В.П.ЛИТВИНЮК

КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ
ТЕОРІЯ ПОЛЯ
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вінницький державний технічний університет

В.П.ЛИТВИНЮК

КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ
ТЕОРІЯ ПОЛЯ
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Затверджено Ученою радою Вінницького державного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів заочної форми навчання. Протокол № 11 від 1.07.2001р.

Вінниця ВДТУ 2002

УДК 517.3 (075)

Л 64

Рецензенти:

В.М. Міхалевич, доктор технічних наук, професор

В.С. Абрамчук, кандидат фізмат наук, професор

А.О.Сироватка, кандидат фізмат наук, доцент

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького державного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Литвинюк В.П.

Л 64 **Кратні та криволінійні інтеграли. Теорія поля. Операційне числення.** Навчальний посібник.-Вінниця: ВДТУ, 2002.– 71с.

В посібнику розглянуті теоретичні положення про кратні та криволінійні інтеграли, теорію поля та операційне числення, які ілюструються розв'язуванням типових прикладів. Складено по 50 варіантів індивідуальних завдань для виконання контрольних робіт з цих розділів вищої математики для студентів-заочників радіотехнічних та електротехнічних спеціальностей, зразки розв'язків яких приведені в тексті посібника.

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

1 КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Це інтеграли функцій багатьох змінних. Для функції двох змінних $f(x,y)$, що задана в деякій області (D) на площині xOy, вводиться подвійний інтеграл. Якщо ж ця функція розглядається на плоскій лінії (L), то розглядаються криволінійні інтеграли.

Для функцій трьох змінних $f(x,y,z)$ вводяться відповідно потрійні інтеграли (областю інтегрування є просторова область), криволінійні (областю інтегрування є лінія у просторі) та поверхневі (областю інтегрування є деяка поверхня) інтеграли.

1.1 Приклади задач, що приводять до поняття подвійного інтеграла

Задача 1 (задача про об'єм циліндричного тіла).

Знайти об'єм тіла, обмеженого зверху деякою криволінійною поверхнею $z = f(x,y)$, де $z \geq 0$, збоку — циліндричною поверхнею $F(x,y) = 0$, твірні якої паралельні осі Oz, і знизу деякою областю (D), що лежить в площині xOy.Таке тіло називається *циліндричним тілом.*

Задача 2. Знайти величину заряду, що знаходиться на плоскій пластинці, що займає деяку область (D), обмежену замкненою лінією (L), якщо *щільність розподілу заряду* в кожній точці задається функцією координат цієї точки $\sigma = f(x,y)$.

Покажемо, як розв'язується перша задача. Зробимо такі кроки:

1) Розіб'ємо область (D), що є основою циліндричного тіла, *довільним способом* на n частин сіткою кривих так, щоб частини розбиття (ΔS_i) не перетинались між собою; площі цих частин розбиття позначимо через $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$. На кожній частині розбиття побудуємо елементарний циліндр з основою (ΔS_i), твірні якого паралельні осі Oz.

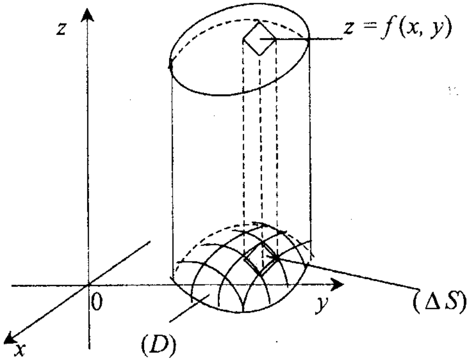

Рисунок 1.1

2) Всередині кожної частини розбиття (ΔS_i) виберемо довільно точку (x_i, y_i) і визначимо аплікату точки поверхні $z_i = f(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

3) Замінимо кожен із елементарних циліндрів звичайним циліндром (нижня і верхня основи паралельні) з висотою $h_i = f(x_i, y_i)$, об'єми таких звичайних циліндрів визначаються так:

$$\Delta V_i = f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i\ ,\ (i = 1, 2, ..., n).$$

4) Циліндричне тіло замінимо тілом, що складається з цих звичайних циліндрів, тобто *ступінчатим тілом.* Тоді об'єм циліндричного тіла наближено буде дорівнювати об'єму цього ступінчатого тіла :

$$V_{Ц.Т.} \approx f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + ... + f(x_n, y_n)\Delta S_n \text{ або}$$

$$V_{Ц.Т.} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i\ .$$

5) Тепер треба *згладити* ці горизонтальні “цеглини”, якими ступінчате тіло покривається зверху. Це робиться необмеженим подрібненням циліндричного тіла на елементарні циліндри або необмеженим подрібненням області (D), що є його основою. Для цього треба частини її розбиття (ΔS_i) стягувати в точки, що математично можна описати так: треба вимагати, щоб діаметри d_i всіх частин розбиття прямували до нуля.

Діаметром області (ΔS_i) називається найбільша відстань між двома її довільними точками.

Тоді за означенням

$$V_{Ц.Т.} = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \ . \tag{1.1}$$

Зауваження. Аналогічно величина заряду q неоднорідної плоскої пластини визначається так:

$$q = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \ , \text{ де } \sigma = f(x,y) \text{ – щільність розподілу заряду.}$$

1.2 Поняття подвійного інтеграла та його властивості

Нехай в деякій області (D) координатної площини xOy задана неперервна функція $f(x,y)$. Виконаємо такі кроки:

1) Область (D) довільним способом розіб'ємо на n частин, площі яких позначимо через $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ (сусідні частини розбиття не перетинаються одна з одною).

2) В кожній частині розбиття (ΔS_i) виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i)$ і визначимо значення функції в ній, тобто визначимо $f(x_i, y_i)$, $(i = 1,2,...,n)$.

3) Складемо добутки вигляду $f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$, $(i = 1,2,...,n)$.

4) Додамо ці добутки, тобто утворимо суму вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \ . \tag{1.2}$$

Ця сума являється числовою послідовністю досить складного вигляду і називається *інтегральною* сумою функції $f(x,y)$ в області (D).

5) В сумі (1.2) перейдемо до границі при умові, що всі d_i діаметри частин розбиття прямують до нуля, утворимо таку границю

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \ .$$

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум (1.2) при умові, що всі діаметри частин розбиття прямують до нуля, яка не залежить ні від способу розбиття області (D) на частини, ні від вибору точок (x_i, y_i) в кожній із частин розбиття, то ця границя називається *подвійним інтегралом функції* $f(x,y)$ *в області* (D) і позначається символом: $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dS$ або $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$.

Отже,

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i\,. \tag{1.3}$$

Область (D) називають *областю інтегрування*, $f(x,y)dxdy$ називають *підінтегральним виразом*, а $dS = dxdy$ — *елементом площі*.

Зауваження. Розв'язок задачі про об'єм циліндричного тіла можна записати так

$$V_{Ц.Т.} = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\,. \tag{1.1'}$$

Отже, *подвійний інтеграл геометрично означає об'єм циліндричного тіла*, тобто об'єм циліндричного тіла чисельно дорівнює значенню подвійного інтеграла відповідної функції, визначеної в області (D).

Подвійний інтеграл має всі властивості визначеного інтеграла, зокрема:

1) $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy$, якщо $(D) = (D_1) \cup (D_2)$ і $(D_1) \cap (D_2) = \phi$ (властивість *адитивності*).

2) $\iint\limits_{(D)} \big(C_1 f_1(x,y) + C_2 f_2(x,y)\big)dxdy = C_1 \iint\limits_{(D)} f_1(x,y)dxdy + C_2 \iint\limits_{(D)} f_2(x,y)dxdy$

(властивість *лінійності*).

3) Якщо $f(x,y) \geq 0$ в усіх точках області (D), то $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy > 0$.

4) Якщо $f(x,y) \equiv 1$ в усіх точках області (D), то $\iint\limits_{(D)} dxdy = S_D$, де S_D – площа області (D).

Дійсно, $\iint\limits_{(D)} dxdy = \lim\limits_{max\, d_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i = \lim\limits_{max\, d_i \to 0} S_D = S_D$.

Отже, дістали формулу для площі плоскої області (D):

$$S_D = \iint\limits_D dxdy. \tag{1.4}$$

1.3 Обчислення подвійного інтеграла

Зауважимо, що обчислити подвійний інтеграл безпосередньо, користуючись означенням, неможливо.

Виведемо формулу для обчислення подвійного інтеграла. Для випадку, коли $f(x,y) \geq 0$ в усіх точках області (D), можна скористуватись геометричним змістом подвійного інтеграла, за яким $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = V_{Ц.Т.}$

З іншого боку, об'єм тіла можна обчислити за допомогою визначеного інтеграла, а саме:

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx,$$

де $S(x)$ – площа поперечного перерізу площиною, перпендикулярною осі Ox.

Зробимо рисунок поперечного перерізу циліндричного тіла, провівши його при певному $x \in (a;b)$, де a і b – проекції на вісь Ox крайніх точок тіла.

Нехай підінтегральна функція $f(x,y)$ та область інтегрування (D) задані, тобто відомі рівняння границі області (D).

Сам переріз буде мати форму криволінійної трапеції, тоді

$$\begin{cases} z = f(x,y), \\ x = const \end{cases} \qquad S(x) = S_{кр.тр.KLMN} = \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\ ,$$

де лінія (LM) має рівняння $\begin{cases} z = f(x,y), \\ x = const, \end{cases}$ x – *зафіксоване* значення, а y_1 і y_2 – деякі величини, що залежать від цього x.

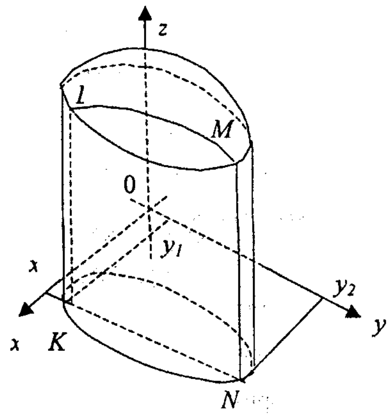

Рисунок 1.2

Це, по суті, ординати точок K і N, що визначають основу криволінійної трапеції KN. Якщо фіксовану точку x змінювати, то і змінюватимуться межі інтегрування, тобто залежатимуть від цього x, які визначаються з рівняння границі області D.

Отже, матимемо, що

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$ або, що те ж саме,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \qquad (1.5)$$

Якщо ж поперечний переріз провести перпендикулярно осі Oy, то аналогічно одержимо формулу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx, \qquad (1.6)$$

де c і d – проекції на вісь Оy крайніх точок тіла, а межі $x_1(y)$ і $x_2(y)$ визначаються з рівняння границі області D.

Отже, подвійний інтеграл обчислюють за однією із двох формул (1.5) або (1.6), тобто при обчисленні подвійний інтеграл зводять до *повторного двократного інтеграла*.

Звернемо увагу на такі обставини: межі *зовнішнього інтеграла* є числа, а межі *внутрішнього інтеграла* залежать від *змінної*, що не збігається зі змінною інтегрування.

1.4 Схема обчислення подвійного інтеграла

Аналізуючи вигляд цих формул, повторні інтеграли в одному із можливих порядків можна утворити за такою схемою.

Нехай область інтегрування D і підінтегральна функція $f(x,y)$ задані, тобто відомі рівняння границі області D.

1-й крок. Вибираємо всередені області (D) довільну точку (x,y), де x і y – біжучі координати точки області.

2-й крок. Зафіксуємо одну із них, наприклад x, інша буде змінюватись вздовж осі Оy в межах від y_1 до y_2, де y_1 і y_2 залежатимуть від цього

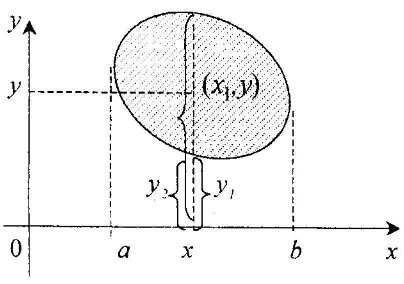

Рисунок 1.3

x, а саме y_1 – це ордината *точки входу* в область (D), y_2 – ордината *точки виходу*, а біжуча точка переміщується вздовж осі Oy.

З рівняння границі області (D) визначаємо ці залежності $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$.

3-й крок. Проінтегруємо задану інтегральну функцію $f(x,y)$ по змінній y в межах від $y_1(x)$ до $y_2(x)$, тобто утворюємо внутрішній інтеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, в результаті будемо мати деяку функцію $F(x)$, яка залежить від однієї змінної x (або функцію $F(y)$, якщо інтегруватимемо по x).

4-й крок. Одержану функцію інтегруємо по x, змінюючи його в межах від a до b, де a і b – проекції на вісь Ox крайніх точок області (D), одержимо таке: $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

Отже, матимемо $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $y=2-x^2$, $y = x$, $x = 0$, причому $x \geq 0$.

Розв'язування. Зробимо рисунок області (D)

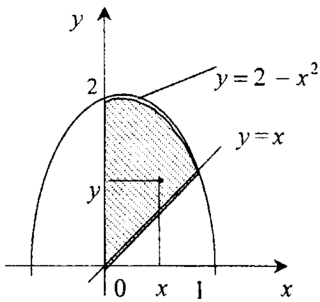

Рисунок 1.4

1) Виберемо точку $\forall(x,y)\in D$ і зафіксуємо x.

2) Оскільки y вільна координата, то біжуча точка переміщується вздовж осі Oy, при цьому точки входу в область знаходяться на прямій $y = x$, а точки виходу із області на параболі $y = 2 - x^2$. Отже, межами інтегрування внутрішнього інтеграла є $y_1 = x$ та $y_2 = 2 - x^2$.

3) Будемо інтегрувати функцію $f(x,y) = x + y$ по змінній y в межах від $y_1 = x$ до $y_2 = 2 - x^2$, тобто $\int\limits_{x}^{2-x^2}(x+y)dx$.

4) Проінтегруємо цю функцію по x в межах від $x = a$ до $x = b$. Очевидно, що $a = 0$; знайдемо b – абсцису точки перетину параболи $y = 2 - x^2$ і прямої $y = x$. Цю абсцису знайдемо, розв'язавши систему цих рівнянь:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \quad x = 2 - x^2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 1.$$

Отже, $\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2}(x+y)dy = [npu\ x = const] =$

$$= \int\limits_0^1 \left(\left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_x^{2-x^2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x(2-x^2) + \frac{(2-x^2)^2}{2} - x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x - x^3 + 2 - 2x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \int\limits_0^1 \left(2 + 2x - \frac{7}{2}x^2 - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \left(2x - x^2 - \frac{7}{6}x^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{101}{60}.$$

1.5 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Обчислення подвійного інтеграла в багатьох випадках спрощується, якщо від декартових координат x і y перейти до полярних φ і ρ. Як це зробити?

Нехай треба обчислити $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, де область ($D$) обмежена замкненою лінією (L).

Сам перехід від декартових координат точки до її полярних координат здійснюється за відомими формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi. \end{cases} \tag{1.7}$$

1) Оскільки функція $f(x,y)$ задається в точках $(x,y) \in D$, то замість x і y в підінтегральну функцію можна підставити ці вирази (1.7), тоді дістанемо, що $f(x,y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$. Отже, підінтегральна функція $f(x,y)$ перейде в деяку функцію, що залежатиме від двох інших змінних φ і ρ, тобто дістанемо функцію $F(\varphi,\rho)$, що залежить від полярних координат φ і ρ.

2) Чим же замінити елемент площі $dS = dxdy$ в полярних координатах? Вирисуємо найпростішу форму цього елемента, що міститься між двома променями $\varphi = const$ і $\varphi + d\varphi = const$, що виходять із полюса О, та двома концентричними колами $\rho = const$ і $\rho + d\rho = const$, центр яких знаходиться в полюсі.

Тоді з точністю до нескінченно малих більш високого порядку, ніж $d\varphi$ і $d\rho$, площа цього елемента дорівнюватиме площі прямокутника з розмірами $d\rho$ і $\rho d\varphi$, тобто

$$dS = \rho d\rho d\varphi. \tag{1.8}$$

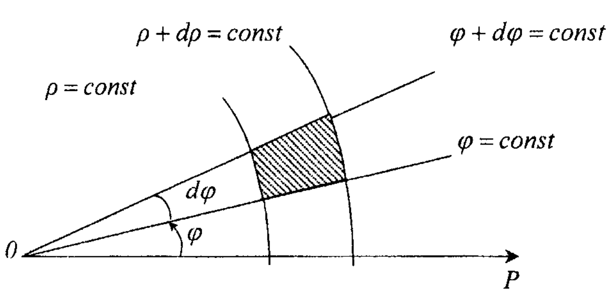

Рисунок 1.5

Тоді матимемо, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \qquad (1.9)$$

Останній інтеграл за відомою схемою зводимо до повторного, де внутрішнє інтегрування ведеться по ρ, а зовнішнє по φ (тобто біжуча точка спочатку переміщується в напрямку променя $\varphi = const$).

Приклад. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, де область ($D$) – верхній півкруг з центром в початку координат радіуса $R=2$.

Розв'язування. Зробимо рисунок області (D). В декартових координатах цей інтеграл обчислювати незручно, бо з рівняння цього кола $x^2+y^2=R^2$ видно, що $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$. Тоді межами інтегрування є ірраціональні функції квадратного двочлена. Перейдемо в ньому до полярних координат.

$$\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{4-(\rho\cos\varphi)^2-(\rho\sin\varphi)^2}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{4-\rho^2}\,\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \rho\sqrt{4-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2} \left(-\frac{1}{2}(4-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right) d(4-\rho^2) = \int\limits_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^2\right) d\varphi =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\left(0-4^{\frac{3}{2}}\right)d\varphi = \frac{1}{3}\cdot 8\cdot\int\limits_0^{\pi} d\varphi = \frac{8}{3}\pi = \frac{8\pi}{3}.$$

Зауваження. 1) До полярних координат зручно переходити тоді, коли область (D) обмежена дугами кіл або еліпсів.

2) Площа плоскої фігури, що займає деяку область (D), буде обчислюватись за формулою

$$S_D = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi. \qquad (1.10)$$

1.6 Потрійні інтеграли

Такі інтеграли вводяться для функцій трьох незалежних змінних $f(x,y,z)$, що задані в деякій просторовій області (V). Припустимо, що ця область обмежена деякою замкненою гладкою поверхнею (σ), а функція $f(x,y,z)$ неперервна в області (V). Це зробимо аналогічно тому, як при введенні подвійного інтеграла. Здійснимо такі кроки

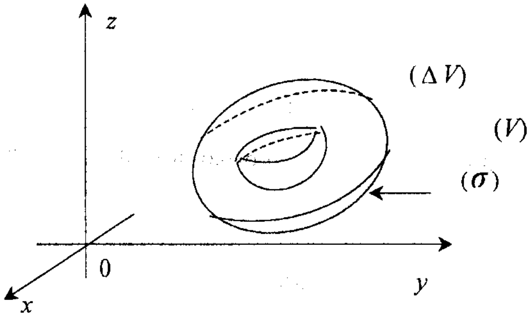

Рисунок 1.6

1) Розіб'ємо область (V) довільним способом на n частин, що не перетинаються, об'єми яких позначимо через $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots \Delta V_n$.

2) В кожній частині розбиття (ΔV_i) виберемо *довільно* точку (x_i,y_i,z_i) і визначимо значення функції в цій точці, тобто знайдемо $f(x_i,y_i,z_i)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$.

3) Утворимо добутки вигляду $f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$.

4) Складемо суму цих добутків $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$. (1.11)

Цю суму називають *інтегральною сумою функції* $f(x,y,z)$ *в області* (V).

5) Через d_i позначимо діаметр області розбиття (ΔV_i) і будемо прямувати d_i до нуля, тоді (ΔV_i) стягуватиметься в точку.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (1.11) при максимальному із діаметрів d_i, прямуючому до нуля, яка не залежить ні від способу розбиття області (V) на частини, ні від вибору точок в кожній із них, то ця границя називається *потрійним інтегралом функції* $f(x,y,z)$ *по області* (V) і позначається символом

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \text{ або } \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Отже, $$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i, \qquad (1.12)$$

де d_i - діаметр області (ΔV_i).

Зауваження. Якщо $f(x,y,z) \equiv 1$ в усіх точках області (V), то з формули (1.2) $\Rightarrow \iiint\limits_V dV = V$, тобто об'єм V тіла за допомогою потрійного інтеграла обчислюється за такою формулою

$$V = \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_V dxdydz. \qquad (1.13)$$

1.7 Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Нехай треба обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, де ($V$) – задана область інтегрування, в якій задана функція $f(x,y,z)$. Це зробимо за аналогічною схемою, як при обчисленні подвійних інтегралів.

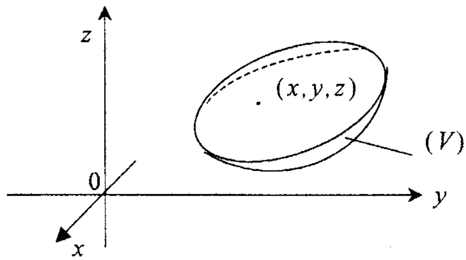

Рисунок 1.7

1) Виберемо довільну (біжучу) точку $M(x,y,z)$ в області (V) і зафіксуємо дві її координати, відповідно x і y, а третю z будемо вважати вільною. Тоді біжуча точка буде переміщуватись вздовж осі Oz від деякого z_1 до деякого z_2, де z_1 і z_2 – аплікати точок поверхні, що обмежує тіло, відповідно точкам входу в область і виходу з неї. Функція $f(x, y, z)$

буде функцією однієї змінної z, яка змінюється від деякого z_1 до деякого z_2 при цьому $z_1 = z_1(x,y)$, а $z_2 = z_2(x,y)$, які визначаються з рівняння поверхонь, що обмежують тіло відповідно знизу і зверху.

2) Проінтегруємо цю функцію $f(x,y,z)$ по змінній z в указаних межах $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$: $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.

В результаті дістанемо деяку функцію $F(x,y)$, що залежить від двох змінних x і y і визначена в деякій плоскій області (D), що є проекцією області (V) на координатну площину xOy.

3) Проінтегруємо повторно цю функцію $F(x,y)$ по області (D):

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Звівши подвійний інтеграл теж до повторного, будемо мати формулу

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (1.14)$$

Звернемо увагу на такі речі: межі інтегрування для внутрішнього інтеграла є функції двох інших змінних. Ці функції визначаються з рівняння поверхонь, що обмежують область (V) знизу і зверху, а межі при наступному інтегруванні залежать від однієї з цих останніх, межі зовнішнього інтеграла є сталі величини (деякі числа).

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_{(V)} x\,dxdydz$, де (V) – область, обмежена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ і $z = 0$ та площиною $x + y + z = 1$.

Розв'язування. Зробимо спочатку рисунок області (V), (рис. 1.8). Областю (V) є піраміда з вершиною в точці C та основою (AOB); $пр_{xy}(V) = (D)$, областю (D) є $\Delta\, AOB$ (рис.1.9).

Рівняння прямої AB буде таким: $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

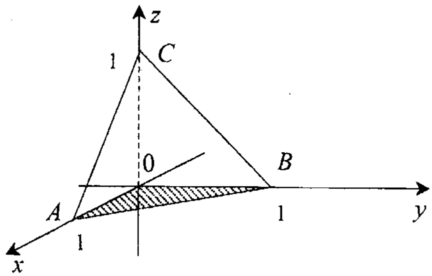

Рисунок 1.8

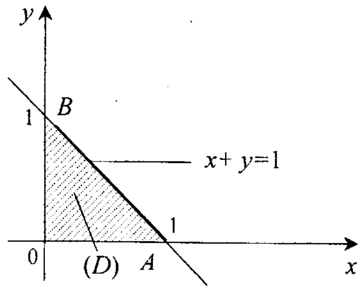

Рисунок 1.9

Знизу область (V) обмежена координатною площиною $z = 0$, а зверху – площиною $x + y + z = 1$, звідки $z = 1 - x - y$. Тоді

$$\iiint\limits_{(V)} x\,dxdydz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} dz = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} \left(z \Big|_0^{1-x-y} \right) dy = \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 x \left(-\frac{(1-x-y)^2}{2} \Bigg|_0^{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

1.8 Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах

Спочатку введемо поняття циліндричних координат точки. Нехай в просторі задано точку $M(x,y,z)$, де x, y, z – її декартові координати.

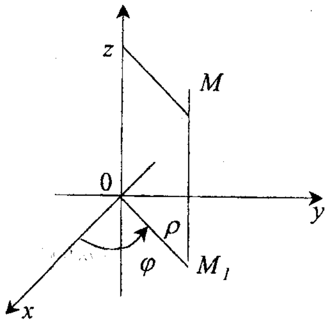

Рисунок 1.10

Положення цієї точки в просторі відносно системи координат можна визначити за допомогою іншої трійки чисел, а саме: аплікату z точки M залишимо, а замість абсциси x і ординати y введемо полярні координати ρ і φ точки M_1, яка є проекцією точки M на координатну площину xOy.

Числа ρ, φ і z називаються *циліндричними координатами точки M* і пишуть $M(\rho, \varphi, z)$.

Декартові координати x, y, z точки M виражаються через її циліндричні координати за допомогою очевидних формул

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \tag{1.15}$$

Нехай треба обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ в циліндричних координатах. Перехід в потрійному інтегралі до циліндричних координат формально здійснюється так: замість x, y, z в підінтегральну функцію $f(x,y,z)$ підставляють вирази (1.15), одержимо $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$ функцію трьох незалежних змінних ρ, φ і z.

А що взяти замість *елемента об'єму* dV в циліндричних координатах? Для цього треба побудувати найпростішу його форму, яку можна створити, розбиваючи тіло (V) на частини поверхнями $\rho=const$, $\varphi=const$ і $z=const$ (перша із них є круговий циліндр, а дві інші – площини), надавши циліндричним координатам точки відповідно прирости $d\rho$, $d\varphi$ і dz. Тоді з точністю до нескінченно малих вищого порядку об'єм елементарного тіла буде наближено дорівнювати об'єму прямокутного паралелепіпеда з розмірами $d\rho$, $\rho d\varphi$ і dz, тобто

$$dV = dS \cdot dz = \rho d\rho d\varphi dz.. \tag{1.16}$$

Тоді матимемо

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(\rho cos\varphi, \rho sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz. \tag{1.17}$$

Потрійний інтеграл, що стоїть в правій частині цієї рівності, зводиться до повторного трикратного інтегрування за відомою схемою.

Зауваження. Перехід в потрійному інтегралі до циліндричних координат зручно здійснювати в тих випадках, коли проекція області (V) на одну із координатних площин є область (D), що обмежена *дугами кіл.*

Приклад 1. Знайти об'єм тіла, обмеженого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і параболоїдом обертання $2z=x^2+y^2$.

Розв'язування. Зробимо спочатку рисунок. Ці дві поверхні є поверхнями обертання навколо осі Oz, тому їх осі симетрії збігаються з віссю Oz, їх вершини знаходяться в початку координат. Саме тіло теж симетричне відносно осі Oz і має такий вигляд (рис. 1.11).

Потрійний інтеграл, за допомогою якого будемо визначати об'єм, будемо обчислювати в циліндричних координатах, оскільки проекція тіла на площину xOy є круг (D). Визначимо радіус цього круга. Для цього треба знайти радіус кола, що одержується при перерізі конуса з параболоїдом, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 2z = x^2+y^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

Виключивши x та y, будемо мати рівняння $z^2=2z$, коренями якого бу-

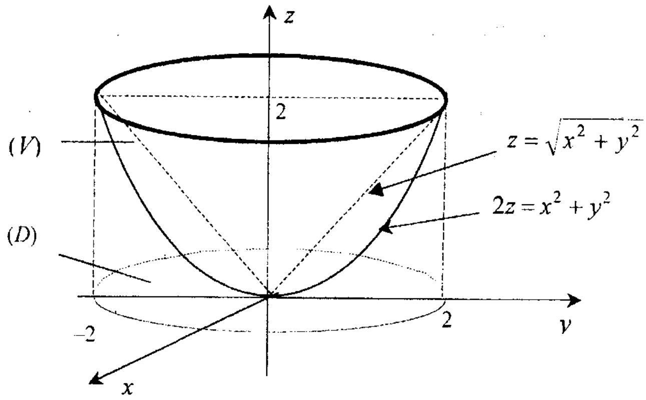

Рисунок 1.11

дуть $z_1=0$ і $z_2=2$. При $z=2$ матимемо $x^2+y^2=4$.

Отже, коло описується системою рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=2, \end{cases}$

радіус якого дорівнює 2. Радіусом круга, що є проекцією тіла на площину xOy, є те ж число 2. Оскільки тіло обмежене знизу параболоїдом $2z=x^2+y^2$ або $z=\dfrac{\rho^2}{2}$, а зверху конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ або $z=\rho$, то будемо мати

$$V=\iiint\limits_{(V)}dv=\iiint\limits_{(V)}\rho d\rho d\varphi dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{2}}^{\rho}dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(\rho\cdot z\Big|_{\frac{1}{2}\rho^2}^{\rho}\right)d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho\left(\rho-\frac{1}{2}\rho^2\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{1}{3}\rho^3-\frac{1}{8}\rho^4\right)\Big|_0^2\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}d\varphi=\frac{4\pi}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}\pi$ (умовних одиниць об'єму).

1.9 Криволінійні інтеграли по координатах

Означення. Якщо кожній точці M деякої плоскої області D відповідає деякий вектор $\boldsymbol{a}$, то кажуть, що в області D задане *векторне поле.*

Проекції вектора $\boldsymbol{a}$ на координатні осі є функціями координат точки M, а саме: $a_x = P(x,y)$, $a_y = Q(x,y)$. Отже, $\boldsymbol{a} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ це *вектор-функція*. Нехай в області D задана деяка гладка крива L_{AB}, що сполучає точки A і B. Виконаємо такі кроки.

1-й крок. Розіб'ємо дугу L_{AB} *довільно* точками A_1, A_2,..., A_{n-1} на n частин $A_{k-1}A_k$; початок кривої A позначимо через A_0, а її кінець B – через A_n. Нехай x_k і y_k – координати точки $A_k (k=1,2,...,n)$. Розглянемо вектор $\Delta\boldsymbol{r}_k = \Delta x_k\boldsymbol{i} + \Delta y_k\boldsymbol{j}$, де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $(k = 1,2,...,n)$. Вектор $\Delta\boldsymbol{r}_k$ – це вектор, що сполучає точки A_{k-1} і A_k.

2-й крок. На кожній дузі $A_{k-1}A_k$ виберемо *довільно* точку $M_k(\xi_k, \eta_k)$ і визначимо в ній вектор-функцію $\boldsymbol{a}(M_k) = P(\xi_k,\eta_k)\boldsymbol{i} + Q(\xi_k,\eta_k)\boldsymbol{j}$, де $k = 1,2,...,n$.

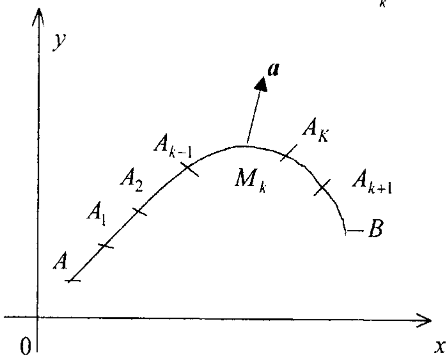

Рисунок 1.12

3-й крок. Складемо скалярний добуток вектора $\boldsymbol{a}(M_k)$ на вектор $\Delta\boldsymbol{r}_k$:

$\boldsymbol{a}(M_k)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_k = P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$, де $k = 1,2,...,n$.

4-й крок. Складемо суму всіх таких добутків

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{a}(M_k) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k). \qquad (1.18)$$

Ця сума називається *інтегральною сумою вектор-функції* $\boldsymbol{a}$ *вздовж кривої* L_{AB}.

5-й крок. В цій сумі перейдемо до границі, якщо всі дуги $A_{k-1}A_k$ стягуються в точку, тобто довжини Δl_k всіх дуг розбиття прямують до нуля.

Означення. Якщо існує скінченна *границя* інтегральних сум (1.18) за умови, що довжини всіх дуг розбиття прямують до нуля, яка не залежить ні від способу розбиття кривої L_{AB} на частини, ні від вибору на кожній із них точки M_k, то ця границя називається *криволінійним інтегралом по координатах* вектор-функції $\boldsymbol{a} = (P; Q)$ вздовж кривої L_{AB} в напрямку від точки A до точки B і позначають символом $\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ або $\int\limits_{L_{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$. Отже, за означенням

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max|\Delta l_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (P_k(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k). \qquad (1.19)$$

Зауваження. 1) Всі властивості *визначеного* інтеграла виконуються і для *криволінійного* інтеграла, зокрема $\int\limits_{L_{AB}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = -\int\limits_{L_{BA}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$.

2) Криволінійний інтеграл по координатах має такий *фізичний* зміст: *робота*, що виконується змінною силою $\boldsymbol{F}$ при переміщенні точки її прикладання вздовж кривої L_{AB} від точки A до точки B чисельно дорівнює криволінійному інтегралові вектора сили $\boldsymbol{F}$ вздовж кривої L_{AB}, тобто

$$A = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \text{ де } \boldsymbol{F} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}. \qquad (1.20)$$

1.10 Обчислення криволінійного інтеграла

Обчислення криволінійного інтеграла зводиться до обчислення *визна-*

ченого інтеграла. Як це зробити ?

1) Нехай крива L_{AB} задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, де $\alpha \le t \le \beta$, причому функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервні і мають неперервні похідні і нехай початковій точці A відповідає значення параметра $t = \alpha$, а кінцевій точці B – значення $t = \beta$. Оскільки функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ задані в точках кривої L_{AB}, то замість x і y можна підставити вирази $x(t)$ і $y(t)$. Враховуючи, що $dx = x'(t)dt$, а $dy = y'(t)dt$, будемо мати формулу

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt, \qquad (1.21)$$

яку неважко вивести.

2) Якщо крива L_{AB} є графіком функції $y = f(x)$, де $a \le x \le b$, причому $x = a$ - абсциса точки A, а $x = b$ – абсциса точки B, то враховуючи те, що $dy = f'(x)dx$ і те, що функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ розглядаються в точках кривої L_{AB}, будемо мати

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x))dx. \qquad (1.22)$$

Отже, криволінійний інтеграл по координатах обчислюється за допомогою однієї із формул (1.21) або (1.22).

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} (2x+y)dx + (x-y)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(2;4)$.

Розв'язування. Зведемо цей інтеграл до визначеного, враховуючи те, що $dy = 2xdx$, і підставляючи замість y в підінтегральний вираз x^2, будемо мати $\int\limits_{L_{AB}} (2x+y)dx + (x-y)dy = \int\limits_{-1}^{2} (2x+x^2)dx + \int\limits_{-1}^{2} (x-x^2)\cdot 2xdx =$

$$= \int\limits_{-1}^{2} (2x + x^2 + 2x^2 - 2x^3)dx = \int\limits_{-1}^{2} (2x + 3x^2 - 2x^3)dx = \left(x^2 + x^3 - \frac{1}{2}x^4\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4 + 8 - 8 - \left(1 - 1 - \frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – чверть півкола $x = 4cost$, $y = 4sint$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язування. Крива L_{AB} задана параметричними рівняннями. Оскільки

$$dx = -4sin\,tdt,\ dy = 4cos\,tdt,\ \text{то} \int\limits_L ydx + xdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (4sint \cdot (-4sint) + 4cost \cdot 4cost)dt =$$

$$= 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2 t - sin^2 t)dt = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,2tdt = 8sin2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8(sin\,\pi - sin\,0) = 0\,.$$

Зауваження. Якщо крива L є замкненою і обмежує деяку область D, а функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні в області D, то справедлива формула

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

де контур L обходять в додатному напрямі. Ця формула називається *формулою Остроградського - Гаусса.*

2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

2.1 Поняття поверхневого інтеграла по площі поверхні і його обчислення

Нехай в точках деякої *гладкої двосторонньої поверхні* (σ_L), що обмежена кусково-гладкою лінією (L), задана неперервна функція $f(x,y,z)$. Поверхня називається *гладкою*, якщо в кожній точці її можна провести дотичну площину і при неперервному русі від точки до точки положення площини змінюється плавно. Виконаємо такі кроки:

1) Розіб'ємо цю поверхню (σ_L) довільним способом на n частин, площі яких відповідно позначимо через $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, ..., \Delta\sigma_n$.

2) На кожній із частин розбиття $(\Delta\sigma_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ і визначимо значення функції в ній, тобто знайдемо $f(x_i,y_i,z_i)$, $(i=1,2,\ldots,n)$.

3) Утворимо добутки $f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta\sigma_i$, $(i=1,2,\ldots,n)$.

4) Складемо суму всіх таких добутків

$$\sum_{i=l}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta\sigma_i.. \qquad (2.1)$$

Цю суму називають *інтегральною сумою функції* $f(x,y,z)$ *по поверхні* (σ_L).

5) Перейдемо в цій сумі до границі за умови, що всі частини розбиття стягуються в точки. Ця границя і називається *поверхневим інтегралом по площі поверхні*.

Означення. Якщо існує скінченна границя при прямуванні діаметрів d_i всіх частин розбиття до нуля, яка не залежить ні від *способу розбиття* поверхні (σ_L) на частини, ні від *вибору в кожній із них точки* M_i, то ця границя називається *поверхневим інтегралом по площі поверхні функції трьох змінних* $f(x,y,z)$ і позначається $\iint\limits_{\sigma_L} f(x,\, y,\, z)d\sigma$.

Отже, $$\iint\limits_{(\sigma_L)} f(x,y,z)d\sigma = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (2.2)$$

Як же обчислити поверхневий інтеграл?

Для цього треба знати, звичайно, ще *рівняння області інтегрування*, тобто поверхні (σ_L). Припустимо, що поверхня (σ_L) взаємно однозначно проектується на координатну площину xOy чи якусь іншу. Тоді рівняння такої поверхні (σ_L) має вигляд

$$z = z(x,y). \qquad (2.3)$$

Оскільки підінтегральна функція $f(x,y,z)$ розглядається в точках $M(x,y,z)$ цієї поверхні, то замість z можна підставити вираз (2.3), тоді дістанемо, що $f(x,y,z) = f(x,y,z(x,y))$ – це деяка функція двох змінних x і y, позначимо її через $F(x,y)$.

Де ця функція визначена? Очевидно, в точках області (D_l), що лежить в площині xOy і є проекцією поверхні (σ_L) на цю площину xOy. Тоді для функції $F(x,y)$ треба розглядати подвійний інтеграл по області (D_l). Зробимо рисунок.

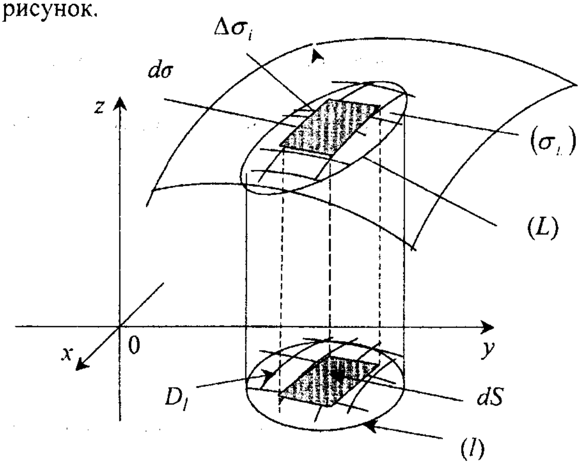

Рисунок 2.1

Чим же замінити елемент площі $d\sigma$ поверхні? Очевидно, виразити через відповідний елемент площі dS, що лежить в області (D_l).

Видно, що dS є *ортогональною проекцією* $d\sigma$ *на площину* xOy. Проведемо в точці $M \in (\sigma_L)$ нормальний вектор до поверхні. Очевидно, що кут нахилу площадки $d\sigma$ до площадки dS дорівнює куту між віссю Oz і нормальним вектором N (нормаллю до поверхні σ_L). Цей кут позначають через γ, тоді $cos\gamma$ є третій напрямний косинус нормалі N в точці (x,y,z). Оскільки $dS = пр_{xy} d\sigma$, то $dS = d\sigma \cos\gamma$, звідки

$$d\sigma = \frac{dS}{\cos\gamma}. \qquad (2.4)$$

Оскільки координати нормального вектора N до поверхні, заданої рівнянням $z = z(x, y)$, визначаються так: $N = (-z'_x, -z'_y;\ 1)$, то

$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}}$, тоді вираз (2.4) є функцією двох змінних x і y.

Отже,матимемо $\iint\limits_{\sigma_L} f(x,y,z)d\sigma = \pm \iint\limits_{(D_l)} \frac{f(x,y,z(x,y))}{\cos\gamma|_{z=z(x,y)}} dxdy, \qquad (2.5)$

при цьому "+" відповідає тому випадку, коли $\gamma < \frac{\pi}{2}$, "$-$", коли $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Зауваження. Якщо поверхня (σ_L) задана рівнянням виду $F(x,y,z) = 0$, то нормальний вектор до поверхні (σ_L) визначається так: $N = (F'_x, F'_y, F'_z)$, де частинні похідні знайдені в точці $M(x,y,z)$, тобто змінні, тоді

$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}.$$

2.2 Поняття потоку векторного поля та його обчислення

1) Нехай в деякій просторовій області (V) задано *векторне поле* $\boldsymbol{a}(M)$,

тобто в кожній точці M цієї області поставлено у відповідність деякий вектор $\boldsymbol{a}$. Координатами вектора $\boldsymbol{a}$ є деякі функції трьох змінних $x,\ y,\ z$, які є координатами точки M, в якій прикладено вектор $\boldsymbol{a}$, тобто

$$\boldsymbol{a} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}\ ,$$

де $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ – декартів базис, а $P,\ Q,\ R$ – це відповідні проекції вектора $\boldsymbol{a}$ на координатні осі.

2) Нехай в цій області (V) задано деяку гладку двосторонню поверхню (σ_L), що обмежена гладким контуром (L). Виберемо певну сторону поверхні за допомогою *одиничного вектора нормалі* $\boldsymbol{n}$ до поверхні в точці М, тобто $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|}$, де N – нормальний вектор поверхні (σ_L), вибравши певний його напрям. Тоді напрямні косинуси вектора $\boldsymbol{n}$ залежатимуть від координат цієї точки M.

3) Складемо скалярний добуток векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{n}$, тобто $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{n}$ – це деяка скалярна величина, що залежить від координат точки M, тобто це функція трьох змінних x,y,z, яка визначена в точках поверхні (σ_L).

4) Введемо для цієї функції трьох змінних її поверхневий інтеграл по площі поверхні, а саме $\iint\limits_{(\sigma_L)} \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma$.

Означення. Поверхневий інтеграл $\iint\limits_{(\sigma_L)} \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma$ називається *потоком векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *через поверхню* (σ_L) *через вибрану сторону цієї поверхні.*

Отже,
$$\Pi = \iint\limits_{\sigma_L} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}d\sigma \text{ або } \Pi = \iint\limits_{\sigma_L} a_n d\sigma, \qquad (2.6)$$

оскільки $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{n} = np_n\,\boldsymbol{a} = a_n$, тому що $|\boldsymbol{n}| = 1$.

Ця величина визначає кількість векторних ліній, що проходять через поверхню (σ_L) за одиницю часу.

Обчислення потоку векторного поля через задану поверхню (σ_L) зводять до подвійного інтеграла за таким алгоритмом:

1) За рівнянням поверхні (σ_L) визначають її нормальний вектор $\boldsymbol{N}$ відповідно:

а) для випадку, коли рівняння поверхні має вигляд $z = z(x,y)$, то $\boldsymbol{N} = (-z'_x, -z'_y; 1)$;

б) для випадку, коли поверхня має рівняння $F(x,y,z) = 0$ нормальний вектор $\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$ або $\boldsymbol{N} = grad\, F$.

2) Визначають одиничний вектор нормалі $\boldsymbol{n} = \pm\frac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|} = \pm\frac{gradF}{|gradF|}$, вибравши знак "+", якщо $cos\gamma > 0$ (це відповідає верхній стороні поверхні).

3) Визначають напрямний косинус $cos\gamma$ цього вектора $\boldsymbol{n}$.

4) Знаходять скалярний добуток $\boldsymbol{an}$ в координатній формі.

5) Утворюють вираз $\left.\frac{\boldsymbol{an}}{|cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)}$, підставивши замість z вираз $z(x,y)$, що береться з рівняння поверхні (σ_L).

6) Визначають область $(D_L)_{xy} = np_{xy}(\sigma_L)$ і одержують формулу для обчислення потоку:

$$\iint_{\sigma_L} \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}\,d\sigma = \iint_{D_L}\left(\left.\frac{\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}}{|cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)}\right)dxdy. \qquad (2.7)$$

Приклад. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a} = (3x - 2y + 2z)\boldsymbol{k}$ через поверхню (σ_L), що є частиною площини $x + y + 2z = 2$, обмеженою координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ *і* $z = 0$.

Розв'язування. Зробимо рисунок.

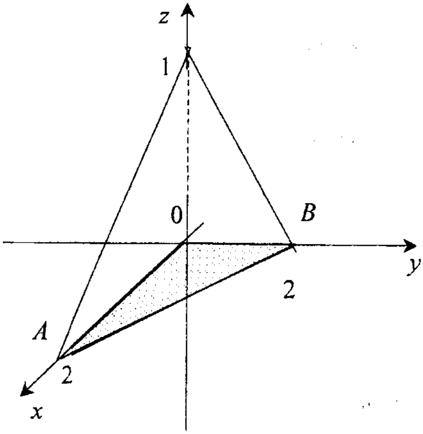

Рисунок 2.2

1) Із рівняння площини $x+y+2z=2 \Rightarrow \boldsymbol{N}=(1;\ 1;\ 2)$, тому що

$F(x,\ y,\ z)=x+y+2z-2=0$;

2) $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}|}$, *де* $|N|=\sqrt{6}$; $\quad \boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j}+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$;

3) $\cos\gamma=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$;

4) $\boldsymbol{an}=0\cdot\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\cdot 0+\dfrac{2}{\sqrt{6}}(3x-2y+2z)=\dfrac{2}{\sqrt{6}}(3x-2y+2z)$;

5) складемо вираз $\left.\dfrac{\boldsymbol{an}}{|\cos\gamma|}\right|_{z=z(x,y)}$, де $z=\dfrac{2-x-y}{2}$, тоді

6) $$\iint\limits_{(\sigma_l)}\boldsymbol{an}\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}(2x-3y+2)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(2x-3y+z)dy=\int\limits_0^2\left[\left(2xy-\frac{3}{2}y^2+2y\right)\Bigg|_0^{2-x}\right]dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left[2x(2-x)-\frac{3}{2}(2-x)^2+2(2-x)\right]dx=\int\limits_0^2(4x-2x^2-6+6x-\frac{3}{2}x^2+4-2x)\ dx=$$

$$=\int\limits_0^2(8x-\frac{7}{2}x^2+4-2)dx=(4x^2-\frac{7}{6}x^3-2x)\Big|_0^2=16-\frac{7}{3}4-4=12-\frac{7\cdot 4}{3}=\frac{8}{3}.$$

Відповідь: $\dfrac{8}{3}$.

2.3 Поняття дивергенції векторного поля

Формула Остроградського-Гаусса

В просторовій області (V), де задано векторне поле $\boldsymbol{a}$, виберемо довільну точку $M(x, y, z)$ і помістимо її в деякий об'ємний окіл (наприклад, кулю достатньо малого радіуса з центром в цій точці). Об'єм цього елементарного тіла позначимо через ΔV, а замкнену поверхню, що його обмежує, позначимо через ($\Delta\sigma$). Розглянемо елементарний потік через цю замкнену поверхню ($\Delta\sigma$), тобто через її зовнішню сторону, тобто $\oiint\limits_{\Delta\sigma} \boldsymbol{an}\, d\sigma$.

Означення. Границя відношення елементарного потоку векторного поля $\boldsymbol{a}$ через замкнену поверхню ($\Delta\sigma$), що обмежує тіло (ΔV) і містить точку M всередині, до величини об'єму (ΔV) цього тіла за умови, що елементарне тіло (ΔV) стягується в точку M, називається *дивергенцією векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *в точці* M і позначається символом $div\, \boldsymbol{a}(M)$.

Отже, $$div\, \boldsymbol{a}(M) = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (\Delta\sigma) \to M}} \frac{\oiint\limits_{(\Delta\sigma)} \boldsymbol{an}\, d\sigma}{\Delta V}. \qquad (2.8)$$

По суті – це об'ємна щільність потоку, тобто розходження векторних ліній поля.

Зауваження. Якщо вектор поля $\boldsymbol{a}$ задається своїми декартовими координатами, тобто

$$\boldsymbol{a} = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k},$$

то справедлива формула $$div\, \boldsymbol{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (2.9)$$

Це формула, за якою знаходять дивергенцію векторного поля $\boldsymbol{a}$ в довільній його точці M.

Теорема. Має місце формула $$\oiint\limits_{(\sigma)} \boldsymbol{an}\, d\sigma = \iiint\limits_{(V)} div\, \boldsymbol{a}\, dV, \qquad (2.10)$$

де (V) - об'ємне тіло, (σ) – поверхня, що його обмежує, а потік векторного поля береться через зовнішню сторону цієї поверхні. Цю формулу називають *формулою Остроградського-Гаусса.*

За цією формулою виходить, що *потік векторного поля* $\boldsymbol{a}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні дорівнює *потрійному інтегралу від дивергенції* цього поля по області, що обмежена цією поверхнею.

Означення. Векторне поле $\boldsymbol{a}$ називається *соленоїдальним*, якщо дивергенція цього поля дорівнює нулю в кожній точці цього поля.

Приклад. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a} = y^2 z\boldsymbol{i} + (3x - 2y + z^2)\boldsymbol{j} + (3x^2 - 4y)\boldsymbol{k}$ через зовнішню сторону замкненої поверхні тіла, що обмежене конічною поверхнею $x^2 + y^2 = z^2$ і площиною $z = 4$.

Розв'язок.

1) Зробимо рисунок.

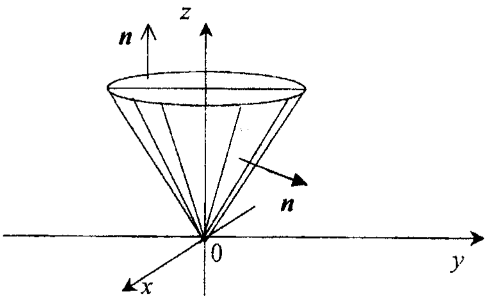

Рисунок 2.3

2) Знайдемо дивергенцію цього поля: так як $P = y^2 z$, $Q = 3x - 2y + z^2$, $R = 3x^2 - 4y$, тоді $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2$, $\quad \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$.

Будемо мати $div\, \boldsymbol{a} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0 - 2 + 0 = -2$.

3) $\displaystyle\oiint_{\sigma} \boldsymbol{a}\boldsymbol{n}\, d\sigma = \iiint_V div\, \boldsymbol{a} dV = \iiint_V (-2)\, dV = -2 \iiint_V dV = -2 \cdot V_{конуса} =$

$$=-2\cdot\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=[H=4,R=4]=-\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 4=-\frac{128}{3}\pi.$$

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через зовнішню сторону циліндричної поверхні $x^2+y^2=4$, обмеженої площинами $z=-1$ і $z=2$, якщо $\boldsymbol{a}=(3x-y+z)\boldsymbol{i}+(2x+y-3)\boldsymbol{j}+(3-2z)\boldsymbol{k}$.

Розв'язування. Замкнемо циліндричну поверхню σ_0 площинами $z=-1$ і $z=2$ до повної поверхні циліндра, яка буде об'єднанням трьох поверхонь σ_0, σ_1 і σ_2, де σ_1 і σ_2 відповідно верхня і нижня основи циліндра, одиничними векторами нормалі яких відповідно будуть $\boldsymbol{n}_1=(0;0;1)$ і $\boldsymbol{n}_2=(0;0;-1)$

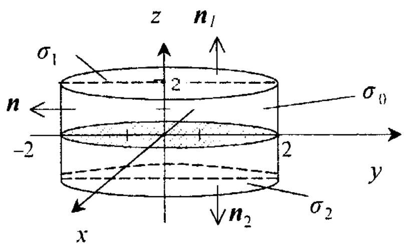

Рисунок 2.4

Тоді $\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{an}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_0}\boldsymbol{an}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_1}\boldsymbol{an}\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2}\boldsymbol{an}\,d\sigma$.

Потік вектора $\boldsymbol{a}$ через замкнену поверхню знайдемо за допомогою формули Остроградського-Гаусса. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial x}=3$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=1$ і $\frac{\partial R}{\partial z}=-2$, то $div\,\boldsymbol{a}=2$,

тоді $\oiint\limits_{\sigma}\boldsymbol{an}\,d\sigma=\iiint\limits_{V}div\,\boldsymbol{a}\,dv=2\iiint\limits_{V}dv=2\cdot V=24\pi$, оскільки радіус основи циліндра дорівнює 2, а висота – 3. Знайдемо ще потоки вектора $\boldsymbol{a}$ через верхню і нижню основи.

$$\iint\limits_{\sigma_1}\boldsymbol{an}_1 d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}(3-2z)\,d\sigma=\iint\limits_{D_{xy}}(3-4)\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-S_{kp}=-4\pi;$$

$$\iint\limits_{\sigma_2}\boldsymbol{an}\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_2}(3-2z)\cdot(-1)\,d\sigma=-\iint\limits_{\sigma_2}(3-2z)\,d\sigma=-\iint\limits_{D_{xy}}(3-2(-1))\,dxdy=$$

$= -5 \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = -5 \cdot S_{kp} = -5 \cdot 4\pi = -20\pi.$

Тоді $\iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{an}\, d\sigma = \oiint\limits_{\sigma} \boldsymbol{an}\, d\sigma - \iint\limits_{\sigma_1} \boldsymbol{an}\, d\sigma - \iint\limits_{\sigma_2} \boldsymbol{an}\, d\sigma = 24\pi + 4\pi + 20\pi = 48\pi$.

Отже, $\iint\limits_{\sigma_0} \boldsymbol{an}\, d\sigma = 48\pi.$

2.4 Циркуляція векторного поля, ротор векторного поля

Нехай в просторі задано векторне поле $\boldsymbol{a}(M)$, де $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$. В цьому векторному полі розглянемо довільну гладку лінію L_{AB}, що з'єднує дві точки A і B.

Розглянемо криволінійний інтеграл по координатах вздовж лінії L_{AB} $\int\limits_{\alpha_{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$. Цей криволінійний інтеграл по координатах такого вигляду називається *лінійним інтегралом вектора* ***a*** *вздовж лінії* L_{AB}.

Означення. Лінійний інтеграл вектора ***a*** вздовж замкненого контуру (L) називається *циркуляцією векторного поля* ***a***.

Отже, $$Ц = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz \quad . \qquad (2.11)$$

Якщо ввести вектор $d\boldsymbol{r}$, координатами якого є dx, dy та dz, тобто $d\boldsymbol{r} = (dx, dy, dz)$, то циркуляція векторного поля ***a*** у векторній формі буде записана так $$Ц = \oint\limits_L \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} \;. \qquad (2.12)$$

Отже, $\oint\limits_L a \cdot dr = \oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.(2.13)

Отже, обчислити циркуляцію векторного поля ***a*** означає по суті обчислити відповідний криволінійний інтеграл.

Виберемо тепер точку $M(x, y, z)$ у векторному полі $\boldsymbol{a}$ і проведемо в цій точці деякий одиничний вектор $\boldsymbol{n}$, помістимо цю точку на деяку плоску площадку так, щоб вона була перпендикулярна вектору $\boldsymbol{n}$. Через (Δl) позначимо контур, що обмежує цю площадку, а через ΔS – площу цієї поверхні. Розглянемо циркуляцію вектора $\boldsymbol{a}$ вздовж контуру (Δl), тобто $\oint\limits_{\Delta l} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}$.

Означення. Границя відношення циркуляції векторного поля $\boldsymbol{a}$ вздовж (Δl) до площі ΔS площадки, що обмежена (Δl), називається *завихреністю векторного поля* $\boldsymbol{a}$ *в точці М.*

Цю границю ще називають проекцією ротора векторного поля $\boldsymbol{a}$ на нормаль $\boldsymbol{n}$ до поверхні і позначають $rot_n \boldsymbol{a}(M)$.

Отже,
$$rot_n\, a(M) = \lim_{\substack{\Delta S \to 0 \\ \Delta\sigma \to M}} \frac{\oint\limits_{\Delta l} a\, dr}{\Delta S}. \qquad (2.14)$$

Означення. *Ротором або вихорем векторного поля* $\boldsymbol{a}$ в точці М називається *вектор*, в напрямі якого завихреність вектора є найбільшою, а модуль цього вектора дорівнює модулю цієї найбільшої завихреності і позначають $rot\,\boldsymbol{a}$.

Якщо $\boldsymbol{a} = (P, Q, R)$, то координати $rot\ \boldsymbol{a}$ є такими:

$$rot\ \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \text{ або } rot\ \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (2.15)$$

Теорема. Має місце формула Остроградського-Стокса

$$\oint\limits_{L} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = \iint\limits_{(\sigma_l)} rot\ \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{n}\, d\sigma, \qquad (2.16)$$

де циркуляція значається по контуру l в додатному напрямі, а (σ_l) довільнагладка поверхня, що натягнута на цей контур.

2.5 Потенціальні векторні поля. Потенціал векторного поля

Означення. Векторне поле $\boldsymbol{a}$ називається *потенціальним* в деякій просторовій області (V), якщо його *циркуляція* вздовж *будь-якого* замкненого контуру, що лежить в цій області, дорівнює *нулеві*.

Як же визначити, чи задане векторне поле $\boldsymbol{a}$ є потенціальним? За означенням це неможливо зробити. Скористаємося такою теоремою.

Теорема. Якщо функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ та $R(x, y, z)$, що є декартовими координатами вектора $\boldsymbol{a}$, мають неперервні частинні похідні в деякійобласті (V), то рівносильними є такі твердження:

а) векторне поле $\boldsymbol{a}$ *потенціальне* в області (V);

б) лінійний інтеграл вектора $\boldsymbol{a}$ не залежить від форми шляху інтегрування, а лише залежить від початкової та кінцевої точок;

в) існує функція $u = u(x, y, z)$ така, що $grad\, u = \boldsymbol{a}$;

г) $rot\, \boldsymbol{a} = 0$.

Означення. Функція u, що задовольняє умову $grad\, u = \boldsymbol{a}$ називається *потенціалом* векторного поля $\boldsymbol{a}$.

Як знайти потенціал векторного поля? Потенціал u визначається за формулою

$$u = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} + C, \qquad (2.17)$$

де за контур інтегрування вибирається ламана, що з'єднує точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і точку $M(x, y, z)$, ланки якої паралельні координатним осям.

Тоді дістанемо формулу:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz + C. \qquad (2.18)$$

Приклад. Встановити, що векторне поле $\boldsymbol{a} = (3yz - 6x)\boldsymbol{i} + (3xz + 10y)\boldsymbol{j} +$ $(3xy - 8z)\boldsymbol{k}$ є потенціальним і встановити потенціал цього поля.

Розв'язування. Знайдемо $rot\ \boldsymbol{a}$. За умовою задачі $P = 3yz - 6x$, $Q = 3xz +$ $+10y$, $R = 3xy - 8z$. Тоді

$$rot\ \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3yz - 6x & 3xz + 10y & 3xy - 8z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(3xy - 8z) - \frac{\partial}{\partial z}(3xz + 10y)\right) -$$

$$-\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy - 8z) - \frac{\partial}{\partial z}(3yz - 6x)\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3xz + 10y) - \frac{\partial}{\partial y}(3yz - 6x)\right) =$$

$= \boldsymbol{i}(3x - 3x) - \boldsymbol{j}(3x - 3x) + \boldsymbol{k}(3x - 3x) = \boldsymbol{0}$. Отже, $rot\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Значить, це векторне поле є потенціальне. Потенціал поля знаходимо за формулою (2.18) $\quad u = \displaystyle\int_{x_0, y_0, z_0}^{x, y, z} (3yz - 6x)dx + (3xz + 10y)dy + (3xy - 8z)dz + C$.

Лінією інтегрування вибираємо ламану $ABCM$.

$$\left[\begin{array}{ll} I\ ланка(AB) \parallel Ox: & \begin{array}{l} y = y_0 \Rightarrow dy = 0, \\ z = z_0 \Rightarrow dz = 0. \end{array} \\ II\ ланка(BC) \parallel Oy: & \begin{array}{l} x = const \Rightarrow dx = 0, \\ z = z_0 \Rightarrow dz = 0. \end{array} \\ III\ ланка(CM) \parallel Oz: & \begin{array}{l} x = const \Rightarrow dx = 0, \\ y = const \Rightarrow dy = 0. \end{array} \end{array}\right]$$

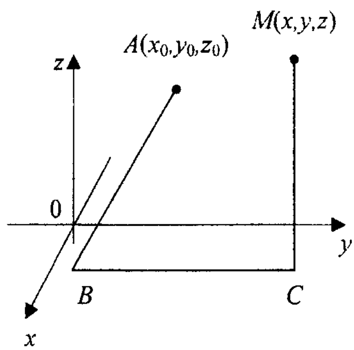

Рисунок 2.5

Тоді $u = \int_{x_0}^{x}(3y_0z_0 - 6x)dx + \int_{y_0}^{y}(3xz_0 + 10y)dy + \int_{z_0}^{z}(3xy - 8z)dz + C =$

$$= \begin{bmatrix} \text{виберемо} \\ z_0 = 0, y_0 = 0 \end{bmatrix} = -\int_0^x 6xdx + \int_0^y 10ydy + \int_0^z (3xy - 8z)dz + C = -3x^2\Big|_{x_0=0}^{x}$$

$$+ 5y^2\Big|_0^y + (3xyz - 4z^2)\Big|_0^z + C = -3x^2 + 5y^2 + (3xyz - 4z^2) + C.$$

Отже, $u = -3x^2 + 5y^2 + (3xyz - 4z^2) + C$.

Перевірка: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3xz - 6x = P$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3xz + 10y = Q$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3xy - 8z = R$.

Відповідь: $u = -3x^2 + 5y^2 + (3xyz - 4z^2) + C$.

3 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

3.1 Перетворення Лапласа. Поняття оригіналу та зображення

Нехай задано функцію $f(t)$ дійсної змінної t, яку ми будемо трактувати як час t. Значення цієї функції можуть бути комплексними.

Означення. *Перетворенням Лапласа функції* $f(t)$ називається функція комплексної змінної $F(p)$, що визначається формулою

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \tag{3.1}$$

де $p = s + i\omega$, $i^2 = -1$ – уявна одиниця.

Інтеграл, що стоїть в правій частині, називається *інтегралом Лапласа* і позначається $L\{f(t)\}$. Звернемо увагу на такі обставини: це є невласний інтеграл з безмежною верхньою межею; цей інтеграл є інтеграл, що залежить від комплексного параметра $p = s + i\omega$.

При яких умовах, накладених на функцію $f(t)$, цей невласний інтерал є збіжним? Тобто при яких умовах функція $F(p)$ існує? Для цього введемо поняття функції-оригіналу.

Означення. Функція $f(t)$ називається *оригіналом*, якщо вона задовольняє такі три умови:

а) $f(t)$ і її похідна $f'(t)$ є кусково-неперервна при $t \geq 0$;

б) $f(t) \equiv 0$ при всіх $t < 0$;

в) існують такі сталі $M > 0$ і $s_0 \geq 0$, що $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для всіх t.

Число s_0 називають *показником росту* функції $f(t)$.

Означення. Якщо $f(t)$ є *функцією-оригіналом*, то її інтеграл Лапласа називається *зображенням* і записують так: $F(p) \div f(t)$ або $f(t) \div F(p)$.

Теорема існування зображення. Для всякого оригіналу $f(t)$ його зображення $F(p)$ визначено в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

3.2 Приклади функцій-оригіналів та їх зображення

1. Одинична функція Хевісайда

Означення. *Одиничною функцією Хевісайда* називається функція, що визначається рівністю

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0, \\ 1, & \text{якщо } t \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

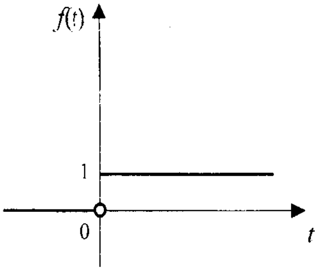

Рисунок 3.1

Її графік має такий вигляд.

Ця функція є, очевидно, оригіналом, бо задовольняє всі умови оригіналу.

Знайдемо її інтеграл Лапласа.

$$L\{1(t)\} = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-pt} d(-pt) = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \text{ якщо } \operatorname{Re} p > 0.$$

Отже,
$$1(t) \risingdotseq \frac{1}{p}. \tag{3.3}$$

Показникова функція-оригінал

Так називається функція $f(t)$, що визначається таким чином:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < 0 \\ e^{at}, & \text{якщо } t \geq 0 \end{cases}$$

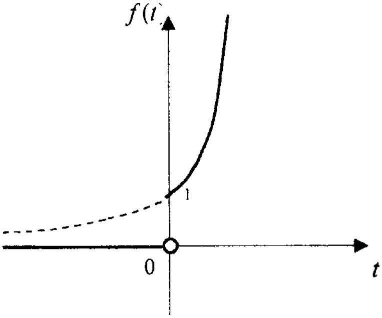

Рисунок 3.2

де a – задане число (дійсне або комплексне).

При a дійсному і додатному графік функції має вказаний вигляд.

Ця функція є оригіналом, бо задовольняє всі три умови оригіналу.

Знайдемо її зображення.

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{at}\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{\infty}e^{-(p-a)t}dt=-\frac{1}{p-a}\int_0^{\infty}e^{-(p-a)t}d(-(a-p)t)=$$

$$=-\frac{1}{p-a}e^{-(p-a)t}\Big|_0^{\infty}=-\frac{1}{p-a}(0-1)=\frac{1}{p-a},$$ якщо $\mathrm{Re}(p-a)>0$, тобто $\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,a$.

Отже, $$e^{at}\div\frac{1}{p-a}. \tag{3.4}$$

Звернемо увагу на таку обставину: два досить різні за конструкціями оригінали, якими є функція Хевісайда $1(t)$ і показникова функція-оригінал мають дуже близькі за конструкціями зображення (3.3) і (3.4).

3.3 Властивості перетворення Лапласа

1. Властивість лінійності

Теорема 1. Якщо $f_1(t)\div F_1(p)$, а $f_2(t)\div F_2(p)$, то $C_1f_1(t)+C_2f_2(t)\div C_1F_1(p)+$ $+C_2F_2(p)$, де C_1 і C_2 – задані числа.

Це очевидно, бо інтеграл Лапласа як невласний інтеграл має цю властивість лінійності, що має місце для визначених інтегралів.

Приведемо ще декілька важливих прикладів на знаходження зображень функцій-оригіналів: $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $\mathrm{sh}\,\omega t$ і $\mathrm{ch}\,\omega t$, де ω – задане число.

З відомих формул Ейлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ та $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi\Rightarrow$

$cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, а $sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$. Тоді $L\{cos\,\omega t\} = \dfrac{1}{2} L\left\{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right\} =$

$$= \frac{1}{2}\left(L\left\{e^{i\omega t}\right\} + L\left\{e^{-i\omega t}\right\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Отже, $$cos\,\omega t \div \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \qquad (3.5)$$

$$L\{sin\,\omega t\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2i\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Отже, $$sin\,\omega t \div \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \qquad (3.6)$$

Аналогічно доводиться, що $ch\,\omega t \div \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$, $sh\,\omega t \div \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$.

2. Теорема зміщення (згасання)

Теорема 2. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t)e^{at} \div F(p - a)$.

За означенням

$$L\left\{f(t)\cdot e^{at}\right\} = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{at}\cdot e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p-a)t}dt = F(p - a).$$

Теорему доведено.

Приклад. Знайти зображення $e^{-2t}cos3t$.

Розв'язування. 1) $cos3t \div \dfrac{p}{p^2 + 9}$; 2) $e^{-2t}cos3t \div \dfrac{p + 2}{(p + 2)^2 + 9}$.

2. Теорема загаювання

Нехай $f(t)$ є функцією-оригіналом. Розглянемо таку функцію:

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < \tau, \\ f(t - \tau), & \text{якщо } t \geq \tau. \end{cases}$$ де τ – задане додатне число.

Їх графіки матимуть такий вигляд:

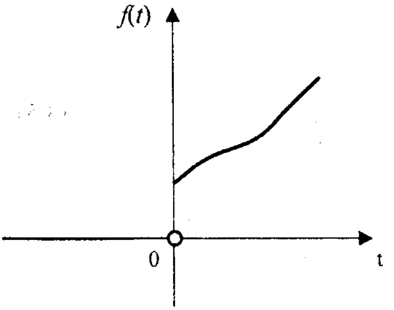

Рисунок 3.3

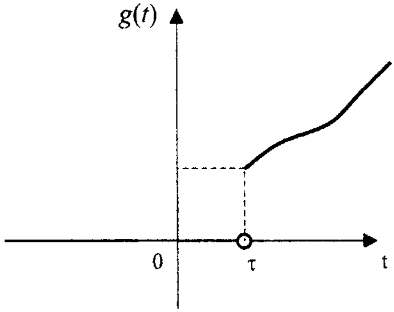

Рисунок 3.4

Отже, якщо функція $f(t)$ описує деякий процес при зміні часу t, то функція $g(t)$ описує той же процес, але із запізненням на τ.

Теорема 3. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau) \div e^{-pt}\cdot F(p)$, де $\tau > 0$.

Доведення. Нехай $f(t) \div F(p)$, тобто $F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt$. За означенням $L(f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)) =$

$$= \int\limits_0^{\infty} f(t-\tau)\cdot e^{-pt}dt = \begin{bmatrix} \text{заміна } t-\tau = x \Rightarrow t = x+\tau; dt = dx \\ \text{при } t=0 \Rightarrow x = -\tau \\ \text{при } t\to\infty \Rightarrow x\to\infty \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_{-\tau}^{\infty} f(x)\cdot e^{-p(x+\tau)}dx = \int\limits_{-\tau}^{0} f(x)\cdot e^{-p(x+\tau)}dx + \int\limits_0^{\infty} f(x)\cdot e^{-px}\cdot e^{-p\tau}dx =$$

$$= 0 + e^{-p\tau}\int\limits_0^{\infty} f(x)\cdot e^{-px}dx = e^{-p\tau}F(p).$$

3. Диференціювання оригіналу

Теорема 4. Якщо $f(t) \div F(p)$, *то* $f'(t) \div pF(p) - f(0)$, $f''(t) \div p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$, … , $f^{(n)}(t) \div p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$.

Ця властивість дуже важлива, бо широко використовується при розв'язуванні диференціальних рівнянь.

5. Диференціювання зображення

Теорема 5. Якщо $f(t) \div F(p)$, то $t \cdot f(t) \div -F'(p)$, $t^n f(t) \div (-1)^n \cdot F^{(n)}(p)$.

Зауваження. На основі цієї властивості $\Rightarrow$ $t^n \div \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

6. Множення зображень

Теорема 6. Якщо $f_1(t) \div F_1(p)$, а $f_2(t) \div F_2(p)$, то

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Означення. Функція $\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ називається *згорткою функцій* $f_1(t)$ *і* $f_2(t)$, яка позначається символом $f_1 * f_2$.

3.4 Розв'язування диференціальних рівнянь операційним методом

Одним із найважливіших застосувань операційного числення є його застосування до розв'язування задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами.

Покажемо, як операційним методом розв'язується задача Коші для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку, а саме:

знайти розв'язок рівняння $$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), \tag{3.7}$$

де a_1 і a_2 – задані числа, що задовольняє початкові умови

$$x(0) = x_0 \text{ і } x'(0) = x_0', \tag{3.8}$$

де x_0 і x_0' – задані числа.

Відомий класичний метод розв'язування цієї задачі в курсі "Диференціальні рівняння". Викладемо ще й операційний метод.

Будемо вважати, що шукана функція $x(t)$, її похідні та права частина $f(t)$ є функціями-оригіналами. Нехай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. За властивістю диференціювання оригіналу матимемо $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0)$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - -px(0) - x'(0)$. Враховуючи (3.8), матимемо $x'(t) \risingdotseq pX(p) - x_0$, $x''(t) \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - x'_0$. Подіємо на обидві частини рівняння (3.7) перетворенням Лапласа. За властивістю лінійності перетворення Лапласа матимемо:

$$L\{x''\} + a_1L\{x'\} + a_2L\{x\} = L\{f(t)\} \text{ або}$$

$$p^2X(p) - px_0 - x'_0 + a_1(pX(p) - x_0) + a_2X(p) = F(p). \tag{3.9}$$

Це рівняння є лінійним алгебраїчним рівнянням відносно $X(p)$. Рівняння (3.9) називається *операторним рівнянням.*

Спростимо його: $(p^2 + a_1p + a_2)X(p) - (px_0 + x_0' + a_1x_0) = F(p)$. Введемо позначення $D(p) = p^2 + a_1p + a_2$. Цю функцію називають *характеристичним многочленом.*

Функція $Q(p) = px_0 + x_0' + a_1x_0$ – це цілий многочлен 1-го степеня, його степінь на одиницю нижче, ніж степінь характеристичного многочлена.

Тоді операторне рівняння (3.9) запишеться так:

$$D(p) \cdot X(p) - Q(p) = F(p). \tag{3.10}$$

Звідси маємо:
$$X(p) = \frac{F(p) + Q(p)}{D(p)}. \tag{3.11}$$

За знайденим зображенням $X(p)$ треба відшукати його оригінал $x(t)$, який і буде шуканим розв'язком задачі Коші.

Оригінал $x(t)$ за відомим зображенням можна знайти в загальному випадку за так званою формулою обернення.

Тут же ми маємо справу з частинним випадком. Звернемо увагу на те, що права частина в (3.11) є правильною раціональною функцією відносно p. Розклавши її на найпростіші раціональні функції, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, і користуючись властивістю лінійності перетворення Лапласа та таблицею зображень, знаходять оригінал для $X(p)$. Це і буде шуканий розв'язок .

Зауваження. Звернемо увагу на таку обставину: початкові умови (3.8) використовуються з самого початку, в результаті відразу знаходимо частинний розв'язок, загального ж розв'язку ми тут зовсім не знаходимо.

Приклад 1. Операційним методом розв'язати рівняння

$$x'' + 3x' + 2x = 3e^{2t}, \text{ якщо } x(0) = -1,\ x'(0) = 2.$$

Розв'язування. Складемо операторне рівняння. На обидві частини рівняння подіємо перетворенням Лапласа. Оскільки $3e^{2t} \div \frac{3}{p-2}$, $x(t) \div X(p)$, $x'(t) \div pX(p) - x(0)$, $x''(t) \div p^2X(p) - px(0) - x'(0)$, то, враховуючи початкові умови, будемо мати $x''(t) \div p^2X(p)+p-2$, $x'(t) \div pX(p)+1$.

Тоді одержимо таке операторне рівняння

$$p^2X(p)+p-2+3(pX(p)+1)+2X(p)=\frac{3}{p-2} \quad \text{або} \quad (p^2+3p+2)\cdot X(p)=\frac{3}{p-2}-p-1;$$

$(p^2+3p+2)X(p)=\dfrac{-p^2+p+5}{p-2}$, звідки $X(p)=\dfrac{-p^2+p+5}{(p-2)(p^2+3p+2)}$. Розклавши квадратний тричлен p^2+3p+2 на множники, матимемо

$X(p)=\dfrac{-p^2+p+5}{(p-2)(p+1)(p+2)}$. Розкладємо цей правильний дріб на суму найпростіших дробів $\dfrac{-p^2+p+5}{(p-2)(p+1)(p+2)}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{C}{p+2}=$

$$=\frac{A(p+1)(p+2)+B(p-2)(p+2)+C(p-2)(p+1)}{(p-2)(p+1)(p+2)}.$$

Звідки $A(p+1)(p+2)+B(p-2)(p+2)+C(p-2)(p+1)=-p^2+p+5$. При $p=2 \Rightarrow$ $12A=3$, $A=\frac{1}{4}$; при $p=-1 \Rightarrow B=-1$; при $p=-2 \Rightarrow 4C=-1$; $C=-\frac{1}{4}$.

Отже, $X(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+2}$. Тоді $x(t)=\frac{1}{4}e^{2t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$.

Перевірка: при $x=0 \Rightarrow x(0)=1$; $x'(t)=\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$;

$x'(0)=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$. $x''(t)=e^{2t}-e^{-t}-e^{-2t}$. Підставивши $x(t)$, $x'(t)$ і $x''(t)$ в ліву частину рівняння, матимемо $e^{2t}-e^{-t}-e^{-2t}+3(\frac{1}{2}e^{2t}+e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t})+$ $+2(\frac{1}{4}e^{2t}-e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t})=3e^{2t}$. Отже, знайдена функція задовольняє дане рівняння і задані початкові умови.

Відповідь: $x(t)=\frac{1}{4}e^{2t}+e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x'+2x+2y=10e^{2t}, \\ y'-2x+y=7e^{2t}, \end{cases}$

якщо $x(0)=1, y(0)=3$.

Розв'язування. Складемо систему операторних рівнянь. Оскільки $x'(t) \risingdotseq pX(p)-x(0)$, то враховуючи початкові умови, будемо мати

$x'(t) \risingdotseq pX(p)-1$. Аналогічно $y'(t) \risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-3$. Тоді одержимо таку систему операторних рівнянь $\begin{cases} pX(p)-1+2X(p)+2Y(p)=\dfrac{10}{p-2}, \\ pY(p)-3-2X(p)+Y(p)=\dfrac{7}{p-2}. \end{cases}$

$$\begin{cases} (p+2)X(p)+2Y(p)=\dfrac{10}{p-2}+1, \\ -2X(p)+(p+1)Y(p)=\dfrac{7}{p-2}+3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (p+2)X(p)+2Y(p)=\dfrac{p+8}{p-2}, \\ -2X(p)+(p+1)Y(p)=\dfrac{3p+1}{p-2}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера. Випишемо визначник системи Δ і допоміжні визначники Δ_1 і Δ_2

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix} = (p+2)(p+1)+4 = p^2+3p+6;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{p+8}{p-2} & 2 \\ \dfrac{3p+1}{p-2} & p+1 \end{vmatrix} = \frac{(p+1)(p+8)}{p-2} - 2\cdot\frac{3p+1}{p-1} = \frac{p^2+3p+6}{p-1};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+2 & \dfrac{p+8}{p-2} \\ -2 & \dfrac{3p+1}{p-2} \end{vmatrix} = \frac{(p+2)(3p+1)}{p-2} + 2\cdot\frac{p+8}{p-2} = \frac{3p^2+9p+18}{p-2}.$$

Тоді $X(p) = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{1}{p-2}$, $Y(p) = \dfrac{3}{p-2}$.

Відновивши за цими зображеннями їх оригінали, будемо мати: $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=3e^{2t}$, при цьому при $x=0 \Rightarrow x(0)=1, y(0)=3$, тобто початкові умови виконуються. Перевіркою переконуємось, що ці дві функції задовольняють дану систему рівнянь.

Відповідь: $x(t)=e^{2t}$, $y(t)=3e^{2t}$.

4 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Задача 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по області (D), обмеженій заданими лініями.

1.1	$f(x,y) = x + x^2y;$	D: $y^2 = x + 1,\ 2y - x = 1.$
1.2	$f(x,y) = x + 2y;$	D: $y = \cos x,\ x - y = \pi/2,\ y = 1.$
1.3	$f(x,y) = x^2 + y;$	D: $y = 3x + 1,\ y = x^2 + 1.$
1.4	$f(x,y) = 2x - y;$	D: $y = e^{-2x},\ y = 1 + x,\ x = 2.$
1.5	$f(x,y) = x^2e^y;$	D: $y = x^3,\ y = 2 - x,\ y = 0.$
1.6	$f(x,y) = x^2;$	D: $y = 8 - 2x,\ y = \sqrt{x+1},\ y = 0.$
1.7	$f(x,y) = x^2y;$	D: $y = x^2,\ y = 2 - x,\ x = 0.$
1.8	$f(x,y) = x + 2y;$	D: $y = \cos x,\ y = x + 1,\ x = \pi/2.$
1.9	$f(x,y) = x^2;$	D: $y = 1 - x^2/4,\ y = (3/2)x - 9,\ x = 0.$
1.10	$f(x,y) = x + 2y^2;$	D: $y = x,\ x + y = 4,\ y = 0.$
1.11	$f(x,y) = 2y;$	D: $y = \sqrt{x},\ x + y = 2,\ y = 0.$
1.12	$f(x,y) = e^x;$	D: $x = \ln y,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2.$
1.13	$f(x,y) = x - y;$	D: $x + y = 6,\ y = 2x,\ y = 0.$
1.14	$f(x,y) = x/(x^2 + y^2);$	D: $y = x,\ y = x^2/2.$
1.15	$f(x,y) = x + y;$	D: $y = 3^x,\ y = 2x + 1.$
1.16	$f(x,y) = x^2 - y^2;$	D: $(y - 1)^2 = x,\ x + y = 1.$
1.17	$f(x,y) = 2y;$	D: $y = 2 - (2/\pi)x,\ x = 0.$
1.18	$f(x,y) = xy;$	D: $y = 2 - x,\ y = 1 + \sqrt{1-x}.$
1.19	$f(x,y) = y - x;$	D: $y = 2 - x,\ y = \sqrt{x},\ y = 0.$
1.20	$f(x,y) = \sin(x + 3y);$	D: $x + y = 1,\ x/2 + y = 1,\ y = 0.$
1.21	$f(x,y) = x - y^2;$	D: $y = 2 - 2x^2,\ y = 2 - 2x.$
1.22	$f(x,y) = ye^x;$	D: $y = x^2,\ y = 3 - 2x,\ y = 0.$
1.23	$f(x,y) = y - 3x;$	D: $y = 2 - x,\ y = x^2/2 - 2,\ x = 0.$
1.24	$f(x,y) = x + 3y;$	D: $y = \cos x,\ y = x + 1,\ x = \pi/6.$

1.25 $f(x,y) = x + 2;$ $D: y = 2^{-x}, y = 1 - x.$

1.26 $f(x,y) = ye^x;$ $D: y = 2 - x, y = x^2, y = 0.$

1.27 $f(x,y) = xy;$ $D: y = 4 - x, y = \sqrt{x+2}, y = 0.$

1.28 $f(x,y) = ye^x;$ $D: y = 2 - x. y = x^2, y = 0.$

1.29 $f(x,y) = 5x + y;$ $D: y = \sin x/2, y = 2 - x/\pi.$

1.30 $f(x,y) = x - 3y;$ $D: y = e^{-x}, y = x + 1, x = -1.$

1.31 $f(x,y) = 2y - 3x;$ $D: y - x = 1, x = (y-1)^2.$

1.32 $f(x,y) = x - 3;$ $D: y = 3\sin 2x, y = 2 - (6/\pi)x, y = 0.$

1.33 $f(x,y) = 2x + y;$ $D: y = 1 - x, y = 2^{-x}, x = 1.$

1.34 $f(x,y) = x - y;$ $D: y = 2 - x, y = \sqrt[3]{x}, y = 0.$

1.35 $f(x,y) = \sin(x - 2y);$ $D: y = (1-x)/2, y = (2-x)/4, y = 0.$)

1.36 $f(x,y) = xy;$ $D: y = 1 + x/2, y = \cos 2x, y = 0.$

1.37 $f(x,y) = x + y;$ $D: y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \pi/4.$

1.38 $f(x,y) = x - 3y;$ $D: y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0.$

1.39 $f(x,y) = xy;$ $D: y = \cos 2x, y = 1 + x/2, y = 0.$

1.40 $f(x,y) = y;$ $D: y = 2\sin x, y = \sin x, x = 0, x = \pi.$

1.41 $f(x,y) = 2x - y;$ $D: y = \cos x, y = \sin x. x = 0, x = \pi/4.$

1.42 $f(x,y) = y^2;$ $D: y = x^3, y^3 = x.$

1.43 $f(x,y) = x^2 + y^2;$ $D: y = 2 - x, y = 2, x = 1 + (y-1)^2.$

1.44 $f(x,y) = 3x - 2y;$ $D: y = \sqrt{x}, y = 2 - x, y = 0.$

1.45 $f(x,y) = x;$ $D: y = \cos x, y = \sin x, y = 0\ (0 \le x \le \pi/2).$

1.46 $f(x,y) = 3x - y;$ $D: y = \cos x, y = \cos(x/2), y = 0.$

1.47 $f(x,y) = ye^x;$ $D: y = x^2, y = 3 - 2x, y = 0.$

1.48 $f(x,y) = 1 + xy;$ $D: y = (x+1)^2, y = x/2 - 1, y = -1.$

1.49 $f(x,y) = x - 3y;$ $D: y = \sqrt{x}, y = (3-x)/2, y = 0.$

1.50 $f(x,y) = y^2;$ $D: y = 3\sin x, y = x - \pi, y = 0.$

Задача 2. Знайти площу фігури, обмеженої даними лініями.

2.1 $y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8x+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=0.$

2.2 $x^2-6x+y^2=0,\ x^2-10x+y^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

2.3 $x^2+y^2=4x,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x.$

2.4 $x^2+y^2-4y=0,\ y=x,\ x=0.$

2.5 $y=\sqrt{x}/2,\ y=1/(2x),\ x=16.$

2.6 $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2}.$

2.7 $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ (y\le 0).$

2.8 $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4.$

2.9 $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=x/\sqrt{3},\ y=x.$

2.10 $x=y^2-2y,\ x+y=0.$

2.11 $\rho=3(1+\cos\varphi),\ \rho=3.$

2.12 $y=2-x,\ y^2=4x+4.$

2.13 $x=8-y^2,\ x=-2y.$

2.14 $y^2=4x-x^2,\ y^2=2x.$

2.15 $\rho=4(1-\cos\varphi),\ \rho=4.$

2.16 $y=4x-x^2,\ y=2x^2-5x.$

2.17 $y=3/2\sqrt{x},\ y=3/(2x),\ x=4.$

2.18 $x=4-y^2,\ x+2y-4=0.$

2.19 $y=\sqrt{24-x^2},\ 2\sqrt{3}y=x^2,\ x=0\ (x\ge 0).$

2.20 $y=3\sqrt{x}/2,\ y=3/(2x),\ x=9.$

2.21 $y^2=4(1-x),\ x^2+y^2=4.$

2.22 $\rho=2(1-\cos\varphi),\ \rho=2.$

2.23 $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4.$

2.24 $y=x^2,\ y=2/(1+x^2).$

2.25 $x^2+4y^2=5,\ y=x^2.$

2.26 $y=3x-x^2/2,\ y=x/4.$

2.27 $\rho=5(1+\sin\varphi),\ \rho=5.$

2.28 $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ x + y^2 = 8y,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0.$

2.29 $y = x^2/4,\ y = 3x - x^2/2.$

2.30 $x^2 + y^2 = 4y,\ x^2 + y^2 = 8y,\ y = x,\ x = 0.$

2.31 $y = 2x^2,\ y = x - x^2/2.$

2.32 $x^2 + y^2 = 6y,\ x^2 + y^2 = 8y,\ y = x,\ y = 0.$

2.33 $y = sin(\pi x/2),\ y^2 = x^3.$

2.34 $x^2 + y^2 = 2y,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = x,\ x = 0.$

2.35 $y = ln\,x,\ y = 2 - ln\,x,\ y = 0.$

2.36 $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 10y,\ y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

2.37 $y = x^2 + 3x,\ y - x = 3.$

2.38 $x^2 + y^2 = 2y,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ y = 0.$

2.39 $y^2 = 5(x-1)^3,\ x = 2.$

2.40 $x^2 + y^2 = 2y,\ x^2 + y^2 = 6y,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0.$

2.41 $y = x^2 + 4x,\ y = (x-2)^2,\ y = 0.$

2.42 $x^2 + y^2 = 4x,\ x^2 + y^2 = 6x,\ y = x,\ y = x/\sqrt{3}.$

2.43 $x = 27 - y^2,\ x = -6y.$

2.44 $x^2 + y^2 = 6y,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = x,\ x = 0.$

2.45 $\rho = 4(1 + cos\,\varphi),\ \rho = 4.$

2.46 $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 8x,\ y = 0,\ y = x/\sqrt{3}.$

2.47 $y = 25/4 - x^2,\ y = x - 5/2.$

2.48 $x^2 + y^2 - 4x = 0,\ x^2 + y^2 = 8x,\ y = 0,\ y = \sqrt{3}x.$

2.49 $\rho = 6(1 - cos\,\varphi),\ \rho = 6.$

2.50 $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 + y^2 = 10x,\ x = 0,\ y = x/\sqrt{3}.$

Задача 3. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об’єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити рисунок даного тіла та його проекції на координатну площину.

3.1 $z = 4\sqrt{y}$, $z = 0$, $x + y = 4$, $x = 0$.

3.2 $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

3.3 $z = 0$, $z = 9 - y^2$, $x^2 + y^2 = 9$.

3.4 $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

3.5 $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = -2$.

3.6 $z = 0$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$, $y = 3 - x$.

3.7 $z = 0$, $2x^2 + 2y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 9$.

3.8 $z = 4 - y^2$, $y = x^2/2$, $z = 0$.

3.9 $z = 3x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.

3.10 $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

3.11 $z = y^2/2$, $2x + 3y - 12 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

3.12 $z = 0$, $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 4$.

3.13 $z = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y = 4$ $(x \geq 0)$.

3.14 $z = 0$, $y + z = 2$, $x^2 + y^2 = 4$.

3.15 $z = 0$, $z = x$, $y = 0$, $y = 4$, $x = \sqrt{25 - y^2}$.

3.16 $z = 0$, $z = 9 - y^2$, $x^2 + y^2 = 9$.

3.17 $z = 0$, $4z = y^2$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$.

3.18 $z = 0$, $z = 4 - x - y$, $x^2 + y^2 = 4$.

3.19 $z = 0$, $z = 1 - y^2$, $x = y^2$, $x = 2y^2 + 1$.

3.20 $z = 0$, $z = 2y^2$, $x^2 + y^2 = 16$.

3.21 $z = 0$, $z = 1 - x^2$, $y = 0$, $y = 3 - x$.

3.22 $z = 0$, $3x^2 + 3y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 1$.

3.23 $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y = 12$ $(x \geq 0)$.

3.24 $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = 2$.

3.25 $z = 0$, $y + z = 2$, $y = x^2$.

3.26 $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = 4$.

3.27 $z = x^2 + y^2$, $z = -1$, $x^2 + y^2 = 9$.

3.28 $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

3.29 $x = y^2 + z^2,\ x = 4.$

3.30 $y = \sqrt{x},\ y = x^2,\ z = x + y,\ z = 0.$

3.31 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3.32 $x + y = 6,\ y = \sqrt{3x},\ z = 4y,\ z = 0.$

3.33 $z = 4x^2 + 4y^2,\ z = -1,\ x^2 + y^2 = 1.$

3.34 $z = \sqrt{x},\ y = x,\ x = 1,\ y = 0,\ z = 0.$

3.35 $z = x^2 + y^2,\ z = 9.$

3.36 $y = \sqrt{x},\ y = x^3,\ z = y^2,\ z = 0.$

3.37 $x^2 + y^2 = 1,\ x + y = 1,\ z = 0,\ z = x + y - 1\ (z \geq 0).$

3.38 $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x^2,\ z = x^2,\ z = 0.$

3.39 $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = y^2.$

3.40 $y = (x-1)^2,\ y = 1 - x^2,\ z = 1 - x,\ z = 0.$

3.41 $y = x^2 + z^2,\ y = 4.$

3.42 $y = x^2,\ y = 2x^2,\ y = 1,\ z = 0,\ z = y.$

3.43 $x = 1 - x^2 - y^2,\ x = 2.$

3.44 $y = x,\ y = 2 - x,\ z = 1 - y^2,\ x = 0,\ z = 0.$

3.45 $x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ z = x^2 + y^2.$

3.46 $y = 2x,\ y = x^2,\ y = 1,\ z = x^2,\ z = 0.$

3.47 $y = 0,\ x^2 + z^2 = 4,\ y = x^2 + z^2.$

3.48 $y = 2x,\ y = 2,\ z = y^2,\ x = 0,\ z = 0.$

3.49 $x = 0,\ x = 9 - y^2,\ z^2 + y^2 = 9.$

3.50 $y^2 = x,\ x = 1,\ z = x^2,\ z = 0.$

***Задача* 4.** Обчислити криволінійний інтеграл вздовж дуги лінії L, заданої рівнянням, від точки A до точки B, або вздовж ламаної ACB, або вздовж замкненої лінії, що її обходять в додатному напрямі. Зробити рисунок.

4.1 $\int\limits_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 + xy)dy;$ $L: y = x^2, A(-1;1), B(2;4).$

4.2 $\int\limits_L ydx - xdy;$ $L: x = 2\cos t, y = \sin t, A(2;0), B(0;2).$

4.3 $\int\limits_L xydx - 2xdy;$ $L: y = x^3, A(-1;1), B(1;1).$

4.4 $\int\limits_L (y^2 + 1)/ydx - x/y^2dy;$ L: пряма, де $A(1;2), B(2;4).$

4.5 $\int\limits_L (xy - x^2)dx + xdy;$ $L: y = 2x^2 - 1, A(0;-1), B(1;1).$

4.6 $\oint\limits_L (x - 2y)dx + (4x + y)dy;$ $L: x = 2\cos t, y = \sin t.$

4.7 $\oint\limits_L (2x - y)dx + (x + 2y)dy;$ $L: x = 4\cos t, y = 3\sin t.$

4.8 $\int\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy;$ $L = OAB$, де $O(0;0), A(2;0), B(4;5).$

4.9 $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x + y)dy;$ $L: x = 3\cos t, y = 3\sin t, A(3;0), B(0;3).$

4.10 $\oint\limits_L (x - y)dx - 2xdy;$ $L -$ контур ΔAOB, де $O(0;0), A(1;0), B(0;1).$

4.11 $\oint\limits_L ydx + (x - y)dy;$ $L: x = 3\cos t, y = 2\sin t\ (0 \le t \le 2\pi).$

4.12 $\int\limits_L (x^2 + y)dx - (y^2 + x)dy;$ $L = ABC$, де $A(1;2), B(1;5), C(3;5).$

4.13 $\int\limits_L y/x\, dx + xdy;$ $L: y = \ln x, A(1;0), B(e;1).$

4.14 $\oint\limits_L (y^2 + 2)dx - 2xdy;$ $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t\ (0 \le t \le 2\pi).$

4.15 $\oint\limits_L xydx - x^2dy;$ $L -$ контур області, обмеженої $y = x^2, y^2 = x.$

4.16 $\int\limits_L (x^2 - y)dx - (x + 1)dy;$ $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, A(2;0), B(0;2).$

4.17 $\int\limits_L (x^3 + 3y)dx + (3x - y^2)dy;$ $L = ACB$, де $A(1;1), C(1;3), B(2;3).$

4.18 $\int\limits_L (y + \ln(x + 1))dx + (x - e^y)dy;$ $L = ACB$, де $A(0;1), C(1;1), B(1;0).$

4.19 $\int\limits_L (xy - x^2)dx + xdy;$ $L: y = 2x^2 + 1, A(0;1), B(-1;3).$

4.20 $\int\limits_L (3-2xy)dx+(x^2-1)dy;$ $L = ACB$, *де* $A(0;0)$, $C(1;1)$, $B(2;0)$.

4.21 $\int\limits_L (xy-3x)dx+(yx+2y)dy;$ L: $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$.

4.22 $\oint\limits_L y/(x^2+y^2)dx - xdy;$ L – *контур* ΔABC, *якщо* $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$.

4.23 $\int\limits_L ydx + x/y\,dy;$ L: $y = e^{-x}$, $A(0;1)$, $B(-1;e)$.

4.24 $\oint\limits_L (x^2-2y)dx+2xdy;$ L: $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$.

4.25 $\oint\limits_L (2x-y)dx+(x+2y)dy;$ L: $x = 3\cos t$, $y = 5\sin t$.

4.26 $\oint\limits_L (3-2y)dx+(2x-4)dy;$ L: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$.

4.27 $\int\limits_L x^2/(y+2)dx+(x+y)dy;$ $L = ACB$, *де* $A(-1;2)$, $c(-1;1)$, $B(1;1)$.

4.28 $\int\limits_L (6x-2y)dx-3xdy;$ $L = ACB$, *де* $A(-1;1)$, $C(0;0)$, $B(1;1)$.

4.29 $\int\limits_L (x-2y)dx+(x+y)dy;$ L: $y = x^2-1$, $A(0;-1)$, $B(2;3)$.

4.30 $\oint\limits_L (3x-y)dx-ydy;$ L: $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4.31 $\oint\limits_L 2xydx+(2x^2-y)dy;$ L – *границя області* D: $y = 2x^2$, $y = 1-x$.

4.32 $\int\limits_L (2x-y)dx+(x+3y)dy;$ $L = ACB$, *де* $A(-1;1)$, $C(1;1)$, $B(0;2)$.

4.33 $\int\limits_L (3x-y)dx+4xdy;$ $L = ACB$, *де* $A(-1;2)$, $C(1;2)$, $B(0;1)$.

4.34 $\int\limits_L 2xydx-x^2ydy;$ $L = ACB$, *де* $A(-2;1)$, $C(0;1)$, $B(1;2)$.

4.35 $\int\limits_L x^2/y^2\,dx - y^2/x^2\,dy;$ L: $y = \sqrt{x}$, $A(1;1)$, $B(4;2)$.

4.36 $\oint\limits_L (y-2x)dx+(x-2y)dy;$ L: $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

4.37 $\int\limits_L (3y-xy^2)dx+xydy;$ L: $y = 3x+2$, $A(-1;-1)$, $B(-2;-4)$.

4.38 $\int\limits_L (3y-xy^2)dx+(3x-x^2y)dy;$ $L = ACB$, *де* $A(-1;2)$, $C(1;2)$, $B(1;3)$.

4.39 $\int\limits_L (x^2-y^2)dx+xydy;$ $L=ACB$, де $A(-2;1)$, $C(0;-1)$, $B(1;0)$.

4.40 $\int\limits_L (xy-x^2)dx+x^2dy;$ L: $y=\sqrt{x}$, $A(0;0)$, $B(4;2)$.

4.41 $\int\limits_L (y+3)dx-(x-y)dy;$ L: $x=2\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le \pi)$.

4.42 $\int\limits_L (2x^2-3y)dx+(y^3-3x)dy;$ $L=ACB$, де $A(0;1)$, $C(1;1)$, $B(1;3)$.

4.43 $\int\limits_L (x^2-y)dx-(x+y)dy;$ L: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$ $(0\le t\le \pi/2)$.

4.44 $\int\limits_L (y^2-xy)dx+(2xy-x^2/2)dy;$ $L=ACB$: $A(0;2)$, $C(2;2)$, $B(2;4)$.

4.45 $\oint\limits_L (x-2y)dx+(2x+3y)dy;$ L: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

4.46 $\int\limits_L 2ydx+3x/ydy;$ L: $y=e^{-x}$, $A(0;1)$, $B(-1;e)$.

4.47 $\int\limits_L (x-y)dx+(2x-y)dy;$ L: $y=-2x^2+1$, $A(0;1)$, $B(-1;1)$.

4.48 $\int\limits_L (7x-y)dx+(x+3y)dy;$ $L=ACB$: $A(-1;1)$, $C(0;1)$, $B(2;-1)$.

4.49 $\int\limits_L x\sqrt{1+y}\,dx+y\sqrt{x}\,dy;$ L: $y=x^2$, $A(0;0)$, $B(2;4)$.

4.50 $\int\limits_L (3y^2-xy)dx+3xdy;$ $L=ACB$: $A(-2;-1)$, $C(0;1)$, $B(1;1)$.

Задача 5. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через верхню сторону площини (σ), обмеженої координатними площинами. Знайти циркуляцію вздовж контура, що обмежує (σ).

5.1 $\boldsymbol{a}=3x\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+(y-2z)\boldsymbol{k};$ $2x+y+z=2$.

5.2 $\boldsymbol{a}=(5x+2y+3z)\boldsymbol{k};$ $x+y+3z-3=0$.

5.3 $\boldsymbol{a}=(3x-y)\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+(x-z)\boldsymbol{k};$ $x-3y+3z=3$.

5.4 $\boldsymbol{a}=(3x+4y+2z)\boldsymbol{j};$ $x+y+2z-4=0$.

5.5 $\boldsymbol{a}=(2x-z)\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+(x-z)\boldsymbol{k};$ $x+2y+z=2$.

5.6 $\boldsymbol{a}=(2x+z)\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+(y-z)\boldsymbol{k};$ $3x+3y+z=3$.

5.7	$\boldsymbol{a} = (2x - y + z)\boldsymbol{i};$	$-x + 2y + z - 4 = 0.$
5.8	$\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - 3z\boldsymbol{j} + (x - 2y)\boldsymbol{k};$	$3x + 6y + 2z = 6.$
5.9	$\boldsymbol{a} = (2x + 4y + 3z)\boldsymbol{k};$	$3x + 2y + 3z - 6 = 0.$
5.10	$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} + (3x - y)\boldsymbol{j} + (x + 2z)\boldsymbol{k};$	$x + 2y + z = 2.$
5.11	$\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} - 3x\boldsymbol{j} + (x - y - 2z)\boldsymbol{k};$	$x - 3y + 3z = 3.$
5.12	$\boldsymbol{a} = (2x + 3y - 3z)\boldsymbol{j};$	$2x - 3y + 2z = 6.$
5.13	$\boldsymbol{a} = (3y - z)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k};$	$x - 3y + 3z = 3.$
5.14	$\boldsymbol{a} = (x + 2y - z)\boldsymbol{i};$	$-x + 2y + 2z - 4 = 0.$
5.15	$\boldsymbol{a} = (x - z)\boldsymbol{i} + (y + z)\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k};$	$x + y + z = 2.$
5.16	$\boldsymbol{a} = 2y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + (3z - y)\boldsymbol{k};$	$x + 2y + 2z = 2.$
5.17	$\boldsymbol{a} = (x - 3y + 7z)\boldsymbol{k};$	$2x + y + z - 4 = 0.$
5.18	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - 4x\boldsymbol{j} + (2z - y)\boldsymbol{k};$	$2x + y + 2z - 4 = 0.$
5.19	$\boldsymbol{a} = (x - y)\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - 4x\boldsymbol{k};$	$2x + y + 2z = 2$
5.20	$\boldsymbol{a} = (y - z + 2x)\boldsymbol{j};$	$2x - y + 2z - 2 = 0.$
5.21	$\boldsymbol{a} = (2x - z)\boldsymbol{i} + (2y - x)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k};$	$3x - 6y + 2z = 6.$
5.22	$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k};$	$x + 3y + 6z = 6.$
5.23	$\boldsymbol{a} = (3x - z)\boldsymbol{i} + (2z - y)\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k};$	$x + 2y + 2z = 2.$
5.24	$\boldsymbol{a} = (x - y + 2z)\boldsymbol{i};$	$x + y + z - 2 = 0.$
5.25	$\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} - 4x\boldsymbol{j} + (z - 2x)\boldsymbol{k};$	$x - y + 2z = 2.$
5.26	$\boldsymbol{a} = 3y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (2z - x)\boldsymbol{k};$	$2x + y + z = 2.$
5.27	$\boldsymbol{a} = (4x - y - 2z)\boldsymbol{i};$	$2x + y + z = 2.$
5.28	$\boldsymbol{a} = (x - y)\boldsymbol{i} - 3z\boldsymbol{j} + (3y - z)\boldsymbol{k};$	$3x - 2y + 2z = 6.$
5.29	$\boldsymbol{a} = (5x + 2y - 3z)\boldsymbol{j};$	$3x - 3y + z = 3.$
5.30	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + (y - x)\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k};$	$3x - 6y + 2z = 6.$
5.31	$\boldsymbol{a} = (y - z)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k};$	$x + 2y + z = 2.$
5.32	$\boldsymbol{a} = (3x + y)\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k};$	$-x + 2y + z = 4.$
5.33	$\boldsymbol{a} = (3x - 2y + z)\boldsymbol{k};$	$2x - y + 2z = 4.$
5.34	$\boldsymbol{a} = (2x + 2y - 3z)\boldsymbol{j};$	$x - y + z = 2.$
5.35	$\boldsymbol{a} = (3x - z)\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k};$	$3x - y + z = 3.$

5.36	$\boldsymbol{a} = (x+z)\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$;	$2x + y + 3z = 6$.
5.37	$\boldsymbol{a} = (3x-2z)\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + (x-z)\boldsymbol{k}$;	$4x - y + 2z = 4$.
5.38	$\boldsymbol{a} = (4x - y + 2z)\boldsymbol{i}$;	$x - 2y + z = 4$.
5.39	$\boldsymbol{a} = (y-2z)\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} - 2y\boldsymbol{k}$;	$x + 3y + z = 3$.
5.40	$\boldsymbol{a} = (x-z)\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x-2)\boldsymbol{k}$;	$-x + y + z = 3$.
5.41	$\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + (3z-4)\boldsymbol{k}$;	$2x - y + 2z = 2$.
5.42	$\boldsymbol{a} = (5x - 2y + 3z)\boldsymbol{j}$;	$3x - y + 3z = 3$.
5.43	$\boldsymbol{a} = (x+2y)\boldsymbol{i} - 4z\boldsymbol{k}$;	$x + y + z = 4$.
5.44	$\boldsymbol{a} = z\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$;	$x - y + z = 2$.
5.45	$\boldsymbol{a} = y\boldsymbol{i} - 5x\boldsymbol{k}$;	$3x - 3y + z = 3$.
5.46	$\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$;	$2x - y + z = 4$.
5.47	$\boldsymbol{a} = -x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} - 3y\boldsymbol{k}$;	$x - y + z = 2$.
5.48	$\boldsymbol{a} = (-3x + 4y + 5z)\boldsymbol{k}$;	$3x - 3y + z = 6$.
5.49	$\boldsymbol{a} = -y\boldsymbol{j} + (3z - x)\boldsymbol{k}$;	$x - 2y + z = 2$.
5.50	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + (3z+1)\boldsymbol{k}$;	$2x - 2y + z = 2$.

Задача 6. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{a}$ через зовнішню сторону бічної поверхні або циліндра, або конуса, або сфери, що відрізається заданими площинами.

6.1	$\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$;	$z^2 = x^2 + y^2$;	$z = 1$;	$z = 3$.
6.2	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$;	$x^2 + y^2 = 9$;	$z = -1$;	$z = 2$.
6.3	$\boldsymbol{a} = (x-2y)\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - 2z\boldsymbol{k}$;	$x^2 + y^2 = z^2$;	$z = 2$.	
6.4	$\boldsymbol{a} = (x+y)\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$;	$x^2 + y^2 = 4$;	$z = 0$;	$z = 3$.
6.5	$\boldsymbol{a} = (x+y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$;	$x^2 + y^2 = 1$;	$z = -2$;	$z = 2$.
6.6	$\boldsymbol{a} = (x-z)\boldsymbol{i} + (2y-1)\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$;	$x^2 + z^2 = y^2$;	$y = 2$.	
6.7	$\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + (3z-1)\boldsymbol{k}$;	$x^2 + y^2 = 9$;	$y = -2$;	$z = 1$.
6.8	$\boldsymbol{a} = 3y\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$;	$x^2 + z^2 = y^2$;	$y = 3$.	
6.9	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$;	$x^2 + y^2 = 4$;	$z = 0$;	$z = 4$.
6.10	$\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$;	$y^2 + z^2 = x^2$;	$x = 3$;	

6.11	$\boldsymbol{a}=(x-y)\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=y^2;$	$y=-2;$	
6.12	$\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+3x\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=4;$	$z=-1;$	$z=3.$
6.13	$\boldsymbol{a}=(x+xy)\boldsymbol{i}+(3z-2)\boldsymbol{k};$	$y^2+z^2=4;$	$x=0;$	$x=2.$
6.14	$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+(2y-x)\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=z^2;$	$z=3.$	
6.15	$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}+(4z-y)\boldsymbol{k};$	$y^2+z^2=y^2;$	$y=1.$	
6.16	$\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+(x+2y)\boldsymbol{j}-2z\,\boldsymbol{k};$	$y^2+z^2=4;$	$x=-1;$	$x=2.$
6.17	$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+(y+z)\boldsymbol{j}+(z-2y)\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=y^2;$	$y=2.$	
6.18	$\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+(y-z)\boldsymbol{j}+(z+3\,\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=z^2;$	$z=4.$	
6.19	$\boldsymbol{a}=-y\boldsymbol{i}+(2y-x)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=4;$	$y=-1;$	$y=4.$
6.20	$\boldsymbol{a}=(x+xy^2)\boldsymbol{i}+(y+xz)\boldsymbol{j};$	$x^2+z^2=y^2;$	$y=3.$	
6.21	$\boldsymbol{a}=(y+yx^2)\boldsymbol{i}-3z^2\,\boldsymbol{k};$	$y^2+z^2=x;$	$x=2;$	$x=4.$
6.22	$\boldsymbol{a}=(x+z)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}-3z\,\boldsymbol{k};$	$y^2=x^2+z^2;$	$y=-2.$	
6.23	$\boldsymbol{a}=y^2\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{k};$	$y^2=x^2+z^2;$	$y=2.$	
6.24	$\boldsymbol{a}=(x+z)\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2+z^2=2;$	$z=1.$	
6.25	$\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{j}+(3x+2z)\boldsymbol{k};$	$y^2+z^2=x^2;$	$x=2.$	
6.26	$\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+(2z-1)\boldsymbol{k};$	$y^2+z^2=9;$	$x=-1;$	$x=3.$
6.27	$\boldsymbol{a}=(2x-y)\boldsymbol{i}+(2y+1)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k};$	$z^2=x^2+y^2;$	$z=2.$	
6.28	$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k};$	$z^2+x^2=9;$	$y=-2;$	$y=2.$
6.29	$\boldsymbol{a}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=1;$	$z=0;$	$z=2.$
6.30	$\boldsymbol{a}=xy^2\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k};$	$z^2=x^2+y^2;$	$z=1.$	
6.31	$\boldsymbol{a}=y\boldsymbol{j}+(2z-x)\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=9;$	$y=0;$	$y=4.$
6.32	$\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=z^2;$	$z=3.$	
6.33	$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+(3y-z)\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=4;$	$z=-2;$	$z=3.$
6.34	$\boldsymbol{a}=(x-y)\boldsymbol{i}+(y-x)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=1;$	$y=-1;$	$y=4.$
6.35	$\boldsymbol{a}=(y-x)\boldsymbol{i}+(2y-3z)\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=y^2;$	$y=4.$	
6.36	$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=1;$	$z=-1;$	$z=3.$
6.37	$\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}+3xyz\boldsymbol{k};$	$x^2+y^2=4;$	$y=-2;$	$y=1.$
6.38	$\boldsymbol{a}=xy\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+(3z-x)\boldsymbol{k};$	$z^2=x^2+y^2;$	$z=3.$	
6.39	$\boldsymbol{a}=2x\boldsymbol{i}-3y\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k};$	$x^2+z^2=16;$	$z=-1;$	$y=3.$

6.40	$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k};$	$x^2 = y^2 + z^2;$	$x = 4.$	
6.41	$\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k};$	$x^2 + y^2 = 4;$	$z = -1;$	$z = 3.$
6.42	$\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k};$	$x^2 = y^2 + z^2;$	$x = 4.$	
6.43	$\boldsymbol{a} = (3x - y)\boldsymbol{i} + (x + 2)\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k};$	$x^2 + y^2 = 1;$	$z = 1;$	$z = 4.$
6.44	$\boldsymbol{a} = (y - z)\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k};$	$x^2 + z^2 = 9;$	$y = -2;$	$y = 3.$
6.45	$\boldsymbol{a} = 3x\boldsymbol{i} - 2y^2\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k};$	$x^2 + y^2 = 1;$	$z = 0;$	$z = 2.$
6.46	$\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + (3z - y)\boldsymbol{k};$	$x^2 + z^2 = y^2;$	$y = 2.$	
6.47	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k};$	$x^2 + z^2 = 4;$	$y = -2;$	$y = 1.$
6.48	$\boldsymbol{a} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k};$	$x^2 + y^2 = 4;$	$x = 4.$	
6.50	$\boldsymbol{a} = y^2\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k};$	$x^2 + z^2 = 9;$	$y = 3;$	$y = 5.$

Задача 7. Встановити, чи векторне поле $\boldsymbol{a}$ є соленоїдальним і потенціальним. У випадку потенціального поля знайти його потенціал.

7.1 $\boldsymbol{a} = (2xyz - 3)\boldsymbol{i} + (x^2z + 4)\boldsymbol{j} + (x^2y - 5)\boldsymbol{k}.$

7.2 $\boldsymbol{a} = (9x + 5yz)\boldsymbol{i} + (9y + 5x\overset{z}{\cancel{y}})\boldsymbol{j} + (9z + 5xy)\boldsymbol{k}.$

7.3 $\boldsymbol{a} = (3x^2 - 3y - 2)\boldsymbol{i} + (z^2 + 3x + 1)\boldsymbol{j} + (2yz - 3)\boldsymbol{k}.$

7.4 $\boldsymbol{a} = (3x - yz)\boldsymbol{i} + (3y + xz)\boldsymbol{j} + (3z - xy)\boldsymbol{k}.$

7.5 $\boldsymbol{a} = (2xy^3z - 3)\boldsymbol{i} + (3x^2y^2z + 2z^2)\boldsymbol{j} + (x^2y^3 + 4yz)\boldsymbol{k}.$

7.6 $\boldsymbol{a} = (2x - 3yz)\boldsymbol{i} + (2y - 3xz - 2)\boldsymbol{j} + (1 + 2z - 3xy)\boldsymbol{k}.$

7.7 $\boldsymbol{a} = (3 + 4x - 7yz)\boldsymbol{i} + (4y - 7xz)\boldsymbol{j} + (4z - 7xy - 2)\boldsymbol{k}.$

7.8 $\boldsymbol{a} = (3x^2y^2z - 3yz)\boldsymbol{i} + (2x^3yz \quad 3xz + 4y)\boldsymbol{j} + (x^3y^2 - 3xy)\boldsymbol{k}.$

7.9 $\boldsymbol{a} = (4yz - 5x)\boldsymbol{i} + (4xz - 5y)\boldsymbol{j} + (4xy - 5z)\boldsymbol{k}.$

7.10 $\boldsymbol{a} = 2xe^{yz}\boldsymbol{i} + x^2ze^{yz}\boldsymbol{j} + x^2ye^{yz}\boldsymbol{k}.$

7.11 $\boldsymbol{a} = (3x^2 + 3y + 5)\boldsymbol{i} + (z^2 + 3x)\boldsymbol{j} + (2yz + 5)\boldsymbol{k}.$

7.12 $\boldsymbol{a} = (2yz - x)\boldsymbol{i} + (2xz - 4)\boldsymbol{j} + (2xy - z)\boldsymbol{k}$.

7.13 $\boldsymbol{a} = (6x - 5yz)\boldsymbol{i} + (6y - 5xz)\boldsymbol{j} + (6z - 5xy + 4)\boldsymbol{k}$.

7.14 $\boldsymbol{a} = yz(2x + y + z)\boldsymbol{i} + xz(x + 2y + z)\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\boldsymbol{k}$.

7.15 $\boldsymbol{a} = (3x^2 + 3y + 5)\boldsymbol{i} + (z^2 + 3x - 2)\boldsymbol{j} + (2yz + 7)\boldsymbol{k}$.

7.16 $\boldsymbol{a} = (4x - 9yz)\boldsymbol{i} + (4y - 9xz)\boldsymbol{j} + (4z - 9xy)\boldsymbol{k}$.

7.17 $\boldsymbol{a} = 1/z\boldsymbol{i} - 3/z\boldsymbol{j} + (3y - x - z^3)/z^2\boldsymbol{k}$.

7.18 $\boldsymbol{a} = (12x + yz)\boldsymbol{i} + (12y + xz)\boldsymbol{j} + (12z + xy)\boldsymbol{k}$.

7.19 $\boldsymbol{a} = (x^2 - 2yz)\boldsymbol{i} + (y^2 - 2xz)\boldsymbol{j} + (z^2 - 2xy)\boldsymbol{k}$.

7.20 $\boldsymbol{a} = yz\cos xy\boldsymbol{i} + xz\cos xy\boldsymbol{j} + \sin xy\boldsymbol{k}$.

7.21 $\boldsymbol{a} = (10x - 3yz)\boldsymbol{i} + (10y - 3xz)\boldsymbol{j} + (10z - 3xy)\boldsymbol{k}$.

7.22 $\boldsymbol{a} = (yz - 6xy + 2z^2)\boldsymbol{i} + (xz - 3x^2)\boldsymbol{j} + (xy + 4xz)\boldsymbol{k}$.

7.23 $\boldsymbol{a} = e^x\sin y\boldsymbol{i} + e^x\cos y\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

7.24 $\boldsymbol{a} = (2xy + z)\boldsymbol{i} + (x^2 - 2y)\boldsymbol{j} + x\cdot\boldsymbol{k}$.

7.25 $\boldsymbol{a} = (8x - 5yz)\boldsymbol{i} + (8y - 5xz)\boldsymbol{j} + (8z - 5xy)\boldsymbol{k}$.

7.26 $\boldsymbol{a} = (x + 2yz)\boldsymbol{i} + (y + 2xz)\boldsymbol{j} + (z + 2xy)\boldsymbol{k}$.

7.27 $\boldsymbol{a} = (6x + 7yz)\boldsymbol{i} + (6y + 7xz)\boldsymbol{j} + (6z + 7xy)\boldsymbol{k}$.

7.28 $\boldsymbol{a} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$.

7.29 $\boldsymbol{a} = (2xy - 5)\boldsymbol{i} + (x^2 + 4z)\boldsymbol{j} + (3z^2 + 4y)\boldsymbol{k}$.

7.30 $\boldsymbol{a} = (2y^2 + 3z\sin xz)\boldsymbol{i} + (2xy + 5)\boldsymbol{j} + 3x\cos z\boldsymbol{k}$.

7.31 $\boldsymbol{a} = (3x^2y^2z - 5)\boldsymbol{i} + (2x^3yz + 4y)\boldsymbol{j} + (x^3y^2 + 8z - 3)\boldsymbol{k}$.

7.32 $\boldsymbol{a} = 2xzy^2e^{x^2}\boldsymbol{i} + (2yz^{e^{x^2}} + 5)\boldsymbol{j} + (y^{2e^{x^2}} - 6z)\boldsymbol{k}$.

7.33 $\boldsymbol{a} = (6xyz - 10x)\boldsymbol{i} + (3x^2z - 8yz^2 + 4)\boldsymbol{j} + (3x^2y - 8y^2z + 1)\boldsymbol{k}$.

7.34 $\boldsymbol{a} = (2x - sin(x - yz))\boldsymbol{i} + (z - 5 + sin(x - yz))\boldsymbol{j} + (ysin(x - yz) + 4z)\boldsymbol{k}$.

7.35 $\boldsymbol{a} = (y^2z - 5y + 4)\boldsymbol{i} + (2xyz - 5x)\boldsymbol{j} + (xy^2 + 8z)\boldsymbol{k}$.

7.36 $\boldsymbol{a} = (5x - 4yz)\boldsymbol{i} + (5y - 4xz)\boldsymbol{j} + (5z - 4xy)\boldsymbol{k}$.

7.37 $\boldsymbol{a} = (3y^2z - 5)\boldsymbol{i} + (6xyz + 2z)\boldsymbol{j} + (3xy^2 + 2y - 4)\boldsymbol{k}$.

7.38 $\boldsymbol{a} = (8x - 5yz + 2)\boldsymbol{i} + (8y - 5xz + 3)\boldsymbol{j} + (8z - 5xy - 7)\boldsymbol{k}$.

7.39 $\boldsymbol{a} = (2x - 3yz + 1)\boldsymbol{i} + (2y - 3xz)\boldsymbol{j} + (2z - 3xy + 5)\boldsymbol{k}$.

7.40 $\boldsymbol{a} = (5x - 6zy + 1)\boldsymbol{i} + (5y - 6xz)\boldsymbol{j} + (5z - 6xy - 3)\boldsymbol{k}$.

7.41 $\boldsymbol{a} = (3x^2 + 3y)\boldsymbol{i} + (z^2 + 3x - 4)\boldsymbol{j} + (2yz - 4)\boldsymbol{k}$.

7.42 $\boldsymbol{a} = 2xyz\boldsymbol{i} + (x^2z - 5)\boldsymbol{j} + (x^2y + 7)\boldsymbol{k}$.

7.43 $\boldsymbol{a} = (x^2 + 2yz + 1)\boldsymbol{i} + (y^2 + 2xz)\boldsymbol{j} + (z^2 + 2xy - 3)\boldsymbol{k}$.

7.44 $\boldsymbol{a} = (2xy + z - 1)\boldsymbol{i} + (x^2 - 2y)\boldsymbol{j} + (x + 5)\boldsymbol{k}$.

7.45 $\boldsymbol{a} = (2xyz + 5)\boldsymbol{i} + (x^2z - 4)\boldsymbol{j} + (x^2y + 6)\boldsymbol{k}$.

7.46 $\boldsymbol{a} = (2xy + 1)\boldsymbol{i} + (x^2 + 4z + 2)\boldsymbol{j} + (3z^2 + 4y - 1)\boldsymbol{k}$.

7.47 $\boldsymbol{a} = (z + 2xy - 3)\boldsymbol{i} + (x^2 - 2y + 1)\boldsymbol{j} + (x - 7)\boldsymbol{k}$.

7.48 $\boldsymbol{a} = e^x siny\boldsymbol{i} + (e^x cosy - 4)\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$.

7.49 $\boldsymbol{a} = (x + 2 + 2yz)\boldsymbol{i} + (y - 1 + 2xz)\boldsymbol{j} + (z + 5 + 2xy)\boldsymbol{k}$.

7.50 $\boldsymbol{a} = (3x - 4yz + 1)\boldsymbol{i} + (3y + 2 - 4xz)\boldsymbol{j} + (3z + 5 - 4xy)\boldsymbol{k}$.

Задача 8. Методом операційного числення знайти частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

8.1 $x'' - 9x = e^{-2t}$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

8.2	$x'' + x = 6e^{-t};$	$x(0) = 3,$	$y'(0) = 1.$
8.3	$x'' - x' = t;$	$x(0) = 0,$	$x'(0) = 1.$
8.4	$x'' - x' - 2x = -2(t + 1);$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = 1.$
8.5	$x'' - 9x = sint;$	$x(0) = -3,$	$x'(0) = 2.$
8.6	$2x'' - x' = sin3t;$	$x(0) = 2,$	$x'(0) = 1.$
8.7	$x'' + 3x' - 4x = -e^{t};$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 1.$
8.8	$x'' - 2x' + x = e^{-3t};$	$x(0) = -1;$	$x'(0) = 2.$
8.9	$x'' - 3x' + 2x = t + 2;$	$x(0) = 1;$	$x'(0) = 1.$
8.10	$x'' + 2x' = cos2t;$	$x(0) = -2,$	$x'(0) = 3.$
8.11	$2x'' + 3x' + x = 3e^{t};$	$x(0) = 0,$	$x'(0) = 1.$
8.12	$x'' - 4x = t - 1;$	$x(0) = 1;$	$x'(0) = -1.$
8.13	$x'' - 2x' = -4e^{2t};$	$x(0) = -1;$	$x'(0) = 0.$
8.14	$x'' - 4x' + 4x = 3e^{-t};$	$x(0) = 2;$	$x'(0) = -1.$
8.15	$x'' - 3x' - 4x = 2 - t;$	$x(0) = -1;$	$x'(0) = 2.$
8.16	$x'' - 2x' - 3x = 3e^{-2t};$	$x(0) = 0,$	$x'(0) = -2.$
8.17	$2x'' + 5x' = 29cost;$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 0.$
8.18	$x'' + 4x = 4e^{2t};$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = 2.$
8.19	$x'' - 3x' + 2x = 12e^{3t};$	$x(0) = 2,$	$x'(0) = 6.$
8.20	$x'' - 6x' = 2e^{t};$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = 1.$
8.21	$x'' - 4x = 4cos2t;''$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = -2.$
8.22	$x'' - 2x' = t \cdot e^{t};$	$x(0) = 2;$	$x'(0) = 2.$

8.23	$x'' + 3x' - 10x = -\sin 3t;$	$x(0) = 3,$	$x'(0) = -1.$
8.24	$x'' + x' = -4e^{-2t};$	$x(0) = 0,$	$x'(0) = -2.$
8.25	$x'' - 3x' = 2t;$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 2.$
8.26	$x'' - 2x - 3x = 4e^{3t};$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 0.$
8.27	$x'' - 5x' + 6x = 1 + t;$	$x(0) = 0;$	$x'(0) = -1.$
8.28	$x'' - 3x' = 2e^{3t};$	$x(0) = 1;$	$x'(0) = 2.$
8.29	$x'' - x' - 6x = 2;$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = 0.$
8.30	$x'' + 4x' + 4x = t \cdot e^{2t};$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = 2.$
8.31	$x'' + 2x' + 10x = 2e^{2t};$	$x(0) = 5,$	$x'(0) = -1.$
8.32	$x'' + 4 = 3e^{2t};$	$x(0) = -2,$	$x'(0) = -1.$
8.33	$x'' - 3x' = 2e^{3t};$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = 3.$
8.34	$x'' + 4x' + 3x = 2e^{-t};$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 2.$
8.35	$x'' - 2x' - 3x = 1 - t;$	$x(0) = -2,$	$x'(0) = 0.$
8.36	$x'' - 4x' + 3x = 3e^{t};$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 2.$
8.37	$x'' - 3x' - 4x = 2e^{t};$	$x(0) = 0,$	$x'(0) = -2.$
8.38	$x'' - 4x' + 3x = 3 + 2t;$	$x(0) = -1;$	$x'(0) = 2.$
8.39	$x'' - 2x' + x = 3e^{2t};$	$x(0) = -1,$	$x'(0) = 0.$
8.40	$x'' + 2x' = 5e^{-2t};$	$x(0) = 1,$	$x'(0) = -1.$
8.41	$x'' - 4x' = te^{2t};$	$x(0) = 2,$	$x'(0) = 1.$
8.42	$x'' + 5x' + 6x = 3e^{-2t};$	$x(0) = 1;$	$x'(0) = -2.$
8.43	$x'' - 3x' - 4x = 3e^{4t};$	$x(0) = -2,$	$x'(0) = 1.$

8.44 $x'' - 3x' = e^{3t};$ $x(0) = -3,$ $x'(0) = -1.$

8.45 $x'' - 2x' + x = 3t;$ $x(0) = 0;$ $x'(0) = -1.$

8.46 $x'' + 3x' - 10x = 3\cos 2t;$ $x(0) = -1;$ $x'(0) = -3.$

8.47 $x'' + 3x' - 4x = 5e^{-4t};$ $x(0) = -2,$ $x'(0) = 1.$

8.48 $x'' + 2x' = 2 + e^{t};$ $x(0) = 1;$ $x'(0) = 2.$

8.49 $x'' - 4x = 3\sin t - \cos t;$ $x(0) = 2;$ $x'(0) = -1.$

8.50 $x'' + x = 2e^{-t} + 3;$ $x(0) = -1;$ $x'(0) = 2.$

***Задача* 9.** Методом операційного числення знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що задовольняє початкові умови.

9.1 $\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 2.$

9.2 $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1 \\ y' = x + y \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 2.$

9.3 $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x - y + 9 \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = 0$

9.4 $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 4x - y \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

9.5 $\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 1;\ y(0) = -1.$

9.6 $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 2.$

9.7 $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -5x - 3y + 2 \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

9.8 $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ $x(0) = 0;\ y(0) = 2.$

9.9 $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

9.10 $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$ $x(0) = -1;\ y(0) = 0.$

9.11 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

9.12 $\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -4x \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

9.13 $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1 \\ y' = -\left(\dfrac{3}{2}\right)x + y \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = 0.$

9.14 $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2 \\ y' = 3x + y + 1 \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 2.$

9.15 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 5x - 2y \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = -1.$

9.16 $\begin{cases} x' = 2y + 1 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}$

$x(0) = -1, y(0) = 0.$

9.17 $\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

$x(0) = 2, y(0) = 1.$

9.18 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$

$x(0) = -1, y(0) = 2.$

9.19 $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = 0.$

9.20 $\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -3x \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 1.$

9.21 $\begin{cases} x' = 3y + 2 \\ y' = x + 2y \end{cases}$

$x(0) = -1, y(0) = 1.$

9.22 $\begin{cases} x' = x + 4y + 1 \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 1.$

9.23 $\begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x + 3y + 1 \end{cases}$

$x(0) = 2, y(0) = 1.$

9.24 $\begin{cases} x' = -2x + y + 2 \\ y' = 3x \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = 0.$

9.25 $\begin{cases} x' = x + 3y + 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 1.$

9.26 $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 1.$

9.27 $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = 0.$

9.28 $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 1.$

9.29 $\begin{cases} x' = 3x + 2y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = 1.$

9.30 $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$

$x(0) = -1, y(0) = 1.$

9.31 $\begin{cases} x' - y' = x + t \\ x' - y' = 1 - y \end{cases}$

$x(0) = 0, y(0) = 0.$

9.32 $\begin{cases} x' = -x + 6y \\ y' = x - 2y \end{cases}$

$x(0) = 1, y(0) = -1.$

9.33 $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}$
$x(0) = -1, y(0) = 1.$

9.34 $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x - 2y \end{cases}$
$x(0) = -1, y(0) = -1.$

9.35 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - x \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = -1.$

9.36 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
$x(0) = -1, y(0) = 2.$

9.37 $\begin{cases} x' + y = t \\ y' + x = t \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = -1.$

9.38 $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - y + 3 \end{cases}$
$x(0) = 2, y(0) = -1.$

9.39 $\begin{cases} x' = 2y + e^{-t} \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = 0.$

9.40 $\begin{cases} x' = -y + e^{t} \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$
$x(0) = 0, y(0) = 0.$

9.41 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - x \end{cases}$
$x(0) = 0, y(0) = -2.$

9.42 $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = -1.$

9.43 $\begin{cases} x' = y - x + 1 \\ y' = x - y + t \end{cases}$
$x(0) = 0, y(0) = 0.$

9.44 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - x + 1 \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = 1.$

9.45 $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = -2.$

9.46 $\begin{cases} x' = 2y - x + e^{-t} \\ y' = x + 2 \end{cases}$
$x(0) = 0, y(0) = 0.$

9.47 $\begin{cases} x' = y - x + e^{-t} \\ y' = x - y + e^{-t} \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = 1.$

9.48 $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = -1.$

9.49 $\begin{cases} x' + 7x - y = 0 \\ y' + 2x + 5y = 0 \end{cases}$
$x(0) = 1, y(0) = 1.$

9.50 $\begin{cases} x' + 4x - y = 0 \\ y' + 2x + y = 0 \end{cases}$
$x(0) = 2, y(0) = 3.$

Література

1. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1972.
3. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа 1973.
4. Жевержеев В.Ф., Кальницкий Л.А., Сапогов Н.А. Специальный курс высшей математики для втузов. – М.: Высшая школа,1970.
5. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.– М.: Наука,1969.
6. Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. – М.: Высшая школа,1973.
7. Краснов М.Л:, Киселев А.Н., Макаренко Г.Н. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука,1981.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа,1980.
9. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа,1968.

Навчальне видання

Литвинюк В.П.

КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ
ТЕОРІЯ ПОЛЯ
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор О.Д. Скалоцька

Підписано до друку 14.06.02р.

Формат 29,7x 42 ¼ Гарнітура Times New Roman

Друк різографічний Ум.друк.арк. 2.91

Тираж 75 прим.

Зам.№ 2002-154

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького державного технічного університету

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВДТУ, ГНК, 9-й поверх

тел. (0432) 44-01-59