В. С. Мартыненко

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt$$

# Операционное исчисление

Издательство Киевского университета

В. С. МАРТЫНЕНКО

# ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Издание 2-е, переработанное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов технических вузов.



ИЗДАТЕЛЬСТВО КИЕВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1968

517.2
М29

УДК 517.432.1 (075)

**Операционное исчисление.** Мартыненко В. С. 1968.

Пособие содержит специальный курс по операционному исчислению на основе преобразования Лапласа и его приложения к анализу: вычисление интегралов, решение линейных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений типа свертки и краевых задач для линейных уравнений в частных производных.

Даются решенные примеры и упражнения.

Рассчитана на студентов технических вузов.

Таблиц — 6, иллюстраций — 64 рисунка, библиография — 9 названий.

2-2-3
68-11

КИЕВСКАЯ КНИЖНАЯ ТИПОГРАФИЯ № 5

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Операционное исчисление применяется при изучении теоретических основ радиотехники и электроники, теории автоматического управления и других специальных дисциплин, а также при исследованиях в различных инженерно-технических задачах.

Пособие написано на основе лекций, прочитанных автором на радиотехническом и электроэнергетическом факультетах Киевского ордена Ленина политехнического института, и содержит изложение теории операционного исчисления и его приложения к анализу.

Приводится достаточное количество решенных примеров, закрепляющих теорию, а также упражнения для самостоятельной работы, кратко напоминается материал по математическому анализу и теории функций комплексного переменного, который используется в книге, что, безусловно, облегчит, особенно студенту-заочнику, овладеть основами операционного метода.

Второе издание книги переработано. Введен материал о частных случаях теоремы Эфроса, вычислении интегралов, об уравнении с запаздывающим аргументом, даны дополнительные примеры по специальным функциям, чаще всего встречающихся при решении задач математической физики; несколько изменено расположение параграфов, внесены отдельные изменения, уточняющие текст.

*Автор*

# ВВЕДЕНИЕ

Операционное (символическое) исчисление применяется для решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и интегральных уравнений типа свертки, к которым приводятся задачи главным образом по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования и других отраслей науки и техники.

Выдающийся советский ученый в области теории колебаний и автоматического управления А. А. Андронов (1901—1952) говорил, что операционное исчисление является азбукой современной автоматики и телемеханики.

О значении операционного исчисления английский математик Э. Т. Уиттекер писал: «... мы должны считать операционное исчисление наряду с открытием Пуанкаре автоморфных функций и открытием Риччи тензорного исчисления тремя наиболее важными успехами математики за последнюю четверть девятнадцатого века»[1].

Метод символического исчисления основан на том, что над оператором дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$ и некоторыми функциями этого оператора производится определенная система действий. В этой системе действий дифференцирование функции $x = x(t)$ рассматривается как умножение оператора $p$ на функцию $X = X(p)$ этого оператора

$$\frac{dx}{dt} \to pX(p), \quad \frac{d^2x}{dt^2} \to p^2X(p), \ldots, \quad \frac{d^nx}{dt^n} \to p^nX(p), \tag{1}$$

а интегрирование как деление на оператор $p$ функции этого оператора

$$\int_0^t x\,dt \to \frac{X(p)}{p}, \quad \int_0^t dt \int_0^t f(t)\,dt \to \frac{X(p)}{p^2}, \ldots,$$

$$\int_0^t dt \int_0^t dt - \int_0^t f(t)\,dt \to \frac{X(p)}{p^n},$$

в частности,

$$\frac{1}{p} \to \int_0^t dt = t, \quad \frac{1}{p^2} \to \int_0^t dt \int_0^t dt = \frac{t^2}{2!}, \ldots, \quad \frac{1}{p^n} \to \frac{t^n}{n!} \tag{2}$$

---

[1] E. T. Whittaker, Bull. Calcutta Math. Soc., 20, 1928—1929, 216.

При помощи операторного метода в основном линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами искомой функции $x(t)$ сводятся к алгебраическим уравнениям относительно функции $X(p)$.

Для примера рассмотрим решение дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} - x = 1$ при начальном условии $x(0) = 0$. На основании (1) получаем

$$pX(p) - X(p) = 1.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{1}{p-1},$$

или

$$X(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots + \frac{1}{p^n} + \ldots\right).$$

По формулам (2) находим искомую функцию $x(t)$. Имеем

$$x(t) = \int_0^t \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots\right) dt = \int_0^t e^t dt = e^t - 1.$$

Подстановкой проверяем, что $x(t) = e^t - 1$ при $x(0) = 0$ является решением данного уравнения.

Начало развития операционного исчисления было уже в работах Лейбница (1646—1716), Л. Эйлера (1707—1783), Лагранжа (1736—1813), Лапласа (1749—1827), Фурье (1768—1830), Коши (1789—1857).

Английский инженер-электрик Оливер Хевисайд (1850—1925) вводит в символическое исчисление правила действий с оператором $\frac{d}{dt} = p$ и функциями этого оператора. Применяя операционное исчисление к решению дифференциальных уравнений, он получил ряд важных результатов (1887—1912) по сложным проблемам теории электромагнитных колебаний в проводах. О. Хевисайд положил начало систематическому приложению символического исчисления к решению физико-технических задач, поэтому создание символического исчисления обычно и связывают с его именем. Однако первоначальная разработка символического метода была выполнена задолго до появления работ О. Хевисайда в трудах эльзасского математика Ф. Арбогаста, французских математиков М. Франсэ и Лобатто, английских математиков Д. Ф. Грегори, П. Буля, Челлета, Р. Кармайкела и др.

Зачинателем разработки символического исчисления в России является профессор Киевского университета М. Е. Ващенко-Захарченко (1825—1912), который в книге «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (К., 1862) дает подробное изложение о символах и их свойствах, рассматривает приложение символического исчисления к решению линейных обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами, выводит формулу разложения для случая простых и кратных корней, которую в литературе называют формулой разложения Хевисайда.

В книге русского математика А. В. Летникова (1837—1888) «Теория дифференцирования с произвольным указателем» (М., 1868) по существу рассматриваются вопросы, близкие к операционному исчислению.

Широко применяемое в трудах О. Хевисайда операционное исчисление не получило математического обоснования. Строгое обоснование и развитие операционное исчисление получило на основе интегральных преобразований в работах Д. Карсона, Бромвича, Леви, Ван дер Поля и других. Преобразование

$$F(p) = \int_a^b f(t)\, k(t, p)\, dt,$$

где $k(t, p)$ — ядро преобразования, называется интегральным; вид преобразования и характер задач, к которым оно применимо, зависят от выбора ядра и пределов интегрирования, в частности, если $k(t, p) = e^{-pt}$, $a = -\infty$ и $b = \infty$, то получим преобразование Лапласа $F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$, которое преобразовывает определенный класс функций-оригиналов $f(t)$ действительного переменного $t$ в функции-изображения $F(p)$ комплексного переменного $p$. Преобразование $F(p) = \int_a^b e^{-pt} f(t)\, dt$ впервые (1737) было введено Л. Эйлером. Лапласом были выяснены (1782) свойства этого преобразования, а также введены бесконечные пределы интегрирования, что сделало возможным применение преобразования Эйлера—Лапласа в приложениях.

Американский инженер Д. Карсон показал[1] (1926) связь между операционным исчислением и интегральным преобразованием Лапласа, установил соотношение между оригиналом $f(t)$ и его изображением $F(p)$ в виде интегрального уравнения $F(p) = p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$ относительно неизвестной функции $f(t)$.

Обратную зависимость между оригиналом $f(t)$ и его изображе-

[1] Карсон Д. Р., Электрические нестационарные процессы и операционное исчисление, ДНТВУ, 1934.

нием $F(p)$ получил[1] английский математик Бромвич (1875—1930) в виде контурного интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp$$

в комплексной области $p = s + i\sigma$, где интегрирование ведется по любой прямой, параллельной мнимой оси плоскости и расположенной вправо от всех особых точек функции $\frac{F(p)}{p}$.

Интеграл в зависимости Бромвича был получен (1859) задолго до Бромвича немецким математиком Б. Риманом (1826—1866) в работе «О числе простых чисел, не превышающих данной величины»[2], как следствие одного преобразования, и строго доказан (1902) финским математиком Я. Меллином, поэтому обычно называется интегралом Римана — Меллина.

Французский математик П. Леви[3] показал, что решение интегрального уравнения Карсона представляется контурным интегралом Бромвича и наоборот.

Таким образом, два метода, Карсона и Бромвича, основанные соответственно на интегральных преобразованиях Лапласа и Римана — Меллина, получили теоретическую основу для объединения в один общий метод (метод контурных интегралов) операционного исчисления без использования оператора дифференцирования и функций этого оператора.

В книге советских математиков А. М. Эфроса и А. М. Данилевского «Операционное исчисление и контурные интегралы» дано обоснование операционного исчисления при помощи контурных интегралов и его приложения к анализу, главным образом, к теории специальных функций и математической физике.

Большое значение в развитии теории преобразования Лапласа имеют работы Г. Дёча, автора фундаментального трехтомного руководства по преобразованию Лапласа и книги по теории и применению преобразования Лапласа.

Развитие функционального анализа и его части линейных операторов оказало влияние на обоснование операционного исчисления на основе операторного метода. В книге польского математика Яна Микусинского «Операторное исчисление» операционное исчисление обосновывается на операторной основе без связи с теорией преобразования Лапласа. В алгебре функций Микусинского действию умножения соответствует свертка.

[1] London Math. Soc., Proc. (2) 15, 1916, 401—448.
[2] Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, М.— Л., 1948, 216.
[3] Bull. sci. math. (2) 50, 1926, 174—192.

Операционное исчисление на основе преобразования Лапласа применимо к ограниченному классу функций, а на операторной основе Микусинского оно применимо и к функциям, непреобразуемым по Лапласу. Однако применение интеграла Лапласа упрощает получение операционных формул и облегчает изучение структуры поля операторов представлением его функциями комплексного переменного. В книге В. А. Диткина и А. П. Прудникова «Интегральные преобразования и операционное исчисление» операционное исчисление обосновывается с использованием обобщенного преобразования Лапласа на операторной основе Микусинского, только в алгебре функций умножению соответствует не свертка, как у Микусинского, а производная свертки по верхнему пределу.

Новым направлением в операционном исчислении являются работы Л. Берга по обобщенному преобразованию Лапласа, связанного с понятием асимптотической сходимости интеграла Лапласа.

В трудах советских ученых Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова (обоснование символического метода для дифференциальных уравнений в частных производных, обобщение и применение его к решению нелинейных задач математической физики), М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата (теория и приложения операционного метода), И. З. Штокало (обобщение символического метода на линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами), А. М. Эфроса (обобщение теоремы умножения Бореля, приложение операционного исчисления к анализу), В. С. Игнатовского (обоснование операционного исчисления на основе общей теории функциональных преобразований), Г. А. Гринберга, К. А. Круга М. Ю. Юрьева, М. И. Конторовича и Э. А. Мееровича (приложение операционного исчисления в электротехнике), С. И. Евтянова (приложение операционного исчисления в радиотехнике), А. В. Лыкова (приложение операционного исчисления в теплотехнике), Б. В. Булгакова и А. М. Лурье (применение операционного исчисления в механике), А. Я. Повзнера (развитие и применение операционных методов к решению некоторых задач математической физики) и многих других теория и приложения операционного исчисления получили математическое обоснование и дальнейшее развитие.

# ГЛАВА I
# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

## § 1. Оригинал и изображение

**Определение оригинала.** Оригиналом называется комплексная функция $f(t) = u(t) + iv(t)$ действительного переменного $t$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t)$ — однозначная непрерывная или кусочно-непрерывная функция вместе со своими производными $n$-го порядка на всей оси $t$;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) существуют такие числа $M > 0$ и $s > 0$, что для всех $t > 0$

$$|f(t)| < Me^{st}.$$

Число $s_0 \geqslant 0$, для которого неравенство в условии 3) выполняется при любом $s = s_0 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ и не выполняется при $s = s_0 - \varepsilon$ ($s_0$ — точная нижняя граница чисел $s$), называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Функции-оригиналы $f(t)$ при $t \to \infty$ являются или ограниченными, или стремящимися к бесконечности, но не быстрее, чем показательная функция $e^{s_0 t}$. Такие функции называются функциями порядка показательной функции.

На функцию-оригинал можно накладывать более общие условия, рассматривая и функции бесконечных разрывов в конечном числе точек на любом интервале конечной длины, предполагая, что в точках бесконечного разрыва функции абсолютно интегрируемы. В этой книге условия, накладываемые на функцию-оригинал, достаточны для предполагаемых приложений.

**Определение изображения.** Изображением функции-оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, $s = \operatorname{Re} p$, $\sigma = \operatorname{Im} p$, определяемая интегралом Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \qquad \left(\int_0^\infty = \lim_{T\to\infty} \int_0^T\right). \tag{1.1}$$

## § 2. Область существования изображения

**Теорема.** Если функция $f(t)$ — оригинал с показателем роста $s_0$, то функция $F(p)$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и является в ней аналитической функцией.

*Доказательство.* 1°. Имеем $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ и $\operatorname{Re} p > s_0$. Тогда

$$|F(p)| \leqslant \int_0^\infty |e^{-pt} f(t)\, dt| < M \int_0^\infty e^{-st} e^{s_0 t}\, dt,$$

или

$$|F(p)| < \frac{M}{s - s_0}, \quad \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

Следовательно, функция $F(p)$ существует в области $\operatorname{Re} p > s_0$ (рис. 1).

2°. Отношение приращений $\frac{\Delta F(p)}{\Delta p}$ в любой точке $p$ полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ равно

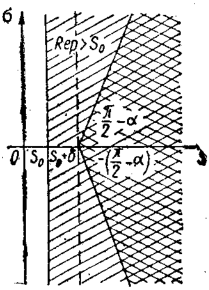


Рис. 1.

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = \frac{F(p+\Delta p) - F(p)}{\Delta p} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} (e^{-\Delta p t} - 1)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt} f(t) \frac{1}{\Delta p} \left[ -\Delta p t + \right.$$

$$\left. + \frac{(\Delta p t)^2}{2!} - \frac{(\Delta p t)^3}{3!} + \ldots \right] dt,$$

или

$$\frac{\Delta F(p)}{\Delta p} = -\int_0^\infty e^{-pt} t f(t)\, dt + \varepsilon, \tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon = \Delta p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} t^2 \left[ \frac{1}{2!} - \frac{\Delta p t}{3!} + \frac{(\Delta p t)^2}{4!} - \ldots \right] dt.$$

Покажем, что $\varepsilon \to 0$ при $\Delta p \to 0$. Имеем

$$|\varepsilon| \leqslant |\Delta p| \int_0^\infty |f(t)|\, |e^{-pt}|\, t^2 \left[ \frac{1}{2!} + \frac{|\Delta p t|}{3!} + \frac{|\Delta p|^2 t^2}{4!} + \ldots \right] dt <$$

$$< |\Delta p| \int_0^\infty M e^{s_0 t} e^{-st} t^2 \left[ 1 + \frac{|\Delta p|\, t}{1!} + \frac{|\Delta p|^2 t^2}{2!} + \ldots \right] dt =$$

$$= |\Delta p| M \int_0^\infty e^{(s-s_0)t} t^2 e^{|\Delta p| t} dt,$$

или

$$|\varepsilon| < |\Delta p| M \int_0^\infty e^{-(s-s_0-|\Delta p|)t} t^2 dt. \qquad (1.3)$$

Дважды интегрируя по частям в правой части неравенства (1.3) при $s - s_0 - |\Delta p| > 0$, получаем

$$|\varepsilon| < \frac{2M}{(s - s_0 - |\Delta p|)^3} \cdot |\Delta p|.$$

Отсюда $\varepsilon \to 0$ при $\Delta p \to 0$.

Интеграл в равенстве (1.2) существует, так как $|tf(t)| < M_1 e^{s_1 t}$. Действительно, $|tf(t)| < Me^{(s_0+\delta)t} e^{-\delta t} t$, $\delta > 0$ — малое число. Функция $Mte^{-\delta t}$ при $t > 0$ имеет единственный максимум, поэтому существует такое $M_1 > 0$, что $Mte^{-\delta t} \leqslant M_1$. Следовательно, $|tf(t)| < M_1 e^{s_1 t}$, $s_1 = s_0 + \delta$, при $t > 0$.

В равенстве (1.2) перейдем к пределу при $\Delta p \to 0$. Имеем

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} tf(t)\, dt. \qquad (1.4)$$

Следовательно, изображение $F(p)$ есть аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$.

**Теорема** (необходимый признак). Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$ с показателем роста $s_0$, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

*Доказательство.* В полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$

$$|F(p)| = \left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \right| < \frac{M}{s - s_0}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to\infty} |F(p)| = 0$. Так как в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ функция $F(p)$ — аналитическая, то $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

**Теорема.** Интеграл Лапласа (1.1) сходится равномерно в области $D: \operatorname{Re} p > s_0$ и $|\arg(p - s_0 - \delta)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha$, где $\alpha > 0$, $\delta > 0$ — малые числа (рис. 1)

*Доказательство.* В точке $p = s_0 + \delta$ области сходимости ($\operatorname{Re} p > s_0$) интеграла (1.1) имеем

$$\int_\tau^\infty e^{-(s_0+\delta)t} f(t)\, dt = \varphi(\tau). \qquad (1.5)$$

Это означает, что для любого $\varepsilon' > 0$ существует такое $\tau_0' = \tau_0'(\varepsilon')$, что $|\varphi(\tau)| < \varepsilon'$ при $\tau > \tau_0'$.

Так как $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$, или $\operatorname{Re}(p - s_0 - \delta) > 0$, то

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} e^{(s_0+\delta)t} f(t)\, e^{-(s_0+\delta)t}\, dt =$$

$$= \int_{\tau}^{\infty} e^{-(p-s_0-\delta)t} f(t)\, e^{-(s_0+\delta)t}\, dt.$$

Из (1.5) и согласно формуле (2.19) получаем

$$\varphi(t) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-(s_0+\delta)u} f(u)\, du \ \text{ и } \ d\varphi(t) = -e^{-(s_0+\delta)t} f(t)\, dt,$$

следовательно,

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = -\int_{\tau}^{\infty} e^{-(p-s_0-\delta)t}\, d\varphi(t). \tag{1.6}$$

Интегрируя по частям в правой части (1.6), находим

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = -e^{-(p-s_0-\delta)\tau} \varphi(\tau) + (p - s_0 - \delta) \int_{\tau}^{\infty} e^{-(p-s_0-\delta)t} \varphi(t)\, dt.$$

Найдем интегральную оценку (1.5) при $\tau > \tau_0'$. Имеем

$$\left|\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt\right| < \varepsilon' + \varepsilon' |p - s_0 - \delta| \int_{\tau}^{\infty} e^{-(s-s_0-\delta)t}\, dt =$$

$$= \varepsilon' + \varepsilon' \frac{|p - s_0 - \delta|}{p - s_0 - \delta} e^{-(s-s_0-\delta)\tau} \leqslant \varepsilon' \left(1 + \frac{|p - s_0 - \delta|}{p - s_0 - \delta}\right).$$

Так как $\dfrac{p_0 - s_0 - \delta}{|p - s_0 - \delta|} = \cos\arg(p - s_0 - \delta) \geqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$,

то $\left|\displaystyle\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt\right| < \dfrac{1 + \sin\alpha}{\sin\alpha} \varepsilon'$.

Полагая $\varepsilon' = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} \varepsilon$ и $\tau_0'(\varepsilon') = \tau_0(\varepsilon)$, получаем неравенство

$$\left|\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt\right| < \varepsilon, \quad \tau > \tau_0(\varepsilon),$$

которое выполняется при любом $p$ в области $D$, следовательно, интеграл Лапласа равномерно сходится относительно $p$ в области $D$.

По формуле (1.1) каждой функции $f(t)$ ставится в соответствие определенная функция $F(p)$, аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Это соответствие называется преобразованием Лапласа.

Соответствие между оригиналом $f(t)$ и изображением $F(p)$ будем записывать символом $f(t) \to F(p)$ или $Fp \to f(t)$ (пользуются также символами: $F(p) = L\{f(t)\}$, $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$, $F(p) \mid\subset f(t)$, $F(p) \div\!\!\to\, \div\!\!\to f(t)$, $F(p) \circ\!\!-\!\!\bullet f(t)$ и другими).

В преобразовании Лапласа оригинал будем обозначать малой буквой, а его изображение — соответствующей большой буквой, например, $x(t) \to X(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(p)$.

В книге операционное исчисление излагается на основе преобразования Лапласа.

## § 3. Преобразование Карсона — Хевисайда

В операционном исчислении пользуются еще изображением по Карсону—Хевисайду, определяемым равенством $\Phi(p) = p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)dt$, которое отличается от изображения по Лапласу только множителем $p$.

Все формулы одного преобразования получаются из формул другого умножением или делением на $p$.

В современной технической литературе в основном пользуются изображением по Лапласу, так как общность преобразований Фурье и Лапласа связывает операционное исчисление с гармоническим анализом и таким образом вносит физический смысл в понятие изображения (изображение по Лапласу $F(s + i\sigma)$ есть спектральная функция по отношению к затухающей функции $e^{-st} f(t)$, для которой переменная $\sigma$ является частотой).

## § 4. Единичная функция

Функция-оригинал

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ 1, & t < 0 \end{cases}$$

$\left(\eta(0) = \frac{1}{2},\ \lim\limits_{t\to 0+0} \eta(t) = 1\right)$ называется единичной функцией (рис. 2).

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию оригинала 1) и 3), то функция

$$f(t)\,\eta(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям оригинала. Например, функция $f(t) = t^2$ (рис. 3,*а*) непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$ и при $t > 0$

является функцией ограниченного изменения ($M = 1$, $s_0 = 1$), $t^2 < e^t$ (так как при $t \to \infty$ показательная функция $a^t, a > 0$ есть бесконечно большая величина более высокого порядка, чем степенная функция $t^k: \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^k}{a^t} = 0$), но при $t < 0$, $f(t) = t^2 \neq 0$, поэтому функция $f(t) = t^2$ удовлетворяет 1) и 3) условию оригинала. Тогда

$$f(t)\,\eta(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

является оригиналом (рис. 3,б).

Для сокращения записи будем писать $f(t)$ вместо $f(t)\,\eta(t)$, условившись, что все функции, удовлетворяющие условию оригинала

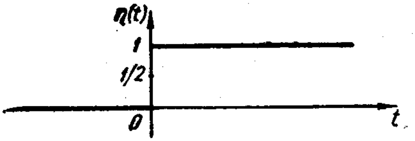


Рис. 2.

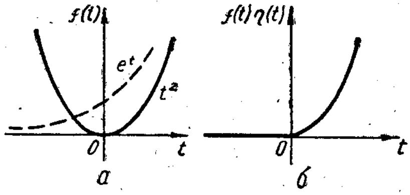


Рис. 3.

1) и 3), равны нулю для $t < 0$. Это обусловливается физическим смыслом задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с начальными условиями, которые, естественно, задаются в момент $t = 0$; следовательно, процесс исследуется только на интервале $0 \leqslant t < \infty$, поэтому не имеет значения, какой физический процесс описывает искомая функция до начального момента при $t < 0$.

## § 5. Изображение некоторых функций

**Изображение единичной функции** $\eta(t)$. По формуле (1.1) получаем

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,\eta(t)\,dt = \lim_{a\to\infty} \int\limits_0^a e^{-pt}\,dt = \lim_{a\to\infty} \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^a =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\,e^{-pa}\right).$$

Если $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-pa} = 0$.

Следовательно,

$$1 \to \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

**Изображение функции** $e^{\alpha t}$. По формуле (1.1) имеем

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t}\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(p-\alpha)t}\,dt =$$

$$= -\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-(p-\alpha)t}\big|_0^a}{p-\alpha} = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{e^{-(p-\alpha)a}}{p-\alpha}\right).$$

Если $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$, то $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-(p-\alpha)a} = 0$.

Таким образом,

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha.$$

**Гамма-функция.** Гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\,dt, \quad s > 0. \tag{1.7}$$

Представим интеграл в формуле (1.7) в виде

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t} t^{s-1}\,dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{s-1}\,dt.$$

Интеграл

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1}\,dt < \int_0^1 t^{s-1}\,dt = \frac{t^s}{s}\Big|_0^1$$

равномерно сходится при $t\to 0$, если $s > 0$. Из неравенства $t^{s+1} < e^t \left(\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^{s+1}}{e^t} = 0\right)$, или $e^{-t}t^{s-1} < \frac{1}{t^2}$, следует, что интеграл

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{s-1}\,dt < \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 1$$

равномерно сходится для всех $s$.

Таким образом, $\Gamma(s)$ — непрерывная функция от $s > 0$. Интегрируя правую часть (1.7) гамма-функции $\Gamma(s+1)$ по частям ($u = t^s$, $dv = e^{-t}\,dt$), получаем формулу приведения. Имеем

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^s\,dt = (-e^{-t}t^s)\big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\,dt,$$

или

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s). \tag{1.8}$$

Пользуясь (1.8), получим

$$\Gamma(s+1) = s(s-1)(s-2)\dots(s-k)\,\Gamma(s-k),\ k < s.$$

Для натурального числа $s = n$

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\dots 2\cdot 1\,\Gamma(1) = n!,$$

так как

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1.$$

Найдем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}\,d\tau = \sqrt{\pi}.$$

Пользуясь формулой (1.8), получаем

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi}. \qquad (1.9)$$

При $s > 0$ функция $\Gamma(s) > 0$ имеет непрерывную производную $\Gamma'(s)$ и $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$, тогда по теореме Ролля на интервале (1,2) существует такая точка $s$, в которой $\Gamma'(s) = 0$. В этой точке ($s = 1{,}461632\dots$) функция $\Gamma(s)$ имеет минимум $\Gamma(1{,}461632\dots) = 0{,}885603\dots$

По формуле (1.8) гамма-функцию произвольного аргумента $s > 0$ можно выразить через гамма-функцию аргумента $0 < s < 1$.

Функцию $\Gamma(s)$, пользуясь формулой (1.8), можно определить и для $s < 0$. Если $-1 < s < 0$, или $0 < s+1 < 1$, то правая часть уравнения $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ определена, следовательно, и выражение в левой части имеет смысл, т. е. функция $\Gamma(s)$ определяется на интервале $(-1, 0)$. Аналогично определяется $\Gamma(s)$ при $s < 0$ на интервалах $(-2, -1)$, $(-3, -2)$ и т. д. Для натурального числа $n$ имеем

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}\sqrt{\pi} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}. \qquad (1.10)$$

Из уравнения $\Gamma(s) = \frac{1}{s}\Gamma(s+1)$ следует, что если $s$ стремится к $0, -1, -2, \dots$, то $\Gamma(s)$ стремится к $\pm\infty$. Функция $\Gamma(s)$ при $s = 0, -1, -2, \dots$ имеет бесконечные разрывы. Между двумя последовательными точками разрыва функция $\Gamma(s)$ попеременно то положительна, то отрицательна и в каждом из этих интервалов имеет или максимум, или минимум, абсолютная величина которых убывает по мере удаления интервалов от начала координат (рис. 4).

В комплексной области гамма-функция определяется интегралом

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$

или в виде формулы Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p e^{Cp} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right) e^{-\frac{p}{n}}, \tag{1.11}$$

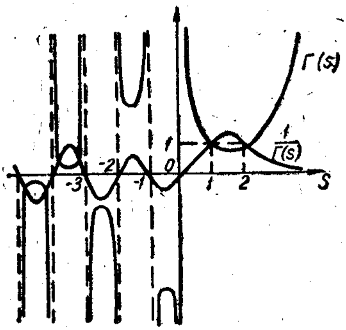


Рис. 4.

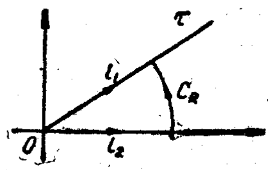


Рис. 5.

где $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0{,}577215\ldots$ — постоянная Эйлера $(\gamma = e^C = 1{,}781072\ldots)$.

Из (1.11) имеем $\Gamma(p) = e^{-Cp}\frac{1}{p}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{p}{n}}}{1 + \frac{p}{n}}$. Логарифмируя, получим

$$\ln \Gamma(p) = -Cp - \ln p + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{p}{n} - \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right)\right]$$

и, дифференцируя по $p$,

$$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = -C - \frac{1}{p} + p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+p)}.$$

При $p = 1$ находим

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}; \quad \Gamma(1) = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Отсюда

$$C = -\Gamma'(1). \tag{1.12}$$

Функция $\Gamma(p)$ аналитическая в каждой точке плоскости $p$, кроме точек $p = 0, -1, -2, \ldots$, в которых она имеет простые полюсы. В полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ функция $\Gamma(p)$ может быть изображением.

Функции $Q(x, p) = \int\limits_x^\infty e^{-t} t^{p-1}\, dt = \Gamma(p, x)$ и $P(x, p) = \int\limits_0^x e^{-t} t^{p-1}\, dt = \Gamma(p) - \Gamma(p, x) = \gamma(p, x)$ называются неполными гамма-функциями (функциями Прима).

**Изображение степенной функции** $t^\alpha, \alpha > -1$. По определению изображения получаем

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} t^\alpha\, dt.$$

Замена $pt = \tau$ преобразовывает в плоскости $\tau$ действительную ось $t > 0$ в луч $l_1$ с направлением $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$ (рис. 5). Имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} t^\alpha\, dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int\limits_{e_1} e^{-\tau} \tau^\alpha d\tau.$$

Функция $e^{-\tau}\tau^\alpha$ аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re}\tau > 0$. Если $\tau^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln}\tau}$ многозначная функция, то для выделения ее однозначных ветвей делается разрез по отрицательной части действительной оси. Рассмотрим в плоскости $\tau$ контур $L = l_2 + c_R + l_1$ (рис. 5).

По теореме Коши $\int\limits_L e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = 0$, или $\int\limits_{l_1} = \int\limits_{l_2} + \int\limits_{c_R}$. При $R \to \infty$ получаем $\int\limits_{l_1} e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^\alpha dt + \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{c_R} e^{-\tau}\tau^\alpha d\tau$. Так как $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} |e^{-\tau}\tau^\alpha| = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{c_R} e^{-\tau}\tau^\alpha\, d\tau = 0$. Итак,

$$\int\limits_{l_1} e^{-\tau} \tau^\alpha\, d\tau = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^\alpha\, dt = \Gamma(\alpha + 1), \ \alpha + 1 > 0.$$

Следовательно,

$$t^\alpha \to \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{1.13}$$

Для значений $-1 < \alpha < 0$ функция $t^\alpha$ не является оригиналом, так как $t^\alpha \to \infty$ при $t \to 0$, однако интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt$ сходится, то в этом случае оригинал и изображение будем называть обобщенными.

Для натурального числа $\alpha = n$ $t^n \to \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$,

или

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{1.14}$$

Примеры. Найти изображения:

1. $f(t) = t^{n+\frac{1}{2}}$.

На основании (1.13) имеем

$$t^{n+\frac{1}{2}} \to \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}{p^{\frac{3}{2}+n}}.$$

Пользуясь формулой (1.9), находим

$$t^{n+\frac{1}{2}} \to \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!} \cdot \frac{1}{p^{n+\frac{3}{2}}},$$

в частности, $\sqrt{t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{p^{3/2}}$.

2. $f(t) = t^5$.

По формуле (1.14) имеем

$$t^5 \to \frac{5!}{p^6},$$

или

$$t^5 \to \frac{120}{p^6}.$$

3. $f(t) = \frac{1}{t^{n+1/2}}$.

Имеем $\frac{1}{t^{n+1/2}} \to \frac{\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)}{-n+\frac{1}{2}}$. По формуле (1.10) получаем

$$\frac{1}{t^{n+1/2}} \to \frac{(-1)^n 2^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \cdot \frac{1}{p^{-n+1/2}},$$

в частности,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \to \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

4. $f(t) = e^{-e^{-t}}$.

Имеем

$$e^{-e^{-t}} \to \int_0^\infty e^{-pt} e^{-e^{-t}} dt.$$

Заменяя $e^{-t} = u$, находим

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{-e^{-t}} dt = \int_0^1 e^{-u} u^{p-1} du = \gamma(p, 1).$$

Следовательно,

$$e^{-e^{-t}} \to \gamma(p, 1), \ \operatorname{Re} p > 0.$$

ГЛАВА II

# ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

## § 6. Свойство однородности

Если $f(t) \to F(p)$ и $a$ — комплексное число, то $af(t) \to aF(p)$.

*Доказательство.* По определению изображения имеем

$$af(t) \to \int_0^\infty e^{-pt} af(t)\,dt = a\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = aF(p).$$

Итак,

$$af(t) \to aF(p).$$

## § 7. Свойство сложения

Если $f(t) \to F(p)$ и $\varphi(t) \to \Phi(p)$, то

$$f(t) + \varphi(t) \to F(p) + \Phi(p).$$

*Доказательство.* Имеем

$$f(t) + \varphi(t) \to \int_0^\infty e^{-pt}[f(t) + \varphi(t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt = F(p) + \Phi(p).$$

Следовательно,

$$f(t) + \varphi(t) \to F(p) + \Phi(p).$$

## § 8. Свойство линейности

Если

$$f_1(t) \to F_1(p), \quad f_2(t) \to F_2(p), \quad \ldots, \quad f_n(t) \to F_n(p)$$

и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — комплексные числа, то

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n \to \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_n F_n,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t) \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p).$$

Доказательство свойства линейности следует непосредственно из первых двух свойств.

Примеры. Пользуясь свойством линейности и равенством $e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}$, найдем изображения функций:

1. $\sin t = \frac{1}{2i}[e^{it} - e^{-it}] \to \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right]; \quad \sin t \to \frac{1}{p^2+1}.$

2. $\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}[e^{t} - e^{-t}] \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right); \quad \operatorname{sh} t \to \frac{1}{p^2-1}.$

3. $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right); \quad \cos t \to \frac{p}{p^2+1}.$

4. $\operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right); \quad \operatorname{ch} t \to \frac{p}{p^2-1}.$

*Упражнения.* Найти изображения функций $f(t)$:

1. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$. 2. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$. 3. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$.

4. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$.

## § 9. Теорема подобия

Если $f(t) \to F(p)$ и $\alpha$ — комплексное число, то

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

*Доказательство.* 1°. Пусть $\alpha > 0$ — действительное число. Заменяя $\alpha t = \tau$, имеем

$$f(\alpha t) \to \int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\, d\tau,$$

или

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Полагая в этом равенстве $\alpha = \frac{1}{\beta}$, $\beta > 0$, получаем

$$F(\beta p) \to \frac{1}{\beta} f\left(\frac{t}{\beta}\right).$$

2°. $\alpha$ — комплексное число. $\alpha t = \tau$ преобразовывает в плоскости $\tau$ действительную ось $t > 0$ в луч $l_1$ с направлением $\arg\alpha$ (рис. 5), $|f(\tau)| < Me^{s_0|\tau|}$. Имеем

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha}\int_{l_1} e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Функция $e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)$ — аналитическая на всей плоскости $\tau$. Тогда $\int_{l_2} + \int_{c_R} - \int_{l_1} = 0$. Отсюда при $R \to \infty$ получаем

$$\int_{l_1} e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t)\,dt + \lim_{R\to\infty}\int_{c_R} e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Найдем оценку интеграла по контуру $c_R$. Имеем

$$\left|\int_{c_R}\right| < M\int_{c_R} |e^{-\frac{p}{\alpha}\tau + s_0|\tau|}d\tau|.$$

На контуре $c_R$: $\tau = Re^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \arg\alpha$, $d\tau = Rie^{i\varphi}d\varphi$, $|\tau| = R$.
Тогда

$$\left|\int_{c_R}\right| < MR\int_0^{\arg\alpha} \left|e^{-R\left[\left|\frac{p}{\alpha}\right| e^{i\left(\varphi+\arg\frac{p}{\alpha}\right)} - s_0\right]}\right| d\varphi,$$

или

$$\left|\int_{c_R}\right| < MR\int_0^{\arg\alpha} e^{-R\left[\left|\frac{p}{\alpha}\right|\cos(\varphi+\arg p-\arg\alpha)-s_0\right]}\,d\varphi.$$

Так как $\left|\frac{p}{\alpha}\right|\cos(\varphi+\arg p - \arg\alpha) - s_0 > \left|\frac{p}{\alpha}\right|\cos(\arg p)$, то

$$\left|\int_{c_R}\right| < MR\int_0^{\arg\alpha} e^{-R\left|\frac{p}{\alpha}\right|\cos(\arg p)}\,d\varphi.$$

Итак,

$$\left|\int_{c_R}\right| < MR\arg\alpha\cdot e^{-R\left|\frac{p}{\alpha}\right|\cos(\arg p)}.$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $R \to \infty$ $\left(\operatorname{Re} p > s_0 > 0,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2}\right)$, получаем $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{c_R} = 0$. Следовательно,

$$\int_{l_1} e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}t} f(t)\, dt = F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Итак,

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Примеры. Пользуясь теоремой подобия, найдем изображения:

1. $\sin \alpha t \to \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}$; $\quad \sin \alpha t \to \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$.

2. $i \operatorname{sh} \alpha t = \sin i\alpha t \to \frac{i\alpha}{p^2 + (i\alpha)^2}$, $\operatorname{sh} \alpha t \to \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$.

3. $\cos \alpha t \to \frac{1}{\alpha} \frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}$, $\quad \cos \alpha t \to \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$.

4. $\operatorname{ch} \alpha t = \cos i\alpha t \to \frac{p}{p^2 + (i\alpha)^2}$, $\quad \operatorname{ch} \alpha t \to \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$.

5. $\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2}\right)$,

$$\cos^2 \alpha t \to \frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}.$$

6. $\operatorname{ch}^2 \alpha t = \cos^2 i\alpha t \to \frac{p^2 + 2i^2\alpha^2}{p(p^2 + 4i^2\alpha^2)}$, $\quad \operatorname{ch}^2 \alpha t \to \frac{p^2 - 2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$.

7. $\sin^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha t) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2}\right)$,

$$\sin^2 \alpha t \to \frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}.$$

8. $i^2 \operatorname{sh}^2 \alpha t = \sin^2 i\alpha t \to \frac{2(i\alpha)^2}{p(p^2 + 4i^2\alpha^2)}$; $\quad \operatorname{sh}^2 \alpha t \to \frac{2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$.

9. $\sin \alpha t \cdot \cos \beta t = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta)t + \sin(\alpha + \beta)t] \to$

$$\to \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha - \beta}{p^2 + (\alpha - \beta)^2} + \frac{\alpha + \beta}{p^2 + (\alpha + \beta)^2}\right] =$$

$$= \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{[p^2 + (\alpha - \beta)^2][p^2 + (\alpha + \beta)^2]}.$$

10. $f(t) = \sin\alpha t \cdot \operatorname{ch}\beta t$ и $f(t) = \cos\alpha t \operatorname{sh}\beta t$.

Имеем

$$\sin(\alpha + i\beta)t \to \frac{\alpha + i\beta}{p^2 + (\alpha + i\beta)^2} = \frac{(\alpha + i\beta)(p^2 + \alpha^2 - \beta^2 - 2i\alpha\beta)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2},$$

или $(\cos i\alpha t = \operatorname{ch}\alpha t, \quad \sin i\alpha t = i\operatorname{sh}\alpha t)$

$$\sin\alpha t \operatorname{ch}\beta t + i\cos\alpha t \operatorname{sh}\beta t \to \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2) + i\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

Отсюда

$$\sin\alpha t \operatorname{ch}\beta t \to \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$$

и

$$\cos\alpha t \operatorname{sh}\beta t \to \frac{\beta(p^2 - \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

*Упражнения.* Найти изображения функций:

5. $\operatorname{sh}\alpha t \operatorname{ch}\beta t$.
6. $\cos\alpha t \cos\beta t$.
7. $\operatorname{ch}\alpha t \operatorname{ch}\beta t$.
8. $\sin\alpha t \sin\beta t$.
9. $\operatorname{sh}\alpha t \operatorname{sh}\beta t$.
10. $\operatorname{sh}\alpha t - \sin\alpha t$.
11. $(\operatorname{ch}\alpha t - \cos\alpha t)$.
12. $(\operatorname{sh}\alpha t + \sin\alpha t)$.
13. $(\operatorname{ch}\alpha t + \cos\alpha t)$.
14. $\cos\alpha t \cdot \operatorname{ch}\beta t$.
15. $\sin\alpha t \cdot \operatorname{sh}\beta t$.

## § 10. Теорема запаздывания

Если $f(t) \to F(p)$ и $t_0 > 0$, то

$$f(t - t_0) \to e^{-t_0 p} F(p).$$

*Доказательство.* Имеем

$$f(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t - t_0), & t > t_0. \end{cases}$$

Сдвигая график функции $f(t)$ (рис. 6, *а*) вправо на $t_0$, получаем график функции $f(t - t_0)$ (рис. 6, *б*).

Изображение оригинала $f(t - t_0)$ равно

$$f(t - t_0) \to \int_0^\infty e^{-pt} f(t - t_0)\,dt = \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t - t_0)\,dt.$$

Заменяя $t - t_0 = \tau$, получаем

$$\int_{t}^{\infty} e^{-pt} f(t - t_0)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-p(\tau + t_0)} f(\tau)\, d\tau =$$

$$= e^{-pt_0} \int_{0}^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau)\, d\tau = e^{-pt_0} F(p).$$

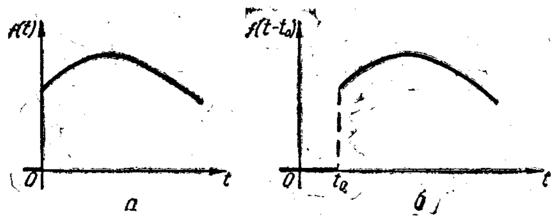


Рис. 6.

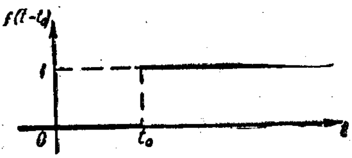


Рис. 7.

Таким образом,

$$f(t - t_0) \to e^{-pt_0} F(p), \quad t > t_0.$$

Умножение изображения $F(p)$ на $e^{-pt_0}$ сдвигает график его оригинала $f(t)$ вправо на $t_0$. Это геометрическое свойство сдвига известно в физике как запаздывание явления на время $t_0$.

Применяя теоремы подобия и запаздывания, можно найти изображение для оригинала вида $f(at - t_0)$, где $t_0 > 0$ и $a$ — комплексное число. Пусть $f(t) \to F(p)$, тогда по теореме подобия $f(at) \to$ $\to \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$. По теореме запаздывания находим

$$f(at - t_0) = f\left[a\left(t - \frac{t_0}{a}\right)\right] \to \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) e^{-\frac{t_0}{a} p}.$$

Следовательно,

$$f(at - t_0) \to \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) e^{-\frac{t_0}{a} p}. \tag{2.1}$$

Функция

$$\eta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$$

называется обобщенной единичной функцией (рис. 7); ее изображение будет

$$\eta(t - t_0) \to \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Примеры. Пользуясь равенством (2.1), найдем изображения функций:

1. $\sin(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p} \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

2. $\operatorname{sh}(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p} \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$.

3. $\cos(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p} \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$.

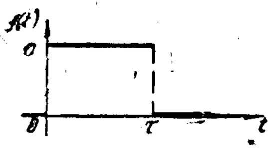


Рис. 8.

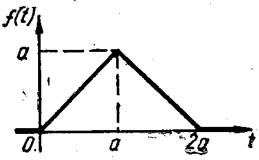


Рис. 9

4. $\operatorname{ch}(\omega t - \varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p} \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$.

5. $(at - b)^\alpha \to \dfrac{1}{a} \dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{\left(\dfrac{p}{a}\right)^{\alpha+1}} e^{-\frac{b}{a}p} = \dfrac{a^\alpha \Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}} e^{-\frac{b}{a}p}$.

Теорема запаздывания является удобным способом для нахождения изображений кусочно-непрерывных функций.

Примеры. Найти изображения кусочно-непрерывных функций:

1. $f(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < \tau, \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases}$ (рис. 8).

Функцию $f(t)$ с помощью обобщенной единичной функции можно записать формулой

$$f(t) = [\eta(t) - \eta(t - \tau)]\, a.$$

Находим изображение оригинала $f(t)$. Имеем

$$f(t) \to a \frac{1 - e^{-p\tau}}{p},$$

так как $\eta(t) \to \dfrac{1}{p}$ и $\eta(t - \tau) \to e^{-p\tau} \dfrac{1}{p}$.

2. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < a, \\ 2a - t, & a < t < 2a, \\ 0, & t > 2a \text{ и } t < 0 \end{cases}$ (рис. 9).

Пользуясь обобщенной единичной функцией оригинал $f(t)$ можно записать формулой

$$f(t)=t\eta(t)-t\eta(t-a)+(2a-t)\eta(t-a)+(t-2a)\eta(t-2a),$$

или

$$f(t)=t\eta(t)-2(t-a)\eta(t-a)+(t-2a)\eta(t-2a).$$

Изображение функции $f(t)$ равно

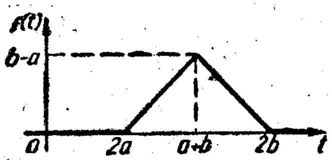


Рис. 10.

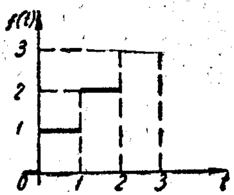


Рис. 11.

$$f(t)\to\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p^2}e^{-ap}+\frac{1}{p^2}e^{-2ap}.$$

Следовательно,

$$f(t)\to\frac{1}{p^2}(1-e^{-ap})^2.$$

3. $f(t)=\begin{cases}t-2a, & 2a<t<a+b,\\ 2b-t, & a+b<t<2b,\\ 0, & t>2b \text{ и } t<2a\end{cases}$ (рис. 10).

Функцию $f(t)$ запишем формулой

$$f(t)=(t-2a)\eta(t-2a)-(t-2a)\eta(t-a-b)+$$
$$+(2b-t)\eta(t-a-b)+(t-2b)\eta(t-2b),$$

или

$$f(t)=(t-2a)\eta(t-2a)-$$
$$-2(t-a-b)\eta(t-a-b)+(t-2b)\eta(t-2b).$$

Находим изображение $F(p)$ для данной функции. Имеем

$$F(p)=\frac{e^{-2ap}}{p^2}-2\frac{e^{-(a+b)p}}{p^2}+\frac{e^{-2bp}}{p^2}.$$

Итак,

$$f(t)\to\frac{(e^{-ap}-e^{-bp})^2}{p^2}.$$

4. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n, & n<t<n+1,\quad n=0,1,2,\ldots\end{cases}$ (рис. 11).

Ступенчатую функцию $f(t)$ можно записать в виде

$$f(t) = \eta(t-1) - \eta(t-2) + 2\eta(t-2) - 2\eta(t-3) + 3\eta(t-3) - $$
$$- 3\eta(t-4) + \ldots + (n-1)\eta[t-(n-1)] -$$
$$- (n-1)\eta(t-n) + n\eta(t-n) + \ldots,$$

или

$$f(t) = \eta(t-1) + \eta(t-2) + \eta(t-3) + \ldots + \eta(t-n) + \ldots .$$

Изображение $F(p)$ для функции $f(t)$ равно

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-3p}}{p} + \ldots + \frac{e^{-np}}{p} + \ldots .$$

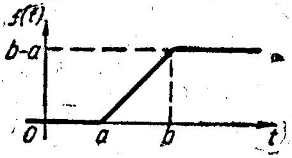

Рис. 12.

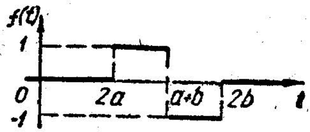

Рис. 13.

Следовательно,

$$f(t) \to \frac{1}{p(e^p-1)}.$$

5. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ t-a, & a < t < b, \\ b-a, & t > b \text{ (рис. 12).} \end{cases}$

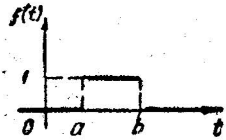

Рис. 14.

Имеем

$$f(t) = (t-a)\eta(t-a) - (t-a)\eta(t-b) + (b-a)\eta(t-b),$$

или

$$f(t) = (t-a)\eta(t-a) - (t-b)\eta(t-b).$$

Изображение функции $f(t)$ будет

$$f(t) \to \frac{1}{p^2}[e^{-ap} - e^{-bp}].$$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2a \text{ и } t > 2b, \\ 1, & 2a < t < a+b, \\ -1, & a+b < t < 2b \text{ (рис. 13).} \end{cases}$

Данную функцию $f(t)$ запишем формулой

$$f(t) = \eta(t-2a) - 2\eta(t-a-b) + \eta(t-2b),$$

тогда изображение функции $f(t)$ будет

$$F(p) = \frac{e^{-2ap}}{p} - 2\frac{e^{-(a+b)p}}{p} + \frac{e^{-2bp}}{p}.$$

Следовательно,

$$f(t) \to \frac{1}{p}\left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)^2.$$

*Упражнения.* Найти изображения кусочно-непрерывных функций:

**16.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a \text{ и } t > b, \\ 1, & a < t < b \end{cases}$ (рис. 14).

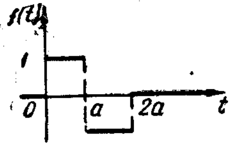


Рис. 15.

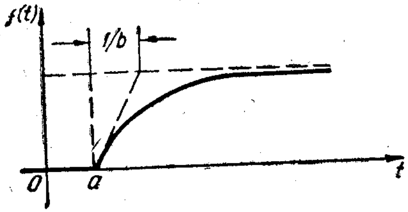


Рис. 16.

**17.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \text{ и } t > 2a, \\ 1, & 0 < t < a, \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ (рис. 15).

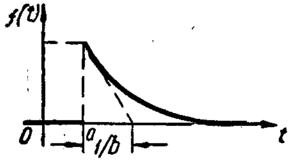


Рис. 17.

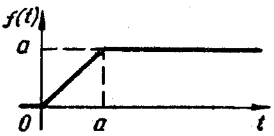


Рис. 18.

**18.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, & t > a \end{cases}$ (рис. 16).

**19.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ e^{-b(t-a)}, & t > a \end{cases}$ (рис. 17).

**20.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & 0 < t < a, \\ a, & t > a \end{cases}$ (рис. 18).

**21.** $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ n, & na < t < (n+1)a; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$ (рис. 19).

22. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n\left(t-\dfrac{(n+1)a}{2}\right), & na<t<(n+1)a;\end{cases}$

$n=0, 1, 2, \ldots$ (рис. 20).

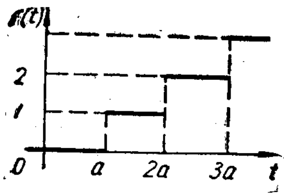


Рис. 19.

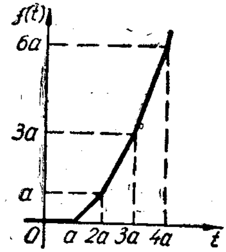


Рис. 20.

23. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ n+1, & n<t<n+1;\end{cases}$ $n=0, 1, 2, \ldots$ (рис. 21).

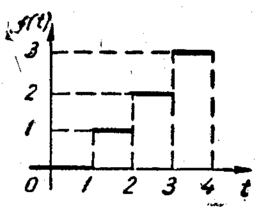


Рис. 21.

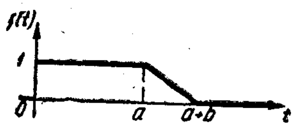


Рис. 22.

24. $f(t)=\begin{cases}0, \quad t<0 \text{ и } t>a+b,\\ 1, \qquad 0<t<a,\\ -\dfrac{1}{b}t+1+\dfrac{a}{b}, \quad a<t<a+b\end{cases}$ (рис. 22).

## § 11. Теорема опережения

Если $f(t)\to F(p)$ и $t_0>0$, то

$$f(t+t_0)\to e^{t_0p}\left(F(p)-\int_0^{t_0}e^{-pt}f(t)\,dt\right).$$

*Доказательство*. График функции $f(t+t_0)$ получается смещением графика $f(t)$ (рис. 23, *б*) влево на отрезок $t_0$. Смещенная часть графика функции $f(t)$, соответствующая интервалу $-t_0 < t < 0$, вырождается в отрезок оси $t$, а усеченная часть при $t > 0$ есть график функции $f(t + t_0)$ (рис. 23, *а*).

Изображение оригинала $f(t + t_0)$ равно

$$f(t + t_0) \to \int_0^\infty e^{-pt} f(t + t_0)\,dt, \quad t_0 > 0.$$

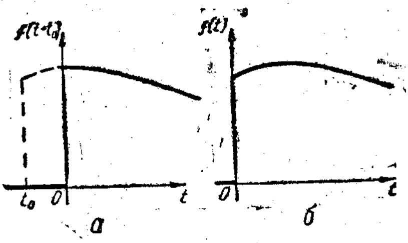

Рис. 23.

Заменяя в подынтегральном выражении $t + t_0 = u$, $t_0 \leqslant u < \infty$, получаем

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t + t_0)\,dt = \int_0^\infty e^{-p(u-t_0)} f(u)\,du = e^{pt_0}\int_{t_0}^\infty e^{-pu} f(u)\,du =$$

$$= e^{pt_0}\left(\int_{t_0}^0 e^{-pu} f(u)\,du + \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\,du\right) = e^{pt_0}\left(-\int_0^{t_0} e^{-pu} f(u)\,du + F(p)\right).$$

Следовательно,

$$f(t + t_0) \to e^{pt_0}\left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\,dt\right].$$

Теорема опережения применяется при решении разностных уравнений, в которые входят значения $f(t)$, $f(t + t_0)$, $f(t + 2t_0), \ldots$, $f(t + nt_0)$.

## § 12. Изображение периодического оригинала

**Теорема.** Если оригинал $f(t)$ — периодическая функция с периодом, равным $T$, то его изображение будет

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt.$$

*Доказательство.* Имеем

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt + \int_T^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

В интеграле от $T$ до $\infty$, заменяя $t = \tau + T$ и имея в виду, что $f(t + T) = f(t)$, получаем

$$F(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt + e^{-pT} F(p).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Примеры. Пользуясь формулой (2.2), найдем изображения периодических функций:

1. $f(t) = f(t + 2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ 0, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 24).

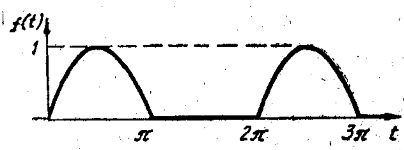

Рис. 24.

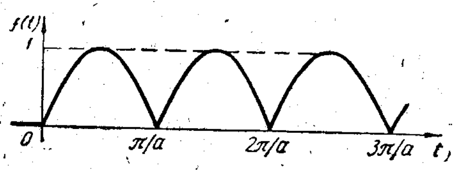

Рис. 25.

Изображение $F(p)$ равно

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} f(t)\,dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{\pi} e^{-pt} \sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2 + 1} (-p \sin t - \cos t) \Big|_0^{\pi},$$

или

$$\sin t\,\eta(\sin t) \to \frac{1}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi p}}.$$

2. $\eta(t) f(t) = f\left(t + \frac{\pi}{a}\right) = |\sin at|$ (рис. 25).

Изображение функции $f(t)$ будет

$$|\sin at| \to \frac{1}{1 - e^{-p\frac{\pi}{a}}} \int_0^{\frac{\pi}{a}} e^{-pt} \sin at\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2+a^2}(-p\sin at - a\cos at)\Big|_0^{\frac{\pi}{a}}.$$

Итак,

$$|\sin at| \to \frac{a}{p^2+a^2}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2a}.$$

3. $f(t) = f(t+2\pi) = \dfrac{\sin t}{|\sin t|} = \begin{cases} 1, & 2\pi n < t < (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 26).

Функция $\dfrac{\sin t}{|\sin t|}$ имеет много общего с тригонометрической функцией $\sin t$, поэтому она называется прямоугольным синусом.

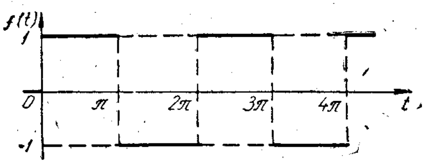


Рис. 26.

Находим изображение $F(p)$. Получим

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\int_0^{\pi} e^{-pt}dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}dt\right] = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^{\pi} + \frac{e^{-pt}}{p}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(-\frac{e^{-\pi p}}{p} + \frac{1}{p} + \frac{e^{-2\pi p}}{p} - \frac{e^{-\pi p}}{p}\right) =$$

$$= \frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p(1-e^{-2\pi p})} = \frac{1}{p}\,\frac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}},$$

или

$$\frac{\sin t}{|\sin t|} \to \frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}.$$

4. $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} 1, & 2na < t < (2n+1)a, \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \ t < 0, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 27).

Найдем изображение $F(p)$ данной функции. Имеем

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-p2a}}\int_0^{2a} e^{-pt} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-p2a}}\int_0^{a} e^{-pt}dt =$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2pa}}\cdot\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^a=\frac{1}{1-e^{-2pa}}\left(\frac{e^{-pa}}{-p}+\frac{1}{p}\right),$$

или

$$f(t)\to\frac{1}{p\,(1+e^{-pa})}.$$

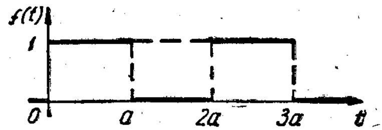


Рис. 27.

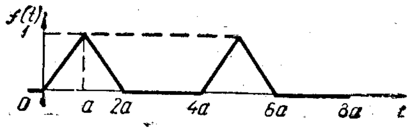


Рис. 28.

$$5.\ f(t)=f(t+4a)=\begin{cases}\dfrac{t}{a}-4n, & 4na<t<(4n+1)\,a,\\[2mm] -\dfrac{t}{a}+4n+2, & (4n+1)\,a<t<(4n+2)\,a,\\[2mm] 0, & (4n+2)\,a<t<(4n+4)\,a,\ t<0,\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots$ (рис 28).

Перейдя к изображению, получаем

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4ap}}\int\limits_0^{4a}e^{-pt}f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-4ap}}\left[\int\limits_0^{a}e^{-pt}\,\frac{t}{a}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_a^{2a}e^{-pt}\left(2-\frac{t}{a}\right)dt\right]=\frac{1}{a\,(1-e^{-4ap})}\left[\left(-\frac{te^{-pt}}{p}-\frac{e^{-pt}}{p^2}\right)\Big|_0^a+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{te^{-pt}}{p}+\frac{e^{-pt}}{p^2}-\frac{2ae^{-pt}}{p}\right)\Big|_a^{2a}\right]=\frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2\,(1-e^{-4ap})},$$

или

$$f(t)\to\frac{\operatorname{th}\dfrac{ap}{2}}{ap^2\,(1+e^{-2ap})}.$$

*Упражнения.* Найти изображения периодических функций:

$$25.\ f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}1, & 2na<t<(2n+1)\,a,\\ -1, & (2n+1)\,a<t<(2n+2)\,a,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

$n=0,1,2,\ldots$ (рис. 29).

26. $$f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - 2n, & 2na < t < (2n+1)a, \\ -\dfrac{t}{a} + 2(n+1), & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 30).

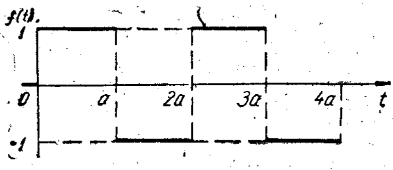


Рис. 29.

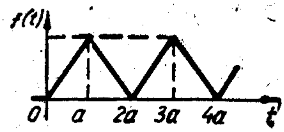


Рис. 30.

27. $$f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \dfrac{2t}{a} - (4n+1), & 2na < t < (2n+1)a, \\ -\dfrac{2t}{a} + 4n + 3, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 31).

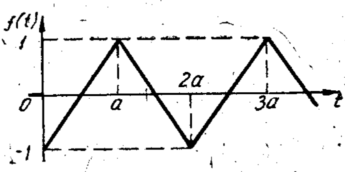


Рис. 31.

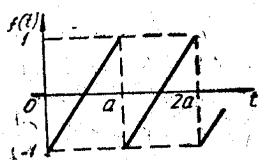


Рис. 32.

28. $$f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \dfrac{2t}{a} - (2n+1), & na < t < (n+1)a, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 32).

29. $$f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - 2n, & 2na < t < (2n+1)a, \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \ t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 33).

30. $$f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - n, & na < t < (n+1)a \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 34).

**31.** $f(t) = f(t+4a) = \begin{cases} 0, & 2na < t < (2n+1)a, \ t < 0, \\ 1, & (4n+1)a < t < (4n+2)a, \\ -1, & (4n+3)a < t < (4n+4)a, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 35).

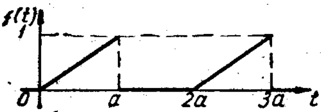


Рис. 33.

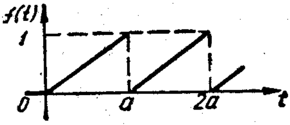


Рис. 34.

**32.** $f(t) = f\left(t + \dfrac{2\pi}{a}\right) = \begin{cases} 0, & \dfrac{2\pi n}{a} < t < \dfrac{(2n+1)\pi}{a}, \ t < 0, \\ -\sin at, & \dfrac{2n+1}{a}\pi < t < \dfrac{2n+2}{a}\pi, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 36).

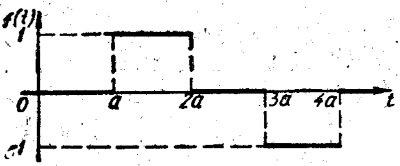


Рис. 35.

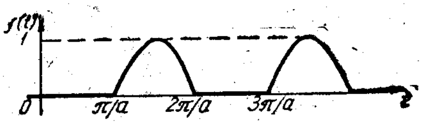


Рис. 36.

**33.** $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} 0, & 2na < t < (2n+1)a, \ t < 0, \\ 1, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 37).

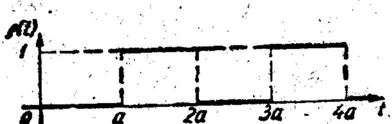


Рис. 37.

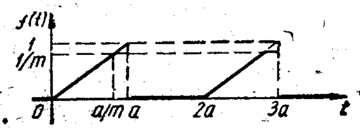


Рис. 38.

**34.** $f(t) = f(t+2a) = \begin{cases} \dfrac{t}{a} - 2n, & 2na < t < \left(2n + \dfrac{1}{m}\right)a, \\ \dfrac{1}{m}, & a\left(2n + \dfrac{1}{m}\right) < t < (2n+1)a, \\ 0, & (2n+1)a < t < (2n+2)a, \ t < 0, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ и $m > 1$ (рис. 38).

35. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \dfrac{m}{a}t - mn, & na < t < \left(n + \dfrac{1}{m}\right)a, \\ 0, & \left(n + \dfrac{1}{m}\right)a < t < (n+1)a, \quad t < 0. \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ и $m > 1$ (рис. 39).

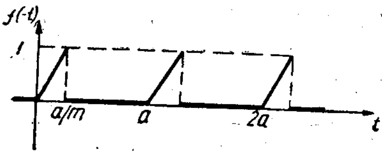


Рис. 39.

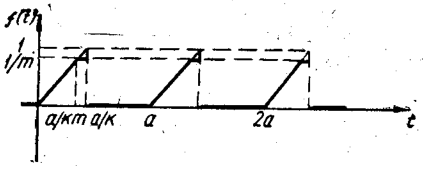


Рис. 40.

36. $f(t) = f(t+a) = \begin{cases} \dfrac{k}{a}t - kn, & na < t < \left(n + \dfrac{1}{mk}\right)a, \\ \dfrac{1}{m}, & \left(n + \dfrac{1}{mk}\right)a < t < \left(n + \dfrac{1}{k}\right)a, \\ 0, & \left(n + \dfrac{1}{k}\right)a < t < (n+1)a, \quad t < 0, \end{cases}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ и $m, k > 1$ (рис. 40).

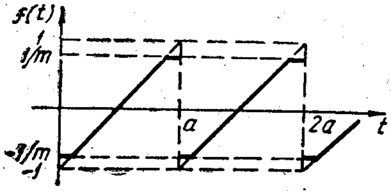


Рис. 41.

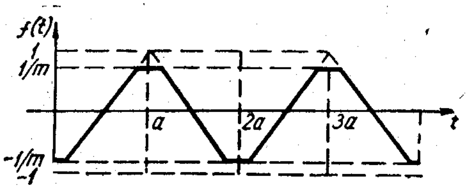


Рис. 42.

37. $f(t) = f(t+a) =$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{m}, & na < t < \left(n + \dfrac{m-1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{2}{a}t - (2n+1), & \left(n + \dfrac{m-1}{2m}\right)a < t < \left(n + \dfrac{m+1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{1}{m}, & \left(n + \dfrac{m+1}{2m}\right)a < t < (n+1)a, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ и $m > 1$ (рис. 41).

38. $f(t)=f(t+2a)=$

$$=\begin{cases} -\dfrac{1}{m}, & 2na<t<\left(2n+\dfrac{m-1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{2t}{a}-(4n+1), & \left(2n+\dfrac{m-1}{2m}\right)a<t<\left(2n+\dfrac{m+1}{2m}\right)a, \\ \dfrac{1}{m}, & \left(2n+\dfrac{m+1}{2m}\right)a<t<\left(2n+\dfrac{3m-1}{2m}\right)a, \\ -\dfrac{2t}{a}+4n+3, & \left(2n+\dfrac{3m-1}{2m}\right)a<t<\left(2n+\dfrac{3m+1}{2m}\right)a, \\ -\dfrac{1}{m}, & \left(2n+\dfrac{3m+1}{2m}\right)a<t<(2n+2)a, \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

$n=0, 1, 2, \ldots$ и $m>1$ (рис. 42).

39. $f(t)=f(t+a)=$

$$=\begin{cases} \dfrac{2k}{a}t-2kn, & na<t<\left(n+\dfrac{1}{2mk}\right)a, \\ \dfrac{1}{m}, & \left(n+\dfrac{1}{2mk}\right)a<t<\left(n+\dfrac{2m-1}{2mk}\right)a, \\ -\dfrac{2k}{a}t+2kn+2, & \left(n+\dfrac{2m-1}{2mk}\right)a<t<\left(n+\dfrac{1}{k}\right)a, \\ 0, & \left(n+\dfrac{1}{k}\right)a<t<(n+1)a, \ t<0, \end{cases}$$

$n=0, 1, 2, \ldots$ и $m, k>1$ (рис. 43).

## § 13. Теорема смещения

Если $f(t)\to F(p)$, $p_0$ — комплексное число, то

$$e^{-p_0t}f(t)\to F(p+p_0).$$

*Доказательство*. По определению изображения имеем

$$e^{-p_0t}f(t)\to\int_0^\infty e^{-pt}e^{-p_0t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(p+p_0)t}f(t)\,dt,$$

или

$$e^{-p_0t}f(t)\to F(p+p_0), \quad \operatorname{Re}p>s_0-\operatorname{Re}p_0.$$

Так как $|f(t)| < Me^{s_0t}$, то

$$|e^{-p_0t}f(t)| = |e^{-p_0t}|\,|f(t)| < Me^{s_0t}e^{-\operatorname{Re}p_0t} = Me^{(s_0-\operatorname{Re}p_0)t},$$

следовательно, $s_0 - \operatorname{Re}p_0$ — показатель роста функции $e^{-p_0t}f(t)$.

Теорема смещения применяется при рассмотрении физических явлений, связанных с затухающими колебаниями.

Примеры. Пользуясь теоремой смещения, найдем изображения следующих функций:

1. $e^{-\alpha t}\sin\omega t$, $\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $e^{-\alpha t}\sin\omega t \to \dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$.

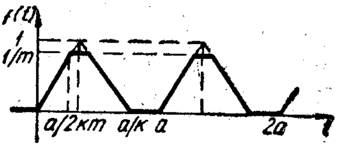


Рис. 43.

2. $e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$, $\operatorname{sh}\omega t \to \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$,

$$e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t \to \frac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}.$$

3. $e^{-\alpha t}\cos\omega t$, $\cos\omega t \to \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$,

$$e^{-\alpha t}\cos\omega t \to \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}.$$

4. $e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$, $\operatorname{ch}\omega t \to \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$, $e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t \to \dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$.

5. $t^\alpha e^{\beta t} \to \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}}$, при $\alpha = n$, $t^n e^{\beta t} \to \dfrac{n!}{(p-\beta)^{n+1}}$.

6. $t^\alpha \sin\beta t = \dfrac{1}{2i}[t^\alpha e^{i\beta t} - t^\alpha e^{-i\beta t}] \to \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2i}\times$

$$\times\frac{(p+\beta)^{\alpha+1}-(p-\beta)^{\alpha+1}}{(p^2+\beta^2)^{\alpha+1}}$$

при $\alpha = n$ и $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ имеем

$$\frac{t^n}{n!}\sin\beta t \to \frac{1}{2i}\,\frac{(p+\beta i)^{n+1}-(p-\beta i)^{n+1}}{(p^2+\beta^2)^{n+1}}$$

и

$$\frac{\sin\beta t}{\sqrt{t}} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\frac{\sqrt{p+\beta i}-\sqrt{p-\beta i}}{\sqrt{p^2+\beta^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2i}\,\frac{\sqrt{(\sqrt{p+\beta i}-\sqrt{p-\beta i})^2}}{(\sqrt{p^2+\beta^2}},$$

или

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \to \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}. \qquad (2.3)$$

7. $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \sin \alpha t \to \frac{1}{2i} \frac{(p-\beta+\alpha i)^{n+1}-(p-\beta-\alpha i)^{n+1}}{[(p-\beta)^2+\alpha^2]^{n+1}}$.

8. $\frac{t^n}{n!} \operatorname{sh} \alpha t = \frac{1}{2}\left(\frac{t^n}{n} e^{\alpha t}-\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t}\right) \to$

$$\to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}-\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\right],$$

или

$$\frac{t^n}{n!} \operatorname{sh} \alpha t \to \frac{(p+\alpha)^{n+1}-(p-\alpha)^{n+1}}{2\left(p^2-\alpha^2\right)^{n+1}}.$$

9. $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \operatorname{sh} \alpha t \to \frac{1}{2} \frac{(p-\beta+\alpha)^{n+1}-(p-\beta-\alpha)^{n+1}}{[(p-\beta)^2-\alpha^2]^{n+1}}$.

10. $t^\alpha \cos \beta t=\frac{1}{2}\left[t^\alpha e^{i\beta t}+t^\alpha e^{-i\beta t}\right] \to$

$$\to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2} \cdot \frac{(p+\beta)^{\alpha+1}+(p-\beta)^{\alpha+1}}{\left(p^2+\beta^2\right)^{\alpha+1}}.$$

Отсюда

$$\frac{t^n}{n!} \cos \beta t \to \frac{(p+\beta)^{n+1}+(p-\beta)^{n+1}}{2\left(p^2+\beta^2\right)^{n+1}}$$

и

$$\frac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} \to \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2\sqrt{p^2+1}}. \tag{2.4}$$

11. $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \cos \alpha t \to \frac{1}{2} \frac{(p-\beta+\alpha i)^{n+1}+(p-\beta-\alpha i)^{n+1}}{[(p-\beta)^2+\alpha^2]^{n+1}}$.

12. $\frac{t^n}{n!} \operatorname{ch} \alpha t=\frac{1}{2}\left(\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}+\frac{t^n}{n!} e^{-\alpha t}\right) \to$

$$\to \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}+\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\right],$$

или

$$\frac{t^n}{n!} \operatorname{ch} \alpha t \to \frac{(p+\alpha)^{n+1}+(p-\alpha)^{n+1}}{\left(p^2-\alpha^2\right)^{n+1}}.$$

13. $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \operatorname{ch} \alpha t \to \frac{1}{2} \frac{(p-\beta+\alpha)^{n+1}+(p-\beta-\alpha)^{n+1}}{[(p-\beta)^2-\alpha^2]^{n+1}}$.

В следующих примерах найдем изображения так называемых функций академика А. Н. Крылова (обозначаются $y_n(\alpha t)$, $n=1, 2, 3, 4$), введенные им для решения задач об изгибе балок, лежащих на упругом основании.

14. $y_1(at) = \operatorname{ch} at \cos at = \frac{1}{2}[e^{at}\cos at + e^{-at}\cos at] \to$

$$\to \frac{1}{2}\left[\frac{p-a}{(p-a)^2+a^2} + \frac{p+a}{(p+a)^2+a^2}\right],$$

или

$$y_1(at) \to \frac{p^3}{p^4+4a^4}.$$

15. $y_2(at) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} at \sin at + \operatorname{sh} at \cos at) =$

$$= \frac{1}{4}[e^{at}(\sin at + \cos at) + e^{-at}(\sin at - \cos at)] \to$$

$$\to \frac{1}{4}\left[\frac{a}{(p-a)^2+a^2} + \frac{p-a}{(p-a)^2+a^2} + \frac{a}{(p+a)^2+a^2} - \frac{p+a}{(p+a)^2+a^2}\right],$$

или

$$y_2(at) \to \frac{ap^2}{p^4+4a^4}.$$

16. $y_3(at) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} at \sin at = \frac{1}{4}(e^{at} - e^{-at})\sin at \to$

$$\to \frac{1}{4}\left[\frac{a}{(p-a)^2+a^2} - \frac{a}{(p+a)^2+a^2}\right],$$

или

$$y_3(at) \to \frac{a^2p}{p^4+4a^4}.$$

17. $y_4(at) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} at \sin at - \operatorname{sh} at \cos at) \to$

$$\to \frac{1}{4}\left[\frac{a}{(p-a)^2+a^2} - \frac{p-a}{(p-a)^2+a^2} + \frac{a}{(p+a)^2+a^2} + \frac{p+a}{(p+a)^2+a^2}\right],$$

или

$$y_4(at) \to \frac{a^3}{p^4+4a^4}.$$

*Упражнения.* Найти оригиналы функций $F(p)$:

**40.** $\frac{1}{p^2-4p+20}$ **41.** $\frac{p-2}{p^2-4p+13}$.

42. $\dfrac{3p+19}{2p^2+8p+19}$. 43. $\dfrac{5p-1}{p^3-1}$. 44. $\dfrac{p+1}{p^2+2p}$.

Найти изображения функций $f(t)$:

45. $e^{-4t}\sin 3t\cos 2t$. 46. $e^{3t}\cos 3t\cos 4t$. 47. $\operatorname{sh} t\cos 2t\sin 3t$.

48. $\operatorname{ch} t\sin 2t\sin 3t$. 49. $\operatorname{ch} 3t\sin^2 t$. 50. $\operatorname{sh} 4t\cos^2 3t$.

## § 14. Дифференцирование оригинала

**Теорема.** Если $f(t)\to F(p)$ и функции $f'(t)$, $f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t)\to pF(p)-f(0);$$

$$f''(t)\to p^2F(p)-pf(0)-f'(0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0),$$

где

$$f^{(k)}(0)=\lim_{t\to 0+0}f^{(k)}(t);\qquad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

*Доказательство.* По определению изображения имеем

$$f'(t)\to\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)\,dt.$$

Интегрируя правую часть этого равенства по частям, получаем

$$\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)\,dt=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Так как $\operatorname{Re}p=s>s_0$, то

$$|e^{-pt}f(t)|<Me^{-(s-s_0)t},$$

и поэтому $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-pt}f(t)=0$. Если оригинал $f(t)$ в точке $t=0$ является непрерывной функцией, то $f(0)=0$, так как при $t<0$ $f(t)=0$; если при $t=0$ функция $f(t)$ имеет разрыв первого рода, то при $t\to 0$ функция $f(t)$ имеет предел справа, т.е.

$$\lim_{t\to 0+0}e^{-pt}f(t)=f(0),$$

следовательно,

$$e^{-pt} f(t)|_0^\infty = -f(0).$$

Таким образом,

$$f'(t) \to pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Если при $t = 0$ функция $f(t)$ непрерывна, то $f'(t) \to pF(p)$. Это означает, что дифференцированию оригинала $f(t)$ соответствует в пространстве изображения умножение на $p$ функции $F(p)$.

Дважды интегрируя по частям интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-pt} f''(t)\,dt$, получаем

$$f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0).$$

По методу математической индукции; предполагая, что формула

$$f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

верна для $n$, докажем, что она верна и для $n+1$.

Обозначим

$$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) = \Phi(p),$$

тогда $f^{(n)}(t) \to \Phi(p)$. Из доказательства для $n = 1$ имеем

$$[f^{(n)}(t)]' \to p\Phi(p) - f^{(n)}(0).$$

Подставляя вместо $\Phi(p)$ его значение, получаем

$$f^{(n+1)}(t) \to p[p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)] - f^{(n)}(0),$$

или

$$f^{(n+1)}(t) \to p^{n+1} F(p) - p^n f(0) - \ldots - pf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0).$$

Таким образом, формула верна для любого натурального числа $n$. Если функция $f^{(n)}(t)$ имеет изображение, то и $f^{(n-1)}(t)$ имеет изображение, — обратное, вообще, не имеет места.

Если при $t = 0$ функция $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — непрерывны, то $f^{(n)}(t) \to p^n F(p)$, следовательно, $n$-кратному дифференцированию в пространстве оригиналов соответствует умножение на $p^n$ функции $F(p)$ в пространстве изображений. В этом частном случае величина $p$ рассматривается как оператор.

Примеры. 1. Найти изображение дифференциального выражения

$$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8$$

при условиях: $x(0) = 5$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$, $x'''(0) = 2$.

Обозначим $x(t) \to X(p)$, тогда по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$x'(t) \to pX(p) - 5;$$
$$x''(t) \to p^2X(p) - 5p;$$
$$x'''(t) \to p^3X(p) - 5p^2 + 1;$$
$$x^{IV}(t) \to p^4X(p) - 5p^3 + p - 2.$$

Отсюда по свойству линейности получим

$$x^{IV}(t) - 5x'''(t) - 4x''(t) + 2x'(t) - x(t) + 8 \to$$
$$\to p^4X(p) - 5p^3 + p - 2 - 5(p^3X(p) - 5p^2 + 1) - 4(p^2X(p) - 5p) +$$
$$+ 2(pX(p) - 5) - X(p) + \frac{8}{p} = (p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)X(p) -$$
$$- 5p^3 + 25p^2 + 21p - 17 + \frac{8}{p}.$$

2. Найти значение единичной функции $\eta(t)$ при $t \to 0 + 0$.
Имеем

$$\eta(t) \to \frac{1}{p}.$$

Так как $\eta'(t) = 0$ существует в каждой точке $t > 0$, то по теореме дифференцирования оригинала

$$\eta'(t) \to p \cdot \frac{1}{p} - \eta(0),$$

или

$$1 - \eta(0) = 0.$$

Отсюда

$$\eta(0) = 1,$$

где

$$\eta(0) = \lim_{t \to 0+0} \eta(t).$$

3. Найти изображение для производной функции $f(t) = \sqrt{t}$. Имеем

$$f(t) \to \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{p^{3/2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{3/2}}.$$

Функция $f'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}$ существует в каждой точке $t > 0$, но при $t = 0$ имеет бесконечный разрыв. Изображение таких функций находим по теореме дифференцирования оригинала, в которой предполагается, что $f^{(n)}(t)$ существует при $t > 0$, а при $t = 0$ функция $f^{(n)}(t)$ вообще может и не существовать.

Итак,

$$f'(t) \to p\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{3/2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{1/2}}, \quad f(0) = 0.$$

Изображение для этой функции $f'(t)$ можно найти непосредственно. Имеем

$$f'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} \to \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{p^{1/2}}.$$

4. Найти изображение производной для обобщенной единичной функции $\eta(t - t_0)$.

Теорема дифференцирования оригинала не применима к функции

$$\eta'(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \text{не существует}, & t = t_0, \end{cases}$$

так как она существует не в каждой точке $t > 0$.

Найдем изображение функции $\eta'(t - t_0)$ по определению изображения. Имеем

$$\eta'(t - t_0) \to \int_0^\infty e^{-pt}\,\eta'(t - t_0)\,dt = 0.$$

Если бы ошибочно к функции $\eta'(t - t_0)$ мы применили теорему дифференцирования оригинала, то получили бы неправильный результат, а именно:

$$\eta(t - t_0) \to \frac{1}{p}\,e^{-pt_0}$$

и

$$\eta'(t - t_0) \to e^{-pt_0}, \quad \lim_{t \to 0+0} \eta(t - t_0) = 0.$$

Следовательно, теорема дифференцирования оригинала применима к функциям, производные которых существуют в каждой точке $t > 0$.

*Упражнения* 51. Пользуясь теоремой дифференцирования оригинала, доказать, что производные от функций А. Н. Крылова (§ 13, примеры 14—17) выражаются через функции А. Н. Крылова.

Найти изображения следующих дифференциальных выражений:

52. $x^{IV}(t) + 4x'''(t) + 4x''(t)$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -2$, $x'''(0) = 3$.

53. $3x'''(t) - 2x''(t) + 5$; $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = -3$.

54. $4x^{IV}(t) + 3x''(t) + x(t)$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 3$, $x''(0) = 0$, $x'''(0) = -1$.

55. $x^{V}(t)+2x^{IV}(t)+4x(t);\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0,$
$x'''(0)=x^{IV}(0)=-1.$

## § 15. Дифференцирование изображения

**Теорема.** Если $F(p)\to f(t)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$F'(p)\to -tf(t),$$

$$F''(p)\to(-1)^2t^2f(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n)}(p)\to(-1)^nt^nf(t),\quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

*Доказательство.* 1°. Так как $|f(t)|<Me^{s_0t}$, то при $t>0$

$$|t^nf(t)|=t^n|f(t)|<Mt^ne^{-\alpha t}e^{(s_0+\alpha)t},$$

$\alpha>0$ — малое число. Функция $Mt^ne^{-\alpha t}$ имеет при $t=\frac{n}{\alpha}$ единственный максимум $M_1$, который при $t>0$ будет ее наибольшим значением, т.е. $Mt^ne^{-\alpha t}\leqslant M_1$, следовательно, $|t^nf(t)|<M_1e^{s_1t}$, $s_1\leqslant s_0+\alpha$.

Таким образом, если функция $f(t)$ — оригинал с показателем роста $s_0$, то функция $t^nf(t)$ будет тоже оригиналом и ее изображение определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$.

2°. Изображение $F(p)$ для функции $f(t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией (§ 2) и согласно (1.4) $F'(p)\to -tf(t)$. Тогда, по теории функций комплексного переменного, в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$ функция $F(p)$ имеет производную любого порядка. Имеем

$$(F'(p))'\to -t[-tf(t)],$$

или

$$F''(p)\to(-1)^2t^2f(t);$$

$$[F''(p)]'\to -t[(-1)^2t^2f(t)],$$

или

$$F'''(p)\to(-1)^3t^3f(t),$$

вообще

$$F^{(n)}(p)\to(-1)^nt^nf(t),\quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

Итак, дифференцированию изображения $F(p)$ соответствует в пространстве оригиналов действие умножения на $-t$ функции $f(t)$.

Примеры. Из равенств

$$\sin \alpha t \to \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}, \quad \cos \alpha t \to \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \quad \operatorname{sh} \alpha t \to \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},$$

$$\operatorname{ch} \alpha t \to \frac{p}{p^2-\alpha^2},$$

по теореме дифференцирования изображения, находим:

1. $-t\sin \alpha t \to \left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)'$, $\quad t\sin \alpha t \to \frac{2p\alpha}{(p^2+\alpha^2)^2}$;

2. $-t\cos \alpha t \to \left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)'$, $\quad t\cos \alpha t \to \frac{p^2-\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$;

3. $-t\operatorname{sh} \alpha t \to \left(\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)'$, $\quad t\operatorname{sh} \alpha t \to \frac{2p\alpha}{(p^2-\alpha^2)^2}$;

4. $-t\operatorname{ch} \alpha t \to \left(\frac{p}{p^2-\alpha^2}\right)'$, $\quad t\operatorname{ch} \alpha t \to \frac{p^2+\alpha^2}{(p^2-\alpha^2)^2}$.

*Упражнения.* Найти изображения функций $f(t)$:

56. $t^2\cos \alpha t$. 57. $t^2\sin \alpha t$. 58. $t\sin \alpha t \operatorname{sh} \alpha t$. 59. $t\cos \alpha t \operatorname{ch} \alpha t$.

## § 16. Интегрирование оригинала

**Теорема.** Если $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

*Доказательство.* 1°. Функция $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ удовлетворяет, очевидно, условиям 1) и 2) функции-оригинала, а также и условию 3), так как

$$\left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int_0^t |f(\tau)|\,|d\tau| < \int_0^t Me^{s_0\tau}\,d\tau = \frac{M}{s_0}(e^{s_0t}-1) < M_1e^{s_0t},$$

где $M_1 = \frac{M}{s_0}$. Следовательно, функция $\varphi(t)$ есть оригинал с показателем роста $s_0$.

2° Пусть $\varphi(t) \to \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, тогда по теореме дифференцирования оригинала имеем

$$\varphi'(t) \to p\,\Phi(p), \quad \varphi(0) = 0,$$

так как $\varphi'(t) = f(t)$, то $F(p) = p\Phi(p)$. Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Таким образом,

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}.$$

Пример. Найти изображения функций:

$$S(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{\sqrt{2\pi u}}\,du \text{ — синус-интеграл Френеля}$$

и

$$C(t) = \int_0^t \frac{\cos u}{\sqrt{2\pi u}}\,du \text{ — косинус-интеграл Френеля (рис. 44).}$$

Полагая $u = \tau^2$, получаем

$$S(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \sin\tau^2\,d\tau \quad \text{и} \quad C(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} \cos\tau^2\,d\tau.$$

Отсюда $S(0) = C(0) = 0$ и $S(\infty) = C(\infty) = \frac{1}{2}$, так как

$$\int_0^\infty \sin\tau^2\,d\tau = \int_0^\infty \cos\tau^2\,d\tau = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Из (2.3) и (2.4) по теореме интегрирования оригинала находим

$$S(t) \to \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1} - p}}{2p\sqrt{p^2+1}} \quad \text{и} \quad C(t) \to \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1} + p}}{2p\sqrt{p^2+1}}.$$

## § 17. Интегрирование изображения

**Теорема.** Если $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ и интеграл $\int_p^\infty F(p)\,dp$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то

$$\int_p^\infty F(p)\,dp \to \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

*Доказательство.* В полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0 + \delta$ (рис. 1) интеграл Лапласа $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ сходится равномерно относительно $p$ (§ 2), поэтому в этой полуплоскости его можно интегрировать по параметру $p$, причем за контур интегрирования можно выбрать любой луч, исходящий из точки $p$ и образующий острый угол с вещественной осью. Имеем

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp = \int\limits_p^\infty dp \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt.$$

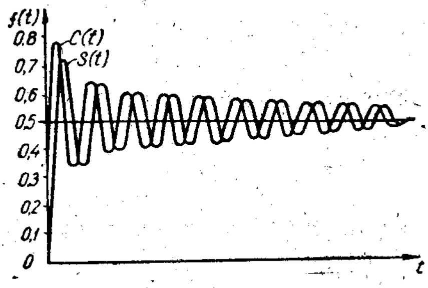


Рис. 44.

Так как по условию интеграл $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp$ сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, то

$$\int\limits_p^\infty dp \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(t)\,dt \int\limits_p^\infty e^{-pt}\,dp = \int\limits_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t}\,dt,$$

или

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp = \int\limits_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Следовательно, функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом с показателем роста $s_1 > s_0$.

Таким образом, интегрирование изображения $F(p)$ сводится в пространстве оригинала к делению на $t$ функции $f(t)$, т.е.

$$\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \to \frac{f(t)}{t}, \quad \operatorname{Re} p > s_1 > s_0.$$

Примеры. Найти изображения функций:

1. $\operatorname{Si}(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$ (интегральный синус, рис. 45).

Из равенства $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, по теореме интегрирования изображения, имеем

$$\frac{\sin t}{t} \to \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arc\,tg} p\,\Big|_p^\infty = \operatorname{arctg}\frac{1}{p}.$$

Отсюда, по теореме интегрирования оригинала, получим

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \to \frac{1}{p}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p}.$$

2. $\operatorname{si}(t) = -\int_t^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ (интегральный синус).

Так как $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{si}(t) = \operatorname{Si}(t) - \frac{\pi}{2}$. Имеем

$$\operatorname{si}(t) \to \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{1}{p} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{p},$$

или

$$\operatorname{si}(t) \to -\frac{1}{p}\operatorname{arctg} p.$$

3. $\operatorname{shi}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sh} u}{u}\,du$ (интегральный гиперболический синус).

Имеем

$$i\operatorname{sh} i(t) = \operatorname{Si}(it) \to \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\frac{i}{p} = \frac{i}{p}\operatorname{Ar\,th}\frac{1}{p},$$

или

$$\operatorname{shi}(t) \to \frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}.$$

*Упражнения.* Найти изображения функций $f(t)$:

60. $\frac{e^{-at}\sin t}{t}$. 61. $\frac{\operatorname{sh}^2 t}{t}$. 62. $\frac{\sin 7t \sin 3t}{t}$. 63. $\frac{\operatorname{ch} at - \operatorname{ch} bt}{t}$.

64. $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$. 65. $\frac{\cos bt - \cos at}{t}$. 66. $\frac{1-\cos t}{t}e^{-t}$.

67. $\frac{1-e^{at}}{te^t}$. 68. $\frac{e^{-at}\sin^2 bt}{t}$.

## § 18. Теорема о предельном переходе по параметру

Если оригинал и его изображение зависят от параметра $\lambda$, $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, т.е. $f(t,\lambda) \to F(p,\lambda)$, и существует предел $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda)$, $\lambda_0$ — промежуточная или замыкающая точка отрезка $[\lambda_1,\lambda_2]$, то

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \to \lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda).$$

*Доказательство.* По условию $F(p,\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t,\lambda)\,dt$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \int_0^\infty e^{-pt} f(t,\lambda)\,dt.$$

В этом равенстве действия предела и интеграла перестановочны, так как несобственный интеграл Лапласа сходится равномерно относительно $p$ и $\lambda$, $\operatorname{Re} p > s_0$ и $\lambda \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda) = \int_0^\infty e^{-pt} \lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda)\,dt,$$

или

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} f(t,\lambda) \to \lim_{\lambda\to\lambda_0} F(p,\lambda).$$

## § 19. Дифференцирование по параметру

**Теорема.** Если оригинал и его изображение зависят от параметра $\lambda$, т. е. $f(t,\lambda) \to F(p,\lambda)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, и существует производная $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda)$ при $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ и $t > 0$, то $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda) \to \frac{\partial}{\partial\lambda} F(p,\lambda)$.

*Доказательство.* Приращению $\Delta\lambda$ параметра $\lambda$ соответствует приращение $\Delta F(p,\lambda)$ функции $F(p,\lambda)$. Найдем отношение приращений $\frac{\Delta F(p,\lambda)}{\Delta\lambda}$. Имеем

$$\frac{F(p,\lambda+\Delta\lambda) - F(p,\lambda)}{\Delta\lambda} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{f(t,\lambda+\Delta\lambda) - f(t,\lambda)}{\Delta\lambda}\,dt.$$

Так как

$$\frac{f(t,\lambda+\Delta\lambda) - f(t,\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda} f(t,\lambda) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t,\lambda,\Delta\lambda) \to 0$ равномерно при $\Delta\lambda \to 0$, то

$$\frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta \lambda} = \int_0^\infty e^{-pt}\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) + \varepsilon\right] dt.$$

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \to 0$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta F(p, \lambda)}{\Delta \lambda} = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) + \lim_{\Delta\lambda \to 0} \int_0^\infty e^{-pt} \varepsilon dt.$$

По теореме о предельном переходе по параметру имеем

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \int_0^\infty e^{-pt} \varepsilon dt = \int_0^\infty e^{-pt} \lim_{\Delta\lambda \to 0} \varepsilon dt = 0, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)\, dt,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \to \frac{\partial}{\partial \lambda} F(p, \lambda).$$

Примеры. 1. Из равенства

$$\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2} \to \sin \lambda t,$$

пользуясь дифференцированием по параметру, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\lambda}{p^2 + \lambda^2}\right) \to \frac{\partial}{\partial \lambda} \sin \lambda t,$$

или

$$\frac{p^2 + \lambda^2 - 2\lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \to t \cos \lambda t.$$

Отсюда

$$\frac{1}{p^2 + \lambda^2} - \frac{2\lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \to t \cos \lambda t.$$

Так как

$$\frac{1}{p^2 + \lambda^2} \to \frac{\sin \lambda t}{\lambda},$$

то по свойству линейности имеем

$$\frac{2\lambda^2}{(p^2 + \lambda^2)^2} \to \frac{\sin \lambda t}{\lambda} - t \cos \lambda t.$$

или

$$\frac{2\lambda^3}{(p^2+\lambda^2)^2} \to \sin\lambda t - \lambda t\cos\lambda t. \tag{2.5}$$

2. Дифференцируя по параметру $\lambda$ равенство

$$\cos\lambda t \to \frac{p}{p^2+\lambda^2},$$

получаем

$$\frac{t\sin\lambda t}{2\lambda} \to \frac{p}{(p^2+\lambda^2)^2}. \tag{2.6}$$

3. Найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{2p+3}{(p^2+4p+8)^2}.$$

Имеем

$$F(p) = \frac{2(p+2)}{[(p+2)^2+2^2]^2} - \frac{1}{[(p+2)^2+2^2]^2}.$$

Из равенства (2.6) при $\lambda = 2$ находим

$$\frac{2p}{(p^2+2^2)^2} \to \frac{t\sin 2t}{2}.$$

По свойству смещения имеем

$$\frac{2(p+2)}{[(p+2)^2+2^2]^2} \to e^{-2t}\frac{t\sin 2t}{2}.$$

Пользуясь равенством (2.5) при $\lambda = 2$, получаем

$$\frac{1}{[p^2+2^2]^2} \to \frac{\sin 2t - 2t\cos 2t}{2\cdot 2^3}.$$

Тогда по свойству смещения

$$\frac{1}{[(p+2)^2+2^2]^2} \to e^{-2t}\frac{\sin 2t - 2t\cos 2t}{16}.$$

Итак,

$$F(p) \to e^{-2t}\frac{t\sin 2t}{2} + e^{-2t}\frac{2t\cos 2t - \sin 2t}{16},$$

или

$$F(p) \to \frac{e^{-2t}}{16}[(8t-1)\sin 2t + 2t\cos 2t].$$

4. Найдем изображение функции $\ln t$. Дифференцируя по параметру $\alpha$ обе части равенства (1.13)

$$t^{\alpha} \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1,$$

получаем

$$t^{\alpha} \ln t \to \frac{1}{pp^{\alpha}} [\Gamma'(\alpha+1) - \ln p\, \Gamma(\alpha+1)].$$

Отсюда при $\alpha = 0$, $\Gamma'(1) = -C$ согласно (1.12), имеем

$$\ln t \to \frac{-C - \ln p}{p},$$

или

$$\ln t \to -\frac{1}{p} \ln(\gamma p), \tag{2.7}$$

так как $e^C = \gamma$.

Пользуясь теоремой дифференцирования по параметру, можно получить из известных операционных равенств новые операционные равенства. Кроме того, этой теоремой пользуются в операционном исчислении при решении линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

## § 20. Интегрирование по параметру

**Теорема.** Если оригинал и изображение зависят от параметра $\lambda$, т. е.

$$f(t, \lambda) \to F(p, \lambda),$$

и существуют интегралы

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda)\, d\lambda \quad \text{и} \quad \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda)\, d\lambda,$$

то

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda)\, d\lambda \to \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda)\, d\lambda. \tag{2.8}$$

*Доказательство.* Для конечной величины $A \geqslant 0$ справедливо равенство

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_{0}^{A} e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt = \int_{0}^{A} dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t, \lambda)\, d\lambda. \tag{2.9}$$

По условию предел

$$\lim_{A \to \infty} \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_{0}^{A} e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt$$

существует, поэтому существует и предел справа в равенстве (2.9) при $A \to \infty$, т. е.

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t, \lambda)\, d\lambda = \int_0^{\infty} dt \int_{\lambda_0}^{\lambda} e^{-pt} f(t, \lambda)\, d\lambda.$$

Интегрируя равенство $F(p, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t,\lambda)\, dt$ по $\lambda$ в пределах от $\lambda_0$ до $\lambda$, найдем

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda)\, d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left[ \int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda)\, d\lambda \right] dt,$$

или

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda)\, d\lambda \to \int_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda)\, d\lambda.$$

Частный случай зависимости оригинала и изображения от параметра мы имеем по теореме подобия

$$\frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \to F(\alpha p).$$

Интегрируя по $\alpha$ от 0 до 1, получаем

$$\int_0^1 \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{t}{\alpha}\right) d\alpha \to \int_0^1 F(\alpha p)\, d\alpha.$$

Заменим $\frac{t}{\alpha} = u$ и $\alpha p = q$. Находим

$$\int_t^{\infty} \frac{f(u)}{u}\, du \to \frac{1}{p} \int_0^p F(q)\, dq. \qquad (2.10)$$

По теореме интегрирования изображения имеем

$$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^{\infty} F(q)\, dq.$$

Отсюда по теореме интегрирования оригинала получаем

$$\int_0^t \frac{f(u)}{u}\, du \to \frac{1}{p} \int_p^{\infty} F(q)\, dq. \qquad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) по свойству лине ности находим

$$\int^{\infty} \frac{f(u)}{u}\,du \cdot 1 \to \frac{1}{p}\int_0^{\infty} F(q)\,dq,$$

а по свойству однородности имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_0^{\infty} F(q)\,dq. \quad (2.12)$$

По теореме дифференцирования изображения

$$t^{n+1} f(t) \to (-1)^{n+1} F^{(n+1)}(p).$$

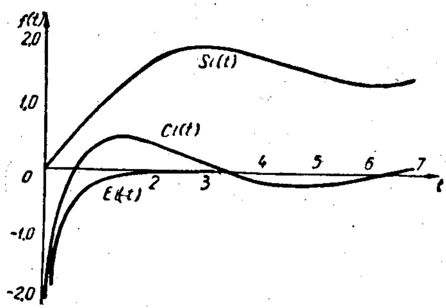


Рис. 45.

Тогда по формуле (2.12)

$$\int_0^{\infty} u^n f(u)\,du = (-1)^{n+1}\int_0^{\infty} F^{(n+1)}(p)\,dp = (-1)^{n+1}\frac{d^n}{dp^n}[F^n(p)]\Big|_0^{\infty}. \quad (2.13)$$

Примеры. Найти изображения функций:

1. $\operatorname{ci}(t) = \int_0^t \frac{\cos u}{u}\,du + c_1$; постоянную интегрирования определим из условия $\operatorname{ci}(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + c_1$. Отсюда $c_1 = -\int_0^{\infty}\frac{\cos u}{u}\,du$

тогда $\operatorname{ci}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ (интегральный косинус, рис. 45).

По формуле (2.12)

$$-\int_t^{\infty} \frac{\cos u}{u}\,du \to -\frac{1}{p}\int_0^{p} \frac{q}{q^2+1}\,dq = -\frac{1}{2p}\ln(p^2+1),$$

или

$$\operatorname{ci}(t) \to \frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

2. $\operatorname{Ci}(t) = \int_0^t \frac{\cos u}{u}\,du + c_1$ (интегральный косинус);

постоянную интегрирования $c_1$ функции $\operatorname{Ci}(t)$ определим таким образом, чтобы ее изображение имело простой вид.

Имеем

$$\operatorname{Ci}(t)=\int_0^t \frac{\cos u-1}{u}\,du+c_1+\ln t.$$

По теореме интегрирования изображения и оригинала получаем

$$\frac{\cos t-1}{t}\to\int_p^\infty\left(\frac{q}{q^2-1}-\frac{1}{q}\right)dq=\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$$

и

$$\int_0^t \frac{\cos u-1}{u}\,du\to\frac{1}{p}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Следовательно, пользуясь (2.12). находим

$$\operatorname{Ci}(t)\to\frac{1}{p}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{c_1}{p}-\frac{C+\ln p}{p}=\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{c_1-C}{p}.$$

Если постоянная интегрирования равна постоянной Эйлера, т. е. $c_1=C\ln\gamma$, тогда $\operatorname{Ci}(t)=\ln(\gamma t)+\int_0^t \frac{\cos u-1}{u}\,du$ и ее изображение будет

$$\operatorname{Ci}(t)\to\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Аналогично находим изображение интегрального гиперболического косинуса

$$\operatorname{chi}(t)=\ln(\gamma t)+\int_0^t \frac{\operatorname{ch}u-1}{u}\,du\to\frac{1}{p}\ln\frac{1}{\sqrt{p^2-1}}.$$

3. $\operatorname{Ei}(-t)=-\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$ (интегральная показательная функция, рис. 45). По формуле (2.10)

$$\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\to\frac{1}{p}\int_0^p\frac{dq}{q+1},$$

или

$$\mathrm{Ei}(-t) \to -\frac{1}{p}\ln(p+1).$$

Аналогично

$$\mathrm{Ei}(t) = -\int_t^{\infty} \frac{e^u}{u}\,du \to -\frac{1}{p}\ln(p-1).$$

Так как интегральный логарифм

$$\mathrm{li}(e^t) = \ln(\gamma t) + \int_0^t \frac{e^u - 1}{u}\,du = -\int_t^{\infty} \frac{e^u}{u}\,du = \mathrm{Ei}(t),$$

то

$$\mathrm{li}(e^t) \to -\frac{1}{p}\ln(p-1).$$

Аналогично

$$\mathrm{li}(e^{-t}) \to -\frac{1}{p}\ln(p+1).$$

4. Из равенства $\frac{1}{p-\lambda} \to e^{\lambda t}$, согласно (2.8) при $\lambda_0 = 0$, имеем

$$\int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{p-\lambda} \to \int_0^{\lambda} e^{\lambda t}\,d\lambda.$$

Интегрируя по параметру $\lambda$, получаем новое операционное равенство

$$\ln\frac{p}{p-\lambda} \to \frac{e^{\lambda t}-1}{t}.$$

## § 21. Предельные теоремы

**Теорема 1.** Если $f(t) \to F(p)$, $\mathrm{Re}\,p > s_0$, $f'(t)$ есть функция оригинал и существует $\lim\limits_{t \to 0+0} f(t) = f(0)$, то

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = \lim_{t \to 0+0} f(t). \tag{2.14}$$

*Доказательство.* Так как $f'(t)$ — оригинал, то $f'(t) \to pF(p) - f(0)$. По необходимому признаку существования изображения имеем

$$\lim_{p \to \infty}[pF(p) - f(0)] = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{p \to \infty} pF(p) = \lim_{t \to 0+0} f(t).$$

Таким образом, начальное значение оригинала $f(0)$ можно найти по его изображению $F(p)$ из равенства

$$f(0) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

**Теорема 2.** Если $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, $f'(t)$ — функция-оригинал и существует $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

*Доказательство.* Так как функция $f'(t)$ — оригинал, то

$$f'(t) \to pF(p) - f(0),$$

или

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = pF(p) - f(0).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $p \to 0$. Имеем

$$\lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0).$$

Подынтегральная функция интеграла Лапласа удовлетворяет условиям теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, следовательно,

$$\lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt = \int_0^\infty \lim_{p\to 0} e^{-pt} f'(t)\,dt = \int_0^\infty f'(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f'(t)\,dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty} f(t)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} [f(t) - f(0)] = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),$$

или

$$\lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0).$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0),$$

или

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = \lim_{t\to\infty} f(t).$$

Итак, для непериодических процессов установившееся значение оригинала $f(\infty)$ можно найти по его изображению при помощи предельного соотношения

$$f(\infty) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

## § 22. Свертка функций

Сверткой непрерывных функций $\varphi(t)$ и $f(t)$ действительного переменного $0 \leqslant t < \infty$ (обозначается $\varphi(t) * f(t)$) называется интеграл

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\, dt. \tag{2.15}$$

Свертка есть действие, которое паре функций из некоторого множества ставит в соответствие определенную функцию из этого множества. Действие получения свертки называется свертыванием функций.

Пример. Найти свертку функций $\varphi(t) = t$ и $f(t) = e^t$. Имеем

$$t * e^t = \int_0^t e^\tau (t-\tau)\, d\tau = t \int_0^t e^\tau d\tau - \int_0^t \tau e^\tau d\tau =$$

$$= (te^\tau - e^\tau \tau + e^\tau)\Big|_0^t = e^t - t - 1.$$

Итак,

$$t * e^t = e^t - t - 1.$$

## § 23. Свойства свертки

1. Коммутативность $\varphi * f = f * \varphi$. Полагая в равенстве (2.15) $t - \tau = u$, получаем

$$\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = -\int_t^0 \varphi(u) f(t-u)\, du = \int_0^t f(t-u)\varphi(u)\, du,$$

или

$$\varphi * f = f * \varphi.$$

2. Ассоциативность $(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi)$. Обозначим

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = g(t)$$

и

$$f * \psi = \int_0^t f(t-\tau)\psi(\tau)\, dt = h(t).$$

Тогда

$$g * \psi = \varphi * h,$$

или

$$\int_0^t g(t-\tau)\psi(\tau)\, d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) h(\tau)\, d\tau.$$

Полагая $\sigma + \tau = \omega$, $\tau \leqslant \omega \leqslant t$, найдем

$$\int_0^t g(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau = \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} \varphi(t-\tau-\sigma) f(\sigma)\,d\sigma\right]\psi(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \left[\int_\tau^t \varphi(t-\omega) f(\omega-\tau)\,d\omega\right]\psi(\tau)\,d\tau = \iint_D \varphi(t-\omega) f(\omega-\tau)\psi(\tau)\,d\tau d\omega.$$

Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле по области $D$: $0 \leqslant \tau \leqslant \omega \leqslant t$ (рис. 46), получаем

$$\iint_D \varphi(t-\omega) f(\omega-\tau)\psi(\tau)\,d\tau d\omega = \int_0^t \varphi(t-\omega)\,d\omega \int_0^\omega f(\omega-\tau)\psi(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \varphi(t-\omega) h(\omega)\,d\omega.$$

Следовательно,

$$\int_0^t g(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) h(\tau)\,d\tau,$$

или

$$(\varphi * f) * \psi = \varphi * (f * \psi).$$

Таким образом, вычисление свертки трех или большего числа функций не зависит от способа их сочетания.

3. Дистрибутивность относительно сложения

$$\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi.$$

По определению свертки имеем

$$\varphi * (f + \psi) = \int_0^t \varphi(t-\tau)[f(\tau) + \psi(\tau)]\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\,d\tau + \int_0^t \varphi(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau = \varphi * f + \varphi * \psi.$$

Таким образом,

$$\varphi * (f + \psi) = \varphi * f + \varphi * \psi.$$

4. Абсолютная величина свертки. Имеем

$$\left|\int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \int_0^t |\varphi(t-\tau)|\,|f(\tau)|\,d\tau.$$

Итак,

$$|\varphi * f| \leqslant |\varphi| * |f|.$$

Следующие свойства 5 и 6 приведем без доказательства.

5. Если $\varphi(t)$ и $f(t)$ непрерывные функции в области $0 \leqslant t < \infty$, то и их свертка $\varphi * f$ является тоже непрерывной функцией в этой области.

6. Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывные при $t \geqslant 0$ и их свертка $f * \varphi = 0$ для всех $t \geqslant 0$, то по крайней мере одна из этих функций в области $0 \leqslant t < \infty$ всюду равна нулю (теорема Титчмарша).

*Упражнения.* Найти свертки:

69. $\sin t * \operatorname{sh} t$. 70. $\sqrt{1+t} * 1$.

71. $e^{\alpha t} * (1 - \alpha t)$. 72. $t^2 * t^3$.

73. $e^t * e^t$. 74. $\cos^2 t * t + t * \sin^2 t$.

75. $(1 - \sqrt{t}) * \sin t + (1 + \sqrt{t}) * \cos t + (1 - \sqrt{t}) * \cos t + (1 + \sqrt{t}) * \sin t$.

76. $\cos t * \cos t$.

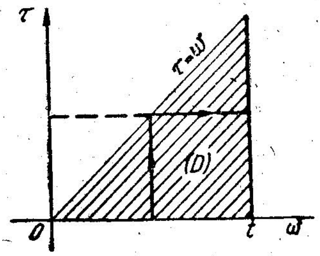


Рис. 46.

## § 24. Свертка оригиналов

**Теорема.** Если функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ — оригиналы, то свертка $f * \varphi$ есть тоже функция-оригинал.

*Доказательство.* Для функции $f * \varphi = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)\,d\tau$ условия 1) и 2) определения оригинала, очевидно, выполняются. Докажем, что функция $f * \varphi$ удовлетворяет и условию 3) функции-оригинала.

Так как

$$|f(t)| < M_0 e^{s_0 t} \text{ и } |\varphi(t)| < M_1 e^{s_1 t},$$

то

$$|f * \varphi| \leqslant \int_0^t |f(\tau)|\,|\varphi(t-\tau)|\,d\tau < \int_0^t M_0 e^{s_0\tau} M_1 e^{s_1(t-\tau)} d\tau.$$

Обозначим $M_0 M_1 = M_2$ и пусть $s_0 > s_1$, тогда

$$|f * \varphi| < M_2 \int_0^t e^{s_0\tau} e^{s_0(t-\tau)} d\tau = M_2 t e^{-\alpha t} e^{(s_0+\alpha)t},$$

где $\alpha > 0$ и сколь угодно мало.

Функция $M_2te^{-\alpha t}$ на полуинтервале $0 \leqslant t < \infty$ имеет единственный максимум $M > 0$, поэтому для $t > 0$ $M_2te^{-\alpha t} \leqslant M$ Тогда $|f*\varphi| < Me^{(s_1+\alpha)t}$, или $|f*\varphi| < Me^{s_0t}$, так как $s_0$ — точная нижняя граница чисел $s_0 + \alpha$, обладающих этим свойством. Следовательно, условие 3) для функции $f(t)*\varphi(t)$ выполняется.

Итак, свертка $f*\varphi$ является оригиналом с показателем роста $s_0$ при $s_0 > s_1$.

## § 25. Теорема умножения (теорема Э. Бореля).

Если $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ и $\varphi(t) \to \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_1$, то $f*\varphi \to F(p)\cdot\Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$ при $s_0 > s_1$.

*Доказательство.* Имеем

$$f*\varphi \to \int_0^\infty e^{-pt}(f*\varphi)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

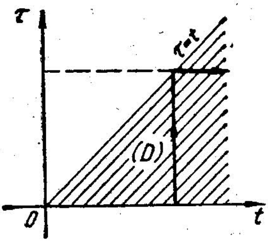


Рис. 47.

В этом равенстве двухкратный интеграл по области $D: 0 \leqslant t < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ (рис. 47) сходится абсолютно, так как изображение оригинала $f*\varphi$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. Поэтому в двухкратном интеграле можно изменить порядок интегрирования ($0 \leqslant \tau < \infty$, $\tau \leqslant t < \infty$), т. е.

$$f*\varphi \to \int_0^\infty \varphi(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)\,dt.$$

Полагая $t - \tau = u$, получим

$$f*\varphi \to \int_0^\infty e^{-p\tau}\varphi(\tau)\,d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\,du = F(p)\,\Phi(p).$$

Следовательно,

$$f*\varphi \to E(p)\,\Phi(p).$$

Свертыванию в пространстве оригинала соответствует умножение функций в пространстве изображения.

Примеры. Найти изображение функций:

1. $f(t) = \cos t C(t) + \sin t S(t)$.

Имеем

$$f(t) = \cos t \int_0^t \frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau + \sin t \int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \cos(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau = \cos t * \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Следовательно, по теореме умножения,

$$f(t) \to \frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

2. $f(t) = \sin t C(t) - S(t)\cos t$.
Имеем

$$f(t) = \sin t\int_0^t \frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau - \cos t\int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \sin(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau = \sin t * \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Итак,

$$f(t) \to \frac{1}{\sqrt{2p}}\,\frac{1}{1+p^2}.$$

3. Найдем свертку $t^\alpha * t^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Изображения для $t^\alpha$ и $t^\beta$ равны

$$\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \to \frac{1}{p^{\alpha+1}} \quad \text{и} \quad \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \to \frac{1}{p^{\beta+1}}.$$

По теореме умножения имеем

$$\frac{1}{p^{\alpha+1}}\cdot\frac{1}{p^{\beta+1}} \to \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} * \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

или

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \to \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\,t^\alpha * t^\beta.$$

Так как

$$\frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \to \frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

то

$$\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\,t^\alpha * t^\beta.$$

Отсюда

$$t^\alpha * t^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,t^{\alpha+\beta+1},$$

или

$$\int_0^t \tau^\alpha (t-\tau)^\beta d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} t^{\alpha+\beta+1}.$$

Подставляя $\tau = tx$ в левую часть этого равенства, получаем

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)},$$

или

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Интеграл $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$ при $\alpha>0$ и $\beta>0$ (обозначается $B(\alpha,\beta)$) называется бета-функцией, т. е.

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Тогда

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \text{и} \quad B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha).$$

4. Докажем формулу $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, $0<\alpha<1$.

Имеем

$$t^{\alpha-1} \to \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha} \quad \text{и} \quad t^{-\alpha} \to \frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}.$$

Тогда

$$t^{\alpha-1} * t^{-\alpha} \to \frac{1}{p}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

или

$$\frac{1}{p}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \to \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau^\alpha} = \int_0^t \left(\frac{t}{\tau}-1\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Отсюда

$$\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}-1\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau} = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha),$$

так как $1 \to \dfrac{1}{p}$. Полагая $\tau = \dfrac{t}{u+1}$, получаем

$$\int_0^t \left(\frac{t}{\tau}-1\right)^{\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}=\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du.$$

Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{(-z)^{\alpha-1}}{z+1}$, которая при $0<\alpha<1$ многозначна, так как

$$(-z)^{\alpha-1}=e^{(\alpha-1)\,[\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,(-z)]}=|z|^{\alpha-1}e^{(\alpha-1)\,i\,\mathrm{Arg}\,(-z)}.$$

Если осуществим разрез на положительной части действительной оси, то функция $(-z)^{\alpha-1}$ будет однозначной; рассмотрим ту ее

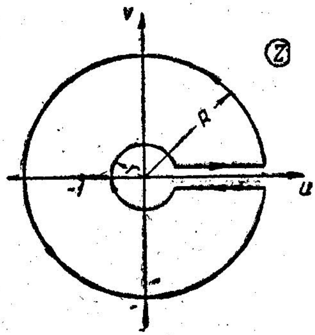


Рис. 48.

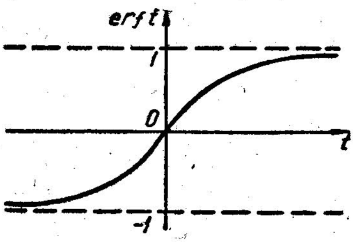


Рис. 49.

ветвь, которая на верхнем крае разреза равна $|z|^{\alpha-1}e^{-i\pi(\alpha-1)}$, тогда $(-z)^{\alpha-1}$ на нижнем крае разреза будет $|z|^{\alpha-1}e^{i\pi(\alpha-1)}$. Функция $f(z)$ на контуре Г (рис. 48), $r<1$ и $R>1$) однозначная, а внутри контура имеет полюс $z=-1$, причем $f(z)\to 0$, когда $|z|\to\infty$ и $|z|\to 0$. Тогда по теореме Коши

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}e^{-i\pi(\alpha-1)}}{u+1}\,du+\int_\infty^0 \frac{u^{\alpha-1}e^{i\pi(\alpha-1)}}{u+1}\,du=2\pi i\,\mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=-1},$$

или

$$\left(e^{-i\pi(\alpha-1)}-e^{i\pi(\alpha-1)}\right)\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du=2\pi i.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{u+1}\,du=\frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}. \tag{2.16}$$

**Интеграл вероятности.** Функция

$$\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$$

называется интегралом вероятности. Ряд $e^{-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}$ сходится равномерно, поэтому

$$\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}.$$

Этот ряд сходится при всех конечных значениях $t$. $\operatorname{erf} t$ — нечетная, непрерывная возрастающая функция $\left(\frac{d}{dt}\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}>0\right)$ на интервале $(-\infty,\infty)$, $\operatorname{erf}(-t)=-\operatorname{erf} t$, $\operatorname{erf}(0)=0$, $\operatorname{erf}(\infty)=$ $=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1$ (рис. 49).

При больших значениях аргумента $t$ интеграла вероятности рассматривают функцию

$$\operatorname{Erf} t=1-\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

или

$$\operatorname{Erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}e^{-t^2}dt.$$

$\operatorname{Erf} t$ — непрерывная убывающая функция на $[0,\infty]$.

Примеры. Найти изображения:

1. $f(t)=\operatorname{erf}(\sqrt{t})$.

Из равенств $e^t\to\frac{1}{p-1}$ и $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\to\frac{1}{\sqrt{p}}$, пользуясь теоремой умножения, находим

$$\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}\to\int_0^t e^{t-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}}=\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau}d(\sqrt{\tau})=\frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}e^{-u^2}du,$$

или

$$\frac{1}{(p-1)\sqrt{p}} \to e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}).$$

Отсюда по теореме смещения

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) \to \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

2. $f(t) = \operatorname{Erf}(\sqrt{t})$.
Имеем

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) = 1 - \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \to \frac{1}{p} - \frac{1}{p\sqrt{p+1}},$$

или

$$\operatorname{Erf}(\sqrt{t}) \to \frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}.$$

3. $f(t) = e^{-t^2}$.
Имеем

$$e^{-t^2} \to \int_0^\infty e^{-pt}e^{-t^2}dt = e^{\frac{p^2}{4}}\int_0^\infty e^{-\left(t+\frac{p}{2}\right)^2}dt,$$

заменяя $t+\frac{p}{2}=\tau$, получаем

$$e^{-t^2} \to e^{\frac{p^2}{4}}\int_{\frac{p}{2}}^\infty e^{-\tau^2}d\tau,$$

или

$$e^{-t^2} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right). \tag{2.17}$$

4. $f(t) = \operatorname{erf} t$.
Из равенства (2.17) по теореме интегрирования оригинала имеем

$$\int_0^t e^{-t^2}dt \to \frac{1}{p}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{p^2}{4}}\operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right),$$

или

$$\operatorname{erf} t \to \frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{4}}\operatorname{Erf}\left(\frac{p}{2}\right).$$

*Упражнения*. Пользуясь теоремой умножения, найти оригиналы для функций $F(p)$:

77. $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$. 78. $\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$.

79. $\frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$.  80. $\frac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)}$.

81. $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$.  82. $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$.  83. $\frac{1}{p^3(p-1)}$.

## § 26. Обобщенная теорема умножения (теорема А. М. Эфроса)

Если $f(t)\to F(p)$ и $\varphi(t,\tau)\to\Phi(p)e^{-\tau q(p)}$, где $\Phi(p)$ и $q(p)$ — аналитические функции, то

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau\to\Phi(p)F[q(p)].$$

*Доказательство.* По определению изображения

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau\to\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau\right]dt.$$

В правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования, так как несобственный интеграл $\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau$, как функция-оригинал, существует.

Имеем

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau\to\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t,\tau)\,dt,$$

по условию

$$\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t,\tau)\,dt=\Phi(p)e^{-\tau q(p)},$$

тогда

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau\to\Phi(p)\int_0^\infty e^{-\tau q(p)}f(\tau)\,d\tau,$$

или

$$\int_0^\infty f(\tau)\varphi(t,\tau)\,d\tau\to\Phi(p)F[q(p)],$$

так как

$$\int_0^\infty e^{-\tau q(p)}f(\tau)\,d\tau=F[q(p)].$$

В частности, при $q(p) = p$

$$\varphi(t, \tau) \to \Phi(p) e^{-\tau p}$$

и по теореме запаздывания

$$\varphi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi(t-\tau), & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_0^\infty f(\tau) \varphi(t, \tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau)\, d\tau,$$

так как

$$\int_t^\infty f(\tau) \varphi(t-\tau)\, d\tau = 0.$$

Таким образом, получаем теорему умножения

$$\int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau)\, d\tau \to \Phi(p) F(p).$$

## § 27. Интеграл Дюамеля

**Теорема.** Если

$$f*\varphi = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau)\, d\tau \to F(p) \Phi(p),$$

то

$$\int_0^t f(\tau) \varphi'_t(t-\tau)\, d\tau + f(t) \varphi(0) \to pF(p) \Phi(p), \tag{2.18}$$

или

$$\int_0^t \varphi(\tau) f'_t(t-\tau)\, d\tau + \varphi(t) f(0) \to pF(p) \Phi(p).$$

*Доказательство.* По свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau)\, d\tau \to pF(p) \Phi(p),$$

или

$$\frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\tau) f(t-\tau)\, d\tau \to pF(p) \Phi(p),$$

так как $f*\varphi = \varphi*f$.

Из анализа известно, что если для интеграла $\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(t, \tau)\, d\tau$, зависящего от параметра $t$, выполняются условия: 1) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\alpha'(t)$, $\beta'(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[t_0, t_1]$; 2) $\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t}$ — непрерывная функция в области, ограниченной линиями $t = t_0$, $t = t_1$ и $\tau = \alpha(t)$, $\tau = \beta(t)$, то производная по параметру $t_0 < t < t_1$ от интеграла равна

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F(t, \tau)\, d\tau = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t}\, dt + F[t, \beta(t)]\,\beta'(t) - F[t, \alpha(t)]\,\alpha'(t). \qquad (2.19)$$

Пользуясь формулой (2.19), получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t f(\tau)\,\varphi(t-\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\, d\tau + f(t)\,\varphi(0) \to pF(p)\,\Phi(p).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\, d\tau + f(t)\,\varphi(0) \to pF(p)\,\Phi(p),$$

или

$$\int\limits_0^t \varphi(\tau)\, f'(t-\tau)\, d\tau + \varphi(t)\, f(0) \to pF(p)\,\Phi(p).$$

Эти выражения впервые (1853) применил Дюамель в динамике, их называют интегралами Дюамеля.

Итак, если одна из функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируема, а другая непрерывна, то свертка $f*\varphi$ этих функций дифференцируема.

Пример. Пользуясь интегралом Дюамеля, найти оригинал для функции

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)}.$$

Имеем

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} = p\frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

Положим

$$F(p) = \frac{1}{p^4} \to \frac{t^3}{6} = f(t) \quad \text{и} \quad \Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \to \sin t = \varphi(t).$$

По формуле (2.18)

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \to \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \sin\tau d\tau.$$

Дважды интегрируя по частям последний интеграл, находим

$$\frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}[(t-\tau)^2(-\cos\tau) -$$

$$-2(t-\tau)\sin\tau + 2\cos\tau]\Big|_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \to \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

## § 28. Изображения цилиндрических функций

**Цилиндрические функции.** Функции $J_\nu(t)$, $\nu$ — порядок функции, которые являются решением цилиндрического (бесселевого) уравнения

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2-\nu^2)x(t) = 0, \tag{2.20}$$

называются цилиндрическими (бесселевыми) 1-го рода $\nu$-го порядка.

Функцию $J_\nu(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.20), будем искать в виде ряда $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k}$, $\nu$ — действительное число. Имеем

$$tx'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)a_k t^{\nu+k},$$

$$t^2x''(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)(\nu+k-1)a_k t^{\nu+k},$$

$$(t^2-\nu^2)x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2}t^{\nu+k} - \nu^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\nu+k}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.20), получаем тождество

$$(2\nu+1)a_1 t^{\nu+1} + \sum_{k=2}^{\infty}[k(2\nu+k)a_k + a_{k-2}]t^{\nu+k} \equiv 0.$$

Приравняв в этом тождестве нулю коэффициенты при различных степенях $t$, получим для определения $a_k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ систему уравнений

$$\begin{cases} (2\nu + 1)\,a_1 = 0, \\ k(2\nu + k)\,a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$

которая приводится к двум системам:

$$1)\quad \begin{cases} (2\nu + 1)\,a_1 = 0, \\ (2k + 1)\,[2\nu + (2k + 1)]\,a_{2k+1} + a_{2k-1} = 0 \end{cases}$$

и

$$2)\quad 2k(2\nu + 2k)\,a_{2k} + a_{2k-2} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Система 1) удовлетворяется при $a_1 = 0,\ a_3 = 0, \dots, a_{2k+1} = 0, \dots$ В системе 2) $a_0$ можно взять произвольно. Полагая $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}$ и пользуясь формулой (1.8), находим

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(\nu + 1)} = -\frac{1}{2^{2+\nu}\Gamma(\nu + 2)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 2(\nu + 2)} = (-1)^2\frac{1}{2^{4+\nu}2!\,\Gamma(\nu + 3)},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$a_{2k} = (-1)^k\frac{1}{2^{2k+\nu}k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}.$$

По признаку Даламбера можно показать, что этот ряд сходится для всех $t > 0$. Поэтому непрерывная функция $x(t)$ является решением уравнения (2.20) в области $0 < t < \infty$ или в области $-\infty < t < \infty$, если $\nu$ — целое число. Следовательно, функция

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \tag{2.21}$$

называется цилиндрической (бесселевой) функцией 1-го рода $\nu$-го порядка.

Если $\nu = n$ — натуральное число, то

$$J_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{k!\,(n+k)!}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{2.22}$$

Если в (2.22) вместо $t$ подставим $it$, получим цилиндрические функции мнимого аргумента

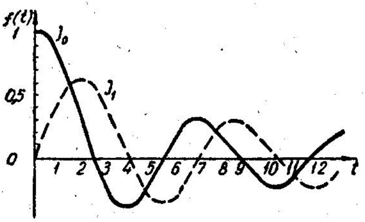


Рис. 50.

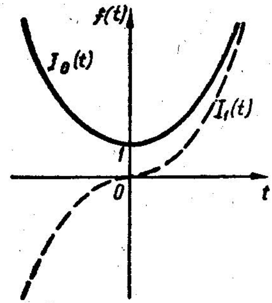


Рис. 51.

$$I_n(t) = (-i)^n J_n(it) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}.$$

В частности,

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \quad \text{и} \quad J_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(1+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{1+2k},$$

$J_0(0) = I_0(0) = 1$ и $J_n = 0$, $I_n(0) = 0$ при $n \geqslant 1$ (рис. 50, 51).

В (2.22) вместо $t$ подставим $i\sqrt{i}t$ и отделим действительную и мнимую части, которые называются функциями Томсона $n$-го порядка и обозначаются

$$\mathrm{ber}_n(t) = \mathrm{Re}\,[J_n(i\sqrt{i}t)] \quad \text{и} \quad \mathrm{bei}_n(t) = \mathrm{Im}\,[J_n(i\sqrt{i}t)]$$

(ber — Bessel realis Бесселя действительные; bei — Bessel imaginarius Бесселя мнимые).

Следовательно,

$$J_n(i\sqrt{i}t) = \mathrm{ber}_n(t) + i\,\mathrm{bei}_n(t). \tag{2.23}$$

Функции Томсона нулевого порядка (рис. 52) имеют вид

$$\mathrm{ber}_0(t) = \mathrm{ber}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2} \quad \text{и}$$

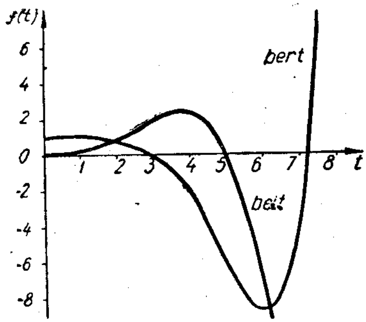


Рис. 52.

$$\mathrm{bei}_0(t) = \mathrm{bei}(t) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{4k+2}}{2^{4k+1}[(2k+1)!]^2}. \qquad (2.24)$$

Из (2.21) при $\nu = -n$, имея в виду, что

$$\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

получим

$$J_{-n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{-n+2k}}{k!\,\Gamma(-n+k+1)}.$$

Полагая $k = l + n$, имеем

$$J_{-n}(t) = (-1)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2l}}{(l+n)!\,l!} = (-1)^n J_n(t).$$

Таким образом,

$$J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t). \qquad (2.25)$$

Рекуррентная формула цилиндрических функций имеет вид

$$J_{\nu+1}(t) = J_{\nu-1}(t) - 2J'_\nu(t). \qquad (2.26)$$

Из (2.25) при $\nu = 0$ имеем

$$J_1(t) = J_{-1}(t) - 2J'_0(t),$$

или

$$J_1(t) = -J'_0(t), \qquad (2.27)$$

так как по формуле (2.25) $J_{-1} = -J_1$.

**Изображение функции** $J_n(t)$. Найдем оценку $J_\nu(t)$ для $t > 0$ и $\nu \geqslant 0$. Имеем

$$|J_\nu(t)| < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} < t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Обозначим $\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} = a_k$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{t^2}{4(k+1)^2} < \frac{t^2}{(2k+2)(2k+1)}.$$

Отсюда

$$a_1 < a_0\frac{t^2}{2\cdot 1}, \quad a_2 < a_1\frac{t^2}{4\cdot 3} < a_0\frac{t^2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, \ldots, a_k < \frac{t^{2k}}{(2k)!}; \quad a_0 = 1,$$

поэтому

$$|J_\nu(t)| < t^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = t^\nu e^t.$$

Из полученной оценки следует, что при $t > 0$ непрерывная цилиндрическая функция $J_\nu(t)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ является оригиналом.

По определению функция $J_0(t)$ удовлетворяет уравнению (2.20) при $\nu = 0$. Имеем

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) = 0.$$

Обозначим $J_0(t) \to \bar{J}_0(p)$. Тогда по теореме дифференцирования оригинала

$$J_0'(t) \to p\bar{J}_0(p) - 1, \quad J_0(0) = 1 \quad \text{и} \quad J_0''(t) \to p^2\bar{J}_0(p) - p,$$

$$J_0'(0) = 0.$$

По теореме дифференцирования изображения

$$tJ_0(t) \to -\bar{J}_0'(p) \quad \text{и} \quad tJ_0''(t) \to -2p\bar{J}_0(p) - p^2\bar{J}_0'(p) + 1.$$

Следовательно,

$$tJ_0''(t) + J_0'(t) + tJ_0(t) \to -(p^2+1)\bar{J}_0'(p) - p\bar{J}_0(p),$$

или

$$(p^2+1)\bar{J}_0'(p) + p\bar{J}_0(0) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\bar{J}_0'(p)}{\bar{J}_0(p)} = -\frac{p}{p^2+1}.$$

Интегрируя, получаем $\ln \bar{J}_0(p) = -\frac{1}{2}\ln(p^2+1) + c_1,$

или

$$\bar{J}_0(p) = \frac{c_1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Пользуясь формулой (2.14), определим $c_1$. Имеем

$$\lim_{p\to\infty} p\frac{c_1}{\sqrt{p^2+1}} = \lim_{t\to 0} J_0(t).$$

Отсюда $c_1 = J_0(0) = 1$. Итак,

$$J_0(t) \to \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Из формулы (2.27) по свойству дифференцирования оригинала находим

$$J_1(t) = -J_0'(t) \to -p\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + J_0(0), \quad J_0(0) = 1,$$

или

$$J_1(t) \to \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

По формуле (2.26) при $\nu = 1$ имеем

$$J_2(t) = J_0(t) - 2J_1'(t) \to \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} - 2p\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}},$$

или

$$J_2(t) \to \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^2}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Методом индукции докажем, что

$$J_n(t) \to \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.28}$$

При $n = 0, 1, 2$ формула (2.28) верна. Пусть формула верна для всех неотрицательных целых порядков, меньших $n\,(n > 2)$, тогда, пользуясь формулой приведения (2.26), по свойству линейности получаем

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1} \to \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}} - $$
$$- 2p\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}} + J_{n-1}(0),$$

или

$$J_n(t) \to \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}(1-2p\sqrt{p^2+1}+2p^2)}{\sqrt{p^2+1}} =$$

$$=\frac{(\sqrt{p^2+1}-1)^{n-2}(\sqrt{p^2+1}-p)^2}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Таким образом,

$$J_n(t)\rightarrow\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Из (2.28) по теореме подобия найдем изображения функций Томсона (2.23). Имеем

$$\operatorname{ber}_n(t)+i\operatorname{bei}_n(t)\rightarrow\frac{1}{i\sqrt{i}}\frac{\left(\sqrt{\frac{p^2}{-i}+1}-\frac{p}{i\sqrt{i}}\right)^n}{\sqrt{\frac{p^2}{-i}+1}}=$$

$$=\frac{i^{\frac{n}{2}}(p-\sqrt{p^2-i})^n}{\sqrt{p^2-i}}.$$

Отсюда при $n=0$, отделяя в правой части этого равенства действительную и мнимую части, получим

$$\operatorname{ber} t\rightarrow\sqrt{\frac{\sqrt{p^4+1}+p^2}{2(p^4+1)}}$$

и

$$\operatorname{bei} t\rightarrow\sqrt{\frac{\sqrt{p^4+1}-p^2}{2(p^4+1)}}.$$

ГЛАВА III
# ОБРАТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

## § 29. Интеграл Фурье в комплексной форме

Известно, если функция $\varphi(t)$ на интервале $(-l, l)$ удовлетворяет условиям Дирихле: непрерывна или кусочно-непрерывна; имеет конечное число максимумов и минимумов, т. е. интервал $(-l, l)$ может быть разделен на конечное число частей, в каждой из которых функция $\varphi(t)$ изменяется монотонно, то по теореме Дирихле из теории тригонометрических рядов функция $\varphi(t)$ раскладывается в ряд Фурье

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\right), \tag{3.1}$$

который сходится в точках непрерывности к данной функции. В точках разрыва и на границах сумма ряда (3.1) равна среднему арифметическому предельных значений функции справа и слева в этих точках.

Коэффициенты ряда (3.1) определяются по формуле Эйлера — Фурье

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(\tau)\cos\frac{k\pi}{l}\tau d\tau,\qquad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(\tau)\sin\frac{k\pi}{l}\tau d\tau,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Так как косинус — функция четная, а синус — нечетная, то

$$a_{-k}=a_k,\qquad b_{-k}=-b_k,\qquad k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда ряд (3.1) можно представить в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}t+b_k\sin\frac{k\pi}{l}t\right).$$

Подставляя значение коэффициентов $a_k$ и $b_k$, получаем

$$\varphi(t)=\frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l}\varphi(\tau)\cos\frac{k\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.2}$$

Обозначим

$$\frac{k\pi}{l}=\sigma_k; \qquad \Delta\sigma_k=\sigma_{k+1}-\sigma_k=\frac{\pi}{l},$$

тогда ряд (3.2) принимает вид

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta\sigma_k\int_{-l}^{l}\varphi(\tau)\cos\sigma_k(t-\tau)\,d\tau,$$

или

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}F(\sigma_k,t)\,\Delta\sigma_k, \tag{3.3}$$

где

$$F(\sigma_k,t)=\int_{-l}^{l}\varphi(\tau)\cos\sigma_k(t-\tau)\,d\tau.$$

Пусть интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt$ сходится. Переходя в равенстве (3.3) к пределу при $l\to\infty$, получим

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\sigma,\tau)\,d\sigma,$$

или

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\cos\sigma(t-\tau)\,d\tau. \tag{3.4}$$

Сумму в формуле (3.3), элементы которой зависят от $l$, нельзя рассматривать, как обычную интегральную сумму. Поэтому приведенный вывод формулы (3.4) является не строгим, так как предельный переход от суммы к интегралу не обоснован. Однако при строгом выводе формулы (3.4) достаточно предположения, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt$ сходится.

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\sin\sigma(t-\tau)\,d\tau=0$$

в силу того, что внутренний интеграл — нечетная функция от $\sigma$, то, умножая это равенство на $i$ и складывая с равенством (3.4), получаем интеграл Фурье в комплексной форме

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\left[\cos\sigma(t-\tau)+i\sin\sigma(t-\tau)\right]d\tau,$$

или

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,e^{\sigma(t-\tau)i}d\tau. \tag{3.5}$$

При условиях, наложенных на функцию $\varphi(t)$, интеграл, определяемый правой частью (3.5), равен значению функции в точках непрерывности, а в точках разрыва — полусумме значений функции на краях разрыва.

## § 30. Формула обращения Римана — Меллина

**Теорема.** Если функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям Дирихле на любом конечном интервале, а интеграл $\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt$ сходится абсолютно вдоль прямой $\operatorname{Re}p=s$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}F(p)\,dp=\frac{1}{2}\left[f(t+0)+f(t-0)\right];$$

$$\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}=\lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_{s-i\sigma}^{s+i\sigma}.$$

*Доказательство.* Функция $f(t)$, принадлежащая к классу функций-оригиналов, не интегрируема абсолютно. Функция $\varphi(t)=$ $=e^{-st}f(t)$, $s>s_0$, где $s_0$ — показатель роста функции $f(t)$, на интервале $(0,\infty)$ интегрируема абсолютно. Имеем

$$\int\limits_0^{\infty}|\varphi(t)|\,dt=\int\limits_0^{\infty}|e^{-st}f(t)|\,dt<\int\limits_0^{\infty}e^{-st}Me^{s_0t}dt=\frac{M}{s-s_0}.$$

Следовательно, функцию $\varphi(t)=e^{-st}f(t)$ можно представить интегралом Фурье

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\tau)\,e^{\sigma(t-\tau)i}d\tau,$$

или

$$e^{-st}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\sigma\int\limits_{0}^{\infty}e^{-s\tau}f(\tau)\,e^{\sigma(t-\tau)i}d\tau.$$

Отсюда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{(s+\sigma i)t}d\sigma\int\limits_{0}^{\infty}e^{-(s+\sigma i)\tau}f(\tau)\,d\tau.$$

Положим $s+\sigma i=p$, $dp=i d\sigma$; $p$ изменяется по прямой $\operatorname{Re}p=s$ от $s-i\infty$ до $s+i\infty$. Тогда

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}dp\int\limits_{0}^{\infty}e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau,$$

или

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}\;F(p)\,dp, \tag{3.6}$$

где

$$F(p)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-p\tau}f(\tau)\,d\tau.$$

Формула (3.6) называется формулой обращения Римана — Меллина и определяет обратное преобразование Лапласа.

Из формулы обращения Римана — Меллина следует, что если два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то в точках непрерывности они равны, так как выражаются через $F(p)$ с помощью одного и того же интеграла по формуле (3.6). Это и доказывает *теорему единственности оригинала*: если две непрерывные функции-оригиналы $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то эти оригиналы равны во всех точках $t$, где они непрерывны.

При исследовании формулы обращения будем ссылаться на лемму Жордана.

***Лемма Жордана.*** Если $F(p)\to 0$ равномерно относительно $\varphi=\arg p$ при $r=|p|\to\infty$, то:

1) при $t<0$ и $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{C_r}e^{pt}F(p)\,dp=0;$$

2) при $t > 0$ и $\left.\begin{array}{r}\dfrac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi. \\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant -\dfrac{\pi}{2} + \alpha\end{array}\right\}$

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{c'_r} e^{pt} F(p)\, dp = 0,$$

где $c_r = \overset{\frown}{AFB}$ и $c'_r = \overset{\frown}{BDA}$ (рис. 53).

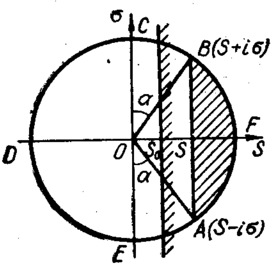


Рис. 53.

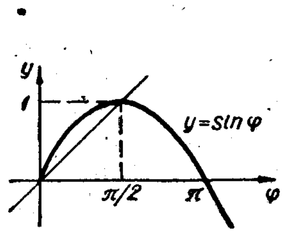


Рис. 54.

*Доказательство.* 1°. Пусть выполняются условия: $t < 0$, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Так как $F(p) \to 0$ равномерно относительно $\varphi = \arg p$ при $r \to \infty$, то для всякого сколь угодно малого наперед заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое $R_\varepsilon$, зависящее только от $\varepsilon$, что для всех $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $|F(p)| < \varepsilon$ при $r > R_\varepsilon$. Для точек $p = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ дуги $c_r$ имеем

$$|p| = r \text{ и } -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \leqslant \arg p \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

поэтому

$$\left|\int\limits_{c_r} e^{pt} F(p)\, dp\right| \leqslant \int\limits_{c_r} |e^{pt}|\, |F(p)|\, |dp| <$$

$$< r\varepsilon \int\limits_{-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} e^{rt\cos\varphi} d\varphi = 2r\varepsilon \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} e^{rt\cos\varphi} d\varphi.$$

Положим $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \psi$, тогда

$$\left|\int_{C_r} e^{pt}F(p)\,dp\right| < 2r\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{rt\sin\psi}d\psi.$$

Если $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin\psi \geqslant \frac{2\psi}{\pi}$ (рис. 54).

Поэтому

$$\left|\int_{C_r} e^{pt}F(p)\,dp\right| < 2r\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2tr}{\pi}\psi}d\psi = \frac{\varepsilon\pi}{t}(e^{tr}-1).$$

При $t < 0$ (если $r \to \infty$, то $e^{tr} \to 0$ и $\varepsilon \to 0$) получим

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{C_r} e^{pt}F(p)\,dp\right| = 0.$$

Итак,

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

2° Пусть выполняются условия: $t > 0$, $\frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $-\pi \leqslant \varphi \leqslant -\frac{\pi}{2} + \alpha$. Имеем $\int\limits_{C'_r} = \int\limits_{\overset{\smile}{BC}} + \int\limits_{\overset{\smile}{CDE}} + \int\limits_{\overset{\smile}{EA}}$.

Вычислим интегралы по дугам $\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{EA}$ и $\overset{\smile}{CDE}$. Обозначим через $M_r^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) наибольшее значение $|F(p)|$ соответственно на дугах $\overset{\smile}{BC}$, $\overset{\smile}{EA}$ и $\overset{\smile}{CDE}$, тогда $M_r^{(i)} \to 0$ при $r \to \infty$, так как $|F(p)| \to 0$ при $|p| \to \infty$.

Для точек $p$ на дуге $\overset{\smile}{BC}$ имеем $|e^{pt}| = e^{\mathrm{Re}\,pt} \leqslant e^{st}$ и $|dp| = r\,d\alpha$ (длина $\overset{\smile}{BC} = r\alpha$, рис. 53). Тогда

$$\left|\int_{\overset{\smile}{BC}} e^{pt}F(p)\,dp\right| \leqslant M_r^{(1)}e^{st}\int_{\overset{\smile}{BC}}|dp| = M_r^{(1)}e^{st}\alpha r.$$

Так как

$$M_r^{(1)} \to 0 \quad \text{и} \quad \lim_{r\to\infty}\alpha r = \lim_{r\to\infty} r\arcsin\frac{s}{r} = s,$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{\overset{\smile}{BC}} e^{pt}F(p)\,dp\right| = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\overset{\frown}{BC}} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\overset{\frown}{EA}} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Найдем оценку интеграла по дуге $\overset{\frown}{CDE}$. Имеем

$$\left|\int\limits_{\overset{\frown}{CDE}} e^{pt}F(p)\,dp\right| < \int\limits_{\overset{\frown}{CDE}} |e^{pt}F(p)\,dp| <$$

$$< M_r^{(3)} r \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{tr\cos\varphi}\,d\varphi = M_r^{(3)} r \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-tr\cos\psi}\,d\psi =$$

$$= 2M_r^{(3)} r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tr\cos\psi}\,d\psi.$$

Положим $\omega = \frac{\pi}{2} - \psi$; получим

$$\left|\int\limits_{\overset{\frown}{CDE}} e^{pt}F(p)\,dp\right| \leqslant 2M_r^{(3)} r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tr\sin\omega}\,d\omega.$$

Так как при $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\sin\omega \geqslant \frac{2\omega}{\pi}$, то

$$\left|\int\limits_{\overset{\frown}{CDE}} e^{pt}F(p)\,dp\right| <$$

$$< 2M_r^{(3)} r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-tr\frac{2\omega}{\pi}}\,d\omega = \frac{\pi M_r^{(3)}}{t}\left(1 - e^{-rt}\right), \qquad t > 0.$$

Отсюда

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\overset{\frown}{CDE}} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{C_r'} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

## § 31. Достаточное условие существования изображения

**Теорема.** Если функция $F(p)$ аналитическая в области $\operatorname{Re} p > s_0$ и в этой области $\lim\limits_{\operatorname{Im} p\to\infty} F(p) = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)|\, d\sigma$ сходится, то функция $F(p)$ является изображением и ее оригинал $f(t)$ будет

$$f(t) = \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp,$$

где $s = \operatorname{Re} p > s_0$.

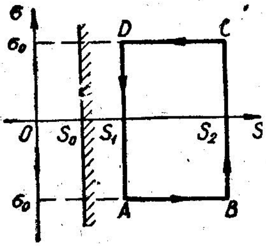


Рис. 55.

*Доказательство.* 1°. Рассмотрим в области $\operatorname{Re} p > s_0$ контур Γ (прямоугольник $ABCD$, рис. 55). Так как функция $F(p)$ аналитическая в области $\operatorname{Re} p > s_0$, то по теореме Коши

$$\int\limits_{\Gamma} e^{pt} F(p)\, dp = 0, \quad \text{или}$$

$$\int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA} = 0.$$

Найдем оценки интегралов, взятых по контурам $AB$ и $CD$. Имеем

$$\left| \int\limits_{AB} e^{pt} F(p)\, dp \right| = \left| \int\limits_{s_1}^{s_2} e^{(s-i\sigma_0)t} F(s-i\sigma_0)\, ds \right| < e^{s_2 t} \int\limits_{s_1}^{s_2} |F(s-i\sigma_0)|\, ds$$

и

$$\left| \int\limits_{CD} e^{pt} F(p)\, dp \right| = \left| \int\limits_{s_1}^{s_2} e^{(s+i\sigma_0)t} F(s+i\sigma_0)\, ds \right| < e^{s_2 t} \int\limits_{s_1}^{s_2} |F(s+i\sigma_0)|\, ds.$$

Переходя к пределу при $\sigma_0 \to \infty$, получим

$$\lim_{\operatorname{Im} p=\sigma_0\to\infty} \int\limits_{AB} e^{pt} F(p)\, dp = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\operatorname{Im} p=\sigma_0\to\infty} \int\limits_{CD} e^{pt} F(p)\, dp = 0,$$

так как по условию $\lim\limits_{\operatorname{Im} p\to\infty} F(p) = 0$. Поэтому

$$\lim_{\sigma_0\to\infty} \left( \int\limits_{BC} + \int\limits_{DA} \right) = 0,$$

или

$$\lim_{\sigma_0\to\infty} \int\limits_{s_2-i\sigma_0}^{s_2+i\sigma_0} e^{pt} F(p)\, dp + \lim_{\sigma_0\to\infty} \int\limits_{s_1+i\sigma_0}^{s_1-i\sigma_0} e^{pt} F(p)\, dp = 0.$$

Отсюда

$$\int_{s_2-i\infty}^{s_2+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \int_{s_1-i\infty}^{s_1+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp.$$

Итак, интеграл обращения (3.6) не зависит от выбора постоянной $s > s_0$.

2° В области $G$, ограниченной дугой окружности $c_r$ и прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (рис. 53), функция $e^{pt}F(p)$ — аналитическая, то по теореме Коши имеем

$$\int_{c_r} e^{pt}F(p)\,dp + \int_{BA} e^{pt}F(p)\,dp = 0,$$

или

$$\int_{c_r} e^{pt}F(p)\,dp + \int_{s-i\sigma}^{s+i\sigma} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

На основании леммы Жордана при $t < 0$

$$\lim_{|p|\to\infty} \int_{c_r} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Тогда при $t < 0$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \int_{s+i\sigma}^{s-i\sigma} e^{pt}F(p)\,dp = 0,$$

или

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = 0.$$

Итак, функция $f(t)$ в формуле обращения (3.6) при $t < 0$ равна нулю.

Найдем абсолютную величину функции $f(t)$ при $t > 0$ ($p = s + i\sigma$; $s = \text{const}$; $s > s_0$; $dp = i\,d\sigma$; $\sigma$ изменяется от $-\infty$ до $\infty$). Получим

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp \right| \leqslant \frac{e^{st}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)|\,d\sigma.$$

Обозначим $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)|\,d\sigma = M$, так как по условию интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |F(s+i\sigma)|\,d\sigma$ сходится. Тогда при $t > 0$ $|f(t)| < Me^{st}$ или $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, так как $s_0$ — точная нижняя граница чисел $s$, обладающих этим свойством.

Следовательно, функция $f(t)$, определенная формулой обращения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp = \begin{cases} f(t), & t>0, \\ 0, & t<0, \end{cases} \tag{3.7}$$

является оригиналом.

3°. Докажем, что функция $f(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

По условию теоремы функция $F(s+i\sigma)$ может быть представлена интегралом Фурье

$$F(s+i\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} F(s+i\tau)\, e^{-it(\sigma-\tau)} d\tau.$$

Полагая здесь $p = s + i\sigma$, $q = s + i\tau$, получаем

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{qt}F(q)\,dq.$$

На основании (3.7) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{qt}F(q)\,dq = \begin{cases} f(t), & t>0, \\ 0\;, & t<0, \end{cases}$$

поэтому

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Таким образом, функция, определяемая интегралом (3.6), является оригиналом для изображения $F(p)$.

## § 32. Нахождение оригинала с помощью формулы обращения

**Вычисление вычета в полюсе.** Функция $F(p)$, однозначная аналитическая в кольце $r < |p-a| < R$, раскладывается в этом кольце в сходящийся *ряд Лорана*

$$F(p) = c_0 + c_1(p-a) + \ldots + c_n(p-a)^n + \ldots +$$

$$+\frac{c_{-1}}{p-a}+\frac{c_{-2}}{(p-a)^2}+\ldots+\frac{c_{-n}}{(p-a)^n}+\ldots, \tag{3.8}$$

коэффициенты $c_n$ которого вычисляются по формуле

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F(p)}{(p-a)^{n+1}}\,dp,$$

где $\Gamma$ — произвольная окружность, расположенная в данном кольце, с центром в точке $a$.

*Интегральным вычетом* аналитической функции $F(p)$ относительно изолированной особой точки $a$ однозначного характера (обозначается $\operatorname{Res}[F(p),a]$) называется коэффициент $c_{-1}$ в ряде (3.8) разложения функции $F(p)$ в окрестности точки $a$, т. е.

$$\operatorname{Res}[F(p),a]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}F(p)\,dp.$$

Пусть $p=a$ простой полюс функции $F(p)$, тогда в окрестности точки $a$ функция $F(p)$ раскладывается в ряд

$$F(p)=c_0+c_1(p-a)+\ldots+c_n(p-a)^n+\ldots+\frac{c_{-1}}{p-a},$$

или

$$(p-a)F(p)=c_0(p-a)+c_1(p-a)^2+\ldots$$
$$+c_n(p-a)^{n+1}+\ldots+c_{-1}.$$

Перейдем к пределу при $p\to a$. Получим

$$c_{-1}=\lim_{p\to a}(p-a)F(p).$$

Итак,

$$\operatorname{Res}[F(p),a]=\lim_{p\to a}(p-a)F(p). \tag{3.9}$$

Если $F(p)=\dfrac{f_1(p)}{f_2(p)}$, где $f_1(p)$ и $f_2(p)$ — аналитические функции, то простой полюс $p=a$ функции $F(p)$ должен быть простым нулем знаменателя $f_2(p)$ несократимой дроби $\dfrac{f_1(p)}{f_2(p)}$, поэтому $f_1(a)\neq 0$, $f_2(a)=0$ и $f_2'(a)\neq 0$.

По формуле (3.9) получаем

$$\operatorname{Res}[F(p),a]=\lim_{p\to a}(p-a)F(p)=\lim_{p\to a}\frac{f_1(p)}{\dfrac{f_2(p)-f_2(a)}{p-a}}=\frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{Res}[F(p), a] = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}. \qquad (3.10)$$

Пусть $p = a$ — полюс порядка $n$ ($n > 1$) функции $F(p)$, тогда в окрестности точки $a$ функция $F(p)$ имеет разложение

$$F(p) = c_0 + c_1(p-a) + \ldots + c_n(p-a)^n + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c_{-1}}{p-a} + \ldots + \frac{c_{-n}}{(p-a)^n},$$

или

$$(p-a)^n F(p) = c_0(p-a)^n + c_1(p-a)^{n+1} + \ldots + c_n(p-a)^{2n} + \ldots$$

$$\ldots + c_{-1}(p-a)^{n-1} + \ldots + c_{-n}.$$

Дифференцируя обе части этого тождества $n-1$ раз и перейдя к пределу при $p \to a$, получаем

$$c_{-1} = \operatorname{Res}[F(p), a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{p \to a} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} [(p-a)^n F(p)]. \qquad (3.11)$$

**Теорема разложения.** 1°. Обозначим через $\gamma$ замкнутый контур, состоящий из $AB$ и $c_r'$ (рис. 53). Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} F(p)\,dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} e^{pt} F(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r'} e^{pt} F(p)\,dp.$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $r \to \infty$. Имеем

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r'} e^{pt} F(p)\,dp = 0$$

(по лемме Жордана $t > 0$) и

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{AB} e^{pt} F(p)\,dp = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\sigma}^{s+i\sigma} e^{pt} F(p)\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp = f(t)$$

(по формуле обращения).

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} F(p)\, dp, \quad t > 0.$$

Если $p_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\operatorname{Re} p_k < s_0 < s_1$ — особые точки (полюсы или существенно особые точки) функции $e^{pt}F(p)$, то по теореме Коши о вычетах интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} F(p)\, dp$ по замкнутому контуру равен сумме вычетов функции $e^{pt}F(p)$ в ее особых точках, лежащих внутри контура $\gamma$.

Таким образом,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k]. \tag{3.12}$$

2°. Если среди особых точек функции $e^{pt}F(p)$, кроме полюсов и существенно особых точек $p_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, имеются точки разветвления $\tilde{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\tilde{\gamma}_k} e^{pt} F(p)\, dp,$$

где $\tilde{\gamma}_k$ — контуры, состоящие из окружностей $\tilde{c}_k$ малого радиуса с центрами в точках разветвления, верхнего и нижнего края разрезов плоскости по лучам, проведенным из этих точек (рис. 56). Действительно, построим контуры $\tilde{\gamma}_k$ и $\gamma_k$ около всех особых точек: точек разветвления, полюсов и существенно особых точек. Тогда внутри замкнутого контура и на контуре функция $e^{pt}F(p)$ будет аналитической однозначной. По теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{m} \int_{\tilde{\gamma}_k} e^{pt} F(p)\, dp + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} e^{pt} F(p) dp = 0.$$

Интегралы по нижнему и верхнему краю контуров $\gamma_k$, построенных около полюсов и существенно особых точек, уничтожаются, так как на них подынтегральная функция однозначна, а интегралы по окружностям около этих точек равны вычетам функции, взятым с обратным знаком, потому что направление обхода по окружности $c_k$ осуществляется по часовой стрелке. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} e^{pt}F(p)\,dp = -\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p),\,p_k\right].$$

Таким образом,

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[e^{pt}F(p),\,p_k\right] - $$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int_{\tilde{\gamma}_k} e^{pt}F(p)\,dp. \qquad (3.13)$$

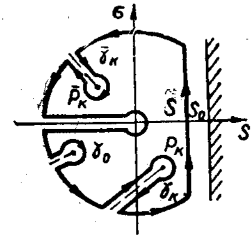

Рис. 56.

**Целые функции.** Функция $F(p)$, однозначная аналитическая во всей плоскости, называется целой. По определению целая функция $F(p)$ может иметь особую точку только в бесконечно удаленной точке. Поэтому в окрестности бесконечно удаленной точки она раскладывается в сходящийся ряд Лорана

$$F(p) = c_0 + \frac{c_{-1}}{p} + \frac{c_{-2}}{p^2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{p^n} + \ldots$$

$$\ldots + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots + c_n p^n + \ldots.$$

Следовательно, если бесконечно удаленная точка для целой функции будет правильной точкой или полюсом, или существенно особой точкой, то соответственно целая функция будет постоянной или многочленом, степень которого совпадает с порядком полюса, или трансцендентной целой функцией, например, $e^p$, $\sin p$.

Функция $F(p)$, представляемая в виде частного двух целых функций $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, называется *мероморфной*. В конечных точках плоскости мероморфная функция не может иметь других особых точек, кроме полюсов, причем, если дробь $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, несократима, то нули $m$-й кратности знаменателя дроби являются полюсами $m$-й кратности функции $F(p)$. Если мероморфная функция $F(p)$ имеет в конечной плоскости $n < \infty$ полюсов, то существует такая окрестность точки $p = \infty$, в которой $F(p)$ не имеет конечных особых точек, поэтому точка $p = \infty$ может быть правильной точкой или полюсом или существенно особой точкой. Если мероморфная функция $F(p)$ имеет конечное число полюсов и бесконечно удаленная точка является для нее правильной точкой или полюсом, то $F(p)$ — рациональная функция. В расширенной плоскости число полюсов мероморфной функции может быть и бесконечным, например, $\frac{1}{\sin p}$, $\operatorname{tg} p$, $\operatorname{ctg} p$.

Пусть функция $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ — правильная рациональная несократимая дробь, тогда функция $F(p)$ имеет конечное число полюсов. Рассмотрим два случая: 1) все полюсы функции $F(p)$ — простые; 2) все или некоторые полюсы функции $F(p)$—кратные.

**Теорема разложения для случая простых полюсов.** По формуле (3.10) вычет функции $e^{pt}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ в простом полюсе $p_k$ равен

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}, p_k\right]=\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}.$$

Рациональная функция $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ удовлетворяет всем условиям обратного преобразования, поэтому, подставляя значение вычета в формулу (3.12), имеем

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_kt}. \tag{3.14}$$

Пусть один из полюсов функции $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ равен нулю. Имеем $p_0=0, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ — нули функции $F_2(p)$. Тогда

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} \quad \text{и} \quad F_3(p_k)=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n-1).$$

Найдя производную от $F_2(p)=pF_3(p)$ по $p$ и подставляя ее значение в формулу (3.13), получаем

$$f(t)=\frac{F_1(0)}{F_3(0)}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F_1(p_k)}{p_kF_3'(p_k)}e^{p_kt}. \tag{3.15}$$

**Теорема разложения для случая кратных полюсов.** Вычет функции $e^{pt}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ в полюсе $p_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ $m_k$-й кратности вычисляем по формуле (3.11). Имеем

$$\operatorname{Res}\left[e^{pt}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}, p_k\right]=\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left\{\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left[(p-p_k)^{m_k}e^{pt}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right]\right\}.$$

Подставляя значение вычета в формулу (3.12), получаем

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left\{\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left[(p-p_k)^{m_k}e^{pt}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right]\right\}. \quad (3.16)$$

Если функция $F(p)$ имеет комплексно-сопряженные полюсы $p=\alpha\pm\beta i$, то легко показать, что и вычеты функции в этих точках будут комплексно-сопряженными, поэтому их сумма равна удвоенной действительной части, т. е.

$$\operatorname{Res}[F(p),\alpha+\beta i]+\operatorname{Res}[F(p),\alpha-\beta i]=2\operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[F(p),\alpha+\beta i]\}=$$
$$=2\operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[F(p),\alpha-\beta i]\}.$$

Примеры. Найти оригиналы данных функций $F(p)$:

1. $F(p)=\dfrac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}},\quad a>0.$

Функция $F(p)$ однозначная аналитическая на плоскости $p$ с разрезом на отрицательной части действительной оси; на верхнем крае $l_1$ разреза: $p=\varrho e^{i\pi}$ и $\sqrt{p}=i\sqrt{\varrho}$, на нижнем крае $l_2$ разреза: $p=\varrho e^{-i\pi}$ и $\sqrt{p}=-i\sqrt{\varrho}$. Так как $p=0$ — точка разветвления функции $F(p)$, то ее оригинал $f(t)$ находим по формуле (3.13). Имеем

$$f(t)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_0}e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp,$$

где $\int\limits_{\tilde{\gamma}_0}=\int\limits_{l_2}+\int\limits_{\tilde{c}_0}+\int\limits_{l_1}$ (рис. 57), причем интегрирование ведется по контуру $\tilde{\gamma}_0$ против часовой стрелки. Найдем оценку интеграла по контуру $\tilde{c}_0$. Полагая $p=re^{i\varphi}$, получим

$$\left|\int\limits_{\tilde{c}_0}e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp\right|\leqslant\int\limits_{\tilde{c}_0}|e^{pt}|\left|\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right||dp|=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{rt\cos\varphi}\frac{e^{-a\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{r}}\,r\,d\varphi\leqslant e^{rt}\sqrt{r}\,2\pi\to 0\quad\text{при}\quad r\to 0,$$

или $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_{\tilde{c}_0}=0$. Следовательно, $-\int\limits_{\tilde{\gamma}_0}=\int\limits_{l_1}+\int\limits_{l_2}$.

Вычислим интегралы по контурам $\overline{l_1}$ и $\overline{l_2}$. Имеем (замена $\varrho t = u^2$)

$$\int\limits_{\overline{l_1}} e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp + \int\limits_{\overline{l_2}} e^{pt}\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\,dp = -\int\limits_{\infty}^{0} e^{-\varrho t}\frac{e^{ia\sqrt{\varrho}}}{\sqrt{\varrho}}\,d\varrho +$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\varrho t}\frac{e^{-ia\sqrt{\varrho}}}{i\sqrt{\varrho}}\,d\varrho = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\varrho t}\frac{e^{ia\sqrt{\varrho}}+e^{-ia\sqrt{\varrho}}}{i\sqrt{\varrho}}\,d\varrho =$$

$$= \frac{2}{i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\varrho t}\cos a\sqrt{\varrho}\,\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho}} = \frac{4}{i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2}\cos\frac{au}{\sqrt{t}}\,\frac{du}{\sqrt{t}} =$$

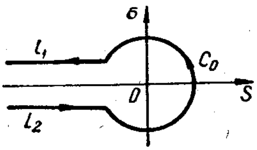


Рис. 57.

$$= \frac{2}{i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos\frac{au}{\sqrt{t}}\,\frac{du}{\sqrt{t}}.$$

Тогда

$$f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos\frac{au}{\sqrt{t}}\,du.$$

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sin\frac{au}{\sqrt{t}}\,du = 0,$$

то

$$f(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\cos\frac{au}{\sqrt{t}}\,du + i\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\sin\frac{au}{\sqrt{t}}\,du\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} e^{i\frac{au}{\sqrt{t}}}\,du = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\pi\sqrt{t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u-i\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)^2}\,du =$$

$$= \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\pi\sqrt{t}}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Таким образом,

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \to \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}. \qquad (3.17)$$

2. $F(p) = e^{-a\sqrt{p}}$, $a > 0$.

Обозначим $f(t) \to e^{-a\sqrt{p}}$. Тогда по теореме дифференцирования изображения

$$-tf(t) \to (e^{-a\sqrt{p}})', \quad \text{или} \quad \frac{2}{a} tf(t) \to \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}.$$

Согласно (3.17) по теореме единственности оригинала имеем

$$\frac{2}{a} tf(t) = \frac{e^{-\frac{a^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}.$$

Отсюда

$$f(t) = \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Следовательно,

$$e^{-a\sqrt{p}} \to \frac{a}{2t\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \tag{3.18}$$

3. $F(p) = \frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}$, $a > 0$.

Из равенства (3.18) по теореме интегрирования оригинала находим

$$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \to \frac{a}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{a^2}{4\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^3}}.$$

Положим $\frac{a^2}{4\tau} = u^2$. Получим

$$\int_0^t \frac{a}{2\sqrt{\pi\tau^3}} e^{-\frac{a^2}{4\tau}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}} \to \operatorname{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right). \tag{3.19}$$

4. $F(p) = \frac{p^2 + p - 1}{(p-2)(p^2 - p - 20)}$.

Функция $F(p)$ имеет простые полюсы: $p_1 = 2$, $p_2 = 5$, $p_3 = -4$. Обозначим: $A(p) = p^2 + p - 1$; $B(p) = (p-2)(p^2 - p - 20)$; $B'(p) = 3p^2 - 6p - 18$. Тогда по формуле (3.14) для функции $F(p)$ находим оригинал $f(t)$ (табл. 1).

Таблица 1

| $p_k$ | $A(p_k)$ | $B'(p_k)$ | $\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$ |
|---|---|---|---|
| $p_1 = 2$ | 5 | $-18$ | $-\frac{5}{18} e^{2t}$ |
| $p_2 = 5$ | 29 | 27 | $\frac{29}{27} e^{5t}$ |
| $p_3 = -4$ | 11 | 54 | $\frac{11}{54} e^{-4t}$ |

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{54}(11e^{-4t} + 58e^{5t} - 15e^{2t}).$$

5. $F(p) = \dfrac{p^2 - p + 2}{(p^2+4)(p^2+1)}$.

Функция $F(p)$ имеет простые полюсы: $p = \pm 2i$ и $p = \pm i$. Обозначим: $A(p) = p^2 - p + 2$; $B(p) = (p^2+4)(p^2+1)$; $B'(p) = 4p^3 + 10p$. Тогда по формуле (3.14) для функции $F(p)$ находим оригинал $f(t)$ (табл.2).

Таблица 2

| $p_k$ | $A(p_k)$ | $B'(p_k)$ | $\frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$ |
|---|---|---|---|
| $2i$ | $-2-2i$ | $-12i$ | $\frac{1-i}{6} e^{2it}$ |
| $i$ | $1-i$ | $6i$ | $-\frac{1+i}{6} e^{it}$ |

Таким образом,

$$f(t) = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1-i}{6} e^{2it} - \frac{1+i}{6} e^{it}\right],$$

или

$$f(t) = \frac{1}{3}(\cos 2t + \sin 2t - \cos t + \sin t).$$

6. $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$.

Функция $F(p)$ имеет простые полюсы: $p = 2$, $p = \pm i$ и полюс 3-го порядка $p = 1$. Оригинал для функции $F(p)$ находим по формуле (3.12). Имеем

$$f(t) = \mathrm{Res}\,[F(p)e^{pt}, 2] + \mathrm{Res}\,[F(p)e^{pt}, i] +$$

$$+ \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, -i] + \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, 1].$$

Вычисляя вычеты по формулам (3.10) и (3.11), получаем

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, 2] = \left[\frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)}e^{pt}\right]_{p=2} = \frac{1}{5}e^{2t};$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, i] + \operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, -i] = 2\operatorname{Re}\{\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, i]\} =$$

$$= 2\operatorname{Re}\left[\frac{1}{(p-1)^3(p+i)(p-2)}e^{pt}\right]_{p=i} = \frac{1}{20}(\cos t - 3\sin t);$$

$$\operatorname{Res}[F(p)e^{pt}, 1] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p^2+1)(p-2)}e^{pt}\right)''_{p=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(6p^4-16p^3+15p^2-3)}{(p^2+1)^3(p-2)^3}e^{pt} - 2\frac{3p^2-4p+1}{(p^2+1)^2(p-2)^3}te^{pt} + \right.$$

$$\left. + \frac{t^2e^{pt}}{(p^2+1)(p-2)}\right]_{p=1} = -\frac{e^t}{4}(t^2+5).$$

Следовательно,

$$f(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{20}(\cos t - 3\sin t) - \frac{e^t}{4}(t^2+1).$$

*Упражнения.* Пользуясь теоремой разложения, найти оригиналы для данных функций $F(p)$:

84. $\dfrac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$. 85. $\dfrac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$.

86. $\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$. 87. $\dfrac{1}{(p+1)^3(p+3)}$.

88. $\dfrac{1}{p^3(p+1)^4}$. 89. $\dfrac{1}{(p+2)^3(p-1)^2}$.

90. $\dfrac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$. 91. $\dfrac{1}{(p-2)^2(p+3)}$.

92. $\dfrac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$. 93. $\dfrac{1}{(p+3)^3(p+1)}$.

**Теорема разложения для случая бесконечного множества полюсов.** Если мероморфная функция $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$ имеет в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s < s_0$ бесконечное множество полюсов $p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, а также существует система окружностей $c_n$ с неограничено возрастающими радиусами, на каждой из которых $F(p) \to 0$ равномерно относительно $\arg p$, и для $a > s_0$ интеграл $\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением для функции

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k].$$

*Доказательство.* Построим систему концентрических окружностей $c_n$ с неограниченно возрастающими радиусами $R_1 < R_2 < \ldots < R_n \to \infty$ с центром в нулевой точке, не проходящих через полюсы. Обозначим через $p_1, p_2, \ldots$ полюсы функции $F(p)$, расположенные в порядке неубывания модулей; $\nu_n$ — число полюсов, лежащих внутри окружности $c_n$; $\gamma_n$ — дуга окружности $c_n$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \leqslant a$, концы которой лежат на прямой $\operatorname{Re} p = a$ в точках $a \pm ib_n$. По теореме Коши о вычетах имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-ib_n}^{a+ib_n} e^{pt}F(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_n} e^{pt}F(p)\,dp = \sum_{k=1}^{\nu_n} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k].$$

Если $t > 0$, то при $n \to \infty$ в левой части первое слагаемое согласно теореме обращения равно $f(t)$, а второе слагаемое (по лемме Жордана) стремится к нулю, следовательно, в пределе получим

$$f(t) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\nu_n} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k].$$

Если $p_k$ — простые полюсы, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \tag{3.20}$$

если же один из всех простых полюсов функции $F(p)$ равен нулю, то

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{3.21}$$

Пример. Найдем оригинал $f(t)$ для изображения $F(p) = \dfrac{1}{p\operatorname{ch} p}$. Определим нули функции $p\operatorname{ch} p$. Имеем $p = 0$ и $\operatorname{ch} p = 0$, или $\cos ip = 0$. Отсюда $p_k = \pm i\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\pi\ (k = 1, 2, \ldots)$. Следовательно, данная функция $F(p)$ имеет бесконечное множество простых полюсов: $p_0 = 0$, $p_k = \pm i\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Пользуясь формулой (3.21) и учитывая, что полюсы $p_k$ комплексно-сопряженные, получаем

$$f(t) = \left(\frac{1}{\operatorname{ch} p}\right)_{p=0} + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p \operatorname{sh} p} e^{pt}\right)_{p=p_k} =$$

$$= 1 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{i\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t}}{i\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \operatorname{sh} i\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi},$$

или

$$f(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Получили разложение в ряд Фурье по косинусам на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 4$ функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 4k - 1 < t < 4k + 1, \\ 2, & 4k + 1 < t < 4k + 3 \end{cases} \quad \text{(рис. 58).}$$

Действительно, из формулы (3.1) разложение в ряд по косинусам на интервале $(0, l)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l} t,$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{n\pi}{l} t\,dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Получим

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 2dt = 2; \qquad a_n = \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\cos\frac{n\pi}{4} t\,dt =$$

$$= \left.\frac{\sin\frac{n\pi}{4} t}{\frac{n\pi}{4}}\right|_1^3 = 2\,\frac{\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}}.$$

Так как $\cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{4} = (-1)^k$ при $n = 4k-2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то

$$a_n = 2\frac{(-1)^k}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}.$$

Поэтому

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi} = \begin{cases} 0, & 4k-1 < t < 4k+1, \\ 2, & 4k+1 < t < 4k+3. \end{cases}$$

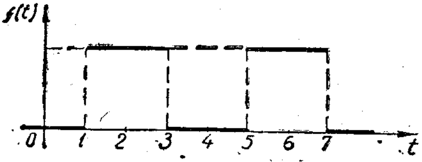

Рис. 58.

При помощи единичной функции $\eta(t)$ функцию $f(t)$ можно записать формулой

$$f(t) = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\eta(t-2k-1).$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p\operatorname{ch}p} \to 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\eta(t-2k-1).$$

*Упражнения.* Найти оригиналы для данных функций $F(p)$:

**94.** $\dfrac{1}{p\operatorname{sh}p}$. **95.** $\dfrac{\operatorname{th}p}{p}$. **96.** $\dfrac{1}{p(1+e^{-p})}$.

## § 33. Теорема об аналитичности изображения в бесконечно удаленной точке

Если функция $F(p)$ аналитическая в точке $p = \infty$, $F(\infty) = 0$ и в окрестности этой точки имеет разложение в ряд Лорана

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}, \tag{3.22}$$

то

$$f(t)\,\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}, \tag{3.23}$$

где $f(t)$— целая функция экспоненциального типа, т.е. $|f(t)| < Me^{s_0|t|}$.

*Доказательство.* 1°. Ряд (3.22) сходится в окрестности точки $p=\infty$, т.е. вне круга $|p|>R$ достаточно большого радиуса с центром в точке $p=0$. При замене $q=\frac{1}{p}$ окрестность бесконечно удаленной точки $p=\infty$ отображается на круг $|q|<\frac{1}{R}$ с центром в точке $q=0$ и разложение (3.22) переходит в разложение функции $F\left(\frac{1}{q}\right)$ в окрестности точки $q=0$. Имеем

$$F\left(\frac{1}{q}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n q^{n+1},$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|q|=\frac{1}{R}} \frac{F\left(\frac{1}{q}\right)}{q^{n+1}}\,dq.$$

Обозначим максимальное значение модуля функции $F\left(\frac{1}{q}\right)$ на окружности $|q|=\frac{1}{R}$ через $M$, тогда для всех точек этой окружности $\left|F\left(\frac{1}{q}\right)\right|\leqslant M$. Найдем оценку коэффициента $c_n$. Имеем

$$|c_n|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|q|=\frac{1}{R}}\left|F\left(\frac{1}{q}\right)\right|\frac{dq}{|q|^{n+1}}\leqslant\frac{1}{2\pi}R^{n+1}M2\pi\frac{1}{R}=MR^n,$$

или

$$|c_n|<MR^n.$$

Пользуясь этим неравенством, найдем

$$|f(t)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\frac{1}{n!}|t^n|<M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(R|t|)^n}{n!}=Me^{R|t|}.$$

Отсюда следует, что степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n$ сходится для всех комплексных значений $t$ к функции $f(t)$, которая является целой функцией экспоненциального типа, так как $|f(t)|<Me^{R|t|}$. При $t>0$, $|f(t)|<Me^{Rt}$, следовательно, $f(t)\eta(t)$ является оригиналом.

2°. Докажем, что $f(t) \to F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} e^{-pt} t^n$ сходится равномерно, следовательно, его можно интегрировать почленно. Имеем

$$\int_0^A e^{-pt} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^A \frac{c_n}{n!} e^{-pt} t^n dt.$$

Перейдя к пределу при $A \to \infty$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{c_n}{n!} e^{-pt} t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}},$$

или

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}.$$

Можно доказать и достаточность этой теоремы: если оригинал — целая функция экспоненциального типа, то изображение является аналитической функцией в бесконечно удаленной точке. Таким образом, при преобразовании Лапласа между целыми функциями экспоненциального типа и функциями, аналитическими в бесконечно удаленной точке и равными в ней нулю, существует взаимно однозначное соответствие.

Примеры. Найти изображения функций:

1. $f(t) = \sin 2\sqrt{t}$.

Разлагая данную функцию в ряд, получаем

$$\sin 2\sqrt{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} t^{n+\frac{1}{2}} \to F(p).$$

По формуле (1.13), имея в виду (1.9), находим

$$t^{n+\frac{1}{2}} \to \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{p^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1} n! p^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Тогда

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!p^{n+3/2}}=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^n}{n!},$$

или

$$F(p)=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}.$$

Функция $F(p)$ — аналитическая в бесконечно удаленной точке, $F(\infty)=0$, и имеет в окрестности точки $p=\infty$ разложение в ряд Лорана

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{\pi}}{n!}\cdot\frac{1}{p^{n+3/2}},$$

поэтому $F(p)$ удовлетворяет всем условиям теоремы. Следовательно

$$\sin 2\sqrt{t}\to\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}. \tag{3.24}$$

2. $f(t)=\dfrac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.

Имеем

$$\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k}t^{k-1/2}}{(2k)!}.$$

Так как

$$t^{k-\frac{1}{2}}\to\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{p^{k+1/2}}=\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^k\cdot p^{k+1/2}}=\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{p^{k+1/2}},$$

то

$$\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\to\sqrt{\frac{\pi}{p}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^k}{k!},$$

или

$$\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\to\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}. \tag{3.25}$$

3. $f(t)=t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$.

Подставляя в (2.28) $2\sqrt{t}$ вместо $t$ и учитывая (3.23), получаем

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) = t^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(2\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} t^{n+k} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+k+1)}{p^{n+k+1}} =$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^k}{k!},$$

или

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \to \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}, \; n = 0, 1, 2, \ldots \,. \tag{3.26}$$

4. $f(t) = \dfrac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$.

Полагая в (3.26) $n = 1$, получаем

$$t^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{t}) \to \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}}.$$

По свойству интегрирования изображения находим

$$\frac{t^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{t})}{t} \to \int_p^{\infty} \frac{1}{p^2} e^{-\frac{1}{p}} dp,$$

или

$$\frac{J_1(2\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \to 1 - e^{-\frac{1}{p}}.$$

5. $f(t) = \dfrac{J_n(t)}{t}$.

Из равенства (2.28) по теореме интегрирования изображения получаем

$$\frac{J_n(t)}{t} \to \int_p^{\infty} \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}} dp.$$

Положим $\sqrt{p^2+1}-p=q$, тогда $\dfrac{J_n(t)}{t} \to \int\limits_0^{\sqrt{p^2+1}-p} q^{n-1}dq$.

Итак,

$$\frac{J_n}{t} \to \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{n}.$$

6. $\operatorname{ber}(2\sqrt{t})$ и $\operatorname{bei}(2\sqrt{t})$.

Согласно (2.24) и учитывая (3.23), находим

$$\operatorname{ber}(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\sqrt{t})^{4k}}{2^{4k}[(2k)!]^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)^2} t^{2k} \to$$

$$\to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{1}{p^{2k+1}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^{2k}}{(2k)!},$$

или

$$\operatorname{ber}(2\sqrt{t}) \to \frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}.$$

Функция $F(p) = \frac{1}{p}\cos\frac{1}{p}$ — аналитическая в точке $p=\infty$ и $F(\infty)=0$, следовательно, $F(p)$ — изображение целой функции экспоненциального типа $\operatorname{ber}(2\sqrt{t})$.

Аналогично находим

$$\operatorname{bei}(2\sqrt{t}) \to \frac{1}{p}\sin\frac{1}{p}.$$

*Упражнения*. Найти изображения функций $f(t)$:

97. $\dfrac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$. 98. $\operatorname{sh} 2\sqrt{t}$. 99. $\operatorname{sh} 2\sqrt{t} + \sin 2\sqrt{t}$.

100. $\operatorname{sh} 2\sqrt{t} - \sin 2\sqrt{t}$. 101. $\dfrac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t} + \cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.

102. $\dfrac{\operatorname{ch} 2\sqrt{t} - \cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$.

Найти оригиналы функций $F(p)$:

103. $\dfrac{1}{\sqrt{p}}\cos\dfrac{1}{p}$. 104. $\dfrac{\operatorname{ch} 2\sqrt{p}}{\sqrt{p}}$. 105. $\operatorname{sh} 2\sqrt{p}$.

106. $\dfrac{e^{\frac{1}{p}}}{\sqrt{p}}$.

## § 34. Частные случаи теоремы Эфроса

1°. Из равенства (3.26), пользуясь теоремой подобия, получаем

$$\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau}) \to \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\tau\frac{1}{p}}. \tag{3.27}$$

Обозначим: $\varphi(t,\tau) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau}) \to \Phi(p) e^{-\tau q(p)}$. Из равенства

$$\frac{1}{p^{n+1}} e^{-\tau\frac{1}{p}} = \Phi(p) e^{-\tau q(p)}$$

имеем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \text{ и } q(p) = \frac{1}{p}.$$

Тогда по теореме Эфроса

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p^{n+1}} F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Отсюда при $n = 0$

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Из равенства (3.27) при $n = 0$ по теореме запаздывания находим

$$J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) \to \frac{1}{p} e^{-\tau\left(p+\frac{1}{p}\right)},$$

следовательно, $\Phi(p) = \frac{1}{p}$ и $q(p) = p + \frac{1}{p}$. Поэтому,

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p} F\left(p + \frac{1}{p}\right).$$

2°. По теореме подобия из (3.24) имеем

$$\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} \to \frac{1}{p\sqrt{p}} e^{-\frac{\tau}{p}}.$$

Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}} \text{ и } q(p) = \frac{1}{p}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{1}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Аналогично из равенства (3.25) находим

$$\frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi t}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\tau}{\sqrt{p}}},$$

следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi t}} f(\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right).$$

3°. Из равенства (3.17)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau\sqrt{p}}$$

находим $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ и $q(p) = \sqrt{p}$. По теореме Эфроса

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\,d\tau \rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p}).$$

Из равенства (3.18)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \frac{\tau}{2t} \rightarrow e^{-\tau\sqrt{p}},$$

пользуясь теоремой Эфроса, имеем

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{t^3}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \tau f(\tau)\,d\tau \rightarrow F(\sqrt{p}).$$

4°. Из (3.27) при $n = 0$ и $\tau = \frac{1}{4}$ получаем $J_0(\sqrt{t}) \rightarrow e\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{4p}}$.

Отсюда по теореме запаздывания

$$J_0(\sqrt{t-\tau^2}) \rightarrow \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{4p} - \tau^2 p}. \tag{3.28}$$

Найдем изображение $\overline{F}(p)$ для функции $J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})$. Имеем

$$\bar{F}(p)=\int_0^\infty e^{-pt} J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\,dt.$$

Заменим $t^2=u$. Тогда $t=\sqrt{u}$, $dt=\frac{du}{2\sqrt{u}}$ и

$$\bar{F}(p)=\int_0^\infty \frac{e^{-p\sqrt{u}}}{2\sqrt{u}} J_0(\sqrt{u-\tau^2})\,du,$$

или

$$\bar{F}(s)=\int_0^\infty \frac{e^{-s\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} J_0(\sqrt{p-\tau^2})\,dp. \tag{3.29}$$

Из равенства (3.17)

$$\frac{e^{-s\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} \to \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4t}},$$

или

$$\frac{e^{-s\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-pt}\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{s^2}{4t}}\,dt. \tag{3.30}$$

Подставляя (3.30) в (3.29), получаем

$$\bar{F}(s)=\int_0^\infty J_0(\sqrt{p-\tau^2})\,dp\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-pt}\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{s^2}{4t}}\,dt.$$

Изменим порядок интегрирования. Имеем

$$\bar{F}(s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{s^2}{4t}}\,dt\int_0^\infty e^{-pt} J_0(\sqrt{p-\tau^2})\,dp,$$

где внутренний интеграл — изображение функции $J_0(\sqrt{t-\tau^2})$. Учитывая (3.28), запишем

$$\int_0^\infty e^{-pt} J_0(\sqrt{p-\tau^2})\,dt=\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{4t}-\tau^2 t}.$$

Тогда

$$\bar{F}(s)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{s^2}{4t}}\cdot\frac{1}{t} e^{-\frac{1}{4t}-\tau^2 t}\,dt,$$

или

$$\overline{F}(p)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{p^2+1}{4t}-\tau^2 t}\,dt.$$

Сделаем замену $\dfrac{1}{\sqrt{t}}=v$; $\dfrac{dt}{2t^{3/2}}=-dv$. Получаем

$$\overline{F}(p)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{p^2+1}{4}v^2-\tau^2\frac{1}{v^2}}\,dv=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}v-\frac{\tau}{v}\right)^2}dv.$$

Вычислим интеграл в правой части этого равенства. Имеем

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\varrho^2}d\varrho=\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}v-\frac{\tau}{v}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}+\frac{\tau}{v^2}\right)dv=$$

$$=\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}v-\frac{\tau}{v}\right)^2}dv+\tau\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}v-\frac{\tau}{v}\right)^2}\frac{dv}{v^2}.$$

Замена $v=-\dfrac{2\tau}{\sqrt{p^2+1}x}$ приводит второй интеграл к

$$\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}\int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}x-\frac{\tau}{x}\right)^2}dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\varrho^2}d\varrho=\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}v-\frac{\tau}{v}\right)^2}dv.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{\sqrt{p^2+1}}{2}v-\frac{\tau}{v}\right)^2}dv=\frac{2}{\sqrt{p^2+1}}\int_0^\infty e^{-\varrho^2}d\varrho=\frac{2}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом,

$$\overline{F}(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}e^{-\tau\sqrt{p^2+1}},$$

или

$$J_0(\sqrt{t^2-\tau^2}) \to \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\tau\sqrt{p^2+1}}.$$

Отсюда по теореме Эфроса $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ и $q(p) = \sqrt{p^2+1}$, поэтому

$$\int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} F(\sqrt{p^2+1}).$$

## § 35. Умножение оригиналов

**Теорема.** Если $f(t) \to F(p)$ и $\varphi(t) \to \Phi(p)$, $s_1$ и $s_2$ — показатели роста оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$, то

$$f(t)\varphi(t) \to \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(q)\Phi(p-q)\, dq, \quad c > s_1 \text{ и } \operatorname{Re} p > s_2 > c.$$

*Доказательство.* Произведение двух оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$, очевидно, является оригиналом. Имеем

$$f(t)\varphi(t) \to \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\varphi(t)\, dt.$$

Функция $F(q)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} q > s_1$. Выбирая на действительной оси точку $c > s_1$, можно заменить под интегралом функцию $f(t)$ по формуле обращения. Получим

$$f(t)\varphi(t) \to \int_0^\infty e^{-pt}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt} F(q)\, dq\right] \varphi(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(q)\, dq \int_0^\infty e^{-(p-q)t} \varphi(t)\, dt$$

(изменение порядка интегрирования возможно, так как интегралы $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{qt} F(q)\, dq$ и $\int_0^\infty e^{-(p-q)t} \varphi(t)\, dt$ абсолютно сходятся).

Внутренний интеграл существует в полуплоскости $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$ или $\operatorname{Re} p > s_2 + s_1$ ($\operatorname{Re} q = c > s_1$) и равен в этой полуплоскости изображению $\Phi(p-q)$, следовательно,

$$f(t)\varphi(t) \to \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(q)\Phi(p-q)\,dq.$$

Таким образом, произведению двух оригиналов соответствует свертка изображений. Теорема умножения оригиналов применяется в основном для вычисления интегралов. Так как

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(q)\Phi(p-q)\,dq = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[F(q_k)\Phi(p-q_k)],$$

или

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\,[F(q_k)\Phi(p-q_k)],$$

то

$$\int\limits_0^\infty f(t)\varphi(t)\,dt = \lim_{p\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[F(q_k)\Phi(p-q_k)] =$$

$$= \lim_{p\to 0}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,\Phi(q_k)F(p-q_k), \qquad (3.31)$$

где вычеты вычисляются в особых точках или функции $F(p)$, или функции $\Phi(p)$.

ГЛАВА IV

# ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

## § 36. Вычисление интегралов

Приведем формулы, которыми будем пользоваться при вычислении интегралов.

1°. Частные случаи теоремы Эфроса (§ 34).

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p^{n+1}} F\left(\frac{1}{p}\right); \tag{4.1}$$

$$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p} F\left(\frac{1}{p}\right);$$

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p} F\left(p + \frac{1}{p}\right); \tag{4.2}$$

$$\int_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2}) f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \cdot F(\sqrt{p^2+1}); \tag{4.3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right); \tag{4.4}$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right); \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p}); \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \tau f(\tau)\, d\tau \to F(\sqrt{p}).$$

2°. Формулы (2.12) и (2.13)

$$\int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau = \int_0^\infty F(p)\, dp \qquad (4.7)$$

и

$$\int_0^\infty t^n f(\tau)\, d\tau = (-1)^{n+1} \int_0^\infty F^{(n+1)}(p)\, dp = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dp^n} [F(p)] \Big|_0^\infty.$$

3°. Предельная формула (1.1)

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{p\to 0} F(p) = F(0),$$

если существует $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$.

4°. Формула (3.31) теоремы умножения оригиналов

$$\int_0^\infty f(t)\, \varphi(t)\, dt = \lim_{p\to 0} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} [F(q_k)\, \Phi(p - q_k)] =$$

$$= \lim_{n\to 0} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} \Phi(q_k)\, F(p - q_k), \qquad (4.8)$$

где вычеты вычисляются в особых точках или функции $F(p)$, или функции $\Phi(p)$.

5°. Формула (2.8) теоремы интегрирования по параметру

$$\int_a^b f(t, \tau)\, d\tau \to \int_a^b F(p, \tau)\, d\tau.$$

6°. Равенство Парсеваля.

Если $f(t) \to F(p)$ и $\varphi(t) \to \Phi(p)$, то

$$\int_0^\infty F(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \Phi(\tau)\, f(\tau)\, d\tau.$$

*Доказательство.* Так как $F(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-\tau t} f(t)\, dt$, то

$$\int_0^\infty F(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, d\tau \left[ \int_0^\infty e^{-\tau t} f(t)\, dt \right].$$

Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^\infty F(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_0^\infty e^{-\tau t}\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Внутренний интеграл $\int_0^\infty e^{-\tau t}\varphi(\tau)\,d\tau = \Phi(t)$. Тогда

$$\int_0^\infty F(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \Phi(\tau) f(\tau)\,d\tau. \tag{4.9}$$

Рассмотрим частный случай. Если

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & a < t < b, \\ 0, & a < t,\ t > b, \end{cases}$$

или $\varphi(t) = \eta(t-a) - \eta(t-b)$, то $\Phi(p) = \dfrac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p}$. Тогда равенство (4.9) имеет вид

$$\int_a^b F(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \frac{e^{-a\tau} - e^{-b\tau}}{\tau} f(\tau)\,d\tau. \tag{4.10}$$

7°. Операционное преобразование интегралов.

Пусть дан интеграл вида

$$\int_a^b F(\tau, \lambda)\,d\tau = \Phi(\lambda),$$

заменяя $\lambda = q(p)$, имеем $\int_a^b F[\tau, q(p)]\,d\tau = \Phi[q(p)]$; и пусть $F[\tau, q(p)] \to$ $\to f(\tau, t)$, $\Phi[q(p)] \to \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b d\tau \left[\int_0^\infty e^{-pt} f(\tau, t)\,dt\right] = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt,$$

или

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_a^b f(\tau, t)\,d\tau\right] dt = \int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\int_a^b f(\tau, t)\,d\tau = \varphi(t).$$

Примеры. Вычислить интегралы:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau.$

По формуле (4.7), имея в виду $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$, получаем

$$\int_0^\infty \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau = \int_0^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p\,\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

2. $\int_0^\infty (e^{-a\tau}-e^{-b\tau})\frac{d\tau}{\tau}$.

Из (4.10), полагая $f(t)=1$ и $F(p)=\frac{1}{p}$, находим

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a\tau}-e^{-b\tau}}{\tau}\,d\tau = \int_a^b \frac{dp}{p} = \ln p\,\Big|_a^b = \ln\frac{b}{a}.$$

3. $\int_0^\infty \frac{J_0(\tau)-\cos\tau}{\tau}\,d\tau$.

Пользуясь (4.7) и формулами $J_0(t)\to\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $\cos t\to\frac{p}{p^2+1}$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\tau)-\cos\tau}{\tau}\,d\tau = \int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}-\frac{p}{p^2+1}\right)dp =$$

$$= \ln\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2+1}}\,\Bigg|_0^\infty = \ln 2.$$

4. $\int_0^\infty t^q J_n(at)\,dt$.

Положим: $a=2\sqrt{\tau}$, $t=\sqrt{u}$. Тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{q-1}{2}} J_n(2\sqrt{\tau u})\left(\frac{\tau}{u}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\tau}{u}\right)^{\frac{\;}{2}} du =$$

$$= \frac{1}{2\tau^{n/2}}\int_0^\infty\left(\frac{\tau}{u}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{u\tau})\,u^{\frac{q+n-1}{2}}\,du.$$

Имеем

$$u^{\frac{q+n-1}{2}} \to \frac{\Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right)}{p^{\frac{q+n+1}{2}}} = F(p) \quad \text{и}$$

$$F\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right) p^{\frac{q+n+1}{2}}.$$

По формуле (4.1) получаем

$$\int_0^\infty t^q J_n(at)\, dt \to \frac{1}{2\tau^{n/2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right)}{p^{\frac{n-q+1}{2}}}.$$

Так как

$$\frac{1}{2\tau^{n/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right)}{p^{\frac{n-q+1}{2}}} \to \frac{1}{2\tau^{n/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q+1}{2}\right)} \tau^{\frac{n-q-1}{2}} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q-1}{2}\right)} \cdot \frac{2^q}{a^{q+1}},$$

то

$$\int_0^\infty t^q J_n(at)\, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{q+n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q-1}{2}\right)} \cdot \frac{2^q}{a^{q+1}}.$$

5. $\int_0^\infty e^{-at^2} \cos 2bt dt.$

Полагая $b = \sqrt{\tau}$, $t = \sqrt{u}$, получим

$$\int_0^\infty e^{-at^2} \cos 2bt dt = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{2} \int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{\tau u}}{\sqrt{\pi\tau}} \cdot \frac{e^{-au}}{\sqrt{u}}\, du.$$

По формуле (1.13) и теореме смещения имеем

$$\frac{1}{\sqrt{u}} \to \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \qquad \frac{e^{-au}}{\sqrt{u}} \to \sqrt{\frac{\pi}{p+a}} = F(p).$$

Тогда $F\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) = \frac{\sqrt{\pi p}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{p + \frac{1}{a}}}$. По формуле (4.5) находим

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{\tau u}}{\sqrt{\pi\tau}} \cdot \frac{e^{-au}}{\sqrt{u}}\, du \to \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+\frac{1}{a}}}.$$

Так как $\dfrac{1}{\sqrt{a}} \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+\frac{1}{a}}} \to \dfrac{1}{\sqrt{a}}\, \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}\, e^{-\frac{1}{a}\tau}$, то

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\sqrt{\tau u}}{\sqrt{\pi\tau}} \cdot \frac{e^{-au}}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{\sqrt{a\tau}} e^{-\frac{1}{a}\tau}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-at^2} \cos 2bt dt = \frac{\sqrt{\pi\tau}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a\tau}} e^{-\frac{1}{a}\tau} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

6. $\int_0^t \tau J_0 (2\sqrt{\tau (t-\tau)})\, d\tau$.

Пользуясь (4.2), найдем $\tau \to \dfrac{1}{p^2} = F(p)$; $F\left(p + \dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)^2}$ и

$$\int_0^\infty \tau J_0 (2\sqrt{\tau (t-\tau)}\, d\tau) \to \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

Так как $\dfrac{p}{(p^2+1)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+1}\right)' \to \dfrac{\tau}{2} \sin\tau$, то

$$\int_0^t \tau J_0 (2\sqrt{\tau (t-\tau)})\, d\tau = \frac{\tau}{2} \sin \frac{\tau}{2}.$$

7. $\int_0^t J_0 (\sqrt{t^2-\tau^2})\, \tau^2 d\tau$.

Имеем $\tau^2 \to \dfrac{2}{p^3} = F(p)$, $F(\sqrt{p^2+1}) = \dfrac{2}{\sqrt{(p^2+1)^3}}$. По формуле (4.3) находим

$$\int_0^t J_0 (\sqrt{t^2-\tau^2})\, \tau^2 d\tau \to \frac{2}{(p^2+1)^2}.$$

Из формулы (2.5) при $\lambda = 1$ получаем

$$\frac{2}{(p^2+1)^2} \to \sin\tau - \tau\cos\tau.$$

Следовательно,

$$\int_0^t J_0\left(\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\tau^2 d\tau = \sin\tau - \tau\cos\tau.$$

8. $\int_0^\infty J_n(at)\sin\omega t dt$.

Интеграл вычислим по формуле (4.8). Имеем

$$f(t) = \sin\omega t \to \frac{\omega}{p^2+\omega^2} = F(p) \quad \text{и} \quad \varphi(t) = J_n(at) \to$$

$$\to \frac{\left(\sqrt{p^2+a^2}-p\right)^n}{a^n\sqrt{p^2+a^2}} = \Phi(p).$$

Функция $F(q)$ имеет простые полюсы $q = \pm i\omega$, поэтому

$$\int_0^\infty J_n(at)\sin\omega t dt = \lim_{p\to 0} 2\mathrm{Re}\,[\mathrm{Res}\,F(q)\,\Phi(p-q)] =$$

$$= 2\lim_{p\to 0}\mathrm{Re}\left[\frac{\omega}{2i\omega}\frac{\left(\sqrt{(p-i\omega)^2+a^2}-p+i\omega\right)^n}{a^n\sqrt{(p-i\omega)^2+a^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^n\sqrt{a^2-\omega^2}}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\left(\sqrt{a^2-\omega^2}+i\omega\right)^n\right].$$

Имеем

$$\sqrt{a^2-\omega^2}+i\omega = \left|\sqrt{a^2-\omega^2}+i\omega\right| e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\sqrt{a^2-\omega^2}}} = ae^{i\arcsin\frac{\omega}{a}}.$$

Тогда

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\left(\sqrt{a^2-\omega^2}+i\omega\right)^n\right] = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}a^n e^{in\arcsin\frac{\omega}{a}}\right) =$$

$$= a^n\sin\left(n\arcsin\frac{\omega}{a}\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty J_n(at)\sin\omega t dt = \frac{\sin\left(n\arcsin\frac{\omega}{a}\right)}{\sqrt{a^2-\omega^2}}.$$

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4\tau}{\tau^3}\,d\tau.$

В (4.9) положим $\left(\sin^4 t = \frac{1}{8}\cos 4t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{8}\right)$

$$\varphi(t) = \sin^4 t, \qquad \Phi(p) = \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+16} - \frac{4p}{p^2+4} + \frac{3}{p}\right),$$

$$F(p) = \frac{1}{p^3}, \qquad f(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^4\tau}{\tau^3}\,d\tau = \frac{1}{16}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\tau^3}{\tau^3+16} - \frac{4\tau^3}{\tau^2+4} + 3\tau\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\tau}{t^2+4} - \frac{\tau}{t^2+16}\right)d\tau = \ln\sqrt{\frac{t^2+4}{t^2+16}}\Bigg|_0^\infty = \ln 2.$$

10. Пользуясь 7°, § 36, преобразуем интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-\tau\lambda}\cos\tau d\tau = \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$, который получается из равенства $\cos t \to \frac{p}{p^2+1}$ при $p = \lambda$, полагая $\lambda = \sqrt{p}$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\cos\tau d\tau = \frac{1}{p+1}.$$

По формуле (3.17) находим

$$\frac{e^{-\tau\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\cos\tau \to \frac{e^{-\frac{\tau^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}\cos\tau; \qquad \frac{1}{p+1} \to e^{-t}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\cos\tau d\tau = \sqrt{\pi t}\,e^{-t}.$$

*Упражнения.* Вычислить интегралы, пользуясь а) частными случаями теоремы Эфроса:

107. $\int\limits_0^\infty \frac{J_n(a\tau)}{\tau^{n-a}}\,d\tau$. 108. $\int\limits_0^t J_0(\sqrt{t^2-\tau^2})\cos\tau\,d\tau$.

109. $\int\limits_0^\infty \tau^{n+1}e^{-a^2\tau^2}J_n(b\tau)\,d\tau$. 110. $\int\limits_0^t J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)})\,\mathrm{sh}\,2\tau\,d\tau$.

111. $\int\limits_0^\infty J_n(\tau t)\,e^{-\alpha t}\,\frac{dt}{t}$. 112. $\int\limits_0^\infty J_1(2\sqrt{t\tau})\,\mathrm{Si}\,(t)\,\frac{dt}{\sqrt{t}}$.

113. $\int\limits_0^\infty J_0(\beta\tau)\,\tau\sin(\alpha\tau^2)\,d\tau$;

б) теоремой умножения:

114. $\int\limits_0^t (t-\tau)\,J_0(2\sqrt{\tau})\,d\tau$. 115. $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)\,J_0(\tau)\,d\tau$.

116. $\int\limits_0^t \sin(t-\tau)\,J_1(\tau)\,d\tau$. 117. $\int\limits_0^t \sin(t-\tau)\,J_0(\tau)\,d\tau$.

118. $\int\limits_0^t J_0(\tau)\,J_0(t-\tau)\,d\tau$;

в) теоремой умножения оригиналов ($a > b$):

119. $\int\limits_0^\infty J_n(at)\cos bt\,\frac{dt}{t}$. 120. $\int\limits_0^\infty J_n(at)\sin bt\,\frac{dt}{t}$.

121. $\int\limits_0^\infty J_1(at)\sin bt\,dt$. 122. $\int\limits_0^\infty J_0(at)\cos bt\,dt$.

123. $\int\limits_0^\infty J_n(at)\cos bt\,dt$;

г) равенством Парсеваля:

124. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at-\cos bt}{t}\,dt$. 125. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at-a\sin t}{t^2}\,dt$.

126. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at} - \cos at}{t}\, dt$. 127. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at^2} - \cos bt}{t^2}\, dt$.

128. $\int\limits_0^\infty [J_0(t) - e^{-at}] \frac{dt}{t}$;

д) предельными теоремами:

129. $\int\limits_0^\infty \frac{1 - e^{-at}}{te^t}\, dt$. 130. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at} \sin t}{t}\, dt$. 131. $\int\limits_0^\infty te^{-at} \sin bt dt$;

ж) интегралом Лапласа:

132. $\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \cos \tau t dt$. 133. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos \alpha t}{t^4 + 4}\, dt$. 134. $\int\limits_0^\infty \frac{1 - \cos at}{t^2 (b^2 - t^2)}\, dt$.

## § 37. Линейные дифференциальные уравнения

**Интегрирование уравнений с постоянными коэффициентами.** Найдем решение дифференциального уравнения

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = f(t), \qquad (4.11)$$

где $t \geqslant 0$, коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, удовлетворяющие заданным начальным условиям

$$x(0) = c_0, \quad x'(0) = c_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}. \qquad (4.12)$$

Начальные условия (4.12) равны предельным значениям функции $x(t)$ и ее производных при $t \to 0$ справа.

Пусть неизвестная функция $x(t)$, ее производные $x'(t)$, $x''(t)$, ..., $x^{(n)}(t)$ и функция $f(t)$ удовлетворяют условиям функции-оригинала. Обозначим: $f(t) \to F(p)$ и $x(t) \to X(p)$, тогда по свойству дифференцирования оригинала имеем

$$x'(t) \to pX(p) - c_0;$$

$$x''(t) \to p^2 X(p) - pc_0 - c_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{(n-1)}(t) \to p^{n-1} X(p) - p^{n-2} c_0 - \ldots - c_{n-2};$$

$$x^{(n)}(t) \to p^n X(p) - p^{n-1} c_0 - \ldots - c_{n-1}.$$

По свойству линейности получаем

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x \to p^n X - p^{n-1}c_0 - \ldots - c_{n-1} +$$
$$+ a_1 (p^{n-1}X - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}(pX - c_0) + a_n X.$$

Так как $f(t) \to F(p)$, то по теореме единственности оригинала в пространстве изображения получаем уравнение

$$p^n X - p^{n-1}c_0 - \ldots - c_{n-1} + a_1 (p^{n-1}X - p^{n-2}c_0 - \ldots - c_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(pX - c_0) + a_n X = F(p),$$

или

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n) X(p) = F(p) + p^{n-1}c_0 + \ldots$$
$$\ldots + c_{n-1} + a_1 (p^{n-2}c_0 + \ldots + c_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}c_0, \quad (4.13)$$

которое будем называть *операторным* уравнением дифференциального уравнения (4.11) с начальными условиями (4.12). Операторное уравнение (4.13) является алгебраическим уравнением относительно функции $X(p)$. Из уравнения (4.13) находим

$$X(p) = \frac{F(p) + p^{n-1}c_0 + \ldots + a_1 (p^{n-2}c_0 + \ldots + c_{n-2}) + \ldots + a_{n-1}c_0}{p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n}.$$

Если $f(t)$ (правая часть уравнения (4.11)) — линейная комбинация функций вида $t^m e^{\lambda t}$, то изображение $X(p)$, соответствующее искомой функции $x(t)$ уравнения (4.11), представляет собой правильную дробно-рациональную функцию. По изображению $X(p)$ находим функцию $x(t)$. Для этого пользуемся в зависимости от вида функции $X(p)$ либо теоремой обращения, либо другими теоремами операционного исчисления, или непосредственно находим из таблицы формул преобразования Лапласа. По теореме единственности оригинала искомая функция $x(t)$ есть единственная непрерывная функция, которая и будет являться решением уравнения (4.11), удовлетворяющим начальным условиям (4.12).

Примеры.

1. Найдем решение дифференциального уравнения

$$x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$$

при начальных условиях $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

Перейдя к изображениям, получим

$$x \to X,$$

$$x' \to pX + 1,$$
$$x'' \to p^2X + p - 1,$$
$$\cos t + 2\sin t \to \frac{p}{p^2+1} + 2\frac{1}{p^2+1} = \frac{p+2}{p^2+1},$$

и по теореме смещения

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \to \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Операторное уравнение будет

$$p^2X + p - 1 + 4pX + 4 + 4X = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Отсюда

$$X(p) = -\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1](p+2)^2}.$$

Разложим изображение $X(p)$ на элементарные дроби. Имеем

$$-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{[(p+2)^2+1](p+2)^2} = \frac{Ap+B}{(p+2)^2+1} + \frac{C}{(p+2)^2} + \frac{D}{p+2},$$

или

$$-p^3 - 7p^2 - 16p - 11 = (Ap+B)(p+2)^2 + C[(p+2)^2+1] + $$
$$+ D(p+2)[(p+2)^2+1].$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $p$, находим

$$A = -1, \qquad B = -4, \qquad C = 1, \qquad D = 0.$$

Тогда

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Перейдя к оригиналу, пользуясь свойством линейности и теоремой смещения, получаем искомое решение

$$x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t).$$

Действительно, подставив значения функции

$$x(t), \quad x'(t) = e^{-2t}(-2t + 5\sin t + 1) \quad \text{и} \quad x''(t) =$$
$$= e^{-2t}(4t + 5\cos t - 10\sin t - 4)$$

в данное уравнение, получим тождество

$$e^{-2t}(4t + 5\cos t - 10\sin t - 4) + 4e^{-2t}(-2t + 5\sin t + 1) +$$

$$+4e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)\equiv e^{-2t}(\cos t+2\sin t),$$

кроме того,

$$\lim_{t\to 0} x(t)=\lim_{t\to 0}[e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)]=-1,$$

или

$$x(0)=-1,$$

и

$$\lim_{t\to 0} x'(t)=\lim_{t\to 0}[e^{-2t}(-2t+5\sin t+1)]=1,$$

или

$$x'(0)=1.$$

Таким образом,

$$x(t)=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)$$

искомое частное решение данного уравнения.

2. Найдем решение дифференциального уравнения

$$x^{\mathrm{V}}-x'=8\sin t$$

при начальных условиях $x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$, $x^{\mathrm{IV}}(0)=1$.

Так как

$$x(t)\to X(p);$$

$$x'(t)\to pX(p);$$

$$x^{\mathrm{V}}(t)\to p^5X(p)-1;$$

$$\sin t\to\frac{1}{p^2+1},$$

то операторное уравнение будет

$$p^5X-1-pX=\frac{8}{p^2+1}.$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{p^2+9}{p(p^2-1)(p^2+1)^2}.$$

Оригинал для изображения $X(p)$ найдем при помощи теоремы разложения. Функция $X(p)$ имеет простые полюсы $p=0$, $p=\pm 1$ и комплексно-сопряженные полюсы 2-го порядка $p=\pm i$. Обозначим

$$p^2+9=F_1(p),\qquad (p^2-1)(p^2+1)^2=F_3(p),$$

тогда

$$X(p)=\frac{F_1(p)}{pF_3(p)}.$$

Оригинал $x(t)$ определяем по формулам (3.15) и (3.16). Имеем

$$x(t)=\frac{F_1(0)}{F_3(0)}+\sum_{k=1}^{2}\frac{F_1(p_k)}{p_kF'_3(p_k)}e^{p_kt}+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left\{\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\left[(p-p_k)^{m_k}X(p)e^{pt}\right]\right\}.$$

Следовательно,

$$x(t)=\left(\frac{p^2+9}{(p^2-1)(p^2+1)^2}e^{pt}\right)_{p=0}+\left(\frac{p^2+9}{p\left[(p^2-1)(p^2+1)^2\right]'}e^{pt}\right)_{p=1}+$$

$$+\left(\frac{p^2+9}{p\left[(p^2-1)(p^2+1)^2\right]'}e^{pt}\right)_{p=-1}+2\operatorname{Re}\lim_{p\to i}\frac{d}{dp}\left[(p-i)^2\times\right.$$

$$\left.\times\frac{p^2+9}{p(p^2+1)(p^2-1)^2}e^{pt}\right];$$

$$x(t)=-9+\left(\frac{p^2+9}{p(6p^5+4p^3-2p)}e^{pt}\right)_{p=1}+$$

$$+\left(\frac{p^2+9}{p(6p^5+4p^3-2p)}e^{pt}\right)_{p=-1}+2\operatorname{Re}\left(\frac{p^2+9}{p(p^2-1)(p^2+i)^2}e^{pt}\right)'_{p=i};$$

$$x(t)=-9+\frac{5}{4}e^t+\frac{5}{4}e^{-t}+$$

$$+2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{-3p^5-44p^3+27p-p^4i-28p^2i+9i}{p^2(p^2-1)^2(p+i)^3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+t\frac{p^2+9}{p(p^2-1)(p+i)^2}\right)e^{pt}\right]_{p=i},$$

или

$$x(t)=-9+\frac{5}{2}\operatorname{ch}t+2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{13}{4}+\frac{t}{i}\right)e^{it}\right].$$

Итак,

$$x(t)=-9+\frac{5}{2}\operatorname{ch}t+\frac{13}{2}\cos t+2t\sin t$$

искомое решение.

3. Найдем общее решение уравнения

$$x'''-6x''+11x'-6x=12t^2e^{3t}-e^{2t}.$$

Имеем

$$x' \to pX - x(0);$$

$$x'' \to p^2X - px(0) - x'(0);$$

$$x''' \to p^3X - p^2x(0) - px'(0) - x''(0);$$

$$12\, t^2e^{3t} - e^{2t} \to \frac{24}{(p-3)^2} - \frac{1}{p-2}.$$

Запишем операторное уравнение

$$p^3X - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) - 6p^2X + 6px(0) +$$

$$+ 6x'(0) + 11pX - 11x(0) - 6X = \frac{24}{(p-3)^3} - \frac{1}{p-2},$$

или

$$X(p^3 - 6p^2 + 11p - 6) = p^2x(0) + px'(0) + x''(0) -$$

$$- 6px(0) - 6x'(0) + 11x(0) + \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^3(p-2)}.$$

Отсюда

$$X(p) = \frac{p^2x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) - 6x'(0) + 11x(0)}{(p-1)(p-2)(p-3)} +$$

$$+ \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)} = X_1(p) + X_2(p).$$

Разложим $X_1(p)$ и $X_2(p)$ на элементарные дроби. Имеем

$$X_1(p) = \frac{\bar{c}_1}{p-1} + \frac{\bar{c}_2}{p-2} + \frac{\bar{c}_3}{p-3}$$

и

$$X_2(p) = \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)} = \frac{A}{(p-3)^4} + \frac{B}{(p-3)^3} +$$

$$+ \frac{C}{(p-3)^2} + \frac{D}{p-3} + \frac{E}{(p-2)^2} + \frac{F}{p-2} + \frac{G}{p-1},$$

или

$$-p^3 + 9p^2 - 3p - 21 = A(p-2)^2(p-1) + B(p-3)(p-2)^2 \times$$

$$\times (p-1) + C(p-3)^2(p-2)^2(p-1) + D(p-3)^3(p-2)^2(p-1) +$$

$$+ E(p-3)^4(p-1) + F(p-3)^4(p-2)(p-1) + G(p-3)^4(p-2)^2.$$

Из этого тождества находим

$$A = 12,\ B = -18,\ C = 21;\quad D = -23,\ E = 1,\ F = 24,\ G = -1.$$

Тогда

$$\frac{-p^3+9p^2-3p-21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)}=\frac{12}{(p-3)^4}-\frac{18}{(p-3)^3}+\frac{21}{(p-3)^2}-$$

$$-\frac{23}{p-3}+\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{24}{p-2}-\frac{1}{p-1}.$$

Следовательно,

$$X(p)=\frac{\bar{c}_1}{p-1}+\frac{\bar{c}_2}{p-2}+\frac{\bar{c}_3}{p-3}+\frac{12}{(p-3)^4}-\frac{18}{(p-3)^3}+$$

$$+\frac{21}{(p-3)^2}-\frac{23}{p-3}+\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{24}{p-2}-\frac{1}{p-1},$$

или

$$X(p)=\frac{c_1}{p-1}+\frac{c_2}{p-2}+\frac{c_3}{p-3}+\frac{12}{(p-3)^4}-\frac{18}{(p-3)^3}+$$

$$+\frac{21}{(p-3)^2}+\frac{1}{(p-2)^2},$$

где $c_1=\bar{c}_1-1$, $c_2=\bar{c}_2+24$, $c_3=\bar{c}_3-23$ — произвольные постоянные. Перейдя от изображения $X(p)$ к оригиналу $x(t)$, получим общее решение данного дифференциального уравнения

$$x(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}+te^{2t}+(2t^3-9t^2+21t)e^{3t}.$$

*Упражнения.* Найти частные решения дифференциальных уравнений:

135. $4x''+12x'+9x=144e^{-\frac{3}{2}t}$; $x(0)=1$, $x'(0)=0{,}5$.

136. $x''-2x'=e^t(t^2+t-3)$; $x(0)=2$, $x'(0)=2$.

137. $x''+4x'+3x=\operatorname{sh}t\sin t$; $x(0)=0$, $x'(0)=1$.

138. $x''+2x'+x=e^{-t}(\cos t+t)$; $x(0)=1$, $x'(0)=-1$.

139. $x''+6x'+8x=2e^{-t}(\cos 3t+1)$; $x(0)=2$, $x'(0)=1$.

140. $x''+2x'+2x=2e^{-t}\sin t$; $x(0)=x'(0)=1$.

141. $x'''-3x'+2x=8te^{-t}$; $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=1$.

142. $x'''-x''+4x'-4x=5e^{-t}\sin t$; $x(0)=0$, $x'(0)=x''(0)=1$.

143. $x'''+2x''+x'+2e^{-2t}=0$; $x(0)=2$, $x'(0)=x''(0)=1$.

144. $x'''-x''-x'+x=4e^t(6t-1)+3t$; $x(0)=1$, $x'(0)=-1$, $x''(0)=0$.

145. $x''' - x' = 3(2 - t^2)$; $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1$.

146. $x^{IV} - 16x = t^2 + 1$; $\quad x(0) = x'''(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$.

147. $x^{IV} - 16x = 2\sin 2t + e^{-2t}$; $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,
$x'''(0) = 1$.

148. $x^{IV} + 4x'' + 4x = t\sin t$; $\quad x(0) = 1,\ x'(0) = x''(0) =$
$= x'''(0) = 0$.

149. $x^{IV} - x = 2\cos^3 t(\sec^2 t - 1)$; $\quad x(0) = x'(0) = x'''(0) = 0$,
$x''(0) = 1$.

150. $x^{IV} - 2x'' + x = 40\,\mathrm{ch}\,t$; $\quad x(0) = x'(0) = x'''(0)$,
$x''(0) = 2$.

151. $x^{V} - 6x''' + 9x'' = 54t + 18$; $\quad x(0) = x'(0) = 0$,
$x''(0) = x'''(0) = 1$.

152. $x^{IV} + 5x'' + 6x = \sin 2t$; $\quad x(0) = x'(0) = 0$,
$x''(0) = x'''(0) = \frac{1}{2}$.

153. $x^{IV} + 2x'' + x = 0$; $\quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,
$x'''(0) = 1$.

154. $x^{IV} + 10x'' + 9x = 96\sin 2t\cos t$;
$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x'''(0) = 1$.

Найти общее решение уравнений:

155. $x^{IV} + 2x''' + 3x'' + 2x' + x = 1 + t + t^2$.

156. $x^{IV} + x''' = \cos t$.

157. $x^{IV} - 2x'' + x = 16\,\mathrm{ch}\,t + 4(\sin t + \cos t)$.

158. $x'' + 2x' + 2x = e^{-t}(t + \cos t)$.

159. $x'' + x = 2\sin t\sin 2t$.

160. $x^{IV} + 2x''' + 5x'' + 8x' + 4x = \cos t + 40e^t$.

161. $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}(t^2 + t)$.

162. $x''' - 4x = te^{2t} + \sin t + t^2$.

**163.** $x''' - 2x' + 4x = e^{-t}\cos t + e^{t}\sin t.$

**164.** $x''' + x'' - x' + 15x = \sin 2t.$

**Интегрирование уравнений, правая часть которых является кусочно-непрерывной функцией.** Операционный метод решения дифференциальных уравнений применим и к уравнениям, правая часть которых является кусочно-непрерывной функцией. Непрерывную функцию будем называть решением такого рода уравнений, если подстановка этой функции в уравнение обращает его в тождество при всех тех значениях аргумента, при которых функция непрерывна.

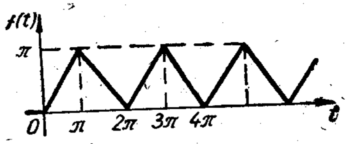


Рис. 59.

Примеры. Найти частные решения уравнений:

1. $x''(t) + 4x(t) = f(t);$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

где

$$f(t) = f(t + 2\pi) = \begin{cases} t - 2n\pi, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -t + 2(n+1)\pi, & (2n+1)\pi \leqslant t < (2n+2)\pi, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 59).

Изображение $f(t)$ равно

$$f(t) \to \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-pt} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left[ \int_0^{\pi} t e^{-pt} dt + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}(-t + 2\pi)\, dt \right] = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left[ \left( -\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right) \Big|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2} - \frac{2\pi e^{-pt}}{p} \right) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] = \frac{1 - e^{-\pi p}}{p^2 (1 + e^{-\pi p})},$$

или

$$f(t) \to \frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}.$$

Функция $f(t)$ непрерывная на интервале $(-\infty, \infty)$; ее производная

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 60) при $t = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ имеет разрывы 1-го рода.

Операторное уравнение заданного уравнения имеет вид

$$p^2 X + 4X = \frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2},$$

отсюда

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}.$$

Оригинал для $X(p)$ найдем по теореме умножения. Изображение функции $f'(t)$ по теореме дифференцирования оригинала равно

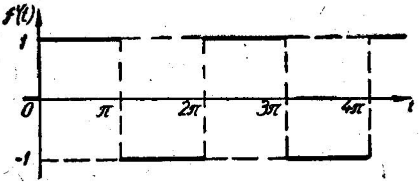

Рис. 60.

$$f'(t) \to p \frac{1}{p^2} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2} - f(0),$$

или

$$f'(t) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2}.$$

Имеем

$$\frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2} \to \begin{cases} 1, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -1, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$\frac{1}{p(p^2+4)} \to \frac{1}{4}(1 - \cos 2t).$$

Оригинал функции $X(p)$ на различных интервалах изменения $t$ выражается следующими формулами. На интервале $0 < t < \pi$

$$X(p) = \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2} \cdot \frac{1}{p(p^2+4)} \to \int_0^t \frac{1}{4}(1 - \cos 2\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right).$$

На интервале $\pi < t < 2\pi$

$$X(p) \to \int_0^\pi \frac{1}{4}(1 - \cos 2\tau)\, d\tau + \int_\pi^t \frac{1}{4}(-1 + \cos 2\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-t + \frac{\sin 2t}{2} + 2\pi\right).$$

На интервале $2\pi < t < 3\pi$

$$X(p) \to \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(1 - \cos 2\tau)\,d\tau + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{4}(-1 + \cos 2\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{2\pi}^{t} \frac{1}{4}(1 - \cos 2\tau) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2} - 2\pi\right).$$

На любом интервале изменения $t$ имеем

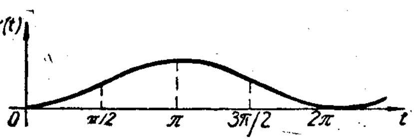


Рис. 61.

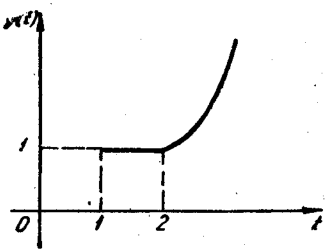


Рис. 62.

$$X(p) \to \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2} - 2\pi n\right), & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ \frac{1}{4}\left[-t + \frac{\sin 2t}{2} + 2(n+1)\pi\right], & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, частное решение $x(t)$ данного уравнения имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2} - 2n\pi\right), & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ \frac{1}{4}\left[-t + \frac{\sin 2t}{2} + 2(n+1)\pi\right], & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ (рис. 61).

Действительно, подставляя значения $x(t)$ и $x''(t)$ в заданное уравнение, получаем тождество

$$x'' + 4x = \frac{1}{2}\sin 2t + 4\cdot\frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2} - 2n\pi\right) \equiv t - 2n\pi.$$

$$2n\pi < t < (2n+1)\pi$$

и

$$x'' + 4x = -\frac{1}{2}\sin 2t + 4\cdot\frac{1}{4}\left[-t + \frac{\sin 2t}{2} + 2(n+1)\pi\right] =$$

$$= -t + 2(n+1)\pi, \qquad (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi.$$

Функция $x(t)$ и ее производные 1-го и 2-го порядка являются непрерывными функциями; производная 3-го порядка

$$x'''(t) \doteq \begin{cases} \cos 2t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi, \\ -\cos 2t, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi, \end{cases}$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$, имеет разрывы 1-го рода в точках $t = n$.

2. $x'''(t) + 6x''(t) + 11x'(t) + 6x(t) = f(t)$; $x(0) = 0$, $x'(0) = x''(0) = 1$,

где

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 1, & 1 < t < 2, \\ t^2 - 4t + 5, & t > 2 \end{cases} \quad \text{(рис. 62).}$$

При помощи единичной функции $\eta(t)$ и теоремы запаздывания функцию $f(t)$ запишем формулой

$$f(t) = \eta(t-1) - \eta(t-2) + (t^2 - 4t + 5)\eta(t-2) =$$

$$= \eta(t-1) + (t-2)^2\eta(t-2).$$

Имеем

$$x(t) \to X(p);$$

$$x'(t) \to pX(p);$$

$$x''(t) \to p^2X(p) - 1;$$

$$x'''(t) \to p^3X(p) - p - 1;$$

$$f(t) \to \frac{e^{-p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p^3}.$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^3X - p - 1 + 6p^2X - 6 + 11pX + 6X = \frac{e^{-p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p^3},$$

или

$$(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)X = p + 7 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{2e^{-2p}}{p^3}.$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{p+7}{(p+1)(p+2)(p+3)}+\frac{e^{-p}}{p(p+1)(p+2)(p+3}+$$
$$+\frac{2e^{-2p}}{p^3(p+1)(p+2)(p+3)}=X_1(p)+X_2(p)+X_3(p).$$

Оригинал для изображения $X(p)$ определим по теореме разложения. $X_1(p)$ имеет простые полюсы $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$, поэтому

$$X_1(p)\to\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{p+7}{[(p+1)(p+2)(p+3)]'}e^{pt}\right)_{p=-k}=$$
$$=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{p+7}{3p^2+12p+11}e^{pt}\right)_{p=-k}.$$

Итак,

$$X_1(p)\to 3e^{-t}-5e^{-2t}+2e^{-3t}.$$

Функция $X_2(p)$ имеет простые полюсы $p_0=0$, $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$. Имеем

$$X_2(p)\to\left(\frac{e^{-p}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\right)_{p=0}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{e^{-p}}{[p(p+1)(p+2)(p+3)]'}e^{pt}\right)_{p=-k}=$$
$$=\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{e^{p(t-1)}}{p(3p^2+12p+11)}\right)_{p=-k}.$$

Следовательно,

$$X_2(p)\to\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-(t-1)}+\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}-\frac{1}{6}e^{-3(t-1)}\right]\eta(t-1).$$

Функция $X_3(p)$ имеет полюс 3-го порядка $p_0=0$ и простые полюсы $p_1=-1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$. Имеем

$$X_3(p)\to\frac{1}{2}\lim_{p\to 0}\left[\frac{d^2}{dp^2}\left(p^3\frac{2e^{-2p}}{p^3(p+1)(p+2)(p+3)}e^{pt}\right]+\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{2e^{-2p}}{[p^3(p+1)(p+2)(p+3)]'}e^{pt}\right)_{p=-k}=$$

$$= \left( \frac{e^{p(t-2)}}{(p+1)(p+2)(p+3)} \right)'_{p=0} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{3} \left( \frac{e^{p(t-2)}}{6p^5 + 30p^4 + 44p^3 + 18p^2} \right)_{p=-k} =$$

$$= \left( 2 \frac{(3p^2 + 12p + 11)^2 - 3(p+1)(p+2)^2(p+3)}{[(p+1)(p+2)(p+3)]^3} e^{p(t-2)} - \right.$$

$$- 2 \frac{(t-2)(3p^2 + 12p + 11)}{[(p+1)(p+2)(p+3)]^2} e^{p(t-2)} + \frac{(t-2)^2}{(p+1)(p+2)(p+3)} e^{p(t-2)} +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{3} \frac{e^{p(t-2)}}{p^2(3p^3 + 15p^2 + 22p + 9)} \right)_{p=-k}.$$

Следовательно,

$$X_3(p) \to \left[ 0{,}85 - \frac{11}{18}(t-2) + \frac{1}{6}(t-2)^2 - e^{-(t-2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} e^{-2(t-2)} - \frac{1}{27} e^{-3(t-2)} \right] \eta(t-2).$$

Таким образом, искомое решение $x(t)$ равно

$$x(t) = 3e^{-t} - 5e^{-2t} + 2e^{-3t} + \left[ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{-(t-1)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6} e^{-3(t-1)} \right] \eta(t-1) + \left[ 0{,}85 - \frac{11}{18}(t-2) + \frac{1}{6}(t-2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} e^{-2(t-2)} - e^{-(t-2)} - \frac{1}{27} e^{-3(t-2)} \right] \eta(t-2).$$

*Упражнения.* Найти частные решения дифференциальных уравнений:

**165.** $x'' + 2x' + 5x = 1 - \eta(t-1); \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

**166.** $x'' + 4x' + 4x = 2e^{-t}[1 - \eta(t-1)];$

$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

**167.** $x'' + 4x = \sin t\,[1 - \eta(t - \pi)];$

$x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

168. $x'' + 6x' + 8x = \sin t - \eta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos t;\ x(0) = x'(0) = 1.$

169. $x'' + 4x' + 20x = \eta\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right)\cos\left(t - \frac{2\pi}{\omega}\right);$

$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

170. $x'' + 7x' + 6x = e^{-2t}\operatorname{sh} t + \eta(t-1); \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

171. $x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2e^{-2t}[1 - \eta(t-3)];$

$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

172. $x'' + x = t\eta(t) - (t-2)\eta(t-2) - (t-4)\eta(t-4) -$

$- \eta(t-4) + (t-5)\eta(t-5); \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

173. $x'' + 4x = \eta(t) - \eta(t-\pi); \quad x(0) = x'(0) = 0.$

174. $x'' + x = f(t); \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \\ -1, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0,\ t > 2. \end{cases}$

175. $x'' + 4x = f(t); \quad x(0) = x'(0) = 0;$

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & 0 < t < 1, \\ -2t + 2, & 1 < t < 2, \\ 0, & t < 0, \quad t > 2. \end{cases}$$

176. $x'' + x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 < t < 1, \\ 4, & t > 1, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

177. $x'' + 9t = f(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1,$

$$f(t) = \begin{cases} t - 1, & 1 < t < 2, \\ -t + 3, & 2 < t < 3, \\ 0, & t < 0, \quad t > 3. \end{cases}$$

178. $x'' - 2x' + x = f(t); \quad x'(0) = x(0) = 0;$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1, \ \text{и}\ 2 < t < 3, \\ 0, & 1 < t < 2, \quad t > 3, \quad t < 0. \end{cases}$$

**Интегрирование уравнений $x^{(n)}(t) \pm ax(t) = f(t)$.** Решения уравнений $x^{(n)}(t) \pm ax(t) = f(t)$ выражаются через функций, называемые синусами высших порядков.

Определение. $k$-ым синусом порядка $n$ называется функция $f(t, k, n)$, имеющая изображение

$$F(p) = \frac{p^{k-1}}{p^n + 1},$$

или

$$f(t, k, n) \to \frac{p^{k-1}}{p^n + 1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция $F(p) = \dfrac{p^{k-1}}{p^n + 1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ является аналитической в бесконечно удаленной точке и $F(\infty) = 0$, следовательно, ее можно разложить в сходящийся ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$. Имеем

$$\frac{p^{k-1}}{p^n + 1} = \frac{p^{k-1}}{p^n} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{p^n}} = \frac{1}{p^{n-k+1}} \left[1 - \frac{1}{p^n} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^\nu \left(\frac{1}{p^n}\right)^\nu + \ldots \right],$$

или

$$\frac{p^{k-1}}{p^n + 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{p^{n\nu+n-k+1}}.$$

Так как

$$\frac{1}{p^{n\nu+n-k+1}} \to \frac{t^{n\nu+n-k}}{(n\nu + n - k)!},$$

то

$$f(t, n, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{t^{\nu n+n-k}}{(n\nu + n - k)!}.$$

Определение. $k$-ым гиперболическим синусом порядка $n$ называется функция $h(t, k, n)$, имеющая изображение

$$F(p) = \frac{p^{k-1}}{p^n - 1},$$

или

$$h(t, k, n) \to \frac{p^{k-1}}{p^n - 1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция $F(p) = \dfrac{p^{k-1}}{p^n - 1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ раскладывается в окрестности точки $p = \infty$ в ряд Лорана

$$\frac{p^{k-1}}{p^n - 1} = \frac{p^{k-1}}{p^n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^n}} =$$

$$= \frac{1}{p^{n-k+1}} \left[ 1 + \frac{1}{p^n} + \ldots + \left( \frac{1}{p^n} \right)^{\nu} + \ldots \right],$$

или

$$\frac{p^{k-1}}{p^n - 1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n\nu+n-k+1}}.$$

Отсюда

$$h(t, k, n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{n\nu+n-k}}{(n\nu + n - k)!}.$$

Синусы высших порядков $f(t, k, n)$ и $h(t, k, n)$ выражаются через показательные и круговые функции (табл. 3).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$x^{\mathrm{IV}}(t) - x(t) = f(t).$$

Имеем

$$x(t) \to X(p),$$

$$x^{\mathrm{IV}}(t) \to p^4 X(p) - p^3 x(0) - p^2 x'(0) - p x''(0) - x'''(0) \text{ и } f(t) \to F(p).$$

Запишем операторное уравнение

$$p^4 X(p) - p^3 x(0) - p^2 x'(0) - p x''(0) - x'''(0) - X(p) = F(p),$$

отсюда

$$X(p) = x(0) \frac{p^3}{p^4 - 1} + x'(0) \frac{p^2}{p^4 - 1} + x''(0) \frac{p}{p^4 - 1} +$$

$$+ x'''(0) \frac{1}{p^4 - 1} + \frac{F(p)}{p^4 - 1}.$$

Пользуясь функциями $f(t, k, n)$ и $h(t, k, n)$ и теоремой умножения, получаем

$$x(t) = x(0) h(t, 4, 4) + x'(0) h(t, 3, 4) + x''(0) h(t, 2, 4) +$$

$$+ x'''(0) h(t, 1, 4) + \int_0^t f(t - \tau) h(\tau, 1, 4)\, d\tau.$$

Из табл. 3, подставляя значение $h(t, k, 4)$, $k = 1, 2, 3, 4$, находим

$$x(t) = x(0)\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t) + x'(0)\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t) +$$

$$+ x''(0)\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t) + x'''(0)\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t f(t-\tau)(\operatorname{sh}\tau - \sin\tau)\,d\tau.$$

Таблица 3

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $f(t, 3, 3) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$ | $\frac{p^2}{p^3+1}$ |
| $f(t, 1, 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}} - \operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{1}{p^4+1}$ |
| $f(t, 2, 4) = \operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$ | $\frac{p}{p^4+1}$ |
| $f(t, 3, 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}} + \operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ | $\frac{p^2}{p^4+1}$ |
| $f(t, 4, 4) = \operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}$ | $\frac{p^3}{p^4+1}$ |
| $h(t, 3, 3) = \frac{1}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t$ | $\frac{p^2}{p^3-1}$ |
| $h(t, 1, 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$ | $\frac{1}{p^4-1}$ |
| $h(t, 2, 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$ | $\frac{p}{p^4-1}$ |
| $h(t, 3, 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t + \sin t)$ | $\frac{p^2}{p^4-1}$ |
| $h(t, 4, 4) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t)$ | $\frac{p^3}{p^4-1}$ |
| $f(t, 6, 6) = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + e^t\right)$ | $\frac{p^5}{p^6+1}$ |
| $h(t, 6, 6) = \frac{1}{3}\left(\operatorname{ch} t + 2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)$ | $\frac{p^5}{p^6-1}$ |

Обозначим

$$\frac{x(0)+x''(0)}{2}=c_1,\quad \frac{x'(0)+x'''(0)}{2}=c_2,\quad \frac{x(0)-x''(0)}{2}=c_3,$$

$$\frac{x'(0)-x'''(0)}{2}=c_4.$$

Тогда

$$x(t)=c_1\operatorname{ch}t+c_2\operatorname{sh}t+c_3\cos t+c_4\sin t+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t f(t-\tau)(\operatorname{sh}\tau-\sin\tau)\,d\tau$$

искомое решение.

*Упражнения*: Найти общее решение уравнений:

179. $x^{IV}(t)+4x(t)=f(t)$. 180. $x^{IV}(t)-x(t)=f(t)$.

181. $x^{IV}(t)+x(t)=f(t)$.

**Решение уравнений с нулевыми начальными условиями при помощи интеграла Дюамеля.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$L[x]=f(t);\quad x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0, \tag{4.14}$$

где

$$L[x]=x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx.$$

Рассмотрим уравнение

$$L[x]=1;\quad x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0, \tag{4.15}$$

где $L[x]$ — левая часть уравнения (4.14). Если $x_1(t)$ — решение уравнения (4.15), то при помощи интеграла Дюамеля можно найти решение $x(t)$ уравнения (4.14). Действительно, так как

$$\begin{array}{lcl} x(t)\to X(p), & & x_1(t)\to X_1(p),\\ x'(t)\to pX(p), & & x_1'(t)\to pX_1(p),\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \text{и} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ x^{(n)}(t)\to p^nX(p), & & x_1^{(n)}(t)\to p^nX_1(p),\\ f(t)\to F(p) & & 1\to\dfrac{1}{p}, \end{array}$$

то для уравнений (4.14) и (4.15) соответственно получаем операторные уравнения

$$A(p)X(p)=F(p)\quad\text{и}\quad A(p)X_1(p)=\frac{1}{p},$$

где

$$A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n.$$

Отсюда

$$X(p) = pX_1(p) F(p).$$

Тогда решение $x(t)$ уравнения (4.14) найдем по интегралу Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau)\, d\tau,$$

или

$$x(t) = \int_0^t x_1(\tau) f'(t-\tau)\, d\tau.$$

Пример. Найти частное решение уравнения

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x'' + x = \cos t; \qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

Найдем решение $x_1(t)$ уравнения

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x'' + x = 1; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

Имеем

$$x_1(t) \to X_1(p), \qquad x_1^{\mathrm{IV}} \to p^4 X_1(p),$$

$$x_1''(t) \to p^2 X_1(p), \qquad 1 \to \frac{1}{p}.$$

Операторное уравнение будет

$$p^4 X_1 + 2p^2 X_1 + X_1 = \frac{1}{p}.$$

Отсюда

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)^2}.$$

Оригинал для функции $X_1(p)$ находим по теореме разложения Функция $X_1(p)$ имеет простой полюс $p = 0$ и комплексно-сопряженные полюсы 2-го порядка $p = \pm i$. Следовательно,

$$x_1(t) = \left(\frac{1}{(p^2+1)^2}\right)_{p=0} + 2\mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dp}\left[(p-i)^2 \frac{1}{p(p^2+1)^2} e^{pt}\right]\right\}_{p=i} =$$

$$= 1 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{tp^2 - 3p + (tp-1)i}{p^2(p+i)^3} e^{pt}\right)_{p=i} =$$

$$= 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t.$$

Таким образом,

$$x_1(t) = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t.$$

По интегралу Дюамеля

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, x_1'(t-\tau)\, d\tau$$

найдем частное решение $x(t)$ заданного уравнения. Имеем

$$x(t) = \int_0^t \cos\tau \cdot \frac{1}{2}[\sin(t-\tau) - (t-\tau)\cos(t-\tau)]\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\tau\sin t + \frac{\cos(t-2\tau)}{2} - (t-\tau)\left(\tau\cos t - \frac{\sin(t-2\tau)}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau^2}{2}\cos t + \frac{\cos(t-2\tau)}{4}\right]\Bigg|_0^t = \frac{1}{8}t(\sin t - t\cos t).$$

Итак, искомое решение будет

$$x(t) = \frac{1}{8}t(\sin t - t\cos t).$$

*Упражнения.* Найти частные решения дифференциальных уравнений:

182. $x'' + 3x' + 2x = e^t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$

183. $x'' - 4x' + 4x = 8(t^2 + e^{2t} + \sin 2t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$

184. $x^{IV} - 2x'' + x = 24t\cos t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) =$
$= x'''(0) = 0.$

185. $x''' - 6x'' + 11x' + 6x = 1; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

186. $x^{IV} + 2x'' + x = t\sin t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) =$
$= x'''(0) = 0.$

187. $x''' + x = \frac{1}{2}t^2e^t; \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

**Системы уравнений с постоянными коэффициентами.** Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами также можно решать при помощи операционного метода. Решается оно аналогично интегрированию одного уравнения. Решение системы уравнений рассмотрим на примере.

П р и м е р. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} x'' + x' + y'' - y = e^t, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t} \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Имеем

$$x(t) \to X(p), \qquad y(t) \to Y(p),$$
$$x'(t) \to pX, \qquad y'(t) \to pY,$$
$$x''(t) \to p^2X - 1, \qquad y''(t) \to p^2Y,$$
$$e^t \to \frac{1}{p-1}, \qquad e^{-t} \to \frac{1}{p+1}.$$

Запишем систему операторных уравнений

$$p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y = \frac{1}{p-1},$$
$$pX + 2X - pY + Y = \frac{1}{p+1}.$$

Решая эту систему, получаем

$$X(p) = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+1};$$
$$Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Перейдем к оригиналам. Из равенств $\frac{1}{p+1} \to e^t$ и $\frac{1}{p^2-1} \to \operatorname{sh} t$ по теореме дифференцирования изображения находим

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' \to -te^{-t} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{p^2-1}\right)' \to -t\operatorname{sh} t,$$

или

$$\frac{1}{(p+1)^2} \to te^{-t} \quad \text{и} \quad \frac{2p}{(p^2-1)^2} \to t\operatorname{sh} t.$$

Следовательно, решение системы будет

$$x(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sh} t + \frac{3}{4}te^{-t} \quad \text{и} \quad y(t) = \frac{3}{4}t\operatorname{sh} t.$$

*Упражнения.* Найти частные решения системы дифференциальных уравнений:

188.
$$\begin{cases} x'' + x - y - z = 0, \\ y'' = x - y + z, \\ z'' = x + y - z; \end{cases} \qquad \begin{array}{l} x(0) = y(0) = z(0) = 1, \\ x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0. \end{array}$$

189. $\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, & x(0) = x'(0) = 1, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0; & y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

190.

$$\begin{cases} x'' - x + y + z = 0, & x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = \\ x + y'' - y + z = 0, & = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0. \\ x + y + z'' - z = 0; & \end{cases}$$

191.

$$\begin{cases} x'' - 4x - y' - 2y + z' - 2z = 0, & x(0) = y(0) = z(0) = 1 \\ 2x' - y'' + 3y + z'' - 4z = 0, & x'(0) = 2, \quad y'(0) = 3 \\ x' - 2x - y + z'' - 4z = 0; & z'(0) = 1. \end{cases}$$

192. $\begin{cases} x' + 2x + y = \sin t, \\ y' - 4x - 2y = \cos t; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$

193. $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = \frac{1}{2}\sin 2t, & x(0) = y(0) = x'(0) = 0, \\ y'' - x - 3y = -t; & y'(0) = 1. \end{cases}$

194. $\begin{cases} x' - x + 2y = 0, & x(0) = 0, \quad x'(0) = -1, \\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t; & y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

195. $\begin{cases} x' = z - y, & x(0) = z(0) = 0, \\ y' = z + 2e^{-t}, & y(0) = 0{,}5. \\ z' = z - x; & \end{cases}$

196. $\begin{cases} 3tx' - 2x - y + z = 0, & x(1) = y(1) = z(1) = 1. \\ 2ty' - x - 3y - z = 0, & \\ 6tz' + x - 7y - 5z = 0; & \end{cases}$

197. Найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x + y'' + y' + 2y = 0, \\ x'' + x' + 2x + y'' + 3y = 0. \end{cases}$$

**Уравнение с запаздывающим аргументом.** В прикладных задачах, особенно в теории автоматического регулирования, рассматриваются физические системы с процессами последействия, когда состояние системы в момент времени $t$ влияет на ее состояние в последующие моменты времени. Такие процессы описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом.

Уравнение вида

$$x^{(n)}(t)+\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t-\tau_k)=f(t), \qquad 0 \leqslant t<\infty, \tag{4.16}$$

$a_k$, $\tau_k \geqslant 0$ — числа; $0 \leqslant \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1}$, называется уравнением с запаздывающим аргументом. Пусть для простоты $x^{(k)}(0)=0$, $k=0, 1, \ldots, n-1$, и неизвестная функция $x(t)$ удовлетворяет условиям оригинала. Тогда $x(t) \to X(p)$, $x^{(k)}(t) \to p^k X(p)$ и $f(t) \to F(p)$.

Пользуясь теоремой запаздывания, запишем для (4.16) операторное уравнение. Имеем

$$\left(p^n+\sum_{k=1}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}\right) X(p)=F(p).$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{F(p)}{p^n+\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \tag{4.17}$$

Переходя к оригиналу, получим $x(t)$ — искомое решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям. Так как знаменатель изображения (4.17) имеет сложный вид, то переход к оригиналу связан с громоздкими преобразованиями изображения. В таких случаях уравнение (4.16) удобно решать операционным методом в комбинации с методом шагов.

Пример. Решить уравнение

$$x''(t)+2x'(t-2)+x(t-4)=t; \qquad x(0)=x'(0)=0.$$

Операторное уравнение будет

$$p^2 X(p)+2pe^{-2p}X(p)+e^{-4p}X(p)=\frac{1}{p^2}.$$

Отсюда

$$X(p)=\frac{1}{p^2(p+e^{-2p})^2}=\frac{1}{p^4}\left(1+\frac{e^{-2p}}{p}\right)^{-2}=$$

$$=\frac{1}{p^4}\left(1-2\frac{e^{-2p}}{p}+3\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)^2-4\left(\frac{e^{-2p}}{p}\right)^3+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{p^4}-2\frac{e^{-2p}}{p^5}+3\frac{e^{-4p}}{p^6}-4\frac{e^{-6p}}{p^7}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)e^{-2kp}}{p^{(k+4)}}.$$

Переходя к оригиналу, получим

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)(t-2k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta(t-2k).$$

Операционным методом можно решить основную начальную задачу уравнения с запаздывающим аргументом, которая формулируется следующим образом. Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, например,

$$x'(t) = f[t, x(t), x(t-\tau)],$$

где постоянное запаздывание $\tau > 0$, найти непрерывное решение $x(t)$ для $t > t_0$ при условии, что задана непрерывная начальная функция $x(t) = \varphi(t)$ на отрезке $t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$ (рис. 63), который называется начальным множеством, причем предполагается, что $\varphi(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0 + 0} x(t) = x(t_0)$.

Пример. Найти решение уравнения

$$x'(t) = x(t-1);$$

$$\varphi(t) = t, \quad -1 \leqslant t \leqslant 0.$$

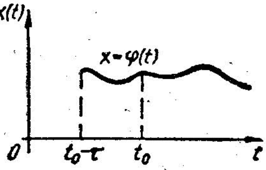

Рис. 63.

Имеем

$$x(t) \to X(p),$$

$$x'(t) \to pX(p),$$

$$x(0) = \varphi(0) = 0.$$

По теореме опережения

$$x(t-1) \to e^{-p}\left[\int_{-1}^{0} e^{-pt}\varphi(t)\,dt + X(p)\right]. \tag{4.18}$$

Интегрируя по частям интеграл в правой части (4.18), находим

$$\int_{-1}^{0} e^{-pt}t\,dt = \frac{e^p - 1}{p^2} - \frac{e^p}{p}.$$

Итак,

$$x(t-1) \to \frac{1-e^{-p}}{p^2} - \frac{1}{p} + e^{-p}X(p).$$

Операторное уравнение будет

$$pX(p) = \frac{1-e^{-p}}{p^2} - \frac{1}{p} + e^{-p}X(p).$$

Отсюда

$$X(p) = -\frac{1}{p(p-e^{-p})} + \frac{1-e^{-p}}{p^2(p-e^{-p})},$$

или

$$X(p) = -\frac{1}{p^2}\left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \ldots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \ldots\right) +$$

$$+\frac{1-e^{-p}}{p^3}\left(1+\frac{e^{-p}}{p}+\ldots+\frac{e^{-kp}}{p^k}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{p^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kp}}{p^{k+2}}+\frac{1}{p^3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kp}}{p^{k+3}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kp}}{p^{k+3}}=$$

$$=-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kp}}{p^{k+2}}.$$

Для $x(t)$ получаем

$$x(t)=\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\eta(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k).$$

*Упражнения.* Найти решения уравнений:

198. $x''(t)-2x'(t-1)+x(t-2)=1;\ x(0)=x'(0)=0.$

199. $x''(t)-2x'(t-1)=t;\ x(0)=x'(0)=0.$

200. $x'(t)-x(t-1)=1,\ x(0)=0.$

201. $x'(t)=x(t-1);\ \varphi(t)=t,\ -1\leqslant t\leqslant 0.$

202. $x'(t)=x(t-1)+t,\ \varphi(t)=1,\ -1\leqslant t\leqslant 0.$

203. $x'(t)+x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad \varphi(t)=\cos t,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 0.$

**Уравнения Бесселя и Лагерра.** 1°. Уравнение Бесселя:

$$t^2x''+tx'+(t^2-n^2)x=0.$$

Имеем

$$x(t)\to X(p);$$

$$x'(t)\to pX(p)-x(0);$$

$$x''(t)\to p^2X(p)-px(0)-x'(0)$$

и по теореме дифференцирования изображения

$$t^2x\to X''(p);$$

$$tx'\to -X(p)-pX'(p);$$

$$t^2x''\to p^2X''(p)+4pX'(p)+2X(p).$$

Операторное уравнение будет

$$(p^2+1)X''(p)+3pX'(p)+(1-n^2)X(p)=0.$$

Заменяя $p = \operatorname{sh} u$, $X(p) = \dfrac{z(u)}{\operatorname{ch} u}$, получим уравнение

$$z''(u) - n^2 z(u) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$z = c_1 (\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u)^n + c_2 (\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u)^n,$$

или

$$X(p) = \frac{c_1 (\sqrt{p^2+1} + p)^n + c_2 (\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Найдем постоянные интегрирования $c_1$ и $c_2$. Полагая $n = 0$ и $n = 1$, получаем

$$J_0(t) \rightarrow \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{p^2+1}} \quad \text{и} \quad J_1(t) \rightarrow c_1 + c_2 + \frac{p(c_1 - c_2)}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Отсюда, пользуясь (2.14) и учитывая, что $J_0(0) = 1$ и $J_1(0) = 1$, имеем:

$$c_1 + c_2 = 1;$$

$$c_1 + c_2 + c_1 - c_2 = 0.$$

Итак, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. Следовательно,

$$X(p) = \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Согласно (2.28) $x(t) = J_n(t)$.

2°. Уравнение Лагерра:

$$tx''(t) + (1 - t)\, x'(t) + nx(t) = 0.$$

Имеем

$$x(t) \rightarrow X(p);$$

$$x'(t) \rightarrow pX(p) - x(0);$$

$$x''(t) \rightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0);$$

$$tx''(t) \rightarrow -2pX(p) - p^2 X'(p) + x(0);$$

$$tx'(t) \rightarrow -X(p) - pX'(p).$$

Операторное уравнение будет

$$(p - p^2)\, X'(p) + (1 + n - p)\, X(p) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{X'(p)}{X(p)} = \frac{1 + n - p}{p(p-1)},$$

или

$$\frac{dX(p)}{X(p)} = \left(\frac{n}{p-1} - \frac{n+1}{p}\right) dp.$$

Решение этого уравнения будет

$$X(p) = c_1 \frac{(p-1)^n}{p^{n+1}} = \frac{c_1}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n,$$

или

$$X(p) = c_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{1}{p^{k+1}}, \tag{4.19}$$

где $c_1$ — постоянная интегрирования.

Из (4.19) имеем

$$x(t) = c_1 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{(k!)^2} \cdot \frac{t^k}{(n-k)!}.$$

Решение $x(t)$ уравнения Лагерра при целом $n > 0$ называется многочленом Лагерра

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{n!}{k!}\right)^2 \frac{t^k}{(n-k)!}, \quad L_n(0) = n!.$$

Следовательно, $c_1 = L_n(0) = n!$

Итак,

$$x(t) = L_n(t).$$

Таким образом,

$$L_n(t) \to \frac{n!}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

Отсюда по теореме смещения

$$e^{-t} L_n(t) \to n! \frac{p^n}{(p+1)^{n+1}}. \tag{4.20}$$

Согласно (1.13) и теореме смещения $f(t) = t^n e^{-t} \to \dfrac{n!}{(p+1)^{n+1}}$. Так как $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{n-1}(0) = 0$, то по теореме дифференцирования оригинала находим

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \to p^n \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}. \tag{4.21}$$

Из (4.20) и (4.21) получаем

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \to \frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n. \qquad (4.22)$$

Пользуясь (4.22), найдем

$$L_{n+1}(t) + n^2 L_{n-1}(t) \to \frac{(n+1)!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n+1} + n\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{n-1} =$$

$$= (2n+1)\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \frac{p-n-1}{p(p-1)}.$$

Согласно теоремы дифференцирования изображения имеем

$$tL_n(t) \to -\left[\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n\right]' = \frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \frac{p-n-1}{p(p-1)}.$$

Тогда

$$(2n+1)\frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n - \frac{n!}{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)^n \frac{p-n-1}{p(p-1)} = (2n+1-t)L_n.$$

Итак, получаем рекуррентную формулу

$$L_{n+1}(t) + n^2 L_{n-1}(t) = (2n+1-t)L_n.$$

## § 38. Интегральные уравнения типа свертки

Уравнение вида

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_\alpha^\beta k(t,\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad \alpha < t < \beta, \qquad (4.23)$$

где $f(t)$ — неизвестная функция, $\varphi(t)$ и $k(t,\tau)$ — заданные функции, $a$, $\lambda$, $\alpha$ и $\beta$ — постоянные, называется линейным интегральным уравнением Фредгольма[1] 1-го рода, если $a = 0$, или 2-го рода, если $a \neq 0$.

Функция $k(t,\tau)$, которая определяется на плоскости $(t, \tau)$ в квадрате $t > \alpha$, $\tau < \beta$, называется ядром интегрального уравнения. Если $\varphi(t) = 0$, то уравнение называется однородным.

Уравнение

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_\alpha^t k(t,\tau)\, d\tau$$

[1] Ивар Фредгольм (1866—1927) и Вито Вольтерра (1860—1940) — итальянские математики, основоположники теории интегральных уравнений.

называется линейным интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода, если $a = 0$, или 2-го рода, если $a \neq 0$.

Если ядро уравнения $k(t, \tau)$ зависит только от разности $t - \tau$, т. е. $k(t, \tau) = k(t - \tau)$, то интеграл

$$\int_0^t k(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = k(t) * f(t)$$

есть свертка функций $k(t)$ и $f(t)$. В этом случае уравнение Вольтерра

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^t k(t, \tau) f(\tau)\, d\tau \tag{4.24}$$

будет уравнением типа свертки и его решение можно найти операционным методом, пользуясь теоремой умножения.

**Интегральные уравнения 2-го рода.** Если интеграл $\int_0^\infty e^{-pt} k(t) * f(t)\, dt$ абсолютно сходится, то преобразование Лапласа переводит свертку $k(t) * f(t)$ по теореме умножения в произведение изображений, т. е.

$$k(t) * f(t) \to K(p) F(p).$$

Следовательно, уравнение (4.24) после преобразования $f(t) \to F(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(p)$, $k(t) \to K(p)$ перейдет в операторное уравнение

$$aF(p) = \Phi(p) + \lambda K(p) F(p).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{a - \lambda K(p)},$$

или

$$F(p) = \frac{1}{\alpha} \Phi(p) + \frac{\lambda}{a} \cdot \frac{K(p)}{a - \lambda K(p)} \Phi(p).$$

Обозначим

$$\frac{K(p)}{a - \lambda K(p)} = \Psi(p),$$

и пусть $\Psi(p) \to \psi(t)$, тогда

$$F(p) = \frac{1}{a} \Phi(p) + \frac{\lambda}{a} \Psi(p) \Phi(p)$$

переходит в равенство

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \psi(t) * \varphi(t).$$

В частности, если функция $k(t)$ многочлен $k(t) = a_0 + a_1 t + \ldots$ $\ldots + a_n t^n$, то ее изображение $K(p)$ будет

$$K(p)=\frac{a_0}{p}+a_1\frac{1}{p^2}+\ldots+a_n\frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Тогда

$$\Psi(p)=\frac{K(p)}{a-\lambda K(p)}=\frac{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+n!a_n}{ap^{n+1}-\lambda a_0p^n-\lambda a_1p^{n-1}-\ldots-\lambda a_n n!}$$

правильная дробно-рациональная функция и ее оригинал $\psi(t)$ можно найти по теореме разложения.

Следовательно, решение $F(p)$ операторного уравнения, соответствующего интегральному уравнению 2-го рода типа свертки, всегда можно преобразовать в пространство оригиналов.

Пример. Найти решение интегрального уравнения 2-го рода

$$f(t)=\sin t+\frac{1}{2}\int\limits_0^t(t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau.$$

Переходя к изображениям, получим

$$f(t)\to F(p),\quad \sin t\to\frac{1}{p^2+1};$$

$$\int\limits_0^t(t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau=t^2*f(t)\to\frac{2}{p^3}F(p).$$

Операторное уравнение будет

$$F(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{2}\frac{2}{p^3}F(p),$$

отсюда

$$F(p)=\frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}.$$

Разложим изображение $F(p)$ на элементарные дроби. Имеем

$$\frac{p^3}{(p-1)(p^2+1)(p^2+p+1)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+1}+\frac{Dp+E}{p^2+p+1},$$

или

$$p^3=A(p^2+1)(p^2+p+1)+(Bp+C)(p^3-1)+$$
$$+(Dp+E)(p-1)(p^2+1).$$

Находим

$$A=\frac{1}{6},\ B=\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2},\ D=-\frac{2}{3},\ E=-\frac{1}{3},$$

тогда

$$F(p)=\frac{1}{6(p-1)}+\frac{p+1}{2(p^2+1)}-\frac{2p+1}{3(p^2+p+1)}.$$

Следовательно, искомое решение будет

$$f(t)=\frac{1}{6}\left(e^t+3\cos t+3\sin t-4e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

*Упражнения.* Проинтегрировать уравнения Вольтерра 2-го рода типа свертки:

204. $f(t)=\sin t+\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau.$

205. $f(t)=t+\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

206. $f(t)=t+2-2\cos t-\int\limits_0^t (t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

207. $f(t)=t^2+\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau.$

208. $f(t)=\cos t+\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau.$

209 $f(t)=1+\int\limits_0^t e^{t-\tau}f(\tau)\,d\tau.$

210. $f(t)=\sin 2t-\int\limits_0^t e^{t-\tau}f(t)\,d\tau.$

211. $f(t)=\cos 3t+\int\limits_0^t e^{t-\tau}f(\tau)\,d\tau.$

212. $f(t)=e^{-2t}+3\int\limits_0^t e^{-(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau.$

213. $f(t)=\sin 2t-\frac{8}{3}\int\limits_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

214. $f(t)=\cos 5t-\frac{7}{4}\int\limits_0^t \operatorname{sh} 4(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

215. $f(t)=e^{3t}+\frac{9}{4}\int\limits_0^t \operatorname{sh} 4(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

216. $f(t)=t^3+\int\limits_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

217. $f(t)=t+2\int\limits_0^t \cos(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

218. $f(t)=e^{2t}+\cos 3t+\int\limits_0^t \sin(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$

**Интегральные уравнения 1-го рода.** Интегральному уравнению 1-го рода

$$\varphi(t)=\lambda\int\limits_0^t k(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{4.25}$$

соответствует операторное уравнение

$$\Phi(p)=\lambda K(p)F(p),$$

решение которого

$$F(p)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{K(p)}\Phi(p) \tag{4.26}$$

нельзя перевести при помощи теоремы умножения в пространство оригиналов, так как функция $\frac{1}{K(p)}$ не является изображением ($\lim\limits_{p\to\infty}K(p)=0$ — необходимое условие существования изображения). Однако в некоторых случаях интегральное уравнение 1-го рода имеет решение. Если функции $k(t)$ и $\varphi(t)$ дифференцируемы и $k(0)\neq 0$, то, продифференцировав уравнение (4.25), получим интегральное уравнение 2-го рода

$$\varphi'(t)=\lambda\int\limits_0^t k'(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+k(0)f(t),$$

решение которого существует.

Если $k(0)=k'(0)=\ldots=k^{n-1}(0)=0$, а $k^{(n)}(0)\neq 0$, то после $(n+1)$-кратного дифференцирования уравнения (4.25) получим интегральное уравнение 2-го рода

$$\varphi^{(n+1)}(t)=\lambda\int\limits_0^t k^{(n+1)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+k^{(n)}(0)f(t).$$

**Пример.** Найти решение интегрального уравнения 1-го рода

$$1-\cos t=\int\limits_0^t \operatorname{sh}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Так как ядро $k(t)=\operatorname{sh}t$ — дифференцируемая функция и $k'(0)\neq 0$, то данное уравнение имеет решение. Перейдя к изображениям, получим

$$1-\cos t\to\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{1}{p(p^2+1)}$$

и

$$\int_0^t \operatorname{sh}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau = \operatorname{sh} t * f(t) \to \frac{1}{p^2-1} F(p).$$

Операторное уравнение будет

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2-1} F(p).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{p^2-1}{p(p^2+1)} = 2\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}.$$

Перейдя к оригиналу, найдем искомое решение

$$f(t) = 2\cos t - 1.$$

*Упражнения.* Проинтегрировать уравнения Вольтерра 1-го рода:

**219.** $\sin t = \int\limits_0^t \cos(t-\tau) f(\tau)\,d\tau.$ **220.** $t^3 = \int\limits_0^t (t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau.$

**221.** $1-\cos t = \int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau.$

**222.** $\sin^2 t = \int\limits_0^t \sin(t-\tau) f(\tau)\,d\tau.$

**223.** $t^4 = \int\limits_0^t (2t^3 - 3t^2\tau + \tau^3) f(\tau)\,d\tau.$

**Системы интегральных уравнений.** Решение системы интегральных уравнений рассмотрим на примере.

Пример. Найти решение системы

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \int\limits_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = t + \int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = 1 + \int\limits_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

Пусть

$$x(t) \to X(p),$$

$$y(t) \to Y(p),$$
$$z(t) \to Z(p).$$

Тогда

$$\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1*y(t) \to \frac{1}{p} Y(p),$$

$$\int_0^t z(\tau)\,d\tau = 1*z(t) \to \frac{1}{p} Z(p),$$

$$\int_0^t x(\tau)\,d\tau = 1*x(t) \to \frac{1}{p} X(p).$$

Система операторных уравнений будет

$$\begin{cases} X(p) = \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} Y(p), \\ Y(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p} Z(p), \\ Z(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} X(p). \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$X(p) = \frac{4}{3}\frac{1}{p-1} - \frac{4}{3}\frac{p+2}{p^2+p+1} = -\frac{4}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{4}{3}\frac{1}{p-1},$$

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{p-1} - \frac{4}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}},$$

$$Z(p) = -\frac{3}{p} + \frac{4}{3}\frac{1}{p-1} + \frac{8}{3}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Перейдя в пространство оригиналов, находим решение системы

$$x(t) = \frac{4}{3}e^t - \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$y(t) = -2t + \frac{4}{3}e^t - \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t,$$

$$z(t) = -3 + \frac{4}{3}e^t + \frac{8}{3}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

*Упражнения.* Решить системы интегральных уравнений:

224. $$\begin{cases} x(t) = t + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = 1 + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

225. $$\begin{cases} x(t) = 2t - \int_0^t (t-\tau)\,x(t)\,d\tau + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = -2 - 4\int_0^t x(\tau)\,d\tau + 3\int_0^t (t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

226. $$\begin{cases} x(t) = 2 + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = 9t - t^2 - t^4 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = 15 + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

227. $$\begin{cases} x(t) = t + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = 1 - t^3 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = 2t^2 + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

228. $\begin{cases} x(t) = t + \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = 1 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$

229. $\begin{cases} x(t) = 1 - \int_0^t y(\tau)\,d\tau, \\ y(t) = \cos t - 1 + \int_0^t z(\tau)\,d\tau, \\ z(t) = \cos t + \int_0^t x(\tau)\,d\tau. \end{cases}$

**Особые уравнения.** Интегральное уравнение (4.23) называется особым, если ядро $k(t, \tau)$ обращается в бесконечность в одной или нескольких точках отрезка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, либо один или оба предела интегрирования $\alpha$ и $\beta$ бесконечны. Рассмотрим решения частных случаев особых уравнений, которые можно найти операционным методом.

1°. Пусть ядро $k(t)$ уравнения (4.25) при $t = 0$ обращается в бесконечность и не имеет производных. Введем свертку $f(t)*1 = \int_0^t f(\tau)\,d\tau = g(t)$, тогда по свойству интегрирования оригинала получаем

$$g(t) \to G(p) = \frac{1}{p} F(p), \quad f(0) = 0,$$

и равенство (4.26) примет вид

$$G(p) = \frac{1}{\lambda p K(p)} \Phi(p). \tag{4.27}$$

По предельной теореме

$$\lim_{p\to\infty} pK(p) = \lim_{t\to 0} k(t) = \infty,$$

поэтому

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{pK(p)} = 0.$$

Следовательно, функция $\frac{1}{pK(p)}$ является изображением. Равенство

(4.27), пользуясь теоремой умножения, можно перевести в пространство оригиналов. Примером особого интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода, встречающегося во многих областях физики, является интегральное уравнение Абеля[1]

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau = \varphi(t), \quad 0<\alpha<1.$$

Это уравнение при $\alpha = \frac{1}{2}$ Абель получил (1825) при решении задачи о таутохроне: найти кривую, вдоль которой материальная точка, скользя без трения, достигает наинизшего положения за одно и то же время независимо от ее начального положения.

2°. Пусть особое уравнение

$$af(t) = \varphi(t) + \lambda \int_0^\infty k(t, \tau) f(\tau)\,d\tau$$

имеет ядро $k(t, \tau)$ такого вида, как функция $\varphi(t, \tau) \to \Phi(p) e^{-\tau q(p)}$ в частных случаях теоремы Эфроса (§ 34). Тогда можно составить операторное уравнение, соответствующее данному интегральному уравнению, решение которого переводится в пространство оригиналов.

Примеры. Найти решение особых уравнений:

1. $\varphi(t) = \int_0^t \ln(t-\tau) f(\tau)\,d\tau.$

Так как ядро $k(t) = \ln t|_{t=0} = \infty$, то данное уравнение особое. По формуле (2.7)

$$\ln t \to -\frac{1}{p}\ln(\gamma p) = K(p).$$

Пользуясь (4.27), запишем операторное уравнение

$$G(p) = -\frac{1}{\ln(\gamma p)}\cdot\Phi(p).$$

Найдем оригинал функции $\frac{1}{\ln(\gamma p)}$. Интегрируя равенство (1.13) по параметру $\alpha$ в пределах от 0 до $\infty$, получаем

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\alpha \to \int_0^\infty \frac{d\alpha}{p^{\alpha+1}} = -\frac{1}{p^{\alpha+1}\ln p}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p\ln p}.$$

---

[1] Н. Г. Абель (1802—1829) — норвежский математик, один из величайших математиков XIX века.

По теореме подобия находим

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\alpha \to \frac{1}{p\ln(\gamma p)}.$$

Следовательно,

$$g(t) = -\int_0^\infty \frac{t^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\alpha * \varphi(t),$$

или

$$g(t) = -\int_0^t \left[\int_0^\infty \frac{\tau^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\alpha\right]\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Искомое решение будет

$$f(t)=g'(t)=-\int_0^t \left[\int_0^\infty \frac{\tau^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\alpha\right]\varphi'(t-\tau)\,d\tau-\varphi(0)\int_0^\infty \frac{t^\alpha\gamma^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,d\alpha.$$

2. $\displaystyle\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\,d\tau = \varphi(t), \quad 0<\alpha<1.$

Изображение ядра $k(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}$ будет

$$k(t)=t^{-\alpha}\to\frac{\Gamma(1-\alpha)}{p^{1-\alpha}}=K(p).$$

Так как ядро $k(t)=\dfrac{1}{t^\alpha}$ при $t=0$ обращается в бесконечность и не имеет производных, то операторное уравнение для уравнения Абеля определяем по формуле (4.27)

$$G(p)=\frac{1}{pK(p)}\Phi(p).$$

Подставляя в эту формулу значение изображения $K(p)$, получаем

$$G(p)=\frac{1}{p^\alpha\Gamma(1-\alpha)}\Phi(p).$$

Оригинал $G(p)$ находим по теореме умножения. Имеем

$$g(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}t^{\alpha-1}*\varphi(t),$$

или согласно (2.16)

$$g(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^t \tau^{\alpha-1}\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Отсюда при условии, что функция $g(t)$ дифференцируема, находим решение уравнения Абеля

$$f(t)=g'(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\int_0^t \tau^{\alpha-1}\varphi'(t-\tau)\,d\tau+\varphi(0)\,t^{\alpha-1}\right]. \qquad (4.28)$$

3. $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}f(\tau)\,d\tau=\sin t.$

Полагая в формуле (4.28) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\varphi(t)=\sin t$, получаем

$$f(t)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}\int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}}\cos(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left(\cos t\int_0^t \frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau+\sin t\int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau\right),$$

где $\displaystyle\int_0^t \frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau=C(t)$ и $\displaystyle\int_0^t \frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}\,d\tau=S(t)$ — интегралы Френеля. Следовательно,

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[\cos tC(t)+\sin tS(t)]$$

есть искомое решение.

4. $\displaystyle f(t)=t^{\alpha}+\lambda\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}f(\tau)\,d\tau,\quad |\lambda|\neq 1$ и $\alpha>-1.$

Имеем $f(t)\to F(p)$, $t^{\alpha}\to\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ и, по формуле (4.4),

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin 2\sqrt{t\tau}}{\sqrt{\pi\tau}}f(\tau)\,d\tau\to\frac{1}{p\sqrt{p}}F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Операторное уравнение будет

$$F(p) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} + \frac{\lambda}{p\sqrt{p}} F\left(\frac{1}{p}\right). \tag{4.29}$$

В (4.29) заменяем $p$ на $\frac{1}{p}$. Тогда

$$F\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma(\alpha+1)\, p^{\alpha+1} + \lambda p \sqrt{p} F(p). \tag{4.30}$$

Из (4.29) и (4.30) находим

$$F(p) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} + \frac{\lambda p^{\alpha+1}}{p\sqrt{p}} \Gamma(\alpha+1) + \lambda^2 F(p).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} + \frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)}{p^{\frac{1}{2}-\alpha}}\right].$$

Перейдя к оригиналу, получим искомое решение

$$f(t) = \frac{1}{1-\lambda^2}\left[t^{\alpha} + \frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{1}{t^{\frac{1}{2}+m}}\right].$$

5. $$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\, d\tau = \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Так как $\sin^2 \frac{t}{2} \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)$ и согласно (4.6) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \times$ $\times \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau)\, d\tau \to \frac{1}{\sqrt{p}} F(\sqrt{p})$, то

$$\frac{1}{\sqrt{p}} F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right).$$

В этом уравнении, заменяя $p$ на $p^2$, получим

$$\frac{1}{p} F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{p^2}{p^4+1}\right).$$

Отсюда

$$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p^3}{p^4+1}\right).$$

Из табл. 3 имеем $\frac{p^3}{p^4+1} \to f(t, 3, 4) = \operatorname{ch} \frac{t}{\sqrt{2}} \cos \frac{t}{\sqrt{2}}$.

Следовательно,

$$f(t)=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

искомое решение.

6. $f(t)=\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}+\lambda\int\limits_0^\infty\sqrt{\frac{t}{\tau}}J_1(2\sqrt{t\tau})f(\tau)\,d\tau.$

Согласно табл. 3 и (4.1) имеем

$$f(t)\to F(p),\quad \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}=f(t,2,4)\to\frac{p}{p^4+1}$$

и

$$\int\limits_0^\infty\sqrt{\frac{t}{\tau}}J_1(2\sqrt{t\tau})f(\tau)\,d\tau\to\frac{1}{p^2}F\left(\frac{1}{p}\right).$$

Следовательно,

$$F(p)=\frac{p}{p^4+1}+\lambda\frac{1}{p^2}F\left(\frac{1}{p}\right). \tag{4.31}$$

Заменим $p$ на $\frac{1}{p}$. Получим

$$F\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{p^3}{p^4+1}+\lambda p^2F(p). \tag{4.32}$$

Из (4.31) и (4.32) находим

$$F(p)=\frac{1}{1-\lambda}\cdot\frac{p}{p^4+1}.$$

Так как

$$\frac{p}{p^4+1}\to\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}},$$

искомое решение будет

$$f(t)=\frac{1}{1-\lambda}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

*Упражнения.* Найти решения особых уравнений:

**230.** $\int\limits_0^t\frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^\alpha}=t^n.$ **231.** $\int\limits_0^t\frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=\cos t.$

**232.** $\int\limits_0^t\frac{f(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=\sin 2\sqrt{t}.$

233. $f(t)=t-\frac{\lambda}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}f(\tau)\,d\tau, \quad |\lambda|\neq 1.$

234. $f(t)=\cos bt+\lambda\int\limits_0^\infty J_0(2\sqrt{t\tau})f(\tau)\,d\tau, \quad |\lambda|\neq 1.$

235. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}f(\tau)\,d\tau-\ln t=0.$

236. $f(t)=\frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)+\lambda\int\limits_0^\infty\sqrt{\frac{\tau}{t}}J_1(2\sqrt{\tau t})f(\tau)\,d\tau,$

$|\lambda|\neq 1.$

237. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}}f(\tau)\,d\tau=\sqrt{t}\,e^{-t}.$

## § 39. Уравнения в частных производных

Многие инженерно-технические задачи приводятся к решению линейных уравнений в частных производных 2-го порядка. Примерами таких уравнений являются классические уравнения математической физики с неизвестными функциями, зависящими от пространственных переменных $x$, $y$, $z$ и времени $t$. Распространение различных видов волн: звуковых, упругих, электромагнитных и других, а также колебательные явления описываются *волновым* уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Процессы передачи тепла в однородном изотропном теле так же, как и явления диффузии, описываются уравнением *теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Явления установившегося равновесия под действием внешних источников описываются уравнением *Пуассона*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-f(x, y, z).$$

Явления равновесия при отсутствии внешних источников (потенциалы поля тяготения и электростатического поля, в которых отсутствуют массы и электрические заряды и т. д.) выражаются уравнением *Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Рассмотрим функцию $u=u(x,\ t)$, $t$ изменяется на полупрямой $0\leqslant t<\infty$, $x$ — на конечном или бесконечном интервале. Область

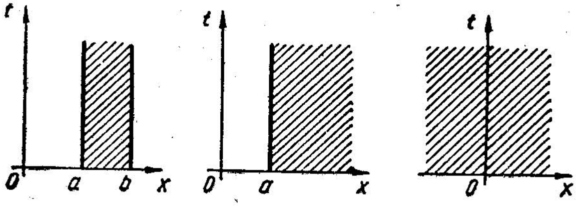


Рис. 64.

ее определения в зависимости от изменения $x$ изображено на рис. 64. Уравнение

$$A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+E(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}+F(x,t)u+G(x,t)=0 \qquad (4.33)$$

называется линейным уравнением в частных производных 2-го порядка с независимыми переменными $x$, $t$. Если в этом уравнении $G(x,\ t)=0$, то оно называется однородным. Знак дискриминанта $\Delta=B^2-AC$ уравнения (4.33) определяет его тип. Уравнение в точке $M(x,\ t)$ данной области называется гиперболического, или эллиптического, или параболического типа, если в этой точке соответственно $\Delta>0$, или $\Delta<0$, или $\Delta=0$.

Для того чтобы решение уравнения (4.33) было однозначным, задаются на границах области дополнительные условия, которые всегда можно указать, исходя из физического содержания рассматриваемой задачи. Условия, существующие на горизонтальной границе области определения функции $u=u(x,\ t)$, называются *начальными* условиями, а условия на вертикальных границах (если они существуют) — *граничными* (краевыми).

*Гиперболические и параболические* уравнения описывают так называемые *нестационарные* задачи (переходные процессы физической системы), решение которых существенно зависит от начальных условий (для параболических уравнений они задаются функцией $u(x,\ t)_{t=0}$, а для гиперболических — функцией

$u(x, t)_{t=0}$ и ее производной по времени $\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}$). Нестационарные задачи решаются операционным методом. Рассмотрим однородное уравнение вида

$$A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x)\frac{\partial u}{\partial t} + F(x)u = 0, \tag{4.34}$$

где $A$, $C$, $D$, $E$ и $F$ — непрерывные функции на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ (при $A > 0$ уравнение (4.34) будет гиперболического типа, если $C < 0$, и параболического типа, если $C = 0$).

Нестационарная задача, приводящаяся к уравнению (4.34), формулируется следующим образом. Найти решение $u(x, t)$ дифференциального уравнения (4.34) для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющее *начальным*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) \tag{4.35}$$

и *граничным* условиям

$$u(0, t) = f(t), \quad \alpha\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \beta\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = \gamma u(l, t), \tag{4.36}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — действительные числа (если $l \to \infty$, то будет одно граничное условие $u(0, t) = f(t)$).

Найдем решение нестационарной задачи операционным методом. Пусть $u(x, t)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, рассматриваемые как функции $t$, являются оригиналами. Тогда оригиналу $u(x, t)$ при $t > 0$, и $x$, заданному на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, соответствует изображение $U(x, p)$, являющееся функцией от $x$ и $p$, т. е.

$$U(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt,$$

или

$$u(x, t) \to U(x, p).$$

Предполагая, что и интегрирование и дифференцирование по $x$ при преобразовании Лапласа перестановочны, получаем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\, dt = \frac{dU(x, p)}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-pt} u(x, t)\, dt = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\, dt =$$

$$= \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2},$$

или

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \to \frac{dU(x,p)}{dx}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \to \frac{d^2U(x,p)}{dx^2}.$$

По свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \to pU(x,p) - u(x,0)$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \to p^2U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}.$$

Операторным уравнением для уравнения (4.34) будет обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + C\left[p^2U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}\right] +$$
$$+ D\frac{dU(x,p)}{dx} + E[pU(x,p) - u(x,0)] + FU(x,p) = 0,$$

или согласно (4.35)

$$A\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} + D\frac{dU(x,p)}{dx} + U(x,p)(Cp^2 + Ep + F) -$$
$$- Cp\varphi(x) - C\psi(x) - E\varphi(x) = 0. \tag{4.37}$$

Граничные условия уравнения (4.37) получаем из (4.36). Имеем

$$U(x,p)\big|_{x=0} = F(p), \tag{4.38}$$
$$\left[\alpha\frac{dU(x,p)}{dx} + (\beta p - \gamma)U(x,p) - \beta\varphi(x)\right]\Bigg|_{x=l} = 0.$$

Интегрируя уравнение (4.37) при граничных условиях (4.38), получаем изображение $U(x, p)$. Тогда с помощью теоремы разложения находим искомое решение $u(x, t)$.

Примеры. 1. Стержень длины $l$ находится в состоянии покоя и один его конец закреплен, а к свободному концу приложена сила $A\sin\omega t$ направленная по оси стержня. Найти продольные колебания стержня $u(x, t)$ при заданных начальных и граничных условиях:

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$$

и

$$u(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{A}{E} \sin \omega t, \tag{4.39}$$

где $E$ — модуль упругости $\left(\text{по закону Гука сила, действующая вдоль стержня, равна } A \sin \omega t = E \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ поэтому } \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t\right)$.

Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.40}$$

где $a$ — коэффициент, зависящий от материала стержня. Имеем

$$u(x, t) \to U(x, p);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \to p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \to p^2 U(x, p)$$

и

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \to \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2}.$$

Операторное уравнение, соответствующее уравнению (4.40), имеет вид

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U(x, p) = 0. \tag{4.41}$$

Из (4.39) получаем граничные условия для уравнения (4.41)

$$u(x, t)|_{x=0} = 0 \to U(x, p)|_{x=0} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t \to \left.\frac{\partial U(x, p)}{\partial x}\right|_{x=l} = \frac{A}{E} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \tag{4.42}$$

Интегрируя уравнение (4.41), получаем

$$U(x, p) = \bar{c}_1 e^{-\frac{p}{a} x} + \bar{c}_2 e^{\frac{p}{a} x},$$

или

$$U(x, p) = c_1 \operatorname{ch} \frac{p}{a} x + c_2 \operatorname{sh} \frac{p}{a} x.$$

Пользуясь граничными условиями (4.42), определяем произвольные постоянные. Имеем

$$c_1 = 0 \quad \text{и} \quad c_2 = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{1}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{p}{a}l}.$$

Таким образом, операторное уравнение (4.41) имеет решение

$$U(x, p) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{\operatorname{sh}\frac{x}{a}p}{p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p}.$$

Обозначим

$$A(p) = \operatorname{sh}\frac{x}{a}p \quad \text{и} \quad B(p) = p(p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p.$$

Тогда

$$U(x, p) = \frac{Aa\omega}{E} \cdot \frac{A(p)}{B(p)}$$

и

$$B'(p) = (p^2+\omega^2)\operatorname{ch}\frac{l}{a}p + 2p^2\operatorname{ch}\frac{l}{a}p + \frac{l}{a}p(p^2+\omega^2)\operatorname{sh}\frac{l}{a}p.$$

Решая уравнение $B(p) = 0$ и принимая во внимание, что $\operatorname{ch}\frac{l}{a}p = \cos i\frac{l}{a}p$, находим нули функции $B(p)$. Имеем

$$p = 0, \quad p_k = \pm i\omega_k, \quad p = \pm i\omega, \quad \text{где} \quad \omega_k = \frac{\pi a}{l}\left(k - \frac{1}{2}\right)$$

$(k = 1, 2, \ldots)$.

Функция $U(x, p)$ имеет простые полюсы $p = 0$, $p = \pm i\omega$, $p_k = \pm i\omega_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, определяющиеся нулями функции $B(p)$ (предполагаем, что условие резонанса отсутствует, т. е. $\omega_k \neq \omega$). Оригинал $u(x, t)$ для изображения $U(x, p)$ находим по теореме разложения. Имеем

$$u(x, t) = \frac{Aa\omega}{E}\left\{\left(\frac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}\right)_{p=0} + 2\operatorname{Re}\left[\frac{A(i\omega)}{B'(i\omega)}e^{i\omega} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A(i\omega_k)}{B'(i\omega_k)}e^{i\omega_k t}\right]\right\}.$$

Подставляя в это равенство значения функций $A(p)$ и $B'(p)$ в полюсах, получаем

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\,2\mathrm{Re}\left[\frac{i\sin\frac{\omega}{a}x}{-2\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}e^{i\omega t}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i\sin\frac{\omega_k}{a}xe^{i\omega_k t}}{\frac{l}{a}i\omega_k(\omega^2-\omega_k^2)\,i\sin\frac{l}{a}\omega_k}\right].$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$u(x,t)=\frac{Aa\omega}{E}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{\omega^2\cos\frac{\omega l}{a}}+\frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin\frac{\omega_k}{a}x\sin\omega_k t}{(\omega_k^2-\omega^2)\,\omega_k}\right),$$

где

$$\omega_k=\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)\qquad(k=1,2\ldots).$$

2. Найти распределение температур $u(x,t)$ в линейном проводнике тепла при начальных и граничных условиях:

$$u(x,0)=0,\qquad u(0,t)=u_0,\qquad 0<x<\infty,\qquad t>0.$$

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Имеем

$$u(x,t)\to U(x,p),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\to pU(x,p),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\to\frac{a^2U(x,p)}{dx^2}.$$

Операторное уравнение будет

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}-\frac{p}{a^2}U(x,p)=0. \qquad (4.43)$$

Решая уравнение (4.43), получаем

$$U(x,p)=c_1e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}+c_2e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

По условию задачи функции $u(x,t)$ и $U(x,p)$ при $x\to\infty$ являются ограниченными, поэтому $c_2=0$. Пользуясь граничным условием $U(x,p)\big|_{x=0}=\frac{u_0}{p}$ для уравнения (4.43), находим произвольную постоянную $c_1=\frac{u_0}{p}$. Тогда

$$U(x,p)=\frac{u_0}{p}e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

Пользуясь равенством (3.19) $\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}\to\operatorname{Erf}\left(\frac{2}{2\sqrt{t}}\right)$, находим оригинал для функции $U(x,p)$. Решение данного уравнения имеет вид

$$u(x,t)=u_0\operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

*Упражнения.*

238. Найти решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial t^2}$$

при следующих граничных и начальных условиях ($n$ — натуральное число):

а) $u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=A\sin\frac{n\pi x}{l},$

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0<x<l;$

б) $u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=0,$

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=B\sin\frac{n\pi x}{l},\quad 0<x<l;$

в) $u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=Ax(l-x),$

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0<x<l;$

г) $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\quad u(x,0)=A\cos\frac{n\pi x}{l},$

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0<x<l;$

д) $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0, \quad u(x,0) = 0,$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = B\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l.$$

• **239.** Найти решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + g\right)$$

($g$ — ускорение силы тяжести), удовлетворяющее условиям:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad 0 < x < l.$$

**240.** Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

при следующих граничных и начальных условиях ($n$ — натуральное число):

а) $u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = A\sin\dfrac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l;$

б) $u(0,t) = A, \quad u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \dfrac{A}{l}(l-x), \quad 0 < x < l;$

в) $u(0,t) = 0, \qquad \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0,$

$$u(x,0) = A\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, \qquad 0 < x < l;$$

г) $u(0,t) = A, \quad \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad x > 0;$

д) $\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u(l,t) = A, \quad u(x,0) = 0, \quad 0 < x < l.$

# ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. $\dfrac{p^3}{p^4-1}$. 2. $\dfrac{p^2}{p^4-1}$. 3. $\dfrac{1}{p^4-1}$. 4. $\dfrac{p}{p^4-1}$.

5. $\dfrac{\alpha(p^2-\alpha^2+\beta^2)}{[(p^2-(\alpha-\beta)^2][p^2-(\alpha+\beta)^2]}$.

6. $\dfrac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{[p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]}$.

7. $\dfrac{p(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{[p^2-(\alpha-\beta)^2][p^2-(\alpha+\beta)^2]}$.

8. $\dfrac{2\alpha\beta p}{[p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]}$.

9. $\dfrac{2\alpha\beta p}{[p^2-(\alpha+\beta)^2][p^2-(\alpha-\beta)^2]}$.

10. $\dfrac{2\alpha^3}{p^4-\alpha^4}$. 11. $\dfrac{2\alpha^2 p}{p^4-\alpha^4}$. 12. $\dfrac{2\alpha p^2}{p^4-\alpha^4}$.

13. $\dfrac{2p^3}{p^4-\alpha^4}$. 14. $\dfrac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

15. $\dfrac{2\alpha\beta p}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

16. $\eta(t-a)-\eta(t-b)$; $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}$.

17. $\eta(t)-2\eta(t-a)+\eta(t-2a)$; $\dfrac{(1-e^{-ap})^2}{p}$.

18. $(1-e^{-b(t-a)})\,\eta(t-a)$; $\dfrac{be^{-ap}}{p(p+b)}$.

19. $e^{-b(t-a)}\eta(t-a)$; $\dfrac{e^{-ap}}{p+b}$.

20. $t\eta(t)-(t-a)\,\eta(t-a)$; $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \eta(t-na)$; $\qquad \dfrac{1}{p(e^{ap}-1)}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (t-na)\,\eta(t-na)$; $\qquad \dfrac{1}{p^2(e^{ap}-1)}$.

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \eta(t-n)$; $\qquad \dfrac{1}{p(1-e^{-p})}$.

24. $\eta(t)-\frac{1}{b}(t-a)\,\eta(t-a)+\frac{1}{b}(t-a-b)\,\eta(t-a-b)$;

$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{b}\dfrac{e^{-ap}}{p^2}(1-e^{-bp})$. $\qquad$ 25. $\dfrac{1}{p}\operatorname{th}\dfrac{ap}{2}$.

26. $\dfrac{1}{ap^2}\operatorname{th}\dfrac{ap}{2}$. $\qquad$ 27. $\dfrac{2}{ap^2}\operatorname{th}\dfrac{ap}{2}-\dfrac{1}{p}$.

28. $\dfrac{2+ap+(2+ap)\,e^{-ap}}{ap^2(e^{-ap}-1)}$. $\qquad$ 29. $\dfrac{1-(1+ap)\,e^{-ap}}{ap^2(1-e^{-2ap})}$.

30. $\dfrac{ap+1-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}$. $\qquad$ 31. $\dfrac{1-e^{-ap}}{2p\operatorname{ch} ap}$.

32. $\dfrac{a}{p^2+a^2}\cdot\dfrac{1}{e^{\frac{\pi p}{a}}-1}$. $\qquad$ 33. $\dfrac{1}{p(1+e^{ap})}$.

34. $\dfrac{m-me^{-\frac{ap}{m}}-ape^{-ap}}{amp^2(1-e^{-2ap})}$. $\qquad$ 35. $\dfrac{m-(m+ap)\,e^{-\frac{ap}{m}}}{ap^2(1-e^{-ap})}$.

36. $\dfrac{mk-mke^{-\frac{ap}{mk}}-ape^{-\frac{ap}{k}}}{amp^2(1-e^{-ap})}$.

37. $\dfrac{4me^{-\frac{ap}{2}}\operatorname{sh}\dfrac{ap}{2m}-ap(1+e^{-ap})}{amp^2(1-e^{-ap})}$.

38. $\dfrac{2\left(e^{-\frac{m-1}{2m}ap}-e^{-\frac{m+1}{2m}ap}\right)}{ap^2(1+e^{-ap})}-\dfrac{1}{mp}$.

39. $\dfrac{2k\left(1-e^{-\frac{ap}{2mk}}-e^{-\frac{2m-1}{2mk}ap}+e^{-\frac{ap}{k}}\right)}{ap^2\left(1-e^{-ap}\right)}$.

40. $\dfrac{1}{4}e^{2t}\sin 4t$. 41. $e^{-2t}\cos 3t$.

42. $\dfrac{3}{2}e^{-2t}\cos\sqrt{\dfrac{11}{2}}t+\dfrac{13}{\sqrt{22}}e^{-2t}\sin\sqrt{\dfrac{11}{2}}t$.

43. $\dfrac{4}{3}e^{t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}\left(3\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

44. $e^{-t}\operatorname{ch}t$. 45. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{5}{p^2+8p+41}+\dfrac{1}{p^2+8p+17}\right]$.

46. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p-3}{(p-3)^2+49}+\dfrac{p-3}{(p-3)^2+1}\right]$.

47. $\dfrac{p}{p^4+4}+\dfrac{5p}{p^4+48p^2+676}$.

48. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p^3}{(p^2-2)^2}-\dfrac{p^3+24p}{p^4+48p^2+676}\right]$.

49. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p}{p^2-9}-\dfrac{p^3+13p}{p^4-10p^2+169}\right]$.

50. $\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{p^2-16}+\dfrac{2p^2-104}{p^4+40p^2+2704}\right]$.

51. Таблица 4.

| $y_n(at)$ | $y_n'(at)$ | $y_n''(at)$ | $y_n'''(at)$ | $y_n^{IV}(at)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $-4ay_4$ | $-4a^2y_3$ | $-4a^3y_2$ | $-4a^4y_1$ |
| $y_2$ | $ay_1$ | $-4a^2y_4$ | $-4a^3y_3$ | $-4a^4y_2$ |
| $y_3$ | $ay_2$ | $a^2y_1$ | $-4a^3y_4$ | $-4a^4y_3$ |
| $y_4$ | $ay_3$ | $a^2y_2$ | $a^3y_1$ | $-4a^4y_4$ |

52. $(p^4+4p^3+4p^2)X(p)-p^3-6p^2-10p-3$.

53. $(3p^3-2p^2)X(p)+3p^2-8p+13+\dfrac{5}{p}$.

54. $(4p^4+3p^2+1)X(p)-12p^2-5.$

55. $(p^5+2p^4+4)X(p)+p+3.$

56. $\dfrac{2p(p^2-3\alpha^2)}{(p^2+\alpha^2)^3}.$ 57. $\dfrac{2\alpha(3p^2-\alpha^2)}{(p^2+\alpha^2)^3}.$

58. $\dfrac{2\alpha^3(3p^4-4\alpha^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}.$ 59. $\dfrac{p^2(p^4-12\alpha^4)}{(p^4+4\alpha^4)^2}.$

60. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p+a}.$ 61. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2}{p^2-4}.$

62. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+100}{p^2+16}.$ 63. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2-b^2}{p^2-a^2}.$

64. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1}.$ 65. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p^2+a^2}{p^2+b^2}.$

66. $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(p+1)^2+1}{(p+1)^2}.$ 67. $\ln\dfrac{p+1-a}{p+1}.$

68. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(p+a)^2+4b^2}{(p+a)^2}.$ 69. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{sh}t-\sin t).$

70. $\dfrac{2}{3}[\sqrt{(1+t)^3}-1].$ 71. $t.$ 72. $\dfrac{1}{60}t^6.$ 73. $te^t.$

74. $\dfrac{t^2}{2}.$ 75. $2(\sin t-\cos t+1).$ 76. $\dfrac{1}{2}(t\cos t+\sin t).$

77. $e^{-t}-(1+t)e^{-2t}.$ 78. $\dfrac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t).$

79. $\dfrac{1}{5}(2\sin 2t-\cos 2t+e^t).$ 80. $\dfrac{1}{6}e^{3t}(2\sin t-\sin 2t).$

81. $\dfrac{1}{2}e^{2t}(t^2-4t+6)-e^{-t}(t+3).$ 82. $\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t).$

83. $e^t-t-1.$ 84. $-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{2}{3}e^t+\dfrac{1}{12}e^{-2t}.$

85. $\dfrac{1}{6}-e^{-t}+\dfrac{5}{2}e^{-2t}-\dfrac{5}{3}e^{-3t}.$

86. $\dfrac{1}{2}(t^2e^{2t}-4te^{2t}+6e^{2t}-2te^t-6e^t).$

87. $\frac{1}{8}\,[(2t^2-2t+1)\,e^{-t}-e^{-3t}]$.

88. $\frac{t^2}{2}-4t+10-e^{-t}\left(\frac{t^3}{6}+\frac{3}{2}\,t^2+6t+10\right)$.

89. $\frac{e^t}{27}\,(t-1)+\frac{e^{-2t}}{18}\left(t^2+\frac{4}{3}\,t+\frac{2}{3}\right)$.

90. $1-\cos at-\frac{at}{2}\sin at$. 91. $\frac{1}{25}\,[e^{-3t}+(5t-1)\,e^{2t}]$.

92. $e^t-e^{-t}\left(\cos 2t-\frac{3}{2}\sin 2t\right)$.

93. $\frac{1}{8}\,[e^{-t}-e^{-3t}\,(2t^2+2t+1)]$.

94. $2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta\,(t-2k-1)$. 95. $\eta\,(t)+2\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta\,(t-2k-1)$.

96. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\eta\,(t-k)$. 97. $\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{\frac{1}{p}}$.

98. $\frac{\sqrt{\pi}}{p\sqrt{p}}\,e^{\frac{1}{p}}$. 99. $2\sqrt{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{p}}{p\sqrt{p}}$. 100. $2\sqrt{\pi}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{p}}{p\sqrt{p}}$.

101. $2\sqrt{\pi}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{1}{p}}{\sqrt{p}}$. 102. $2\sqrt{\pi}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{p}}{\sqrt{p}}$.

103. $\frac{\operatorname{ch}\sqrt{2t}\cos\sqrt{2t}}{\sqrt{\pi t}}$. 104. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{1}{t}}$.

105. $-\frac{1}{t\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{1}{t}}$. 106. $\frac{\operatorname{ch}2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$.

107. $\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2^{n-q}a^{q-n+1}\Gamma\left(n-\frac{q-1}{2}\right)}$. 108. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\sqrt{2}$.

109. $\frac{b^n}{(2a^2)^{n+1}}\,e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$. 110. $t\operatorname{sh}t$.

111. $\dfrac{(\sqrt{\alpha^2+\tau^2}-\alpha)^n}{n\tau^n}$. 112. $\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{Si}(t)}{\sqrt{t}}$.

113. $\dfrac{1}{2\alpha}\sin\dfrac{\beta^2}{4\alpha}$. 114. $tJ_2(2\sqrt{t})$.

115. $tJ_0(t)$. 116. $\sin t - tJ_0(t)$. 117. $tJ_1(t)$. 118. $\sin t$.

119. $\dfrac{1}{n}\cos\left(n\arcsin\dfrac{b}{a}\right)$. 120. $\dfrac{1}{n}\sin\left(n\arcsin\dfrac{b}{a}\right)$.

121. $\dfrac{b}{a\sqrt{a^2-b^2}}$. 122. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

123. $\dfrac{\cos\left(n\arcsin\dfrac{b}{a}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}}$. 124. $\ln\dfrac{b}{a}$. 125. $-a\ln a$.

126. $\ln\dfrac{b}{a}$. 127. $\dfrac{\pi b}{2}-\sqrt{a\pi}$. 128. $\ln 2a$. 129. $\ln(a+1)$.

130. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{a}$. 131. $\dfrac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$.

132. $\dfrac{\Gamma(\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}}{\tau^\alpha}$. 133. $\dfrac{\pi}{8}e^{-\alpha}(\cos\alpha+\sin\alpha)$.

134. $\dfrac{\pi}{2b^3}(ab-\sin ab)$. 135. $e^{-\frac{3}{2}t}(18t^2+2t+1)$.

136. $e^t(e^t-t^2-t+1)$. 137. $-\dfrac{79}{170}e^{-3t}+0{,}3e^{-t}-$

$$-\frac{3}{85}e^t\cos t+\frac{7}{170}e^t\sin t+0{,}2e^{-t}\cos t+0{,}1e^{-t}\sin t.$$

138. $2e^{-t}+\dfrac{1}{6}e^{-t}t^3-e^{-t}\cos t$.

139. $-\dfrac{25}{12}e^{-4t}+\dfrac{69}{20}e^{-2t}+\dfrac{2}{3}e^{-t}-\dfrac{1}{30}e^{-t}\cos 3t+$

$$+\frac{1}{15}e^{-t}\sin 3t.$$

140. $e^{-t}[3\sin t+(1-t)\cos t]$.

141. $2te^{-t} + te^t - e^t + e^{-2t}$.

142. $\frac{13}{20}\sin 2t - \frac{1}{5}\cos 2t + e^t\left(\frac{6}{5} - \cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)$.

143. $4 - 3e^{-t} + e^{-2t}$. 144. $e^t\left[2t^3 - 4t^2 + 5t - \frac{11}{2}\right] +$

$+ \frac{7}{2}e^{-t} + 3(t+1)$. 145. $e^t + t^3$.

146. $-\frac{1}{16}(t^2 + 1) + \frac{27}{128}e^{2t} - \frac{5}{128}e^{-2t} - \frac{7}{64}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$.

147. $\frac{1}{64}\cos 2t - \frac{3}{32}\sin 2t + \frac{3}{64}e^{2t} - \frac{1}{32}e^{-2t}(2 + t) -$

$-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - t\cos 2t\right)$.

148. $\sqrt{2}\,t\sin\sqrt{2}t + 5\cos\sqrt{2}t + t\sin t - 4\cos t$.

149. $\frac{3}{5}\operatorname{ch} t - \frac{19}{32}\cos t - \frac{1}{160}\cos 3t - \frac{1}{8}t\sin t$.

150. $5t^2\operatorname{ch} t - 4t\operatorname{sh} t$. 151. $t^3 + 3t^2 + \frac{37}{9}t +$

$+ \frac{59}{27} + \frac{1}{9}e^{3t}\left(22t - \frac{59}{3}\right)$.

152. $\frac{1}{2}\sin 2t + \cos\sqrt{2}t + \frac{1,5}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t - \cos\sqrt{3}t - \frac{2,5}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t$.

153. $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$. 154. $\frac{5}{2}\operatorname{ch} t + \frac{13}{2}\cos t + 2t\sin t - 9$.

155. $e^{-\frac{t}{2}}\left[(c_1 + c_2t)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + (c_3 + c_4t)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right] + t^2 - 3t + 1$.

156. $c_1t^2 + c_2t + c_3 + c_4e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$.

157. $(c_1 + c_2t + t^2)e^t + (c_3 + c_4t + t^2)e^{-t} + \sin t + \cos t$.

158. $\frac{t}{2}e^{-t}\sin t + te^{-t} + e^{-t}(c_1\cos t + c_2\sin t)$. 159. $\frac{t\sin t}{2} +$

$+\frac{\cos 3t}{8}+c_1\cos t+c_2\sin t.$ 160. $\frac{1}{6}\sin t+2e^t+$

$+c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+(c_3t+c_4)\,e^{-t}.$

161. $\frac{1}{2}e^{3t}(t^2-2t+2)+c_1e^t+c_2e^{2t}.$ 162. $\frac{1}{32}e^{2t}(2t^2-3t)+$

$+\frac{1}{5}\cos t-\frac{t^3}{12}+\frac{t}{8}+c_1+c_2e^{2t}+c_3e^{-2t}.$

163. $c_1e^{-2t}+c_2e^t\cos t+c_3e^t\sin t+\frac{1}{8}te^{-t}\cos t-$

$-\frac{1}{20}te^t(3\cos t+\sin t).$ 164. $c_1e^{-3t}+c_2e^t\cos 2t+$

$+c_3e^t\sin 2t+\frac{1}{221}(10\cos 2t+11\sin 2t).$

165. $0{,}4\,e^{-t}(2\cos 2t+\sin 2t)+0{,}2+0{,}04\,[(2\cos 2(t-1)-$
$-1{,}5\sin 2(t-1))\,e^{-(t-1)}+5(t-1)-2]\,\eta(t-1).$

166. $e^{-2t}+2e^{-t}-2\eta(t-1)\,[e^{-t}-te^{-2t-1}].$

167. $\frac{1}{3}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin t+\eta(t-\pi)\left[\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{6}\sin 2t\right].$

168. $\frac{3}{5}e^{-2t}-\frac{9}{17}e^{-4t}-\frac{6}{85}\cos t+\frac{7}{85}\sin t+$

$+\eta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left[-\frac{6}{85}\sin t-\frac{7}{85}\cos t+\frac{1}{10}e^{-2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}-\right.$

$\left.-\frac{1}{34}e^{-4\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right].$ 169. $e^{-2t}\left(\cos 4t+\frac{1}{2}\sin 4t\right)+$

$+\eta\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)\left\{\frac{19}{377}\cos\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)+\frac{4}{377}\sin\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)-\right.$

$\left.-\frac{e^{-2t}}{377}\left[19\cos 4\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)-\frac{21}{2}\sin 4\left(t-\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]\right\}.$

170. $1{,}13e^{-t}-\frac{16}{75}e^{-6t}+\frac{1}{12}e^{-3t}+\frac{1}{10}te^{-t}+$

$+\eta(t-1)\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{30}e^{-6(t-1)}-\frac{1}{5}e^{-(t-1)}\right].$

171. $-0{,}4t+0{,}52-e^{-2t}+0{,}16e^{-2t}(3\cos t-4\sin t)$.

172. $t+\cos t+\sin t+[\sin(t-2)-(t-2)]\,\eta(t-2)+$
$+[(t-5)-\sin(t-5)]\,\eta(t-5)$.

173. $x(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 t}{2}, & 0<t<\pi,\\ 0, & t>\pi.\end{cases}$ 174. $2\left[\sin^2\dfrac{t}{2}\,\eta(t)-\right.$

$\left.-2\sin^2\dfrac{t-1}{2}\,\eta(t-1)+\sin^2\dfrac{t-2}{2}\,\eta(t-2)\right]$.

175. $\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\eta(t)-\left[(t-1)-\dfrac{1}{2}\sin 2(t-1)\right]\eta(t-1)+$

$+\dfrac{1}{2}\left[(t-2)-\dfrac{1}{2}\sin 2(t-2)\right]\eta(t-2)$.

176. $(2-\cos t)\,\eta(t)+[2-2\cos(t-1)]\,\eta(t-1)$.

177. $\dfrac{1}{3}\sin 3t\eta(t)+\dfrac{1}{9}\left[(t-1)-\dfrac{1}{3}\sin 3(t-1)\right]\eta(t-1)-$

$-\dfrac{2}{9}\left[(t-2)-\dfrac{1}{3}\sin 3(t-2)\right]\eta(t-2)+$

$+\dfrac{1}{9}\left[(t-3)-\dfrac{1}{3}\sin 3(t-3)\right]\eta(t-3)$.

178. $\sum\limits_{k=0}^{3}(-1)^k\,[1+e^{t-k}(t-k-1)]\,\eta(t-k)$.

179. $c_1\operatorname{ch}t\cos t+c_2\operatorname{ch}t\sin t+c_3\operatorname{sh}t\cos t+c_4\operatorname{sh}t\sin t+$

$\dfrac{1}{4}\int\limits_0^t f(t-\tau)(\operatorname{ch}\tau\sin\tau-\operatorname{sh}\tau\cos\tau)\,d\tau$.

180. $c_1\operatorname{ch}t+c_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}+c_3\operatorname{sh}t+c_4\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\operatorname{sh}\dfrac{t}{2}+$

$+c_5\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\operatorname{ch}\dfrac{t}{2}+c_6\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\operatorname{sh}\dfrac{t}{2}+$

$+\dfrac{1}{3}\int\limits_0^t f(t-\tau)\left(\operatorname{sh}\tau+\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tau\operatorname{sh}\dfrac{\tau}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tau\operatorname{ch}\dfrac{\tau}{2}\right)d\tau$.

181. $c_1 \sin\frac{t}{2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_2\cos\frac{t}{2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3\sin\frac{t}{2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}t +$

$+ c_4\cos\frac{t}{2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_5\cos t + c_6\sin t +$

$+ \frac{1}{3}\int_0^t f(t-\tau)\left(\sin\frac{\tau}{2}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}}{2}\tau - \sqrt{3}\cos\frac{\tau}{2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{3}}{2}\tau +\right.$

$\left.+ \sin\tau\right)d\tau.$ 182. $\frac{1}{6}e^t + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{2}{3}e^{-2t}.$

183. $2t^2 + 4t + 3 + 4e^{2t}(t^2 + t - 1) + \cos 2t.$

184. $3(-4\sin t + 2t\cos t + 2\operatorname{sh} t).$

185. $-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{6}e^{3t}.$

186. $\frac{1}{24}[(3t - t^3)\sin t - 3t^2\cos t].$

187. $\frac{1}{4}\left(t^2 - 3t + \frac{3}{2}\right)e^t - \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t -\right.$

$\left.-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{24}e^{-t}.$

188. $x(t) = y(t) = z(t) = \operatorname{ch} t.$

189. $x(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2\cos 2t + \sin 2t),$

$y(t) = \frac{1}{3}(2e^t - 2\cos 2t - \sin 2t).$ 190. $x(t) = \frac{1}{3}\cos t +$

$+ \frac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t,$ $z(t) = y(t) = \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t.$

191. $x(t) = -\frac{1}{8}e^t + \frac{11}{12}e^{3t} + \frac{5}{24}e^{-3t},$

$y(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{11}{12}e^{3t} - \frac{1}{24}e^{-3t},$

$z(t) = \frac{4}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}e^{-3t}.$

192. $x(t) = 2\sin t - 3t, \qquad y(t) = 6t + 3 - 2\cos t - 3\sin t.$

193. $x(t) = -2t - \frac{7}{36}\sin 2t + \frac{28}{9}\sin t - \frac{13\sqrt{2}}{36}\operatorname{sh}\sqrt{2}t,$

$$y(t) = t + \frac{1}{36}\sin 2t - \frac{7}{9}\sin t + \frac{13\sqrt{2}}{36}\operatorname{sh}\sqrt{2}t,$$

194. $x(t) = -6 - 4t - t^2 + \frac{100}{17}e^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{17}\cos 2t + \frac{1}{34}\sin 2t,$

$$y(t) = -1 - t - \frac{t^2}{2} + \frac{25}{17}e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{34}\cos 2t + \frac{9}{68}\sin 2t.$$

195. $x(t) = 0{,}5(\cos t - 2\sin t - e^{-t}), \qquad y(t) = 0{,}5(e^t -$
$- 1{,}5e^{-t} + 1{,}5\cos t - 0{,}5\sin t), \qquad z(t) = 0{,}5(e^t -$
$- 0{,}5e^{-t} - 0{,}5\cos t - 1{,}5\sin t).$

196. $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t, \qquad y(t) = \frac{5}{4}t^2 - \frac{1}{4},$

$$z(t) = \frac{5}{4}t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{5}{12}.$$

197. $x(t) = c_1e^t - 4(c_1 + c_2)te^t, \qquad y(t) = c_2e^t + 4(c_1 + c_2)te^t.$

198. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k).$

199. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(t-k)^{k+3}}{(k+3)!}\eta(t-k).$

200. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k).$ 201. $(1+t)\eta(t) +$
$+ \sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{(t-k+1)^k}{k!}\eta(t-k+1).$ 202. $\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\eta(t) +$
$+ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!}\eta(t-k) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!}\eta(t-k).$

**203.** $\cos t$. **204.** $\frac{1}{2}(e^t - \cos t + \sin t)$. **205.** $\operatorname{sh} t$.

**206.** $(1+t)\sin t$. **207.** $2(e^t - t - 1)$. **208.** $\frac{1}{2}(e^t + \cos t + \sin t)$.

**209.** $\frac{1}{2}(1 + e^{2t})$. **210.** $\frac{1}{2}(\cos 2t + 2\sin 2t - 1)$.

**211.** $\frac{1}{13}(2e^{2t} + 11\cos 3t + 3\sin 3t)$. **212.** $\frac{1}{4}(e^{-2t} + 3e^{2t})$.

**213.** $\frac{1}{15}(13\sin 2t - 16\operatorname{sh} t)$. **214.** $\frac{1}{34}(41\cos 5t - 7\operatorname{ch} 3t)$.

**215.** $\frac{1}{80}(35e^{3t} + 45\operatorname{ch} 5t + 27\operatorname{sh} 5t)$. **216.** $t^3 + \frac{t^5}{20}$.

**217.** $2te^t - 2e^t + t + 2$. **218.** $\frac{1}{36}(45e^{2t} + 32\cos 3t - 18t - 5)$.

**219.** 1. **220.** 3. **221.** $2\sin t - t$. **222.** $\frac{1}{2}(1 + 3\cos 2t)$.

**223.** $\frac{4}{3}$. **224.** $x(t) = 2\operatorname{sh} t,\ y(t) = 2\operatorname{ch} t - 1$.

**225.** $x(t) = 2e^{-t}(1-t),\ y(t) = e^{-t}(1-t)$.

**226.** $x(t) = 2(1 + 6t^2),\ y(t) = 24t,\ z(t) = 15 + 2t(1 + 2t^2)$.

**227.** $x(t) = 2t,\ y(t) = 1,\ z(t) = 3t^2$.

**228.** $$x(t) = \frac{2}{3}\left(e^t - e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$y(t) = \frac{2}{3}\left(e^t + 2e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 1,$$

$$z(t) = \frac{2}{3}\left(e^t - e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

**229.** $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = \sin t + \cos t$.

**230.** $\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\cdot\frac{t^{n+\alpha-1}}{\Gamma(n+\alpha)}$.

**231.** $\frac{1}{\sqrt{t\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}[\cos tS(t) - \sin tC(t)]$. **232.** $J_0(2\sqrt{t})$.

233. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\lambda^n}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)}t^{\frac{1}{2^n}}$.   234. $\dfrac{1}{1-\lambda^2}\left(\cos bt+\dfrac{\lambda}{b}\sin\dfrac{t}{b}\right)$.

235. $\ln(\gamma t^2)$.   236. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin t}{1-\lambda}-\dfrac{t\cos t}{1+\lambda}\right)$.

237. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}tJ_0(t)$.

238. а) $U(x,p)=\dfrac{Ap}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$;

$$u(x,t)=A\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

б) $U(x,p)=\dfrac{B}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\sin\dfrac{\pi nx}{l}$;

$$u(x,t)=\frac{Bl}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

в) $U(x,p)=2Aa^2\left[\dfrac{e^{-\frac{p}{a}x}+e^{-\frac{p}{a}(l-x)}}{1+e^{-\frac{p}{a}l}}-1\right]\dfrac{1}{p^3}+A\dfrac{x(l-x)}{p}$;

$$u(x,t)=A\left\{x(l-x)-a^2t^2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\eta\left(t-\frac{nl+x}{a}\right)\times\right.$$

$$\times\left(t-\frac{nl+x}{a}\right)^2+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\eta\left(t-\frac{nl-x}{a}\right)\times$$

$$\left.\times\left(t-\frac{nl-x}{a}\right)^2\right\}.$$

г) $U(x,p)=\dfrac{Ap}{p^2+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}}\cos\dfrac{n\pi x}{l}$;

$$u(x, t) = A \cos \frac{an\pi t}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

д) $$U(x, p) = \frac{B}{p^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}} \cos \frac{\pi n x}{l};$$

$$u(x, t) = \frac{Bl}{an\pi} \sin \frac{an\pi t}{l} \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

**239.** $$U(x, p) = \left[ \frac{e^{-\frac{p}{a} x} + e^{-\frac{p}{a}(l-x)}}{1 - e^{-\frac{p}{a} l}} - 1 \right] \frac{g}{p^3};$$

$$u(x, t) = \frac{g}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \eta\left(t - \frac{nl + x}{a}\right)\left(t - \frac{nl + x}{a}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \eta\left(t - \frac{nl - x}{a}\right)\left(t - \frac{nl - x}{a}\right)^2 - t^2 \right\}.$$

**240.** а) $$U(x, p) = \frac{A}{p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

$$u(x, t) = A e^{-\frac{n^2 \pi^2}{\alpha^2 l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

б) $U(x, p) = \frac{A}{lp}(l - x)$; $u(x, t) = \frac{A}{l}(l - x)\,\eta(t)$.

в) $$U(x, p) = \frac{A}{p + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4\alpha^2 l^2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l};$$

$$u(x, t) = A e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4\alpha^2 l^2}} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

г) $U(x, p) = \frac{A}{p} e^{-\alpha \sqrt{p} x}$; $\qquad u(x, t) = A \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha x}{2\sqrt{t}}\right)$.

д) $U(x, p) = \frac{A \operatorname{ch} \alpha \sqrt{p} x}{p \operatorname{ch} \alpha \sqrt{p} l}$; $\qquad u(x, t) =$

$$= A\left[1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \frac{\pi}{\alpha^2 l^2} t} \cos \frac{(2n-1)\pi}{2l} x\right].$$

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица I

**Основные свойства преобразования Лапласа**

| Наименования | Условия | Выводы |
|---|---|---|
| Свойство однородности | $f(t) \to F(p)$, $a$ — комплексное число | $af(t) \to aF(p)$ |
| Свойство сложения | $f(t) \to F(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(p)$ | $f(t) + \varphi(t) \to F(p) + \Phi(p)$ |
| Свойство линейности | $f_1(t) \to F_1(p)$, $f_2(t) \to F_2(p)$, . . . . . . . $f_n(t) \to F_n(p)$, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — комплексные числа | $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(t) \to \sum\limits_{i=1}^{n} c_i F_i(p)$ |
| Теорема подобия | $f(t) \to F(p)$, $\alpha$ — комплексное число | $f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ |
| Теорема запаздывания | $f(t) \to F(p)$, $t_0 > 0$ | $f(t - t_0) \to e^{-t_0 p} F(p)$ |
| Теорема смещения | $f(t) \to F(p)$, $p_0$ — комплексное число | $e^{p_0 t} f(t) \to F(p - p_0)$ |
| Теорема опережения | $f(t) \to F(p)$, $t_0 > 0$ | $f(t + t_0) \to e^{t_0 p} \times$ $\times \left[F(p) - \int\limits_0^{t_0} e^{-pt} f(t)\,dt\right]$ |
| Дифференцирование оригинала | $f(t) \to F(p)$, $f(0) = \lim\limits_{t \to 0+0} f(t)$, . . . . . . . . . . . . $f^{(n-1)}(0) = \lim\limits_{t \to 0+0} f^{(n-1)}(t)$ | $f'(t) \to pF(p) - f(0)$, $f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$, . . . . . . . . . . . . . . $f^n(t) \to p^n F(p) -$ $- p^{(n-1)} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$ |

*Продолжение табл. 1*

| Наименования | Условия | Выводы |
|---|---|---|
| Интегрирование оригинала | $f(t) \to F(p)$ | $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \to \frac{F(p)}{p}$ |
| Дифференцирование изображения | $F(p) \to f(t)$ | $F'(p) \to -t f(t)$<br>. . . . . . . . . . . . .<br>$F^{(n)}(p) \to (-1)^n t^n f(t)$<br>$(n = 1, 2, \ldots)$ |
| Интегрирование изображения | $F(p) \to f(t)$ | $\int\limits_p^\infty F(q)\,dq \to \frac{f(t)}{t}$ |
| Дифференцирование по параметру | $f(t, \lambda) \to F(p, \lambda)$, производная $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t, \lambda)$ существует | $\frac{\partial}{\partial\lambda} f(t, \lambda) \to \frac{\partial}{\partial\lambda} F(p, \lambda)$ |
| Интегрирование по параметру | $f(t, \lambda) \to F(p, \lambda)$, интегралы $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda)\,d\lambda$ и $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda)\,d\lambda$ существуют | $\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f(t, \lambda)\,d\lambda \to \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} F(p, \lambda)\,d\lambda$ |
| Изображение периодического оригинала | $f(t) = f(t + T)$ и<br>$f(t) \to F(p)$ | $F(p) =$<br>$= \frac{1}{1 - e^{-Tp}} \int\limits_0^T e^{-pt} f(t)\,dt$ |
| Теорема умножения изображений | $F(p) \to f(t)$,<br>$\Phi(p) \to \varphi(t)$ | $F(p)\,\Phi(p) \to$<br>$\to \int\limits_0^t f(t - \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau =$<br>$= \int\limits_0^t \varphi(t - \tau)\,f(\tau)\,d\tau$ |

| Наименования | Условия | Выводы |
|---|---|---|
| Теорема умножения оригиналов | $f(t) \to F(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(p)$ | $f(t)\,\varphi(t) \to \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(q)\,\Phi(p-q)\,dq$ |
| Предельные соотношения | $f(t) \to F(p)$ | $\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0} f(t)$; $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$ |
| Формула Дюамеля | $f(t) \to F(p)$, $\varphi(t) \to \Phi(p)$, $F(p)\,\Phi(p) \to f * \varphi$ | $pF(p)\,\Phi(p) \to \int_0^t f(\tau)\,\varphi'(t-\tau)\,d\tau + f(t)\,\varphi(0)$, или $pF(p)\,\Phi(p) \to \int_0^t \varphi(\tau)\,f'(t-\tau)\,dt + \varphi(t)\,f(0)$ |
| Теорема обращения | $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ | $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$ |
| Теорема разложения: | $f(t) \to F(p)$, $p_k$ — особые точки функции $F(p)$ | $f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\,[e^{pt}F(p), p_k]$ |
| а) случай простых полюсов | $f(t) \to \frac{A(p)}{B(p)} = F(p)$, $p_k$ — простые полюсы функции $F(p)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ | $f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}$ |

*Продолжение табл. I*

| Наименования | Условия | Выводы |
|---|---|---|
| б) случай кратных полюсов | $f(t)=\frac{A(p)}{B(p)}=F(p)$<br>$p_k$ — полюсы $F(p)$,<br>$m_k$ — кратности | $f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(m_k-1)!}\times$<br>$\times\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}}\times$<br>$\times\left[(p-p_k)^{m_k}\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]$. |
| в) случай бесконечного множества полюсов | $F(p)$ — мероморфная функция, $p_k$ — полюсы в полуплоскости $\operatorname{Re} p<s_0$<br>$(k=1, 2, \ldots)$ | $f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}[e^{pt}F(p), p_k]$ |
| г) случай аналитичности изображения в бесконечности | $\lvert f(t)\rvert<Me^{s_0t}$;<br>$F(\infty)=0$,<br>$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}$ | $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_k}{n!}t^n$ |

Таблица II[1]

**Формулы преобразования Лапласа**

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $\eta(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| $\eta(t-t_0)$ | $\frac{1}{p}e^{-t_0p}$ |
| $e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{p-\alpha}$ |

[1] таблице приводятся формулы, доказанные в книге.

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $t^{\alpha}$ | $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1$ |
| $t^{n}$ | $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ |
| $\dfrac{t^{n}}{n!}e^{\alpha t}$ | $\dfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ |
| $\sin \alpha t$ | $\dfrac{\alpha}{p^{2}+\alpha^{2}}$ |
| $\cos \alpha t$ | $\dfrac{p}{p^{2}+\alpha^{2}}$ |
| $\operatorname{sh} \alpha t$ | $\dfrac{\alpha}{p^{2}-\alpha^{2}}$ |
| $\operatorname{ch} \alpha t$ | $\dfrac{p}{p^{2}-\alpha^{2}}$ |
| $\sin^{2} at$ | $\dfrac{2a^{2}}{p(p^{2}+4a^{2})}$ |
| $\cos^{2} at$ | $\dfrac{p^{2}+2a^{2}}{p(p^{2}+4a^{2})}$ |
| $\operatorname{sh}^{2} at$ | $\dfrac{2a^{2}}{p(p^{2}-4a^{2})}$ |
| $\operatorname{ch}^{2} at$ | $\dfrac{p^{2}-2a^{2}}{p(p^{2}-4a^{2})}$ |
| $\sin \alpha t \cos \beta t$ | $\dfrac{\alpha(p^{2}+\alpha^{2}-\beta^{2})}{[p^{2}+(\alpha-\beta)^{2}][p^{2}+(\alpha+\beta)^{2}]}$ |
| $\operatorname{sh} \alpha t \operatorname{ch} \beta t$ | $\dfrac{\alpha(p^{2}-\alpha^{2}+\beta^{2})}{[p^{2}-(\alpha-\beta)^{2}][p^{2}-(\alpha+\beta)^{2}]}$ |
| $\cos \alpha t \cos \beta t$ | $\dfrac{p(p^{2}+\alpha^{2}+\beta^{2})}{[p^{2}+(\alpha-\beta)^{2}][p^{2}+(\alpha+\beta)^{2}]}$ |
| $\operatorname{ch} \alpha t \operatorname{ch} \beta t$ | $\dfrac{p(p^{2}-\alpha^{2}-\beta^{2})}{[p^{2}-(\alpha-\beta)^{2}][p^{2}-(\alpha+\beta)^{2}]}$ |

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $\sin\alpha t \sin\beta t$ | $\dfrac{2\alpha\beta p}{[p^2+(\alpha-\beta)^2][p^2+(\alpha+\beta)^2]}$ |
| $\sin\alpha t\,\mathrm{ch}\,\beta t$ | $\dfrac{\alpha(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ |
| $\mathrm{sh}\,\alpha t\,\mathrm{sh}\,\beta t$ | $\dfrac{2\alpha\beta p}{[p^2-(\alpha-\beta)^2][p^2-(\alpha+\beta)^2]}$ |
| $\cos\alpha t\,\mathrm{sh}\,\beta t$ | $\dfrac{\beta(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ |
| $\cos\alpha t\,\mathrm{ch}\,\beta t$ | $\dfrac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ |
| $\sin\alpha t\,\mathrm{sh}\,\beta t$ | $\dfrac{2\alpha\beta p}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$ |
| $\sin(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\cdot\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |
| $\cos(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| $\mathrm{sh}(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$ |
| $\mathrm{ch}(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$ |
| $\sin t\,\eta(\sin t)$ | $\dfrac{1}{p^2+1}\cdot\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}$ |
| $\lvert\sin at\rvert$ | $\dfrac{a}{p^2+a^2}\,\mathrm{cth}\,\dfrac{p\pi}{2a}$ |
| $\dfrac{\sin t}{\lvert\sin t\rvert}$ | $\dfrac{1}{p}\,\mathrm{th}\,\dfrac{p\pi}{a}$ |
| $e^{-\alpha t}\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\cos\omega t$ | $\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$ |

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$ |
| $e^{-\alpha t}\operatorname{ch}\omega t$ | $\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$ |
| $\dfrac{t^n}{n!}\sin\alpha t$ | $\dfrac{1}{2i}\,\dfrac{(p+\alpha i)^{n+1}-(p-\alpha i)^{n+1}}{(p^2+\alpha^2)^{n+1}}$ |
| $\dfrac{t^n}{n!}\operatorname{sh}\alpha t$ | $\dfrac{(p+\alpha)^{n+1}-(p-\alpha)^{n+1}}{2(p^2-\alpha^2)^{n+1}}$ |
| $\dfrac{t^n}{n!}\cos\alpha t$ | $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(p+\alpha)^{n+1}+(p-\alpha)^{n+1}}{(p^2+\alpha^2)^{n+1}}$ |
| $\dfrac{t^n}{n!}\operatorname{ch}\alpha t$ | $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{(p+\alpha)^{n+1}-(p-\alpha)^{n+1}}{(p^2-\alpha^2)^{n+1}}$ |
| $S(t)$ | $\dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$ |
| $C(t)$ | $\dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$ |
| $\mathrm{Si}(t)$ | $\dfrac{1}{p}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$ |
| $\mathrm{si}\,t$ | $-\dfrac{1}{p}\operatorname{arctg}p$ |
| $\mathrm{sh}\,i(t)$ | $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p+1}{p-1}$ |
| $\mathrm{Ci}(t)$ | $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| $\mathrm{chi}(t)$ | $\dfrac{1}{p}\ln\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}$ |
| $\ln t$ | $-\dfrac{1}{p}\ln(\gamma p)$ |
| $\mathrm{Ei}(-t)$ | $-\dfrac{1}{p}\ln(p+1)$ |

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $\mathrm{Ei}\,(t)$ | $-\frac{1}{p}\ln(p-1)$ |
| $\mathrm{li}\,(e^t)$ | $-\frac{1}{p}\ln(p-1)$ |
| $\mathrm{li}\,(e^{-t})$ | $-\frac{1}{p}\ln(p+1)$ |
| $\mathrm{erf}\,(\sqrt{t})$ | $\frac{1}{p\sqrt{p+1}}$ |
| $\mathrm{Erf}\,(\sqrt{t})$ | $\frac{1}{p+1+\sqrt{p+1}}$ |
| $e^{-t^2}$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{\frac{p^2}{4}}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$ |
| $\mathrm{erf}\,(t)$ | $\frac{1}{p}\,e^{\frac{p^2}{4}}\,\mathrm{Erf}\left(\frac{p}{2}\right)$ |
| $\frac{e^{-a\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$ | $\frac{e^{-\frac{a^2}{4p}}}{\sqrt{\pi p}}$ |
| $e^{-a\sqrt{t}}$ | $\frac{a}{2\sqrt{\pi p^3}}\,e^{-\frac{a^2}{4p}}$ |
| $\frac{1}{p}\,e^{-a\sqrt{t}}$ | $\mathrm{Erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{p}}\right)$ |
| $\sin 2\sqrt{t}$ | $\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}$ |
| $\frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{-\frac{1}{p}}$ |
| $J_n(t)$ | $\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$ |
| $t^{\frac{n}{2}}\,J_n(2\sqrt{t})$ | $\frac{1}{p^{n+1}}\,e^{-\frac{1}{p}}$ |

| Оригиналы | Изображения |
|---|---|
| $\operatorname{ber} t$ | $\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^4+1}+p^2}{2(p^4+1)}}$ |
| $\operatorname{bei} t$ | $\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^4+1}-p^2}{2(p^4+1)}}$ |
| $\operatorname{ber}(2\sqrt{t})$ | $\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$ |
| $\operatorname{bei}(2\sqrt{t})$ | $\dfrac{1}{p}\sin\dfrac{1}{p}$ |
| $L_n(t)$ | $\dfrac{n!}{p}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^n$ |

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Владимир Семенович
МАРТЫНЕНКО

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *Миронец Е. М.*
Художник *Самойлов М. С.*
Художественный редактор *Духленко С. П.*
Технический редактор *Хохановская Т. И.*
Корректор *Иващенко Э. С.*

Сдано в набор 4/VIII 1967 г. БФ 01003. Зак. № 293.
Формат бумаги $60 \times 90^1/_{16}$. Физич. печ. листов 12,5.
Услов. печ. листов 12,5. Учетно-издат. листов 9,5.
Бум. листов 6,25. Подписано к печати 23/I 1968 г.
Бумага типограф. № 3. Цена 33 коп. Тираж 17 000.

Издательство Киевского университета, Киев,
Героев революции, 4.

Т. П. вид-ва КДУ — 1968, поз. 11

Киевская книжная типография № 5 Комитета
по печати при Совете Министров УССР,
Киев, Репина, 4.