В.П.ЛИТВИНЮК

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В.П.Литвинюк

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Затверджено Вченою радою Вінницького національного технічного університету як навчальний посібник з вищої математики для студентів напряму підготовки 0708 – "Екологія". Протокол № 8 від 31 березня 2005р.

Вінниця ВНТУ 2005

УДК 517.3 (075)
Л 64

Рецензенти:
В.М.Михалевич, доктор технічних наук професор
В.С. Абрамчук, кандидат фізико-математичних наук професор
В.П.Кожем'яко, доктор технічних наук професор

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Литвинюк В.П.
Л 64 **Диференціальне числення.**
Навчальний посібник. –Вінниця: ВНТУ, 2005 – 109 с.

В посібнику детально розглянуті теоретичні положення про теорію границь і диференціальне числення та застосування похідної. Методика викладання матеріалу максимально пристосована для самостійної роботи студентів, розроблені завдання для типового розрахунку. Посібник розроблено у відповідності з планом кафедри вищої математики і програмою дисципліни "Вища математика".

УДК 517.3 (075)

ЗМІСТ

1 ЧИСЛО. ЗМІННА ВЕЛИЧИНА. ФУНКЦІЯ

1.1 Дійсні числа і числові проміжки

Одним із основних понять математики є число. Виникнувши ще в давнину, поняття числа розширялось і узагальнювалось. Сукупність чисел утворюють *множини* чисел. Ряд множин чисел має загальноприйняті позначення:

а) множина всіх *натуральних чисел*

$$N=\{1, 2, 3, ..., n, ...\};$$

б) множина всіх *цілих чисел*

$$Z=\{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\};$$

множина всіх *невід'ємних цілих чисел*

$$Z=\{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\};$$

в) множина всіх *раціональних чисел* Q.

Означення. *Раціональним* числом називається число

$$\frac{p}{q}, \text{ де } p \in N, \quad q \in Z.$$

Наприклад, $\frac{2}{5}, \frac{7}{15}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{8}, \frac{5}{4}=1{,}25.$

Отже, раціональне число може бути подано у вигляді відношення цілого числа до натурального, тобто у вигляді *звичайного* дробу. Раціональні числа можуть бути подані у вигляді скінченних десяткових або нескінченних періодичних дробів.

Числа, котрі представляються *нескінченними*, але *неперіодичними* десятковими дробами, відносяться до *ірраціональних* чисел, такими числами є $\sqrt{2}$, $5-\sqrt{3}$ e, $log_2 3$ і т.д.

Означення. Множина всіх натуральних, цілих, раціональних та ірраціональних чисел називається *множиною дійсних чисел.*

Множина всіх дійсних чисел позначається R, множина всіх додатних дійсних чисел позначається R_+, а множина всіх від'ємних дійсних чисел позначається R_-.

Нехай a і b — дійсні числа, причому $a < b$.

Відрізком або *сегментом* називається множина всіх чисел (точок числової осі), які задовольняють умову

$$a \le x \le b. \tag{1.1}$$

Числа a і b називаються *кінцями відрізка*. Цей відрізок позначають символом $[a, b]$, а умову (1.1) символічно записують $x \in [a; b]$ і читають „x належить відрізку $[a, b]$ числової осі".

Інтервалом називається множина всіх чисел, які задовольняють умову

$$a < x < b. \tag{1.2}$$

Інтервал позначають $(a; b)$, а подвійну нерівність записують так: $x \in (a; b)$.

Означення. Множина всіх точок x (чисел), що задовольняють подвійну нерівність

$$a-\delta < x < a+\delta, \tag{1.3}$$
де $\delta > 0$, називається *δ-околом точки a.* Отже, δ -окіл точки a – це інтервал $(a-\delta, a+\delta)$, який вміщує точку a, при цьому точка a є його серединою.

Множина всіх чисел x, що задовольняють умову
$$a \le x < b, \tag{1.4}$$
називається *півсегментом* і позначається символом $[a;\ b)$.

Множина всіх чисел x, що задовольняють умову
$$a < x \le b, \tag{1.5}$$
називається *півінтервалом* і позначається символом $(a;\ b]$.

Множина всіх точок x числової осі, що лежать справа (зліва) від точки a називається *нескінченно великим інтервалом* і позначається відповідно $(a;\ +\infty)$ і $(-\infty;\ a)$ або $x \in (a;\ +\infty)$ і $x \in (-\infty;\ a)$, при цьому символи $-\infty$ і $+\infty$ не слід розглядати як числа, це символічне позначення процесу необмеженого віддалення точок числової осі від точки a. Враховуючи сказане про ці символи, можна записати, що інтервалу $(a;\ +\infty)$ відповідають нерівності
$$a < x < +\infty \text{ або } x > a, \tag{1.6}$$
а інтервалу $(-\infty;\ a)$ відповідають нерівності
$$-\infty < x < a \text{ або } x < a. \tag{1.7}$$
Множину всіх дійсних чисел як множину всіх точок числової осі можна символічно записувати так :
$$-\infty < x < +\infty \text{ або } x \in (-\infty; +\infty). \tag{1.8}$$

1.2 Абсолютна величина числа

Нагадаємо поняття абсолютної величини або модуля числа.

Модуль *додатного* числа дорівнює самому числу, модуль нуля дорівнює нулю, а модуль від'ємного числа дорівнює протилежному числу.

Розглянемо довільне дійсне число $x \in R$.

Означення. *Абсолютною величиною* або *модулем* дійсного числа x називається невід'ємне число, яке позначається $|x|$ і визначається за формулою
$$|x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \ge 0, \\ -x & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{1.9}$$
Наприклад, $|-3| = 3$; $|5{,}4| = 5{,}4$; $|\cos 150^0| = -\cos 150^0$, бо $\cos 150^0 < 0$.

Геометрично модуль числа дорівнює *відстані* від точки, що зображує дане число на числовій осі, до початку відліку (початку координат). Відзначимо відомі властивості модуля числа.

1. Модуль числа є невід'ємне число: $|a| \ge 0$.
2. Число не більше свого модуля: $a \le |a|$.
3. Модуль суми чисел не більше суми модулів цих чисел:
   $|a+b| \le |a| + |b|$ (рівність виконується, якщо числа однакового

знака).

4. Модуль різниці двох чисел не менше різниці їх модулів: $|a-b| \geq |a|-|b|$.
5. Модуль добутку чисел дорівнює добутку їх модулів: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
6. Модуль частки чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника: $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0.$

Вкажемо ще на ряд важливих співвідношень нерівностей із змінною під знаком модуля, які надалі нам часто доведеться використовувати.

1. За *геометричним змістом* модуля розв'язком нерівності $|x| < a$, де $a > 0$, є множина точок числової осі, які віддалені від початкової точки не далі ніж на a, тобто це буде множина точок, що задовольняє нерівність $-a < x < a$ (рис. 1.1).

Отже,
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a. \tag{1.10}$$

2. Нерівність $|x| > a$, де $a > 0$ геометрично означає, що її задовольняють точки числової осі, які віддалені від початки осі на відстань більшу, ніж a, а це будуть нескінченно великі інтервали, що знаходяться лівіше точки $-a$ або правіше точки a числової осі (рис. 1.2).

Отже,
$$|x| > a \Leftrightarrow < -a \text{ або } x > a\ . \tag{1.11}$$

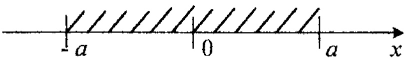


Рисунок 1.1

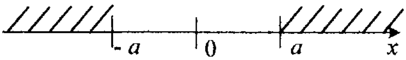


Рисунок 1.2

Зауваження. Користуючись поняттям модуля, δ- окіл точки a можна записати так:
$$a-\delta < x < a+\delta \Leftrightarrow -\delta < x-a < \delta \Leftrightarrow |x-a| < \delta, \tag{1.12}$$
а всю числову вісь
$$-\infty < x < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad |x| < +\infty. \tag{1.13}$$

1.3 Змінні і сталі величини

Змінною називається величина, що може приймати різні числові значення.

Числа x, що задовольняють будь-яку з умов (1.1)–(1.13), є прикладами змінних величин. Множина значень, яких набуває змінна величина, називається областю зміни цієї змінної. Так, областю значень змінної $\cos\alpha$ при всіх можливих значеннях α є відрізок $[-1; 1]$.

Величина, числові значення якої не змінюються, називається *сталою.*

Можна говорити, що *стала* величина набуває *єдиного* числового значення. Змінні величини позначають буквами $x, y, z, u, v, \ldots$ і т.д., а сталі величини позначають буквами $a, b, c, \ldots$ і т.д. латинського алфавіту.

Змінна величина x називається *обмеженою*, якщо існує таке *додатне* число M, всі значення якої задовольняють умову

$$-M \le x \le M \qquad \text{або} \qquad |\, x \,| \le M. \tag{1.14}$$

Так, змінні величини $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ є обмеженими, бо при всіх значеннях кута α виконуються нерівності $-1 \le \sin\alpha \le 1$, $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

1.4 Поняття функції

Поняття функції в математиці є основним поняттям. В математиці доводиться розглядати зміну однієї змінної величини в залежності від зміни іншої, бо в природі не буває фізичних величин, які змінювалися б ізольовано, поза зв'язками з іншими фізичними величинами. Ця залежність між двома змінними величинами описується певним законом відповідності.

Нехай задано дві змінні x і y та області їх зміни X і Y, які є деякими числовими множинами.

Означення. Якщо *кожному* значенню змінної $x \in X$ за певним законом ставиться у відповідність *одне* значення другої змінної $y \in Y$, то *змінна y називається **функцією** від x.*

Отже, функція – *відповідність*, за якою кожному елементу $x \in X$ відповідає *єдиний* елемент $y \in Y$ (на мові множин).

В символічному вигляді це записують так:

$$x \xrightarrow{f} y, \text{ або } y = f(x), \text{ або } y = \varphi\,(x), \text{ або } y = F\,(x) \text{ і т.п.}$$

Перша змінна x називається *незалежною* змінною або *аргументом*, а буква f в символічному записі – це закон або правило, за яким здійснюється саме ця відповідність, що вказана в самому означенні. Сукупність тих значень аргументу x, при яких y *існує*, тобто функція *визначена*, називається ***областю визначення функції***. Отже, $D(y)=X$, тобто множина X є областю визначення функції. Замість запису $y = f\,(x)$, $u = g(x)$ і т.д. інколи пишуть $y = y\,(x)$, $u = u\,(x)$ і т.д., тобто букви y, u і т.д. означають залежну змінну і в той же час це символ закону відповідності, а присутність в записі функціональних круглих дужок вказує, що змінна x є аргументом функції. Зауважимо, що аргумент функції можна позначити і іншою буквою. Наприклад, $y = \varphi\,(t)$, $x = x\,(t)$ тощо.

Таким чином, задати функцію – означає вказати:

а) область визначення функції;

б) закон відповідності f, який означає ті операції, які треба виконати над аргументом, та послідовність їх виконання, щоб дістати значення функції.

1.5 Способи задання функції

Існують три способи задання функції: табличний, аналітичний і графічний.

1. ***Табличний спосіб.*** Цей спосіб задання найчастіше зустрічається в експериментах, коли задають сукупність значень незалежної змінної, а

значення функції знаходять *дослідним* шляхом, а сам закон відповідності оформляють у вигляді таблиці.

2. ***Аналітичний спосіб.*** Це спосіб задання функції *формулою,* він є найбільш вживаним в математиці.

Приведемо приклади. 1. $y = 2x-3$. Областю визначення її є вся числова вісь $D(y)=(-\infty;+\infty)$, областю значень $E(y)=(-\infty;+\infty)$, а закон відповідності $x \mapsto y = 2x-3$.

2. $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Область визначення: $4-x^2>0;\ x^2<4 \Rightarrow |\ x\ |<2$ або $-2<x<2$, або $D(y)=(-2;\ 2)$. Область значень $E(y)=[1/2;\ +\infty)$, бо найменше значення її досягається при $x = 0$ і $y(0)=1/2$, функція приймає лише додатні значення, які можуть бути як завгодно великими.

3. ***Графічний спосіб.*** За цим способом функція задається графіком, цей спосіб є наглядним і в цьому його переваги, але він неточний.

Означення. *Графіком функції* $y = f(x)$ називається множина точок координатної площини $x0y$, абсциси яких є значеннями аргументу, а ординати – відповідними значеннями функції, при цьому x пробігає всю множину $D(f)$.

Графічний спосіб використовується здебільшого як допоміжний засіб для дослідження *властивостей* функції.

Графіком функції є деяка крива, яку будь-яка пряма паралельна осі $0y$ і проведена в області визначення функції, перетинає лише один раз. Значення функції при $x = x_0$ визначається як ордината відповідної точки кривої з абсцисою $x = x_0$.

Так, наприклад, графіком функції $y = |\,x\,|$ є сукупність двох півпрямих $y=x$, якщо $x \geq 0$, і $y=-x$, якщо $x<0$, що виходять з початку координат (рис.1.3).

Проте можливі випадки, коли функцію визначають без допомоги формули. Прикладом такої функції є функція, що визначена таким законом: *y є найбільше ціле число, що не перевищує дане число x.* Зокрема, якщо x задовольняє умову $n \leq x < n+1$, тобто число, що міститься між двома послідовними цілими числами, то $y = n$, тобто ця функція є *сталою* при $x \in [n;\ n{+}1)$.

Таку функцію позначають $y = E(x)$ або $y = [\ x\ ]$ і називають *„функцією - ціла частина (антьє) від x"* (E – початкова буква французького слова Entier (читається антьє), що означає „цілий").
Наприклад, $E(4{,}2) = 4$, $E(5{,}98) = 5$, $E(-5{,}8) = -6$, $E(-0{,}7) = -1$, $E(0{,}8) = 0$.

Графіком функції $y = E(x)$ є *ступінчаста лінія*, що складається з прямолінійних відрізків, паралельних осі Ox, причому y набуває цілі значення і ці значення є сталими на півсегментах $[n;\ n{+}1)$, на правих кінцях цих півсегментів і відбувається „стрибок" вгору, величина якого дорівнює одиниці (рис. 1.4).

Цікавою є так звана функція „знак числа”, яка визначається для будь-якого $x \in R$ формулою

$$y = sign\,x = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0, \end{cases}$$

позначають її символом „сигнум”, що означає „знак”, її графік зображено на рис. 1.5, область значень $\{-1; 0; 1\}$.

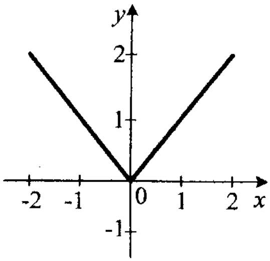


Рисунок 1.3

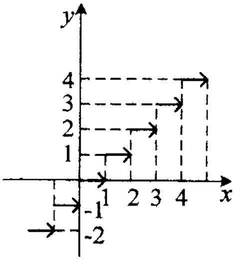


Рисунок 1.4

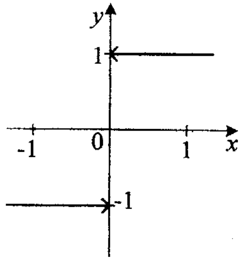


Рисунок 1.5

1.6 Складена функція

Часто доводиться мати справу з функціями, коли її аргумент є функцією іншої незалежної змінної.

Наприклад, нехай $z = lg\, y$, де $y = \sin 2x$, тоді $z = lg\, \sin 2x$, тобто змінна z є функція змінної x, але залежить від x не безпосередньо, а через проміжний аргумент $y = \sin 2x$, який є функцією цієї змінної x. Операція функція від функції, тобто *суперпозиція* (*накладання* в перекладі з латині) і називається *складеною* функцією.

В загальному випадку це поняття вводиться так.

Нехай задана функція $y = f(u)$, яка визначена в деякій множині U, де змінна $u = g(x)$, тобто u є функцією змінної x, визначеною в деякій множині X, при цьому область її значень входить в множину U. Тоді функція $y = f(g(x))$ називається ***складеною функцією*** *незалежної змінної* x. Отже, *складена* функція – це *функція* від *функції*, тобто це *суперпозиція* функцій. Можливе накладання більше ніж двох операцій функції від функції. Наприклад, $y = \cos u$, де $u = \sqrt{x}$, де $x = 2t^2 + 5$, тоді $y = \cos\sqrt{2t^2 + 5}$, тобто змінна y є складеною функцією $y(t)$ незалежної змінної t (з двома проміжними аргументами u та x).

Означення. Якщо $y = f(u)$, де $u = g(x)$, то функція $y = f(g(x))$ називається ***складеною функцією*** *незалежної змінної* x.

Функцію $u = g(x)$ називають *внутрішньою* функцією або *проміжним аргументом,* а функція $y = f(u)$ називається *зовнішньою.*

1.7 Обернені функції

Розглянемо функцію $y = x^3$, визначену на відрізку $[-1; 2]$. Її областю значень є відрізок $[-1; 8]$. Отже, $D(y) = [-1; 2]$, а $E(y) = [-1; 8]$. Оскільки функція $y = x^3$ є зростаючою, то кожному $y \in [-1; 8]$ відповідає єдине значення $x \in [-1; 2]$, причому $x = \sqrt[3]{y}$. Функції $y = x^3$ і $x = \sqrt[3]{y}$ називають *оберненими.* Звернемо увагу на те, що їх *області визначення і області значень міняються ролями.* Як відомо, показникова і логарифмічна функції є оберненими.

Розглянемо тепер *загальний* випадок. Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення $x \in D(f)$ і областю значень $y \in E(f)$. Припустимо тепер, що в множині $E(f)$ визначена деяка функція $x = \varphi(y)$, тобто кожному значенню $y \in E(f)$ ставиться у відповідність єдине значення x із множини $D(f)$. Отже, $D(f)$ збігається з $E(\varphi)$, а $D(\varphi)$ збігається з $E(f)$, тоді *функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$* називаються *оберненими.*

Означення. Функція $x = \varphi(y)$ називається оберненою відносно функції $y = f(x)$, якщо виконуються умови:

а) область визначення функції f є областю значень функції φ;

б) область значень функції f є областю визначення функції φ;

в) одному значенню змінної $x \in D(f)$ відповідає одне і тільки одне значення змінної $y \in D(\varphi)$, тобто функція $x = \varphi(y)$ є *однозначною.*

Виникає питання: чи для всякої функції існує її обернена функція? Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема. *Всяка строго монотонна функція має обернену.* Якщо функція $y = f(x)$ *строго зростає (спадає)* на проміжку, то обернена до неї функція також *строго зростає (спадає)* на відповідному проміжку.

Ця теорема випливає із означення монотонних функцій.

1. Функція $y = f(x)$ *називається строго **зростаючою** на проміжку,* якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 аргументу таких, що $x_1 < x_2$, випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ і навпаки, із $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.

2. Функція $y = f(x)$ *називається строго **спадною** на проміжку,* якщо $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ для будь-яких x_1 і x_2 із цього проміжку.

Зауваження. *Графіки* обернених функцій $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ *збігаються,* тобто це є одна і та ж крива.

Але є незручність стосовно графіка оберненої функції $x = \varphi(y)$, бо виходить, що абсциси точок цієї кривої дорівнюють значенням функції x, а ординатами є значення аргументу. З метою прийти до загальноприйнятого підходу, щоб значення абсцис точок графіка функції збігалися із значеннями аргументу, а значення ординат збігалися із значеннями функції, треба у виразі оберненої функції $x = \varphi(y)$ поміняти x і y ролями; переставивши місцями x і y, дістанемо $y = \varphi(x)$. Але тоді графіки функцій $x = \varphi(y)$ і $y = \varphi(x)$, де закон відповідності φ *один і той же,* будуть *симетричні відносно бісектриси* першого і третього координатних кутів, тобто прямої $y = x$, бо точки $(x; y)$ і $(y; x)$ є *симетричними* відносно цієї бісектриси.

Висновок. *Графіки обернених функцій* $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$, де закони відповідності f і φ різні, є *симетричними відносно бісектриси* $y = x$.

Так, відомо із шкільного курсу, що графіки функцій $y = a^x$ і $y = \log_a x$, які є оберненими, симетричні відносно бісектриси $y = x$.

Функція $y = \sin x$, яка визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$, не має на ньому оберненої, бо кожному $y \in [-1; 1]$ відповідає безліч значень x (в силу її періодичності). Але при $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ функція $y = \sin x$ *зростаюча,* приймаючи всі свої значення, що належать проміжку $[-1; 1]$, тому на цьому проміжку вона має обернену функцію $y = \arcsin x$, яка визначена на проміжку $[-1; 1]$ з областю значень $[-\pi/2; \pi/2]$, тобто $-\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$. Графіки цих функцій приведені на рис. 1.6 і рис. 1.7.

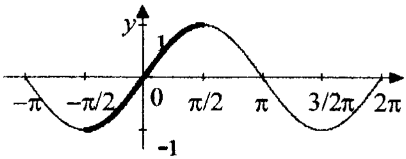


Рисунок 1.6

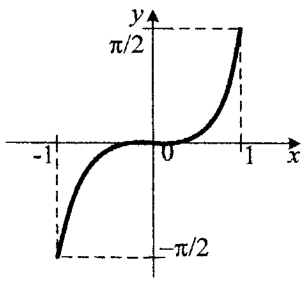


Рисунок 1.7

Функція $y = \cos x$, яка визначена при всіх $x \in R$ з областю значень

$E(y) = [-1; 1]$, не має оберненої, але на проміжку $0 \le x \le \pi$ вона *спадає* і на цьому проміжку *має обернену* функцію $y = \arccos x$, яка визначена на проміжку $[-1; 1]$, з областю значень $[0; \pi]$, тобто $0 \le \arccos x \le \pi$, графіки цих функцій приведені на рис. 1.8 і рис. 1.9.

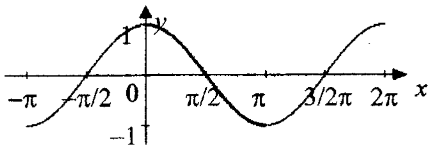


Рисунок 1.8

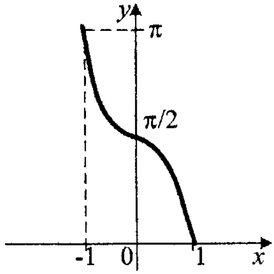


Рисунок 1.9

Функція $y = \mathrm{tg}\, x$, яка визначена при всіх $x \ne \pi/2 + \pi n$, де $n \in Z$, з областю значень $E(y) = (-\infty; +\infty)$, теж не має оберненої, але на проміжку $-\pi/2 < x < \pi/2$ вона є *зростаючою* і на ньому *має обернену* функцію $y = \mathrm{arctg}\, x$, яка визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, областю її значень є проміжок $E(y) = (-\pi/2; \pi/2)$, тобто $-\pi/2 < \mathrm{arctg}\, x < \pi/2$, графіки цих функцій приведені на рис. 1.10 і рис. 1.11.

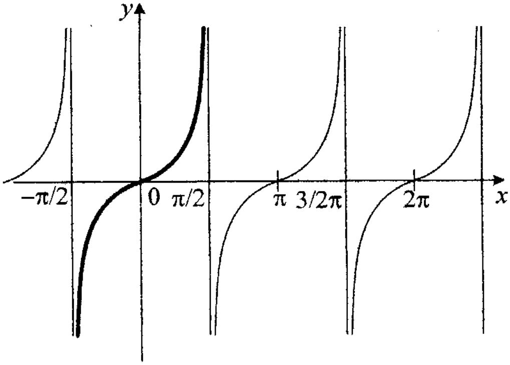


Рисунок 1.10

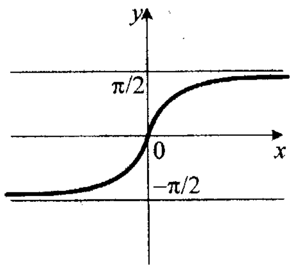


Рисунок 1.11

Функція $y = \mathrm{ctg}\, x$, яка визначена при всіх $x \ne \pi n$, де $n \in Z$, з областю значень $E(y) = (-\infty; +\infty)$, не має оберненої, бо вона періодична, але на проміжку $0 < x < \pi$ вона є *спадною* і на ньому *має обернену* функцію $y = \mathrm{arcctg}\, x$, яка визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, і областю значень є

$E(y) = (0;\ \pi)$, тобто $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$. Графіки цих функцій приведені на рис. 1.12 і рис. 1.13.

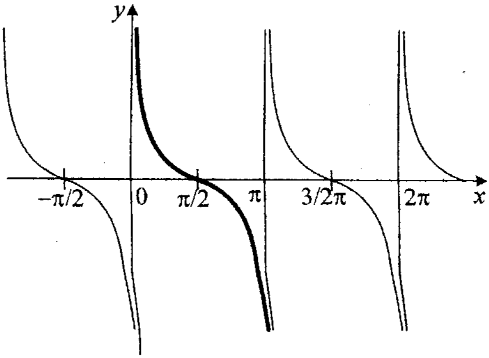


Рисунок 1.12

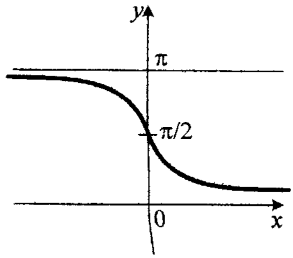


Рисунок 1.13

1.8 Огляд основних елементарних функцій

До *основних елементарних функцій* належать такі 12 функцій:

а) *функція константа* $y = C$, де C– const, $C \in R$;

б) *степенева* функція $y = x^{\alpha}$, де α – задане число;

в) *показникова* функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

г) *логарифмічна* функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$;

д) чотири *тригонометричні* функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

е) чотири *обернені тригонометричні* функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$.

Означення. Функції, утворені з *основних елементарних функцій* та *чисел* за допомогою *скінченного* числа *арифметичних дій* та *операцій функції від функції*, називаються ***елементарними***.

Всі елементарні функції поділяються на *алгебраїчні* та *трансцендентні*. *Алгебраїчні* функції поділяються на *раціональні* та *ірраціональні*. До трансцендентних функцій відносяться показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернені тригонометричні, гіперболічні та інші.

Коротко зупинимось на основних елементарних функціях, більшість з яких вивчались в школі, звернувши увагу на їх області визначення, області значень та на їх графіки.

1. Функція $y = C$, де $C = \text{const}$, визначена при всіх $x \in R$, а її область значень складається з одного числа C, бо всякий раз ця функція одне і те ж значення; її графіком є пряма, паралельна осі Ox і перетинає вісь Oy в точці $y = C$ (рис.1.14).

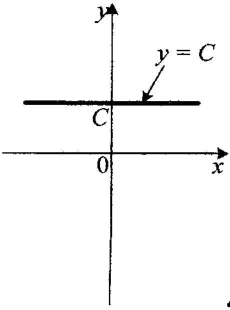


Рисунок 1.14

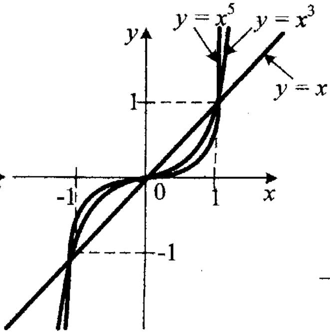


Рисунок 1.15

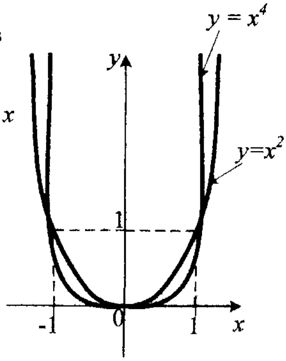


Рисунок 1.16

2. Область визначення степеневої функції $y = x^{\alpha}$ залежить від числа α. Якщо α приймає натуральні значення, тобто $\alpha = n$, де $n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$, то функція $y = x^n$ визначена при всіх $x \in R$. Зокрема, при n непарних ця функція непарна з областю значень $E(y) = (-\infty; +\infty)$; при n парних ця функція парна з областю значень $E(y) = [0; +\infty)$. Графіки функцій $y = x, y = x^2$, $y = x^3, y = x^4$ і $y = x^5$ приведені на рис.1.15 та рис.1.16.

Якщо α приймає цілі від'ємні значення, то функції $y = x^{-n}$ визначені при всіх $x \neq 0$, графіки функцій $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ приведені на рис.1.17 і рис.1.18.

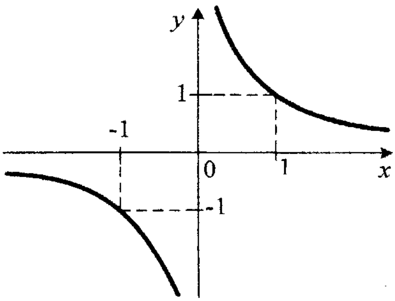


Рисунок 1.17

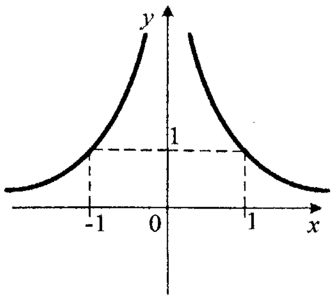


Рисунок 1.18

На рисунках 1.19 і рис.1.20 зображені графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \sqrt[3]{x}$.

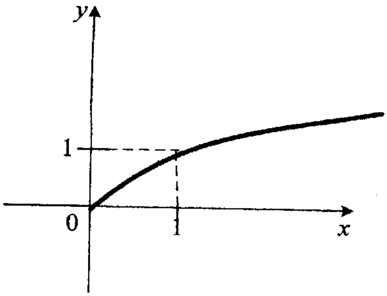


Рисунок 1.19

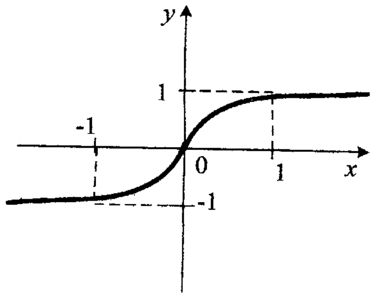


Рисунок 1.20

Звернемо увагу на те, що всі графіки функцій $y = x^{\alpha}$ проходять через точку (1; 1).

3. Показникова функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, визначена при всіх $x \in R$, її областю значень є проміжок $(0; +\infty)$, бо $a^x > 0$, її графік приведений на рис.1.21.

4. Логарифмічна функція $y = \log_a x$ визначена при всіх $x > 0$, її областю значень є проміжок $(-\infty; +\infty)$, графіки зображені на рис.1.22.

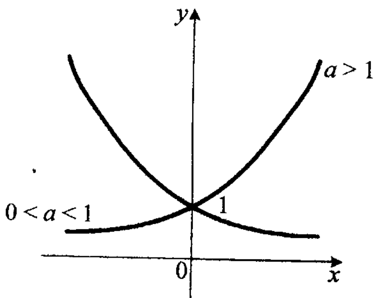


Рисунок 1.21

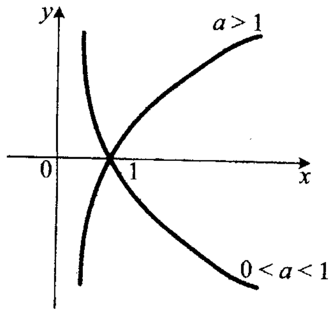


Рисунок 1.22

Тригонометричні і обернені тригонометричні функції розглянуті в попередньому підрозділі.

2 ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ І ФУНКЦІЇ

2.1 Поняття послідовності

Якщо незалежна змінна x набуває значень лише натуральних чисел, то функція називається *числовою послідовністю.*

Означення. *Числовою послідовністю* називається функція *натурального* (цілочислового) аргументу.

По суті це нескінченний пронумерований ряд чисел. Позначають послідовності символами x_n, y_n, z_n, α_n, β_n тощо. Значення цієї функції при конкретних значеннях n (n = 1, 2, 3, ...) називають *членами послідовності* x_1, x_2, ..., x_n, ..., а x_n – *загальним членом.* Задати числову послідовність означає задати формулу її загального члена. Коротко числову послідовність позначають символом $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{\alpha_n\}$ тощо. Приведемо приклади послідовностей.

1. $\{x_n\}$, де $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2}$ або $\left\{-1;\ \dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{16};\ ...;\ (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n^2};\ ...\right\}$.

2. $\{y_n\}$, де $y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$ або $\left\{\ 0;\ 1;\ 0;\ \dfrac{1}{2};\ 0;\ \dfrac{1}{3};\ 0;\ ...\ \right\}$.

3. $\{b_n\}$, де $b_n = b_1 q^{n-1}$ або $\left\{b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ b_1q^3;\ ...;\ b_1q^{n-1};\ ...\right\}$. Ця послідовність називається *геометричною прогресією*, число q *називається знаменником прогресії.*

4. $\{z_n\}$, де $z_n = n^2$, або $\left\{1;\ 4;\ 9;\ 16;\ ...;\ n^2;\ ...\ \right\}$.

Геометрично послідовність можна зображати *точками числової осі* або *точками координатної площини,* а саме: будують точки з координатами $(n; f(n))$.

Якщо для числової послідовності $\{y_n\}$ виконуються умови $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n < \ldots$, то послідовність називається *зростаючою.*

Якщо ж $y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_n > \ldots$, то послідовність називається *спадною.* Зростаючі і спадні послідовності називаються *монотонними.*

Наприклад, послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, є зростаючою, а послідовність $\{y_n\}$, де $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, є спадною.

Означення. Послідовність $\{y_n\}$ називається *обмеженою,* якщо існує таке додатне число M, що для всіх її членів виконується нерівність $|y_n| < M$ або $-M < y_n < M$ для всіх n.

2.2 Поняття границі послідовності

Важливим випадком числової послідовності є той, коли при необмеженому зростанні n, починаючи з деякого моменту, значення членів послідовності наближаються необмежено до деякого числа a. Наприклад, члени послідовності $\{x_n\}$, де $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$, необмежено наближаються до нуля, бо модуль різниці $|x_n - 0|$ здатен стати меншим будь-якого наперед заданого додатного числа, починаючи з деякого n (достатньо великого). А послідовність $\{y_n\}$, де $y_n = \frac{n-1}{n}$, $\left\{0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots\right\}$ необмежено наближається до одиниці, бо модуль різниці $|y_n - 1|$ може стати меншим будь-якого наперед заданого числа (навіть достатньо малого), починаючи з деякого номера. Кажуть, що таке число a, коли $|x_n - a|$ здатен стати меншим будь-якого заданого додатного числа ε, починаючи з деякого номера, назива-ється границею послідовності x_n.

Означення. Число a називається *границею* числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для *будь-якого* додатного числа ε, наперед заданого, знайдеться *натуральне* число N таке, що виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{2.1}$$

для всіх $n > N$.

Число N, що залежить від заданого $\varepsilon > 0$ і визначає той момент, починаючи з якого відстань від точок x_n до точки a здатна стати і залишатись надалі меншою цього заданого числа $\varepsilon > 0$ навіть як завгодно малого.

Символічно це записують так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ або } x_n \to a. \tag{2.2}$$

Читається границя x_n, а не “ліміт”.

Коротко це означення границі можна записати таким чином: якщо для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ таке, що при $\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, то число a називається границею послідовності x_n.

Зауваження. Оскільки нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ при $n > N$, а проміжок $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ називається ε-околом числа a, то нерівність (2.1) *геометрично* означає, що всі значення числової послідовності x_n при $n > N$, тобто починаючи з номера N, опиняються в ε-околі точки a. Тобто, яким би *малим* не взяти ε-окіл точки a, всередині цього околу опиниться *нескінченна* множина членів послідовності, а саме: $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$, а зовні цього околу хіба що *скінченна* множина точок $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (рис. 2.1).

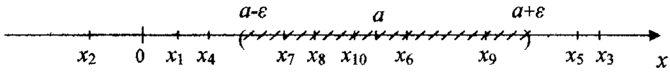


Рисунок 2.1.

Отже, точка $x=a$ є *точкою згустку* точок, що зображають послідовність x_n.

Якщо число a є границею послідовності x_n при $n \to +\infty$, то послідовність x_n називається ***збіжною*** і говорять, що послідовність *збігається* до a або *прямує* до a і пишуть: $x_n \to a$.

Приклад. Довести, користуючись означенням, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

Розв'язування. Задамося довільним $\varepsilon>0$ як завгодно малим, і покажемо, що існує натуральне число N таке, що виконується нерівність $|x_n-1|<\varepsilon$ для всіх $n>N$, де $x_n=\frac{n-1}{n}$.

Тоді будемо мати нерівність $\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon$. Розв'яжемо цю нерівність відносно n, де n натуральне число. Будемо мати

$$\left|\frac{n}{n}-\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|1-\frac{1}{n}-1\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon \Leftrightarrow 1<\varepsilon n \Leftrightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Отже, дана нерівність виконується при всіх $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Число $\frac{1}{\varepsilon}$ є додатним, але, взагалі кажучи, нецілим. За натуральне число N можна взяти функцію- ціла частина числа, тобто $N(\varepsilon)=E\left(\frac{1}{3}\right)$. Тоді при $n>N(\varepsilon)$, тобто при $n=N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots$ дана нерівність справедлива, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

2.3 Нескінченно малі послідовності

Серед збіжних послідовностей особливу роль відіграють такі, що збігаються до нуля, їх називають нескінченно малими.

Означення. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо її границя дорівнює нулю.

Іншими словами, послідовність $\{\alpha_n\}$ називається *нескінченно малою*, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що при всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|\alpha_n|<\varepsilon. \qquad (2.3)$$

Отже, α_n – нескінченно мала, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, це означає, що поза ε-околом точки $x = 0$ буде хіба що *скінченне* число членів цієї послідовності. Для нескінченно малої величини суттєвим є *характер* її зміни. Жодне окремо взяте її значення, якщо воно не нуль, не може вважатися нескінченно малим. Суть в тому, що нескінченно мала – це *змінна* величина, яка в процесі своєї зміни здатна стати і надалі залишатись за абсолютною величиною меншою будь-якого $\varepsilon > 0$ (наперед заданого і як завгодно малого).

Збіжна послідовність тісно зв'язана з нескінченно малою послідовністю. Справедлива така теорема.

Теорема. (про зв'язок збіжної з нескінченно малою послідовністю). Для того щоб послідовність $\{x_n\}$ збігалась до числа a, необхідно і достатньо, щоб існувала така нескінченно мала послідовність $\{\alpha_n\}$, щоб

$$x_n = a + \alpha_n. \tag{2.4}$$

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границю, що дорівнює числу a, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Це означає за означенням границі, що для будь-якого наперед заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число N таке, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Позначимо $x_n - a = \alpha_n$, тоді остання нерівність рівносильна нерівності $|\alpha_n| < \varepsilon$, яка виконується при всіх $n > N$, а це за означенням означає, що послідовність α_nє нескінченно малою, тобто $\alpha_n \to 0$. З останньої рівності випливає, що $x_n = a + a_n$, де α_n – нескінченно мала.

Достатність. Нехай послідовність $\{x_n\}$ можна подати у вигляді (2.4), тобто $x_n = a + a_n$, звідки $x_n = a + a_n$, де α_n – нескінченно мала послідов-ність. Це означає за означенням нескінченно малої послідовності, що для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число $N(\varepsilon)$ таке, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n| < \varepsilon$, що рівносильне тому, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N(\varepsilon)$, а це означає, що число a є границею послідовності x_n, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Теорему доведено.

Вкажемо на основні властивості нескінченно малих послідовностей. Справедливі такі дві теореми.

Теорема 1. Сума скінченного числа *нескінченно малих* послідовностей є *нескінченно мала* послідовність.

Доведення. Доведемо теорему для суми двох нескінченно малих послідовностей. Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі послідовності. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n + \beta_n\}$ теж нескінченно мала послідовність.

Задамося довільним числом $\varepsilon>0$. Оскільки послідовність $\{\alpha_n\}$ є нескінченно мала, то для числа $\frac{\varepsilon}{2}$ знайдеться натуральне число N_1 таке, що при всіх $n>N_1$ буде виконуватись нерівність $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $\{\beta_n\}$ нескінченно мала послідовність, то для цього ж числа $\frac{\varepsilon}{2}$ знайдеться номер N_2 (уже інший) такий, що при всіх $n>N_2$ буде виконуватись нерівність $|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. Позначимо через N більше із цих чисел N_1 і N_2. Тоді при всіх $n>N$ поготів будуть виконуватись обидві вказані модульні нерівності, тоді при всіх $n>N$ будемо мати, що $|\alpha_n+\beta_n|\le|\alpha_n|+|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Отже, при всіх $n>N$ виконується нерівність $|\alpha_n+\beta_n|<\varepsilon$, а це означає за означенням, що послідовність $\{\alpha_n+\beta_n\}$ є нескінченно малою. Теорему доведено.

Теорема 2. Добуток *обмеженої* послідовності на *нескінченно малу* послідовність є *нескінченно мала* послідовність.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою, а $\{\alpha_n\}$ – нескінченно мала. Задамося довільним числом $\varepsilon>0$. Оскільки послідовність $\{x_n\}$ обмежена, то це означає, що існує таке число $M>0$, що при всіх n виконується нерівність $|x_n|<M$. Оскільки послідовність $\{\alpha_n\}$ є нескінченно мала, то для числа $\frac{\varepsilon}{M}$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що при всіх $n>N(\varepsilon)$ виконуватиметься нерівність $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{M}$. Тоді при всіх $n>N(\varepsilon)$ будемо мати $|\alpha_n\cdot x_n|=|\alpha_n|\cdot|x_n|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$. Отже, при всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|a_n x_n|<\varepsilon$, а це означає за означенням, що послідовність $\{a_n x_n\}$є нескінченно малою послідовністю. Теорему доведено.

Наслідок. Добуток нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Це випливає з того, що нескінченно мала послідовність як збіжна є обмеженою (див. теорема 2).

2.4 Основні теореми про границі

Теорема 1 (***про єдиність границі***). Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Доведення. Доведемо теорему методом від супротивного. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має дві різні границі a і b, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тоді на основі рівності (2.4) про зв'язок збіжної послідовності з нескінченно малою будемо мати: $x_n = a + \alpha_n$ і $x_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – нескінченно малі послідовності. Отже, $a + \alpha_n = b + \beta_n \Rightarrow a - b = \beta_n - \alpha_n$. Ця рівність *неможлива*, оскільки $a - b \neq 0$, а різниця $\beta_n - \alpha_n$ є нескінченно мала послідовність і не може дорівнювати числу $a - b$, яке не дорівнює нулю. Дістали суперечність, що і доводить справедливість теореми.

Теорема 2. Всяка *збіжна* послідовність *обмежена.*

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}$ має границею число a. Тоді в будь-якому ε-околі $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ точки a опиняться всі значення, за винятком хіба що скінченного числа точок $x_1, x_2, ..., x_N$. Виберемо серед *модулів* чисел $a-\varepsilon, a+\varepsilon, x_1, x_2, ..., x_N$ найбільше і позначимо це додатне число буквою M, тоді при всіх $n > N$ буде виконуватись нерівність $|x_n| < M$, а це означає, що послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою. Теорему доведено.

Теорема 3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ має скінченну границю $a \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ обмежена.

Доведення цієї теореми опустимо.

Теорема 4 (про границю суми). Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі, то послідовності $\{x_n \pm y_n\}$ мають границі, що дорівнюють алгебраїчній сумі їх границь

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n \qquad (2.5)$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Тоді на підставі теореми про зв'язок збіжної послідовності з нескінченно малою матимемо $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – нескінченно малі, тоді

$$x_n \pm y_n = (a + \alpha_n) \pm (b + \beta_n) = (a \pm b) + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Оскільки $\alpha_n \pm \beta_n$ – нескінченно мала послідовність, то число $a \pm b$ є границею послідовності $\{x_n \pm y_n\}$, тобто

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$ або $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема 5 (про границю добутку). Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі, то послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ має границю, причому

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{2.6}$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді знову, на підставі формули (2.4), матимемо

$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де α_n і β_n – нескінченно малі, тоді

$x_n \cdot y_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$.

Оскільки за відомими властивостями послідовності $\{a\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$ і $\{\alpha_n\beta_n\}$ – нескінченно малі, то послідовність $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n$ теж нескінченно мала. Із рівності $x_n y_n = ab + \gamma_n$, де γ_n – нескінченно мала, випливає, що число ab є *границею* послідовності $\{x_n \cdot y_n\}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, що треба було довести.

Наслідок. *Сталий множник можна виносити за знак границі*

$$\lim_{n\to\infty}(C \cdot y_n) = C \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2.7}$$

де C – стала.

Теорема 6 (про границю частки). Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ мають скінченні границі, причому всі $y_n \neq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ має границю, причому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}. \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, де $b \neq 0$ і всі $y_n \neq 0$, то

$x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ – нескінченно малі, тоді

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} = \frac{a}{b} + \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by_n}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

За властивостями нескінченно малих послідовність $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ є нескінченно малою, а послідовність $\dfrac{1}{by_n}$ є обмеженою (згідно з теоремою 3), тому послідовність $\gamma_n = \dfrac{1}{by_n}(b\alpha - a\beta_n)$ як добуток нескінченно малої на обмежену є нескінченно малою.

Отже, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n$, де γ_n – нескінченно мала. Звідси випливає, що число $\frac{a}{b}$ є границею послідовності $\frac{x_n}{y_n}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, що і треба було довести.

***Теорема 7* (*про граничний перехід в нерівностях*).** Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні і при всіх n виконуються нерівності $x_n > y_n$ або $x_n \geq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Зауважимо, що із строгої нерівності $x_n > y_n$ для *границь* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ можлива рівність. Наприклад, нехай $x_n = \frac{2}{n}$ і $y_n = \frac{1}{n}$.

Очевидно, що при всіх n виконується нерівність $\frac{2}{n} > \frac{1}{n}$, тобто $x_n > y_n$, але оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Дамо поняття *обмежених зверху* і *обмежених знизу* послідовностей.

Послідовність $\{x_n\}$ називається ***обмеженою зверху***, якщо існує таке число M, що при всіх n виконується нерівність $x_n \leq M$.

Послідовність $\{y_n\}$ називається ***обмеженою знизу***, якщо існує таке *число* M, що при всіх n виконується нерівність $y_n \geq M$.

Справедлива така теорема.

***Теорема 8* (*достатня умова збіжності послідовності*).** *Всяка зростаюча обмежена зверху послідовність має скінченну границю і всяка спадна обмежена знизу послідовність має скінченну границю.*

Цю теорему приймаємо без доведення.

***Теорема 9* (*про затиснену змінну*).** Якщо для трьох послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$ при всіх n виконуються нерівності $x_n \leq y_n \leq z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Це друга достатня *ознака існування границі.*

Доведення. Нехай при всіх n $x_n \leq y_n \leq z_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доведемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Задамося довільним додатним числом ε. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$., то для цього $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число N_1 таке, що при всіх $n > N_1$ виконувалась нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то для цього $\varepsilon > 0$ знайдеться натуральне число N_2 (інше число, бо інша послідовність) таке, що при всіх $n > N_2$ буде виконуватись нерівність $|z_n - a| < \varepsilon$ або $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$.

Виберемо із цих двох чисел N_1 і N_2 більше і позначимо його N. Тоді при всіх $n > N$ будуть виконуватись обидві попередні нерівності, звідси матимемо $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$. Отже, при всіх $n > N$ виконуватиметься подвійна нерівність $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ або $| y_n - a | < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Теорему доведено.

2.5 Нескінченно великі послідовності

Ці послідовності за характером зміни ставляться на противагу нескінченно малим. Вони в процесі зміни, починаючи з деякого моменту, здатні стати і залишатись надалі за абсолютною величиною більшими будь-якого додатного числа як завгодно великого.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається ***нескінченно великою,*** якщо для будь-якого наперед заданого додатного числа M знайдеться номер N такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$| x_n | > M. \tag{2.9}$$

Геометрично це означає, що в будь-якому інтервалі $(-M; M)$, де M як завгодно велике, міститься скінченне число членів послідовності $\{x_n\}$, а поза ним її членів нескінченно багато.

Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n \cdot n^2$ є нескінченно великою. Покажемо це, користуючись означенням. Задамося довільним числом $M > 0$ і покажемо, що знайдеться номер N, що залежить від M такий, що при всіх $n > N$ виконуватиметься нерівність $| x_n | > M$. Будемо вимагати, щоб $| (-1)^n \cdot n^2 | > M$. Ця нерівність рівносильна такій: $n^2 > M$, звідси маємо, що $n > \sqrt{M}$. Тоді за номер N можна взяти функцію – ціла частина числа, тобто $N = E\left(\sqrt{M}\right)$, і для членів з номерами $N+1$, $N+2$, ... будемо мати, що нерівність $| (-1)^n \cdot n^2 | > M$ виконується. Отже, ця послідовність є нескінченно великою.

Зауваження. Важливим є випадки, коли члени нескінченно великої послідовності зберігають знак, хоча б при великих n:

а) якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика і $x_n > 0$, то пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$,

б) якщо ж $x_n < 0$, то пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Важливою є теорема.

Теорема 10 (про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої послідовностей). *Якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно мала; і навпаки, якщо послідовність $\{x_n\}$ нескінченно мала, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ нескінченно велика.*

Доведення: а) нехай послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика, доведемо, що послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ є нескінченно малою. Задамося довільним числом $\varepsilon > 0$ і покажемо, що буде виконуватись нерівність $\left|\dfrac{1}{\tilde{\delta}_n}\right| < \varepsilon$, починаючи з деякого номера. Дійсно, оскільки послідовність x_n – нескінченно велика, то за означенням для числа $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ знайдеться номер N такий, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|\tilde{\delta}_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тоді при всіх $n > N$ будемо мати $\left|\dfrac{1}{\tilde{\delta}_n}\right| = \dfrac{1}{|x_n|} < \dfrac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$. Отже, $\left|\dfrac{1}{\tilde{\delta}_n}\right| < \varepsilon$ при всіх $n > N$, а це означає, що послідовність $\dfrac{1}{x_n}$ – нескінченно мала;

б) друга частина теореми доводиться аналогічно (довести самостійно).

Відзначимо ще властивості нескінченно великих послідовностей, оформивши їх у вигляді теореми.

Теорема 1. *Добуток нескінченно великих* послідовностей є *нескінченно велика* послідовність.

Доведення. Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ нескінченно великі. Доведемо, що послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ – нескінченно велика. Задамося довільним числом $M > 0$. Оскільки $\{x_n\}$ нескінченно велика, то для числа $\sqrt{M} > 0$ знайдеться номер N_1 такий, що при всіх $n > N_1$ виконується нерівність $|\tilde{\delta}_n| > \sqrt{M}$. Аналогічно, оскільки $\{y_n\}$ нескінченно велика, то для числа $\sqrt{M}$ знайдеться номер N_2 (інший) такий, що при всіх $n > N_2$ виконується нерівність $|\acute{o}_n| > \sqrt{M}$. Позначимо через N більше із чисел N_1 і N_2, тоді при $n > N$ будуть виконуватись обидві модульні нерівності. Отже, при $n > N$ матимемо, що $|\tilde{\delta}_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M}$, тобто $|x_n \cdot y_n| > M$ при всіх $n > N$, а це означає, що послідовність $\{x_n y_n\}$ – нескінченно велика.

Теорема 2. Сума нескінченно великих послідовностей *однакового знаку* є нескінченно велика послідовність.

Доведення. Доведення проведемо для суми двох нескінченно великих послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, причому будемо вважати, що $x_n > 0$ і $y_n > 0$. Доведемо, що послідовність $\{x_n + y_n\}$ – нескінченно велика.

Задамося довільним числом $M > 0$. Оскільки послідовність $\{x_n\}$ нескінченно велика, то для числа $\dfrac{M}{2} > 0$ знайдеться номер N_1 такий, що при всіх $n > N_1$ виконується нерівність $|x_n| > \frac{M}{2}$. Аналогічно, оскільки $\{y_n\}$ нескінченно велика, то для числа $\frac{M}{2}$ знайдеться номер N_2 такий, що при всіх $n > N_2$ випливає $|y_n| > \frac{M}{2}$. Через N позначимо більше із чисел N_1 і N_2, тоді при всіх $n > N$, враховуючи, що $x_n > 0$ і $y_n > 0$, будемо мати:

$$|x_n + y_n| = |x_n| + |y_n| > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

Отже, $|x_n + y_n| > M$ при всіх $n > N$, а це означає, що послідовність $\{x_n + y_n\}$ – нескінченно велика.

2.6 Про невизначені вирази

При знаходженні границі відношення двох нескінченно малих теорему про границю частки застосувати не можна, оскільки границя знаменника дорівнює нулю. Те ж саме стосується границі відношення двох нескінченно великих. В загальному випадку тут нічого певного сказати не можна. Пояснимо це на прикладах.

1. Нехай $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{3}{n}$, обидві послідовності є нескінченно малі, будемо шукати границю їх відношення: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} : \frac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

2. Нехай $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n^2} \to 0$ Їх частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} : \frac{1}{n^2} = n \to \infty$.

3. Нехай $x_n = \frac{1}{n^3} \to 0$, $y_n = \frac{1}{n} \to 0$. Їх частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n^3} : \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \to \infty$.

4. Нехай $x_n = n^3 \to \infty$, $y_n = 2n^2 \to \infty$ Їх частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^3}{2n^2} = \frac{n}{2} \to \infty$.

5. Нехай $x_n = 2n \to \infty$, $y_n = n^2 \to \infty$. Їх частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0$.

6. Нехай $x_n = 3n^2 \to \infty$, $y_n = n^2 \to \infty$. Їх частка $\frac{x_n}{y_n} = \frac{3n^2}{n^2} = 3$.

7. Нехай $x_n = 3n^2 \to \infty$, $y_n = \frac{4}{n^2} \to \infty$. Їх добуток $x_n \cdot y_n = 3n^2 \frac{4}{n^2} = 12$.

8. Нехай $x_n = \frac{1}{n^2} \to \infty$, $y_n = 3n^3 \to \infty$. Їх добуток $x_n \cdot y_n = 3n^3 \frac{1}{n^2} = 3n \to \infty$.

Дробовий вираз, чисельник і знаменник якого є змінними, що прямують до нуля або є нескінченно великими, називається *невизначеністю ти-*

ну $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. В двох останніх прикладах маємо справу з *невизначеністю типу* $(0\cdot\infty)$.

При знаходженні границі суми двох нескінченно великих різних знаків мова йде про невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Операція визначення границі таких виразів називається ***розкриттям невизначеностей типу*** $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$. Крім цих невизначеностей існують ***невизначеності типу*** 1^{∞}, ∞^{0} і 0^{0}. Спосіб розкриття невизначеності залежить від конкретного вигляду виразів, що дають відповідну невизначеність. Приведемо приклади.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{5n-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3-\frac{1}{n})}{n(5-\frac{2}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{5-\frac{2}{n}}=\frac{3}{5}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n+4}{2n^2+3n-6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n}-\frac{6}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4}{n+1}-3n\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4-3n^2-3n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+4}{n+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{3n}{n}+\frac{4}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}=-3.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+3}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3n+1}-\sqrt{2n+3}\right)\cdot\left(\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+3}\right)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1-(2n+3)}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{2n+3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{2+\frac{3}{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{2+\frac{3}{n}}}=\infty,$$ бо $\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}\to\infty$, а $\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{2+\frac{3}{n}}\to\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

2.7 Поняття границі функції

Нехай на деякому числовому проміжку X задана функція $f(x)$. Будемо вивчати характер її поведінки в точках цього проміжку. Візьмемо на ньому довільно деяку точку $x = a$. Виберемо довільну *послідовність* $\{x_n\}$ значень аргументу цієї функції, що *збігається* до цього числа a і будемо слідкувати за послідовністю відповідних значень функції $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$. Може статися, що ця послідовність $\{f(x_n)\}$ має границею деяке число A. Якщо це число A буде границею відповідних значень функції для *будь-якої іншої* послідовності значень аргументу, що прямує до a, то тільки в цьому випадку число A можна назвати *границею* функції в точці a. Дамо спочатку поняття *односторонніх границь* функції в точці $x = a$, коли аргумент прямує до a зліва ($x < a$) і справа ($x > a$).

Означення. Число A називається *границею функції* $f(x)$ *при* $x \to a$ *зліва,* якщо, яку б послідовність $x_1, x_2, ..., x_n ...$, що *збігається* до числа a і $x_n < a$ при всіх n, не пробігав аргумент функції, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ *всякий раз* має своєю *границею* це число A.

Позначають це символічно так: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Цей запис означає, що для $\forall x_n / x_n \to a$ і $x_n < a \Rightarrow f(x_n) \to A$.

Означення. Число B називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$ справа, якщо, яку б послідовність $x_1, x_2, ..., x_n ...$, що *збігається* до a і $x_n > a$ при всіх n, не пробігав аргумент, відповідна послідовність значень функції $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ *всякий раз* має своєю *границею* це число B.

Позначають це символічно так: $B = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Цей запис означає, що для $\forall x_n / x_n \to a$ і $x_n > a \Rightarrow f(x_n) = B$.

Зауважимо, що числа A і B не завжди рівні, це односторонні границі. Але у випадку, коли $A = B$, то їх спільне значення називається *двосторонньою* границею функції в точці $x = a$.

Означення. Якщо *односторонні* границі функції $f(x)$ в точці $x = a$ *рівні* між собою, то кажуть, що при $x \to a$ *функція* $f(x)$ *має границю* і її позначають символом $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Це є означення *границі функції* за *Гейне* (Генріх Гейне — німецький математик).

Нагадаємо відоме зі школи поняття *границі функції* за *Коші* (Коші — французький математик).

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого наперед заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться додатне число δ, що залежить від ε, таке, що як тільки $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Це означає, що значення функції знаходяться від числа A як завгодно близько, якщо значення аргументу знаходяться достатньо близько до числа a.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то функція $f(x)$ називається *нескінченно малою* в *околі точки* $x=a$.

Зауваження. Оскільки поняття границі функцій за Гейне в точці $x=a$ визначається через границю послідовностей значень функції, що відповідають послідовності значень аргументу, які збігаються до a, то всі основні теореми про границі послідовностей справедливі і для границь функції і їх доведення не має потреби проводити.

Поняття границі функції при $x\to+\infty$ або $x\to-\infty$ дається аналогічно попереднім.

Означення. *Число A* називається *границею функції $f(x)$ при $x\to+\infty$*, якщо, яку б нескінченно велику послідовність $\{x_n\}$ таку, що $x\to+\infty$, не пробігав аргумент, відповідна *послідовність значень функції* $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n),\ldots$ всякий раз має *границею* число A.

Символічно це позначають так: $\lim\limits_{x\to a+\infty} f(x)=A$.

Аналогічно можна вводити поняття нескінченно великої функції в околі деякої точки $x=a$, якщо при $x\to a$ відповідні послідовності значень функції $f(x_1), f(x_2),\ldots, f(x_n),\ldots$ є нескінченно великими всякий раз, коли $x_n\to a$.

2.8 Найважливіші границі

2.8.1 *Границя функції* $\dfrac{\sin x}{x}$ *при* $x\to 0$

Теорема. Справедлива рівність $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, (2.10)

де x вимірюється в радіанах.

Доведення. Враховуючи, що функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ є *парною*, бо $f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}=f(x)$, достатньо показати справедливість цієї рівності, якщо вважати, що $0<x<\pi/2$, оскільки $x\to 0$. Спочатку доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ і $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Побудуємо коло одиничного радіуса (рис. 2.2). Якщо кут x вимірювати в радіанах, то дуга AB чисельно дорівнює x, $BC=\sin x$. Оскільки $BC<\breve{AB}$, то $0<\sin x<x$. При $x\to 0$ з цієї подвійної нерівності маємо, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Враховуючи

тотожність $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$, маємо, що $\cos x = 1-2\sin^2(x/2)$, тоді

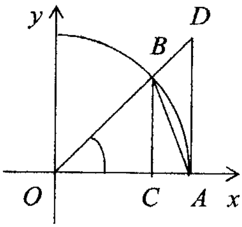


Рисунок 2.2

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = \lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2(x/2)\right)=1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. З рисунку 2.2 маємо, враховуючи припущення про площі, що $S_{\Delta AOB} < S_{сект. AOB} < S_{\Delta AOD}$. Оскільки $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 sinx = \frac{1}{2}sinx$, $S_{сект. AOB} = \frac{1}{2}R \cdot A\breve{B} = \frac{1}{2}R\cdot Rx = \frac{1}{2}x$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}AO \cdot AD = \frac{1}{2}\cdot tgx = \frac{1}{2}tgx$, бо $R=1$, то $\frac{1}{2}sinx < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tg\,x$ або $sinx < x < tg\,x$. Поділимо цю подвійну нерівність на $sinx > 0$, дістанемо: $1 < \frac{x}{sinx} < \frac{1}{cosx}$, звідки випливає, що $cos\,x < \frac{sinx}{x} < 1$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, то з цієї подвійної нерівності випливає, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. При $x<0$ і $x\to 0$, враховуючи парність функції $\frac{\sin x}{x}$, будемо мати те ж саме, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Теорему доведено.

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}$.

Розв'язування. Нехай $mx=t$, то при $x\to 0 \Rightarrow t\to 0$ і $x=\frac{t}{m}$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{m\cdot\sin t}{t} = m\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = m\cdot 1 = m.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

Розв'язування.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\cdot 1 = 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1.$

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}.$

Розв'язування. Нехай $\arcsin x=t$, то $\sin t=x$ і при $x\to 0\Rightarrow t\to 0$, тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}.$

Розв'язування. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\cdot\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\beta\cdot\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{1}{1}=\dfrac{\alpha}{\beta}.$

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}.$

Розв'язування. Враховуючи, що $1-\cos 4x=2\sin^2 2x$, будемо мати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\cdot\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1=\dfrac{1}{2}.$

Відповідь: $\dfrac{1}{2}.$

2.8.2 *Границя функції* $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ *при* $x\to\infty$

1. *Число e.*

Це число в математичному аналізі відіграє *важливу* роль і визначається воно за допомогою границі числової послідовності $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$. Будемо визначати значення її членів: $u_1=2$; $u_2=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}=2{,}25$; $u_3=\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{64}{27}\approx 2{,}37$; $u_4=\left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4\approx 2{,}44$;... $u_{10}\approx 2{,}59$;..., $u_{100}\approx 2{,}70$;...; $u_{10000}\approx 2{,}718$,.... Як бачимо, ця послідовність є *зростаючою* і *обмеженою*, бо при всіх n маємо, що $2\le u_n<3$, зокрема, $u_n<3$, тобто послідовність u_n *зростаюча* і *обмежена зверху*, тому згідно з теоремою 8 (*достатньою ознакою збіжності послідовності*) ця послідовність *має границю*, яку називають ***числом e*** (на честь Леонарда Ейлера).

Отже, $$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}. \qquad (2.11)$$

Число e є ірраціональним числом і його наближене значення є таким $e\approx 2,71828182845904523....$

Логарифм числа a, основою якого є число e, називається *натуральним логарифмом* і позначають символом $\ln a$.

2. *Друга важлива границя*

Виявляється, що рівність (2.11) залишається справедливою, коли цілочисловий аргумент n замінити неперервним аргументом x.

Доведемо, що $$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (2.12)$$

Виберемо довільне значення аргументу $x>1$ (достатньо велике). Нехай функція – ціла частина $E(x)=n$, тоді $n\le x<n+1$, звідси

$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\Rightarrow 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}$. Тоді будемо мати

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Знайдемо тепер границі крайніх послідовностей при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1}=e\cdot 1=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=e\cdot 1^{-1}=e.$$

Оскільки з нерівності $n\le x\le n+1$ при $n\to\infty$ випливає, що $x\to+\infty$, а в попередній подвійній нерівності ліва і права частини при $n\to\infty$ мають одну і ту ж границю e, то за *теоремою 10* (*про затиснену змінну*) матимемо, що

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Покажемо тепер, що

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,\ \text{де}\ x<-1. \qquad (2.13)$$

Зробимо *лінійну заміну за формулою* $t=-(x+1)$. Оскільки $x<-1$, то $t>0$ і при $x\to-\infty$ маємо $t\to+\infty$, а $x=-(t+1)$. Тоді $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(t+1)}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right) = e\cdot 1 = e.$$

З рівностей (2.12) і (2.13) маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad (2.14)$$

яку називають *другою важливою границею.*

Зауваження. Якщо в рівності (2.14) зробити заміну $\frac{1}{x}=t$, то при $x\to\infty$ випливає, що $t\to 0$, тоді ця рівність запишеться так

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e. \qquad (2.15)$$

Формули (2.14) і (2.15) можна записати однією формулою, якщо звернути увагу на те, що при $x\to\infty$ величина $\frac{1}{x}$ є нескінченно малою, так само, як при $t\to 0$ випливає, що t є нескінченно малою, а показники степеня в обох випадках, як обернені величини, є нескінченно великими, при цьому основа степеня прямує до одиниці. Якщо нескінченно малу величину позначити α, то обидві формули приймуть вигляд

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \qquad (2.16)$$

де α – нескінченно мала.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$.

Розв'язування. При $x\to\infty \Rightarrow$ показник степеня $3x\to\infty$, а основа степеня $1+\frac{2}{x}\to 1$, при цьому $\frac{2}{x}\to 0$, тобто є нескінченно малою. Отже, маємо невизначеність типу (1^∞). Розкриємо її, скориставшись формулою (2.16), де $\alpha=\frac{2}{x}$. Зробимо такі тотожні перетворення:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{x}\cdot 3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6} = e^6,$$ бо при $\frac{2}{x}=\alpha$, де $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$, матимемо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6} = \lim\limits_{l\to 0}\left((1+l)^{\frac{1}{2}}\right)^{6} = e^6.$

Відповідь: e^6.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

Розв'язування. При $x\to\infty$ вираз $3x-2\to\infty$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{2x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4/x}{2+5/x}=$ $2/2=1$. Отже, маємо невизначеність $\left(1^{\infty}\right)$. Розкриємо цю невизначеність, скориставшись формулою (2.16). Для цього спочатку вираз $\dfrac{2x-4}{2x+5}$ подамо у вигляді суми $1+\alpha$, де α - нескінченно мала, але треба встановити її конкретний вигляд: $\dfrac{2x-4}{2x+5}=\dfrac{(2x+5)-9}{2x+5}=\dfrac{2x+5}{2x+5}+\dfrac{-9}{2x+5}=$ $=1+\dfrac{-9}{2x+5}$. Отже, $\alpha=\dfrac{-9}{2x+5}$, причому ця величина є нескінченно мала, а показником степеня буде величина $\dfrac{1}{\alpha}=-\dfrac{2x+5}{9}$. Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x+5}\right)^{3x-2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-9}{2x+5}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-9}{2x+5}\right)^{-\frac{2x+5}{9}}\right)^{-\frac{9(3x-2)}{2x+5}}=e^{-\frac{27}{2}},$$ бо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9(3x-2)}{2x+5}=$

$$=-9\lim_{x\to\infty}\frac{3-2/x}{2+5/x}=-9\cdot\frac{3}{2}=-\frac{27}{2}.$$

Відповідь: $e^{\frac{-27}{2}}$.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{(2x-2)}}$.

Розв'язування. При $x\to 1\Rightarrow 7-6x\to 1$, а показник степеня $\dfrac{x}{2x-2}\to\infty$. Отже, маємо невизначеність типу $\left(1^{\infty}\right)$, розкриємо її:

$$\lim_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{2x-2}}=\lim_{x\to 1}(1+6-6x)^{\frac{x}{2x-2}}=\lim_{x\to 1}\left((1+6(1-x))^{\frac{1}{6(1-x)}}\right)^{\frac{6(1-x)x}{2(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left((1+6(1-x))^{\frac{1}{6(1-x)}}\right)^{-3x}=e^{-3}.$$

Відповідь: e^{-3}.

2.8.3 *Границя функцій* $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ і $\dfrac{e^{x}-1}{x}$ при $x\to 0$

З формули (2.15) можна вивести ще дві важливі формули. Записавши рівність $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ у вигляді $(1+x)^{1/x}\to e$ при $x\to 0$, будемо мати, що $\ln(1+x)^{1/x}\to 1$, тобто $\dfrac{1}{x}\,ln(1+x)\to 1$ при $x\to 0$ або $\dfrac{\ln(1+x)}{x}\to 1$.

Отже,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (2.17)$$

Зробимо заміну $ln(1+x)=t$, при цьому $t\to 0$, якщо $x\to 0$; звідки за означенням логарифма $1+x=e^t$, $x=e^t-1$, з рівності (2.17) матимемо

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{e^t-1}=1$, звідси $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$ або

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (2.18)$$

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{x}$.

Розв'язування. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\left(e^{4x}-1\right)}{4x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{4x}=4\cdot 1=4$, бо, якщо виконати заміну $4x=t$, де $t\to 0$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{4x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$.

Відповідь: 4.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}$.

Розв'язування. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{5x}}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}\left(e^{-3x}-1\right)}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}e^{5x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}=1\cdot(-3)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{-3x}=1\cdot(-3)\cdot 1=-3.$

Відповідь: -3

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{x}$.

Розв'язування. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\cdot\ln(1-5x)}{-5x}=$

$=-5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{-5x}=-5\cdot 1=-5$, бо при заміні $-5x=t$ матимемо

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{-5x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1.$

Відповідь: -5.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(3-x)-\ln 3}{x^2-x}$.

Розв'язування. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(3-x)-\ln 3}{x^2-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{3-x}{3}}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)}{x(x-1)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)}{x}=-1\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)}{-x/3}=-1\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

Зауваження. Користуючись формулою (2.18), знайдемо границю більш загального вигляду $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$. Для цього виразимо a^x через степінь за основою e, а саме: $a^x=\left(e^{\ln a}\right)^x=e^{x\ln a}$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln a\left(e^{x\ln a}-1\right)}{x\ln a}=\ln a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\ln a\cdot 1=\ln a.$$

Отже,
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a. \qquad (2.19)$$

2.9 Порівняння нескінченно малих величин

При вивченні нескінченно малих доводиться порівнювати характер їх зміни. В математичному аналізі дві нескінченно малі величини порівнюються за допомогою границі їх відношення, яка може бути скінченною і рівною нулю, скінченною і відмінної від нуля, нескінченно великою або зовсім не існувати.

Нехай задано дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ в околі деякої точки $x=a$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$.

Означення. Якщо *границя* відношення двох нескінченно малих α і β дорівнює *нулю*, то α називається *нескінченно малою більш високого* порядку, *ніж* β.

Символічно записується так: $\alpha=o(\beta)$ при $x\to a$. Цей запис означає, що
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0. \qquad (2.20)$$

Означення. Якщо *границя* відношення двох нескінченно малих α і β дорівнює деякому *числу*, відмінному від нуля, то α і β *називаються нескінченно малими одного порядку*.

Символічно записують це так: $\alpha=O(\beta)$ при $x\to a$. Це означає, що
$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K\text{, де } K\neq 0. \qquad (2.21)$$

Означення. Якщо *границя* відношення двох нескінченно малих α і β дорівнює *нескінченності*, то *α називається нескінченно малою більш низького порядку, ніж β* або β називається нескінченно малою більш високого порядку, ніж α.

Символічно записують це так: $\beta = o(\alpha)$. Це означає, що

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty\ . \qquad (2.22)$$

Наприклад , а) величини $\alpha = sin5x$ і $\beta = 2x$ при $x \to 0$ є нескінченно малі. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin5x}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5sin5x}{5x} = \dfrac{5}{2}\cdot 1 = \dfrac{5}{2} \neq 0$, то ці нескінченно малі є одного порядку, тобто $sin5x = 0(2x)$.

б) величини $\alpha = 1 - cos2x$ і $\beta = x$ при $x \to 0$ є нескінченно малі; знайдемо границю їх відношення .

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos2x}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\,sin^2x}{x} = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0} sinx\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sinx}{x} = 2\cdot 0\cdot 1 = 0$. Отже, $1-cos2x = 0(x)$, тобто $1-cos2x$ при $x \to 0$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж x. Очевидно, що $1-cos2x = 0(x^2)$, бо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos\,2x}{x^2} = 2 \neq 0$.

Серед нескінченно малих одного порядку важливу роль відіграють *еквівалентні* нескінченно малі (це частинний випадок рівності (2.21), коли границя дорівнює одиниці).

Означення. Якщо *границя* відношення двох нескінченно малих α і β при $x \to a$ дорівнює *одиниці*, то величини α і β називаються ***еквівалентними*** *нескінченно малими.*

Символічно це записують так: $\alpha \sim \beta$. Це означає, що

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1\,. \qquad (2.23)$$

Зауваження. Приведені в попередньому пункті важливі границі дають можливість навести таблицю еквівалентних нескінченно малих величин (при $x \to 0$), а саме:

$$sin\,x \sim x;\ \ tg\,x \sim x;\ \ arcsin\,x \sim x;\ \ arctg\,x \sim x;\ \ ln\,(1+x) \sim x;\ \ e^x - 1 \sim x. \qquad (2.24)$$

Звернемо увагу на те, що вказані трансцендентні функції при $x \to 0$ еквівалентні найпростішій степеневій функції $y = x$.

Нарешті відзначимо ще важливі властивості еквівалентних нескінченно малих величин, приведемо їх у вигляді теорем.

Теорема 1. *Різниця* двох еквівалентних нескінченно малих величин є нескінченно мала *більш високого порядку*, ніж кожна із них.

Доведення. Нехай $\alpha \sim \beta$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta} = 1$. Доведемо, що $\alpha - \beta = o(\alpha)$.

Дійсно, будемо шукати при $x \to a$ границю відношення $\alpha - \beta$ до α:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}(1-\dfrac{\beta}{\alpha})=1-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\alpha}=1-1=0$. Отже, при $x\to a$ $\alpha-\beta$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж α.

Теорема 2. Границя *відношення двох нескінченно малих* не *зміниться*, якщо одну із них або обидві замінити на *еквівалентні*.

Доведення. Нехай α і β – дві нескінченно малі і $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$ при $x\to a$.

Доведемо, що $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

Дійсно, оскільки $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha'}=1$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\beta'}=1$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\alpha}\cdot\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{\beta}{\beta'}=$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta}{\beta'}=1\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot 1=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}$. Отже, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha'}{\beta'}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}$, що і треба було довести.

Зауваження. Для розкриття невизначеності $\dfrac{0}{0}$ зручно користуватись цією теоремою.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,6x}{arcsin\,2x}$.

Розв'язування. Оскільки $tg6x\sim 6x$, $arcsin2x\sim 2x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,6x}{arcsin\,2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{2x}=3.$$

Відповідь: 3.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{sin\,4x}$.

Розв'язування. Оскільки при $x\to 0$ $e^{3x}-1\sim -3x$, $sin4x\sim 4x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-3x}-1}{sin\,4x}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x}{4x}=-\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $-3/4$.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty}x(e^{2/x}-1)$.

Розв'язування. Оскільки $x(e^{2/x}-1)\sim 2/x$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x(e^{2/x}-1)=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2/x}-1}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{2/x}{1/x}=2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1-4x)}{arcsin\,5x}$.

Розв'язування. Оскільки $ln(1-4x)\sim -4x$, $arcsin5x\sim 5x$ при $x\to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1-4x)}{arcsin\,5x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{5x}=-\frac{4}{5}.$$

Відповідь: $-4/5$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{arctg(3-3x)}{\sqrt{5-x}-2}$.

Розв'язування. Оскільки $arctg(3-3x)\sim 3-3x$ при $x\to 1$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{arctg(3-3x)}{\sqrt{5-x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{arctg(3-3x)}{\sqrt{5-x}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{3(1-x)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=$$

$$=3\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}{5-x-4}=3\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}{1-x}=3\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{5-x}+2\right)=4$$

Відповідь: 4.

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin4x-2sin2x}{x^3}$.

Розв'язування. Оскільки $sin4x\to 0$ і $2sin2x\to 0$ при $x\to 0$, то їх різниця є нескінченно малою більш високого порядку до еквівалентних їм ($sin4x\sim 4x$, $sin2x\sim 2x$). До того ж , якщо в чисельнику $sin4x$ і $sin2x$ замінити на еквівалентні їм, то в чисельнику дістанемо нуль. Розкриємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$, перетворивши чисельник $sin4x-2\,sin2x=2sin2xcos2x-2sin2x=$ $=2sin2x(cos2x-1)=-2sin2x2sin^2x=-4\,sin^2xsin2x$. Оскільки $sinx\sim x$, $sin2x\sim 2x$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin4x-2sin2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\,sin^2sin\,2x}{x^3}=-4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin^2sin\,2x}{x^3}=$

$$=-4\lim_{x\to 0}\frac{x^2\quad 2x}{x^3}==-4\cdot 2=-8.$$

Відповідь: -8.

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+4x\,sin\,2x)}{tg^2}$.

Розв'язування. Оскільки $ln\,(1+4xsin2x)\sim 4xsin2x$, а $sin2x\sim 2x$, $tgx^2\sim x^2$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(1+4x\,sin\,2x)}{tgx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\,sin\,2x}{x^2}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin\,2x}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=4\cdot 2=8.$

Відповідь: 8.

2.10 Неперервні функції

2.10.1 Поняття неперервності функції в точці

Це одне із важливих понять математичного аналізу, яке безпосередньо пов'язане з поняттям границі.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***неперервною** в точці* $x = x_0$ якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0). \tag{2.25}$$

Більш детально *неперервність функції* $f(x)$ *в точці* $x = x_0$ означає:

а) функція $f(x)$ *визначена* в самій точці $x = x_0$, тобто існує $f(x_0)$;

б) існують односторонні границі в точці $x = x_0$, які рівні між собою, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, тобто існує границя функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, тобто існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

в) границя функції $f(x)$ при $x = x_0$ дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$.

Рівність (2.25) може бути записана так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x). \tag{2.26}$$

Отже, для неперервної функції в точці символ границі і символ функції можна міняти місцями, тобто в *неперервній функції можна переходити до границі під знаком самої функції.*

Зауваження. Якщо порушується хоча б одна із вказаних трьох умов, то функція називається ***розривною** в точці* $x = x_0$, а точка $x = x_0$ *називається точкою розриву функції.*

Якщо функція *неперервна в кожній* внутрішній точці деякого проміжку, то така *функція називається неперервною в цьому проміжку.*

Поняття *неперервності* функції в точці можна дати на мові *приростів* аргументу і функції.

Будемо вважати, що функція $y = f(x)$ визначена в точці $x = x_0$ і в деякому околі цієї точки. Надамо значенню аргументу $x = x_0$ довільний приріст Δx такий, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала цьому околу. Тоді значення функції $f(x_0)$ перейде в нове значення $f(x_0 + \Delta x)$, а функція $f(x)$ дістане приріст, що дорівнює різниці її нового значення і початкового, тобто

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \tag{2.27}$$

який визваний приростом аргументу Δx.

Справедлива теорема.

Теорема. Для того щоб функція $y = f(x)$ була *неперервною в точці* $x = x_0$, необхідно і достатньо, щоб *нескінченно малому приросту аргументу* в цій точці *відповідав нескінченно малий приріст функції.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Розглянемо приріст функції, що визваний приростом аргументу: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Перейдемо в цій рівності до границі за умови, що $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, тобто при $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$.

Достатність. Нехай $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ або $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0$. Звідси за властивістю границь матимемо: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = 0$ або $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, де $x = x_0 + \Delta x$. Теорема доведена повністю.

Приклад. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна в кожній точці її області визначення.

Розв'язування. Функція $y = \sin x$ визначена при будь-якому $x \in R$. Надамо аргументу x довільного приросту Δx і знайдемо приріст функції $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Перетворимо цю різницю синусів в добуток, користуючись відомою формулою $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, дістанемо $\Delta y = 2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$. Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = 2\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = 0.$$

Отже, $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а це означає, згідно з доведеною теоремою, що функція $y = \sin x$ неперервна в кожній точці числової осі.

Справедлива теорема.

Теорема. ***Всі основні елементарні функції неперервні в області їх визначення.***

Доведення цієї теореми опустимо (хоч доводиться вона для більшості із них за аналогією доведення неперервності функції $y = \sin x$).

2.10.2 Дії з неперервними функціями

Спочатку розглянемо арифметичні дії над неперервними функціями. Справедливі такі теореми.

Теорема 1. Сума неперервних функцій є функцією неперервною.

Теорема 2. Добуток неперервних функцій є функцією неперервною.

Теорема 3. Частка від ділення двох неперервних функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$ в точці $x = x_0$ є функцією неперервною, якщо $f_1(x_0) \neq 0$.

Доведення. Доведемо одну із цих теорем, наприклад, теорему 3. Нехай функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ неперервні в деякій точці $x = x_0$ і $f_2(x_0) \neq 0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$. Розглянемо функцію $F(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, знайдемо її границю при $x \to x_0$. Користуючись теоремою про границю частки, дістанемо

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)} = F(x_0).$$ Отже, функція $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

є неперервною в точці $x = x_0$ згідно з означенням неперервності функції в точці.

Інші дві теореми доводяться аналогічно (доведіть самостійно).

Теорема 4 (про *неперервність складеної функції*). Якщо функція $u = g(x)$ неперервна в деякій точці $x = x_0$, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u = u_0$, де $u_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці $x = x_0$.

Доведення. Нехай функція $u = g(x)$ неперервна в точці $x = x_0$, тоді згідно з теоремою про неперервну функцію при $\Delta x \to 0$ випливає, що $\Delta u \to 0$. Оскільки функція $y = f(u)$ є неперервною в точці $u_0 = g(x_0)$, то при $\Delta u \to 0$ випливає, що $\Delta y \to 0$. Отже, при $\Delta x \to 0$ випливає, що $\Delta y \to 0$ (за властивістю транзитивності при $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$), тобто нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст Δy складеної функції, а це означає, що складена функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці $x = x_0$. Теорему доведено.

З теореми про неперервність основних елементарних функцій і цих чотирьох теорем згідно з означенням елементарної функції випливає справедливість такої теореми.

Теорема. *Всяка* **елементарна** *функція неперервна в своїй області визначення.*

Приклад. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Розв'язування. Функція визначена при всіх $x \neq 1$. Отже, на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$ ця функція є неперервною згідно з попередньою теоремою. Точка $x = 1$ є точкою розриву цієї функції.

2.10.3 Точки розриву і їх класифікація

Нагадаємо, точкою розриву функції $y = f(x)$ називається така точка $x = x_0$, в якій не виконується рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тобто порушується хоч би одна із трьох вказаних умов а) – в). В залежності від характеру поведінки функції в околі точки розриву вони поділяються на точки розриву першого роду і точки розриву другого роду.

Означення. Якщо *існують* обидві односторонні границі в точці $x = x_0$, але *не рівні* між собою, то точка $x = x_0$ називається точкою розриву першого роду, а функція в цій точці має ***розрив першого роду***.

Отже, в околі точки розриву першого роду функція є обмеженою, а різниця між правосторонньою і лівосторонньою границями називається стрибком даної функції в точці розриву функції (на графіку функції при переході через точку розриву 1-го роду здійснюється скінченний стрибок біжучою точкою графіка) (рис. 2.2).

Означення. Якщо одна або обидві односторонні границі в точці $x = x_0$ *нескінченні* або не існують, то точка $x = x_0$ називається *точкою розриву другого роду.*

Отже, в околі точки розриву 2-го роду функція є необмеженою, точніше *нескінченно великою*, а на графіку функції в цій точці відбувається *безмежний* стрибок (рис. 2.3).

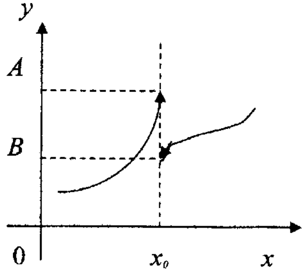


Рисунок 2.2

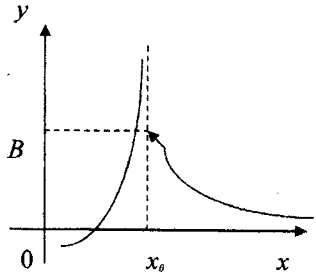


Рисунок 2.3

Частинним випадком точки розриву 1-го роду виділяють той, коли односторонні границі функції в точці $x = x_0$ існують і рівні між собою, але в самій точці $x = x_0$ функція невизначена. Така точка називається ***точкою усувного розриву***. Ця назва походить від того, що цей розрив можна усунути, довизначивши функцію таким чином, щоб дістати неперервну функцію в цій точці.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{x^3}{x-2}$ і встановити характер точок розриву.

Розв'язування. Ця функція визначена при всіх $x \neq 2$. Отже, функція неперервна на проміжках $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$. Точка $x = -2$ є її єдиною точкою розриву. Оскільки $\lim\limits_{x \to -2-0} \dfrac{x^3}{x+2} = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to -2+0} \dfrac{x^3}{x+2} = -\infty$, то точка $x = 2$ є точкою розриву 2-го роду.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } & x < -1, \\ x^2 & \text{при } -1 \le x < 2, \\ 3 & \text{при } \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Розв'язування. Дана функція неперервна на проміжках $(-\infty; -1)$, $(-1; 2)$ і $(2; +\infty)$, оскільки відповідні функції $y = x + 2$, $y = x^2$ і $y = 3$ є неперервними на всій числовій осі. Дослідженню підлягають лише дві точки $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$, які є стиковими між вказаними проміжками.

Для точки $x = -1$ маємо: а) $f(-1) = x^2 \big|_{x=-1} = 1$;

б) $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = [x < -1] = \lim\limits_{x \to -1} (x+2) = 1$; $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = [x > -1] =$

$= \lim\limits_{x\to -1+0} x^2 = 1.$

Отже, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1)$, тоді $x = -1$ є точкою неперервності функції.

Для точки $x = 2$ маємо: а) $f(2) = 3$ (бо $f(x) = 3$, якщо $x \geq 2$).

б) $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = [x < 2] = \lim\limits_{x\to 2-0} x^2 = 4$; $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = [x > 2] = \lim\limits_{x\to 2+0} 3 = 3.$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$, то $x = 2$ є точкою розриву 1-го роду. Величина стрибка дорівнює (-1).

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Розв'язування. Дана функція визначена при всіх $x \neq 1$, тому при всіх $x \neq 1$ ця функція неперервна. Точка $x = 1$ є точкою розриву цієї функції, бо $y(1)$ не існує. Знайдемо односторонні границі даної функції в цій точці:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1-0} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} (x^2+x+1) = 3;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} (x^2+x+1) = 3.$$

Отже, $x = 1$ – точка усувного розриву.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $y = e^{\frac{3}{x-2}}$.

Розв'язування. Дана функція визначена при всіх $x \neq 2$, тому згідно з теоремою про неперервність елементарної функції ця функція неперервна при всіх $x \neq 2$. Точка $x \neq 2$ є точкою розриву функції. Встановимо характер точки розриву, для чого знайдемо односторонні границі цієї функції в точці $x = 2$:

1) $\lim\limits_{x\to 2-0} e^{3/(x-2)} = 0$, бо при $x < 2 \Rightarrow \dfrac{3}{x-2} < 0$ і при $x \to 2 \Rightarrow \dfrac{3}{x-2} \to -\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 2+0} e^{3/(x-2)} = +\infty$, бо при $x > 2 \Rightarrow \dfrac{3}{x-2} > 0$ і при $x \to 2 \Rightarrow \dfrac{3}{x-2} \to +\infty$.

Отже, точка $x = 2$ є точкою розриву другого роду.

Якщо ще знайти границю цієї функції при $x \to \pm\infty$, то матимемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} e^{3/(x-2)} = 1$, бо $3/(x-2) \to 0$, тобто при $x \to \pm\infty$ графік цієї функції асимптотично наближається до горизонтальної прямої $y = 1$. Враховуючи те, що $y > 0$ при всіх $x \neq 2$, графік цієї функції схематично приведено на рис. 2.4.

2.10.4 Неперервні функції на відрізку

Функція називається *неперервною на відрізку* $[a;b]$, якщо вона *неперервна в кожній* його точці. Графіком неперервної функції є деяка неперервна лінія, яку будь-яка вертикальна пряма перетинає лише в одній точці. Приведемо властивості функцій, неперервних на відрізку, які сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1 (*теорема Вейєрштрасса*). Всяка неперервна на відрізку $[a;b]$ функція досягає на ньому своїх найбільшого і найменшого значень M і m (рис. 2.5).

Теорема 2 (*перша теорема Больцано-Коші*). Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a;b]$ і на кінцях його приймає значення різних знаків, то існує на ньому принаймні одна точка c така, що $f(c)=0$, де $a \le c \le b$ (рис. 2.6).

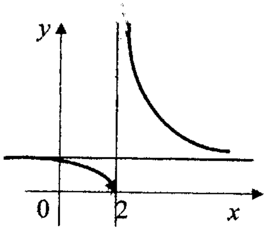


Рисунок 2.4

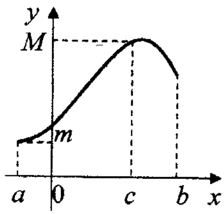


Рисунок 2.5

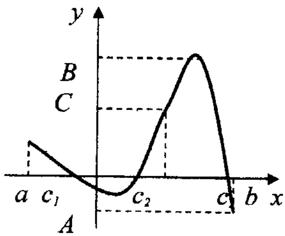


Рисунок 2.6

Теорема 3 (*друга теорема Больцано-Коші*). Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a;b]$ з областю значень $[A;B]$, то будь-яке проміжне її значення C, тобто $A < C < B$, досягається принаймні в одній точці цього відрізка (рис. 2.6).

3 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

3.1 Задача про швидкість зміни функції в точці і похідна функції

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і деяка внутрішня точка $x = x_0$ цієї області. Треба визначити швидкість зміни функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ при переході значень аргументу через точку $x = x_0$.

Для цього перш за все значенню аргументу $x = x_0$ необхідно надати довільного приросту Δx (додатного або від'ємного), тобто перейти в точку $x_0 + \Delta x$, що належить області X. Тоді початкове значення функції $f(x_0)$ перейде в нове значення $f(x_0 + \Delta x)$, а функція дістане приріст, що дорівнює різниці між нарощеним значенням функції $f(x_0 + \Delta x)$ і початковим значенням функції $f(x_0)$. Приріст функції позначається символом Δy або Δf і визначається за формулою

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{3.1}$$

Розглянемо далі відношення приросту функції до приросту аргументу $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Ця величина визначає середню швидкість зміни функції на проміжку довжиною Δx, віднесеної до його довжини. Ця величина залежить від Δx, оскільки Δy залежить від Δx, і не може характеризувати швидкість зміни функції в даній точці.

З цією метою необхідно проміжок $[x_0, x_0 + \Delta x]$ стягнути в початкову точку $x = x_0$ за умови, що $\Delta x \to 0$. Ця границя і буде визначати швидкість зміни функції $f(x)$ при переході значень аргументу x через точку $x = x_0$, її називають *похідною функції* $f(x)$ *в точці* $x = x_0$.

Означення. *Похідною функції* $f(x)$ *в точці* $x = x_0$ *називається границя* відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ позначають символом $f'(x_0)$, або $y'(x_0)$, або y', або $\frac{dy}{dx}$, або $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Отже, $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ або } y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3.2}$$

Зауваження. Похідна функції $f'(x_0)$ – це число, що визначає швидкість зміни функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ при переході через цю точку. З другої сторони, оскільки кожному значенню $x \in X$ за формулою (3.2) ставиться у відповідність цілком певне значення величини $f'(x)$, то $f'(x)$ є функцією незалежної змінної x.

Операція знаходження похідної функції називається *диференціюванням функції.* Якщо похідна функції в точці існує як скінченна границя, то функція називається *диференційовною* в цій точці.

Приклад. Користуючись означенням, знайти похідну функції $y = x^2 - 3x$ в точці x і в точці $x = -1$.

Розв'язування. Дана функція визначена при всіх $x \in R$. Виберемо довільне $x \in R$ і, зафіксувавши його, визначимо приріст Δy цієї функції, що відповідає довільному приросту аргументу Δx: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) - (x^2 - 3x) = x^2 + 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 -$

$- 3x - 3\Delta x - x^2 + 3x = 2x\cdot\Delta x - 3\Delta x + \Delta x^2$. Отже, $\Delta y = 2x\cdot\Delta x - 3\Delta x + \Delta x^2$ – ось така конкретна залежність Δy від Δx.

Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\cdot\Delta x - 3\Delta x + x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x - 3 + \Delta x) = 2x - 3$.

Отже, $(x^2 - 3x)' = 2x - 3$. При $x = -1$ маємо $f'(-1) = 2(-1) - 3 = -5$. Це означає, що при переході через точку $x = -1$ ця функція спадає в 5 разів швидше ніж зростає її аргумент.

3.2 Геометричний зміст похідної

Розглянемо графік функції $y = f(x)$, що визначена на деякому числовому проміжку X, і визначимо її приріст Δy в деякій точці $x = x_0$, що лежить всередині цього проміжку. Точку $x = x_0$ можна розглядати як абсцису точки M_0 на графіку цієї функції з ординатою $y_0 = f(x_0)$. Надамо аргументу приросту Δx, тоді дістанемо на графіку функції точку M з абсцисою $x_0 + \Delta x$ і ординатою $f(x_0 + \Delta x)$, тоді приріст функції Δy буде означати приріст ординати точки M відносно ординати точки M_0 (рис.3.1), тобто $|\Delta y| = |KM|$. Проведемо через точки M_0 і M пряму M_0M, яку будемо називати січною, кут нахилу якої до додатного напряму осі Ox позначимо через β. Тоді з прямокутного трикутника M_0KM матимемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta .$$

Перейдемо в цій рівності до границі за умови, що $\Delta x \to 0$. При цьому точка M вздовж кривої буде як завгодно близько наближатись до точки M_0, а січна займе певне граничне положення M_0T, ця пряма M_0T називається *дотичною* до графіка функції в точці з абсцисою $x = x_0$.

Означення. Якщо існує граничне положення M_0T січної M_0M за умови, що точка M вздовж графіка функції прямує до точки M_0, то ця пряма M_0T називається *дотичною до графіка функції* в точці M_0.

Нехай дотична M_0T існує. Позначимо кут нахилу її до додатного напряму осі Ox через α. Тоді при $\Delta x \to 0$ β, змінюючись, буде прямувати до α, тобто $\beta \to \alpha$, а $tg\beta \to tg\alpha$ (за неперервністю функції $y = tgx$).

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$ існує, то існуватиме і границя лівої частини попередньої рівності, що дорівнює $tg\alpha$.

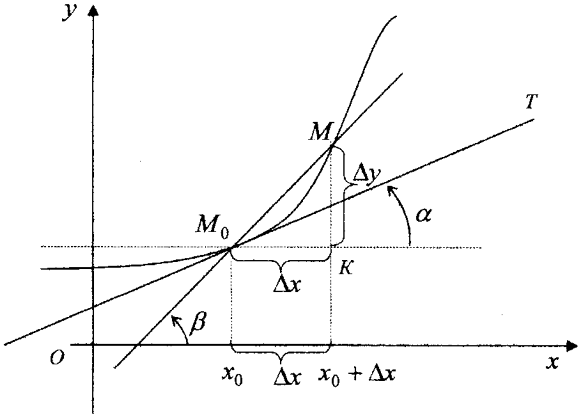


Рисунок 3.1

$$\text{Отже, } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha \text{, або } f'(x_0) = tg\alpha \text{, або } f'(x_0) = k_{дот}. \qquad (3.3)$$

Отже, значення похідної функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до її графіка в точці $M_0(x_0; f(x_0))$.

Зауваження. Користуючись геометричним змістом похідної функції, *рівняння дотичної до графіка функції* $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (3.4)$$

а рівняння *нормалі до графіка функції* $y = f(x)$ в цій точці має вигляд

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (3.5)$$

Примітка. Пряма, що проходить через точку дотику M_0 перпендикулярно до дотичної до графіка функції називається *нормаллю до графіка функції.*

3.3 Зв'язок диференційовності функції з неперервністю

Важливою є така теорема, яка встановлює необхідну умову диференційовності функції в точці.

Теорема. Якщо функція $y=f(x)$ в деякій точці *має похідну*, то

а) приріст функції може бути подано у вигляді

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x, \qquad (3.6)$$

де α – нескінченно мала відносно Δx,

б) функція в цій точці *неперервна.*

Доведення. Нехай функція $y=f(x)$ в деякій точці має похідну, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. Тоді на підставі теореми про зв'язок функції, що має границю, з нескінченно малою матимемо $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$, де α – нескінченно мала відносно Δx (при $\Delta x\to 0$), звідки маємо, що при $\Delta x\to 0$ випливає, що $\Delta y\to 0$, тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції в даній точці, а це рівносильно неперервності функції $f(x)$ в цій точці. Теорему доведено.

Наслідок. ***В точках розриву функції її похідна не існує.***

Зауваження. Обернене твердження, взагалі кажучи, не має місця, тобто із неперервності функції в точці не випливає її диференційовність в цій точці.

Це видно з таких простих прикладів:

1. Функція $y=|\,x\,|$ всюди неперервна (рис 1.3), але в точці $x=0$ не є диференційовною, бо в точці (0;0) не існує дотична до її графіка.

2. Функція $y=\sqrt[3]{x^2}$ неперервна на всій числовій осі, проте в точці $x=0$ вона не має похідної, бо $y'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty$.

Ця теорема встановлює лише необхідну умову диференційовності функції в точці. Зауважимо, що деякі автори дають означення диференційовної функції в точці як такої, для якої виконується формула (3.6).

3.4 Правила диференціювання функцій

Ці правила ми сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Похідна *сталої* дорівнює нулю.

Дійсно, якщо $y = C$, то $\Delta y = 0$, тому $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Отже, $(C)' = 0$.

Теорема 2. Похідна функції $y = x$ дорівнює *одиниці.*

Дійсно, оскільки для функції $y = x$ маємо, що $\Delta y = \Delta x$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$.

Теорема 3. *Сталий множник можна виносити за знак похідної.*

Дійсно, нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякій точці, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$. Розглянемо функцію $y = C \cdot f(x)$, де C – стала. Оскільки $\Delta y = Cf(x + \Delta x) - Cf(x) = C(f(x + \Delta x) - f(x)) = C \cdot \Delta f$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot \Delta f}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = C \cdot f'(x).$$

Отже,
$$(C \cdot f(x))' = Cf'(x). \tag{3.7}$$

Теорема 4. Похідна алгебраїчної суми скінченного числа диференційованих функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій.

Доведення. Доведемо цю теорему для двох функцій. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні, тобто існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'$.

Розглянемо функцію $y(x) = u(x) \pm v(x)$. Знайдемо її приріст, що викликаний приростом аргументу Δx: $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x) -$ $- (u(x) \pm v(x)) = (u(x + \Delta x) - u(x)) \pm (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u \pm \Delta v$. Отже, $\Delta y = \Delta u \pm \Delta v$. Тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm$

$\pm \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'$.

Отже,
$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \tag{3.8}$$

Теорема 5. *Похідна добутку* двох диференціовних функцій $u(x)$ і $v(x)$ знаходиться за формулою

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'. \tag{3.9}$$

Доведення. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в даній точці, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$.

Розглянемо функцію $y(x)=u(x)\cdot v(x)$. Знайдемо її приріст:

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=(u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-$$
$$-u(x)\cdot v(x+\Delta x))+(u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x))=(u(x+\Delta x)-u(x))\cdot v(x+\Delta x)-$$
$$-u(x)\cdot(v(x+\Delta x)-v(x))=\Delta u\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot\Delta v.$$ Тоді $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta uv(x+\Delta x)-u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta uv(x+\Delta x)}{\Delta x}-\frac{u(x)\Delta v}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)-u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=$$
$$=u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x).$$

Теорему доведено.

Теорема 6 (про похідну частки). *Похідна частки* двох *диференційовних* функцій $u(x)$ і $v(x)$ знаходиться за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad (3.10)$$

Доведення. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні в деякій точці, тобто $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u',\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$. Розглянемо функцію $y(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$. Оскільки $y(x+\Delta x)=\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$, то $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}=$

$$=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$ Тоді $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot v(v+\Delta v)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(v+\Delta v)}\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\frac{1}{v^2}(u'v-uv').$$

Отже, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Теорема 7 (про похідну складеної функції). Якщо функція $u = g(x)$ *диференційовна* в точці $x = x_0$, а функція $y = f(u)$ *диференційовна* в точці u_0, де $u_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ *диференційовна* в точці $x = x_0$ і її похідна знаходиться за формулою

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x_0). \tag{3.11}$$

Доведення. Нехай функції $u = g(x)$ і $y = f(u)$ диференційовні в точках x_0 і $u_0 = g(x_0)$, тоді вони неперервні у відповідних точках. Із неперервності функції $u = g(x)$ при $\Delta x \to 0$ випливає, що $\Delta u \to 0$. А з неперервності функції $y = f(u)$ із того, що $\Delta u \to 0$ випливає, що $\Delta y \to 0$.

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ подамо у вигляді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$, тоді $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x$.

Отже, $$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Висновок. *Похідна складеної функції за незалежною змінною дорівнює добутку похідної цієї функції за проміжним аргументом на похідну цього проміжного аргументу за незалежною змінною.*

Теорема 8 (про похідну оберненої функції). Якщо функція $y = f(x)$ *має обернену* функцію $x = \varphi(y)$ і функція $y = f(x)$ в деякій точці $x = x_0$ *має похідну* $f'(x_0)$, відмінну від нуля, то обернена функція $x = \varphi(y)$ у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$ також *має похідну*, яка знаходиться за формулою

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{3.12}$$

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x = x_0$, то вона неперервна в цій точці, тобто нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто при $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$. Отже, $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Похідні *прямої* і *оберненої* функції є *оберненими величинами.*

3.5. Похідні основних елементарних функцій

Виведемо формули основних елементарних функцій.

Похідна функції $y = \sin x$. Похідну цієї функції виведемо, користуючись означенням.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin(x+\Delta x) - sinx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2sin\frac{\Delta x}{2} cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = cosx \cdot 1 = cosx.$$

Отже, $$(sin x)' = cos x. \tag{3.13}$$

Похідна функції $y = \boldsymbol{cosx}$. За означенням похідної

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -sin x. \quad \text{Отже,} \quad (\cos x)' = \sin x \tag{3.14}$$

Похідна функції $y = \boldsymbol{tgx}$. Скористаємось тим, що $tgx = \frac{sin x}{cos x}$, тоді

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $$(tgx)' = \frac{1}{cos^2 x}. \tag{3.15}$$

Похідна функції $y = \boldsymbol{ctgx}$. Аналогічно попередньому матимемо

$$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2 x}. \tag{3.16}$$

Похідна функції $y = \boldsymbol{e^x}$. За означенням похідної маємо

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Отже, $$(e^x)' = e^x. \tag{3.17}$$

Похідна функції $y = \boldsymbol{a^x}$. Враховуючи те, що за основною логарифмічною тотожністю $a = e^{lna}$, дістанемо $a^x = (e^{lna})^x = e^{lna}$. Тоді за похідною складеної функції матимемо $(a^x)' = (e^{xlna})' = e^{xlna} \cdot (xlna)' =$

$= e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$.

Отже, $$(a^x)' = a^x \ln a. \tag{3.18}$$

Похідна функції $y = \ln x$. За означенням похідної $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Отже, $$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{3.19}$$

Похідна функції $y = \log_a x$. Скориставшись формулою переходу, перейдемо до натурального логарифма, а саме: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Тоді $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$.

Отже, $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \tag{3.20}$$

Похідна функції $y = x^a$. Спочатку прологарифмуємо цю функцію за основою e, дістанемо: $\ln y = \alpha \cdot \ln x$. А далі продиференціюємо цю рівність за x, вважаючи y функцією від x, матимемо $\frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{x}$, звідси $y' =$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot y = \alpha \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

Отже, $$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{3.21}$$

Важливими є два частинні випадки цієї формули:

а) $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Отже, $$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{3.22}$$

б) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Отже, $$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \qquad (3.23)$$

Зауваження. Застосований при виведенні формули (3.21) метод називається *логарифмічним диференціюванням.*

Похідна функції $\boldsymbol{y = arcsinx}$. Оскільки функція $y = arcsin\,x$ є оберненою відносно до функції $x = sin\,y$, де $-1 \le x \le 1$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, то враховуючи, що $x_y' = cos\,y$ і $x_y' \ne 0$ в будь-якій точці інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, причому $\cos y > 0$, за теоремою про похідну оберненої функції будемо мати: $y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{cos\,y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Отже, $$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (3.24)$$

Похідна функції $\boldsymbol{y = arccosx}$. Функція $y = arccos\,x$ є оберненою відносно до функції $x = cos\,y$, де $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$, умови теореми про похідну оберненої функції виконуються при всіх $y \in (0;\pi)$, бо $x_y' = -sin\,y \ne 0$ в усіх точках цього інтервала, причому $\sin y > 0$ при всіх $y \in (0;\pi)$. Тоді $y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{-sin\,y} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos_y{}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Отже, $$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (3.25)$$

Похідна функції $\boldsymbol{y = arctgx}$. Функція $y = arctgx$ є оберненою відносно до функції $x = tgy$, де $-\infty \le x \le +\infty$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Функція $x = tgy$ має похідну $x_y' = \frac{1}{cos^2 y} \ne 0$ при всіх $y \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, тому умови теореми про похідну оберненої функції виконуються. Тоді $y_x' = \frac{1}{x_y'} = cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$.

Отже, $$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}. \qquad (3.26)$$

Аналогічно доводиться, що

$$(arctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}. \qquad (3.27)$$

Формули (3.13) – (3.27) складають ***таблицю похідних***

1. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

2. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

4. $(e^x)'=e^x$.

5. $(a^x)=a^x lna$.

6. $(lnx)'=\frac{1}{x}$.

7. $(log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$.

8. $(sinx)'=cosx$.

9. $(cosx)'=-sinx$.

10. $(tgx)'=\frac{1}{cos^2 x}$.

11. $(ctgx)'=-\frac{1}{sin^2 x}$.

12. $(arcsinx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. $(arccosx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$.

15. $(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

При диференціюванні функції перш за все треба звертати увагу на правила диференціювання, а вже потім використовувати таблицю похідних.

Приведемо приклади знаходження похідних функцій.

1. $y=lntg5x;\ y'=\frac{1}{tg5x}\cdot(tg5x)'=\frac{1}{tg5x}\cdot\frac{1}{cos^2 5x}\cdot(5x)'=\frac{5}{cos^2 5x\cdot tg5x}$.

2. $y=e^{-3x^2}\cdot cos4x;\ y'=\left(e^{-3x^2}\right)'cos4x+e^{-3x^2}\cdot(cos4x)'=e^{-3x^2}(-3x^2)'cos4x+$

$+e^{-3x^2}(-sin4x)\cdot(4x)'=-6xe^{-3x^2}cos4x-4e^{-3x^2}sin4x$.

3. $y = cos^3(4x^3 - 3e^{-5x})$; оскільки $y = \left(cos\left(4x^3 - 3e^{-5x}\right)\right)^3$, то це складена функція, в якої зовнішньою функцією є степенева функція, тому

$$y' = 3cos^2(4x^3 - 3e^{-5x}) \cdot (cos(4x^3 - 3e^{-5x}))' =$$

$$= 3cos^2(4x^3 - 3e^{-5x}) \cdot (-sin(4x^3 - 3e^{-5x}) \cdot (4x^3 - 3e^{-5x})' =$$

$$= -3sin(4x^3 - 3e^{-5x}) \cdot cos^2(4x^3 - 3e^{-5x}) \cdot (12x^2 - 3e^{-5x} \cdot (-5x)') =$$

$$= -9(4x^2 + 5e^{-5x})sin(4x^3 - 3e^{-5x})cos^2(4x^3 - 3e^{-5x}).$$

4. $y = (sinx)^{tg2x}$; логарифмуючи цю функцію, дістанемо:

$ln\, y = tg2x \cdot ln\, sin\, x$; продиференціюємо цю рівність за x:

$$\frac{1}{y} y' = (tg2x)' \cdot lnsinx + tg2x \cdot (\ln sinx)'; \ \frac{1}{y} y' = \frac{1}{cos^2 2x} \cdot (2x)' \cdot lnsinx +$$

$$+ tg2x \cdot \frac{1}{sinx} \cdot (sinx)'; \ \frac{1}{y} y' = \frac{2lnsinx}{cos^2 2x} + \frac{tg2xcosx}{sinx},$$ звідси маємо

$$y' = y\left(\frac{2lnsinx}{cos^2 2x} + ctg2x\right); \ y' = (sinx)^{tg2x}\left(\frac{2lnsinx}{cos^2 2x} + ctgxtg2x\right).$$

5. $y^2 \cdot lnx - 2y^3 = 4x - cosy$. Це неявно задана функція y від x. Продиференціюємо за x обидві частини рівняння, дістанемо $2y \cdot y' ln\, x + y^2 \cdot \frac{1}{x} -$

$- 2 \cdot 3y^2 \cdot y' = 4 + sin\, y \cdot y'$. Це є лінійне рівняння відносно y'; розв'язавши його, дістанемо $2y \cdot y' ln\, x - 6y^2 y' - sin\, y \cdot y' = 4 - \frac{y^2}{x}$;

$$(2ylnx - 6y^2 - siny)y' = 4 - \frac{y^2}{x},$$ звідси $$y' = \frac{4 - \frac{y^2}{x}}{2ylnx - 6y^2 - siny}.$$

3.6 Похідні вищих порядків

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену на деякому проміжку. Припустимо, що вона диференційовна на ньому. Похідна цієї функції $f'(x)$ в свою чергу є функцією від x, тому її можна диференціювати *повторно.*

Означення. *Похідна похідної функції* $f(x)$ *називається похідною другого порядку функції* $f(x)$ *або другою похідною.*

Позначають її символами $f''(x)$, або y'', або $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Отже, $$f''(x) = \left(f'(x)\right)'. \qquad (3.28)$$

Похідній другого порядку можна надати такого *механічного* змісту – це *прискорення* зміни функції в точці.

Аналогічно, $$f'''(x) = (f''(x))', \; f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'. \qquad (3.29)$$

Приклад. Знайти y''' для функції $y = 2x^4 - 3x + 5$.

Розв'язування. $y' = 8x^3 - 3$; $y'' = 24x^2$; $y''' = 48x$.

Відповідь: $48x$.

3.7 Диференціал функції

3.7.1 Поняття диференціала функції

Це поняття тісно пов'язане з поняттям похідної функції.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто існує її похідна $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді її приріст можна подати у вигляді (3.6) $\Delta y = f'(x) + \alpha \Delta x$, де α – нескінченно мала величина при $\Delta x \to 0$, тобто Δy подано у вигляді двох доданків, перший з яких лінійний відносно Δx, а другий не є лінійним відносно Δx, бо нескінченно мала α залежить від Δx.

Будемо вважати, що в загальному випадку $f'(x) \neq 0$.

Порівняємо ці два нескінченно малі доданки з приростом аргументу Δx, який прямує до нуля, розглянувши границю їх відношення:

а) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x) = f'(x) \neq 0$. Отже, $f'(x)\Delta x$ нескінченно мала одного порядку з Δx, тобто $f'(x)\Delta x = 0(\Delta x)$.

б) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Отже, другий доданок $\alpha \Delta x$ є нескінченно мала більш високого порядку, ніж Δx, тобто $\alpha \Delta x = o(\Delta x)$.

Таким чином, перший доданок при достатньо малих Δx дає для приросту функції Δy більший внесок, ніж другий (яким можна нехтувати при малих Δx), до того ж він має лінійний вигляд відносно Δx, а це одна із самих простих залежностей. Перша частина приросту функції $f(x)$ дістала назву *головної*. Друга частина є нелінійною відносно Δx.

Означення. Головна лінійна відносно Δx частина приросту функції називається ***диференціалом*** функції.

Диференціал функції $y = f(x)$ позначається символом dy або $df(x)$.

Отже, за означенням

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{3.31}$$

Зауваження. Якщо формулу (3.31) застосувати до функції $y = x$, то враховуючи те, що $y' = x' = 1$, будемо мати $dy = dx = 1\Delta x = \Delta x$.

Таким чином, *диференціал dx незалежної змінної збігається з її приростом Δx*, тобто

$$dx = \Delta x, \tag{3.32}$$

тоді матимемо

$$dy = f'(x)dx \text{ або } dy = y'dx, \tag{3.33}$$

звідки маємо

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ або } f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{3.34}$$

Таким чином, *похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціала незалежної змінної.* З формули (3.33) випливає, що для знаходження диференціала функції необхідно знайти її похідну і помножити на диференціал незалежної змінної.

Наприклад, для функції $y = x^3$ маємо $dy = 3x^2 dx$.

3.7.2 Застосування диференціала до наближених обчислень функції

З означення диференціала як головної частини приросту функції випливає, що при досить малому прирості аргументу Δx приріст функції наближено дорівнює її диференціалу, бо приріст функції Δy і диференціал функції dy при $\Delta x \to 0$ є еквівалентними нескінченно малими, бо враховуючи рівність (3.30) і (3.31) матимемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x}{f'(x)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\alpha}{f'(x)}\right) = 1 + \frac{1}{f'(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 1 + 0 = 1.$$

Таким чином, $\Delta y \approx dy$ або $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$,

звідки маємо:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) \approx f'(x)\Delta x. \tag{3.35}$$

Якщо значення функції $f(x)$ в деякій точці $x = x_0$ і її похідної в цій точці відомі, тобто відомі числа $f(x_0)$ і $f'(x_0)$, то при досить малому значенні приросту аргументу Δx можна знайти, користуючись формулою (3.35), наближене значення функції в точці $x_0 + \Delta x$, тобто наближене значення $f(x_0 + \Delta x)$.

Зауваження. При наближених обчисленнях завжди треба враховувати оцінку похибки методу. Можна показати, що похибка δ, що виникає при використанні рівності (3.35) за абсолютною величиною не перевищує величини $(M/2)\Delta x^2$, де $M = \max\limits_{[x;x_0+\Delta x]} |f''(x)|$, тобто $|\delta| < \frac{M}{2}\Delta x^2$.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{4{,}02}$.

Розв'язування. Число $\sqrt{4{,}02}$ є значенням функції $f(x) = \sqrt{x}$ при $x = 4{,}02$. Якщо за початкове значення аргументу взяти число $x_0 = 4$, то

$\Delta x = x - x_0 = 4{,}02 - 4 = 0{,}02$, тобто $\Delta x = 0{,}02$ можна вважати досить малим, при цьому $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$. Враховуючи, що $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$, а $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = \dfrac{1}{4} \cdot 0{,}02 = 0{,}005$. Тоді $\sqrt{4{,}02} \approx 2 + 0{,}005$, тобто $\sqrt{4{,}02} \approx 2{,}005$.

Оцінимо ще похибку цієї наближеної рівності. Оскільки $f''(x) = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\dfrac{1}{4}x^{-3/2}$, то $M = \max\limits_{[4;4{,}02]} |f''(x)| = \dfrac{1}{4\sqrt{4^3}} = \dfrac{1}{32}$, тоді із формули $|\delta| < (M/2) \cdot \Delta x^2$ випливає, що $|\delta| < \dfrac{1}{64} \cdot 0{,}0004$, тобто $|\delta| < 0{,}00000625$. Отже, $\sqrt{4{,}02} \approx 2{,}005$ з точністю до 10^{-5}.

3.7.3 Властивості диференціала функції

1. Враховуючи те, що за означенням $dy = f'(x)$, легко довести таку теорему.

Теорема. Справедливі рівності

$$d(u \cdot v) = du + dv; \; d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv; \; d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \qquad (3.36)$$

Дійсно, покажемо, наприклад справедливість другої рівності:
$d(uv) = (u \cdot v)'dx = (u'v + uv')dx = v \cdot u'dx + u \cdot v'dx = vdu + udv.$

2. Особливо важливою є так звана властивість ***інваріантності форми диференціала,*** яка пов'язана із складеною функцією, суть її викладемо нижче.

Нехай дана функція $y = f(u)$, де u – незалежна змінна, тоді $dy = y'_u \cdot du$.

Нехай тепер задана функція $y = f(u)$, де $u = g(x)$, то $y = f(g(x))$ є *складеною* функцією незалежної змінної x, тоді, оскільки $y'_x = u'_u \cdot u'_x$ і $du = u'_x dx$, будемо мати

$dy = y'_x dx = (y'_u \cdot u'_x)dx = y'_u \cdot (u'_x dx) = y'_u \cdot du$. Отже, $dy = y'_u du$.

Як бачимо, остання форма запису диференціала складеної функції збігається з попередньою формою запису $dy = y'_u \cdot du$, коли u є незалежною.

Таким чином, формула для обчислення диференціала функції в формі запису $dy = y'_u du$ або $dy = y'_x dx$ не залежить від того чи буде u або x незалежною змінною або функцією від іншої незалежної змінної; форма запису $dy = y'_u du$ або $dy = y'_x dx$ залишається незмінною.

Ця властивість називається ***інваріантністю (незмінністю) форми*** *диференціала функції* однієї змінної; підкреслимо, що мова йде про ***інваріантність форми*** $dy = y'_u du$ або $dy = y'_x dx$.

3.7.4 Диференціали вищих порядків

Нехай задана функція $y = f(x)$, визначена на деякому проміжку. В будь-якій точці x цього проміжку її диференціал $dy = f'(x)dx$ залежить від двох змінних x і dx, які незалежні між собою. Оскільки диференціал dy залежить від x, тобто є функцією від змінної x, то можна знаходити диференціал другого порядку.

Означення. *Диференціалом другого порядку* або другим диференціалом функції $y = f(x)$ називається диференціал її диференціала.

Позначається він символом d^2y або $d^2 f(x)$.

Отже, $d^2y = d(dy)$. Виведемо формулу для d^2y. Враховуючи те, що x і dx незалежні і dx є сталою відносно x, будемо мати

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' dx = dx(f'(x))' dx = f''(x)dx^2.$$

Отже, $$d^2y = f''(x)dx^2. \qquad (3.37)$$

Аналогічно

$$d^3y = d(d^2y) = d\left(f''(x)dx^2\right) = \left(f''(x)dx^2\right)' dx = dx^2(f''(x))' dx = f'''(x)dx^3.$$

В загальному випадку $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ або $d^n y = y^{(n)}(x)dx^n$. (3.38)

Зауваження. Можна показати, що для диференціалів вищих порядків властивість *інваріантності не має місця.*

3.8 Диференціювання функцій, заданих параметрично

Інколи зручно задавати функцію $y = f(x)$ так, коли аргумент x і сама функція y є функціями деякої змінної t, а саме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (3.39)$$

де t – змінюється від α до β, t називається *параметром.*

Такий спосіб задання функції широко розповсюджується в теоретичній механіці, коли координати рухомої матеріальної точки на площині є функціями часу t. Рівняння (3.39) називаються *рівняннями траєкторії руху матеріальної точки.*

Знайдемо похідну y'_x функції, що задана параметрично. Скористаємось рівністю (3.34) $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$. Оскільки за означенням $dy = \psi'(t)dt$, а

$dx = \varphi'(t)dt$, то будемо мати $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Отже,
$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.40}$$

Приклад. Знайти похідну y'_x функції $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, де a – стала, $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язування. Ці рівняння на площині описують коло радіуса $R = a$ з центром у початку координат, бо

$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = a^2$, тобто $x^2 + y^2 = a^2$;

параметр t означає кут, який утворює радіус - вектор біжучої точки кола з додатним напрямом осі Ox.

Оскільки $y'_t = a\cos t$, а $x'_t = -a\sin t$, то згідно з формулою (3.40) будемо мати $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt$. Отже, $y'_x = -ctgt$.

Знайдемо ще другу похідну за змінною x:

$y''(x) = \left(y'(x)\right)' = \left(-ctgt\right)' = \left(-ctgt\right)' \cdot t'_x = \dfrac{1}{\sin^2 t} \cdot t'_x$. Оскільки $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$

як похідна оберненої функції, то $t'_x = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$.

Тоді $y''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 t} \cdot \dfrac{1}{a\sin t} = -\dfrac{1}{a\sin^3 t}$.

Відповідь: $y'(x) = -ctgt$, $y''(x) = -\dfrac{1}{a\sin^3 t}$.

3.9 Основні теореми диференціального числення

Знання похідної $f'(x)$ дають можливість робити деякі висновки про поведінку самої функції $f(x)$. В основі цих досліджень лежать теореми, які відіграють важливу роль в математичному аналізі. До них відносяться теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші, Лопіталя і формула Тейлора.

3.9.1 Теорема Ферма

Теорема. Якщо функція $f(x)$ *визначена* в деякому околі точки $x = x_0$, *диференційовна* в самій точці $x = x_0$ і в ній досягає *найбільшого* або *найменшого* значення, то в цій точці її *похідна дорівнює нулю*, тобто $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай виконуються умови теореми і для визначеності в точці $x = x_0$ функція $f(x)$ приймає найбільше значення M. Тоді в указаному околі точки $x = x_0$ для всіх $x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ або $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, де Δx досить малий приріст такий, що точка $x = x_0 + \Delta x$ належить цьому околу, причому Δx може бути як додатним, так і від'ємним. Тому приріст функції Δy, що визваний цим приростом аргументу, всякий раз буде від'ємним, бо
$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$.

Будемо знаходити похідну функції в цій точці, яка за умовою теореми в цій точці існує:

а) якщо $\Delta x > 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ (за теоремою про перехід в нерівності до границі) або $f'(x_0) \leq 0$;

б) якщо $\Delta x < 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ або $f'(x_0) \geq 0$.

З двох цих нестрогих нерівностей $f'(x_0) \leq 0$ і $f'(x_0) \geq 0$ випливає, що $f'(x_0) = 0$. Теорему доведено.

Геометрично теорема Ферма стверджує, що при виконанні її умов, в точці $x = x_0$, в якій диференційовна функція досягає найбільше або найменше значення, *дотична до графіка функції* існує і вона *паралельна осі* Ox.

3.9.2 Теорема Ролля

Теорема. Якщо функція $f(x)$:

а) *визначена* і *неперервна* на відрізку $[a;b]$;

б) *диференційовна* принаймні на інтервалі $(a;b)$;

в) на *кінцях* цього проміжку приймає *рівні значення* $f(a) = f(b)$, то на проміжку $[a;b]$ знайдеться принаймні одна точка c така, що $f'(c) = 0$, де $a \leq c \leq b$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то на підставі теореми Вейєрштрасса ця функція на ньому приймає своє найбільше значення M і найменше значення m. Можливі два випадки.

1. $M = m$, в цьому випадку функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ приймає стале значення, причому $f(x) = M = m$. Тоді $f'(x) = 0$ в кожній точці цього проміжку. Отже, за число c можна брати будь-яке число цього проміжку.

2. $M > m$, тоді хоч одне із цих значень M або m досягається всередині інтервалу $(a;b)$, бо на кінцях проміжку функція $f(x)$ приймає рівні значення, тобто M або m досягається в деякій проміжній точці c

цього проміжку, де $a<c<b$. Тоді на підставі теореми Ферма (а її умови якраз виконуються в деякому околі точки $x=c$) в цій точці похідна функції дорівнює нулю, тобто $f'(c)=0$. Теорему доведено.

Геометрично теорема Ролля стверджує, що всередині відрізку *знайдуться такі* точки, в яких *дотична до графіка функції* в цих точках *паралельна осі Ох* (рис. 3.2).

Наслідок. *Між двома нулями диференційовної функції є принаймні один нуль її похідної (рис. 3.3)*:

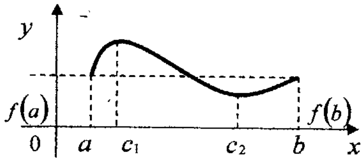


Рисунок 3.2

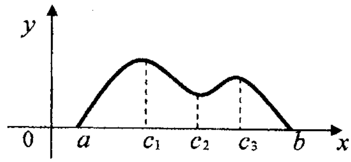


Рисунок 3.3

3.9.3 Теорема Лагранжа

Теорема. Якщо функція $f(x)$ *неперервна* на відрізку $[a;b]$ і *диференційовна* принаймні на інтервалі $(a;b)$, то на проміжку $(a;b)$ *знайдеться* принаймні одна точка c така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \text{ де } a<c<b. \tag{3.41}$$

Доведення. Доведення цієї теореми має конструктивний характер. Побудуємо за відомою формулою $f(x)$ допоміжну функцію $F(x)$ за формулою $F(x)=f(x)-\lambda x$, визначену на відрізку $[a;b]$, де λ – *деяке число*, яке підберемо так, щоб виконувалась рівність $F(a)=F(b)$. Користуючись рівністю $F(a)=F(b)$, легко визначити це число λ. Оскільки $F(a)=f(a)-\lambda a$, а $F(b)=f(b)-\lambda b$, то дістанемо $f(a)-\lambda a=$ $=f(b)-\lambda b$, звідки маємо $\lambda b-\lambda a=f(b)-f(a)$; $\lambda(b-a)=f(b)-f(a)\Rightarrow$

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{3.42}$$

Для функції $F(x)$ виконуються всі умови теореми Ролля:

а) вона *неперервна* на $[a;b]$ як різниця неперервних функцій;

б) ця функція диференційовна на $(a;b)$, причому $F'(x)=f'(x)-\lambda$;

в) а третя умова виконується за умовою, що $F(a)=F(b)$.

Тоді на підставі теореми Ролля існує принаймні одна точка c, де $a<c<b$, така, що $F'(c)=0$, звідки $\lambda=f'(c)$. Тоді з рівності (3.42) матимемо $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, де $a<c<b$. Теорему доведено.

Рівність (3.41) *називається **формулою Лагранжа**.*

Зауваження. Оскільки відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є кутовим коефіцієнтом січної, що з'єднує точки $A(a;f(a))$ і $B(b;f(b))$ графіка функції $y=f(x)$, а $f'(c)$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою $x=c$, *то формула Лагранжа геометрично означає*, що *на графіку функції* $y=f(x)$ *знайдеться принаймні одна точка*, що *дотична в ній до графіка функції паралельна січній AB*.

3.9.4 Теорема Коші

Теорема. Якщо дві функції $f(x)$ і $g(x)$ *неперервні* на відрізку $[a;b]$, *диференційовні* принаймні на інтервалі $(a;b)$ і $g'(x)\neq 0$ при всіх $x\in(a;b)$, то знайдеться принаймні одна точка c така, що виконується рівність

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}, \tag{3.43}$$

де $a<c<b$.

Рівність (3.43) називається *формулою Коші*, вона узагальнює формулу Лагранжа, якщо розглянути допоміжну функцію $F(x)=f(x)-\lambda g(x)$, де $\lambda-$ деяке число, що підбирається так, щоб виконувалась рівність $F(a)=F(b)$. Доведення теореми опустимо.

3.9.5 Правило Лопіталя

Це правило вказує спосіб визначення границі відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій в околі деякої точки за допомогою похідних, тобто є одним із методів розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Справедливі такі теореми.

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ *задовольняють умови теореми Коші, в точці* $x=a$ обидві функції *дорівнюють нулю* і *існує границя відношення їх похідних* при $x\to a$, то існує і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ і справедлива рівність $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доведення. На відрізку $[a;b]$ виберемо довільну точку x, тобто $x\in[a;b]$ і зафіксуємо цю точку. Тоді на відрізку $[a;x]$ виконуватимуться всі умови теореми Коші і справедлива формула Коші: $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, де $a<c<x$, або $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, де $a<c<x$, оскільки за умовою цієї теореми $f(a)=g(a)=0$. З подвійної нерівності $a<c<x$ при $x\to a$ за теоремою

про границю *затисненої* величини випливає, що $c \to a$. Отже, при $x \to a \Rightarrow c \to a$.

Перейдемо в рівності $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ до границі за умови, що $x \to a$, при цьому точка c виявляється змінною і $c \to a$, будемо мати, що $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Але ж $\lim\limits_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Отже, матимемо, що $\lim\limits_{c \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Теорему доведено.

Зауваження. Приведена теорема справедлива і в тому випадку, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ в точці $x = a$ не визначені, але $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, тобто в околі точки $x = a$ ці функції нескінченно малі.

Теорема 2. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умови:

а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ і $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

б) функції $f(x)$ і $g(x)$ в околі точки $x = a$ диференційовні;

в) функції $f(x)$ і $g(x)$ в околі точки $x = a$ задовольняють теорему Коші;

г) існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ і $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доведення цієї теореми опустимо.

Ці дві теореми складають правило розкриття невизначеностей, яке називають ще *правилом Лопіталя-Бернуллі* або просто ***правилом Лопіталя***.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$.

Розв'язування. Функції $f(x) = 2x^2 - x - 6$ і $g(x) = x^2 - 4$ задовольняють умови теореми Коші на довільному проміжку $[2; b]$ і $f(2) = 0$ і $g(2) = 0$, тоді можна застосовувати правило Лопіталя:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x^2 - x - 6)'}{(x^2 - 4)'} = \lim_{x \to 2} \frac{4x - 1}{2x} = \frac{7}{4}.$$

Відповідь: 7/4.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 - 2 + \ln x}{e^x - e}$.

Розв'язування. При $x \to 1$ функції $f(x) = 2x^2 - 2 + \ln x \to 0$ і

$g(x) = e^x - e \to 0$. Отже, маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Обидві функції задовольняють умови теореми Коші, тому при розкритті цієї невизначе - ності скористаємось правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-2+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x^2-2+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to 1}\frac{4x+1/x}{e^x}=\frac{5}{e}.$$

Відповідь:5/е.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x-2}{1+2\ln\sin x}$.

Розв'язування. При $x\to 0$ функції $f(x)=\ln x-2\to-\infty$ і $g(x)=1+2\ln\sin x\to-\infty$. Отже, треба розкрити невизначеність типу $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Скористаємось правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x-2}{1+2\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x-2)'}{(1+2\ln\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{2\cdot(1/\sin x)\cdot\cos x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

*Відповідь:*1/2.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}x^3\ln x$.

Розв'язування. Тут мимаємо невизначеність типу $(0\cdot\infty)$. Перетворимо добуток в частку

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-3})'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-3x^{-4}}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{3}=0.$$

Відповідь: 0.

Зауваження. Невизначеності типів 1^∞, 0^0 і ∞^0, які з'являються при знаходженні границь степеневопоказникова функцій $y=u^v$, теж можна розкрити за допомогою правила Лопіталя, але спочатку таку *функцію логарифмують* і шукають границю $ln\,y$. А потім за знайденою границею $\ln y$ знаходять границю самої функції y.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)^{tgx}$.

Розв'язування. При $x\to 0$ функція $u=1/x\to\infty$, а функція $v=tgx\to 0$, отже, маємо невизначеність типу (∞^0). Спочатку функцію $y=(1/x)^{tgx}$ прологарифмуємо: $ln\,y=tgx\cdot ln\,(1/x)=-tgx\,ln\,x$. Далі знайдемо

$$\lim_{x\to 0}ln y=-\lim_{x\to 0}tgx\cdot\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/\sin^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=-1\cdot 0=0.$$ Тоді $\lim\limits_{x\to 0}(1/x)^{tgx}=e^0=1$.

*Відповідь:*1.

Зауваження. Не всі невизначеності можна розкривати за допомогою правила Лопіталя.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{x+\sin x}$.

Чисельник і знаменник дробу є нескінченно великими функціями, тобто маємо невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Умови теореми Коші виконуються. Будемо шукати границю відношення похідних цих функцій $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-\sin x)'}{(x+\sin x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\cos x}{1+\cos x}$. Ця границя не існує, бо $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не існує. Проте дану границю можна знайти іншим способом. Поділивши чисельник і знаменник дробу на x, дістанемо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-(\sin x/x)}{1+(\sin x/x)}=\dfrac{2}{1}=2$, бо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, оскільки $\sin x$ обмежена величина $(|\sin x|\le 1)$, а знаменник дробу є нескінченно велика величина.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

4.1 Умови сталості функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ і всередині нього має скінченну похідну $f'(x)$. Справедлива теорема.

Теорема. Для того щоб функція $f(x)$ була сталою на інтервалі $(a;b)$, необхідно і достатньо, щоб $f'(x) = 0$ в кожній точці цього інтервалу.

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(x)$ є *сталою* на проміжку $(a;b)$, тобто $f(x) = C$ при всіх $x \in (a;b)$, тоді $f'(x) = 0$ при всіх $x \in (a;b)$.

Достатність. Нехай похідна функції $f(x)$ в кожній точці інтервалу $(a;b)$ дорівнює нулю, тобто $f'(x) = 0$ при всіх $x \in (a;b)$. Доведемо, що ця функція є сталою на цьому інтервалі. Виберемо на цьому інтервалі *довільні* точки x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$, і розглянемо відрізок $[x_1, x_2]$. Застосуємо теорему Лагранжа для функції $f(x)$ на відрізку $[x_1, x_2]$, умови якої будуть виконані; дістанемо $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$, де $x_1 < c < x_2$, звідки $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$. Оскільки за умовою $f'(c) = 0$, бо $c \in (a;b)$, то будемо мати: $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$. Оскільки x_1 і x_2 – довільні дві різні точки проміжку $(a;b)$, то з рівності $f(x_1) = f(x_2)$ випливає, що в кожній точці цього проміжку функція $f(x)$ приймає стале значення. Теорему доведено.

4.2 Умови монотонності функції

Зростаючі і спадні функції називаються *монотонними.* Спочатку нагадаємо поняття зростаючої і спадної функції.

Означення. Функція $f(x)$ називається *зростаючою* на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_1 < x_2$, випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$.

Іншими словами, функція називається *зростаючою* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, і навпаки, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу.

Означення. Функція $f(x)$ називається ***спадною*** на проміжку $(a;b)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 із цього проміжку таких, що $x_1 < x_2$, випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$.

Іншими словами, функція називається *спадною* на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Справедлива теорема.

Теорема 1 (*необхідна умова монотонності*). Якщо диференційовна функція $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ зростає (або спадає), то в усіх точках цього проміжку її похідна невід'ємна або недодатна, тобто

$$f'(x) \geq 0 \text{ (або } f'(x) \leq 0) \text{ для всіх } x \in (a;b). \qquad (4.1)$$

Доведення. Нехай функція $f(x)$ зростає на проміжку $(a;b)$ і її похідна існує. Доведемо, що $f'(x) \geq 0$ при всіх $x \in (a;b)$.

Дійсно, якщо $\Delta x > 0$, то для будь-якого $x \in (a;b)$ для зростаючої функції випливає, що $\Delta y > 0$; якщо ж $\Delta x < 0$, то і $\Delta y < 0$. В обох випадках маємо, що відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$. Переходячи в цій нерівності до границі за умови, що $\Delta x \to 0$, матимемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ або $f'(x) \geq 0$ для всіх $x \in (a;b)$, що і треба було довести.

Справедлива і обернена теорема.

Теорема 2 (*достатня умова монотонності*). *Якщо похідна* функції додатна або (*від'ємна*) в усіх точках деякого проміжку, то на ньому *функція зростає* (або *спадає*).

Доведення. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на деякому проміжку $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ при всіх $x \in (a;b)$. Доведемо, що функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку. Для цього виберемо довільні два значення аргументу x_1 і x_2 з цього проміжку і нехай $x_2 > x_1$. Застосуємо теорему Лагранжа на відрізку $[x_1; x_2]$ (умови теореми Лагранжа виконані), дістанемо

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \text{ де } x_1 < c < x_2, \text{ звідки } f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\ (x_2 - x_1).$$

Оскільки $f'(c)$ за умовою теореми і $x_2 - x_1 > 0$, то з цієї рівності маємо, що $f(x_2) - f(x_1) > 0$, звідси $f(x_2) > f(x_1)$. Оскільки x_1 і x_2 – довільні точки проміжку $(a;b)$, то остання нерівність означає, що функція $f(x)$ є зростаючою на проміжку $(a;b)$. Друга частина теореми доводиться аналогічно.

Приклад. Знайти інтервали зростання функції $y = ln\,(1 - x^2)$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо область визначення функції

$D(y)$: $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$. Отже, $D(y) = (-1; 1)$.

За достатньою умовою зростання функції $f'(x) > 0$, оскільки $y' = -\frac{2x}{1-x^2}$, то маємо $-\frac{2x}{1-x^2} > 0$. Цю нерівність можна було б розв'язувати методом інтервалів. Але можна скористатись тим, що $D(y) = (-1; 1)$. Оскільки при $x \in (-1; 1)$ знаменник цього дробу додатний, то звідси випливає, що $-2x > 0$, а звідси $x < 0$. Отже, дана функція зростає на проміжку $(-1; 0)$, а на проміжку $(0; 1)$ вона спадає.

Звернемо увагу на те, що при переході зліва направо через точку $x = 0$ зростання функції переходить в її спадання. А це означає, якщо користуватись графіком функції, що в точці $x = 0$ дана функція має максимум, а точка $x = 0$ є точкою максимуму цієї функції.

4.3 Точки екстремуму функції

Це точки, в яких неперервна функція змінює характер своєї поведінки, а саме: переходить від зростання до спадання (точка максимуму) і навпаки, від спадання до зростання (точка мінімуму). Отже, точки екстремуму функції – це стикові точки інтервалів монотонності неперервної функції.

В точці $x = x_0$ максимуму функції характерним є те, що значення функції в цій точці більше від її значень в усіх точках деякого околу цієї точки, тобто в точках, достатньо близьких до точки $x = x_0$, при цьому такий окіл точки $x = x_0$ повинен існувати.

Означення. Точка $x = x_0$ називається ***точкою максимуму*** (***точкою мінімуму***) *неперервної* функції $f\ (x)$, якщо існує окіл цієї точки $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ такий, що в усіх його точках виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0)\ (\text{або}\ f(x) > f(x_0)),\ \text{при всіх}\ x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)).$$

Точки максимуму і точки мінімуму називаються *екстремальними точками функції* або *точками локального екстремуму функції.*

Як же знаходити екстремальні точки функції?

Спочатку встановимо необхідну ознаку екстремуму.

Теорема (*необхідна умова екстремуму*). Якщо *диференційовна* функція $f(x)$ в деякій точці $x = x_0$ має екстремум, то в цій точці *її похідна дорівнює нулю,* тобто $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай диференційовна функція $f\ (x)$ в точці $x = x_0$ має екстремум, тобто в цій точці приймає найбільше або найменше значення в деякому околі цієї точки, який повинен існувати згідно з означенням точки екстремуму. Тоді на підставі теореми Ферма в цій точці похідна дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що неперервна функція може мати екстремум в точках, де вона недиференційовна. Наприклад, функція $y = |\ x\ |$ в точці $x = 0$ має мінімум, хоча в цій точці ця функція не має похідної (рис 1.1).

Тому можна сформулювати більш загальну теорему, яка давала б необхідні умови екстремуму функції.

Теорема. Якщо в деякій точці *неперервна* функція *має екстремум,* то в цій точці її *похідна дорівнює нулю* або *не існує.*

Зауважимо, що обернене твердження до цієї теореми, взагалі кажучи, не є правильним. Тому ця теорема визначає *лише необхідну умову екстремуму функції.*

З цієї теореми випливає, що екстремуми функції слід шукати в тих точках, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує , а тому стосовно екстремуму функції ці точки грають важливу роль. Вказані точки називають критичними точками функції або точками „підозрілими” за екстремумом, бо тільки в таких точках можливий екстремум, але необов’язково.

Означення. *Точки, в яких похідна неперервної функції дорівнює нулю* або *не існує, називаються критичними точками функції.* Такий термін виправданий, бо не слід думати, що кожна критична точка надає їй екстремум. Досить привести хоч би один контрприклад.

Наприклад, функція $y = x^3$ має критичну точку $x = 0$, бо її похідна $y' = 3x^2$ при $x = 0$ перетворюється в нуль, але в цій точці функція $y = x^3$ *не має екстремуму,* бо вона є *зростаючою* на всій числовій осі (рис 1.5).

4.4 Достатні умови екстремуму

4.4.1 Перша достатня умова

З попереднього випливає, що треба випробовувати критичні точки функції, досліджуючи характер поведінки функції зліва і справа цих точок. Справедлива теорема.

Теорема. Якщо в околі критичної точки функції існує її похідна і при переході зліва направо через цю критичну точку функції *знак її похідної змінюється,* то в цій точці функція *має екстремум.*

Доведення. Нехай точка $x = x_0$ є критичною точкою функції $f(x)$ і нехай похідна функції при переході зліва направо змінює знак з плюса на мінус, тобто $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тоді на проміжку $(x_0 - \delta; x_0)$ функція $f(x)$ зростає, а на проміжку $(x_0, x_0 + \delta)$ – спадає. Отже, функція $f(x)$ при переході зліва направо через точку $x = x_0$ із зростаючої переходить в спадну, а це означає, що в точці $x = x_0$ функція $f(x)$ має максимум.

Якщо ж похідна змінює знак з мінуса на плюс, тобто $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ і $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то на проміжку $(x_0 - \delta; x_0)$ функція $f(x)$ спадає, а на проміжку $(x_0, x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ зростає, тобто спадання функції переходить в її зростання, а це означає, що в точці $x = x_0$ функція $f(x)$ має мінімум. Теорема доведена.

Користуючись цією ознакою, можна вказати такий спосіб дослідження функції на екстремум:

а) знайти область визначення функції;

б) знайти похідну функції і знайти критичні точки функції;

в) визначити знаки похідної зліва і справа знайдених критичних точок функції;

г) якщо знаки похідної функції при переході через вказані критичні точки функції змінюються, то ці критичні точки є точками екстремуму;

д) визначити екстремуми функції, знайшовши її значення в екстремальних точках.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = xe^{-x}$.

Розв'язування. Функція визначена на всій числовій осі. Знайдемо похідну функції: $y' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = e^{-x}(1-x)$. Знайдемо критичні точки функції: $y' = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0$, $x = 1$ – критична точка функції. Визначимо знаки похідної зліва і справа точки $x = 1$, користуючись виразом похідної $y' = e^{-x}(1-x)$. При $x < 1 \Rightarrow y' > 0$, тоді на проміжку $(-\infty; 1)$ функція зростає, а при $x > 1 \Rightarrow y' < 0$, то на проміжку $(1; +\infty)$ функція спадає. Отже, $x = 1$ є точка максимуму і $y_{max} = y(1) = 1/e$.

Відповідь: $y_{max} = 1/e$ при $x = 1$.

4.4.2 Друга достатня умова екстремуму

Справедлива теорема.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ має похідну першого порядку в деякому околі точки $x = x_0$, в якій *похідна дорівнює нулю* ($f'(x_0) = 0$), а в самій точці *існує друга похідна, відмінна від нуля,* тоді, якщо $f''(x_0) < 0$, то в точці $x = x_0$ функція має *максимум*, а якщо $f''(x_0) > 0$, то в точці $x = x_0$ функція має *мінімум*.

Доведення. Нехай $f''(x_0) > 0$. Це означає за достатньою умовою зростання функції, що $f'(x)$ при переході через точку $x = x_0$ зростає. Але оскільки $f'(x_0) = 0$, то зростання $f'(x)$ означатиме, що похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, тобто $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Тоді на підставі першої достатньої умови екстремуму випливає, що в точці $x = x_0$ функція має мінімум.

Аналогічно доводиться друга частина теореми, якщо $f''(x_0) < 0$. Теорему доведено.

Зауважимо, що друга достатня умова екстремуму має більш вузьку область застосування, ніж перша умова.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = xe^{-x}$.

Розв'язування. В попередньому прикладі було показано, що критичною точкою цієї функції є точка $x = 1$. Оскільки $y' = e^{-x}(1-x)$, то

$$y'' = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(1-x+1);\ y'' = -e^{-x}(2-x).$$

Знайдемо значення y'' в точці $x = 1$: $y''(1) = -e^{-1}$. Оскільки $y''(1) = -1/e$, тобто $y''(1) < 0$, то в цій точці функція має максимум, що збігається з попереднім висновком.

4.5 Знаходження найбільшого і найменшого значень функції на відрізку

Зауважимо, що екстремальні точки мають локальний характер, бо можуть бути точки, в яких значення функції виявляються більшими або меншими, ніж екстремальні значення функції, але вони вже не попадають в певний окіл екстремальних точок.

Нехай функція $f(x)$ *визначена і неперервна* на деякому відрізку $[a;b]$, тоді згідно з теоремою Вейєрштрасса *вона на ньому досягає свого найбільшого значення M і найменшого значення m.*

Як ці значення знаходити? Прості міркування приводять нас до такого. Якщо ці значення досягаються всередині відрізка $[a;b]$, то ця внутрішня точка буде екстремальною, а значить, критичною точкою функції. Тому значення M і m повинні вибиратись серед значень функції, що досягаються у внутрішніх критичних точках функції. Але ж шукані значення M і m можуть досягатись на кінцях відрізку, тобто при $x = a$ і $x = b$, які можуть і не бути критичними точками функції.

Таким чином, щоб знайти найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку, треба користуватись таким правилом:

– знайти всі критичні точки функції, що лежать всередині відрізка;

– визначити значення функції в цих точках;

– визначити значення функції на кінцях відрізка, тобто при $x = a$ і $x = b$;

– серед скінченного числа знайдених значень функції вибрати найбільше і найменше. Це і будуть шукані глобальні максимум і мінімум функції M і m.

4.6. Опуклість і вгнутість графіка функції. Точки перегину

4.6.1 Опуклість і вгнутість графіка функції

Розглянемо на площині криві таких двох форм

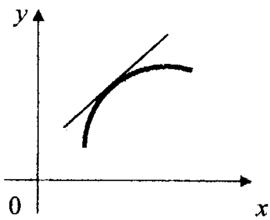


Рисунок 4.1

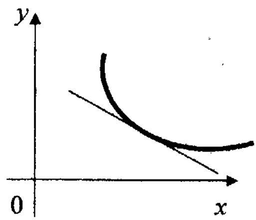


Рисунок 4.2

В першому випадку крива називається опуклою, в другому – вгнутою. З їх геометричних властивостей видно, що для опуклої кривої характерним є те, що всякий раз точки кривої лежать нижче будь-якої її дотичної, а для вгнутої кривої її точки лежать вище будь-якої дотичної до неї (по відношенню до осі Oy).

Означення. Крива називається ***опуклою*** на проміжку, якщо всі її точки лежать *нижче* будь-якої її *дотичної* на цьому проміжку.

Означення. Крива називається ***вгнутою*** на проміжку, якщо всі її точки лежать вище будь-якої її дотичної на цьому проміжку.

Як же для заданої функції $y = f(x)$ визначити форму її графіка?

Якщо звернутись до другої умови екстремуму, то в точці максимуму, якій на графіку диференційовної функції відповідає "горб"(тобто опуклість кривої), її друга похідна є від'ємною, а в точці мінімуму, якій відповідає "яма" (тобто вгнутість графіка), друга похідна функції додатна.

Справедливі такі дві теореми.

***Теорема* 1.** Якщо в усіх точках деякого проміжку друга похідна функції від'ємна, то її *графік опуклий* на цьому проміжку.

***Теорема* 2.** Якщо в усіх точках деякого проміжку *друга похідна функції додатна*, то її *графік вгнутий* на цьому проміжку.

Ці теореми встановлюють достатні умови опуклості і вгнутості графіка функції. Запам'ятати висновки цих теорем допомагає правило "парасольки". Доведемо їх.

Доведення. Нехай $f''(x) < 0$ при всіх $x \in (a;b)$. Звернемо увагу на те, що за умовою теореми друга похідна функції існує. Тоді згідно з *теоремою про зв'язок диференційовної функції з неперевною* функцією випливає, що її *перша похідна* $f'(x)$ *неперервна* на $(a;b)$ і сама функція $f(x)$ теж неперервна на ньому.

Доведемо, що графік цієї функції опуклий на цьому проміжку, тобто всі точки графіка функції лежать нижче будь-якої його дотичної на цьому проміжку (рис. 4.1). На проміжку (a; b) виберемо довільну точку $x = x_0$ і проведемо дотичну до графіка функції в точці $M_0(x_0; f(x_0))$. Покажемо, що для всіх $x \in (a;b)$, крім точки $x = x_0$, ордината точки графіка функції менша ординати відповідної точки дотичної до графіка, тобто $y_{гр.} - y_{дот.} < 0$.

Враховуючи те, що $y_{гр.} = f(x)$, а з рівняння дотичної

$y - f(x_0) = f'(x_0)\ (x - x_0)$ випливає, що $y_{\text{дот.}} = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)$, будемо мати, що

$$y_{гр.} - y_{дот.} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\ (x - x_0) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)\ (x - x_0).$$

Припустимо для визначеності, що $x > x_0$. Застосуємо до різниці $f(x) - f(x_0)$ теорему Лагранжа на проміжку $[x_0; x]$, будемо мати

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)\ (x - x_0), \text{ де } x_0 < c < x.$$

Тоді $y_{гр.} - y_{дот.} = f'(c)\ (x - x_0) - f'(x_0)\ (x - x_0)$, де $x_0 < c < x$.

До різниці $f'(c) - f'(x_0)$ знову можемо застосувати теорему Лагранжа на проміжку $[x_0; c]$, будемо мати: $f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0)$, де $x_0 < c_1 < c$. Тоді $y_{гр.} - y_{дот.} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$. Тепер легко визначити знак добутку , що стоїть в правій частині цієї рівності. Оскільки $x_0 < c_1 < c$, то $c_1 \in (a;b)$, тоді $f'(c_1) < 0$ за умовою теореми. За припущенням різниці $x - x_0 > 0$ і $c - x_0 > 0$, бо $x_0 < c < x$. Тоді цей добуток є від'ємний. Таким чином, $y_{гр.} - y_{дот.} < 0$.

Якщо ж припустити, що $x < x_0$, то всі три вказані множники є від'ємними, тоді і добуток є від'ємним, тобто $y_{гр.} - y_{дот.} < 0$ і в цьому випадку.

Аналогічно доводиться друга теорема.

Приклад. Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції $y = xe^{-x}$.

Розв'язування. Оскільки $y'' = -e^{-x}(2-x)$, то за достатньою умовою опуклості графіка $y'' < 0$ будемо мати нерівність $-e^{-x}(2-x) < 0$ або

$e^{-x}(2-x) > 0$. Оскільки $e^{-x} > 0$ при всіх $x \in R$, то з цієї нерівності маємо, що $2 - x > 0$ або $x < 2$. Отже, графік функцій опуклий на проміжку $(-\infty;2)$ і вгнутий на проміжку $(2;+\infty)$.

4.7 Точки перегину графіка функції

Означення. Точки графіка *неперервної* функції, що відокремлюють його опуклу частину від вгнутої, називаються ***точками перегину*** *графіка функції.*

Звернемо увагу на те, що *дотична в точці перегину перетинає графік* функції, бо з однієї сторони цієї точки крива лежить над дотичною, а з іншої під дотичною.

Як же знаходити точки перетину графіка заданої функції?

Якщо точка $(x_0;\ f(x_0))$ *є точкою перегину графіка функції* $y = f(x)$, то в цій точці *друга похідна функції дорівнює нулю або не існує.*

Це очевидно, бо *в противному випадку ця точка є точкою опуклості або вгнутості* графіка функції.

Це є лише *необхідна умова точки перегину* графіка, що видно хоч би із графіка функції $y = x^4$, який є вгнутим (рис. 1.16), проте її друга похідна $y'' = 12x^2$ дорівнює нулю при $x = 0$.

Встановимо *достатні умови* точки перегину графіка функції.

Теорема 3. Якщо в деякому околі точки $x = x_0$, в якій *друга похідна* неперервної функції *дорівнює нулю або не існує, друга похідна* функції існує і при переході через цю точку *змінює знак,* то точка $(x_0;\ f(x_0))$ *є точкою перегину графіка функції.*

Доведення. Нехай $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує і нехай в деякому околі друга похідна при переході через точку $x = x_0$ змінює знак, наприклад, при $x < x_0$ $f''(x) < 0$, а при $x > x_0$ $f''(x) > 0$. Тоді графік функції з опуклого переходить в угнутий. А це означає, що точка з абсцисою $x = x_0$ є точкою перегину графіка функції. Теорему доведено.

Висновок. Виходячи з цих трьох теорем, можна вказати алгоритм знаходження точок перегину та інтервалів опуклості і вгнутості графіка функції:

– знаходять область визначення функції;

– знаходять другу похідну функції і визначають точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує (так звані точки „підозрілі на перегин");

– встановлюють знаки другої похідної зліва і справа знайдених точок і за її знаком визначають інтервали вгнутості або опуклості графіка функції; при цьому: а) якщо знак другої похідної при переході через випробувані точки змінюється, то в точці із знайденою абсцисою графік функції набуває перегину; б) якщо ж знак другої похідної не змінюється, то випробовувана точка не є точкою перегину, за її знаком визначають форму графіка функції між двома сусідніми точками перегину.

4.8 Асимптоти графіка функції

Якщо область визначення функції або область її значень є необмежені, то важливою характеристикою графіка функції є наявність в нього асимптот, так називають прямі, які „розпрямляють" графік функції при необмеженому віддаленні біжучої точки прямої від початку координат.

Означення. Асимптотою графіка функції називається *пряма*, відстань до якої від точки графіка функції прямує до нуля при необмеженому віддаленні цієї точки в безмежність.

Наприклад, для графіка функції $y=\frac{1}{x}$ асимптотами є координатні осі (рис. 1.17) для графіка функції $y=ln x$ асимптотою є від'ємна піввісь Oy (рис. 1.22), а графіки функцій $y=tgx$ і $y=ctgx$ мають безліч асимптот, це відповідно вертикальні прямі $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ і $x=\pi k$, де $k\in Z$ (рис. 1.10 і 1.12).

Розрізняють асимптоти двох типів: вертикальні і похилі.

Як же знаходити асимптоти графіка функції?

1. Почнемо з пошуку вертикальних *асимптот.* Якщо графік функції, $y=f(x)$ має вертикальну асимптоту, то її рівняння повинно мати вигляд $x=a$, бо саме таке ріняння визначає пряму, паралельну осі Oy. З означення асимптоти випливає, що пряма $x=a$ буде асимптотою графіка функції $y=f(x)$ тоді і тільки тоді, коли при $x\to a$ випливає, що $y\to\infty$ (точка кривої повинна віддалятись на безмежність), тобто $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$. Але ця рівність означає за означенням, що точка $x=a$ є *точкою розриву другого роду.*

Таким чином, щоб знайти вертикальні асимптоти графіка функції, треба знайти всі її точки розриву другого роду. Тоді відповідні вертикальні прямі і будуть шуканими асимптотами. Зауважимо, що вертикальну асимптоту графік функції не може перетинати згідно з означенням функції.

2. Нехай графік функції $y=f(x)$ має *похилу асимптоту.* Це буде деяка *невертикальна* пряма і її рівняння можна шукати у вигляді *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*

$$y = kx + b. \tag{4.1}$$

Як же зайти параметри k і b цієї прямої? Нехай асимптота нахилена до осі Ox під кутом φ і нехай точка $M(x, y)$ є біжуча точка графіка функції, яка вздовж цієї кривої віддаляється в безмежність, що можливо за умови, коли $x \to \infty$. За означенням асимптоти відстань $d=MK$ при $x \to \infty$ прямуватиме до нуля. З трикутника MKN ($\angle MKN = 90°$, $\angle KMN = \varphi$) випливає, що $MN = \dfrac{MK}{\cos\varphi}$. Оскільки $\cos\varphi = const$, а $MK \to 0$ при $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$. Але ж $MN = PM - PN$, то враховуючи те, що $PM = f(x)$,

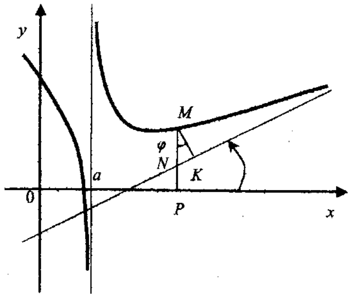


Рисунок 4.3

$PN = kx + b$, будемо мати, що $MN = f(x) - kx - b$. Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} MN = 0$ рівносильна рівності $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ або $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$. Оскільки границя добутку нескінченно великої величини x на вираз $\dfrac{f(x)}{x} - kx - b$ дорівнює нулю, то звідси маємо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x} = 0$, то звідси дістанемо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} - k = 0$. Отже,

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{4.2}$$

Знаючи k, із рівності $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ дістанемо

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx). \tag{4.3}$$

Зауваження. Якщо одна із границь (4.2) або (4.3) не існує, то *графік функції $y = f(x)$ не має похилих асимптот.* Якщо $k = 0$, а границя (4.3) існує, то *похила* асимптота переходить в *горизонтальну*.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Розв'язування. Спочатку знайдемо вертикальні асимптоти. Оскільки точка $x = 1$ є точка розриву другого роду, бо $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$, то пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою графіка цієї функції.

Рівняння похилої асимптоти має вигляд $y = kx + b$, де параметри k і b визначаються за формулами (4.2) і (4.3):

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2/(x-1)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$; при $k = 1 \Rightarrow b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1$. Отже, $k=1$; $b=1$, тоді пряма $y = x+1$ є похилою асимптотою графіка функції.

Відповідь: $x=1$; $y = x+1$.

4.9 Загальна схема повного дослідження функції

Нами розглянуті основні елементи повного дослідження функції, яке проводиться заради побудови графіка даної функції. Повне дослідження функції проводиться за певним зразком, який враховує основні елементи цього дослідження, а саме:

– визначають область визначення функції;

– досліджують функцію на неперервність та знаходять точки розриву функції і характер поведінки функції в околі її точок розриву; визначають вертикальні асимптоти;

– досліджують функцію на парність і непарність, знаходять точки перетину графіка функції з координатними осями;

– знаходять інтервали монотонності функції, точки екстремуму і значення в цих точках за допомогою першої похідної;

– визначають інтервали опуклості і вгнутості графіка функції і точки перегину графіка функції, використовуючи другу похідну;

– знаходять похилі і горизонтальні асимптоти графіка функції;

– іноді додатково знаходять значення функції в кількох точках.

Завершується повне дослідження функції побудовою графіка функції.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{x-1}$ і побудувати її графік.

Розв'язування. 1. Функція визначена при всіх $x \neq 1$.

2. Функція неперервна при всіх $x \neq 1$; точка розриву функції $x=1$ є точкою розриву другого роду. Отже, пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою.

3. Графік функції перетинає вісь Ox при $x=0$ і вісь Oy при $y=0$.

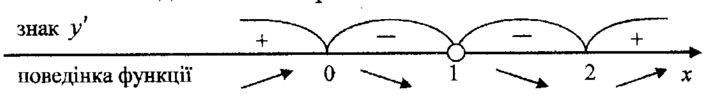
4. Дослідимо функцію на монотонність і екстремум:

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2};\ y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2};$$

знайдемо критичні точки: $y' = 0 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2$;

y' – не існує при $x = 1 \notin D(y)$;

визначимо знаки похідної зліва і справа знайдених точок:



Отже, функція зростає на проміжках $(-\infty;0)$ і $(2;+\infty)$ та спадає на проміжках $(0;1)$ і $(1;2)$. Точка $x=0$ – точка максимуму, $y_{max}=y(0)=0$; точка $x=2$ – точка мінімуму, $y_{min}=y(2)=4$.

5. Знайдемо точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції, користуючись другою похідною:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x-1)^2-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Із рівності $y''=0 \Rightarrow \dfrac{2}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow$ рівняння не має розв'язків; y'' не існує при $x=1$, а це є точка розриву функції. Визначимо знаки другої похідної зліва і справа точки $x=1$: при $x<1 \Rightarrow y''<0$, тоді графік функції опуклий на проміжку $(-\infty;1)$; при $x>1 \Rightarrow y''>0$, тоді на проміжку $(1;+\infty)$ графік функції вгнутий; точок перегину графік функції не має.

6. Похилою асимптотою графіка функції є пряма $y=x+1$ як було встановлено у попередньому прикладі.

7. Графік функції зображено на рис 4.4.

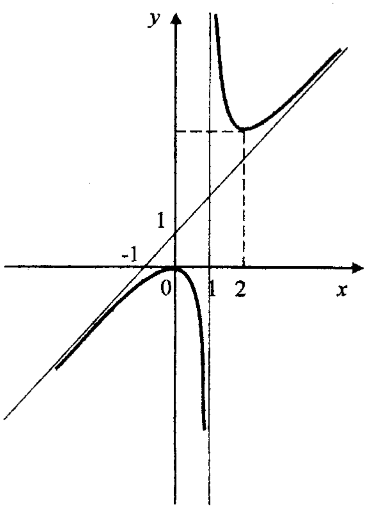


Рисунок 4.4.

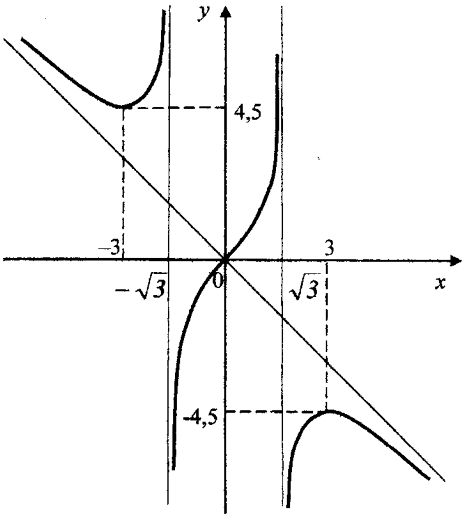


Рисунок 4.5.

Приклад 2. Дослідити функцію $y=xe^{-x}$ і побудувати її графік.

Розв'язування. 1. Функція визначена при всіх $x\in(-\infty;+\infty)$, неперервна всюди, точок розриву не має і тому не має вертикальних асимптот.

2. Функціє не є ні парною, ні непарною.

3. Точки перетину з координатними осями: при $x=0 \Rightarrow y=0$ і при $y=0 \Rightarrow xe^{-x}=0 \Rightarrow x=0$. Отже, графік функції проходить через початок координат. При $x<0 \Rightarrow y<0$, при $x>0 \Rightarrow y>0$.

4. Як було встановлено в п. 4.5 ця функція має одну точку максимуму $x=1$, $y_{max}=\frac{1}{e}\approx 0{,}4$, функція зростає на проміжку $(-\infty;1)$ і спадає на проміжку $(1;+\infty)$.

5. Як випливає з п. 4.6, графік цієї функції опуклий на проміжку $(-\infty;2)$ і вгнутий на проміжку $(2;+\infty)$; тоді точка з абсцисою $x=2$ є точкою перегину графіка з ординатою $y=2/e^2\approx 0{,}3$.

6. Знайдемо похилі асимптоти, рівняння яких мають вигляд $y=kx+b$, користуючись формулами (4.2) і (4.3):

а) $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$; $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$. При $k=0$ і $b=0$ маємо $y=0$ – це правостороння асимптота.

б) $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$. Отже, лівостороння асимптота відсутня.

7. Знайдемо ще додаткову точку: при $x=-1$ маємо $y=-e\approx-2{,}7$

8. Графік функції приведено на рис 4.6.

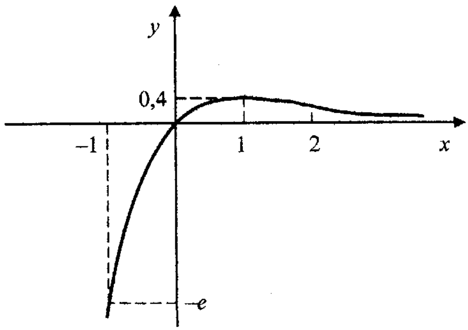


Рисунок 4.6

Приклад 3. Дослідити функцію $y=\frac{x^3}{3-x^2}$ і побудувати її графік.

Розв'язування. 1. Функція визначена при всіх $x\neq\pm\sqrt{3}$.

2. Функція неперервна при всіх $x\neq\pm\sqrt{3}$. Точки $x=\sqrt{3}$ і $x=-\sqrt{3}$ – точки розриву функції. Встановимо характер розриву:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty;\ \lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=+\infty;\ \lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=-\infty.$$

Отже, точки $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ є точками розриву другого роду.

Прямі $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ є вертикальними асимптотами.

3. Оскільки $f(-x)=\dfrac{(-x^3)}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-\dfrac{x^3}{3-x^2}=-f(x)$, то ця функція непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

4. Знайдемо точки перетину графіка функції з координатними осями. Очевидно, що цією точкою є початок координат.

5. Дослідимо функцію на екстремум. Знайдемо її похідну $y'=\dfrac{3x^2(3-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2}=\dfrac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}$. Визначимо критичні точки функції:

а) $y'=0\Rightarrow 9x^2-x^4=0$; $x^2(9-x^2)=0\Rightarrow x=0$, $x=\pm 3$;

б) y' не існує $\Rightarrow (3-x^2)^2=0\Rightarrow x\pm\sqrt{3}\notin D(y)$.

Встановимо знаки похідної зліва і справа знайдених точок: при $x<-3\Rightarrow y'<0$, функція спадає; при $-3<x<-\sqrt{3}$ і $-\sqrt{3}<x<0\Rightarrow$ $\Rightarrow y'>0$, функція зростає; при $0<x<\sqrt{3}$ і $\sqrt{3}<x<3\Rightarrow y'>0$, функція зростає; при $x>3\Rightarrow y'<0$, функція спадає.

Отже, точка $x=-3$ – точка мінімуму, $x=3$ – точка максимуму; $y_{min}=9/2$; $y_{max}=-9/2$.

6. Знайдемо точки перегину і інтервали опуклості і вгнутості графіка функції, користуючись другою похідною.

$$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x^2-x^4)\cdot 2(3-x^2)\cdot(-2x)}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{54x+6x^3}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

Знайдемо можливі точки перегину: а) $y''=0\Rightarrow 6x(9+x^2)=0\Rightarrow x=0$;

б) y'' не існує за умови, що знаменник $(3-x^2)^3=0$, звідки маємо, що $x=\pm\sqrt{3}$, які не входять в область визначення функції. Встановимо знаки другої похідної при переході через точку $x=0$ і точки $-\sqrt{3}$ та $\sqrt{3}$: при $x<-\sqrt{3}\Rightarrow y''>0$, графік вгнутий; при $-\sqrt{3}<x<0\Rightarrow y''<0$, графік опуклий; при $0<x<\sqrt{3}\Rightarrow y''>0$, графік вгнутий; при $x>\sqrt{3}\Rightarrow y''<0$, графік опуклий. Точка з абсцисою $x=0$ є точкою перегину, це буде точка (0;0).

7. Знайдемо похилі асимптоти графіка функції, рівняння яких шукаємо у вигляді $y = kx + b$. Користуючись формулами (4.2) і (4.3), матимемо:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3/(3-x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{3-x^2} = -1\,;\; b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0.$$ При $k = -1$ і $b = 0$ дістанемо $y = -x$. Це двостороння асимптота графіка функції.

8. Графік функції приведено на рис. 4.5.

5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

Задача 1. Користуючись методом лінійного перетворення аргументу функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = Af(ax+b)+B$.

1.1	$y = log_2(x-1)+2$;	$y = -2cos(x+\frac{\pi}{3})+1$.
1.2	$y = 1-3^{x+2}$;	$y = \frac{1}{2}sin2x-1$.
1.3	$y = -4^{x-2}+1$;	$y = -sin(2x-3)$.
1.4	$y = 1+log_3(x-2)$;	$y = 3cos\frac{x}{2}+1$.
1.5	$y = 3-e^{x-2}$;	$y = -2sin(x+\pi/4)$.
1.6	$y = 2log_4(x+1)-3$;	$y = -2sin\frac{x}{3}+2$.
1.7	$y = -1+e^{2+x}$;	$y = 2cos(x/2)-1$.
1.8	$y = 1-log_2(x-3)$;	$y = 1{,}5sin(x-2)$.
1.9	$y = -2^{x+3}+3$;	$y = 3sin(\frac{x}{2}-1)$.
1.10	$y = 1-2log_3 x$;	$y = -cos(2x+1)$.
1.11	$y = 2-e^{2+x}$;	$y = -sin(2x+2)$.
1.12	$y = \frac{1}{2}e^{x+1}+3$;	$y = 2cos(1-x)$.
1.13	$y = 3+2lg(x-1)$;	$y = -3sin(2-x)$.
1.14	$y = -2\cdot 3^{-x}+1$;	$y = -cos(1-2x)$.
1.15	$y = -3lg(-x)+2$;	$y = 2sin(2+2x)$.
1.16	$y = 2e^{1-x}-2$;	$y = -2sin(1+x)+1$.
1.17	$y = -2+log_5(x+3)$;	$y = -3sin(x-1)$.
1.18	$y = 3-2^{2-x}$;	$y = -2cos(1+x)+1$.
1.19	$y = -1+2e^{x/2}$;	$y = -sin(2-x)$.
1.20	$y = 1-2log_3(-x)$;	$y = 1-sin2x$.
1.21	$y = 3e^{2-x}-1$;	$y = 1-cos2x$.
1.22	$y = -2+3log_4(-x)$;	$y = 2+sin3x$.
1.23	$y = -1+2e^{-2x}$;	$y = -2+sin2x$.
1.24	$y = 3lg(x+2)-1$;	$y = 1-3sin(x/2)$.
1.25	$y = -3+2^{x-2}$;	$y = 2-cos(x/2)$.
1.26	$y = 2-3log_4 x$;	$y = -1-cos2x$.

1.27 $y=-2+\frac{1}{2}e^{-x}$; $y=2-3cos(x/2)$.

1.28 $y=3-2log_3 x$; $y=1-0{,}5cos(1-x)$.

1.29 $y=2-log_3(x+1)$; $y=2sin(3-x)$.

1.30 $y=-3+2e^{-x}$; $y=-3cos(2-x)$.

1.31 $y=1-3\cdot 2^{-x}$; $y=1-cos3x$.

1.32 $y=-3+2log_4 x$; $y=1{,}5cos(\pi/6-x)-1$.

1.33 $y=2-log_2(x+3)$; $y=2sin(\pi/3-x)+1$.

1.34 $y=-3+4^{1-x}$; $y=-3cos(2x/3)$.

1.35 $y=1-e^{1-x}$; $y=-2sin2x$.

1.36 $y=1+4lg(-x)$; $y=3sin\frac{x}{2}-1$.

1.37 $y=2-(1/2)^{x-2}$; $y=2-3cosx$.

1.38 $y=1-2log_5(x+2)$; $y=2sinx-1$.

1.39 $y=3+2^{1-x}$; $y=2cos2x-2$.

1.40 $y=1-e^{2-x}$; $y=1+2sin(1-x)$.

1.41 $y=-1+2log_3(-x)$; $y=-1+2cos(2-x)$.

1.42 $y=2-log_2(x-1)$; $y=1{,}5cos2x-1$.

1.43 $y=1-2^{x+2}$; $y=3sin3x-2$.

1.44 $y=2-e^{x-2}$; $y=-2cos3x+1$.

1.45 $y=2-log_4(x-3)$; $y=2sin(3x-3)$.

1.46 $y=-1-log_2(x+3)$; $y=-1{,}5cosx+2$.

1.47 $y=3-e^{x-1}$; $y=4sin2x-3$.

1.48 $y=1-e^{2-x}$; $y=-3cos2x+2$.

1.49 $y=2-lg(x-4)$; $y=-cos(x/3-1)$.

1.50 $y=1-lg(x+2)$; $y=3sin(2-x)$.

Задача 2. Знайти границі фунцій.

2.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+3}{\sqrt{4x^4-3x+5}}$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2+x-2}$; $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{2x-1}$;

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{sin(x+1)}$; $\lim\limits_{x\to2}(x-1)^{5x/(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{sin3x}-1}{ln(1-4x)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-3}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+5}{5x^3+6x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-7x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x+5}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg3x}{ln(1-3sin2x)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{2x/(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+x-5}\right)$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^3-4x^2}$.

2.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2x-6x^2+5}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7}+2x\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{-x}}{\arcsin 2x}$; $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{2/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot \operatorname{arctg}3x}$.

2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{3x^3+x-4}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x^2+1}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{(2x-1)/(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-3x^2)}{1-\cos 6x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-6x+3}-\sqrt{2x^2-5}\right)$; $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{\operatorname{tg}(x-4)}$.

2.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x+7}{2x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+3x^2-4x}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{x+2x^3}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{2x+3}\right)^{4x}$; $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{2x/(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-4x)}{e^{8x}-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos 3x}{x\sin 5x}$;

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\operatorname{tg}(3x-6)}{\ln(3-x)}$.

2.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-5x^2+3}{2x-2x^4+5}$; $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2+5x-14}{x^2-4x-21}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{5x-1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{17x-8}-3}{x^2+4x-5}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{5/(2-x)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 6x-\cos 2x}{x\cdot \operatorname{tg}4x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 4x}{\ln(1-5x)}$.

2.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-4x^3+7x}{2x^5+3x^2+5}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^4-x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+4x-7}\right)$;

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{9x-2}-5}{x^3-9x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-4}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to-1}(2+x)^{4/(x+1)}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 6x}{\ln(1+7x)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-4\sqrt{x}}-1}{x+3\sqrt{x}}$.

2.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x^2+3}{2x^2+x-7}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{5x-9}-1}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-1}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to 3}(x-2)^{4x/(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5+\sin 3x}{\operatorname{arctg} 7x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1}{4\operatorname{tg} 5x}$.

2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-4x^3+3}{5x^4+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2-x-1}{3x^2+2x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{2x+1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{2-2x}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{(2+x)/x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{\operatorname{tg} 8x}$;

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\operatorname{tg}(2x-8)}{x^2-5x+4}$.

2.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-4x^4+3}{3x^5+7x-1}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+x+1}{2x^2+x-1}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg} 6x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{2x/(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} 3x}-1}{\ln(1-5x)}$.

2.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-3x+9}{2x^5+2x^2+3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4x}{2x^2+x-3}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{2x^2-4x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-5}-1}{2x^2-3x-2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-9}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{x/(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{3x\operatorname{tg} 8x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2\sin x}-1}{\ln(1-3\sin 2x)}$.

2.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-3x^3+5}{3x^4-6x+8}$; $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x^2-7x-18}{2x^2-17x+9}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x^3-4x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-6}{2x}\right)^{4x}$; $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{2x/(2-x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 8x+\sin 2x}{x\cdot\operatorname{arctg} 5x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{\operatorname{tg}(2x-2)}$.

2.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-4x+2}{2x^3+3x^2-5}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^3-8}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to -4}(x+5)^{x/(x+4)}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\operatorname{tg} 7x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{3x^2-x-2}$.

2.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-2x+5x^4}{2+3x-4x^3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(1-x^3)}{x^3-x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{2x+8}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{4x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}}$; $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{4x/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2tgx}-1}{\arcsin 5x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(2x+4)-\ln 4}{\sin 5x}$.

2.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-x+5x^3}{2x^3-12x^2+5}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-5x-3}$; $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{8x}$; $\lim\limits_{x\to -2}(3+x)^{4/(x+2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3\sin x}-1}{arctg 4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin x}{tg 4x}$.

2.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-6x+5}{2-3x^2+3x^4}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-4x}$; $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2+5x-24}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+3x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to -1}(2+x)^{5x/(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-3tgx}-1}{\ln(1+7x)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos x}{x\cdot\arcsin 4x}$.

2.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^2+7}{2-x-2x^4}$; $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+3x-9}{x^3+27}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x-3}-1}{x^3+x^2+2x-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{4-x}\right)^{-3x}$; $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{4/(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x2}-1}{1-\cos 4x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin x}{\ln(1-9x)}$.

2.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-7}{2-x-3x^3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-10x+8}{x^3-8}$; $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5-4x}-3}{x^4+x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+8}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{3x-1}$; $\lim\limits_{x\to -3}(4+x)^{5/(x+3)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4tgx}-1}{\ln(1+7x)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 3x}{x\cdot\arcsin 5x}$.

2.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-4x+1}{3-5x^2+3x^3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2-9x+5}{x^3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x^2-7x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^{4x-1}$; $\lim\limits_{x\to -2}(3+x)^{5x/(x+2)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-4tgx}-1}{\arcsin 6x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 2x}{1-\cos 8x}$.

2.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-4x-6x^2}{3x^3-5x+2}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-9x-10}{x^4+8x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{2x^2+x-3}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{2x+3}$; $\lim\limits_{x\to5}(6-x)^{5/(x-5)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-6tg3x}-1}{arcsin8x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin9x-sin5x}{ln(1+8x)}$.

2.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x^3+5x^4}{2x^4-5x+1}$; $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3-16x}$; $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-7x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2-2x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{1-2x}\right)^{-5x}$; $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{4/(x-3)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-3sinx}-1}{tg4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-3x}-e^{4x}}{arcsin6x}$.

2.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x+6x^4}{3x^4-2x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-5x-12}{x^3-4x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4-5x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+1}\right)^{-3x}$; $\lim\limits_{x\to-5}(6+x)^{4/(x+5)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(1-5x^2)}{x\cdot tg7x}$;

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{2x-2}-1}{sin(x-1)}$.

2.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-5x^4}{2x^5-4x+3}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-x-3}{x^4-x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-4x^3}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-3x+2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{1-3x}\right)^{4x}$; $\lim\limits_{x\to4}(5-x)^{6x/(x-4)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(2x+4)-ln4}{arctg6x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos12x}{x\cdot sin7x}$.

2.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-4x+7}{5+4x-2x^6}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+2x-2}{x^4+x}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^3-3x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+4}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to-3}(4+x)^{5/(x+3)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5sin2x}-1}{arcsin7x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos6x}{x\cdot tg8x}$.

2.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^7-3x^4+1}{x^7+5x-4}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-13x+3}{x^3-27}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{2x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x-4}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{4x/(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{tg3x}-1}{arcsin4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{cos6x-cos2x}{x\cdot sin5x}$.

2.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x^3+1}{2x^4+2x-7}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x^3+8}$; $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-3x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-6}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to3}(7-2x)^{2/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7x}-e^{-x}}{arctg3x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(1+3sin2x)}{tg4x}$.

2.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-4x+1}{4-x^2-x^3}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+x-15}{x^3+3x^2}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^3-4x^2}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+4x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{-3x}$; $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{6x/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4sinx}-1}{ln(1+3tgx)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-x}}{arcsin7x}$.

2.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x+3x^4}{1+5x^2-4x^4}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-x-15}{x^4-27x}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{4x^2-9x+5}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-2x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+2}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{5x/(x-2)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(3-x)-ln3}{tg\left(x^2-x\right)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2sinx}-1}{arcsin4x}$.

2.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x+4x^3}{2-x^2-2x^3}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^3-4x}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-1}{x^3+1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+5}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{-5x}$; $\lim\limits_{x\to8}(3x-23)^{4/(x-8)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-e^{-2x}}{arctg5x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(x+6)-ln6}{sin7x}$.

2.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+7x^5}{4+3x^3-2x^5}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+2x-8}{x^3+8}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x+13}-5}{x^3-9x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-x+4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{-2x}$; $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{5/(x-1)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4sinx}-1}{ln(1+2tgx)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arcsin4x}{x^4-3x^3}$.

2.31 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-5x+4x^5}{4+2x^2-3x^5}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{2x^2-9x-10}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+2}\right)^{-3x}$; $\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{5/(x-1)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-sin2x}-1}{arctg7x}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{tg(3x+3)}{x^3+1}$.

2.32 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x+4x^3}{2x^3+x^2+5}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-9x-5}{x^3-25x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{3x-2}-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-4x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{-2x}$; $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)^{5/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{4x}}{arcsin 9x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos 7x}{x\cdot tg 4x}$.

2.33 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-4x+5x^3}{2x^3-x^2+7}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3x^2+8x-3}{x^3+9x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{-5x}$; $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)^{5x/(x-4)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-4 sin x}-1}{arctg 8x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{tg\left(4x^2-4\right)}{4x^2-9x+5}$.

2.34 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x+1}{2x^4+x^2-3}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^2+x-3}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-7x}-4}{2x^2+3x-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x+5}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{4x/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-e^{4x}}{arcsin 5x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos 8x-cos 2x}{x\cdot tg 3x}$.

2.35 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x+4}{1-x^2-x^4}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{x^3-16x}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{3-x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{1-3x}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{4/(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4tgx}-1}{arcsin 3x}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos 6x-cos 2x}{arctg^2 2x}$.

2.36 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x-3}{1-2x^2+x^3}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{3x^2-5x-2}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+3x-9}{\sqrt{10+2x}-2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x}\right)^{2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{5/(x-1)}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-7x}-e^{2x}}{arctg 4x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cos x-cos 5x}{tg^2 3x}$.

2.37 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x+2}{1-3x^2-2x^5}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-7x+5}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+2x-8}{\sqrt{7-x}-3}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+x+4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-1}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to 4}(2x-7)^{5/(x-4)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg7x}{e^{4\sin x}-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 8x}{\ln(x+6)-\ln 6}$.

2.38 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-x+4}{2x^3-2x+5}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x^4-8x}$; $\lim\limits_{x\to-3}(2x+7)^{3/(x+3)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-2x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+2}\right)^{2x}$; $\lim\limits_{x\to4}(2x-7)^{2/(x-4)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{tg4x}-1}{3tg7x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+7)-\ln 7}{4\arcsin 5x}$.

2.39 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-4x+1}{3x^4-x^2+7}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-27x}{4x^2-11x-3}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{3x^2+6x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+4}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+1}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{3x/(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4\sin 5x}-1}{arctg8x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\cdot\arcsin 3x}$.

2.40 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x^2-4x^4}{2x^4+5x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-13x+6}{x^3-8x}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x^2-3x-4}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-1}\right)^{-4x}$; $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{4x/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-7x}-e^{5x}}{\arcsin 9x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 8x-\sin 2x}{2tg5x}$.

2.41 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-x^2-5}{3-4x-2x^3}$; $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{6x^2+11x+5}{x^4+x}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^2-5x+6}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-4x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to2}(4x-7)^{4/(x-2)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{7tgx}-1}{\arcsin 4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+9)-\ln 9}{\sin 5x-\sin x}$.

2.42 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-7x+8}{3-5x^2+2x^5}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-x-5}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x^2-3x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{2x^2-3x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{4x}$; $\lim\limits_{x\to-2}(3x+7)^{x/(x+2)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{arctg7x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1-7x^2\right)}{1-\cos 12x}$.

2.43 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x^3+3x^6}{2x^5-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^3-25x}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+2}{8x-1}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to3}(4x-11)^{x/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{tg5x}-1}{arcsin8x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin7x+sin3x}{ln(1-6sin2x)}$.

2.44 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x+5x^4}{4+x^2-2x^4}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-3x-10}{x^4-8x}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{7-3x}-4}{x^3-9x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5}-\sqrt{x^2+6x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-2}\right)^{-3x}$; $\lim\limits_{x\to1}(8x-7)^{5x/(x-1)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-2x}-e^{3x}}{arctg3x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln\left(1-sin^2 2x\right)}{x\cdot arcsin9x}$.

2.45 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-5x+7x^5}{2x^5-x^2+9}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+3x-7}{x^3-3x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x^3-4x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-x+7}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-4x}{3-4x}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{2x/(x-3)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{sin3x}-1}{ln(1-6x)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos7x}{x\cdot arcsin5x}$.

2.46 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x+7x^6}{2x^6-x^3+4}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4x^2+x-14}{x^3+8}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+8x^2}-3}{x^4-x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x^2+7}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3tg^2x\right)^{4/x^2}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln\left(1+3sin^3x\right)}{x^2\cdot arctg4x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-4x}-e^{2x}}{arcsin5x}$.

2.47 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-x^3+9}{2x^5-4x-5}$; $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+9x-5}{x^3-25x}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^4-4x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{2x^2+x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$; $\lim\limits_{x\to0}(1+4sin2x)^{5/tgx}$;

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{tg\left(x^2-4\right)}{x^3-8}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-x}}{ln(1+3arcsinx)}$.

2.48 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-x^3+2x^6}{2-7x^4-3x^5}$; $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+3x-9}{x^4-9x^2}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{7x+2}-3}{x^4-x}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-x+4}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-1}$; $\lim\limits_{x\to2}(5x-9)^{3x/(x-2)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(1-2sin3x)}{arctg7x}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{sin4x+sin3x}{e^{-2x}-e^{x}}$.

2.49 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-x^3+3}{4-7x-4x^4}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x-5}-2}{x^2-5x+6}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(1-3tg^2 4x\right)^{1/(x\cdot sin3x)}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-e^{-x}}{ln(1-4sin x)}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{arcsin(x-2)}{x^4-4x^2}$.

2.50 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x+4}{1-x^2-2x^5}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^4-8x}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-4}{x^3-3x^2}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x+7}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-1}\right)^{-4x}$; $\lim\limits_{x\to-1}(8+7x)^{2/(x+1)}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2tgx}-1}{arcsin8x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-cos12x}{x\cdot arctg5x}$.

Задача **3.** Дослідити на неперервність функції, визначити точки розриву функцій і характер поведінки функцій в околі цих точок. Визначити поведінку двох перших функцій на безмежності (при $x\to\infty$), переконавшись в існуванні горизонтальних асимптот їх графіків. Побудувати схематично графіки всіх вказаних функцій.

3.1 $y=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $\quad y=arctg\dfrac{3}{x-2}$; $\quad y=\begin{cases}3, & x\le-2,\\ -2x-1, & -2<x\le0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$

3.2 $y=\dfrac{3}{(x-2)^2}$; $\quad y=e^{\frac{1}{x+1}}$; $\quad y=\begin{cases}\cos x, & x\le0,\\ x^2+1, & 0<x\le1,\\ 3x+2, & x>1.\end{cases}$

3.3 $y=-\dfrac{7}{x+2}$; $\quad y=2^{\frac{1}{x-3}}$; $\quad y=\begin{cases}1, & x<-\pi,\\ -\cos x, & -\pi\le x\le0,\\ x+2, & x>0.\end{cases}$

3.4 $y=\dfrac{4}{(x-2)^2}$; $\quad y=arcctg\dfrac{2}{x+1}$; $\quad y=\begin{cases}2, & x\le-1,\\ 3-x^2, & -1<x\le1,\\ x+2, & x>1.\end{cases}$

3.5 $y=\dfrac{x}{x-1}$; $\quad y=3^{\frac{1}{x+2}}$; $\quad y=\begin{cases}2\sin x, & x<0,\\ -x, & 0\le x\le1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

3.6 $y=-\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $\quad y=arctg\dfrac{3}{x-2}$; $\quad y=\begin{cases}2\cos x, & x\le0,\\ 2, & 0<x\le1,\\ 2x+1, & x>1.\end{cases}$

3.7 $y=-\frac{1}{(x-2)^2}$; $y=3^{\frac{2}{x+4}}$; $y=\begin{cases}-\cos x, & x\le 0,\\ x-1, & 0\le x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

3.8 $y=\frac{x}{x+2}$; $y=e^{\frac{3}{x-4}}$; $y=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ 2tgx, & 0<x<\pi/4,\\ x-1, & x\ge \pi/4.\end{cases}$

3.9 $y=-\frac{5}{x-4}$; $y=arcctg\frac{7}{x+1}$; $y=\begin{cases}-2x, & x<0,\\ 2\sqrt{x}, & 0\le x\le 4,\\ x-3, & x>4.\end{cases}$

3.10 $y=\frac{4}{(x+3)^2}$; $y=5^{\frac{1}{x-2}}$; $y=\begin{cases}-x-1, & x\le 1,\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0,\\ \sin x, & x>0.\end{cases}$

3.11 $y=-\frac{8}{(x+3)^2}$; $y=4^{\frac{1}{3-x}}$; $y=\begin{cases}x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$

3.12 $y=\frac{x-1}{x+1}$; $y=2^{\frac{1}{x+4}}$; $y=\begin{cases}(x+1)^2, & x<0,\\ 1, & 0\le x\le 2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$

3.13 $y=\frac{3}{(x-5)^2}$; $y=2^{\frac{1}{6-x}}$; $y=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ x-1, & 0\le x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$

3.14 $y=-\frac{4x}{x+1}$; $y=arctg\frac{1}{5-x}$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x\le 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$

3.15 $y=-\frac{3}{(x-4)^2}$; $y=4^{\frac{3}{x+2}}$; $y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ -x, & 0\le x\ge 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

3.16 $y=\frac{2x}{x-3}$; $y=6\frac{1}{1-x}$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 1,\\ x+1, & x>1.\end{cases}$

3.17 $y=\dfrac{3}{(x-5)^2}$; $\quad y=e^{\frac{1}{x+1}}$; $\quad y=\begin{cases}x-2, & x<-1,\\ -x^2, & -1\le x<2,\\ -x-2, & x\ge 2.\end{cases}$

3.18 $y=\dfrac{2x}{x+3}$; $\quad y=arctg\dfrac{1}{2-x}$; $\quad y=\begin{cases}-3x-3, & x\le -1,\\ x^2-1, & -1<x\le 1,\\ x+2, & x>1.\end{cases}$

3.19 $y=\dfrac{4}{(x+1)^2}$; $\quad y=5^{\frac{1}{3-x}}$; $\quad y=\begin{cases}2, & x\le -1,\\ 3-x^2, & -1<x\le 1,\\ x+3, & x>1.\end{cases}$

3.20 $y=-\dfrac{x}{x+2}$; $\quad y=0{,}2^{\frac{5}{4-x}}$; $\quad y=\begin{cases}2, & x\le -\pi/4,\\ tgx, & -\pi/4<x\le 0,\\ 3x, & x>0.\end{cases}$

3.21 $y=\dfrac{7}{(x-3)^2}$; $\quad y=arcctg\dfrac{3}{x+2}$; $\quad y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x\le 2,\\ x-3, & x>2.\end{cases}$

3.22 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$; $\quad y=4^{\frac{1}{6-x}}$; $\quad y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ tgx, & 0<x\le \pi/4,\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$

3.23 $y=-\dfrac{3}{(x+5)^2}$; $\quad y=0{,}5^{\frac{1}{3-x}}$; $\quad y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi,\\ x-2, & x>\pi.\end{cases}$

3.24 $y=\dfrac{5}{(x+6)^2}$; $\quad y=arctg\dfrac{4}{x-2}$; $\quad y=\begin{cases}-2x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$

3.25 $y=-\dfrac{3}{x+4}$; $\quad y=e^{\frac{2}{2-x}}$; $\quad y=\begin{cases}-x^2, & x\le 0,\\ tgx, & 0<x\le \pi/4,\\ 2, & x>\pi/4.\end{cases}$

3.26 $y=-\dfrac{2}{(x+6)^2}$; $\quad y=7^{\frac{1}{x-1}}$; $\quad y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<1,\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$

3.27 $y=\dfrac{x-2}{x+3}$; $\quad y=0{,}4^{\frac{1}{x-5}}$; $\quad y=\begin{cases}-2x, & x\le 0,\\ 2\sqrt{x}, & 0<x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$

3.28 $y=-\dfrac{1}{(x-6)^2}$; $\quad y=e^{\frac{4}{x+7}}$; $\quad y=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

3.29 $y=\dfrac{5}{x+3}$; $\quad y=arcctg\dfrac{7}{x-4}$; $\quad y=\begin{cases}3x, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le\pi,\\ -2, & x>\pi.\end{cases}$

3.30 $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$; $\quad y=4^{\frac{4}{x-3}}$; $\quad y=\begin{cases}1, & x\le-\pi/4,\\ -tgx, & -\pi/4<x\le 0,\\ 2x-1, & x>0.\end{cases}$

3.31 $y=-\dfrac{3}{(x+4)^2}$; $\quad y=0{,}7^{\frac{5}{x-2}}$; $\quad y=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ \sqrt{x-1}, & 1\le x\le 5,\\ 2-x, & x>5.\end{cases}$

3.32 $y=\dfrac{7}{x-3}$; $\quad y=2{,}1^{\frac{4}{x+5}}$; $\quad y=\begin{cases}x+3, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ -2x+1, & x>2.\end{cases}$

3.33 $y=-\dfrac{6}{(x+3)^2}$; $\quad y=arctg\dfrac{4}{x-1}$; $\quad y=\begin{cases}2x-1, & x\le 1,\\ \sqrt{x}, & 1<x\le 4,\\ x+1, & x>4.\end{cases}$

3.34 $y=\dfrac{x+4}{x-2}$; $\quad y=0{,}8^{\frac{1}{x+3}}$; $\quad y=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \sqrt{x+2}, & -2\le x<2,\\ x-3, & x>2.\end{cases}$

3.35 $y=\dfrac{5}{x-4}$; $\quad y=7^{\frac{3}{x+2}}$; $\quad y=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ x^2+2, & 0\le x<1,\\ 2x, & x\ge 1.\end{cases}$

3.36 $y=\dfrac{3}{(x+5)^2}$; $\quad y=arcctg\dfrac{5}{x-3}$; $\quad y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ -\cos x, & 0<x\le\pi/2,\\ 2, & x>\pi/2.\end{cases}$

3.37 $y=\dfrac{x-1}{x+3}$; $\quad y=0{,}3^{\frac{4}{x-2}}$; $\quad y=\begin{cases}-2x, & x<-1,\\ 3-x^2, & -1\le x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$

3.38 $y=-\dfrac{6}{x+2}$; $\quad y=5^{\frac{3}{x-4}}$; $\quad y=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$

3.39 $y=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$; $\quad y=0{,}9^{\frac{5}{x+1}}$; $\quad y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2-1, & 0\le x<2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

3.40 $y=\dfrac{x+3}{x-2}$; $\quad y=2^{\frac{4}{x-3}}$; $\quad y=\begin{cases}\cos x, & x\le \pi/2\\ 0, & \pi/2<x\le\pi,\\ x, & x>\pi.\end{cases}$

3.41 $y=\dfrac{4}{x+2}$; $\quad y=0{,}2^{\frac{5}{x-4}}$; $\quad y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$

3.42 $y=\dfrac{5}{(x-3)^2}$; $\quad y=arctg\dfrac{6}{x+2}$; $\quad y=\begin{cases}x-3, & x\le 0,\\ x+1, & 0<x<4,\\ 3+\sqrt{x}, & x\ge 4.\end{cases}$

3.43 $y=\dfrac{x-4}{x+1}$; $\quad y=3^{\frac{6}{x-2}}$; $\quad y=\begin{cases}2x^2, & x<0,\\ 2x, & 0\le x<1,\\ x+2, & x\ge 1.\end{cases}$

3.44 $y=-\dfrac{3}{(x-4)^2}$; $\quad y=0{,}8^{\frac{7}{x+3}}$; $\quad y=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ -2x, & 0\le x\le 1,\\ x-2, & x>1.\end{cases}$

3.45 $y=\dfrac{2x-1}{x-3}$; $\quad y=4^{\frac{5}{x+4}}$; $\quad y=\begin{cases}2, & x\le -1,\\ 3-x^2, & -1<x\le 2,\\ 2x-1, & x>2.\end{cases}$

3.46 $y=-\dfrac{4}{x+5}$; $\quad y=0{,}5^{\frac{8}{x-1}}$; $\quad y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x+1, & 0\le x<2,\\ 2x+1, & x\ge 2.\end{cases}$

3.47 $y=-\dfrac{4}{(x-5)^2}$; $y=3{,}1^{\frac{3}{x+1}}$; $y=\begin{cases}2x^2-1, & x\le 0,\\ x-1, & 0<x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

3.48 $y=\dfrac{x-4}{x+3}$; $y=arctg\dfrac{5}{x-2}$; $y=\begin{cases}2\sin x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ x-1, & x>4.\end{cases}$

3.49 $y=-\dfrac{5}{(x+4)^2}$; $y=e^{\frac{3}{x-2}}$; $y=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ x+1, & 0<x\le 2,\\ 2x-3, & x>2.\end{cases}$

3.50 $y=\dfrac{4}{(x+5)^2}$; $y=6^{\frac{4}{x+1}}$; $y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ -\cos x, & 0<x\le \pi,\\ x, & x>\pi.\end{cases}$

***Задача* 4.** Знайти похідні функцій.

4.1 $y=\left(3x^2-4\sqrt{x}\right)\cdot e^{-3tgx}$; $y=ln\,sin\left(3x^3-\sqrt[3]{x}\right)$; $y=\dfrac{3cos\,2x-4}{x-sin3x}$;

$y=arctg\sqrt{5x^2-1-2/x}$; $y=(2x-1)^3e^{2arccos2x}$; $y=tg^5\left(3x-2^x\right)$;

$y=arcsin^6\left(3e^{2x}+4x\right)$; $y=\left(x^2+1\right)^{arcsin2x}$; $sin\,y-y^2cos3x=5y-2x$.

4.2 $y=\left(5-3x^2\right)e^{\sqrt{2x-5}}+\sqrt{3}$; $y=\dfrac{3x-4x^2}{tg(1-7x)}$; $y=ln\left(\sqrt[3]{3-x^3}-2/x^2\right)$;

$y=arcctg^4\left(3x+5\sqrt{x}\right)$; $y=cos^7\left(2^{8x}-2x^4\right)$; $y=5^{sin4x}+log_5\left(1-4x^3\right)$;

$e^{xy}-2x^2+y^3=0$; $y=(tgx)^{\sqrt{3x-1}}$; $y=arcsin^3 2x\cdot cos^2(1-3x)$.

4.3 $y=(1-x)^3ln(1-2x)+\sqrt{2}$; $y=(3+6x)/\sqrt{-4x+5x^2}$; $y=tg\,ln\left(5^{3x}-7x\right)$;

$y=e^{-3x}cos\,4x-\sqrt[3]{4-5x}$; $y=ctg^3\left(1-3\sqrt{x^2\,lnx}\right)$; $y=\left(x^2-4\right)^{\sqrt{x-2tgx}}$;

$y=arcsin^4\left(e^{5\sqrt{x}}-4x^2\right)$; $y=ln\,sin\left(e^{-\sqrt{x}}+7/x\right)$; $2x^3-xy^2+cos3y=5$.

4.4 $y=\left(2x-x^3\right)e^{-4x+7}-\sqrt{5}$; $y=sin^2x/(3+2cos\,2x)$; $y=\sqrt{x^2\,lnx-5e^{-x}+3}$;

$y=arctg\left(tg^2 2x\right)$; $y=2cos^5\left(e^{5\sqrt{x}}-3x^2\right)$; $y=e^{cos3x}\cdot 3^{4tgx}+ln5$;

$y=ln^7\left(3x-2\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$; $y=\left(2x+x^2\right)^{ln(1-2x)}$; $y^2x=e^{y/x}+7x$.

4.5 $y=\sqrt[3]{\left(1+2x^2\right)/(1-3x)}$; $y=tg^2x+3ln\,cos\,x$; $y=\left(3x^4-7x\right)\cdot 3^{-4x}+sin\pi$;

$y=arctg\sqrt{1-3x^2}+e^{-7x^2}$; $y=4ln\left(3\sqrt{x}-5^{2-x}\right)$; $y=arcsin^6(3x-5ctg2x)$;

$y=sin^5\left(3x-7\sqrt[3]{x}\right)$; $y=(1+cos\,x)^{2lnx}$; $x^2-y^3+e^y tg2x=0$.

4.6 $y = \ln ctg\left(2x - 3\sqrt{x}\right) + \pi$; $\quad y = \dfrac{\arccos x - x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$; $y = \sqrt[3]{4x^3 - 1} - \dfrac{3}{\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}$;

$y = arctg\left(e^{3x} - 1\right) + 4^{3\sin x}$; $\quad y = \arccos^6(3 - 5x)$; $\quad y = 3\sin^5\left(e^{-4x} - 4x\right)$;

$y\sin x - x^2 = \cos\left(x - y^2\right)$; $\quad y = \left(x^3 - 2x\right)^{\ln x}$; $\quad y = \dfrac{1}{tg^2 3x} - 4\ln\left(x - \sqrt{3x + 4}\right)$.

4.7 $y = e^{3x} - 7\cos\left(4 - 5x^2\right)$; $\quad y = \dfrac{2x - 4x^3}{tg\left(3 - 7x^2\right)}$; $\quad y = \left(3x^2 - 4x\right)^5 \cdot e^{-3x+4}$;

$y = \left(x^3 - 4x^2\right)\ln\left(8x - 3x^2\right)$; $y = 5^{3x \cdot \arcsin x} + \ln 2$; $\quad y = 5\sin^4\left(3x^2 - 4^{-x}\right)$;

$y = \arccos^9\left(3x - 5x^2\right)$; $\quad y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^{ctg 2x}$; $\quad x - y^3 + 2\cos y = tg 2x - 3$.

4.8 $y = \left(3x^4 - 5x\right)\ln\left(3 - 4x^2\right)$; $\quad y = \dfrac{ctg(2 - 3x)}{\sqrt{x - x^3}}$; $\quad y = xe^{-4x} + tg\left(2x - 4\sqrt[3]{x}\right)$;

$y = \arccos^6(7 - 6x)$; $\quad y = \ln\cos\left(3x - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}\right) + e^2$; $\quad y = ctg^9\left(2x^2 - \sqrt[4]{x}\right)$;

$y = \left(1 - x^3\right) \cdot 5^{\arcsin 2x}$; $\quad y = \left(x^3 - 3x\right)^{arctg 3x}$; $\quad \cos(3x - y) - 2y^3 = 0$.

4.9 $y = \left(5x - 3x^2\right) + 7^{3x-4}$; $\quad y = \dfrac{\sin\left(x - 3x^2\right)}{\sqrt{8x - 9x^2}} + \ln 5$; $\quad y = \ln\left(x - \dfrac{3x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$;

$y = \ln^4 \sin\left(5 + e^{2\sqrt{x}}\right)$; $\quad y = x^5 \cdot \cos\left(e^{-3x} + 2\right)$; $\quad y = arcctg^6 2x - 4^{-3\ln x}$;

$y = (1 - 2x)^3 \cdot \arcsin(1/x)$; $y = \left(\sqrt{3x} - x^2\right)^{\cos 3x}$; $\quad \ln\left(2x^3 - y^2\right) + x^3 y = 4x$.

4.10 $y = 5x^2 e^{8tgx} + \sqrt{3}$; $\quad y = \dfrac{\arcsin\left(1 - \sqrt{x}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\quad y = 5^{x\cos 2x} + \ln\left(x^2 - \dfrac{4}{x}\right)$;

$y = \sin^3\left(e^{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt[3]{x}\right)$; $\quad y = ctg^8\left(12 - 8x + \sqrt{x}\right)$; $\quad y = arcctg^7 5x$;

$y = \arccos\ln\left(e^{-3\cos 3x} - 3\right)$; $y = \left(2x + \sqrt{x}\right)^{\ln(1-4x)}$; $\quad \sin\left(2x^2 - y^2\right) - 2xy = 3x$.

4.11 $y = \sqrt[3]{5x^2 - 4x} \cdot e^{3-\sqrt{x}}$; $\quad y = \dfrac{\cos(5 - 3x)}{7x - x^7}$; $\quad y = 2^{9xtg6x} + \sin 3$;

$y = \ln\left(1 - 5x^2\right) \cdot ctg\sqrt{1 - x}$; $y = \sin^9\left(7x - 3x^2\right)$ $\quad y = (2 - x)^4 \arccos(3x - 1)$;

$y = 3arcctg^5\left(1 - 4x^2\right)$; $\quad y = \left(x - 4x^2\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$; $\quad \cos\left(x^2 - 2y\right) - \dfrac{1 - x}{y} = 6x$.

4.12 $y = x^4 arctg 2x - e^{\sqrt{x} - 2x}$; $\quad y = \dfrac{3 - 2x + 3x^2}{\sqrt[3]{3 - 5x}}$; $\quad y = \sqrt{5x - x^3} \cdot 5^{-4x+1} - \ln 3$;

$y = \ln\left(\sqrt{4 + 6x^3} - 5x\right)$; $\quad y = \sin\arccos 5x$; $\quad y = \arcsin^4 \ln(x - 2/x)$;

$\ln\left(y^2 - 2x\right) - x^2 y = 5$; $\quad y = \left(2 - x^2\right)^{3-\sqrt{x}}$; $\quad y = 6\cos^7(4 - 3x) - \dfrac{1}{\sin 3x}$.

4.13 $y = (x - 1)^4 \cdot 4^{-x} - 3\ln 2$; $\quad y = \dfrac{3x^2 - 4x}{\sin 5x - 4}$; $\quad y = \ln\left(x^2 - \sqrt{5x - 6x^2}\right)$;

$y=(2x-3)e^{sinx}-cos\,x^2$; $y=sin\,ln(1-e^{3x})$; $y=(x^3-4\sqrt{x})e^{-arcsin2x}$;

$y=arcctg^8(1-3x^2)$; $y=(x^4+2x^3)^{ctg2x}$; $y^3+x\,cos\,y=2x^3-4y$.

4.14 $y=6^{4x\,lnx}-7ln(4-5\sqrt[3]{x})$; $y=(6x^3-5x^3)cos(x-2\sqrt{x})$; $y=\dfrac{4x+7\sqrt{x}}{cos(4-x^3)}$;

$y=(4-5x^2)^4\cdot arcsin\,x^2$; $y=(3-x)^2e^{tg2x}$; $y=2arcctg^3(4x-1/x^2)$;

$ln(x^3-y^2)-xy^3=7x$; $y=(1+4x^2)^{arctg4x}$; $y=4arccos^5(2x-x^3)-2e^2$.

4.15 $y=(8+3x^2)3^{-7x}+e^3$; $y=\dfrac{3x-2x^4}{\sqrt{5-3x}}$; $y=ln(5x-3\sqrt[3]{x-1})-arctgx^3$;

$y=3cos^4(ln\,tgx-2/x^2)$; $y=arcctg^6(1-x^3)$; $y=(4-3x^2)^2e^{arcsin5x}$;

$y=ln\,arccos(1-x^2)$; $y=(x^2-3x)^{5tg3x}$; $x^3y^2-sin(2x-3y)=4x^2$.

4.16 $y=4ln^5(5x-arcsin\,x^2)$; $y=e^{(x-1)sin5x}$; $y=(2\sqrt{x}-3x^2)7^{-tgx}+\sqrt{e}$;

$y=ctg\,ln(5^{\sqrt{2-x}}-4x)$; $y=(2-cos\,x)^{cos\sqrt{x}}$; $y=arccos^9(3x-\sqrt{2x+1})$;

$y=4tgx^3-5x\,ln(4x-x^2)$; $y=\dfrac{7-2x^4}{\sqrt{5x-2cos\,2x}}$; $ln(x^3-y^2)-6x^2+\sqrt{y}=1$.

4.17 $y=(2x^2-7)sin(4x-3)$; $y=\dfrac{5x-x^2}{\sqrt{3x^2-4x}}$; $y=3ln\,tg2x-4^{-3x}+e^2$;

$y=cos\,ln(\sqrt[3]{1-2x}-2/x)$; $y=arctg^7(1-7x^2)$; $y=3ln^3(e^{-4x}-4x^2)$;

$y=(5-2x^3)^2\cdot3^{sin(5-2x)}$; $y=(2x-x^2)^{arccos2x}$; $x^3cos\,y-2y^2e^{2x}=4x$.

4.18 $ln(x^2-y^5)+2xy=3$; $y=arccos^3(1-e^{-5x})$; $y=(3x^3-4x^2)cos(4-3x)$;

$y=arctg(x^3-1)e^{-2\sqrt{x}}$; $y=5ln^7(x-\sqrt[3]{x+1})$; $y=(3-4x)^3ln(2x-3/x)$;

$y=(x^2-2cos\,x)^{ctg3x}$; $y=\dfrac{4x^5-x^3}{\sqrt{x^2-5}}$; $y=2^{-2sinx}+tg^23x+\sqrt[3]{1-x}$.

4.19 $x+tg(xy)-2y^3=7$; $y=\sqrt{x-2x^3}\cdot e^{tg4x}$; $y=arctgx^3\cdot tg\,ln(1-e^{-x})$;

$y=arccos^5(4x^2-3/x)$; $y=\dfrac{7x-x^3}{\sqrt{3x^2+x}}$; $y=ln\sqrt[3]{4-3x^2}+5ctg(1-x^2)$;

$y=arcsin^4(5x-\sqrt{x})$; $y=(2-3tgx)^{arccos\,x}$; $y=(3x-6\sqrt{x})cos3x+e^2$.

4.20 $y=ln(3x-\sqrt{2x^3-6x^2})$; $y=\dfrac{4cos\,2x-3}{\sqrt{5x-x^3}}$; $y=(6x^3-4\sqrt{x-1})\cdot e^{-5sinx}$;

$y=arcsin^6(7x-3/x)$; $y=x^5ln\,arctgx^4$; $y=7^{4tg2x}-arcctgx^4+\pi^2$;

$\dfrac{x}{y}-2e^{xy}+3x^3=0$; $y=(2x-x^2)^{cos3x}$; $y=2tg^4(7\sqrt{x-1}+5\sqrt[3]{x+2})$.

4.21 $y=\left(3x^4-7x^2\right)arccos\,x^2$; $y=(2x-cos\,3x)^{arcctgx^2}$; $y=x^4\ln x+4arctgx^3$;
$y=(2x-5)^3\cdot e^{cos(5x-3)}$; $y=4arctg^5\left(4x^2-3\sqrt{x}\right)$; $y=5cos^6(3x-7\ln x)$;
$y=x^6\,arcsin\,2x^3+\sqrt{e}$; $y=\dfrac{9x-4x^3}{\sqrt{5+3x^2}}$; $y^3-cos\left(x-y^2\right)+4x^3=3$.

4.22 $y=arcsin^7\left(1-3^{\sqrt{x-1}}\right)$; $y=\dfrac{4tg(2-3x)}{\sqrt{5x^2-2x}}$; $y=\left(6x^3-7x^2\right)4^{-3x}-cos\,\pi$;
$y=\ln\left(5x-\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{4}{x^2}\right)$; $y=(sin\,x)^{arctg4x}$; $y=sin\ln\left(7-\sqrt[3]{x}\right)+1/cos\,2x$;
$y=3arccos\,x^4-2sin\sqrt{x}$; $y^2tg5x-2x^2y=4x$; $y=ctg^3\left(\sqrt[3]{1-5x}+3x^2\right)$.

4.23 $y=4e^{-5x}-3\ln ctg4x$; $y=\dfrac{sin\left(3x-2x^2\right)}{\sqrt{1-2x^3}}$; $y=\left(4x-5x^3\right)cos\left(4\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)$;
$y=arccos\ln\left(e^{3-7x}+\sqrt{x}\right)$; $y=\left(e^x-3\right)^{sin4x}$; $y=3arcctg^5\left(2x-3\sqrt{cos\,x}\right)$;
$y=\left(x^2+1\right)^2\cdot arcsin\,x^2$; $y=tg^8\left(2^{\sqrt{x}}+\sqrt{2-x}\right)$; $x\sqrt{y}+2cos\left(x+y^2\right)=7x$.

4.24 $y=\left(x-7x^2\right)e^{4x-3}+\sqrt{5}$; $y=\dfrac{\sqrt{x^2-cos\,x}}{cos(1-x)}$; $y=6^{-3ctg2x}+\sqrt{x^2\cdot 2^{-x}}$;
$y=\ln arctg\left(3-4\sqrt[3]{x}\right)$; $y=\left(1-2x^2\right)^2\sqrt{4-e^{2x}}$; $y=arcctg^5\left(x^2-4x\right)$;
$y=5sin^4\left(\sqrt[3]{1-3x}-2x\right)$; $y=(2-5x)^{cos(2/x)}$; $x\,arccos\,y-\dfrac{y}{x}=5x$.

4.25 $y=8^{-xtgx}-5lg(1-3x)$; $y=\dfrac{cos(3x-4)}{\sqrt{4x-3x^2}}$; $y=\left(\sqrt{x}-7x^2\right)\cdot tgx^2-\sqrt[3]{e}$;
$y=\ln\left(2\sqrt[3]{4-2x^3}-3\right)$; $y=2arctg^6\left(3x-4x^4\right)$; $y=\ln^5 sin\left(3-4x^2\right)$;
$y=\left(x^6-\sqrt{x}\right)ctge^{1-3\sqrt{x}}$; $y=(\ln(x+2))^{tg5x}$; $(x+1)\cdot e^{5y}-3xy^2=7x$.

4.26 $y=\left(x^3-3x\right)4^{-2x}+\ln 2$; $y=\dfrac{3x-cos\,2x}{\sqrt{3-2x^2}}$; $y=e^{ctg2x}-5\ln cos\,5x$;
$y=8sin^8\left(3-2^{-3x}\right)$; $y=(tgx)^{arcsin3x}$; $y=5arcctg^7\left(4x-\sqrt[3]{1-2x}\right)$;
$x^2y^3-e^{x+2y}=7x-5$; $y=\dfrac{7}{cos^2\left(4/x^2\right)}$; $y=4^{3xtg4x}\cdot arccos(1-4x)$.

4.27 $2x^2-3y^3+2sin(xy)=1$; $y=\dfrac{5}{tg^3(4-7x)}$; $y=\left(x^7-7x^3\right)\cdot e^{-7ctg2x}+\ln 4$;
$y=3arcsin^9\left(1-5x^3\right)$; $y=\dfrac{(2x-5)^4}{\sqrt{3x-x^3}}$; $y=4\left(x^2-1\right)^3\cdot cos\left(3x-\sqrt[3]{2x-1}\right)$;
$y=2\ln^4 arctg\left(x^4-2x\right)$; $y=(5-3x)^{arccos8x}$; $y=6^{-4ctg3x}+3\ln(1-x)$.

4.28 $y=\left(x-4x^3\right)tg\left(x-3\sqrt{x}\right)$; $y=\dfrac{\sqrt{1-8x}}{x^3+\sqrt{x^2+2}}$; $y=6^{-3\sin 2x}-4ctg3x$;

$y=\ln\arccos\left(1-x^4\right)+\sqrt{e}$; $y=7arctg^8\left(2x^3-4\sqrt{x}\right)$; $y=\dfrac{7}{3\cos^3(1-2x)}$;

$y=2\sin^4\left(3x-2^{-4x}\right)$; $y=\left(2x-x^3\right)^{\arcsin 5x}$; $2y^2-3x^3+2e^{xy}=4$.

4.29 $y=5\sin^4\left(3x-4\sqrt{3x-1}\right)$; $y=\dfrac{5x-4x^2}{2-3\cos 2x}$; $y=\left(3x^2-5\sqrt{x}\right)e^{-4tgx}+\ln 3$;

$\cos\left(3x-y^2\right)+\dfrac{x}{y}=7x$; $y=\left(x^4-x^3\right)^{arctg3x}$; $y=3^{-4\cos 2x}+5\ln\left(1-5\sqrt{x}\right)$;

$y=\ln\left(\sqrt{3x-2x^2}-e^{-4x}\right)$; $y=4\arcsin^5\left(1-x^4\right)$; $y=2x^8\cdot arctgx^3$.

4.30 $y=2^{-4tg2x}+3\ln tg4x$; $y=\dfrac{5x-2x^2}{\sin 3x-\sqrt{x}}$; $y=\left(x^3-4\sqrt{x}\right)5^{2x-x^3}+\sqrt{2}$;

$y=4\ln\left(5x-\sqrt[3]{x^2-1}\right)$; $y=4\arcsin^5\left(3x-4x^3\right)$; $y=\arccos x^4\cdot tg^2 2x$;

$y=-3arctg^8(1-4x)$; $y=\left(3x-x^2\right)^{2ctg3x}$; $3x^3-2y^2+tg(xy)=7x^2$.

4.31 $y=\ln\left(\sqrt[3]{4x-5x^2}\right)+e^3$; $y=\dfrac{\cos\left(4-5x^2\right)}{\sqrt{3x+2x^3}}$; $y=\left(x^8-4x^2\right)7^{4tg3x}-\sqrt{2}$;

$y=(2x-\sin 3x)^{arctg2x}$; $y=4e^{7tg2x\cdot\cos\sqrt{x}}$; $y=5\ln\left(2x+\sqrt[3]{x-1}\right)+3^{-3\sqrt{x}}$;

$y=7\arccos^5\left(1-4x^2\right)$; $y=\left(\dfrac{5x-\cos 2x}{\sqrt{x-3x^2}}\right)^3$; $3y^2-4x^3+\cos(xy)=4x$.

4.32 $y=\left(4x-2x^3\right)3^{2-\sqrt{x}}+\sqrt{5}$; $y=\dfrac{3x^2-x^3}{\sqrt{4-2\sin x}}$; $y=x^4e^{tg3x}-2\ln ctg5x$;

$y=2\arccos^6\left(2x-7x^2\right)$; $y=\ln^4\left(\sqrt[3]{2-5x^2}-3x\right)$; $y=\cos\ln\left(3x-\sqrt[3]{4-3x}\right)$;

$y=5\sin^9\left(2x-3ctg\sqrt{x}\right)$; $y=(tg4x)^{\arcsin 3x}$; $x^2y^3+5ctg\left(2x-y^3\right)=1$.

4.33 $y=7tg^8\left(3x-5\sqrt{x-x^3}\right)$; $y=\dfrac{\sin\left(5x-x^2\right)}{\sqrt{x^2-4x}}$; $y=\left(5\sqrt{x}-x^5\right)\cdot e^{7tg2x}-2\sqrt{2}$;

$y=\left(x^4-4\sqrt{x}\right)\arcsin x^3$; $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt[3]{2-5x-2x}}$; $y=ctg\ln(1-4x)+3^{-\cos 2x}$;

$y=6\arcsin^5\left(3x-4x^3\right)$; $y=(\cos 3x+1)^{ctg5x}$; $y^2x^{2x}+3xy=6x^2$.

4.34 $y=\left(x^7+7x^3\right)4^{-5x}+2\sqrt{3}$; $y=\dfrac{x^3-6x^2}{\sqrt{x^2-2x}}$; $y=5e^{tg7x}+\ln\left(3x-\sqrt{x}\right)$;

$y=2\sin^3\sqrt{3x-1}-x^3$; $y=\left(4-2x^4\right)e^{\cos 3x}$; $y=7\arccos^5\left(x^3-2x^2\right)$;

$y=\cos\ln\left(1-3x^4\right)$; $y=\left(4x-5x^2\right)^{arctg4x}$; $\cos\left(2x-y^2\right)+2\sqrt{y}=5x^3$.

4.35 $y=\left(3-2x^3\right)e^{\sqrt{1-2x}}$; $\quad y=\dfrac{4x-5x^3}{\sqrt{cos3x-7}}$; $\quad y=2^{x\cdot tg2x}+3ln\left(x-3\sqrt[3]{x}\right)$;

$y=\left(4x-7\sqrt{x}\right)e^{sin(1-x)}$; $\quad y=\dfrac{6}{arctg^2 5x}$; $\quad y=3arccos^4(4+2cos2x)$;

$y\sqrt{x}-cos\left(3x-y^2\right)=5x$; $\quad y=\left(2x-x^3\right)^{cos3x}$; $\quad y=5tg^6\left(3x^2-2ln(1-2x)\right)$.

4.36 $y=arctg^5 ln\left(1-4e^{-2x}\right)$; $\quad y=\dfrac{3x-2x^2}{\sqrt{sin(1-x)+2}}$; $\quad y=\left(2x-3x^4\right)\cdot 5^{2sinx}+\sqrt{5}$;

$y=arcsin\left(2^{\sqrt{1-x}}-3x^2\right)$; $\quad y=ln\dfrac{x}{4+\sqrt[3]{2-x^3}}$; $\quad y=\sqrt{x^3\cdot lnx+2x-4e^{-7x}}$;

$y=3cos^4\left(4x+2e^{\sqrt{x}}\right)$; $\quad y=(cos3x)^{arcsin2x}$; $\quad \sqrt{x^2+y^2}-xy^2=7x-3$.

4.37 $y=\left(1-7x^3\right)\cdot 4^{-2x}+\sqrt{e}$; $\quad y=\dfrac{(3x-4)^3}{\sqrt{1-7x^3}}$; $\quad y=3ctgx^4-5ln\left(\sqrt{x}-x^2\right)$;

$y=ln\dfrac{3x}{x+\sqrt[3]{1-2x}}$; $\quad y=2arctg^7\left(3x-x^3\right)$; $\quad y=sin^4\left(e^{-\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{1-3x}}\right)$;

$y=tg\left(ln(1-2x)-4e^{2x}\right)$; $\quad y=\left(\sqrt{x}+2\right)^{ctg3x}$; $\quad y^2-3x^2=ln(3x-y)$.

4.38 $y=\left(2x-7x^2\right)e^{3x-2}+\sqrt{3}$; $\quad y=\dfrac{1-5x^3}{\sqrt{cos(3-2x)}}$; $\quad y=ln\left(2x+e^{-2\sqrt{x}+4}\right)$;

$y=2tg(3x-2)+2^{arcsin\sqrt{x}}$; $\quad y=\dfrac{4x}{ctg^3 3x}$; $\quad y=arcsin^6 ln\left(1-2\sqrt{x}\right)$;

$y=3cos^4\left(e^{-2\sqrt{x}}+3/\sqrt{x}\right)$; $\quad y=\left(3x^2-4x\right)^{arccos3x}$; $\quad sin\left(x^2-2y\right)+xy^2=4x$.

4.39 $y=3lncos4x+arcsinx^3$; $\quad y=\dfrac{5x-3x^2}{\sqrt{3x^3-4x}}$; $\quad y=\left(2x^2-7x^3\right)e^{-5x}+\sqrt{\pi}$;

$y=5sin^6\left(5x-e^{-5x}\right)$; $\quad y=ln\dfrac{2x}{x+\sqrt{2-x}}$; $\quad y=\sqrt{x\cdot tgxe^{arctg4x}}$;

$y=2arcctg^3\left(4x^2-2\sqrt{x}\right)$; $\quad y=(tg5x)^{\sqrt{cos2x}}$; $\quad \sqrt{x}cos y+y^2/x=6x$.

4.40 $y=\left(2x-7x^2\right)4^{-\sqrt{x}}$; $\quad y=\dfrac{3x^2-7}{\sqrt{5x-x^2}}$; $\quad y=\left(3+x^2\right)e^{arcsin4x}$;

$y=2arcctg^3\left(6x-3\sqrt{x}\right)$; $\quad y=(ctg2x)^{\sqrt{3x-x^3}}$; $\quad y=2lntg3x+5\sqrt{2x-sin3x}$;

$y=4sin^5\left(e^{2x}-x^2\right)$; $\quad y=ln\dfrac{2x-1}{x+\sqrt{1-x}}$; $\quad cos\left(2x-y^3\right)=\sqrt{y}+3x^2$.

4.41 $y=\left(4x^3-\sqrt{x}\right)7^{-4cosx}$; $\quad y=\dfrac{x^2-4x+1}{\sqrt{3x-2x^3}}$; $\quad y=3sin^2x-tg\,ln(1-4x)$;

$y=ctg\sqrt[3]{2x-3arctg3x}$; $\quad y=2ctg^7\left(x-e^{-x}\right)$; $\quad y=log_2\left(x^3-arccos x^2\right)$;

$y=4\arcsin^5(2x-x^2)$; $\quad y=(5x^2-4x)^{\operatorname{arcctg}3x}$; $\quad y^2=4x\cos y-x^3$.

4.42 $y=x^5\sqrt[3]{x^6-8x}+\sqrt{2}$; $\quad y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}}$; $\quad y=4\operatorname{ctg}^5(1-2x)-\dfrac{1}{\sin^2 4x}$;

$y=3\operatorname{arctg}^4(3\sqrt{x}-x^3)$; $\quad y=\sin^2 x\cdot\sin x^3$; $\quad y=\operatorname{arcctg}e^{-2x}+\ln\cos x^3$;

$y=\arcsin x^2+4\sqrt{1-x^4}$; $\quad y=(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}(x/2)}$; $\quad 2y^2\ln x-\cos(2x+y^3)=5$.

4.43 $y=(x-4)10^{\sqrt{1-2x}}+\ln 5$; $\quad y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}x}$; $\quad y=4\ln^4\arccos 2x$;

$y=(x^2-1)^3e^{1-\cos 3x}$; $\quad y=7\operatorname{arctg}^8(4x-\sqrt{x})$; $\quad y=\sin 2x\cos^3 x-e^{1/x}$;

$y=\arcsin x^2-\sqrt{1-x^2}$; $\quad y=(2x^2-5x)^{\operatorname{ctg}3x}$; $\quad x^2\sin y-\dfrac{y}{x}=7x$.

4.44 $y=e^{2x}\operatorname{tg}x^3+\ln 3$; $\quad y=\dfrac{1-x^2+x^3}{(\arccos x)^2}$; $\quad y=2\operatorname{arctg}^5\sqrt{(1-x)/(1+x)}$;

$y=\ln\cos\operatorname{arctg}e^{2x}$; $\quad y=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{\sin 2x}$; $\quad y=e^{-3\cos 2x}-\lg(1-2^{-x})$;

$y=2\arcsin^3(4x-x^2)$; $\quad 3y^2-2x^3+2xy=5$; $\quad y=5^{-\sin 2x}+4\ln\operatorname{tg}(1-4x)$.

4.45 $y=(2\sqrt{x}-x^3)\cdot\operatorname{tg}x^2$; $\quad y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; $\quad y=e^{\operatorname{tg}5x}-4\ln(x-\sqrt[3]{x})$;

$y=(1-x^3)\arcsin\sqrt{x}$; $\quad y=\ln\left(\sin x\cdot\sqrt{1-x^3}\right)$; $\quad y=\operatorname{arcctg}^6(1-x^6)$;

$y=3\cos^9(\operatorname{tg}(x/2)-4x^2)$; $\quad y=(\sin 2x)^{\cos 3x}$; $\quad x^2y+xy^2=4x-5$.

4.46 $y=e^{-3x}\ln x+\sqrt{2\pi}$; $\quad y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; $\quad y=10^{x^2\operatorname{tg}2x}+4\sqrt{x-1}$;

$y=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}$; $\quad y=x^2\sqrt{1+2\sqrt{x}}$; $\quad y=5\sin^6(x^2-2\sqrt[3]{x})$;

$y=\arccos^4(\ln(1-x^2))$; $\quad y=(1-\cos 2x)^{\operatorname{arctg}2x}$; $\quad x^3y-4\operatorname{tg}2y=7x^2$.

4.47 $y=x^3\operatorname{arcctg}x^2+e^3$; $\quad y=\dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$; $\quad y=4^{-3\operatorname{tg}3x}-2\ln(1-2x)$;

$y=\ln((1-e^x)/e^x)$; $\quad y=\dfrac{3x-2x^3}{\sqrt{1-x^2-x^4}}$; $\quad y=5^{-x^2}-\arcsin^4(x^2)$;

$y=2\cos^7(x+\sqrt{1-2x})$; $\quad y=(x+\sqrt[3]{x})^{\arccos 3x}$; $\quad y\sin 2x-y^3=5x-2$.

4.48 $y=(4x-x^4)e^{-3x}+\ln 5$; $\quad y=x\sqrt{(1-x)/(1+x^2)}$; $\quad y=2^{x/\ln x}+2\ln(1-3x^2)$;

$y=e^{2x+3}(x^2-x+4)$; $\quad y=5\sin^6(1-7x)$; $\quad y=6\operatorname{arctg}^5(x-\sin 2x)$;

$y=\ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x}$; $\quad y=(x^2+4)^{\operatorname{tg}3x}$; $\quad y^2-3x^2y+\cos(2x-y)=3$.

4.49 $y=(x^3-4\sqrt{x})e^{-7x}+\sqrt{3}$; $\quad y=\dfrac{3x-4\sin x}{\sqrt{x-3x^2}}$; $\quad y=2^{x/\ln x}+\ln(1-2e^{-2x})$;

$y=\cos 2x\sqrt{1+\sin^2 x}$; $\quad \arccos^6(1-2x)$; $\quad y=4ctg^5\left(2x-x^4\right)$;

$y=x^3 arctg\sqrt{x-2}$; $\quad y=\left(2x^2-x^3\right)^{arctg3x}$; $\quad \sin\left(x^2-y^3\right)+\dfrac{x}{y}=5x$.

4.50 $y=e^{-2x^2}\ln x+\cos(\pi/7)$; $\quad y=\dfrac{\cos 2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\quad y=2^{-\cos 5x}+2\sqrt{1+4x^2}$;

$y=\arccos\sqrt{1-3x}$; $\quad y=\sin^2\dfrac{1-\ln x}{x}$; $\quad y=\dfrac{3x^2-1}{3x^3}+3\ln\sqrt{1+x^2}$;

$y=4arcctg^5(1-4x)$ $\quad y=\left(3x-\sqrt{x}\right)^{\ln x}$; $\quad x^2y^3-x=\ln\left(x^2-4y^2\right)$.

***Задача* 5.** Привести повне дослідження функцій і побудувати їх графіки.

5.1 $y=x^3/\left(x^2-4\right)$; $\quad y=(x+3)\cdot e^{-2x}-1$.

5.2 $y=x^3(x-2)^2$; $\quad y=(1-2x)\cdot e^{x}+2$.

5.3 $y=x^4/\left(x^3-1\right)$; $\quad y=(2x-3)\cdot e^{-x}-2$.

5.4 $y=\left(2-4x^2\right)/\left(1-4x^2\right)$; $\quad y=(x-1)\cdot e^{3x}+1$.

5.5 $y=4x^3/\left(x^3-1\right)$; $\quad y=(2x+1)\cdot e^{-2x}+3$.

5.6 $y=(2x-1)/(x-1)^2$; $\quad y=(1-x)\cdot e^{3x}+2$.

5.7 $y=x^3/\left(2(x+1)^2\right)$; $\quad y=(1+2x)\cdot e^{-x}+3$.

5.8 $y=(x-1)^2/(x+1)^2$; $\quad y=(x+2)\cdot e^{-2x}+4$.

5.9 $y=1/x+4x^2$; $\quad y=(3x-4)\cdot e^{-x}-2$.

5.10 $y=\left(x^2+1\right)/\left(x^2-1\right)$; $\quad y=(3x+1)\cdot e^{2x}-3$.

5.11 $y=\left(x^2-1\right)/\left(x^2+1\right)$; $\quad y=(5x-2)\cdot e^{-2x}+2$.

5.12 $y=x^3/\left(x^2+1\right)$; $\quad y=(3-x)\cdot e^{3x}-1$.

5.13 $y=x/\left(x^3-1\right)$; $\quad y=(1-2x)\cdot e^{3x}+2$.

5.14 $y=(x+2)^2/(x-2)^2$; $\quad y=(x-3)\cdot e^{-x}+3$.

5.15 $y=x^4/(x+1)^3$; $\quad y=(3x+2)\cdot e^{-2x}+1$.

5.16 $y=5-2/x-x^2$; $\quad y=(2x-3)\cdot e^{-x}+2$.

5.17 $y=(x+1)^2/(x-1)^2$; $\quad y=(x+3)\cdot e^{3x}-4$.

5.18 $y=\left(4x^3+5\right)/x$; $\quad y=(2x-5)\cdot e^{-x}+1$.

5.19 $y=(4x-12)/(x-2)^2$; $\quad y=(x+2)\cdot e^{2x}-3$.

5.20 $y=\left(3x^4+1\right)/x^3$; $\quad y=(2x-3)\cdot e^{2x}+1$.

5.21 $y=-x/\left(x^3-1\right)$; $\quad y=(1-2x)\cdot e^{-2x}+3$.

5.22 $y=x^3/\left(x^2-1\right)$; $\quad y=(2-3x)\cdot e^{-2x}+1$.

5.23 $y=(2x-3)/(x-1)^2$; $y=(5-2x)\cdot e^{3x}-1$.

5.24 $y=x^4/(x^3-2)$; $y=(2x-4)\cdot e^{2x}-3$.

5.25 $y=x^2/(x-1)^2$; $y=(x-2)\cdot e^{-3x}+1$.

5.26 $y=x^4/(x^3+1)$; $y=(2x+2)\cdot e^{3x}-2$.

5.27 $y=(x^2-4)/(x-1)^2$; $y=(x+2)\cdot e^{-x}+3$.

5.28 $y=x^3/(x-2)^2$; $y=(2x-2)\cdot e^{-3x}+1$.

5.29 $y=(8-x^3)/(2x)$; $y=(2-2x)\cdot e^{x}+3$.

5.30 $y=(x^3+1)/x^2$; $y=(1-3x)\cdot e^{2x}+1$.

5.31 $y=x/(x+1)^2$; $y=(4-2x)\cdot e^{-x}+2$.

5.32 $y=(x-2)^2/(x+1)^2$; $y=(3x-1)\cdot e^{2x}-2$.

5.33 $y=-2x^3/(x^2+3)$; $y=(1-2x)\cdot e^{x}+3$.

5.34 $y=3x^3/(x^3+1)$; $y=(2x+1)\cdot e^{-x}+1$.

5.35 $y=(2x+1)/x^3$; $y=(3-2x)\cdot e^{-2x}+2$.

5.36 $y=(x-1)/x^3$; $y=(1-3x)\cdot e^{2x}+1$.

5.37 $y=2x^3/(x^3+1)$; $y=(1-x)\cdot e^{3x}-1$.

5.38 $y=2x^3/(x^2-1)$; $y=(2x+2)\cdot e^{x}+3$.

5.39 $y=x^3/(2x+1)^2$; $y=(2-3x)\cdot e^{2x}+1$.

5.40 $y=4x^3/(x^3-4)$; $y=(3x+2)\cdot e^{-2x}-1$.

5.41 $y=x^3/(2x-1)^2$; $y=(x-4)\cdot e^{2x}+3$.

5.42 $y=x^4/(x^3+2)$; $y=(4-x)\cdot e^{-x}+2$.

5.43 $y=(2x+1)/(x-1)^2$; $y=(2x+4)\cdot e^{3x}-1$.

5.44 $y=x^4/(x^3-2)$; $y=(4-2x)\cdot e^{2x}+3$.

5.45 $y=(2x+1)/(x+1)^2$; $y=(x+3)\cdot e^{-x}+2$.

5.46 $y=(x+2)/(x-1)^2$; $y=(3-x)\cdot e^{2x}-2$.

5.47 $y=x^4/(x^3-3)$; $y=(x-4)\cdot e^{-3x}+1$.

5.48 $y=(x-1)/(x+1)^2$; $y=(2x+5)\cdot e^{-2x}-1$.

5.49 $y=(2x+1)/(x-1)^2$; $y=(1-x)\cdot e^{-x}+3$.

5.50 $y=(x-2)/(x+1)^2$; $y=(1-x)\cdot e^{-3x}+2$.

Література

1. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1978.
2. Фролов С.В., Шостак Р.Я. Курс высшей математики. Ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1973.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. Ч 1,2. – М.: Наука, 1985.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
5. Сборник задач по курсу высшей математики. Под редакцией Кручковича Г.И. – М.: Высшая школа, 1973.
6. Кудрін Б.Г., Ребедайло В.М., Педорченко Л.І. Конспект лекцій з математичного аналізу. – Вінниця: ВПІ, 1991.
7. Пак В.В., Косенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь, 1996.
8. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика, – К.: Техніка, 2003.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 – х ч. М.: Высшая школа, 1986.

Навчальне видання

Василь Парфенович Литвинюк

Диференціальне числення

Навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено автором

Редактор О.Д. Скалоцька

Навчально-методичний відділ ВНТУ

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ

Підписано до друку 31.03.2006 р. Гарнітура Times New Roman
Формат 29,7х42 1/4 Папір офсетний
Друк різографічний Ум. друк. арк. 6.06

Тираж 100 прим.

Зам. № 2006-070

Віддруковано в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі

Вінницького національного технічного університету

Свідоцтво Держкомінформу України

серія ДК № 746 від 25.12.2001

21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95, ВНТУ