
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 13.04.04 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7x42 ¼ Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 4.91
Тираж 75 прим.
Зам № 2004-61

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі
Вінницького національного технічного університету
Свідоцтво Держкомінформу України
серія ДК №746 від 25.12.2001р.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ