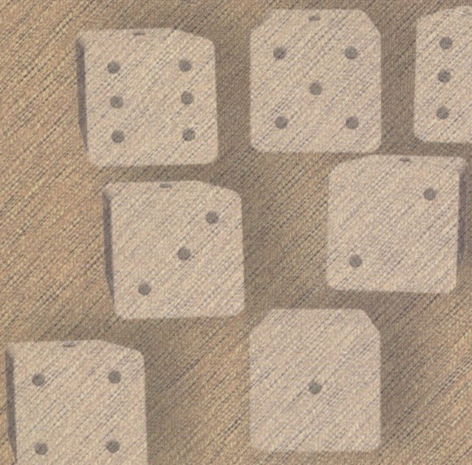
Підручник

М.Г.Медведєв, І.О.Пащенко

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

$$((a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m}$$



Медведєв М.Г., Пащенко І.О.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Підручник

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник
(лист від 14.05.08. №1.4/18-Г-1088)

Ліра-К

Київ
2008

ББК 22.17
М42
УДК 519.21

Рецензенти:
Лопатін О.К. — зав.кафедрою інформаційних технологій та математики Національної Академії управління, д.ф.-м.н., проф., лауреат державної премії України в галузі науки і техніки.
Самойленко В.Г. — д.ф.-м.н., проф., зав. кафедри математичної фізики Київського національного університету ім.Т.Шевченко.
Оксіюк О.Г. — к.т.н., доцент.

Затверджено Міністерством освіти і науки України як підручник (лист від 14.05.08. №1.4/18-Г-1088)

МЕДВЕДЄВ М.Г., ПАЩЕНКО І.О.
М42 **Теорія ймовірностей та математична статистика.** Підручник. — К.: Вид-во "Ліра-К". 2008. — 536 с.

ISBN 978-966-96938-3-9

У підручнику розглядається основний теоретичний матеріал з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» за кредитно-модульною системою згідно вимог Болонської конвенції. Особлива увага приділена доступності викладення матеріалу, який супроводжується великою кількістю прикладів. На електронному носії знаходяться задачі для самостійної роботи та модульного контролю студентів, біографічний довідник.

Для студентів, викладачів та всіх, хто вивчає курс «Теорія ймовірностей та математична статистика»

ББК 22.17
УДК 519.2

ISBN 978-966-96938-3-9

ЗМІСТ

***МОДУЛЬ 3.* ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

ПЕРЕДМОВА

Економісти, бізнесмени, спеціалісти інших напрямків та й звичайні люди кожного дня вимушені приймати рішення під тиском обставин, зазвичай не маючи повної й достовірної інформації. Наприклад, чи будуть споживачі купувати нову групу товарів? Яка з можливих кандидатур переможе на виборах? Чи призведе рекламна компанія до збільшення обсягів продажу? Чи зростатимуть ціни на пальне? Чи зможе нова програма навчання кадрів підвищити продуктивність праці? Чи закінчиться розпочате будівництво у заплановані терміни? Вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики, що базуються на грі випадку, забезпечить надійний інструмент вимірювання та контролю різних форм невизначеності, допоможе зрозуміти ризики та випадковості, забезпечить оцінки правдоподібності отримання різних потенційних результатів, допоможе отримати додаткову інформацію із даних та оцінити якість цієї інформації.

Кількісне вираження можливості окремих наслідків і подій ґрунтується на понятті ймовірності. Допускається, що кожній події, можливій за даних обставин, може бути приписана чисельна міра її об'єктивної можливості, яку називають **ймовірністю події**. Знання правил оцінки ймовірностей подій допоможе керівникові підвищити якість прийняття рішень.

Предметом теорії ймовірностей є стохастичні експерименти на основі дослідження їх математичних моделей. Під **стохастичним експериментом** будемо розуміти експеримент, результат якого неможливо передбачити заздалегідь (до проведення експерименту), але такий, який можна повторити в незалежний спосіб у принципі необмежене число разів.

Теорія ймовірностей виникла як наука на основі твердження, що в основі масових випадкових однорідних подій лежать детерміновані закономірності.

У природі немає жодного явища, в якому б не був присутній елемент випадковості. Як би точно не фіксувались умови експерименту, неможливо досягти того, щоб при повторенні експерименту результати повністю і точно співпадали. Випадкові відхилення супроводжують будь-яке закономірне явище. У багатьох практичних задачах цими випадковими елементами можна знехтувати, розглядати замість реального явища його спрощену схему або „модель". При цьому з величезної кількості факторів, що впливають на дане явище, виділяють найголовніші; впливом решти другорядних факторів нехтують. Така схема вивчення явищ постійно застосовується у фізиці, механіці, техніці тощо. Однак для розв'язання багатьох задач описана „класична схема" виявляється незастосовною. Є багато таких задач, у яких наслідок досліджуваного явища залежить від такої великої кількості факторів, що їх практично неможливо врахувати і зареєструвати. У цих задачах численні другорядні випадкові фактори, які тісно переплітаються між собою, відіграють помітну роль, а разом з тим їх кількість така велика, що неможливо вилучити численні зайві фактори, і тоді застосування класичних методів дослідження себе не виправдовує.

Практика показує, що, спостерігаючи у сукупності масу однорідних випадкових явищ зазвичай виявляємо в них певні закономірності або стійкості, які властиві саме масовим випадковим явищам. Ці закономірності практично не залежать від індивідуальних особливостей окремих випадкових явищ, що входять до масиву розглядаються, їх особливості взаємопогашаються, нівелюються. Так, неможливо наперед передбачити результат одного пострілу з гармати по даній мішені, але при великій кількості пострілів частота влучення наближається до деякого постійного числа. Середній масовий результат множини випадкових явищ виявляється вже практично не випадковим, а передбачуваним. Це і є базою практичного застосування ймовірнісних методів дослідження. Мета ймовірнісних (статистичних) методів полягає в тому, щоб обійти досить складне або неможливе дослідження окремого явища і звернутися безпосередньо до законів, які управляють масами таких явищ. Вивчення цих законів дає змогу не тільки робити прогноз, але й упливати на хід подій, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати вплив на практику.

Ймовірність – це поняття, певною мірою протилежне статистиці. Тоді як статистика допомагає переходити від спостережень до узагальнень щодо ситуації, яка розглядається, ймовірність має протилежну спрямованість: виходячи з характеристики, ситуації можна з'ясувати, які дані ви швидше за все отримаєте і яка можливість кожного з варіантів цих даних. Цей зворотний зв'язок можна графічно так:

$$\begin{pmatrix}\textit{Характеристика}\\ \textit{ситуації}\end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{ймовірність}} \begin{pmatrix}\textit{Яка подія ймовірніше}\\ \textit{всього відбудеться?}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}\textit{Яка подія}\\ \textit{відбулась?}\end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{статистичний висновок}} \begin{pmatrix}\textit{Характеристика}\\ \textit{ситуації}\end{pmatrix}.$$

Ймовірність разом із статистикою забезпечує міцний фундамент для статистичного висновку. В умовах невизначеності неможливо точно знати, яка подія відбудеться, завжди є деяка ймовірність помилки. Використовуючи поняття ймовірності, ви дізнаєтесь, як контролювати помилку так, щоб вона мала місце не більше, як у 5% чи 1% випадків.

У процесі здобуття вищої освіти математично-статистичні дисципліни традиційно вважаються найбільш складними для студентів. Цей підручник ставить за мету допомогти зрозуміти прикладний та практичний зміст проблем, які розв'язуються методами теорії ймовірностей та математичної статистики тим, хто освоює ці курси як на стаціонарі, так і заочно. Підручник призначений для студентів і викладачів економічних та інженерних спеціальностей вищих навчальних закладів.

У підручнику коротко і доступно викладено основний теоретичний матеріал за кожним модулем навчальної програми кредитно-модульної системи згідно з вимогами Болонської конвенції – без громіздких математичних доведень. Розглянуто теорію випадкових процесів, яка сьогодні бурхливо розвивається і описує реальні соціально-економічні процеси, але не увійшла до навчальної програми.

Для того щоб процес навчання мав активний характер, тексти задач максимально наближені до реальних ситуацій в економіці і повсякденному житті. Підручник містить численну кількість розв'язаних задач і задач для самостійного розв'язування, тому може використовуватись і як збірник задач. Розв'язані задачі дають можливість зрозуміти універсальність ймовірнісно-статистичного аналізу як інструменту розв'язування проблем, пов'язаних з ризиком та невизначеністю.

Комплекс задач та завдань для підсумкового контролю знань з кожного модуля у вигляді контрольних робіт та тестів, біографічний довідник, перелік питань для самоперевірки та зразки розв'язування задач з теорії ймовірностей і математичної статистики за допомогою популярного сьогодні офісного додатку EXCEL містяться на електронному диску, що додається до підручника. Всі ці матеріали при необхідності можна легко роздрукувати.

Започатковано теорію ймовірностей у середині сімнадцятого століття відомими математиками Паскалем (1623–662), Ферма (1601–1665) та Гюйгенсом (1629–1695), які розробили математичну модель, що описує ймовірності наслідків в іграх, які залежать від випадку, на замовлення відомих гравців в азартні ігри. Під час гри в „кості", рулетку, як і при дослідженнях, результати змінюються від випадку до випадку навіть при збереженні умов. В їхніх працях поступово сформувалися поняття ймовірності та математичного сподівання, було встановлено їх властивості та способи обчислення. Згодом ці методи почали застосовувати в практиці страхових компаній для встановлення розумних розмірів страхових премій.

Значний крок вперед у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з працями Якоба Бернуллі (1654–1705). Йому належить перше доведення одного з важливих положень теорії ймовірностей – так званого „закону великих чисел".

Другий важливий етап пов'язаний з ім'ям Муавра (1667–1754). Цей учений вперше розглянув і для найпростішого випадку обгрунтував особливий закон: так званий нормальний закон.

Теореми, які обгрунтовують цей закон для тих чи інших умов, мають в теорії ймовірностей спільну назву „центральна гранична теорема."

Видатна роль у розвитку теорії ймовірностей належить відомому математику Лапласу (1749–1827). Він уперше надав строгий і систематичний виклад основ теорії ймовірностей та доведення однієї з форм центральної граничної теореми (теорема Мавра-Лапласа) і розвинув комплекс особливих застосувань теорії ймовірностей до питань практики, в тому числі до аналізу похибок спостереження і вимірювань.

Значний крок вперед у розвитку теорії ймовірностей пов'язаний з іменем Гаусса (1777–1855), який запропонував ще більш загальне обгрунтування нормального закону і розробив метод обробки експериментальних даних, відомий під назвою „методу найменших квадратів."

Слід відмітити праці Пуассона (1781–1840), який довів більш загальну, ніж у Я.Бернуллі, форму закону великих чисел, а також уперше застосував теорію ймовірностей до задач стрільби. З іменем Пуассона пов'язаний один із законів розподілу, який відіграє важливу роль в теорії ймовірностей і її додатках.

Для всього XVIII та початку XIX століття характерним є бурхливий розвиток теорії ймовірностей та повсюдне захоплення нею. Теорія ймовірностей перетворюється на „модну науку".

Саме в цей час у Росії створюється Петербурзька математична школа, завдяки працям якої теорію ймовірностей було поставлено на міцну логічну й математичну основу і перетворено на точний та ефективний метод пізнання. З моменту появи цієї школи розвиток теорії ймовірностей якнайтісніше пов'язаний з працями російських, а згодом – радянських вчених.

Серед учених Петербурзької математичної школи слід назвати В.Я. Буняковського (1804–1889) – автора першого курсу теорії ймовірностей російською мовою, творця сучасної термінології теорії ймовірностей, автора оригінальних досліджень в галузі статистики і демографії.

Учнем В.Я.Буняковського був великий російський математик П.Л.Чебишев (1821–1895). Йому належать подальше розширення і узагальнення закону великих чисел. Окрім того, Чебишев ввів у теорію ймовірностей так званий потужний метод моментів.

Учнем Чебишева був А.А. Марков (1856-1922), який також збагатив теорію ймовірностей дуже важливими методами. Він суттєво розширив сферу застосування закону великих чисел і центральної граничної теореми, поширив їх не тільки на незалежні, але й на залежні події. Найважливіша його заслуга в тому, що він заклав основи зовсім нової гілки теорії ймовірностей – теорії випадкових або „стохастичних" процесів. Розвиток цієї теорії є головним змістом сучасної новітньої теорії ймовірностей.

Учнем Чебишева був і О.М.Ляпунов (1857–1918), з ім'ям якого пов'язане перше доведення центральної граничної теореми за надзвичайно загальних умовах. Для доведення своєї теореми він розробив спеціальний метод характеристичних функцій, що широко застосовується в сучасній теорії ймовірностей.

Радянські вчені успадкували традиції Петербурзької математичної школи. Назвемо тільки декількох великих радянських вчених, праці яких зіграли провідну роль у розвитку сучасної теорії ймовірностей і її практичного застосування.

С.М.Берштейн розробив першу закінчену аксіоматику теорії ймовірностей, а також суттєво розширив сферу застосування граничних теорем.

А.Я.Хінчин (1894–1959) відомий своїми дослідженнями в галузі подальшого узагальнення і посилення закону великих чисел, але головним чином своїми дослідженнями у сфері так званих стаціонарних випадкових процесів.

Ряд важливих основоположних праць у різних галузях теорії ймовірностей і математичної статистики належать А.М.Колмогорову. Особливе значення мають його праці в області теорії випадкових функцій (стохастичних процесів). Праці Колмогорова, які стосуються оцінки ефективності стрільби, лягли в основу цілого нового наукового напрямку в теорії стрільби, який він згодом переріс у більш широку науку про ефективність бойових дій.

В.І.Романовський та М.В.Смирнов відомі своїми працями в галузі математичної статистики, Є.Є.Слуцький – дослідженнями в теорії випадкових процесів, Б.В.Гнєденко – дослідженнями в галузі теорії масового обслуговування. В.С.Пугачов – дослідник новітніх часів, який розробив ряд більш загальних методів теорії випадкових функцій, що охоплюють як стаціонарні, так і нестаціонарні процеси. Розроблені ним методи знаходять широке застосування в дослідженнях динамічних систем, які працюють в умовах випадкових збурень.

Сьогодні немає практично жодної галузі науки, в якій би не застосовувалися ймовірнісні методи: ядерна фізика, економіка, радіотехніка, теорія зв'язку, кібернетика, обчислювальна техніка, теорія автоматизованих систем управління, теорія масового обслуговування, біологія, фізіологія, медицина, соціологія, психологія, лінгвістика, літературознавство і навіть естетика.

Підручник відображає багаторічний досвід викладання теорії ймовірностей та математичної статистики у вищих навчальних закладах і повністю відповідає навчальній програмі. За програмою курс теорії ймовірностей та математичної статистики поділено на 3 модулі та 14 змістових модулів.

МОДУЛЬ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

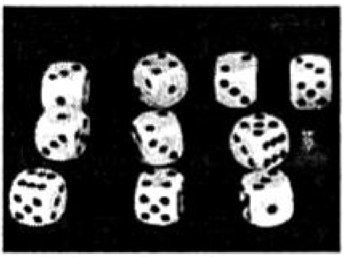
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1. Основні поняття

Експеримент (випробування, спостереження) – це процес, який відбувається за певних умов і призводить до одного з можливих наслідків. *Наприклад*, контролер перевіряє партію із 100 деталей на якість.

Наслідок – можливий результат експерименту (основне поняття). *Наприклад*, після перевірки 100 деталей на якість виявилося 95 якісних і 5 бракованих деталей.

Подія – один або декілька наслідків експерименту. *Наприклад*, подія – „під час перевірки 100 деталей на якість контролер виявив парну кількість якісних деталей" об'єднує 50 можливих наслідків.



Випадковою називають подію, яка може відбутися або не відбутися в результаті експерименту. Всі випадкові події поділяють на елементарні та складні. **Елементарні** події мають один можливий наслідок, **складні** – декілька можливих наслідків. Кажуть, що подія відбулася, якщо мав місце один з можливих наслідків цієї події. Можливі **наслідки** позначають ω_i. Ті з наслідків, коли дана подія відбувається, називають **сприятливими** події наслідками. Множину усіх можливих наслідків називають **простором елементарних подій (повною групою подій** або **простором елементарних наслідків)**. Позначають $\Omega = \sum \omega_i$. Так, під час одного кидання грального кубика можливими є 6 елементарних наслідків: ω_1 – випав 1 бал, ω_2 – випало 2 бали, ω_3 – випало 3 бали, ω_4 – випало 4 бали, ω_5 – випало 5 балів, ω_6 – випало 6 балів. Таким чином, маємо такий простір елементарних наслідків $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Подію, яка не має жодного наслідку, називають **неможливою** (вона не відбудеться за жодних умов). Позначають $\varnothing$.

Подію, яка відбудеться за будь-яких умов, тому що вона полягає в реалізації якогось одного з усіх елементарних наслідків простору елементарних наслідків, називають **ймовірною або достовірною.** Позначають Ω. Її ототожнюють з простором елементарних наслідків. *Наприклад*, при підкиданні грального кубика, подія, яка полягає в тому, що випаде 1, 2, 3, 4, 5 або 6 балів є ймовірною, а подія, яка полягає в тому, що випаде 7 або 8 балів, є неможливою.

Події, які не можуть відбуватися одночасно, називають **несумісними**. *Наприклад*, події „студент Коваленко склав іспит з теорії ймовірностей на „відмінно"" та „студент Коваленко склав іспит з теорії ймовірностей на „задовільно" несумісні, тому що не можуть відбутися одночасно, адже йдеться про того ж самого студента і ту ж саму дисципліну. А ось події „в магазин зайшла людина віком 40 років" і „в магазин зайшла жінка" – **сумісні**, тому що в магазин може зайти жінка віком 40 років.

Події A та B називають **незалежними,** якщо поява однієї з них не змінює можливості появи іншої. Інакше, події називають **залежними**. *Наприклад*, по одному разу кинули монету і гральний кубик. Випало – „орел" і 6 балів. Результати кидання один на одного не впливають, тому ці події є незалежними. Якщо ж із коробки, в якій лежать червоні та фіолетові повітряні кульки першого разу взяли червону кульку без повторення (подія A), то можливість витягти червону кульку за другим разом (подія B) зменшилася. Отже, ці події є залежними.

Події називають **рівноможливими,** якщо немає ніяких причин стверджувати, що будь-яка з них можливіша за інші. *Наприклад*, коли кидають правильний гральний кубик, то всі шість можливих наслідків є рівноможливими. А ось, коли з ящика, в якому десять деталей стандартні і три браковані, вийняли одну, то події: „з ящика вийнято стандартну деталь" і „з ящика вийнято браковану деталь" нерівноможливі.

В теорії ймовірностей випадкові події прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту: A, B, C і т.п., іноді супроводжуючи їх індексами: A_i, B_j .

2. Основні операції над подіями

1. **Сумою** або **об'єднанням** подій A та B називають подію C, яка містить усі можливі наслідки подій A та B разом (між подіями можна вставити сполучник або). Позначають $C=A+B$ або $C=A\bigcup B$. Кажуть, подія C відбудеться, якщо відбудеться *хоча б одна* з двох подій або A, або B, або обидві разом.

Приклад 1. Подія A – „в результаті підкидання грального кубика випаде менше ніж 4 бали"; подія B – „в результаті підкидання грального кубика випаде 3 або 6 балів". Тоді A+B – „в результаті підкидання грального кубика випаде 1, 2, 3 або 6 балів".

2. **Добутком** або **перетином** подій A та B називають подію C, яка складається з усіх наслідків, що є спільними для A та B (між подіями можна вставити сполучник і). Позначають $C=A\cdot B$ або $C=A\bigcap B$. Кажуть, подія C відбудеться, якщо відбудуться одночасно подія A і подія B. У *прикладі 1*, $A\cdot B$ – „в результаті підкидання грального кубика випаде 3 бали".

3. **Різницею** подій A та B називають подію C, яка містить усі наслідки A, які не входять до B. Позначають $C=A\backslash B$. З *прикладу 1*, $A\backslash B$ – „в результаті підкидання грального кубика випаде 1або 2 бали".

4. Для кожної події A можна розглядати подію, яка полягає в тому, що подія A не відбудеться. Вона містить усі наслідки простору

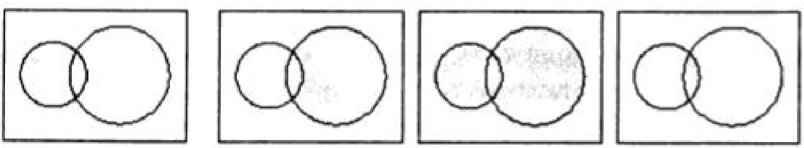
елементарних подій, що не увійшли до A. Її називають **протилежною** до A і позначають $\overline{A}$.

У *прикладі 1* – подія $\overline{A}$ – „в результаті підкидання грального кубика випаде 4, 5 або 6 балів".

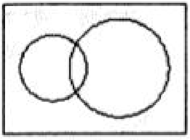
5. Подія B **включає** подію A (A тягне за собою B або B є наслідком A), якщо серед можливих наслідків події A обов'язково є можливі наслідки і події B. Позначають $A \subset B$. *Наприклад*, подія „в результаті підкидання грального кубика випала парна кількість балів" включає подію „при підкиданні грального кубика випало 2 бали".

6. Події A та B називають **рівними**, якщо $A \subset B$, $B \subset A$. Наприклад, події „при підкиданні грального кубика випало 6 балів" та „при підкиданні грального кубика випала найбільша можлива кількість балів" є рівними.

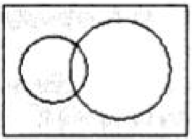
Операції над подіями можна подати як операції над множинами. При цьому подію розглядають як підмножину деякої множини Ω. Сумі подій A + B відповідає об'єднання цих підмножин $A \bigcup B$, а їх добутку $A \cdot B$ – перетин $A \bigcap B$. Достовірна подія є простором всіх підмножин $\varnothing$, а неможлива подія – порожню підмножину $\varnothing$ в ньому. Несумісність подій A та B означає, що відповідні підмножини A та B не перетинаються: $A \bigcap B = \varnothing$. Якщо ж події сумісні, то підмножини, які їм відповідають, перетинаються. Подія $\overline{A}$, протилежна до події A, є доповненням події A до множини $\varnothing$, тобто $\overline{A} = \Omega / A$. Ці операції в графічному вигляді проілюструємо діаграмами Ейлера-В'єнна. Нехай, наприклад, всередині прямокутника Ω обирається навмання будь-яка точка. Подія A полягає в потраплянні цієї точки в менший круг, що знаходиться всередині прямокутника. Подія B полягає в потраплянні цієї точки в більший круг. Тоді сума подій A+B означає попадання точки в усю зафарбовану частину обох кругів, а добуток $A \cdot B$ – в спільну частину кругів і т.ін.



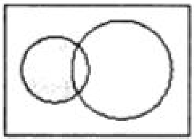
A B A+B AB



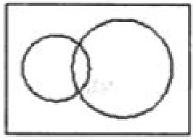
$\overline{A}$



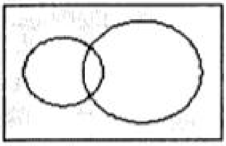
$\overline{B}$



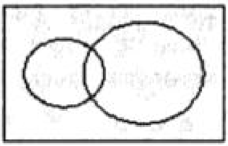
$A\setminus B = A\cdot\overline{B}$



$B\setminus A = B\cdot\overline{A}$



$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$



$\overline{A\text{Ч}B}=\overline{A}+\overline{B}$

3. Властивості операцій над подіями

1. $\varnothing \subset A \subset \Omega$
2. $\varnothing + A = A$
3. $\Omega + A = \Omega$
4. $A+B=B+A$
5. $(A+B)+C=A+(B+C)$
6. $A\cdot B= B\cdot A$
7. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
8. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
9. $A\cdot\varnothing=\varnothing$
10. $A\cdot\varnothing=A$
11. $A\cdot A=A$
12. $(A\cdot B)+C=(A+C)\cdot(B+C)$
13. $A\setminus B=A\setminus(A\cdot B)=A\cdot\overline{B}$
14. $\overline{A}=\Omega\setminus A$
15. $A\cdot A=\varnothing$
16. $\overline{\overline{A}}=A$
17. $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
18. $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

Приклад 2. Нехай A, B, C – випадкові події. Знайти вирази для подій, які полягають у тому, що з даних трьох подій: 1) відбулася тільки A; 2) відбулися тільки A і B; 3) відбулися всі три події;

4) відбулася хоча б одна із цих подій; 5) відбулося не менше двох із даних подій; 6) відбулася тільки одна з даних подій; 7) відбулися дві із даних подій; 8) не відбулася жодна із даних подій.

Розв'язування:

▼ $A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}$ – „відбулася подія A, і не відбулася подія B, і не відбулась подія C";

1) $A\cdot B\cdot \overline{C}$ – „відбулась подія A, і відбулася подія B, і не відбулася подія C";

2) $A\cdot B\cdot C$;

3) $A+B+C$ – „відбулася подія A, або подія B, або подія C";

4) $A\cdot B\cdot \overline{C}+A\cdot \overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot B\cdot C$ – „відбулися події A, і B або A, і C або B і C або A і B і C";

5) $A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}+\overline{A}\cdot B\cdot \overline{C}+\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot C$;

6) $A\cdot B\cdot \overline{C}+A\cdot \overline{B}\cdot C+\overline{A}\cdot B\cdot C$;

7) $\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}$. ▲

ОСНОВИ КОМБІНАТОРИКИ

Досить часто для обчислення ймовірностей подій використовують такий розділ курсу „Алгебра" як „Комбінаторика", предметом якого є теорія скінченних множин. За допомогою „Комбінаторики" знаходять число можливих комбінацій заданих предметів, число способів, якими можна здійснити деякий вибір тощо.

1. Основні правила комбінаторики

Правило суми

Якщо елемент A_1 можна вибрати n_1 способами, елемент A_2 – іншими n_2 способами, A_3 – відмінними від попередніх n_3 способами і т. д., тоді вибір одного з елементів або A_1, або A_2, або A_3, або і т. д. можна здійснити $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$ способами .

Приклад 3. В інформаційно – технологічному управлінні банку працюють 3 аналітики, 10 програмістів і 20 інженерів. Для понаднормової роботи в святковий день начальник управління повинен виділити одного співробітника. Скільки різних способів зробити це є у начальника управління?

Розв'язування:

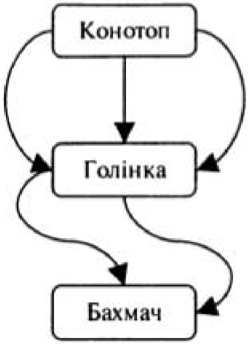
▼ За правилом суми у нього є 3 +10 +20 = 33 способи. ▲

Правило добутку

Якщо елемент A_1 можна вибрати n_1 способами, і після кожного такого вибору елемент A_2 можна вибрати n_2 способами, і після кожного такого вибору пари попередніх елементів елемент A_3 можна вибрати n_3 способами і т.п., то вибір усіх елементів A_1, A_2, A_3, ... у вказаному порядку можна здійснити $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$ способами.

Приклад 4. З міста Конотоп до села Голінка автомобілем можна доїхати трьома різними дорогами, а з села Голінка до міста Бахмач є дві різні дороги. Скільки існує різних способів, щоб доїхати з міста Конотоп до міста Бахмач через село Голінка?

Розв'язування:



▼Вибір A (дорога з міста Конотоп до села Голінка) можна здійснити трьома способами, і для кожного з цих способів вибір B (дорога з села Голінка до міста Бахмач) можна здійснити двома способами. Тому за правилом добутку кількість усіх можливих варіантів доїхати з міста Конотоп до міста Бахмач через село Голінка $3 \cdot 2 = 6$ ▲

Поняття факторіала

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n називають „n факторіал" і позначають: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$. Будемо вважати, що $0! = 1$, $1! = 1$.

2. Основні види комбінацій

Різні групи, які складені з будь-яких елементів деякої головної множини, що відрізняються чи то самими елементами, чи то їх порядком називають **комбінаціями** цих елементів.

1. Комбінації з n елементів, які відрізняються одна від одної лише порядком елементів, називають **перестановками без повторень** цих елементів. Кількість перестановок з n елементів (записують P_n, P – перша буква французького слова permutation – перестановка) обчислюється за формулою:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Приклад 5. Порядок виступу 7-ми учасників конкурсу визначається жеребкуванням. Яка кількість різних варіантів жеребкування при цьому можлива?

Розв'язування:

▼ Кожний варіант жеребкування відрізняється тільки порядком слідування учасників конкурсу, тобто є перестановкою з семи елементів. Тоді кількість таких перестановок:

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040. \ ▲$$

2. Комбінації, взяті з n різних елементів по m (m n) і такі, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом або ж їх порядком, або ж і тим, і іншим називають **розміщеннями без повторень**. Кількість розміщень із n елементів по m (записують A_n^m, A – це перша буква французького слова arrangement – розміщення, впорядкування) знаходять за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1), \text{ де } 0 \le m \le n$$

Приклад 6. Правління комерційного банку обирає з 10 кандидатів 3 чоловіки на різні посади (в усіх кандидатів однакові шанси). Скільки існує способів заміщення вакантних посад ?

Розв'язування:

▼ Так як групи людей по три чоловіки можуть відрізнятись як складом так і порядком заміщення ними вакансій, то для відповіді підрахуємо кількість розміщень без повторень з десяти елементів по три

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$$

▲

3. Комбінації, які взяті з n різних елементів по m і такі, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом (інший порядок слідування елементів не враховується) називають **сполученнями без повторень**. Кількість можливих сполучень з n різних елементів по m (записують C_n^m, C – перша буква французького слова combinaison - комбінація) підраховують за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}, \text{ де } 0 \le m \le n$$

ВЛАСТИВОСТІ СПОЛУЧЕНЬ

1) $C_n^0 = 1$;

2) $C_n^n = 1$;

3) $C_n^1 = n$;

4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$;

$$((a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot a^m \cdot b^{n-m} - \text{ біном Ньютона })$$

5) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$;

6) $C_n^m = C_n^{n-m}$

Потрібно вміти відрізняти сполучення від розміщень. Наприклад: якщо в залі засідань 340 депутатів і 21 із них вийшли на перерву та стали поруч і ведуть бесіду, то порядок, в якому вони стоять, є несуттєвим. Кількість усіх можливих груп з 340 депутатів по 21 в даному випадку – сполучення. Якщо ж ці депутати прийшли на перерві в буфет і стали в чергу за кавою, то тоді порядок, в якому вони стали, є суттєвим, оскільки у цьому випадку важливо, хто з них отримав каву першим, хто другим і т.п. У цій ситуації при підрахунку можливих груп з 340 депутатів по 21 потрібно рахувати розміщення.

Приклад 7. Скількома способами аспірант може вибрати три книги з десяти різних книг, запропонованих бібліотекарем на одну тему?

Розв'язування:

▼ Оскільки порядок вибраних аспірантом книг є несуттєвим (суттєвими є тільки назви книг), то для відповіді підрахуємо кількість можливих сполучень без повторень з десяти книг по три:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!}$$

▲

4. Якщо в перестановках із загальної кількості n елементів є k різних елементів, при цьому перший елемент повторюється n_1 раз, другий елемент – n_2 рази і т. д., k-ий елемент – n_k разів, причому $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то такі перестановки називають **перестановками з повтореннями**. Кількість перестановок з повтореннями з n елементів (записують $\tilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k)$) обчислюють за формулою:

$$\tilde{P}_n(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}.$$

Приклад 8. Скільки існує семизначних чисел, які складаються з цифр 4, 5, і 6, причому цифра 4 повторюється три рази, а цифри 5 та 6 – по два рази?

Розв'язування:

▼ За умовою $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$, а $n_1+n_2+n_3=7$.

Тоді $\tilde{P}_7(3,2,2) = \dfrac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$ чисел. ▲

5. Якщо в розміщеннях (сполученнях) із n елементів по m деякі з елементів (або всі) можуть бути однаковими, то такі розміщення (сполучення) називають **розміщеннями (сполученнями) з повтореннями** з n елементів по m. Кількість розміщень з повтореннями з n елементів по m (позначають $\tilde{A}_n^m$) обчислюють за формулою: $\tilde{A}_n^m = n^m$. Кількість сполучень з повтореннями із n елементів по m (позначають $\tilde{C}_n^m$) обчислюють за формулою: $\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

Приклад 9. Правління комерційного банку обирає з десяти кандидатів три чоловіки на три різні вакансії (вважається, що шанси всіх претендентів однакові). Якщо припустити, що один і той самий відібраний з десяти кандидатів може обійняти не одну, а дві, або ж навіть усі три посади, то скільки існує можливих комбінацій заміщення трьох вакансій?

Розв'язування:

▼ В задачі йдеться про розміщення з повтореннями (тому що порядок, в якому будуть заміщатися вакансії, є важливим). Отож, загальна кількість усіх можливих комбінацій заміщення вакансій становить: $\tilde{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$. ▲

Приклад 10. Скількома способами можна купити 8 тістечок у кондитерській, де є шість різних видів тістечок?

Розв'язування:

▼ Зрозуміло, що серед потрібних восьми тістечок можуть бути і тістечка одного виду (або навіть усі). Порядок, у якому ми будемо купляти тістечка, є неважливим. Отож, щоб дати відповідь на питання задачі, підрахуємо кількість сполучень з повтореннями із шести різних видів тістечок, за умови, що маємо купити вісім тістечок: $\tilde{C}_6^8 = C_{6+8-1}^8 = C_{13}^8 = \frac{13!}{5!\,8!} = 1287$ (способами).

▲

Розв'язуючи задачі з комбінаторики, доцільно користуватися такою схемою:

а) визначити кількість елементів головної множини;

б) визначити, скільки елементів входить у кожну комбінацію (якщо кількість елементів у кожній комбінації рівна кількості елементів головної множини, то йдеться про перестановки, а якщо ні – про розміщення чи сполучення);

в) з'ясувати, чи суттєвий порядок елементів у комбінації (якщо порядок суттєвий, то йдеться про розміщення, якщо ж ні – про сполучення);

г) з'ясувати, чи можливий повтор елементів у комбінації (якщо так, то йдеться про перестановки, розміщення чи сполучення з повтореннями);

д) з'ясувати, чи йдеться про підрахунок кількості комбінацій даного складу, чи про підрахунок кількості можливих складів даної комбінації (у першому випадку визначити склад комбінації і використати формулу для підрахунку кількості перестановок з повтореннями; у другому – визначити кількість елементів головної множини, склад комбінації і скористатися формулою для підрахунку кількості сполучень з повтореннями).

6. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – підмножини універсальної множини Ω, $\overline{A_i}$ – доповнення множини A_i, $N(A_i)$ – число елементів множини A_i. Має місце формула:

$$N(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\ldots\cdot\overline{A_n}) = N - \sum_{i=1}^{n} N(A_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(A_i\cdot A_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(A_i\cdot A_j\cdot A_k) + \ldots$$

$$+ (-1)^n N(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n).$$

Цю формулу називають *формулою включень та виключень*, або *формулою решета*.

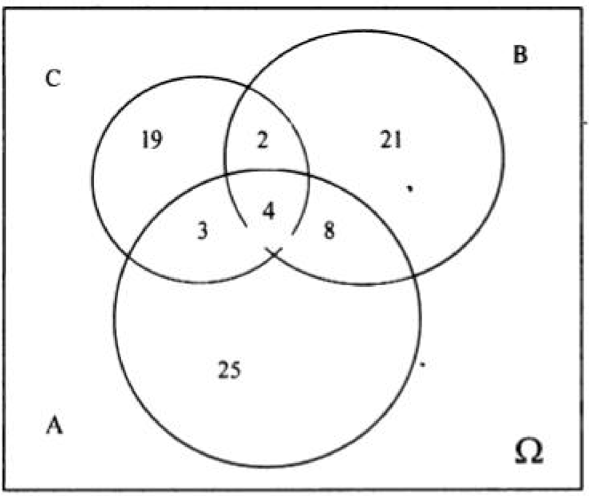
Приклад 11. Із 100 студентів 40 знають англійську мову, 35 – німецьку, 28 – французьку; англійську і німецьку мови знають 12 студентів; англійську і французьку – 7; німецьку і французьку – 6; всі три мови знають 4 студенти. Скільки студентів не знають жодної з цих мов?

Розв'язування:

▼ Якщо A, B, C - відповідно множини студентів, що знають англійську, німецьку і французьку мови, Ω – множина всіх 100 студентів, то за формулою включень та виключень маємо:

$$N(\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C) + N(A\cdot B) + N(A\cdot C) + N(B\cdot C) -$$
$$- N(A\cdot B\cdot C) = 100 - 40 - 35 - 28 + 12 + 7 + 6 - 4 = 18$$

Для наочного зображення можна було скористатись діаграмами Ейлера - В'єнна. Діаграма заповнюється, починаючи з $A\cdot B\cdot C$: $N(A\cdot B\cdot C) = 4$. $N(A\cdot B\cdot \overline{C}) = 12 - 4 = 8$ (число студентів, які знають тільки англійську і німецьку мови). $N(A\cdot C\cdot \overline{B}) = 7 - 4 = 3$, $N(B\cdot C\cdot \overline{A}) = 6 - 4 = 2$, $N(A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}) = 40 - (3 + 4 + 8) = 25$, $N(B\cdot \overline{A}\cdot \overline{C}) = 35 - (2 + 4 + 8) = 21$, $N(C\cdot \overline{A}\cdot \overline{B}) = 28 - (3 + 4 + 2) = 19$, і, нарешті, $N(\overline{A}\cdot \overline{B}\cdot \overline{C}) = 100 - (25 + 21 + 19 + 8 + 3 + 2 + 4) = 18$.



▲

Приклад 1. В конкурсі за п'ятьма номінаціями беруть участь 10 кінофільмів. Скільки існує варіантів розподілу призів, якщо у кожній номінації встановлені: а) різні призи; б) однакові призи?

Розв'язування:

▼ а) Кожний із варіантів розподілу призів є комбінацією п'яти фільмів з десяти, які відрізняються від інших комбінацій як складом фільмів, так і порядком їх розподілу за номінаціями (або і тим, і іншим), причому один і той самий фільм може виграти у кількох номінаціях. Для відповіді на питання задачі підрахуємо кількість розміщень з повтореннями із десяти елементів по п'ять:

$$\tilde{A}_{10}^{5} = 10^5 = 100000 \text{ (варіантів)}.$$

б) Якщо у кожній номінації встановлені однакові призи, то порядок фільмів у комбінації п'яти призерів є несуттєвим, а кількість варіантів розподілу призів є кількістю сполучень з повтореннями із десяти елементів по п'ять:

$$\tilde{C}_{10}^{5} = C_{10+5-1}^{5} = C_{14}^{5} = \frac{14!}{5!\,9!} = 2002 \text{ (варіантів)}. \ \blacktriangle$$

Приклад 2. Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану. Господар запропонував їм приходити до нього щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по-іншому. Після того, як усі способи посадки за столом будуть вичерпані, господар зобов'язався годувати друзів у ресторані безкоштовно. Через скільки років друзям слід чекати „райського життя"?

Розв'язування:

▼ Кожний інший варіант посадки за столом буде відрізнятися тільки розташуванням друзів. Кількість можливих посадок рівна кількості перестановок без повторень. Врахуємо також те, що стіл круглий. Це означає, що один із друзів обиратиме місце довільно, а решта може розміщуватись по-різному відносно нього $P_9 = 9! = 362880$ способами. Якщо вважати, що рік має 365 днів, то „райське життя" прийде через $\frac{362880}{365} = 994$ (роки). ▲

Приклад 3. Скільки потрібно мати словників, щоб можна було безпосередньо робити переклади з будь-якої із п'яти мов: російської, української, англійської, німецької та французької на будь-яку іншу з цих мов?

Розв'язування:

▼ Щоб робити переклад з однієї мови на іншу потрібно мати два словники, наприклад, українсько-російський та російсько-український. Словники, про які йдеться в задачі, мають відрізнятися не тільки назвою однієї з мов, але й порядком, у якому вони розміщені. Тому потрібна кількість словників рівна кількості розміщень без повторень із п'яти різних мов по дві:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \cdot 5 = 20. \ \blacktriangle$$

Приклад 4. На підприємстві працюють 15 співробітників, троє з яких не мають відповідної кваліфікації. Скільки можна скласти різних списків претендентів на санаторно-курортний відпочинок, якщо у списку має бути 9 співробітників, двоє з яких не мають відповідної кваліфікації?

Розв'язування:

▼ Списки вважаються різними, якщо вони відрізняються хоча б одним прізвищем, порядок запису співробітників у списку не є суттєвим. Тому для відповіді підрахуємо кількість можливих сполучень без повторень. Кваліфікованих співробітників 12, тому обрати з них 7 можна $C_{12}^7 = \dfrac{12!}{7!\,(12-7)!} = 792$ способами. Решту двох кандидатів без відповідної кваліфікації можна обрати серед трьох $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$ іншими способами. За правилом добутку всього можна скласти $792 \cdot 3 = 2376$ різних списків претендентів на санаторно-курортний відпочинок. ▲

Приклад 5. У багатьох країнах водійське посвідчення має шифр, який складається з трьох літер та трьох цифр. Скільки можливо зашифрувати водійських посвідчень, якщо можна використовувати 30 літер української абетки і літери займають три перші позиції шифру?

Розв'язування:

▼ Оскільки в шифрах водійських посвідчень суттєвими є не тільки те, які саме літери та цифри будуть використані, а й у якому порядку, то для відповіді на питання задачі підрахуємо кількість розміщень з повтореннями, адже у шифрі можуть повторюватися одні й ті самі літери та цифри. Спочатку здійснимо вибір трьох літер. Загальна кількість вибору таких різних можливих трійок рівна $\tilde{A}_{30}^{3} = 30^3 = 27000$. Аналогічно, вибір трьох цифр із десяти можна здійснити $\tilde{A}_{10}^{3} = 10^3 = 1000$ способами. Залишається тільки виключити з розгляду варіант, за яким усі три цифри нулі. Оскільки шифр водійського посвідчення є упорядкованою „парою", яка складається з комплекту літер та комплекту цифр, то за правилом добутку кількість усіх можливих номерів посвідчень становить:

$(10^3 - 1) \cdot 30^3 = 999 \cdot 27000 = 26973000$. ▲

Приклад 6. В їдальні є чотири види перших страв, п'ять других і три третіх. Скількома способами можна скласти з цих страв повноцінний обід?

Розв'язування:

▼ Першу страву можна вибрати чотирма способами, а після цього другу страву можна вибрати п'ятьма способами, а після цього третю страву можна вибрати трьома способами. За правилом добутку загальна кількість способів, якими можна скласти повноцінний обід, становить $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$. ▲

Приклад 7. Скількома способами можна розподілити 6 однакових папок у трьох ящиках письмового стола, якщо кожний ящик може вмістити всі папки?

Розв'язування:

▼ Оскільки порядок розташування папок в ящиках є несуттєвим (папки однакові), то для відповіді на питання будемо підраховувати кількість сполучень з повтореннями (в один ящик може потрапити декілька папок) з трьох елементів по шість у кожному:

$$\tilde{C}_{3}^{6} = C_{6+3-1}^{6} = C_{8}^{6} = \frac{8!}{6!\,(8-6)!} = 28 \text{ способів. } \blacktriangle$$

Приклад 8. Скількома способами можна розподілити 6 різних папок по трьох ящиках письмового стола?

Розв'язування:

▼ Оскільки порядок розташування папок у ящиках є суттєвим (папки різні), то для відповіді на питання задачі будемо підраховувати кількість розміщень з повтореннями (в один ящик може потрапити декілька папок) із трьох елементів по шість у кожному:

$$\tilde{A}_3^6 = 3^6 = 729 \text{ способів. } \blacktriangle$$

Приклад 9. Скількома способами можна розкласти 6 різних папок у трьох ящиках письмового стола так, щоб до кожного ящика потрапило по дві папки?

Розв'язування:

▼ Оскільки вказана кількість різних папок, яка має потрапити в кожний ящик письмового стола, то для відповіді на питання задачі підрахуємо кількість перестановок з повтореннями із шести елементів. Отож, шукана кількість способів становить:

$$\tilde{P}_6(2,2,2) = \frac{6!}{2!\,2!\,2!} = 90. \ \blacktriangle$$

Приклад 10. Для стажування 25 студентам виділено 10 місць на першій фірмі, 8 місць – на другій та 7 місць – на третій фірмі. Вважаючи розподіл рівноможливим для кожного з 25 студентів, визначити, скількома способами можна розподілити трьох – студентів-друзів, щоб вони були розподілені на одну фірму?

Розв'язування:

▼ Трьох друзів можна розподілити на першу фірму C_{10}^3 способами, на другу фірму – C_8^3 способами, на третю – C_7^3 способами. За правилом суми трьох студентів можна розподілити разом або на першу , або на другу, або на третю фірми $C_{10}^3 + C_8^3 + C_7^3 = 211$ способами. ▲

Приклад 11. Скільки різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, щоб у кожне таке число кожна з цифр входила не більше одного разу?

Розв'язування:

▼ Різних одноцифрових натуральних чисел буде $A_4^1 = \dfrac{4!}{(4-1)!} = 4$.

Кількість різних двоцифрових чисел за таких умов становить $A_5^2 - A_4^1 = \dfrac{5!}{(5-2)!} - \dfrac{4!}{(4-1)!} = 20 - 4 = 16$ (якщо перша цифра двоцифрової комбінації – нуль, то цифру, що залишилася ми повинні вибрати з чотирьох, які залишились: 1, 2, 3, 4). Міркуючи аналогічно, отримаємо, що за таких умов можна скласти:

$A_5^3 - A_4^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 48$ трицифрових чисел,

$A_5^4 - A_4^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ чотирицифрових чисел,

$A_5^5 - A_4^4 = 5! - 4! = 96$ п'ятицифрових чисел. Отже, всього можна утворити $4 + 16 + 48 + 96 + 96 = 260$ чисел. ▲

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЇ

1. Аксіоматичне визначення ймовірності події

У світлі сучасних вимог щодо математичної суворості найдоцільніше будувати теорію ймовірностей на аксіоматичній основі. Найбільш поширеною в сучасній теорії ймовірностей є система аксіом, запропонована в 1929 році А.М. Колмогоровим. Цю систему ми й розглянемо.

Кожній події A поставимо у відповідність деяке число, яке називається **ймовірністю події A**, позначають P(A). Оскільки будь-яка подія є підмножиною деякої множини Ω (будемо вважати, що множина Ω є або скінченною або ж зліченною, а для невимірних множин ця теорія є неприйнятною), то ймовірність події є функцією множини.

Дійсні числа P(A), P(B),..., віднесені подіям A, B,... із деякого простору подій Ω називаються ймовірностями цих подій, якщо вони задовольняють аксіомам теорії ймовірностей.

Аксіома 1. $P(A) \geq 0$ для будь-якої події A простору подій Ω.

Аксіома 2. $P(\Omega) = 1$ (ймовірність достовірної події рівна 1).

Аксіома 3. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ попарно несумісні події, тоді ймовірність суми скінченного чи нескінченного числа цих подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$.

Теорема 1. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю $P(\varnothing) = 0$.

Теорема 2.Ймовірність протилежної до A події дорівнює: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Наслідок. За аксіомою 1 та теоремами 1, 2 : $0 \leq P(A) \leq 1$, тобто ймовірність будь-якої події A це є додатне число, яке не перевищує одиницю.

2. Статистичне визначення ймовірності події

Результат одного експерименту є невизначеним наперед, але ряд ідентичних експериментів визначає найбільш імовірний результат, який і використовують під час аналізу ситуації в бізнесі. Таке явище називають **статистичною стійкістю події**.

Наприклад, французький природодослідник Ж.Л.Л.Бюффон, вивчаючи випадкові події, провів дослід з підкиданням монети 4040 разів. Герб випав у 2048 випадках, отож частота „появи герба" в даному експерименті становить $2048 : 4040 \approx 0,5$.

За теорією Менделя при схрещуванні жовтого гороху з жовтим приблизно в одному випадку з чотирьох виростає зелений горох. Для перевірки цієї теорії дослід зі схрещування жовтого гороху було проведено 34153 рази. В 8506 випадках Мендель отримав зелений горох. Частота появи зеленого гороху у проведеному експерименті становить $8506 : 34153 \approx 0,25$.

Розглянемо приклад з науки про народонаселення – демографії. Наука не може передбачити стать новонародженого у кожному конкретному випадку, але якщо розглядати новонароджених у великій кількості, то відкривається така закономірність: у всі часи і в усіх країнах на кожну тисячу новонароджених припадало 514 хлопчиків. Таким чином, 0,514 – це частка хлопчиків серед новонароджених. Ця закономірність була помічена дуже давно – ще в Стародавньому Китаї, за 2238 років до нашої ери, під час перепису населення.

Як бачимо з прикладів, багато подій нам здаються випадковими тільки на перший погляд. При більш поглибленому вивченні виявляється, що насправді крізь нагромадження випадковостей пробиває собі дорогу закономірність. Так, частота випадання «решки» коливається навколо числа 0,5, а частота народження хлопчиків виражається з більшою точністю числом 0,514. У добре налагодженому виробництві стійким виявляється відсоток якісних виробів.

Відносна частота події A дорівнює відношенню числа випробувань, у яких подія A відбулася, до числа фактично виконаних випробувань. Позначають $W(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість випробувань, у яких відбулася подія A; n – загальна кількість усіх випробувань.

Ймовірністю події A називається число, щодо якого стабілізується відносна частота цієї події W(A) за необмежено великої кількості випробувань:

$$P(A)= \lim_{n\to\infty} W(A).$$

Ймовірність події за статистичним визначенням обчислюють тільки після проведення серії випробувань, які можна відтворювати необмежену кількість разів при одному й тому самому комплексі умов або ж на основі колишніх даних. Для подій має бути характерною статистична стійкість. Спроби побудувати теорію ймовірностей на базі статистичного визначення наштовхуються на цілий ряд труднощів, які не подолані до цього часу.

Властивості ймовірності, за статистичним визначенням, такі самі, як і за аксіоматичним (це легко перевірити).

Приклад 1. Із восьмисот перевірених електричних лампочок 520 пропрацювали більше 1500 годин. На основі даних цього експерименту можна зробити висновок, що ймовірність нормального функціонування лампочки даного типу більше як 1500 годин за статистичним визначенням ймовірності становить: $\frac{520}{800} = 0,65.$

3. Класичне визначення ймовірності події

Нехай простір наслідків Ω деякого випробування складається з N рівноможливих наслідків. Припустимо, що із загальної кількості усіх можливих наслідків події А сприяють N_A наслідків. Тоді **ймовірністю події А** під час даного випробування називають число :

$$P(A)=\frac{N_A}{N}$$

Із визначення ймовірності випливає, що $0 \le P(A) \le 1$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

Класичне визначення ймовірності випадкової події вперше було сформульоване у відомій праці „Наука передбачень" відомого швейцарського математика Даніїла Бернуллі. Остаточно це визначення оформилось пізніше – в працях П'єра Лапласа.

Класичне визначення ймовірності застосовується тільки до подій, які можуть відбутися в результаті випробувань, що володіють симетрією можливих наслідків. Але його не можна застосовувати до подій, які не є рівноможливими наслідками випробування, або ж простір елементарних наслідків події нескінченний.

Приклад 2. Монету підкидають три рази. Знайти ймовірність події, яка полягає у тому, що випало два „орли" та один „напис"?

Розв'язування:

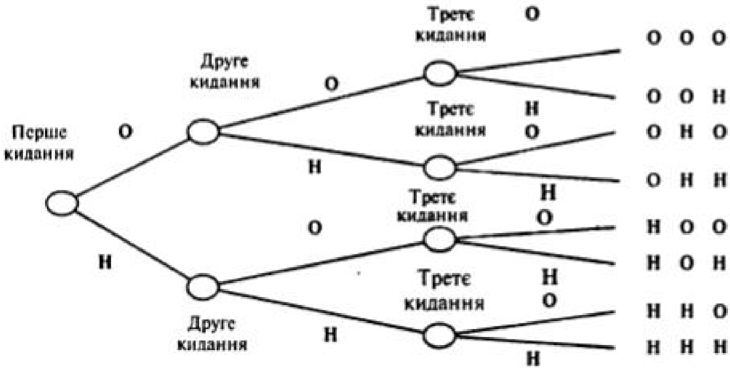
▼ **Перший спосіб**. Запишемо всі можливі наслідки: (ннн, нно, нон, ноо, онн, оно, оон, ооо).

Отож, ми маємо 8 єдиноможливих і рівноможливих наслідків. Подія А – «випало два „орли" та один „напис"» – мала місце три рази (ноо, оно, оон). Тому за класичним визначенням ймовірності: $P(A)=\frac{3}{8}$.

Другий спосіб.

Якщо події є серією випробувань і важливо врахувати всі можливі наслідки, то доцільно скласти „дерево ймовірностей", на якому відображають послідовність випробувань та їх результати. Події зображають послідовністю кружків, а кожний наслідок – лінією від відповідного кружка.

Розв'яжемо за допомогою „дерева ймовірностей" останню задачу. Випробування складається з трьох подій, кожна з яких має два наслідки: або випаде „орел" (о), або „напис"(н).



Підрахуємо, скільки можливих наслідків мають два „орли" та один „напис". Добре видно, що їх три з восьми можливих. Тому за класичним визначенням ймовірності: $P(A)=\frac{3}{8}$.▲

4. Геометричне визначення ймовірності події

Узагальненням класичної схеми є події, простір елементарних наслідків яких нескінченний, а самі ці елементарні наслідки можна подати у вигляді точок, що заповнюють деяку область Ω у тривимірному просторі. Якщо при цьому події А сприяють елементарні наслідки, що заповнюють деяку підобласть D з Ω, то **геометричною ймовірністю** події А називають відношення об'єму області D до об'єму області Ω:

$$P(A) = \frac{V(D)}{V(\Omega)}$$

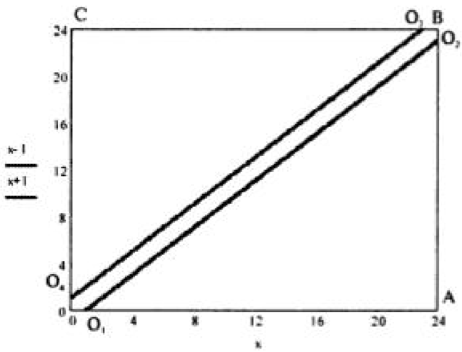
Аналогічно визначається геометрична ймовірність події у випадку, коли множина Ω є областю на площині або відрізком на прямій лінії. У цих випадках об'єми областей заміняють, відповідно, площами фігур або довжинами відрізків.

Приклад 3. Два туристичні теплоходи повинні підійти до однієї пристані. Поява теплоходів – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що туристам одного з теплоходів доведеться чекати звільнення пристані, якщо час розвантаження теплоходів – одна година.

Розв'язування:

▼ Позначимо через x (годин) – час приходу до пристані протягом доби першого теплохода, а через y (годин) – час приходу до пристані протягом доби другого теплохода. За умовою, простір елементарних наслідків можна інтерпретувати як сукупність усіх точок (x, y) квадрата (O,A,B,C) (див. малюнок):

$$\Omega = \{ (x, y): 0 \le x \le 24; 0 \le y \le 24 \}.$$



Нехай подія A – „туристам одного з теплоходів доведеться чекати звільнення пристані”. Події A сприяють ті з можливих наслідків, що задовольняють нерівність $|x - y| \le 1$. Графіком цієї нерівності є область D, що знаходиться всередині квадрата OABC. Площа $O_4O_3O_2O_1$ $S = S_{OABC}$ - SO_1AO_2 - SO_3CO_4 = $24^2 - \frac{1}{2} \cdot 23^2 \cdot 2 = 47$(кв. од.). Отже, S(D) = 47, S( ) = 24^2 = 576. За геометричним визначенням ймовірності події маємо: $P(A) = \frac{S(D)}{S(\Omega)} = \frac{47}{576} \approx 0{,}082$. Це означає, що жодному з теплоходів практично не доведеться чекати звільнення пристані (з огляду на дуже малу ймовірність такої події). ▲

Коротка історична довідка

Ймовірнісні уявлення досить широко використовували ще давньогрецькі філософи Демокріт, Епікур, Лукрецій Кар та інші, але вважається, що теорія ймовірностей почала розвиватися тільки з середини XVII століття – у працях французьких вчених Б. Паскаля та П. Ферма, коли Паскаль і Ферма незалежно один від одного надали правильне пояснення так званого парадоксу розподілу ставки.

Двоє гравців, які грають у просту гру (шанси перемоги для обох однакові), домовилися, що той, хто першим виграє шість партій, отримає приз. Припустимо, що гра зупинилася до того, як один із них виграв шість партій (наприклад, перший гравець виграв п'ять партій, а другий – три). Як справедливо розділити приз?

Хоча насправді, ця проблема не є парадоксом, марні спроби деяких відомих учених її розв'язати, а також неправильні відповіді створили легенду про парадокс. Так, за одним із розв'язків, приз потрібно розділити у відношенні 5:3, тобто пропорційно до виграних партій, за іншим – у відношенні 2:1 (тут міркування велися, найшвидше, таким чином: оскільки перший гравець виграв на дві партії більше, що складає третю частину від необхідних для перемоги шести партій, то він повинен отримати третину призу, а частину, яка залишилася, розділити навпіл).

Паскаль і Ферма розглядали парадокс розподілу ставки як задачу про ймовірності і встановили, що справедливим буде поділ, пропорційний шансам першого гравця виграти приз. Припустимо, перший гравець виграв тільки одну партію, а другому для перемоги необхідно виграти ще три партії, причому гравці гру продовжують і грають усі три партії, навіть якщо деякі з них виявляться зайвими для визначення переможця. Для такого продовження всі $2^3 = 8$ можливих наслідків є рівноможливими. Оскільки другий гравець отримає приз тільки за одним із можливих наслідків (якщо він виграє всі три партії), а в інших випадках переможе перший гравець, то справедливим є поділ 7:1.

Приклади розв'язування задач на обчислення ймовірностей подій за класичним та геометричним визначеннями.

Приклад 1. Показати, ймовірність того, що при підкиданні чотирьох гральних кубиків хоча б на одному випаде 6 балів чи при 24-х підкиданнях двох гральних кубиків хоча б один раз на обох кубиках буде по 6 балів? (Задача поставлена у сімнадцятому столітті перед Б.Паскалем якимось шевальє де Мере. Де Мере помилково вважав, що описані події рівноймовірні.)

Розв'язування:

▼ Нехай A – подія, яка полягає в тому, що при підкиданні чотирьох гральних кубиків хоча б на одному випаде 6 балів. При підкиданні грального кубика є 6 рівноможливих наслідків, при підкиданні двох кубиків за правилом добутку є 6^2 можливих наслідків, при підкиданні трьох та чотирьох кубиків – відповідно 6^3 та 6^4 наслідків. Серед усіх цих 6^4 наслідків буде, очевидно, 5^4 таких, коли шестірка не випаде ні разу. Отож, сприятливих події A наслідків буде $6^4 - 5^4$, а тому – за класичним визначенням імовірності:

$$P(A)=\frac{6^4-5^4}{6^4}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0.518\,.$$

Нехай B – подія, яка полягає в тому, що при 24-х підкиданнях двох гральних кубиків хоча б один раз на обох кубиках буде по 6 балів. Коли підкидати пару кубиків один раз, то можливих наслідків за правилом добутку 36, при двох підкиданнях пари кубиків можливих наслідків за тим самим правилом добутку 36^2, а при 24-х підкиданнях пари кубиків можливих наслідків є 36^{24}. Серед усіх цих 36^{24} наслідків буде 35^{24} таких, що ні разу не випаде одночасно на обох кубиках дві шестірки. Отож, сприятливих події B наслідків буде 36^{24} - 35^{24}, а тому – за класичним означенням імовірності

$$P(B) = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 1 - (\frac{35}{36}^{24}) \approx 0,491.$$

Як бачимо, імовірнішою є подія „при підкиданні чотирьох гральних кубиків хоча б на одному випаде 6 балів". ▲

Приклад 2. Структура зайнятих у регіональному відділенні банку „Аваль" має такий вигляд:

Структура	Жінки	Чоловіки
Адміністрація	25	15
Операціоністи	35	25

Якщо одного із службовців обрали навмання на конференцію, то яка ймовірність того, що він: а) чоловік-адміністратор; б) жінка-операціоніст; в) чоловік; г) операціоніст?

Розв'язування:

▼ а) В банку працює 100 чоловік, N = 100. З них 15 – чоловіки-адміністратори, $N_A = 15$, отож, $P = \frac{15}{100} = 0,15$.

б) 35 службовців банку – жінки-операціоністи, отож, $P = \frac{35}{100} = 0,35$.

в) 40 службовців банку – чоловіки, тому $P = \frac{40}{100} = 0,40$.

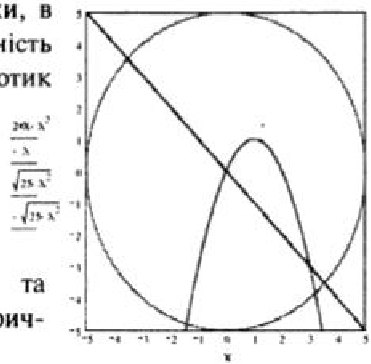
г) Із загальної кількості службовців у банку 60 – операціоністи, тому

$$P = \frac{60}{100} = 0,60.$$ ▲

Приклад 3. Юний математик накреслив на круглому картоні Декартову систему координат з початком у центрі круга і графіки функцій $y = -x$ та $y = 2x - x^2$. Радіус картонного круга становить 5 дециметрів, а довжина одиничного відрізка декартової системи координат – 1 дециметр. Згодом він вирішив використати цей картон для гри в „Дартс". Яка ймовірність того, що поцілений у круг дротик влучить в область, обмежену прямою та параболою.

Розв'язування:

▼ Нехай (x, y) – координати точки, в яку влучив дротик. Знайдемо ймовірність того, що навмання кинутий в круг дротик влучить в область між прямою $y=-x$ та параболою $y=2x-x^2$ (подія A). Виконаємо малюнок у Декартовій системі координат:



Знайдемо площу області, обмеженої графіками функцій: $y=-x$ та $y=2x-x^2$, використовуючи геометричний зміст визначеного інтеграла:

$$S_1=\int_0^3((2x-x^2)-(-x))\,dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3=\frac{27}{6}\text{ (кв. од.).}$$

Площа круга становить:

$S=25\pi$ (кв. од.)

За геометричним визначенням ймовірності:

$$P(A)=\frac{S_1}{S}=\frac{27}{6\cdot 25\cdot \pi}=0{,}057 \ ▲$$

<u>Приклад 4</u>. Абонент чекає на телефонний дзвінок протягом однієї години. Яка ймовірність того, що йому зателефонують в останні 15 хвилин цієї години?

Розв'язування:

▼ Зрозуміло, що $m(D)=15$ хвилин, $m(\Omega)=60$ хвилин, тоді

$$P(A)=\frac{15}{60}=0{,}25.$$

▲

<u>Приклад 5</u>. У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі заходять 4 чоловіки. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть: а) на шостому поверсі; б) на одному поверсі; в) на різних поверхах?

Розв'язування:

▼ а) Нехай подія А – „всі пасажири вийдуть на шостому поверсі". Кожний пасажир може вийти з 2-го по 9-ий поверхи 8 способами. За правилом добутку, загальна кількість способів виходу чотирьох пасажирів з ліфта становить 8^4. Кількість способів, сприятливих події А, рівна 1. Таким чином, за класичним визначенням ймовірності Р (А) = $\frac{1}{8^4}$ = 0,00024.

б) Нехай подія В – „всі пасажири вийдуть на одному поверсі". Тепер події В сприяють 8 випадків (всі пасажири вийдуть або на 2-му, або на 3-му,..., або на 9-му поверсі). Тому $P(B) = \frac{8}{8^4} = \frac{1}{8^3} =$ 0,00195.

в) Нехай подія С – „всі чотири чоловіки вийдуть на різних поверхах".

У першого пасажира ліфта є 8 можливостей вийти (на 2 – 9 поверхах), тоді у другого залишиться 7 можливостей, у третього – 6 і у четвертого – 5. Кількість наслідків, що сприяють події С, становить

$$N_C = A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 1680.$$

Оскільки кожний пасажир ліфта може вийти на будь-якому з поверхів, то загальна кількість усіх можливих наслідків, за правилом добутку, становить рівно 8^4. Тому ймовірність події С – за класичним визначенням:

$$P(C) = \frac{1680}{8^4} \approx 0{,}41. \ ▲$$

Приклад 6. У партії із 100 деталей є 5 бракованих. Для контролю було вибрано 5 деталей. Яка ймовірність того, що серед них буде рівно 1 бракована?

Розв'язування:

▼ Нехай подія А – „серед вибраних для контролю 5 виробів буде рівно 1 бракований". Один бракований виріб будемо вибирати серед 5 бракованих, кількість варіантів такого вибору рівна C_5^1. Наступні 4 вироби будемо вибирати із стандартних 95 виробів, це можна здійснити C_{95}^4 способами. За правилом добутк,у кількість способів, сприятливих події А, рівна $C_5^1 \cdot C_{95}^4$. Загальна кількість способів вибору 5 деталей із 100 - C_{100}^5.

Тому шукана ймовірність події А, за класичним визначенням, становитиме

$$P(A) = \frac{C_5^1 \cdot C_{95}^4}{C_{100}^5} = \frac{95!\,5!\,5!\,95!}{4!\,91!\,100!} = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93 \cdot 92 \cdot 5 \cdot 5}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = 0{,}2114. \blacktriangle$$

Приклад 7. Із 10 книг, що стоять на книжковій полиці, 3 із теорії ймовірностей. Знайти ймовірність того, що всі вони стоять поруч.

Розв'язування:

▼ Подія А – „всі три книжки з теорії ймовірностей стоять поруч". Загальна кількість варіантів розташування 10 книг на книжковій полиці рівна N = 10!. Для того, щоб знайти кількість сприятливих варіантів, умовно об'єднаємо три книги з теорії ймовірностей в одну. Маємо в цьому випадку 8! можливих перестановок. До того ж, ці три книги можуть мінятися між собою місцями 3! способами. Отже, $N_A = 8! \cdot 3!$. Тоді

$$P(A) = \frac{8!\,3!}{10!} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}. \blacktriangle$$

Приклад 8. 10 почесних гостей розселяють у готелі в два тримісних і один чотиримісний номер. Яка ймовірність події А – „двоє певних гостей потраплять у чотиримісний номер"?

Розв'язування:

▼ Загальна кількість способів розселення 10 гостей у два тримісних номери і один чотиримісний номер дорівнює числу перестановок із повтореннями

$$N = \bar{P}_{10}(3,3,4) = \frac{10!}{3!\,3!\,4!} = 4200.$$

Підрахуємо тепер кількість способів, що сприяють події А. Спочатку поселимо двоє певних людей у чотиримісний номер, а далі підрахуємо всі способи, якими можна розселити інших 8 гостей: по 3 гостей у два тримісних номери і 2 гостей у чотиримісний. Отже, маємо $N_A = \dfrac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560$.

За класичним визначенням: $P(A)= \dfrac{N_A}{N}= \dfrac{560}{4200}\approx 0{,}133$ ▲

<u>Приклад 9</u>. У магазині було продано 21 з 25 холодильників трьох марок, яких було в магазині 5, 7, 13 штук відповідно. Припустимо, що ймовірність бути проданим для холодильників усіх марок однакова. Знайти ймовірність того, що холодильники, які залишилися: а) однієї марки; б) трьох різних марок.

Розв'язування:

▼ а) Нехай подія A – „нерозпродані холодильники однієї марки". Загальна кількість способів, якими можна вибрати 4 (нерозпродані) холодильники з 25 становить $N= C_{25}^4 = 12650$. Кількість способів, якими можна вибрати 4 холодильники першої марки з 5, рівна C_5^4; другої марки – з 7 становить C_7^4 і третьої марки – з 13 становить C_{13}^4. За правилом суми події A сприяють:

$$N_A = C_5^4+ C_7^4+ C_{13}^4 = 5+ 35+ 715= 755 \text{ способів.}$$

Тому $P(A)= \dfrac{N_A}{N}= \dfrac{755}{12650}\approx 0{,}060$

б) Нехай подія B – „залишились нерозпроданими холодильники трьох різних марок". Подія B може відбутися в одному з трьох випадків. Подія B відбудеться, коли залишаться нерозпроданими 1, 1, 2 холодильників відповідно 1-ої, 2-ої і 3-ої марок; за другим варіантом – 1, 2, 1 і за третім варіантом залишаться нерозпроданими 2, 1, 1 холодильники відповідно 1-ої, 2-ої і 3-ої марок. Оскільки до продажи було 5 холодильників першої марки, 7 – 2-ої і 13 холодильників 3-ої марки, то за правилом добутку кількість випадків, що сприяють першому варіанту, становить $C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2$; другому – $C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1$; третьому варіанту – $C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1$. Загальна кількість варіантів , що сприяють події B, становить:

$N_A = C_5^1 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^2 + C_5^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{13}^1 + C_5^2 \cdot C_7^1 \cdot C_{13}^1 =$
$= 5 \cdot 7 \cdot 78 + 5 \cdot 21 \cdot 13 + 10 \cdot 7 \cdot 13 = 5005.$

За класичним визначенням ймовірності: $P(B) = \dfrac{5005}{12650} \approx 0.396$. ▲

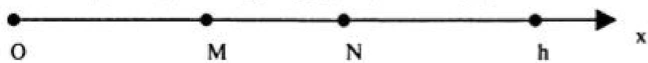
Приклад 10. На відрізку довжиною h навмання поставлено дві точки. Визначити ймовірність того, що з трьох утворених частин відрізка можна побудувати трикутник.

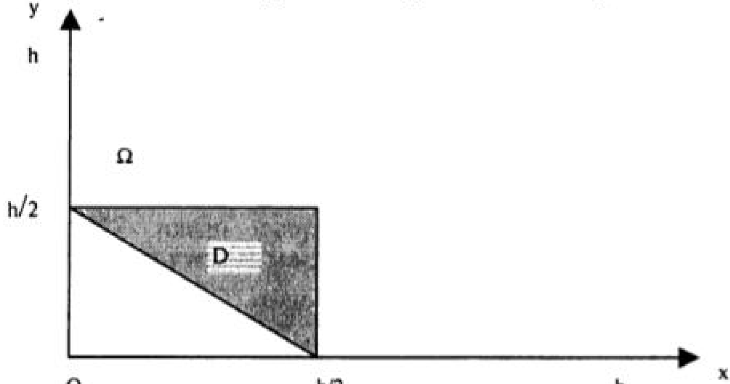
Розв'язування:

▼ Нехай M та N – точки, що ділять відрізок на частини. Розмістимо координатну вісь так, щоб початок координат співпадав з одним кінцем відрізка, а другий кінець відрізка мав координату h (див. мал.). Нехай OM = x, MN = y. Оскільки $0 \le x + y \le h$, то областю можливих значень x та y буде прямокутний трикутник з катетами, рівними h :

$\Omega = \{ (x; y): 0 \le x + y \le h, 0 \le x \le h, 0 \le y \le h \}$. Довжина третього відрізка дорівнює $h - x - y$. Щоб із трьох відрізків довжиною x, y, $h - x - y$ можна було побудувати трикутник, необхідно і достатньо, щоб сума довжин двох відрізків була більша за довжину третього, тобто

$x + y > h - x - y,\ x + (h - x - y) > y,\ y + (h - x - y) > x.$





Позначимо $D=\left\{(x;y): x+y>\frac{h}{2}, 0\leq x\leq \frac{h}{2}, 0\leq y\leq \frac{h}{2}\right\}$. Ці нерівності визначають область зафарбовану на малюнку. Отже, наше завдання може бути сформульоване таким чином: у прямокутний трикутник з катетами, рівними h/2, навмання кидають точку. Визначити ймовірність того, що ця точка потрапить у зафарбовану область. Ця ймовірність буде рівною відношенню площ: $P(D)=\frac{S(D)}{S(\Omega)}=\frac{1}{4}$.▲

<u>Приклад 11</u>. Рибалки спіймали в ставку 100 риб, позначили їх і випустили назад у воду. Наступного дня вони спіймали 120 риб, з яких 10 виявилися позначеними. Знайти: а) ймовірність того, що виловлена рибина позначена; б) кількість риби в ставку.

Розв'язування:

▼ Нехай n – кількість рибин у ставку, m = 100 – кількість позначених рибин. Подія A – „виловлена риба позначена". $P(A)=\frac{100}{n}$ (за класичним визначенням). З іншого боку, оскільки із 120 позначених виявилося 10, то $P(A)\approx\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$. Звідси $\frac{100}{n}\approx\frac{1}{12}$, тому $n\approx 1200$.▲

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ

У багатьох задачах *складні події*, імовірності яких потрібно знайти, подають у вигляді комбінацій інших, більш „простих" подій, при цьому ймовірності останніх або відомі, або легко підраховуються безпосередньо. В таких випадках можна використати формули, які виражають ймовірності суми та добутку подій через ймовірності відповідних доданків та співмножників.

1. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій

Якщо події А та В несумісні (підмножини їх елементарних наслідків не перетинаються), то ймовірність суми цих подій (ймовірність того, що має місце хоча б одна з цих подій) дорівнює сумі їх імовірностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Ця рівність справедлива і тоді, коли маємо суму скінченної кількості несумісних подій:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Приклад 1. У лотереї випущено 100000 білетів і встановлено 100 виграшів по 20 тис. грн., 1000 – по 10 тис. грн., 5000 – по 2,5 тис. грн. і 10000 – по 500 грн. Яка ймовірність того, що, придбавши 1 квиток, можна виграти не менше 2,5 тис. грн.?

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій: А – виграш не менше 2,5 тис. грн., A_1 – виграш становить 2,5 тис. грн., A_2 – виграш становить 10 тис. грн., A_3 – виграш становить 20 тис. грн. Оскільки придбано тільки один квиток і ці події попарно несумісні, то $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + +P(A_3) = \frac{5000}{100000} + \frac{1000}{100000} + \frac{100}{100000} = 0{,}061$. ▲

Приклад 2. Ймовірність виходу з ладу виробу з терміном експлуатації до одного року рівна 0,13, а з терміном експлуатації до трьох років – 0,36. Знайти ймовірність виходу з ладу виробу з терміном експлуатації від одного до трьох років.

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій: A – „вихід з ладу виробу з терміном експлуатації до одного року", B – „ вихід з ладу виробу з терміном експлуатації від одного до трьох років", C – „ вихід з ладу приладу з терміном експлуатації до трьох років". Тоді за умовою $P(A) = 0{,}13$, $P(C) = 0{,}36$. Очевидно, що $C = A + B$, де події A та B несумісні. За теоремою додавання $P(C) = P(A) + P(B)$, а звідси $P(B) = P(C) - P(A) = 0{,}36 - 0{,}13 = 0{,}23$. ▲

Останню теорему можна застосовувати тільки до несумісних подій. Її застосування до сумісних подій призводить до абсурдних результатів. Наприклад, коли A_n – „ виграш за будь-яким білетом грошово-речової лотереї" і $P(A_n) = 0{,}05$. Тоді, застосовуючи теорему додавання, виграш хоча б за одним із придбаних 100 білетів рівна

$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_{100}) = 0{,}05 \cdot 100 = 5$. Абсурдність отриманого результату (ймовірність будь-якої події не може перевищувати одиниці) свідчить про незастосовність теореми додавання, тому що події $A_1, A_2, ..., A_{100}$ є сумісними (оскільки із ста придбаних білетів виграшними можуть бути декілька одночасно).

2. Умовна ймовірність події

Як було сказано вище, ймовірність P(B) як міра об'єктивної можливості появи події має смисл при виконанні певного комплексу умов. Якщо умови змінити, то ймовірність події B може змінитися. Так, коли до комплексу умов, за яких вивчалася ймовірність події B, додати нову умову A, то отримана ймовірність події B, знайдена за умови, коли вже мала місце подія A, називається **умовною ймовірністю події B відносно A** і позначається $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

Наприклад, якщо з коробки, в якій лежать 4 червоні та 3 фіолетові ручки, першого разу взяли червону ручку (подія А) і повернули назад, то ймовірність витягти червону ручку за другим разом (подія В) становить $P(B) = \frac{4}{7}$ (у коробці 4 червоні ручки із загальної кількості, яка становить 7 ручок). Якщо ж вийняту за першим разом червону ручку не повернули, то ймовірність витягти червону ручку за другим разом зміниться і становитиме $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Як бачимо, ймовірність події В залежить від того, відбулась чи не відбулась подія А, а це означає, що події А та В залежні.

$$P(B/A) = \frac{N(A \cdot B)}{N(A)} = \frac{N(A \cdot B):N}{N(A):N} = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)};$$

$$P(A/B) = \frac{N(A \cdot B)}{N(B)} = \frac{N(A \cdot B):N}{N(B):N} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Ймовірності незалежних подій є безумовними, оскільки ймовірності кожної з них не залежать від того, відбулася чи не відбулась інша подія. Для незалежних подій

$$P(B/A) = P(B), P(A/B) = P(A) \quad (P(A) \neq 0, P(B) \neq 0).$$

3. Теореми множення ймовірностей подій

1. Ймовірність добутку (одночасної появи) двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, обчислену з урахуванням того, що перша подія відбулася.

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Ця теорема узагальнюється на випадок довільної скінченної кількості подій таким чином:

$$\mathbf{P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1}).}$$

2. Ймовірність добутку (одночасної появи) декількох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовні ймовірності інших; при цьому умовна ймовірність кожної наступної події обчислюється з урахуванням того, що всі попередні події відбулись.

Примітка. Для незалежних у сукупності подій теорема множення ймовірностей у випадку двох і декількох подій має інший вигляд, так як

$$P(B/A) = P(B).$$

3. Ймовірність добутку (одночасної появи) двох незалежних подій А та В дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$\mathbf{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).}$$

4. Ймовірність добутку (одночасної появи) декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$\mathbf{P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).}$$

Якщо остання умова виконується тільки для будь-яких двох із n подій, що розглядаються, то події називаються *попарно незалежними.*

Приклад 3. Консультаційна фірма може отримати два замовлення від двох великих корпорацій. Експерти фірми вважають, що ймовірність отримання консультаційної роботи в корпорації А рівна 0,45. Експерти також вважають, що якщо фірма отримає замовлення в корпорації А, то ймовірність того, що і корпорація В звернеться до них, рівна 0,9. Яка ймовірність того, що консультаційна фірма отримає обидва замовлення?

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій:

А – „отримання консультаційної роботи в корпорації А";

В – „отримання консультаційної роботи в корпорації В".

Події А та В залежні. За умовою $P(A) = 0,45$ і умовна ймовірність події В становить $P(B/A) = 0,9$. Необхідно знайти ймовірність того, що обидві події (А та В) відбудуться, тобто $P(A \cdot B)$. За теоремою множення залежних подій отримаємо $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0,45 \cdot 0,9 = 0,405$. ▲

Приклад 4. Редактор газети зможе піти на побачення, якщо дочекається протягом години новин з гарячих точок від двох кореспондентів. Імовірність того, що перший кореспондент з'явиться протягом години, становить 0,75, а ймовірність того, що другий кореспондент з'явиться протягом цієї самої години, становить 0,82. Яка ймовірність того, що редактору все ж таки вдасться вчасно прийти на побачення?

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій:

A_1 – „перший кореспондент з'явиться в редакції протягом години",

A_2 – „другий кореспондент з'явиться в редакції протягом цієї самої години",

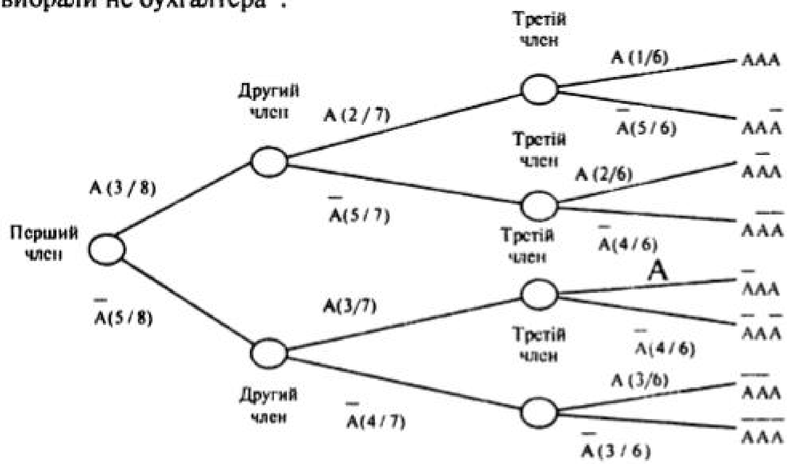
A – „редактор газети зможе піти на побачення".

Події A_1 та A_2 є незалежними, тому що кореспонденти мають прибути з різних місць. Очевидно, що $A = A_1 \cdot A_2$ (подія A відбудеться, якщо відбудуться обидві події A_1 та A_2). За умовою: $P(A_1) = 0{,}75$, $P(A_2) = 0{,}82$. За теоремою множення ймовірностей у випадку незалежних подій будемо мати $P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}75 \cdot 0{,}82 = 0{,}615$. ▲

Приклад 5. Рада директорів складається з трьох бухгалтерів, трьох менеджерів та двох інженерів. Планується створити підкомітет із його членів. Яка ймовірність того, що всі троє в цьому підкомітеті будуть бухгалтери?

Розв'язування:

▼ **Перший спосіб**. Використаємо „дерево ймовірностей", де A – „членом підкомітету вибрали бухгалтера", $\overline{A}$ –„членом підкомітету вибрали не бухгалтера".



Після того, як побудоване „дерево", проставимо на кожній гілці ймовірність наслідку, яка змінюється із зменшенням числа можливих кандидатів: 8 – 7 – 6. Аналогічно, коли виберуть одного бухгалтера, число тих, які залишилися невибраними, зменшується на одиницю: від 3 до 2. Ймовірності залежать від подій, які відбулися попереду. За діаграмою ймовірність того, що всі члени підкомітету виявляться бухгалтерами становить:

$$\frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}=\frac{1}{56}.$$

Другий спосіб. Уведемо позначення подій:

A_1 – „перший вибраний член підкомітету – бухгалтер",

A_2 – „другий вибраний член підкомітету – бухгалтер",

A_3 – „третій вибраний член підкомітету – бухгалтер".

Ці події залежні. За теоремою множення ймовірностей залежних подій:

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1 A_2) = \frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{1}{6}=\frac{1}{56}.$$

▲

5. Якщо події A і B незалежні, то незалежними є також події $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$ та $\overline{A}$ і $\overline{B}$.

Несумісні можливі події незалежними бути не можуть, тому що множини їх елементарних наслідків не перетинаються і ймовірність добутку цих подій дорівнює нулю, тоді як ймовірності кожної окремо взятої з цих подій не дорівнюють нулю.

Незалежні події обов'язково є сумісними. Наприклад, якщо в цеху маємо два верстати, які ніяк не пов'язані між собою за умовами виробництва, то простоювання кожного верстата – події сумісні й незалежні. Якщо ж верстати пов'язані єдиним технологічним циклом, то простоювання одного з них залежить від технічного стану іншого (залежні). При цьому вони можуть бути сумісними (у послідовному циклі) або несумісними (у паралельному циклі).

Водночас, якщо множини елементарних наслідків перетинаються (події сумісні), то події можуть бути як залежними, так і незалежними. Наведемо приклади. Нехай маємо події: A – „вилучено з колоди карт навмання карту пікової масті"; B –

„вилучено з колоди карт навмання туз." Ці події сумісні, тому що серед карт пікової масті є туз, а серед тузів – карта пікової масті. Крім того, ці події незалежні:

$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$ (в колоді 4 тузи з 36 карт).

$P(B/A)=\frac{1}{9}$ (в колоді 1 туз із 9 карт пікової масті).

$P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}; P(A/B)=\frac{1}{4}$.

А ось, коли маємо набір деталей, серед яких 2 браковані, а 8 якісні, то події „вийнято навмання першого разу якісну деталь" (подія А) та „вийнято навмання другого разу якісну деталь" (подія В) сумісні, тому що може трапитись, що і за першим, і за другим разом буде вийнято якісні деталі. Крім того, вони залежні.

Попарна незалежність декількох подій ще не означає, що вони незалежні в сукупності. Припустимо, що грані правильного тетраедра зафарбовано: першу – в червоний колір (подія А), другу – в зелений (подія В), третю – в синій (подія С) і четверту – в усі три кольори (подія $A\cdot B\cdot C$). Якщо тетраедр підкинути, то ймовірність того, що тетраедр впаде на грань, що містить фарбу певного кольору, рівна $\frac{1}{2}$ (всього граней – 4, а таких, що мають однаковий колір – 2).

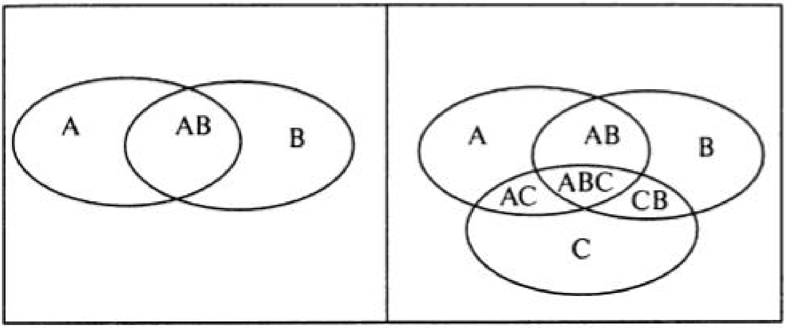
Таким чином, $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$.

Аналогічно, $P(A/B)=P(A/C)=P(B/A)=P(B/C)=P(C/A)=$ $=P(C/B)=\frac{1}{2}$. Це означає, що події А, В, С попарно незалежні. Якщо ж відбудуться одночасно дві події, наприклад, А та В, тобто $A\cdot B$, то третя подія С обов'язково відбудеться, $P(C/A\cdot B)=P(B/A\cdot C)=P(A/B\cdot C)=1$. Отже, ймовірність кожної з подій А, В або С змінилася, і події А, В та С в сукупності залежні.

На практиці для перевірки незалежності подій виходять з інтуїтивних міркувань, пов'язаних із характером випробувань, а саме, події вважають незалежними, якщо між ними немає причинно-наслідкового зв'язку.

4. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій

Під час розв'язування багатьох задач потрібно знайти **ймовірність суми** двох або декількох сумісних подій, тобто **ймовірність появи хоча б однієї з цих подій**. У випадку декількох сумісних подій перейдемо до аналогії з теорією множин, коли маємо перетин двох або кількох множин елементарних наслідків. При обчисленні ймовірності суми декількох множин потрібно виключити повторний рахунок множин перетину подій. Розглянемо випадки двох та трьох сумісних подій.



Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх добутку:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Для випадку трьох сумісних подій запишемо:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) -$$
$$- P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

Примітка. У випадку декількох сумісних подій іноді доцільно перейти до протилежної події. ($\overline{A+B+C+\ldots+K} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \ldots \cdot \overline{K}$ – закон де Моргана). Тоді на основі закону де Моргана:

$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \ldots \cdot \overline{A_n})$.

Тобто, ймовірність суми декількох сумісних подій A_1, A_2, A_3, ..., A_n дорівнює різниці між одиницею та ймовірністю добутку протилежних подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, ..., $\overline{A_n}$.

Якщо всі n подій незалежні у сукупності і мають однакову ймовірність p, то остання формула перепишеться так:

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n) = 1-(1-p)^n = 1-g^n.$$

Для ілюстрації останніх формул повернемося до прикладу про лотерейні білети, коли ми прийшли до абсурдної оцінки ймовірності виграшу хоча б за одним із придбаних 100 білетів.

Приклад 6. На 100 лотерейних білетів припадає 5 виграшних. Яка ймовірність виграшу хоча б за одним білетом, якщо придбано три білети?

Розв'язування:

▼ Нехай подія A_n – „ виграш за n – м білетом грошово-речової лотереї", де n = 1, 2, 3. Ці події сумісні, оскільки виграшними можуть виявитися декілька придбаних білетів одночасно, і залежні. За теоремою про додавання ймовірностей для трьох сумісних подій будемо мати:

$$P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1\cdot A_2)-P(A_1\cdot A_3)-P(A_2\cdot A_3)+$$
$$+P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=\frac{5}{100}+\frac{5}{100}+\frac{5}{100}-\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}\cdot 3+\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}\cdot\frac{3}{98}=\frac{15}{100}-$$
$$-\frac{1}{5\cdot 33}+\frac{1}{5\cdot 33\cdot 98}=\frac{4657}{32340}\approx 0.144\,.$$

Підрахуємо ймовірність тієї самої події, перейшовши до протилежних подій:

$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3})=1-\left(\frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\right)=1-\frac{27683}{32340}\approx 0{,}144\,.\blacktriangle$$

5. Використання основних теорем для оцінювання надійності роботи простих систем

Коли потрібно оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднані послідовно, і відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i

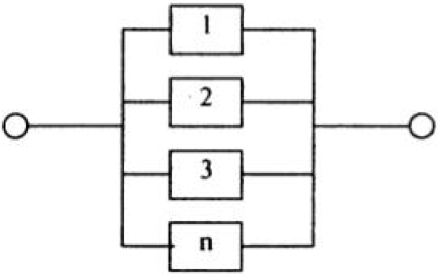
(i = 1,2,3, ..,n), то позначивши надійність системи R, дістанемо:

$$R=\prod_{i=1}^{n} p_i$$

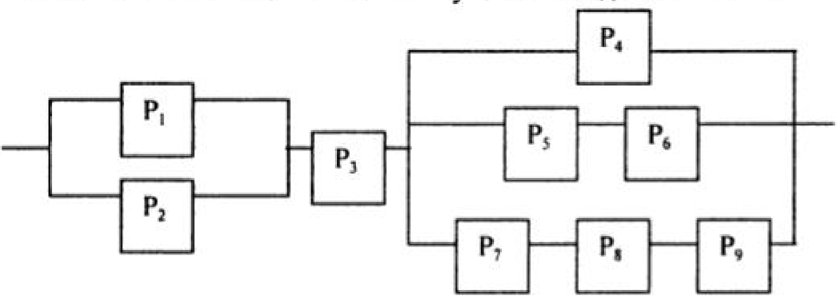
Коли потрібно оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднані паралельно, і відомі ймовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i

($i = 1,2,3, ..,n$), то позначивши надійність системи R, дістанемо:

$$R = 1 - \prod_{i=1}^{n} g_i \text{ , де } g_i = 1 - p_i$$



Приклад 7. На малюнку наведена електрична схема з'єднання елементів, які утворюють коло з одним входом і одним виходом. Елементи виходять з ладу за час T незалежно один від одного. Відмова будь-якого елемента призводить до припинення подавання сигналу у тій гілці кола, де знаходиться даний елемент. Надійність кожного елемента вказана на малюнку. Знайти надійність R -схеми.



Розв'язування:

▼ Цю схему можна подати у вигляді електричного кола, яке складається з трьох послідовно з'єднаних блоків. Перший блок складається з двох паралельно з'єднаних елементів з надійностями P_1, P_2, другий блок – з одного елемента з надійністю P_3, третій блок – з трьох паралельно з'єднаних гілок, де перша гілка складається з одного елемента з надійністю P_4, друга гілка – з двох послідовно з'єднаних елементів з надійностями P_5 та P_6, третя гілка – з трьох послідовно з'єднаних елементів з надійностями P_7, P_8, P_9. Відмова першого блоку вимагає одночасної відмови обох його елементів; ймовірність відмови цього блоку за правилом множення для незалежних подій– $g_1 \cdot g_2$, а його надійність рівна ймовірності протилежної події, тобто $1- g_1 \cdot g_2$. Для третього блоку надійність рівна $1- g_4 \cdot (1- p_5 \cdot p_6) \cdot (1- p_7 \cdot p_8 \cdot p_9)$. При її обчисленні ми врахували, що на гілках, де є елементи з надійностями p_5, p_6 та p_7, p_8, p_9 відбудеться розрив тільки за умови, що відмовить хоча б один з елементів відповідної вітки. Схема в цілому працює безвідмовно тільки за умови безвідмовної роботи усіх трьох блоків. Отож, за правилом множення ймовірностей незалежних подій, надійність R схеми рівна:

$$R = (1- g_1 \cdot g_2) \cdot p_3 \cdot (1- g_4 \cdot (1- p_5 \cdot p_6) \cdot (1- p_7 \cdot p_8 \cdot p_9))\ \blacktriangle.$$

Приклади розв'язування задач на обчислення ймовірностей подій за основними теоремами

Приклад 1. Компанія виробляє 40000 холодильників за рік. Із них 10000 експортують у країни СНД, 8000 продають в східних регіонах України, 7000 продають в країни Західної Європи, 6000 – в західних регіонах України, 5000 – в північних регіонах України, 4000 – в Києві. Чому рівна ймовірність того, що певний холодильник буде: а) вироблений на експорт (подія A_1); б) проданий в Україні (подія A_2)?

Розв'язування:

▼ Введемо позначення подій:

A – „холодильник буде проданий у країнах СНД";

B – „холодильник буде проданий у східних регіонах України";

C – „холодильник буде проданий у країнах Західної Європи";

D – „холодильник буде проданий у західних регіонах України";

E – „холодильник буде проданий у північних регіонах України";

F – „холодильник буде проданий у Києві".

За умовою $P(A) = \frac{10000}{40000} = 0,25$; $P(B) = \frac{8000}{40000} = 0,20$; $P(C) = \frac{7000}{40000} = 0,175$;

$P(D) = \frac{6000}{40000} = 0,15$; $P(E) = \frac{5000}{40000} = 0,125$; $P(F) = \frac{4000}{40000} = 0,10$.

Події A, B, C, D, E, F несумісні.

а) Подія, яка полягає в тому, що холодильник зроблений на експорт, означає, що холодильник буде проданий або в країнах СНД, або в країнах Західної Європи. Тому за теоремою додавання несумісних подій будемо мати:

$$P(A_1) = P(A + C) = P(A) + P(C) = 0,25+0,175 = 0,425.$$

б) Подія, яка полягає в тому, що холодильник буде проданий в Україні, означає, що холодильник буде проданий або в західних регіонах, або в східних регіонах, або в північних регіонах України, або в Києві. Тому за теоремою додавання несумісних подій:

$$P(A_2) = P(B+D+E+F) = P(B)+P(D)+P(E)+P(F) = 0.20+0.15+$$
$$+0.125+0.10 = 0.575.$$

Цей же результат можна було отримати, розмірковуючи по-іншому. Події A_1 та A_2 є взаємно протилежними. Тому

$P(A_2) = 1 - P(A_1) = 1 - 0,425 = 0,575$. ▲

<u>Приклад 2</u>. У великій рекламній фірмі 21% працівників отримують високу заробітну плату. Відомо також, що 40% працівників фірми – жінки, а 6,4% працівників – жінки, які отримують високу заробітну плату. Чи можемо ми стверджувати, що на фірмі має місце дискримінація жінок в оплаті праці?

Розв'язування:

▼ Поставимо питання задачі по-іншому. Чому рівна ймовірність того, що випадково вибраний працівник фірми є жінкою з високою заробітною платою? Після цього порівняємо її з імовірністю того, що навмання вибраний працівник довільної статі має високу заробітну плату.

Уведемо позначення подій:

А – „випадково вибраний працівник має високу заробітну плату";

В – „випадково вибраний працівник фірми є жінкою". Ці події залежні.

За умовою $P(A \cdot B) = 0{,}064$; $P(B) = 0{,}40$; $P(A) = 0{,}21$.

Нас цікавить ймовірність того, що навмання вибраний працівник має високу заробітну плату за умови, що це жінка, тобто умовна ймовірність події А. Використовуючи теорему множення ймовірностей, отримаємо

$P(A/B) = P(A \cdot B) \,/\, P(B) = \dfrac{0.064}{0.40} = 0{,}16$. Оскільки $P(A/B) = 0{,}16$ менша, ніж $P(A)=0{,}21$, то ми можемо зробити висновок, що жінки, які працюють в рекламній фірмі, мають менші шанси отримувати високу заробітну плату порівняно з чоловіками. ▲

Приклад 3. Ймовірність того, що студент складе перший іспит, рівна 0,9; другий – 0,9; третій – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе: а) тільки другий іспит; б) тільки один іспит; в) три іспити; г) хоча б два іспити; д) хоча б один іспит.

Розв'язування:

▼ а) Позначимо події: A_i – „студент складе і–ий іспит„ $(i = 1,2,3)$.

За умовою $P(A_1) = 0{,}9$, $P(A_2) = 0{,}9$, $P(A_3) = 0{,}8$. Тоді $P(\overline{A_1}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P(\overline{A_2}) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, $P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Нехай подія В – „студент складе тільки другий іспит із трьох". Очевидно, що $B = \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$, тобто одночасно має відбутися три події, які полягають у тому, що студент складе 2-ий іспит і не складе 1-ий та 3-ій іспити. Враховуючи, що події A_1, A_2, A_3 незалежні, отримаємо

$P(B) = P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}018$.

б) Нехай подія С –„ студент склав один іспит із трьох". Очевидно, що подія С відбудеться, якщо студент складе тільки перший іспит із трьох, або тільки другий, або тільки третій, тобто

$P(C) = P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}044$.

в) Нехай подія D – студент складе всі три іспити, тобто $D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Тоді

$P(D) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 =$ $= 0{,}648$.

г) Нехай подія E – „студент складе принаймні два іспити". Очевидно, подія E відбудеться, якщо студент складе будь-які два іспити з трьох або всі три іспити, тобто

$E = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ і $P(E) = 0{,}9 \cdot$ $\cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}954$.

д) Нехай подія H – „ студент склав хоча б один іспит". Очевидно, подія H є сумою подій C та E, тобто H = C + E. Але простіше знайти ймовірність події H, якщо перейти до протилежної події, яка включає всього один варіант $\overline{H} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$. Тому $P(H) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}998$. ▲

Приклад 4. Продуктивності трьох верстатів, які обробляють однакові деталі, відносяться як 1 : 3 : 6. З нерозсортованої партії оброблених деталей взяли навмання дві. Яка ймовірність того, що: а) одна з них оброблена на третьому верстаті; б) обидві оброблені на одному верстаті?

Розв'язування:

▼ а) Уведемо позначення подій: A_i – „ деталь оброблена на i – му верстаті" ($i = 1, 2, 3$); B – „ одна з двох взятих деталей оброблена на третьому верстаті".

За умовою $P(A_1) = \dfrac{1}{1+3+6} = 0{,}1$; $P(A_2) = \dfrac{3}{1+3+6} = 0{,}3$, $P(A_3) =$ $= \dfrac{6}{1+3+6} = 0{,}6$. Очевидно, що $B = A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3 + A_3 \cdot A_1 + A_3 \cdot A_2$ (при цьому слід урахувати, що або перша деталь оброблена на третьому верстаті, або друга). За теоремами додавання та множення (для незалежних подій):

$P(B) = P(A_1 \cdot A_3 + A_2 \cdot A_3 + A_3 \cdot A_1 + A_3 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_3) + P(A_2) \cdot$ $\cdot P(A_3) + P(A_3) \cdot P(A_1) + P(A_3) \cdot P(A_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 +$ $+ 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}48$.

б) Нехай подія C – „ обидві відібрані деталі оброблені на одному верстаті". Тоді $C = A_1 \cdot A_1 + A_2 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_3$ і $P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 +$ $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}46$. ▲

Приклад 5. Підкидають два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що хоча б на одному кубику випаде два бали. Задачу розв'язати двома способами (за класичним визначенням, використовуючи основні теореми).

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій: A – „хоча б на одному кубику випаде два бали".

Перший спосіб.

Випишемо всі можливі наслідки підкидання двох гральних кубиків одночасно: (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6). Їх кількість рівна числу розміщень з повтореннями із шести елементів по два ($\overline{A_6^2} = 6^2 = 36$). Події A сприяють 11 наслідків. За класичним визначенням ймовірності, $P(A) = \frac{11}{36}$.

Другий спосіб.

Введемо позначення подій:

A_1 – „випало два бали на першому кубику",

A_2 – „випало два бали на другому кубику".

За умовою $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{6}$ (у кубика 6 граней і тільки на одній 2 бали).

Ці події сумісні, оскільки на обох кубиках одночасно може випасти два бали, і незалежні. Використаємо теорему додавання ймовірностей сумісних подій:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}. \blacktriangle$$

Приклад 6. По деякій мішені одночасно роблять n пострілів. Кожний постріл незалежно один від одного влучає в мішень з імовірністю 0,65. Знайти ймовірність того, що мішень буде поцілена (подія A), якщо для цього досить влучення хоча б одного пострілу. Скільки треба зробити пострілів, щоб уразити мішень з імовірністю не меншою 0,99?

Розв'язування:

▼ Скористаємося формулою:

$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n) = 1-(1-p)^n = 1-g^n$.

Маємо $P(A) = 1-(1-0,65)^n$. Будемо вимагати, щоб $P(A) \geq 0,99$, тобто $(1-0,65)^n \geq 0,99$; звідки $(1-0,65)^n \leq 1-0,99$, а отже, $n \geq \log_{0.35} 0.01 = \frac{\lg 0,01}{\lg 0,35} \approx 4$. ▲

Приклад 7. Результати опитування 1000 випадково відібраних молодих людей такі:

працюють	811
навчаються	518
працюють і навчаються	356
живуть у Києві	752
з киян:	
працюють	570
навчаються	348
працюють і навчаються	297

Визначити, чи є в цій інформації помилка?

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій. A – „випадково відібрана молода людина працює", B – „випадково відібрана молода людина проживає у Києві", C – „випадково відібрана молода людина навчається."

За статистичним визначенням:

$P(A) \approx 0,811; P(B) \approx 0,752; P(C) \approx 0,518; P(A \cdot B) \approx 0,570; P(A \cdot C) \approx 0,356;$
$P(B \cdot C) \approx 0,348; P(A \cdot B \cdot C) \approx 0,297.$

За теоремою про ймовірність суми трьох сумісних подій:

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cdot B)-P(A \cdot C)-P(B \cdot C)+$$
$$+P(A \cdot B \cdot C) = 0,811+0,752+0,518-0,570-0,356-0,348+0,297 = 1,104 > 1$$

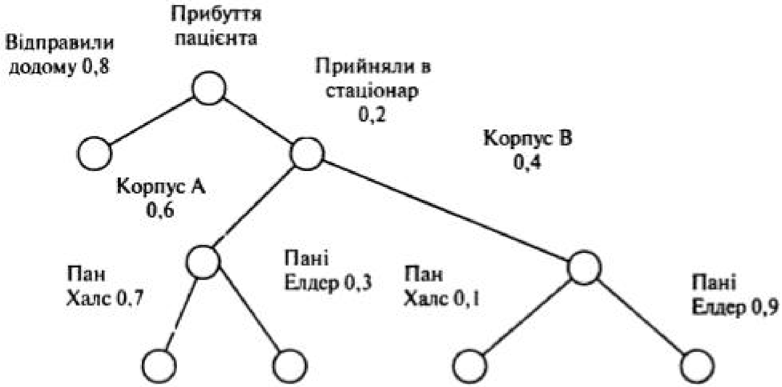
А це означає, що в даній статистичній інформації є помилка. ▲

Приклад 8. У відділення швидкої допомоги клініки Св. Йосипа потрапляють пацієнти. Встановлено, що 80% пацієнтів відправляють додому протягом декількох годин після медичного огляду і надання незначної допомоги. Решту, 20%, розміщують в одному з корпусів (A чи B). 60% пацієнтів потрапляють в корпус A і 40% – в корпус B.

Щодня в корпусах проводять обходи два консультанти – пан Халс та пані Елдер. Пан Халс оглядає 70% пацієнтів корпусу А і тільки 10% пацієнтів корпусу В. Пані Елдер консультує решту пацієнтів. Яка ймовірність того, що пацієнт, який потрапив у відділення швидкої допомоги, виявиться під наглядом пана Халса?

Розв'язування:

▼ Побудуємо дерево ймовірностей. Вершина дерева вказує на прибуття пацієнта. Далі пацієнта або відправляють додому, або лікують стаціонарно, що показано двома гілками. Потім пацієнт потрапляє в один із корпусів, де його оглядає один з консультантів. Ймовірності кожної події подані на дереві ймовірностей. Індивідуальні ймовірності можна перемножити для того, щоб отримати ймовірність потрапляння в крайню кінцеву точку будь-якої гілки.



Наприклад, ймовірність того, що пацієнт буде направлений у корпус В і виявиться під наглядом пані Елдер, розраховують шляхом множення всіх ймовірностей даного напрямку дерева. Тобто, ймовірність цього рівна $0,2\cdot 0,4\cdot 0,9 = 0,072$. Аналогічно, ймовірність того, що пацієнт потрапить у відділення швидкої допомоги і виявиться під наглядом пана Халса, визначається шляхом додавання ймовірностей відповідних гілок дерева. В даному прикладі є дві гілки, які ведуть до пана Халса. Таким чином, шукана ймовірність рівна: $0,2\cdot 0,6\cdot 0,7 + 0,2\cdot 0,4\cdot 0,1 = 0,084 + 0,008 = 0,092$. Тобто, 9,2% пацієнтів, які потрапляють у відділення, врешті-решт зустрінуться з паном Халсом. ▲

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЙЄСА

1. Формула повної ймовірності

Нехай подія А може мати місце тільки разом із однією з подій H_1, H_2, H_3, ..., H_n, які є несумісними і утворюють повну групу. Нехай відомі ймовірності $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$, ..., $P(H_i)$, ..., $P(H_n)$. $\sum_{i=1}^{n} H_i = 1$, тому що події H_i утворюють повну групу. Також відомі умовні ймовірності події А: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, ..., $P(A/H_i)$, ...,$P(A/H_n)$. Оскільки наперед невідомо, з якою із подій H_i відбудеться подія А, то події H_i називають **гіпотезами**. Ймовірність події А дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної із подій H_1, H_2, H_3, ..., H_n на відповідні умовні ймовірності події А.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

Цю ймовірність називають **повною ймовірністю,** а формулу називають **формулою повної ймовірності**.

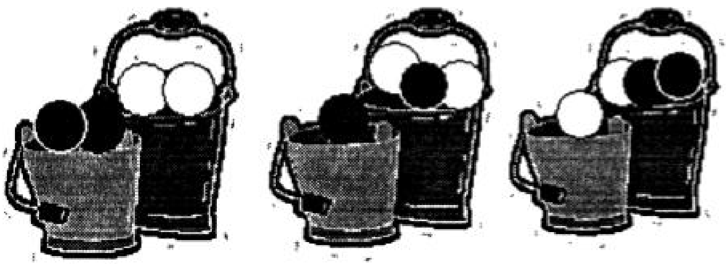
2. Формула Байєса

Часто ми розпочинаємо аналіз ймовірностей, маючи попередні, *апріорні* значення ймовірностей подій, які нас цікавлять. Потім із джерел інформації, таких як вибірка, звіт, досвід і т.і., ми отримуємо додаткову інформацію про події, які нас цікавлять. Маючи нову інформацію, ми можемо уточнити, перерахувати значення апріорних імовірностей. Нові значення імовірностей для тих самих подій, які нас цікавлять, будуть уже апостеріорними (післядослідними) ймовірностями. **Формула Байєса** дає нам можливість переоцінити ймовірності гіпотез після, того як подія А відбулася:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}$$

(У знаменнику – ймовірність події А, яка обчислюється за формулою повної ймовірності).

Приклад 1. Історії відома легенда про те, як шах вирішив стратити свого астролога. При цьому шах дав шанс на порятунок нещасному, він сказав: „Ось тобі дві порожні корзини, дві чорні і дві білі кулі. Ти можеш як завгодно розташовувати ці кулі в корзинах, але в кожній повинна бути хоча б одна куля. Якщо мій кат витягне чорну кулю, то тебе стратять, а якщо білу – залишишся живим». Завдання: як розташувати кулі, щоб ймовірність збереження життя астролога була максимальною.



Розв'язування:

▼ Розглянемо всі варіанти розташування куль і знайдемо для кожного ймовірність того, що буде витягнута біла куля.

1) Якщо покласти в першу корзину одну чорну кулю, а в другу – дві білі та одну чорну. Введемо позначення подій:

А – „ з корзини кат вийме білу кулю".

Можливі гіпотези, які утворюють повну групу:

H_1 – „кат вибере першу корзину";

H_2 – „кат вибере другу корзину".

За умовою: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$; $P(A/H_1) = 0$; $P(A/H_2) = \frac{2}{3}$.

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Аналогічно, якщо покласти одну чорну кулю в другу корзину, а дві білі та одну чорну – в першу.

2) Якщо покласти одну білу кулю в першу корзину, а дві чорні та одну білу – в другу, то

$$P(A)= P(H_1)\cdot P(A/H_1)+ P(H_2)\cdot P(A/H_2)= \frac{1}{2}\cdot 1+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}= \frac{2}{3}.$$

Аналогічно, якщо покласти одну білу кулю в другу корзину, а дві чорні та одну білу – в першу.

3) Якщо покласти по одній чорній і одній білій кулі в обидві корзини, то:

$$P(A)= P(H_1)\cdot P(A/H_1)+ P(H_2)\cdot P(A/H_2)= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}= \frac{1}{2}.$$

Таким чином, якщо астролог помістить в одну з корзин білу кулю, а в другу – одну білу та дві чорні кулі, то ймовірність того, що кат вийме білу кулю більша, ніж при всіх інших розміщеннях куль.

Як стверджує легенда, астролог вижив. ▲

Розв'язуючи задачі з цієї теми, потрібно:

1) з'ясувати, в чому полягає випробування;

2) подію, ймовірність якої потрібно знайти, позначити, наприклад, літерою А;

3) розглянути множину попарно несумісних гіпотез $H_i (i= 1,2,...,n)$, разом з якими може відбутись подія А;

4) обчислити ймовірності гіпотез і умовні ймовірності події А: $P(H_i)$ та $P(A/ H_i)$ $(i = 1,2,...,n)$;

5) за формулою повної ймовірності знайти ймовірність події А. Якщо ж відомо, що подія А вже відбулася, то за формулою Байєса визначити $P(H_i/A)$.

Приклади розв'язування задач на формулу повної ймовірності та формулу Байєса

Приклад 1. Страхова компанія розподіляє застрахованих за групами ризику: перша група – малий ризик, друга група – середній, третя група – великий ризик. Серед клієнтів компанії 50% – першої групи, 30% – другої групи та 20% – третьої групи. Ймовірність виплати страхової нагороди для першої групи ризику рівна 0,01, для другої – 0,03 та для третьої – 0,08. Яка ймовірність того, що:

а) застрахований отримає грошову винагороду за період страхування;

б) застрахований, який отримає грошову винагороду, належить до групи малого ризику?

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій:

Подія А – „застрахований отримає грошову винагороду за період страхування". Можливі такі гіпотези:

H_1- „застрахований належить до першої групи ризику";

H_2 - „застрахований належить до другої групи ризику";

H_3 – „застрахований належить до третьої групи ризику".

За умовою $P(H_1) = 0{,}50$, $P(H_2) = 0{,}30$, $P(H_3) = 0{,}20$.

Умовні ймовірності події А: $P(A/H_1) = 0{,}01$, $P(A/H_2) = 0{,}03$, $P(A/H_3) = 0{,}08$.

а) За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$

$$= 0{,}5\cdot 0{,}01 + 0{,}3\cdot 0{,}03 + 0{,}2\cdot 0{,}08 = 0{,}03$$

б) Нехай подія А відбулася, тобто застрахований отримав винагороду. Перерахуємо після цього за формулою Байєса ймовірність того, що це був клієнт першої групи ризику:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}50\cdot 0{,}01}{0{,}03} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167\,.▲$$

<u>Приклад 2</u>. Група студентів складається з 5 відмінників, 8 хорошистів та 7 слабких. Відмінники склали іспит тільки на „5", хорошисти можуть одержати з однаковою ймовірністю „4" або „5", а слабкі з однаковою ймовірністю „2", „3", „4". Знайти ймовірність того, що навмання викликаний студент одержить 4" або „5".

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій:

А – „навмання викликаний студент одержить 4" або „5"".

Можливі такі гіпотези, які утворюють повну групу і є попарно несумісними:

H_1 – „викликаний студент відмінник";

H_2 – „викликаний студент хорошист";

H_3 – „викликаний студент слабкий".

За умовою: $P(H_1) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $P(H_2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}40$, $P(H_3) = \frac{7}{20} = 0{,}35$. Умовні ймовірності події A: $P(A/H_1) = 1$, $P(A/H_2) = 1$, $P(A/H_3) = \frac{1}{3}$.

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$

$$= \frac{5}{20}\cdot 1 + \frac{8}{20}\cdot 1 + \frac{7}{20}\cdot\frac{1}{3} = \frac{46}{60} = \frac{23}{30} \approx 0{,}767. \blacktriangle$$

Приклад 3. Інвестор вклав капітал у цінні папери двох фінансових фірм. При цьому він сподівається отримати прибуток протягом домовленого часу від першої фірми з імовірністю 0,9; від другої – з імовірністю 1. Але є перестороги, що фірми можуть збанкрутувати, незалежно одна від одної. Ймовірність банкрутства для першої фірми 0,1; для другої – 0,02. У випадку банкрутства фірми інвестор отримує тільки вкладений капітал. Яка ймовірність того, що інвестор отримає прибуток?

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій: A – „отримання інвестором прибутку"; B_1 - „банкрутство першої фірми"; B_2 – „банкрутство другої фірми".

Тоді $P(B_1) = 0{,}1$; $P(B_2) = 0{,}02$. Очевидно, події $C_1 = B_1\cdot\overline{B_2}$, $C_2 = \overline{B_1}\cdot B_2$, $C_3 = B_1\cdot B_2$, $C_4 = \overline{B_1}\cdot\overline{B_2}$ утворюють повну групу подій. За формулою повної ймовірності: $P(A) = P(A/C_1)\cdot P(C_1) + P(A/C_2)\cdot P(C_2) + P(A/C_3)\cdot P(C_3) + P(A/C_4)\cdot P(C_4)$.

Знайдемо ймовірності

$P(A/C_1) = 1$; $P(A/C_2) = 0{,}9$; $P(A/C_3) = 0$; $P(A/C_4) = 1$;

$P(C_1) = 0{,}1\cdot 0{,}98 = 0{,}098$; $P(C_2) = 0{,}9\cdot 0{,}02 = 0{,}018$; $P(C_3) = 0{,}1\cdot 0{,}02 = 0{,}002$; $P(C_4) = 0{,}9\cdot 0{,}98 = 0{,}882$.

Тоді за формулою повної ймовірності:

$P(A) = 0{,}098 + 0{,}9 \cdot 0{,}018 + 0{,}882 = 0{,}9962$. ▲

Приклад 4. В групі із десяти студентів 3 відмінники, 4 хорошисти, два трієчники та 1 двієчник. На іспит винесено 20 питань. Відмінник може відповісти на всі 20 питань, хорошист – на 16, трієчник – на 10, двієчник – на 5. Викликаний навмання студент відповів на три питання. Знайти ймовірність того, що це : а) відмінник; б) двієчник.

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій:

А – „викликаний навмання студент відповів на три питання". Можливі гіпотези, які утворюють повну групу і є попарно несумісними:

H_1 – „викликаний студент – відмінник";

H_2 – „викликаний студент – хорошист";

H_3 – „викликаний студент – трієчник";

H_4 – „викликаний студент – двієчник".

За умовою ймовірності гіпотез рівні:

$$P(H_1) = \frac{3}{10},\ P(H_2) = \frac{4}{10},\ P(H_3) = \frac{2}{10},\ P(H_4) = \frac{1}{10}.$$

Умовні ймовірності події А:

$$P(A/H_1) = 1,\ P(A/H_2) = \frac{16}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18} \approx 0{,}4912,\ P(A/H_3) = \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}\cdot\frac{8}{18} \approx 0{,}1053,\ P(A/H_4) = \frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18} \approx 0{,}0088.$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3) + P(H_4)\cdot P(A/H_4) = 0{,}3\cdot 1 + 0{,}4\cdot 0{,}4912 + 0{,}2\cdot 0{,}1053 + 0{,}1\cdot 0{,}0088 \approx 0{,}5184.$$

а) Нехай викликаний навмання студент дав правильні відповіді на три запитання. Перерахуємо ймовірності першої та четвертої гіпотез за формулою Байєса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}5184} \approx 0{,}579$$

б) $P(H_4/A) = \dfrac{P(H_4) \cdot P(A/H_4)}{P(A)} = 0.1 \cdot 0,0088 \approx 0,001$. ▲

Приклад 5 . У сітці лежать 20 футбольних м'ячів, з них 12 нових і 8 уже були в грі. Із сітки навмання беруть два м'ячі для гри і після гри повертають у сітку. Після цього із сітки знову виймають два м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що обидва ці м'ячі виявляться новими.

Розв'язування:

▼ Уведемо позначення подій:

A – „обидва м'ячі при другому вилученні виявилися новими". Після першого вилучення двох м'ячів і повернення їх у сітку якісний склад м'ячів у сітці може змінитися. Розглянемо такі гіпотези про вміст сітки перед другим вилученням м'ячів:

H_1 – „12 нових і 8 уже були в грі";

H_2 – „11 нових і 9 уже були в грі";

H_3 – „10 нових і 10 уже були в грі".

Гіпотеза H_1 має місце, якщо обидва м'ячі, вилучені першого разу, вже були у грі. За класичним визначенням ймовірності, знаходимо:

$$P(H_1) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{14}{95} .$$

Щоб мала місце гіпотеза H_2, необхідно за першим разом вилучити один новий і один м'яч, який був у грі. Тоді

$$P(H_2) = \frac{C_{12}^1 \cdot C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95} .$$

Щоб мала місце гіпотеза H_3 необхідно за першим разом вилучити два нових м'ячі. Тому

$$P(H_3) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95} .$$

Знайдемо умовні ймовірності події А:

$$P(A/H_1) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{66}{190} ,\ P(A/H_2) = \frac{C_{11}^2}{C_{20}^2} = \frac{55}{190} ,\ P(A/H_3) = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{45}{190} .$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) =$$

$$=\frac{14}{95}\cdot\frac{66}{190}+\frac{48}{95}\cdot\frac{55}{190}+\frac{33}{95}\cdot\frac{45}{190}\approx 0,279\,.$$

Ймовірності гіпотез можна було також знайти за формулою множення ймовірностей залежних подій. ▲

Приклад 6. Система сигналізації може помилково спрацювати з імовірністю 0,05, а в разі крадіжки спрацьовує з імовірністю 0,9. Ймовірність крадіжки в даному районі становить 0,25. Знайти ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково.

Розв'язування:

▼Уведемо позначення подій.

A – „спрацювала сигналізація". Розглянемо гіпотези, які утворюють повну групу:

H_1 – „є крадіжка";

H_2 – „немає крадіжки". За умовою $P(H_1) = 0,25$, $P(H_2) = 0,75$.

Умовні ймовірності $P(A/H_1) = 0,9$, $P(A/H_2) = 0,05$.

За формулою повної ймовірності знайдемо ймовірність того, що сигналізація спрацювала:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2) = 0,25\cdot 0,9+ 0,75\cdot 0,05= 0,263.$$

Ймовірність того, що сигналізація спрацювала помилково, знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,75\cdot 0,05}{0,263}\approx 0,143\,. ▲$$

Приклад 7. (Задача про банкрутство. Практична інтерпретація полягає у наступному. Інвестиційна компанія „грає" з ринком. Можливості ринку безмежні, а можливості компанії обмежені. Компанія намагається вгадати, які фінансові інструменти виявляться в майбутньому прибутковими, якщо вгадає, – отримає прибуток, інакше – понесе втрати. Якщо витрат стає багато, то рано чи пізно компанія збанкрутує.)

Петро з татом грають у гру. Петро кидає монету, попередньо оголосивши татові, який бік, на його думку, випаде: „герб" чи „напис". Якщо Петро вгадав, то тато платить Петру 1 грн., інакше –

Петро платить тату 1 грн. Початковий капітал Петра складає $x=100$ грн. Гра продовжується до тих пір, поки Петро не набере наперед визначену суму S, або поки він не збанкрутує, програвши весь свій капітал. Знайти ймовірність того, що Петро збанкрутує, так і не набравши бажану суму, якщо ця сума: а) $S=110$; б) $S=1000$.

Розв'язування:

▼ Нехай $p(x)$ – ймовірність того, що Петро збанкрутує. Подія A – „Петро збанкрутує." Можливі гіпотези:

H_1 – „Петро виграв на першому кроці гри";

H_2 – „Петро програв на першому кроці гри". При цьому $P(A/H_1)=p(x+1)$; $P(A/H_2)=p(x-1)$. За класичним визначенням: $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$. За формулою повної ймовірності:

$$p(x)=P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)=$$

$$p(x+1)\cdot\frac{1}{2}+p(x-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(p(x+1)+p(x-1)).\quad p(0)=1;\quad p(s)=0.$$

Розв'язком рівняння: $p(x)=\frac{1}{2}(p(x+1)+p(x-1))$ є функція

$p(x)=C_1x+C_2$. $p(0)=C_2=1$, $p(s)=C_1\cdot s+C_2=0$. А тому $C_1=-\frac{1}{s};C_2=1$.

І, остаточно, $p(x)=1-\frac{1}{s}x$.

а) $x=100$; $s=110$; $p(100)=\frac{1}{11}\approx 0{,}091$;

б) $x=100$; $s=1000$; $p(100)=0.9$. ▲

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 6

ПОВТОРНІ ВИПРОБУВАННЯ

1. Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія із n незалежних у сукупності експериментів, кожне з яких має тільки два наслідки: подія A відбулася (успіх) або не відбулася (поразка), причому ймовірність успіху при одному експерименті P(A) = p є сталою і не залежить від номера експерименту (схема Бернуллі). Числа n і p називають параметрами схеми Бернуллі. Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі – 2^n елементарні події.

У рамках цієї схеми для заданого цілого числа m ($0 \leq m \leq n$) знаходиться ймовірність $P_n(m)$ того, що подія A у даній серії n випробувань відбудеться точно m разів, тобто має місце **формула Бернуллі**:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m q^{n-m},$$

де $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Ймовірності $P_n(m)$ ($m = 0, 1, 2, ..., n$) називають **біноміальними,** тому що права частина останньої формули є загальним членом розкладу бінома Ньютона $(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, а тому сума всіх біноміальних ймовірностей рівна 1.

Нехай $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ означає ймовірність того, що в n випробуваннях схеми Бернуллі *успіх має місце не менше, ніж m_1 раз і не більше, ніж m_2 рази* ($0 \leq m_1 \leq m_2 \leq n$). Тоді

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m).$$

Ймовірність P_n $(1 \le m \le n)$ того, що в результаті n випробувань *успіх має місце хоча б один раз*, визначається формулою:

$$P_n (1 \le m \le n) = 1 - q^n.$$

Відмітимо, що ймовірності $P_n(m)$ при фіксованому n спочатку ростуть при збільшенні числа m від 0 до деякого значення m_0, а потім зменшуються при зміні числа m від m_0 до n.

Число успіхів m_0, якому при заданому n відповідає максимальна біноміальна ймовірність $P_n(m_0)$, називається ***найбільш імовірним числом*** успіхів, яке визначають із системи нерівностей

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p,$$

що має один або два цілих розв'язки.

Для застосування схеми Бернуллі до розв'язування задач необхідно, щоб:

а) випробування були незалежними;

б) у кожного випробування має бути тільки два можливих наслідки;

в) ймовірність появи події, яка цікавить, у кожному випробуванні має бути однаковою.

Приклад 1. Ймовірність виготовлення на автоматичному верстаті якісної деталі рівна 0,8. Знайти ймовірність можливого числа появи бракованих деталей серед 5 відібраних, а також найімовірніше число появи бракованих деталей та ймовірність цього числа.

Розв'язування:

▼ Ймовірність виготовлення бракованої деталі $p = 1 - 0,8 = 0,2$. Ймовірності можливих значень числа бракованих деталей серед 5 відібраних знайдемо за формулою Бернуллі:

$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,32768$;

$P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0,4096$;

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048$;

$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$;

$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = 0,0064$;

$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,00032$.

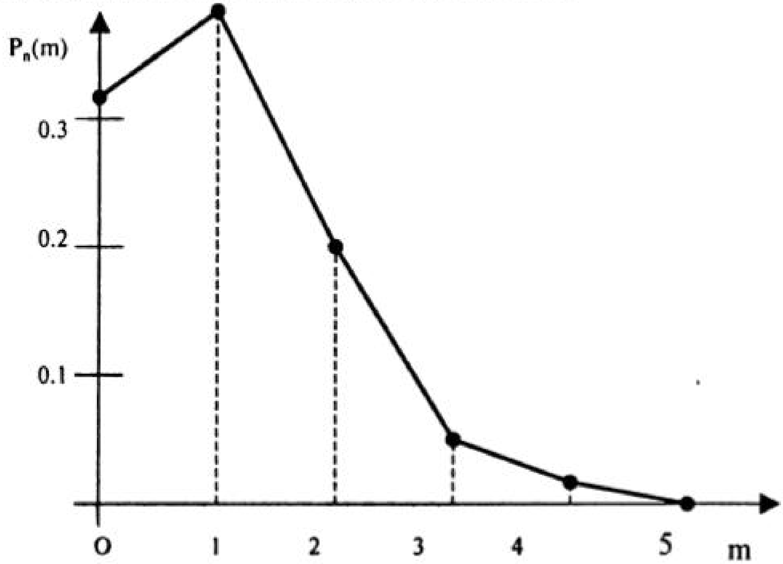
Знайдемо найімовірніше число появи бракованих деталей серед 5 відібраних ($n = 5$; $p = 0,2$; $q = 0,8$):

$5 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0,2 + 0,2$

$0,2 \leq m_0 \leq 1.2$

Єдине ціле число, яке задовольняє цю нерівність, $m_0 = 1$, а його ймовірність $P_5(1) = 0,4096$.

Якщо ймовірності можливих значень числа бракованих деталей подати графічно точками з координатами $(m, P_n(m))$, з'єднавши ці точки, отримаємо *полігон* розподілу ймовірностей:



Ми бачимо, що є таке значення $m = 1$, яке має найбільшу ймовірність $P_n(m)$, і воно відповідає найімовірнішій кількості появи бракованих деталей серед відібраних п'яти. ▲

Припустимо, що нам потрібно обчислити ймовірність $P_n(m)$ появи події А при великій кількості випробувань n, наприклад, $P_{500}(300)$.

За формулою Бернуллі:

$$P_{500}(300) = C_{500}^{300} \cdot p^{300} \cdot q^{200} = \frac{500!}{300!\,200!}\, p^{300} \cdot q^{200}.$$

Практично здійснити підрахунки технічно складно, тим більше, якщо врахувати, що p та q можуть виражатись дробовими числами. Є інші формули, які дозволяють проводити обчислення в аналогічних задачах хоч і наближено, але більш просто і з великою точністю. Ці формули називають асимптотичними і визначаються теоремою Пуассона, локальною та інтегральною теоремами Муавра-Лапласа.

2. Формула Пуассона

Нехай маємо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами n та p. Ймовірність p = const і мала, а число випробувань n велике ($p < 0.1$; $n \cdot p \cdot q \le 10$) . Тоді справедливе співвідношення

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = P_m(\lambda), \text{ де } \lambda = n \cdot p.$$

У *таблиці 3* додатків наведені значення функції Пуассона $P_m(\lambda)$.

При тих самих припущеннях і невеликій кількості доданків у сумі $\sum\limits_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ можна використовувати формулу:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx e^{-\lambda} \cdot \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Приклад 2. На факультеті навчаються 1825 студентів. Яка ймовірність того, що 8 березня є днем народження одночасно чотирьох студентів факультету?

Розв'язування:

▼ Ймовірність того, що день народження студента 8 березня, рівна $p = \frac{1}{365}$. Оскільки $p = \frac{1}{365}$ – мала, n = 1825 велике і $\lambda = n \cdot p =$ $= 1825 \cdot \frac{1}{365} = 5 \le 10$, то застосуємо формулу Пуассона:

$P_{1825}(4) = P_5(4) = 0{,}1755$ (за таблицею 3 додатків). ▲

3. Локальна теорема Муавра - Лапласа

Нехай маємо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами n та p. Імовірність $p \in (0;1)$ успіху в кожному випробуванні не мала, а число випробувань n велике ($n \cdot p \cdot q > 10$). Тоді справедливе співвідношення:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \text{ де}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \quad \text{та} \quad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

Основні властивості функції Гаусса $\varphi(x)$*:*

а) $\varphi(x)$ – функція парна;

б) $\varphi(x)$ – спадає при $x > 0$; в) $\varphi(x) = 0{,}0001...$ при $x > 4$. Функція $\varphi(x)$ табульована (див. таблицю 1 додатків).

Приклад 3. У селі Новоселівка із кожних 100 сімей 80 мають автомобілі. Знайти ймовірність того, що з 400 навмання відібраних сімей 300 мають автомобілі.

Розв'язування:

▼ Ймовірність того, що сім'я має автомобіль, рівна, за класичним визначенням, $p = \frac{80}{100} = 0.8$. Оскільки $n = 400$ досить велике (умову $n \cdot p \cdot q = 400 \cdot 0.8 \cdot (1 - 0.8) = 64 > 10$ виконано), то застосуємо локальну формулу Муавра – Лапласа.

Спочатку знайдемо $x = \frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}50$. Тоді

$$P_{400}(300) \approx \frac{\varphi(-2{,}50)}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{\varphi(2{,}50)}{\sqrt{64}} = \frac{0{,}0175}{8} \approx 0{,}0022 \ ▲$$

4. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Нехай маємо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами n та p. Ймовірність $p \in (0;1)$ успіху у кожному випробуванні не мала, а число випробувань n велике ($n \cdot p \cdot q > 10$). Тоді ймовірність того, що число випробувань m, у яких подія A мала місце, знаходиться у межах від m_1 до m_2 рівна

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt \text{ – функція Лапласа;}$$

$$x_1 = \frac{m_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}.$$

Перерахуємо властивості функції Лапласа:

а) $\phi(x)$ – непарна функція;

б) $\Phi(x)$ зростає на R; в) $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = -0,5$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = +0,5$;

г) $\phi(x) = 0,4999...$ при $x \geq 4$. Функція $\Phi(x)$ протабульована (*див. таблицю 2* додатків).

Приклад 4. У селі Новоселівка із кожних 100 сімей 80 мають автомобілі. Знайти ймовірність того, що автомобілі мають від 300 до 360 сімей із 400 навмання відібраних сімей.

Розв'язування:

▼ Застосуємо локальну формулу Мавра-Лапласа (з попередньої задачі $n \cdot p \cdot q = 64 \geq 20$). Спочатку визначимо x_1 та x_2:

$$x_1 = \frac{300 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5, \quad x_2 = \frac{360 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5,0$$

Підставимо у формулу інтегральної теореми Мавра-Лапласа. Враховуючи властивості $\Phi(x)$, отримаємо:

$P_{400}(300 \leq m \leq 360) \approx \Phi(5,0) - \Phi(-2,5) = 0,5 + 0,4938 = 0,9938$. ▲

Наслідок. Нехай маємо серію випробувань за схемою Бернуллі з параметрами n та p. Ймовірність $p \in (0;1)$ успіху в кожному випробуванні стала, тоді при досить великому значенні числа незалежних випробувань n ймовірність того, що частість $\frac{m}{n}$ події А відрізняється від її ймовірності p не більше, ніж на величину $\varepsilon > 0$ (за абсолютною величиною), тобто

$$P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot q}}\right)$$

Число $\beta = P_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right)$ називають **довірчою ймовірністю**. Воно показує ту питому вагу випробувань, у яких відхилення експериментальної величини $\frac{m}{n}$ від теоретичної p не перевищує заданої похибки ε. При досить великих n $\beta \approx 2\cdot\Phi\left(\frac{\varepsilon\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{p\cdot q}}\right)$. Із останнього співвідношення можна визначати одне з чисел ε, β або n, коли два інших відомі. Якщо X_β — корінь рівняння $\Phi(x) = \frac{\beta}{2}$, знайдений за таблицею 2 значень функції Лапласа, то

$$\varepsilon \approx x_\beta \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\ ;\ n \approx \left(\frac{x_\beta}{\varepsilon}\right)^2 \cdot p\cdot q\,.$$

Якщо числа ε, β та n задані, то можна довести, що з ймовірністю, не меншою, ніж β, невідоме число p знаходиться на проміжку $\left(\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}; \frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}\right)$, який називають **довірчим інтервалом** для ймовірності успіху в одному випробуванні, а його кінці **довірчими межами**. Тобто, замінивши невідому ймовірність p на знайдену дослідним шляхом відносну частоту, зробимо похибку, яка не перевищує $\frac{x_\beta}{2\sqrt{n}}$.

Приклад 5. Ймовірність того, що навмання вибрана деталь має дефект, рівна 0,2. Яка ймовірність того, що під час випадкового огляду 600 деталей цієї партії відносна частота появи бракованої деталі відрізняється від відповідної ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,05?

Розв'язування:

▼ Випробування, що розглядається, очевидно, задовольняють схемі Бернуллі. Знайдемо довірчу ймовірність β, враховуючи, що за умовою $n = 600$, $p = 0,2$, $q = 1 - 0,2 = 0,8$, $\varepsilon = 0,05$.

$$\beta = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,2\right| \le 0,05\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{p \cdot q}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0,05 \cdot \sqrt{600}}{\sqrt{0,2 \cdot 0,8}}\right) =$$

$$= 2 \cdot \Phi(3,06) = 2 \cdot 0,4989 = 0,9978$$

▲

Приклад 6. Проведене випадковим чином медичне обстеження 625 співробітників підприємства „Мрія" виявило 40 чоловік, які мають певного виду професійні захворювання. З довірчою ймовірністю 0,997 визначте межі, в яких знаходиться відсоток профхворих на підприємстві.

Розв'язування:

▼ За умовою $n = 625$, $m = 40$, $\beta = 0,997$. Підрахуємо довірчі межі, враховуючи, що за таблицею значень функції Лапласа $x_\beta \approx 2,97$:

$$\frac{m}{n} - \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} \approx \frac{40}{625} - \frac{2,97}{2\sqrt{625}} = 0,064 - 0,0594 = 0,005;$$

$$\frac{m}{n} + \frac{x_\beta}{2\sqrt{n}} \approx \frac{40}{625} + \frac{2,97}{2\sqrt{625}} = 0,064 + 0,0594 = 0,123$$

Це означає, що профхворих всього підприємства міститься в межах від

0,5% до 12,3%.▲

Приклади розв'язування задач на повторні випробування.

Приклад 1. У середньому 20% пакетів акцій на аукціонах продають за першою заявленою ціною. Знайти ймовірність того, що з 9 пакетів акцій у результаті торгів за першою заявленою ціною: 1) не будуть продані 5 пакетів; 2) будуть продані 5 пакетів; 3) буде

продано не більше двох пакетів; 4) буде продано не менше двох пакетів;
5) буде продано хоча б два пакети; 6) найімовірніше число пакетів.

Розв'язування:

▼ Ймовірність того, що пакет акцій не буде продано за першою заявленою ціною, р = 1— 0,2 = 0,8.

1) За формулою Бернуллі $P_9(5) = C_9^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^4 = 0,066$.

2) За умовою ймовірність того, що пакет акцій буде продано за першою заявленою ціною (р = 0,2). За формулою Бернуллі

$P_9(5) = C_9^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^4 = 0,0165$.

3) р = 0,2.

$$P_9(m \le 2) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0.8^9 + C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 +$$

$$+ C_9^2 \cdot 0.2^2 \cdot 0,8^7 = 0,738$$

4) $P_9(m \ge 2) = 1 - (P_9(0) + P_9(1)) = 1 - (C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8) \approx$
$\approx 1 - 0,4362 = 0,564$

5) Ймовірність того, що буде продано хоча б два пакети, співпадає з попередньою ймовірністю того, що буде продано не менше двох пакетів.

6) Найімовірніше число проданих пакетів за першою заявленою ціною знайдемо із системи нерівностей

$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$; $9 \cdot 0,2 - 0,8 \le m_0 \le 9 \cdot 0,2 + 0,2$; $1 \le m_0 \le 2$, тобто найімовірніших чисел два: $m_0 = 1$ та $m_0 = 2$.▲

Приклад 2. Ймовірність знайти білий гриб серед інших рівна 0,25. Яка ймовірність того, що серед 80 грибів білих буде 20?

Розв'язування:

▼ Будемо вважати успіхом знаходження білого гриба, тоді р = 0,25,

q = 1 – 0,25 = 0,75. Потрібно знайти ймовірність $P_n(m)$, де n = 80, m = 20.

За локальною теоремою Муавра-Лапласа:

$$x=\frac{m-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}=\frac{20-80\cdot 0,25}{\sqrt{80\cdot 0,25\cdot 0,75}}=0,$$

тоді $P_{80}(20)\approx\frac{\varphi(0)}{\sqrt{80\cdot 0,25\cdot 0,75}}\approx\frac{0,3989}{\sqrt{80\cdot 0,25\cdot 0,75}}=0,103$ (оскільки за таблицею 1 функції $\varphi(x)$ $\varphi(0)=0,3989$). ▲

Приклад 3. За результатами перевірок податковими інспекціями виявлено, що в середньому кожне друге мале підприємство регіону допускає порушення фінансової дисципліни. Знайти ймовірність того, що з 1000 зареєстрованих у регіоні малих підприємств допускають порушення фінансової дисципліни : а) 480 підприємств; б) не менше 480 підприємств; в) від 480 до 520 малих підприємств.

Розв'язування:

▼ а) За умовою p=0,5. Оскільки n=1000 досить велике (умову $n\cdot p\cdot q=1000\cdot 0,5\cdot(1-0,5)=250>10$ виконано), тоді застосуємо локальну формулу Муавра-Лапласа.

$$x=\frac{m-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}=\frac{480-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=-1,265,\text{ потім}$$

$$P_{1000}(480)\approx\frac{\varphi(-1,265)}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=\frac{\varphi(1,265)}{\sqrt{250}}=\frac{0,1792}{\sqrt{250}}=0,0113.$$

б) Застосуємо інтегральну формулу Муавра – Лапласа ($m_1=480$, $m_2=1000$).

$$x_1=\frac{480-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=-1,265,\ x_2=\frac{1000-1000\cdot 0,5}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}=31,6.\text{ Тоді}$$

$$P_{1000}(480\le m\le 1000)\approx\Phi(31,6)-\Phi(-1,265)=0,5+0,396=0,896$$

в) Межі інтервалу 480 та 520 симетричні відносно значення $n\cdot p=$ $=500$. Тоді за наслідком із інтегральної теореми Мавра-Лапласа

$$P_{1000}(480\le m\le 520)=P_{1000}(|m-500|\le 20)\approx$$

$$\approx 2\cdot\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{1000\cdot 0,5\cdot 0,5}}\right)=2\cdot 0,396=0,792.\ ▲$$

Приклад 4. У страховій компанії 10000 клієнтів. Страховий внесок кожного клієнта становить 500 грн. Коли настає страховий випадок, ймовірність якого за оцінками експертів можна вважати рівною p =

0,005, страхова компанія зобов'язана виплатити клієнту страхову суму розміром 50000 грн. На який прибуток може розраховувати страхова компанія з надійністю 0,95?

Розв'язування:

▼ Розмір прибутку компанії складає різницю між сумарним внеском усіх клієнтів і сумарною страховою сумою, яку виплачено k клієнтам під час настання страхового випадку, тобто $П=500\cdot 10000-50000\cdot k=50000(100-k)$ тис. грн. Для визначення k застосуємо інтегральну формулу Муавра – Лапласа (вимога $n\cdot p\cdot q=10000\cdot 0,005\cdot 0,995=49,75>10$ виконана).

За умовою задачі: $P_{10000}(0\le m\le k)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1)=0,95$, де m – число клієнтів, яким виплачена страхова сума. Звідси $\Phi(x_2)=\Phi(x_1)+0,95$.

$$x_1=\frac{0-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}=-\sqrt{\frac{n\cdot p}{q}}=-\sqrt{\frac{10000\cdot 0,005}{0,995}}=-7,09, \qquad x_2=\frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$$

звідки

$$k=n\cdot p+x_2\cdot\sqrt{n\cdot p\cdot q}=10000\cdot 0,005+x_2\cdot\sqrt{49,75}=50+x_2\cdot\sqrt{49,75}.$$

$$\Phi(x_2)=\Phi(x_1)+0,95=\Phi(-7,09)+0,95\approx -0,5+0,95=0,45.$$

За таблицею 2 додатків $x_2=1.645$. Тоді

$$k=50+x_2\cdot\sqrt{49,75}=50+1,645\cdot\sqrt{49,75}=61,6 \text{ і}$$

$П=500\cdot 10000-50000\cdot 61,6=50000(100-61,6)=1920000$ грн.. ▲

<u>Приклад 5</u>. Скільки разів необхідно підкинути гральний кубик, щоб найімовірніше число випадання двох балів (подія А) становило 10 разів?

Розв'язування:

▼ У даному випадку $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$. Із системи нерівностей для підрахунку найімовірнішого числа появи події А в серії з n випробувань будемо мати:

$n\cdot\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\le 10\le n\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$ або $n-5\le 60\le n+1$, звідки $n\le 65$ і $n\ge 59$, тобто необхідно підкинути гральний кубик від 59 до 65 разів включно. ▲

Приклад 6. Недолік тестового контролю знань з вибірковим введенням відповідей полягає в тому, що студент випадково може вибрати правильну відповідь і отримає позитивну оцінку без достатніх підстав. З'ясуємо, наскільки обгрунтованими є ці побоювання і як послабити негативний вплив випадковості на кінцевий результат тестової перевірки.

Розв'язування:

▼ Нехай число вибіркових відповідей на будь-яке з питань, які є в тестовій картці, рівне k. Розглядаючи спрощену модель тестового контролю, будемо вважати ймовірність випадково даної правильної відповіді на кожне питання однаковою і рівною $\frac{1}{k}$. Уведемо позначення: n – число питань у картці, m – число правильних відповідей (припускаємо, що у кожній серії наводиться тільки одна правильна відповідь). Ймовірність $P_n(m)$ того, що в послідовності з n незалежних випробувань (число питань) буде рівно m успіхів (число неосмислених правильних відповідей), знайдемо за формулою Бернуллі:

$$P_n(m)= \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\left(\frac{1}{k}\right)^m\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-m}.$$

Наприклад, тестова картка містить 5 питань з чотирма можливими відповідями на будь-яке з них. Оцінку „3" виставляють, якщо дано правильні відповіді на три поставлених питання, оцінка „4" – на чотири питання і оцінка „5" – на п'ять питань.

Отож, імовірність отримати оцінку „3":

$$P_5(3)= \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0,088.$$

Ймовірність отримати оцінку „4", зрозуміло, менша :

$$P_5(4)= \frac{5!}{4!\,1!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^1 \approx 0,015.$$

Нарешті, вгадати правильні відповіді на всі п'ять поставлених питань є зовсім малоймовірним:

$$P_5(5)= \frac{5!}{5!}\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^0 \approx 0,001.$$

Однак сумарна ймовірність $P_5(3\le m\le 5)$ отримати безпідставно позитивну оцінку вже досить велика і становить:

$P_5(3\le m\le 5) = 0{,}088 + 0{,}015 + 0{,}001 \approx 0{,}104.$

А це свідчить про те, що при багаторазовому проведенні тестового контролю

(в описаних умовах), як правило, в одному випадку з десяти можна неправомірно отримати позитивну оцінку.

Вдалою спробою удосконалення тестового контролю є система „парних" питань. При цьому кожне питання складається з двох логічно пов'язаних елементів (підпитань) і тільки співпадання правильних вибіркових відповідей на обидві частини питання враховується екзаменатором. Ймовірність p випадкового вибору правильної відповіді на спарене питання рівна $p = p_1 \cdot p_2$, де p_i $(i = 1, 2)$ – ймовірності випадкового вибору правильних відповідей на складові підпитання. Звідси випливає, що відповідна ймовірність p зменшиться, а шанси об'єктивного оцінювання знань студентів зростуть. ▲

<u>Приклад 7</u>. Із заводу-виробника на базу відправлено 4000 ретельно запакованих якісних виробів. Ймовірність того, що один виріб пошкодиться в дорозі, рівна 0,0005. Знайти ймовірність того, що на базу надійдуть від 3 до 5 пошкоджених виробів.

Розв'язування:

▼ За умовою:

$n = 4000$, $m_1 = 3$, $m_2 = 5$, $p = 0{,}0005$. Оскільки n досить велике, p мале і $\lambda = n\cdot p = 2$, а $n\cdot p\cdot q = 2\cdot(1-0{,}0005) = 1{,}999 \le 10$, то доцільно використати формулу Пуассона, враховуючи, що число доданків в $\sum\limits_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$ рівне трьом, матимемо

$$P_{4000}(3\le m\le 5) \approx e^{-2}\cdot\left(\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{4!}+\frac{2^5}{5!}\right) \approx 0{,}3068. \ ▲$$

<u>Приклад 8</u>. Відомо, що з числа глядачів телепрограми „Свобода слова" 70% дивляться і рекламні блоки. Групи, складені з трьох навмання відібраних глядачів, опитують щодо змісту рекламного блоку. 1) Знайти ймовірності можливого числа осіб у групі, які

дивляться, окрім телепрограми, ще й рекламні блоки. 2) Знайти найімовірніше число осіб у групі, що дивляться рекламні блоки.

Розв'язування:

▼ 1) Ймовірність того, що навмання вибраний глядач даної телепрограми дивиться і рекламні блоки, за статистичним визначенням рівна $p = 0,7$. Розглядаючи опитування трьох телеглядачів як три випробування Бернуллі і вважаючи успіхом ситуацію, коли телеглядач дивиться рекламні блоки, знайдемо шукані ймовірності за формулою Бернуллі, де

$n = 3;\ p = 0.7;\ P_3(k) = C_3^k \cdot 0,7^k \cdot 0,3^{3-k};\ P_3(0) = 0,027;\ P_3(1) = 0.189;$
$P_3(2) = 0,441; P_3(3) = 0,343.$

$$2)\ \begin{aligned} & n\cdot p - g \le k \le n\cdot p + p; \\ & 3\cdot 0,7 - 0,3 \le k \le 3\cdot 0,7 + 0,7; \\ & 1,8 \le k \le 2,8; \\ & k = 2. \end{aligned}$$

▲

Приклад 9. Із 1000 опитаних 700 чоловік підтримують деяку урядову програму. Знайти мінімальну чисельність групи, в якій з імовірністю, не меншою 0,9, хоча б один респондент не підтримує урядову програму.

Розв'язування:

▼ Нехай чисельність групи n. Будемо інтерпретувати опитування групи з n осіб як випробування Бернуллі, вважаючи успіхом те, що випадково вибраний респондент підтримує урядову програму. За статистичним визначенням $p = \frac{700}{1000} = 0,7$. Нехай подія A полягає в тому, що в групі з n осіб хоча б один не підтримує урядову програму, тоді подія $\overline{A}$ означає, що в групі з n чоловік усі n підтримують урядову програму.

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_n(n) = 1 - C_n^n \cdot p^n \cdot q^0 = 1 - p^n = 1 - 0.7^n$

За умовою: $1 - (0,7)^n \ge 0,9$ або $0,7^n \le 0,1$

$(0,7^1 = 0.7;\ \ 0,7^2 = 0,49;\ \ 0,7^3 = 0,343;\ \ 0,7^4 = 0,240;\ \ 0,7^5 =$

$= 0,168;\ \ 0,7^6 = 0,118;\ \ 0,7^7 = 0,082 < 0,1)$

Отже, n = 7. Тому мінімальна чисельність групи, в якій з імовірністю, не меншою 0,9, хоча б один респондент не підтримує дану урядову програму, становить 7 чоловік. ▲

МОДУЛЬ 2
ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 7

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

1. Поняття випадкової величини. Способи задання та властивості випадкових величин

Під випадковою величиною розуміють змінну величину, яка в результаті випробування з випадковими наслідками може набути того чи іншого зі своїх можливих значень, причому наперед, до випробування, невідомо, якого саме.

Наведемо приклади випадкових величин:

№ прикладу	Випробування з випадковими наслідками	Випадкова величина	Значення випадкової величини
1	Відбирання 5 зразків з партії товарів і реєстрація числа бракованих	Кількість бракованих зразків серед відібраних із партії 5 зразків	0, 1, 2, 3, 4, 5
2	Реєстрація кількості дорожніх пригод на певній ділянці дороги протягом тижня	Кількість дорожніх пригод за тиждень	0, 1, 2, 3, ...
3	Реєстрація денного попиту на машини	Число замовлень на машини протягом дня	0, 1, 2, 3, ...
4	Реєстрація кількості пострілів до першого влучення	Число зроблених пострілів до першого влучення	1, 2, 3, ...
5	Реєстрація терміну роботи проданого телевізора до першого ремонту	Час роботи телевізора до першого ремонту	$[0;+\infty)$
6	Реєстрація прибутку підприємства за місяць	Величина місячного прибутку підприємства в гривнях	$[0;+\infty)$

Дискретною випадковою величиною називають таку випадкову величину, множина можливих значень якої скінченна або ж, якщо і нескінченна, то її елементи можна розмістити у певному порядку і перенумерувати натуральними числами (зліченна), причому всі можливі значення є окремими та ізольованими числами.

Дискретними є випадкові величини, наведені у прикладах 1, 2, 3, 4 таблиці.

Неперервною випадковою величиною називають таку випадкову величину, множина можливих значень якої неперервно заповнює деякий числовий проміжок.

Неперервними є випадкові величини наведені у прикладах 5 та 6 таблиці.

Дискретними та неперервними випадковими величинами не вичерпуються всі можливі типи випадкових величин. Наприклад, на одних інтервалах випадкова величина може поводити себе як неперервна, а в інших – як дискретна. Але існують випадкові величини, які на жодному інтервалі не є ні дискретними, ні неперервними. Це так звані випадкові величини *сингулярного типу*. (Функція розподілу (буде далі) такої випадкової величини $F(X)$ неперервна при всіх x, а похідні від неї рівні нулю майже скрізь.)

Теоретико-множинне трактування основних понять теорії ймовірностей надає можливість дати таке визначення випадкової величини.

Випадковою величиною X називають функцію, задану на множині елементарних наслідків, тобто $X = f(\omega)$, де ω – елементарний наслідок з простору елементарних наслідків Ω, тобто $\omega \in \Omega$.

Надалі розглядатимемо лише дискретні і неперервні випадкові величини.

Випадкові величини будемо позначати великими літерами латинського алфавіту X, Y, Z, ..., а їх значення – відповідними маленькими літерами x, y, z, ...

Розглянемо приклад з перевіркою 10 накладних. Існує 11 можливих наслідків випробування:

Номер наслідку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість правильних накладних	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Кількість неправильних накладних	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Число правильно оформлених накладних є дискретною випадковою величиною. Коли ми збираємось провести перевірку накладних, то наперед невідомо, який наслідок з одинадцяти можливих буде мати місце, але можна підрахувати ймовірності кожного з них.

Якщо прийняти за X деяку дискретну випадкову величину, то набір ймовірностей, що відповідають можливим наслідкам, буде називатися ймовірнісним розподілом X. Ймовірність того, що дискретна випадкова величина X набуде значення x, позначається як $P(X = x)$.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке відношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини (або множинами значень) та ймовірностями, що їм відповідають.

Закон розподілу випадкової величини можна задати у вигляді:

1) ***Ряду розподілу*.** Це таблична форма задання закону розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X двома векторами – вектором числових значень випадкової величини X_i та вектором ймовірностей числових значень p_i, $i = 1, 2, ..., n$. Причому, вектор X_i повинен розміщуватися в порядку зростання, тобто $x_i < x_{i+1}$.

x_i	x_1	x_2	....	....	x_n
p_i	p_1	p_2	....	....	p_n

Події, яким відповідають числові значення випадкової величини X: $x_1, x_2, ..., x_n$, утворюють повну групу, тому $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Цю форму задання закону розподілу не можна застосувати до неперервних випадкових величин, тому що, по-перше, неможливо перерахувати всі її можливі значення, а по-друге, оскільки кількість її можливих значень нескінченна, то ймовірність окремо взятого значення неперервної випадкової величини настільки мала, що практично рівна нулю. Є сенс розглядати ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини в інтервал, нехай навіть скільки завгодно малий.

Багатокутником ймовірностей (полігоном ймовірностей) дискретної випадкової величини X називають ламану, яка з'єднує точки $(x_i;p_i)$ у порядку зростання, тобто це графічне подання ряду розподілу.

2) ***Функції розподілу*** $F(X)=P\{X < x\}$. Її ще називають **інтегральною** функцією розподілу. Геометрично функція розподілу інтерпретується як ймовірність того, що випадкова величина X потрапить лівіше від заданої точки x. Функція розподілу будь-якої дискретної випадкової величини є розривною ступінчатою, а для будь-якої неперервної випадкової величини - неперервна у кожній точці.

Властивості функції розподілу

1) Функція розподілу випадкової величини є неспадною, а область її можливих значень відрізок [0, 1].

2) Якщо можливі значення неперервної випадкової величини X належать інтервалу (a, b), то:

$F(x) = 0$, при $x \le a$;

$F(x) = 1$, при $x \ge b$.

3) Якщо можливі значення неперервної випадкової величини розміщені на всій числовій осі, то

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Наведемо більш строге визначення неперервної випадкової величини, ніж ми давали раніше.

*Випадкова величина X називається **неперервною**, якщо її функція розподілу неперервна у будь-якій точці і диференційована скрізь, окрім, можливо, окремих точок.*

Приклад 1. Насіння проростає з імовірністю 0,8. Розглядають випадкову величину X – кількість зерен, які проросли серед п'яти посіяних. Знайти закон розподілу дискретної випадкової величини X у вигляді ряду розподілу та у вигляді функції розподілу F(x). Побудувати графік функції розподілу. Знайти ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $[-5;3.4]$.

Розв'язування:

▼ Враховуючи, що випадкова величина X може набувати одного з можливих числових значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, то вектор значень має вигляд:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$.

Ймовірності p_i шукатимемо за формулою Бернуллі $P_n(m)= C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, причому, за умовою маємо такі значення параметрів: p = 0,8, q = 0,2, n = 5. Підставимо замість m відповідні значення випадкової величини. Підставою для застосування формули Бернуллі є незалежність випробувань і закони розподілів ймовірностей в окремих випробуваннях співпадають. З урахуванням цього вектор ймовірностей має вигляд:

$$P_1=P_5(0)=C_5^0\cdot 0,8^0\cdot 0,2^{5-0} = 0,2^5 = 0,00032.$$

$P_2 = P_5(1)= C_5^1\cdot 0,8^1\cdot 0,2^{5-1} = 5\cdot 0,8\cdot 0,0016= 0,0064.$ Аналогічно, $P_3 = 0,0512$;

$P_4 = 0,2048$; $P_5 = 0,4096$; $P_6 = 0,32768$.

Тоді отримаємо такий ряд розподілу:

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

Для побудови функції розподілу будемо задавати різні значення x і знаходити для них F(x) = P(X < x).

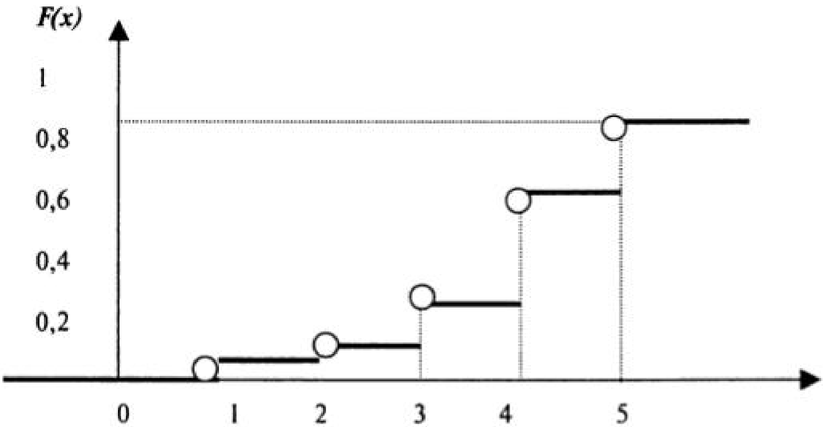
1. Якщо $x \le 0$, то, очевидно, F(x) = 0 (в тому числі і при x = 0
   F(0) = P(X < 0) = 0).
2. Якщо $0 < x \le 1$, то F(x) = P(X =0) = 0,00032.
3. Якщо $1< x \le 2$, то F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,00032+0,0064 = = 0,00672.
4. Якщо $2< x \le 3$, то F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = = 0,00032+0,0064 + 0,0512 = 0,05792.
5. Якщо $3< x \le 4$, то F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = = 0,00032+0,0064 + 0,0512 + 0,2048 = 0,26272.

6. Якщо 4< x ≤ 5, то F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,00032+0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 = 0,67232.
7. Якщо x >5, то F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0,00032+0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 1.

Отримали:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\le 0, \\ 0,00032, 0< x\le 1, \\ 0,00672, 1< x\le 2, \\ 0,05792, 2< x\le 3, \\ 0,26272, 3< x\le 4, \\ 0,67232, 4< x\le 5, \\ 1, x> 5. \end{cases}$$

Графік функції розподілу має вигляд:



Ймовірність потрапляння випадкової величини X у заданий інтервал:

$$P(-5< X< 3,4)= F(3,4)- F(-5)= 0,26272- 0= 0,26272. \quad \blacktriangle$$

3) ***Щільності розподілу ймовірностей*** $f(x) = F'(x)$. Її ще називають **диференціальною** функцією розподілу. Цю форму задання закону розподілу можна застосовувати тільки до неперервних випадкових величин.

Розглянемо довільну об'ємну фігуру. Ймовірність влучення дротиком у деяку точку цієї фігури рівна нулю, тому що об'єм цієї точки практично дорівнює нулю. А ось густина об'ємної фігури у довільній точці виражається конкретним числовим значенням. Аналогічно, ймовірність окремого значення неперервної випадкової величини практично рівна нулю, а ось щільність (густина) ймовірності може виражатися ненульовим числовим значенням.

Якщо розглянути ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини на проміжок $[x; x+\Delta x]$, то середня густина ймовірності при необмеженому звуженні цього проміжку буде рівна густині ймовірності точкового значення неперервної випадкової величини. За означенням похідної функції матимемо:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Про випадкову величину X кажуть, що вона розподілена зі щільністю f(x) на деякому проміжку осі абсцис. Графік щільності розподілу ймовірностей називають **кривою розподілу**.

Властивості щільності розподілу

1) Щільність розподілу є функція невід'ємна ($f(x) \ge 0$ *).*

2) Для щільності розподілу виконується умова нормування:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[a;b]$, *то умова нормування має такий вигляд:* $\int_a^b f(x)dx = 1$.

3) В геометричній інтерпретації $F(x)$ *рівна площі фігури, обмеженої зверху кривою щільності розподілу* $f(x)$ *і знаходиться лівіше точки x. Повна площа, обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, рівна 1.*

4) Функція розподілу F(x) визначається через щільність розподілу формулою:

$$F(x)=P(X<x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

5) Ймовірність потрапляння випадкової величини на заданий проміжок:

$$P\{\alpha\leq x\leq \beta\}=F(\beta)-F(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Остання властивість показує: ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значень з інтервалу (α,β), рівна площі криволінійної трапеції, яка обмежена кривою розподілу, віссю 0X і прямими $x=\alpha$, $x=\beta$ (випливає з геометричного змісту визначеного інтеграла).

Зв'язок між законами розподілів випадкових величин виражається формулою: $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. (Ця одиниця якось розподілена між значеннями випадкової величини, звідси і термін „розподіл").

<u>*Приклад 2.*</u> Задана функція розподілу неперервної випадкової величини X. Знайти коефіцієнт *A*; записати щільність розподілу $f(x)$; знайти ймовірність події $0.5\leq X<1.5$. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

$$F(X)=\begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ A\cdot(-x^2+4x), & 0<x\leq 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Розв'язування:

▼ 1) За визначенням щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини є першою похідною від функції розподілу:

$$f(x)=F'(x),$$

знайдемо:

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ A(-2x+4), 0< x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$$

Сталий множник А знайдемо з умови нормування:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1..$$

У нашому випадку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{2} A(-2x+4)dx=A(-x^2+4x)\Big|_0^2=A(-4+8)=4A=1,$$

$$\Rightarrow 4A=1, \Rightarrow A=\frac{1}{4}.$$

Отже, $$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ -\frac{1}{2}x+1, 0< x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ -\frac{1}{4}x^2+x, 0< x\le 2\\ 1, x>2\end{cases}$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини X в інтервал $(0,5\ ,1,5)$ визначається за однією із формул:

$$P(0,5< X<1,5)=\begin{cases}F(1,5)-F(0,5), \text{якщо відома } F(x), & (1)\\ \int_{0,5}^{1,5} f(x)dx, \text{якщо відома } f(x). & (2)\end{cases}$$

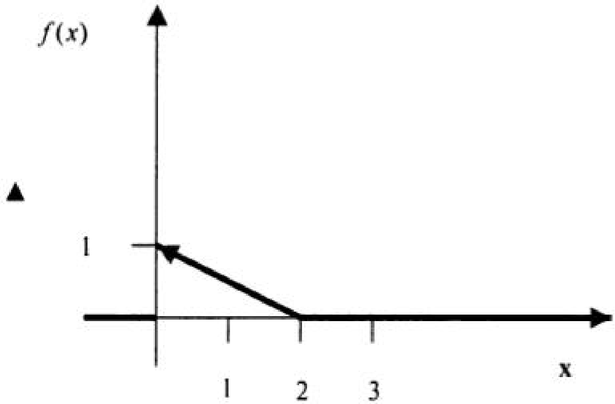
Скориставшись формулою (1), знайдемо:

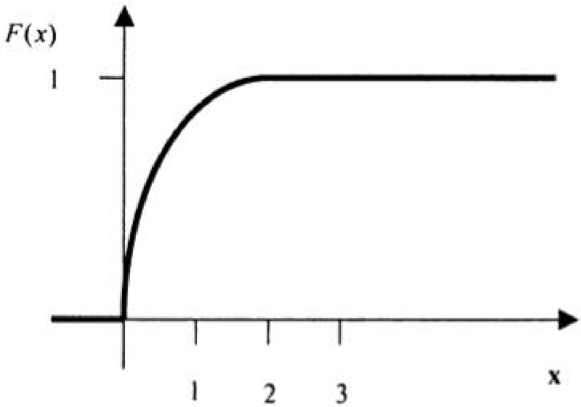
$$F(1,5)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}+\frac{3}{2}=\frac{15}{16},$$

$$F(0,5)=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{16},$$

тоді: $$P(0,5< X< 1,5)=\frac{15}{16}-\frac{7}{16}=\frac{1}{2}.$$

Графіки функцій F(x) та f(x) побудуємо за точками:





Приклад 3. Задано щільність розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x\le 0, \\ \cos x,\ 0< x\le \pi/2, \\ 0\ ,\ x> \pi/2. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу F(x).

Розв'язування:

▼ Скористаємося формулою $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Оскільки щільність розподілу задана різними формулами на окремих інтервалах, то і функцію розподілу будемо знаходити окремо для кожного інтервалу.

Якщо $x\le 0$, то $f(x)=0$, отож,

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx=0.$$

Якщо $0< x\le \pi/2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\cos xdx=\sin x.$$

Якщо $x>\pi/2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos xdx+\int\limits_{\pi/2}^{x} 0dx=(\sin x)\Big|_{0}^{\pi/2}=1.$$

Отже, шукана функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0\ ,\ x\le 0, \\ \sin x,\ 0< x\le \pi/2, \\ 1\ ,\ x> \pi/2. \end{cases} \blacktriangle$$

2. Математичні операції над випадковими величинами

Дві випадкові величини називають **незалежними**, якщо закон розподілу однієї з них не змінюється від того, якого із своїх можливих значень набула інша величина. Так, якщо дискретна випадкова величина X може набувати значень $x_i (i=1,2,...,n)$, а випадкова величина Y – значення $y_j (j=1,2,...,m)$, то незалежність дискретних випадкових величин X та Y означає незалежність подій $X = x_i$ та $Y = y_j$ при будь-яких $i = 1,2,...n$ та $j = 1,2,...,m$. Інакше, випадкові величини називають **залежними**.

Або, іншими словами, дві випадкові величини X та Y називаються ***незалежними***, якщо для всіх можливих дійсних x, y $P\{(X < x)\cap(Y < y)\} = P(X < x)\cdot P(Y < y)$, тобто для всіх можливих дійсних x, y події $(X < x);(Y < y)$ – незалежні.

Нехай дано дві дискретні випадкові величини у вигляді рядів розподілу:

X:

X_i	X_1	X_2	....	....	X_n
P_i	P_1	P_2	....	....	P_n

Y:

y_j	y_1	y_2	....	....	y_m
p_j	P_1	P_2	....	....	P_m

Добутком kX випадкової величини X на сталу величину k називають випадкову величину, яка набуває значень kx_i з тими самими ймовірностями $p_i (i = 1,2,...,n)$.

m–им степенем випадкової величини X, тобто X^m, називається випадкова величина, яка набуває значень X_i^m з тими самими ймовірностями $p_i (i = 1,2,...,n)$.

Сумою (різницею або добутком) випадкових величин X та Y називається випадкова величина, яка набуває всіх можливих значень виду $x_i + y_j$ $(x_i - y_j$ або $x_i \cdot y_j)$, де $i = 1,2,...,n;$ $j = 1,2,...,m$, з імовірностями p_{ij} того, що випадкова величина X набуде значення X_i, а Y – значення y_j: $p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)]$.

Якщо випадкові величини X та Y незалежні, тобто незалежними є будь-які події $X = x_i$, $Y = y_j$, то за теоремою множення ймовірностей незалежних подій:

$p_{ij} = P(X = x_i)\cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot p_j$.

Приклад 4. Задано закони розподілів двох випадкових величин:

X:

x_i	0	2	5
P_i	0,5	0,2	0,3

Y:

y_j	-2	0	2	3
p_j	0,1	0,2	0,4	0,3

Знайти закони розподілів випадкових величин: а) U = 3X; б) V= Y^2; в) $Z = X - Y$.

Розв'язування:

а) Можливі значення випадкової величини U будуть: $0 \cdot 3 = 0$; $2 \cdot 3 = 6$; $5 \cdot 3 = 15$ з тими самими ймовірностями 0,5; 0,3; 0,2, тобто

U:

U_i	0	6	15
P_i	0,5	0,2	0,3

б) Можливі значення випадкової величини V будуть: $(-2)^2 = 4$, $0^2 = 0$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$. Оскільки V=4 зустрічається два рази, то $P(V = 4) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$. Отож, закон розподілу випадкової величини

V:

v_j	0	4	9
p_j	0,2	0,5	0,3

в) Для зручності знаходження всіх можливих значень різниці Z=X–Y та їх ймовірностей складемо допоміжну таблицю, у кожній клітинці якої розмістимо зліва значення різниць, а справа – ймовірності цих значень, отримані множенням ймовірностей відповідних значень випадкових величин X та Y.

	y_j	-2		0		2		3	
	p_j	0,1		0,2		0,4		0,3	
X_i	P_i								
0	0,5	0-(-2) =2	0,5*0,1= 0,05	0-0 =0	0,5*0,2= 0,1	0-2 =-2	0,5*0,4= 0,2	0-3 =-3	0,5*0,3= 0,15
2	0,2	2-(-2) =4	0,2*0,1= 0,02	2-0 =2	0,2*0,2= 0,04	2-2 =0	0,2*0,4= 0,08	2-3 =-1	0,2*0,3= 0,06
5	0,3	5-(-2) =7	0,3*0,1= 0,03	5-0 =5	0,3*0,2= 0,06	5-2 =3	0,3*0,4= 0,12	5-3 =2	0,3*0,3= 0,09

Наприклад, якщо X = 5 (останній рядок таблиці), а Y = 3 (останній стовпчик таблиці), то випадкова величина Z = X – Y набуває значення $Z = 5 - 3 = 2$ із імовірністю $P(Z = 2) = P(X = 5) \cdot P(Y = 3) = 0,3 \cdot 0,3 = 0,09$

Числа 2 та 0,09 записують відповідно у ліву та праву частини клітини, яка знаходиться на перетині $X_i = 5$ та $Y_j = 3$. Аналогічно заповнюється вся таблиця.

Оскільки серед 12 можливих значень є однакові, то отримаємо такий розподіл випадкової величини (ймовірності однакових можливих значень додаємо) Z = X – Y:

z_j	-3	-2	-1	0	2	3	4	5	7
p_j	0,15	0,2	0,06	0,18	0,18	0,12	0,02	0,06	0,03

Переконаємося, що

$$\sum_{i=1}^{9} p_i = 0,15 + 0,2 + 0,06 + 0,18 + 0,18 + 0,12 + 0,02 + 0,06 + 0,03 = 1 \ \blacktriangle$$

Приклади розв'язування задач на випадкові величини

Приклад 1. Ймовірності того, що студент складе семестровий іспит із дисциплін *A* та *B* під час сесії, становлять відповідно 0,7 та 0,9. Скласти закон розподілу числа семестрових іспитів, які студент складе в сесію у вигляді ряду розподілу.

Розв'язування:

▼ Можливі значення випадкової величини X - числа семестрових іспитів, які студент складе в сесію – 0, 1, 2.

Нехай A_i — незалежні події, які полягають у тому, що студент складе і-й іспит ($i = 1,2$). Тоді ймовірності того, що студент складе в сесію 0, 1, 2 іспити, будуть відповідно рівні:

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=(1-0,7)(1-0,9)=0,3\cdot 0,1=0,03;$

$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}+\overline{A_1}\cdot A_2)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2)=$

$=0,7\cdot 0,1+0,3\cdot 0,9=0,34$

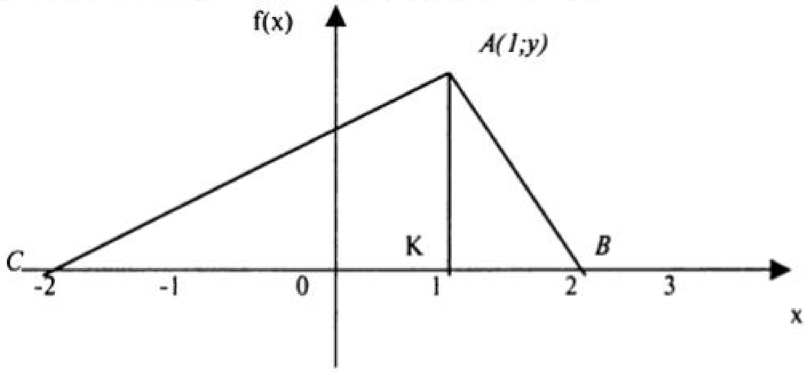
$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=0,7\cdot 0,9=0,63$

Отже, ряд розподілу випадкової величини X має вигляд:

X_i	0	1	2
P_i	0.03	0.34	0.63

▲

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X має криву розподілу ймовірностей у вигляді трикутника CAB:



Записати вирази для щільності ймовірностей f(x) та функції розподілу ймовірностей F(x). Обчислити $P(-2 < X < -1)$.

Розв'язування:

▼ Знайдемо спочатку координати точки А. Абсциса цієї точки x = 1. Ординату знайдемо за умовою нормування, за якою площа трикутника САВ повинна дорівнювати одиниці.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} CB \cdot AK = \frac{1}{2} 4 \cdot y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо рівняння прямої АС, яка проходить через точки $A(1;\frac{1}{2})$ та $C(-2;0)$:

$$\frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{x+2}{1+2} \Rightarrow y = \frac{1}{6}(x+2).$$

Отже, на проміжку $[-2;1]$ маємо $f(x) = \frac{1}{6}(x+2)$.

Знайдемо рівняння прямої АВ, що проходить через точки $A(1;\frac{1}{2})$ та $B(2;0)$:

$$\frac{y-0}{\frac{1}{2}-0} = \frac{x-2}{1-2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x-2).$$

Отже, на проміжку $[1;2]$ маємо $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)$.

Отримали:

$$f(x) = \begin{cases} 0; \text{якщо } \; x \le -2 \\ \frac{1}{6}(x+2); \text{якщо } \; -2 < x \le 1 \\ -\frac{1}{2}(x-2); \text{якщо } \; 1 < x \le 2 \\ 0; \text{якщо } \; x > 2 \end{cases}$$

Функцію розподілу будемо шукати окремо на кожному з проміжків задання щільності розподілу. Знайдемо функцію розподілу F(x) на проміжку$[-2;1]$:

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(x)dx=\int_{-2}^{x}\frac{1}{6}(x+2)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{x}=\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

На проміжку $[1;2]$:

$$F(x)=F(1)+\int_{1}^{x} f(x)dx=\frac{3}{4}-\int_{1}^{x}\frac{1}{2}(x-2)dx=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_{1}^{x}=-\frac{1}{4}x^2+x$$

Отже, функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0; \text{якщо } x\le -2\\ \frac{1}{12}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}; \text{якщо } -2< x\le 1\\ -\frac{1}{4}x^2+x; \text{якщо } 1< x\le 2\\ 1; \text{якщо } x>2\end{cases}$$

Обчислимо ймовірність події:

$$P(-2< X< -1)=F(-1)-F(-2)=\left(\frac{1}{12}(-1)^2+\frac{1}{3}(-1)+\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{12}. \blacktriangle$$

Приклад 3. Робітник обслуговує чотири верстати. Ймовірність того, що протягом години верстат не потребуватиме уваги робітника, для першого верстата становить 0,9, для другого – 0,8, для третього – 0,75 і для четвертого – 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа верстатів, які не потребуватимуть уваги робітника протягом години.

Розв'язування:

▼ *Перший спосіб.* Нехай $A_k\ (\overline{A_k}),\ (k=\overline{1,4})$ - події, які полягають у тому, що k-ий верстат не потребуватиме (потребуватиме) уваги робітника протягом години. Тоді за формулою множення ймовірностей незалежних подій:

$$P(X=0)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4})=(1-0,9)(1-0,8)(1-0,75)(1-0,7)=0,0015;$$

$$P(X=1)=P(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}+$$
$$+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4)=0,9\cdot 0,2\cdot$$
$$\cdot 0,25\cdot 0,3+0,1\cdot 0,8\cdot 0,25\cdot 0,3+0,1\cdot 0,2\cdot 0,75\cdot 0,3+0,1\cdot 0,2\cdot 0,25\cdot 0,7=0,0275;$$

$$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4+$$
$$+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot A_4+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot A_4)=0,1685;$$

$$P(X=2)=P(A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_4}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot A_4+$$
$$+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot A_4+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot A_4)=0,1685;$$

$$P(X=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\overline{A_4}+A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}\cdot A_4+$$
$$+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3\cdot A_4+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=0,4245;$$

$$P(X=4)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)=0,378.$$

Закон (ряд) розподілу випадкової величини X має вигляд:

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,348

Другий спосіб полягає в тому, що задані закони (ряди) розподілу випадкових величин $X_k(k=\overline{1,4})$, які виражають число верстатів, що не потребують уваги робітника протягом години (це число для кожного верстата рівне 1, коли цей верстат не потребує уваги робітника, і рівне 0, якщо – потребує):

X_1 :

X_i	0	1
p_{i1}	0,1	0,9

X_2 :

x_i	0	1
p_{i2}	0,2	0,8

X_3:

x_i	0	1
p_{i3}	0,25	0,75

X_4:

x_i	0	1
p_{i4}	0,3	0,7

Необхідно знайти закон розподілу суми цих випадкових величин, тобто $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Підсумовуючи послідовно

$$X_1 + X_2 = Z,\ \ X_1 + X_2 + X_3 = Z + X_3 = U,\ \ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = = U + X_4 = X,$$

отримаємо

$Z = X_1 + X_2$:

z_i	0	1	2
p_i	0,02	0,26	0,72

$U = Z + X_3$:

u_i	0	1	2	3
p_i	0,005	0,08	0,375	0,54

І, нарешті, розподіл $X = U + X_4$:

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,348

Третій спосіб. Розподіл X можна отримати чисто механічно, перемноживши біноми (двочлени):

$\varphi_4(z) = (0,1 + 0,9z)(0,2 + 0,8z)(0,25 + 0,75z) + (0,3 + 0,7z)$,

причому кожний із п'яти отриманих коефіцієнтів при $z^k (k = \overline{0,4})$ в функції $\varphi_4(z)$ буде виражати відповідні ймовірності $P(X = k)$. Дійсно, перетворивши функцію $\varphi_4(z)$, отримаємо:

$$\varphi_4(z) = 0,0015 + 0,0275z + 0,1685z^2 + 0,4245z^3 + 0,378z^4,$$

де коефіцієнти – це ймовірності значень випадкової величини X. ▲

Функція $\varphi_n(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_i+p_i\cdot z)$, розклад якої за степенями z дає як коефіцієнти ймовірності значень випадкової величини X, називається ***ймовірнісною твірною функцією***, про неї йтиметься в наступному змістовому модулі.

Приклад 4. Побудувати очікуваний розподіл результатів іспитів для 256 студентів, які абсолютно нічого не знають з дисципліни і випадково вгадують відповіді на чотири питання з чотирма можливими варіантами відповідей на кожне з них (тільки одна з чотирьох відповідей правильна).

Розв'язування:

▼ Вгадування кожним студентом відповідей на чотири питання можна інтерпретувати як $n = 4$ випробувань Бернуллі. При цьому, оскільки студенти нічого не знають, то для них рівноймовірні всі чотири відповіді на кожне питання, тобто ймовірність успіху (правильної відповіді на питання) рівна $p=1/4$. Тоді число X вгаданих одним студентом відповідей на чотири питання являє собою біноміальну випадкову величину $X\approx Bi\left(n=4; p=\frac{1}{4}\right)$ і

$P\{X=x\}=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}=C_4^x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$, x=0,1,2,3,4, а очікуваний розподіл результатів іспитів для 256 студентів, враховуючи їх незалежність один від одного, буде мати наступний вигляд:

Число правильних відповідей, X_i	0	1	2	3	4
Число студентів, $256\cdot P(X=x_i)$	81	108	54	12	1

$$\sum_{i=0}^{4} 256P\{X=x_i\}=256.\ ▲$$

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Основні числові характеристики

Функція розподілу ймовірностей повністю характеризує випадкову величину, проте вона часто є невідомою, а в багатьох випадках не потрібна повна інформація про випадкову величину. Тоді використовують числові характеристики випадкових величин, які несуть про них певну інформацію. Серед них особливо важливими є:

1) <u>Математичне сподівання</u>.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають числову характеристику, яка виражає середнє зважене значення випадкової величини (тим точніше, чим більшою є кількість спостережень).

$\bar{X} \approx M(X)$

Для дискретної випадкової величини математичним сподіванням називають суму добутків усіх її можливих значень на їх ймовірності.

Нехай дискретна випадкова величина X задана законом розподілу ймовірностей у вигляді ряду розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тоді математичне сподівання $M(X)$ визначається рівністю:

$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини є величина невипадкова (стала).

На числовій осі можливі значення випадкової величини X, розміщені зліва та справа від математичного сподівання. Тому його часто називають **центром розподілу**.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини рівне самій цій сталій величині:

$$M(C) = C.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

4. Математичне сподівання алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі математичних сподівань цих величин:

$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

Математичне сподівання неперервної випадкової величини вводиться таким чином. Нехай неперервна випадкова величина набуває значень з інтервалу (α, β) і задана щільністю (густиною) розподілу $f(x)$. Розіб'ємо інтервал на n частин: $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ і виберемо в кожній частині довільно точку X_i $(i = 1, 2, ..n)$. Складемо суму добутків можливих значень X_i на ймовірності потрапляння їх в інтервали Δx_i (добуток $f(x_i) \cdot \Delta x_i$ приблизно рівний ймовірності потрапляння X_i в інтервал Δx_i) $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x_i) \Delta x_i$.

Перейшовши до границі в останньому виразі, при наближенні до нуля найбільшого з інтервалів, отримаємо математичне сподівання неперервної випадкової величини

$$M(X) = \int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx.$$

Якщо неперервна випадкова величина задана на всій числовій осі, то:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Центрованою випадковою величиною $\dot{X}$ називається випадкова величина, математичне сподівання якої знаходиться в початку координат (в центрі числової осі), тобто $M(\dot{X}) = 0$. Операція центрування (перехід від нецентрованої величини X до центрованої $\dot{X}$) має вигляд $\dot{X} = X - M(X)$.

Іноді, якщо є графік функції розподілу $F(x)$, корисно мати на увазі *геометричну інтерпретацію математичного сподівання M(X)* випадкової величини X:

$M(X) = S_2 - S_1$,

де S_2, S_1 - площі фігур, які знаходяться відповідно між віссю ординат, прямою $F(x) = 1$ та кривою $y = F(x)$ на проміжку $(0; +\infty)$ та між кривою $y = F(x)$ і осями абсцис та ординат на проміжку $(-\infty; 0)$.

2) Дисперсія.

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки може бути таке, що математичні сподівання випадкових величин однакові, хоча можливі значення цих випадкових величин суттєво відрізняються. Одна з випадкових величин у такому випадку має більший розмах розсіювання щодо математичного сподівання. Тому математичне сподівання називають ще центром розсіювання. Для того, щоб оцінити, як саме розсіяні можливі значення випадкової величини навколо її математичного сподівання, використовують числову характеристику, яку називають *дисперсією.*

Нехай закон розподілу дискретної випадкової величини X задано у вигляді ряду розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Розглянемо відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $X - M(X)$. Це відхилення має такий ряд розподілу:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	...	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	...	p_n

Математичне сподівання (середнє значення) відхилення дорівнює нулю $M(X - M(X)) = M(X) - M(M(X)) = M(X) - M(X) = 0$, враховуючи властивості 1 та 4 математичного сподівання та той факт, що математичне сподівання дискретної випадковою величиною є стала величина.

Оскільки математичне сподівання відхилення дорівнює нулю, то для визначення ступеня розсіювання випадкової величини навколо її математичного сподівання розглядають не самі відхилення, а середнє значення квадрата відхилення.

Дисперсією дискретної випадкової величини називають марематичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Властивості дисперсії

1) *Дисперсія сталої величини C дорівнює 0:*

$$D(C) = 0.$$

2) *Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, попередньо піднісши його до квадрата:*

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3) *Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4) *Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Для неперервної випадкової величини *дисперсію* знаходять за однією з формул:

$$D(X) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx, & (1) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2. & (2) \end{cases}$$

3) <u>Середнє квадратичне відхилення</u>.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ характеризує розсіювання значень випадкової величини X щодо математичного сподівання. Його розмірність співпадає з розмірністю випадкової величини X. На графіку щільності розподілу $f(x)$, $\sigma(X)$ зображується відстанню від $M(X)$ в обидва боки.

Визначається середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Середнє квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно незалежних випадкових величин рівне:

$$\sigma(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\sqrt{\sigma^2(x_1)+\sigma^2(x_2)+\ldots+\sigma^2(x_n)}.$$

Приклад 1. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, якщо маємо її ряд розподілу:

X_i	0,1	2	10	20
P_i	0,4	0,2	0,15	0,25

Розв'язування:

▼ *Перший спосіб.* Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X:

$M(X) = 0{,}1\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}2 + 10\cdot 0{,}15 + 20\cdot 0{,}25 = 0{,}04 + 0{,}4 + 1{,}5 + 5 = 6{,}94.$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X^2:

$M(X^2) = 0{,}1^2\cdot 0{,}4 + 2^2\cdot 0{,}2 + 10^2\cdot 0{,}15 + 20^2\cdot 0{,}25 = 0{,}004 + 0{,}8 + 15 + 100 =$
$=115{,}804.$

Знайдемо дисперсію:

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 115{,}804 - (6{,}94)^2 = 67{,}6404.$

Дисперсію ми могли знайти й за іншою формулою:

$$D(X)=M((x-M(X))^2)=(0{,}1-6{,}94)^2\cdot 0{,}4+(2-6{,}94)^2\cdot 0.2+$$
$$+(10-6{,}94)^2\cdot 0{,}15+(20-6{,}94)^2\cdot 0{,}25=18{,}71424+4{,}88072+1{,}40454+$$
$$+42{,}6409=67{,}6404$$

(результат такий самий).

Середнє квадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{67{,}6404}\approx 8{,}224.$$ ▲

4) <u>Мода</u>.

Модою $Mo(X)$ випадкової величини X називають її найбільш ймовірне значення (для якого ймовірність p_i або щільність ймовірності $f(x)$ досягає максимуму).

Якщо ймовірність або щільність ймовірності досягає максимуму не в одній, а в декількох точках, розподіл називають *полімодальним*. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

<u>5) Медіана</u>.

Медіаною $Me(X)$ неперервної випадкової величини X називають таке її значення, для якого виконується рівність ймовірностей подій:

$$P(-\infty < X < Me(X)) = P(Me(X) < X < \infty) \Rightarrow F(Me) - F(-\infty) = F(\infty) -$$

$$- F(Me) \Rightarrow F(Me) + F(Me) = F(-\infty) + F(\infty) = 1 \Rightarrow F(Me) = 0{,}5$$

Якщо провести пряму $X = Me(X)$ на графіку щільності розподілу, то вона поділить площу фігури, яка обмежена функцією f(x) на дві рівні частини.

Приклад 2. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ 0{,}5\sin x, 0 < x \le \pi, \\ 0, x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $M(X), D(X), \sigma(X), Mo(X), Me(X)$.

Розв'язування:

▼ Враховуючи, що щільність ймовірностей симетрична відносно середини області значень випадкової величини X, можна передбачити, що $M(X) = \pi/2$. Значення $M(X)$ можна знайти за визначенням математичного сподівання: $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Для випадкової величини X, розподіленої в інтервалі $[0, \pi]$, знаходимо:

$$M(X) = \int\limits_0^{\pi} x \cdot f(x)dx = \int\limits_0^{\pi} x \cdot 0{,}5 \ \sin x \ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} x \ \sin x \ dx = -0{,}5 \cdot x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + 0{,}5 \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi$$

Для визначення дисперсії скористаємося формулою (2) для неперервної випадкової величини X в інтервалі $(0,\pi)$, підставивши значення $M(X)=\frac{\pi}{2}$, маємо:

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x\ dx-(\frac{\pi}{2})^2=\begin{vmatrix}u=x^2, du=2xdx\\ \sin xdx=dv\to v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}x\cos xdx)-\frac{\pi^2}{4}=\begin{vmatrix}u=x, du=dx\\ \cos xdx=dv\to v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx))-\frac{\pi^2}{4}=\frac{1}{2}(-x^2\cos x+2x\sin x+$$

$$+2\cos x)\Big|_0^{\pi}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2-4}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{\pi^2-8}{4}\approx 0,467$$

Середнє квадратичне відхилення для нашої випадкової величини X:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}=\sqrt{0,467}\approx 0,683\,.$$

Оскільки $f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=0,5$ є максимальним значенням, то $M(X)=\frac{\pi}{2}$.

Знаходимо $F(x)=\int_0^{x}0,5\sin xdx=-0,5\cos x\Big|_0^{x}=\frac{1-\cos x}{2}$. Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \frac{1-\cos x}{2}, 0<x\le\pi;\\ 1, x>\pi\end{cases}$$

$F(Me)=\frac{1-\cos Me}{2}=\frac{1}{2}\to\cos Me=0\to Me(X)=\frac{\pi}{2}$. ▲

6) Початкові та центральні моменти.

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку (ν_k) випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$\nu_k = M(X^k)$ $(k = 1,2,3,...)$.

$\nu_1 = M(X); \nu_2 = M(X^2)$ і т.п.

Для дискретної випадкової величин X:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i;$$

Для неперервної випадкової величини X:

$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx$. Якщо $X \in [a;b]$, то $\nu_k = \int\limits_a^b x^k \cdot f(x)dx$.

Центральним моментом k-го порядку (α_k) випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M(X))^k$:

$\alpha_k = M(X - M(X))^k$ $(k = 1,2,3,...)$

$\alpha_1 = M(X - M(X)) = 0; \alpha_2 = M(X - M(X))^2 = D(X); \alpha_3 = M(X - M(X))^3;$

$\alpha_4 = M(X - M(X))^4$

Для дискретної випадкової величин X:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k \cdot p_i;$$

Для неперервної випадкової величини X:

$\alpha_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$. Якщо $X \in [a;b]$, то $\alpha_k = \int\limits_a^b (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$.

7) Асиметрія та ексцес.

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\alpha_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно M(X). Оскільки α_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину – *коефіцієнт асиметрії*:

$$As = \frac{\alpha_3}{\sigma^3}.$$

(Якщо $As > 0$, то графік щільності розподілу має правосторонню асиметрію, а коли $As < 0$ – лівосторонню. Для нормальної кривої $As=0$. Див. далі „Нормальний розподіл".)

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність або гостровершинність щільності ймовірності f(x). *Ексцес* обчислюється за формулою:

$$Ек = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3.$$

(Для нормального закону розподілу (див. далі) $\frac{\alpha_4}{\sigma^4} = 3$, $Ек = 0$. Тому, коли $Ек > 0$, то графік щільності розподілу має гострішу вершину порівняно з нормальною кривою, а якщо $Ек < 0$ – пологішу).

Приклад 3. Задано щільність ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ \frac{3}{4}x(2-x), 0 < x \le 2; \\ 0, x > 2 \end{cases}$$

Обчислити $As(X), Ek(X)$.

Розв'язування:

▼

$$M(X)=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x\frac{3}{4}x(2-x)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(2x^2-x^3)dx=\frac{3}{4}(\frac{2}{3}x^3-$$

$$-\frac{1}{4}x^4)\Big|_0^2=\frac{3}{4}(\frac{16}{3}-4)=1$$

$$\alpha_3=\int_0^2(x-M(X))^3 f(x)dx=\int_0^2(x-1)^3\frac{3}{4}(2x-x^2)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(x^3-3x^2+3x-1)(2x-x^2)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(5x^4-x^5-9x^3+7x^2-2x)dx=$$

$$=\frac{3}{4}(x^5-\frac{1}{6}x^6-\frac{9}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3-x^2)\Big|_0^2=0$$

Оскільки $\alpha_3=0$, то і $As(X)=0$. Отже, можливі значення випадкової величини X симетрично розподілені відносно $M(X)=1$. Для обчислення $Ek(X)$ необхідно знайти $\alpha_4;\sigma$.

$$\alpha_4=\int_0^2(x-M(X))^4 f(x)dx=\int_0^2(x-1)^4\frac{3}{4}(2x-x^2)dx=$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^2(x^4-4x^3+6x^2-4x+1)(2x-x^2)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(6x^5-x^6-14x^4+16x^3-$$

$$=9x^2+2x)dx=\frac{3}{4}(x^6-\frac{1}{7}x^7+\frac{14}{5}x^5+4x^4-3x^3+x^2)\Big|_0^2=\frac{3}{35}$$

$$M(X^2)=\int_0^2 x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2\frac{3}{4}(2x-x^2)dx=\frac{3}{4}\int_0^2(2x^3-x^4)dx=\frac{3}{4}(\frac{1}{2}x^4-$$

$$-\frac{1}{5}x^5)\Big|_0^2=\frac{3}{4}(8-\frac{32}{5})=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}=\frac{6}{5};$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=\frac{6}{5}-1^2=\frac{1}{5};\sigma(X)=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$Ek(X)=\dfrac{\alpha_4}{\sigma^4}-3=\dfrac{3/35}{1/25}-3=-\dfrac{6}{7}$. (Маємо туповершинний розподіл). ▲

*8) **Квантиль.***

Квантиль χ_p випадкової величини X – це таке її значення, для якого виконується умова $P(X < \chi_p) = F(\chi_p) = p$. Очевидно, що медіана – це квантиль $\chi_{0.5}$.

2. Основні закони розподілів дискретних випадкових величин

1) *Біноміальний розподіл*

Розглянемо послідовність n ідентичних повторних випробувань, що задовольняють таким умовам:

1) кожне випробування має два можливих наслідки (відбулася або не відбулася деяка подія А), які називають успіх та неуспіх;

2) ймовірність успіху p залишається сталою від випробування до випробування. Ймовірність неуспіху – q;

3) всі n випробувань незалежні. Це означає, що ймовірність появи події у будь-якому з n повторних випробувань не залежить від результатів інших випробувань.

Ймовірність того, що в n незалежних повторних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події А рівна p $(0 < p < 1)$, подія А відбудеться рівно m разів (у будь-якій послідовності), рівна за формулою Бернуллі $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, де $q = 1 - p$.

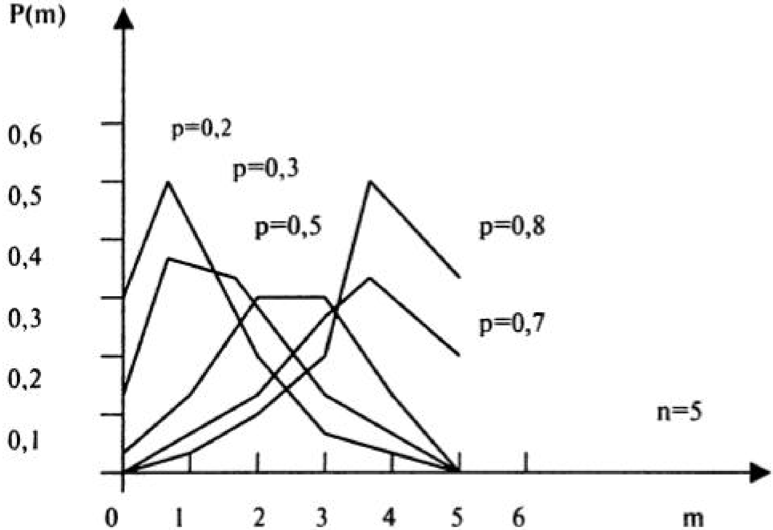
Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події рівна p, а ймовірності можливих значень X = 0, 1, 2, ..., m, ..., n обчислюються за формулою Бернуллі.

Кількість успіхів X = m	0	1	...	m	...	n
Ймовірність $P_n(m)$	$C_n^0 p^0 q^n = P_n(0)$	$C_n^1 p^1 q^{n-1} = P_n(1)$	...	$C_n^m p^m q^{n-m} = P_n(m)$	...	$C_n^n p^n q^0 = P_n(n)$

Основну властивість ряду розподілу виконано $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, тому що $\sum_{i=1}^{n} p_i$ є сумою всіх членів розкладання бінома Ньютона:

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$$

(звідси і назва закону – біноміальний).



Для випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом, маємо:

$M(X) = n \cdot p$; $D(X) = n \cdot p \cdot q$.

При великій кількості випробувань біноміальний розподіл наближається до нормального (див. далі тему „Нормальний закон розподілу").

Біноміальний закон розподілу широко використовується в теорії та практиці статистичного контролю якості продукції, під час опису функціонування систем масового обслуговування, в теорії стрільби та в інших сферах. Подамо багатокутник (полігон) розподілу випадкової величини X, що має біноміальний розподіл з різними значеннями параметрів.

Випадкова величина X – число покупців m серед загального числа n відвідувачів магазину має біноміальний закон розподілу:

$$P(X=m)=C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

А якщо Y – число відвідувачів достатнє для того, щоб m з них залишилися покупцями, то ймовірність того, що n-ий відвідувач виявиться m-им покупцем, становить:

$$P(Y=m)=C_{n-1}^{m-1} \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Говорять, що випадкова величина Y розподілена за від'ємним біноміальним законом розподілу або за розподілом Паскаля.

Приклад 4. Відомо, що в місті Доброград 20% жителів віддають перевагу власному автотранспорту для того щоб дістатися до роботи. Випадковим чином вибрали 4 чоловіки.

1) Складіть ряд розподілу числа людей у вибірці, які дістаються до роботи на власному автотранспорті, і побудуйте його графік.

2) Знайдіть числові характеристики цього розподілу.

3) Напишіть функцію розподілу числа людей у вибірці, які переважно дістаються до роботи на власному автотранспорті.

4) Чому рівна ймовірність того, що серед чотирьох випадковим чином відібраних чоловік: а) не буде жодної людини, яка б віддавала перевагу власному автотранспорту, щоб потрапити на роботу; б) виявиться хоча б одна людина, яка віддає перевагу власному автотранспорту для того, щоб потрапити на роботу; в) буде не більше двох таких людей, які віддають перевагу власному автотранспорту, щоб потрапити на роботу?

Розв'язування:

▼ Нехай випадкова величина X – число людей у вибірці, які їздять на роботу власним автотранспортом. Можливі значення цієї випадкової величини: 0; 1; 2; 3; 4.

Ймовірність того, що кожний із відібраних людей, щоб дістатись до роботи, використовує власний автотранспорт, стала і рівна 0,2 (p=0,2). Ймовірність протилежної події, тобто того, що кожний із відібраних людей надає перевагу не особистому автотранспорту, щоб дістатися до роботи, а дістається якось інакше, також стала і складає 0,8 ($q = 1 - 0,2 = 0,8$).

Усі 4 випробування незалежні, тобто ймовірність того, що кожний із відібраних людей надає перевагу власному автотранспорту, щоб дістатися на роботу, не залежить від того, яким способом надає перевагу дістатися до роботи будь-яка інша людина з числа відібраних випадковим чином.

Очевидно, що випадкова величина X підкоряється біноміальному закону розподілу ймовірностей з параметрами $n = 4, p = 0,2$.

Отже, за умовою: $n = 4$, $p = 0,2$, $q = 0,8$, $X = m$.

1) Щоб побудувати ряд розподілу, підрахуємо ймовірності можливих значень випадкової величини X за формулою Бернуллі:

$$P(X = 0) = C_4^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{4-0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} 0,2^0 \cdot 0,8^4 = 0,4096$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{4-1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} 0,2^1 \cdot 0,8^3 = 0,4096$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{4-2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} 0,2^2 \cdot 0,8^2 = 0,1536$$

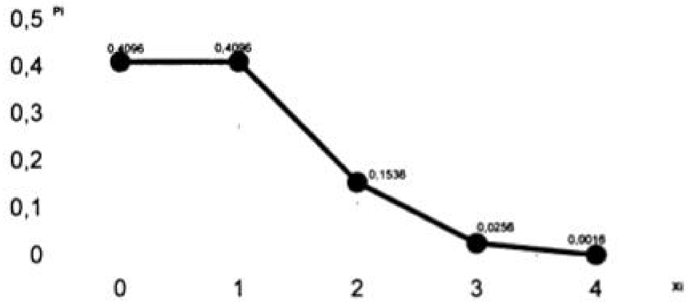
$$P(X = 3) = C_4^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} 0,2^3 \cdot 0,8^1 = 0,0256$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{4-4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} 0,2^4 \cdot 0,8^0 = 0,0016$$

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

Перевірка: 0,4096+0,4096+0,1536+0,0256+0,0016 = 1.

Замість ряду розподілу дискретна випадкова величина може бути задана графічно полігоном розподілу:



2) Знайдемо основні числові характеристики розподілу даної випадкової величини. Будемо використовувати не загальні формули, а більш простіші, для біноміального розподілу:

$M(X) = n \cdot p = 4 \cdot 0,2 = 0,8$ (чол.),

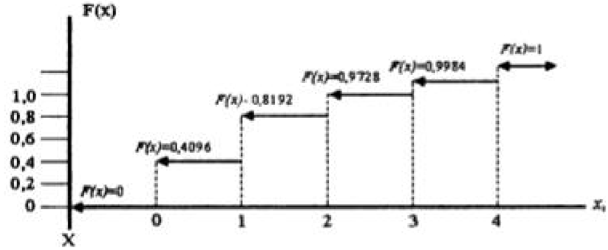
$D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,64$,

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,64} = 0,8$ (чол.).

3) Запишемо функцію розподілу дискретної випадкової величини X:

$$F(X) = \begin{cases} 0; \text{ при } x \le 0 \\ 0,4096; \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0,8192; \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0,9728; \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 0,9984; \text{ при } 3 < x \le 4 \\ 1; \text{ при } x > 4 \end{cases}$$

Графік функції розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини має ступінчастий вигляд. Стрибки рівні ймовірностям, з якими випадкова величина набуває можливих значень.



4а) Знайдемо ймовірність того, що серед чотирьох випадково відібраних людей не буде жодної людини, яка б надавала перевагу особистому автотранспорту, щоб дістатися до роботи: $P(X=0)=0{,}4096$.

б) Знайдемо ймовірність того, що серед чотирьох випадково відібраних людей буде хоча б одна людина, яка б надавала перевагу особистому автотранспорту, щоб дістатися до роботи. Тобто, виключається тільки випадок, коли таких людей не буде взагалі серед відібраних. Доцільно перейти до протилежної події: $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}4096=0{,}5904$.

в) Знайдемо ймовірність того, що серед чотирьох випадково відібраних людей, буде не більше двох таких, що надають перевагу особистому автотранспорту, щоб дістатися до роботи:

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}4096+0{,}4096+$$
$$+0{,}1536=0{,}9728$$ ▲

2) ***<u>Розподіл Пуассона</u>***

Якщо кількість випробувань велика, а ймовірність появи події p у кожному випробуванні дуже мала, то замість формули Бернуллі використовують асимптотичну формулу Пуассона:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

де m – число появ деякої події A в n незалежних випробуваннях; $\lambda=n\cdot p$ (середня кількість появи події в n випробуваннях).

Надаючи m цілих невід'ємних значень $m = 0, 1, 2, ..., n$, можна записати за формулою Пуассона ряд розподілу ймовірностей, який називають **законом розподілу Пуассона**

m	0	1	2	...	m	...	n
$P_n(m)$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

Потоком подій називається послідовність подій, які відбуваються у відповідні моменти часу. Прикладом може бути потік викликів швидкої допомоги, потік викликів на телефонну станцію, потік відмов у роботі певної системи. Потік подій називають **стаціонарним,** якщо його ймовірнісні характеристики не залежать від часу. Потік подій називають **ординарним**, якщо за малий проміжок часу ймовірність того, що відбудуться дві і більше події, мала порівняно з ймовірністю того, що за цей час проміжок часу відбудеться одна подія. Потік подій називають **потоком з відсутньою післядією**, якщо ймовірності подій, які відбудуться в майбутньому, не залежать від того, як вони відбувалися в минулому. Потік подій називають **найпростішим**, якщо для нього виконуються такі умови: стаціонарність, відсутність післядії та ординарність. Ймовірність того, що за час t відбудеться m випадкових подій, які утворюють найпростіший потік за формулою:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t},$$

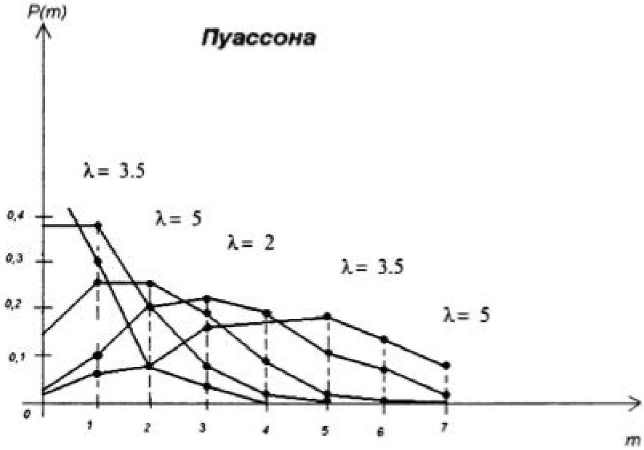
де λ – інтенсивність найпростішого потоку, тобто середнє число подій, що відбудуться за одиницю часу.

Розподіл Пуассона часто використовується, коли ми маємо справу з кількістю подій, які утворюють найпростіший потік, наприклад: кількість машин, що прибули на заправку протягом деякого часу; кількість дефектів на новому відрізку шосе довжиною 10 км; кількість зупинок верстата за тиждень; кількість дорожніх пригод

Якщо розподіл Пуассона застосовують замість біноміального, то n повинне мати порядок не менше кількох десятків, краще декількох сот, а $n \cdot p \leq 10$.

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, співпадають і рівні параметру λ, який визначає цей закон, тобто

$M(X) = D(X) = \lambda$.



Приклад 5. Середня кількість інкасаторів, що прибувають зранку на автомобілі в банк упродовж 15 хвилин, рівна 2. Інкасатори приїздять випадково і незалежно один від одного.

1) Складіть ряд розподілу числа інкасаторів, які приїжджають зранку на автомобілі в банк упродовж 15 хвилин.

2)Знайдіть числові характеристики цього розподілу.

3) Напишіть функцію розподілу числа інкасаторів, які приїздять зранку на автомобілі в банк упродовж 15 хвилин.

4) Визначте, чому рівна ймовірність того, що впродовж 15 хвилин в банк приїдуть на автомобілі хоча б два інкасатори.

5) Визначте ймовірність того, що кількість інкасаторів, які приїхали впродовж 15 хвилин у банк, виявиться меншою за 3.

Розв'язування:

▼ Нехай випадкова величина X – число інкасаторів, які приїжджають уранці на автомобілі в банк протягом 15 хвилин. Перерахуємо всі можливі значення випадкової величини X: 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., n. Це дискретна випадкова величина, тому що її можливі значення відрізняються один від одного не менш ніж на 1, і множина її можливих значень є зліченною.

За умовою, прибуття інкасаторів відбувається випадково і незалежно один від одного. Отож, маємо справу з незалежними випробуваннями.

Якщо ми припустимо, що ймовірність прибуття інкасаторів на автомобілі однакова у будь-які два однакові за протяжністю періоди часу і що прибуття або неприбуття автомобіля у будь-який період часу, то послідовність прибуття інкасаторів у банк можна описати розподілом Пуассона.

Отже, випадкова величина X – число інкасаторів, які прибувають уранці на автомобілі протягом 15 хвилин, підкоряється розподілу Пуассона. За умовою: $\lambda = n \cdot p = 2; X = m$.

1) Складемо ряд розподілу.

$$P(X=0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=0{,}1353; \quad P(X=1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}=0{,}2707;$$

$$P(X=2)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}=0{,}2707; \quad P(X=3)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}=0{,}1804;$$

$$P(X=4)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}=0{,}0902; \quad P(X=5)=\frac{2^5}{5!}e^{-2}=0{,}0361;$$

$$P(X=6)=\frac{2^6}{6!}e^{-2}=0{,}0120; \quad P(X=7)=\frac{2^7}{7!}e^{-2}=0{,}0034;$$

$$P(X=8)=\frac{2^8}{8!}e^{-2}=0{,}0009; \quad P(X=9)=\frac{2^9}{9!}e^{-2}=0{,}0002$$

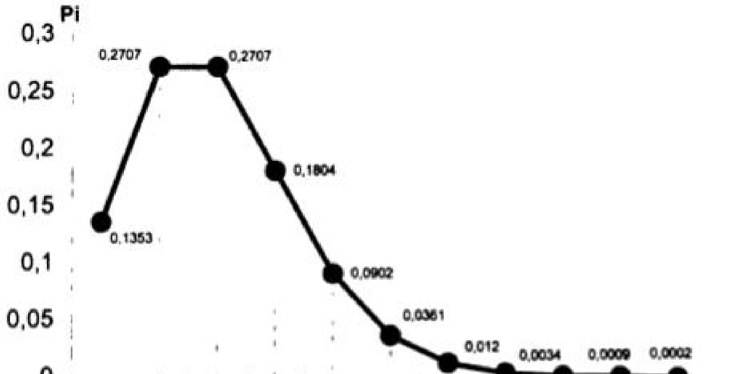
Якщо $X \geq 10$, то ймовірності цих можливих значень практично рівна 0.

P_i	X_i
0	**0,1353**
1	**0,2707**
2	**0,2707**
3	**0,1804**
4	**0,0902**
5	**0,0361**
6	**0,0120**
7	**0,0034**
8	**0,0009**
9	**0,0002**
10	**0,0000**

Перевірка:

$0,1353+0,2707+0,2707+0,1804+0,0902+0,0361+0,0120+0,0034+$
$+0,0009+0,0002=1$

Графік отриманого ряду розподілу дискретної випадкової величини X – полігон розподілу ймовірностей:



2) Знайдемо основні числові характеристики отриманого розподілу випадкової величини X.

Будемо користуватися не загальними формулами, а простішими формулами для розподілу Пуассона:

$M(X) = np = \lambda = 2$ (інкасатори),

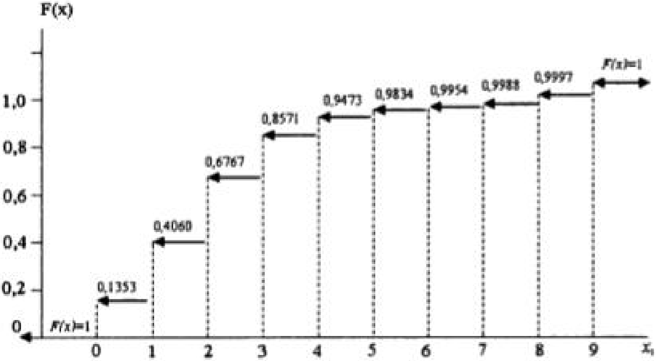
$D(X) = \lambda = 2$,

$\sigma(X) = \sqrt{2} = 1{,}4142$ (інкасатори).

3) Задамо тепер дискретну випадкову величину у вигляді функції розподілу:

$$F(X) = \begin{cases} 0; \text{ при } x \le 0 \\ 0{,}1353; \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 0{,}4060; \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}6767; \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 0{,}8571; \text{ при } 3 < x \le 4 \\ 0{,}9473; \text{ при } 4 < x \le 5 \\ 0.9834; \text{ при } 5 < x \le 6 \\ 0{,}9954; \text{ при } 6 < x \le 7 \\ 0{,}9988; \text{ при } 7 < x \le 8 \\ 0{,}9997; \text{ при } 8 < x \le 9 \\ 1; \text{при } x > 9 \end{cases}$$

Графік функції розподілу має вигляд:



4) Знайдена ймовірність того, що протягом 15 хвилин у банк прибудуть хоча б 2 інкасатори, виключає випадки, коли в банк приїде 1 інкасатор або не приїде жодний. Тому краще перейти до протилежної події:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X=0) + P(X=1)) = 1 - (0{,}1353 + 0{,}2707) = 0{,}594$$

5) Знайдемо ймовірність того, що протягом 15 хвилин число прибулих інкасаторів виявиться меншим за 3 – це „або 0, або 1, або 2". За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}6767 \ . \blacktriangle$$

3) Геометричний розподіл

Дискретна випадкова величина $X = m$ має геометричний розподіл, якщо вона набуває значень 1, 2, ..., m ... (нескінченна але зліченна множина значень) із ймовірностями $P(X=m) = p \cdot q^{m-1}$, де $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = 1, 2, ...$

Ряд геометрично розподіленої випадкової величини має вигляд:

X_i	1	2	3	...	m	...
p_i	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Як бачимо, ймовірності p_i утворюють геометричну прогресію з першим членом p та знаменником q (звідси назва – „геометричний розподіл").

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + ... + pq^{m-1} + ... = p(1 + q + ... + q^{m-1} + ...) = p\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Випадкова величина $X = m$, яка має геометричний розподіл, є числом m випробувань, проведених за схемою Бернуллі, з імовірністю p появи події у кожному випробуванні до першого позитивного наслідку. (Наприклад, кількість викликів радистом респондента, аж поки виклик не буде прийнятий і т.і.).

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини x, розподіленої за геометричним розподілом, визначаються за формулами:

$$M(X) = \frac{1}{p}; \ D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Приклад 6. Проводиться перевірка великої партії деталей до виявлення нестандартної (без обмеження числа перевірених деталей). Складіть закон розподілу числа перевірених деталей. Знайдіть його математичне сподівання та дисперсію, якщо відомо, що ймовірність браку для кожної деталі рівна 0,1.

Розв'язування:

▼ Випадкова величина X – число перевірених деталей до виявлення бракованої – має геометричний розподіл з параметром p=0,1 ($q = 1 - 0.1 = 0.9$). Тому ряд розподілу має вигляд $X = m$:

x_i	1	2	3	4	…	m	…
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	…	$0,9^m \cdot 0,1$	…

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10, \ D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,9}{0,1^2} = 90 \ ▲$$

4) *<u>Гіпергеометричний розподіл</u>*

Нехай маємо множину N елементів, з яких M елементів володіють ознакою A. Вилучається випадково, без повернення n елементів. Потрібно знайти ймовірність того, що з них m елементів володіють ознакою А. Шукана ймовірність, яка залежить від натуральних чисел N, M, n, m, визначається за формулою (за класичним визначенням ймовірності події):

$$P(N;m)=\frac{C_n^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Отриманий за останньою формулою ряд розподілу називається **гіпергеометричним рядом розподілу**.

M	0	1	2	...	n
P(X= m)	$\frac{C_M^0\cdot C_{N-M}^n}{C_N^n}$	$\frac{C_M^0\cdot C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^0\cdot C_{N-M}^{n-2}}{C_N^n}$	...	$\frac{C_M^0\cdot C_{N-M}^0}{C_N^n}$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X=m, розподіленої за гіпергеометричним розподілом, визначаються за формулами:

$$M(m)=n\cdot\frac{M}{N};$$

$$D(m)=n\cdot\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right).$$

Гіпергеометричний розполіл широко використовується у практиці статистичного приймального контролю якості промислової продукції, в задачах, пов'язаних із організацією вибіркового обстеження, та інших галузях.

Приклад 7. З 20 лотерейних білетів виграшними є 4. Навмання вилучають 4 білети.

1) Складіть ряд розподілу числа виграшних білетів серед відібраних.

2) Знайдіть числові характеристики цього розподілу.

3) Напишіть функцію розподілу числа виграшних білетів серед відібраних.

4) Визначте ймовірність того, що серед відібраних чотирьох білетів виявиться: а) не менше трьох виграшних білетів; б) не більше одного виграшного білета.

Розв'язування:

▼ Нехай випадкова величина X – число виграшних білетів серед відібраних. Це дискретна випадкова величина, тому що її можливі значення відрізняються одне від одного не менше, ніж на 1, а множина всіх можливих значень – скінченна: 0; 1; 2; 3; 4. Очевидно, що відбирання лотерейних білетів – безповторний, а тому випробування – залежні. Випадкова величина X підкоряється гіпергеометричному закону розподілу.

1) Складемо ряд розподілу. Обчислимо ймовірності того, що випадкова величина набуде кожного зі своїх можливих значень, а результати запишемо в таблицю. За умовою задачі $N = 20$; $M=4$; $n=4$; $m=0; 1; 2; 3; 4$.

$$P_4(0)= \frac{C_4^0 \cdot C_{16}^4}{C_{20}^4}= \frac{1 \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 0,37564.$$

$$P_4(1)= \frac{C_4^1 \cdot C_{16}^3}{C_{20}^4}= \frac{4 \cdot \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 0,46233.$$

$$P_4(2)= \frac{C_4^2 \cdot C_{16}^2}{C_{20}^4}= \frac{\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 0,14861.$$

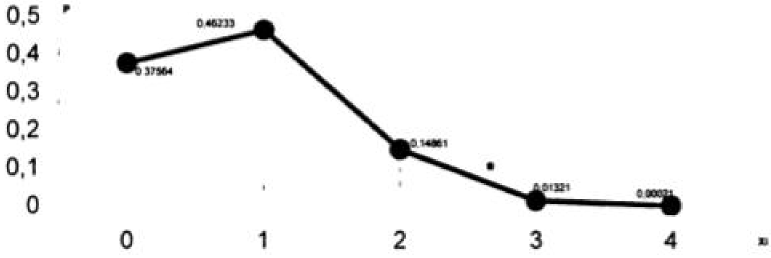
$$P_4(3)= \frac{C_4^3 \cdot C_{16}^1}{C_{20}^4}= \frac{4 \cdot 16}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 0,01321.$$

$$P_4(4)= \frac{C_4^4 \cdot C_{16}^0}{C_{20}^4}= \frac{1 \cdot 1}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = 0,00021.$$

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,37564	0,46233	0,14861	0,01321	0,00021

Зробимо перевірку: 0,37564+0,46233+0,14861+0,01321+0,00021 = 1

Графік отриманого розподілу ймовірностей – полігон розподілу ймовірностей:



2. Знайдемо основні числові характеристики розподілу даної випадкової величини. Скористаємось не загальними формулами, а більш простими для гіпергеометричного розподілу:

$$M(X) = n \cdot \frac{M}{N} = 4 \cdot \frac{4}{20} = 0,8 \text{ (білета)}$$

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = 4 \cdot \frac{4}{20} \cdot \left(1 - \frac{4}{20}\right) \cdot \left(1 - \frac{4-1}{20-1}\right) =$$

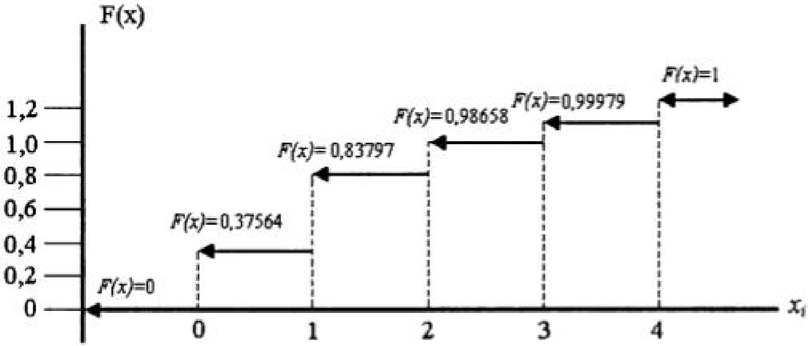
$$= \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{20} \cdot \frac{16}{19} = \frac{256}{475} = 0,53895$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,53895} = 0,73413 \text{ (білета)}.$$

2) Задамо дискретну випадкову величину у вигляді функції розподілу:

$$F(X)=\begin{cases} 0; & \text{при} \quad x \le 0 \\ 0,37564; & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \\ 0,83797; & \text{при} \quad 1 < x \le 2 \\ 0,98658; & \text{при} \quad 2 < x \le 3 \\ 0,99979; & \text{при} \quad 3 < x \le 4 \\ 1; & \text{при} \quad x > 4 \end{cases}$$

Графік функції розподілу має вигляд:



4а) Знайдемо ймовірність того, що серед чотирьох відібраних білетів виграшних виявиться не менше 3, тобто „або 3, або 4". Скористаємось теоремою додавання ймовірностей несумісних подій:
$P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,01321 + 0,00021 = 0,01342$

4б) Знайдемо ймовірність того, що серед чотирьох відібраних білетів виграшних не більше 1, тобто „або 0, або 1":

$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,37564 + 0,46233 = 0,83797$ ▲

5) **<u>Індикатор випадкової події A (розподіл Бернуллі).</u>**

Індикатор випадкової події A – це дискретна випадкова величина X, яка рівна 1, якщо подія A відбулася і 0, якщо відбулась подія $\overline{A}$:

$$X = \begin{cases} 1, A \\ 0, \overline{A} \end{cases}$$

Ряд розподілу ймовірностей індикатора випадкової події:

x_i	0	1
p_i	q	p

де p – ймовірність події A;

$q = 1 - p$ — ймовірність події $\overline{A}$.

Числові характеристики індикатора випадкової події: $M(X) = p; D(X) = q \cdot p$.

3. Ймовірнісні твірні функції

Для дослідження законів розподілу дискретних випадкових величин використовують ймовірнісну твірну функцію.

Ймовірнісною твірною функцією називають збіжний степеневий ряд виду:

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k = p_0 + xp_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + ... + x^m p_m + ...$$

Тут $p_k = P(X = k)$, тобто це ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення $k = 0,1,2,3,...$

Основні властивості:

1. $\varphi(x)$ визначена в кожній точці інтервалу $[-1;1]$.

2. При X=1 маємо: $\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, оскільки це є умовою нормування для дискретної випадкової величини.

3. Із визначення випливає: $P_k = \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(0)$,

де $\varphi^{(k)}(0)$ — k-та похідна від $\varphi_n(x)$, при X=0.

Отже, знаючи аналітичний вираз для $\varphi_n(x)$, можемо знайти ймовірність будь-якого можливого значення X=k.

4. $\varphi'(x) = (\sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k)' = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} p_k$. При x=1 дістанемо:

$$\varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = M(X) \Rightarrow M(X) = \varphi'(1).$$

5. $$\varphi''(X) = (\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} p_k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} kp_k \Rightarrow \varphi''(1) =$$

$$= M(X^2) - \varphi'(1) \Rightarrow M(X^2) = \varphi''(1) + \varphi'(1).$$

Тоді $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \varphi''(1) + \varphi'(1) - (\varphi'(1))^2$.

4. Функції одного випадкового аргумента

Нехай з деякою випадковою величиною X відбувається деяке детерміноване перетворення φ, в результаті якого отримали величину Y, тобто $Y = \varphi(X)$. Очевидно, що величина Y є випадковою, і потрібно знайти її закон розподілу або числові характеристики за відомим законом розподілу величини X та виглядом перетворення φ.

Якщо X – дискретна випадкова величина з відомим законом розподілу ймовірностей, а величина Y пов'язана з нею функціональною залежністю $Y = \varphi(X)$, то закон розподілу випадкової величини Y має вигляд:

$Y = f(X)$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	...	$y_n = f(x_n)$
p_y	p_1	p_2	...	p_n

Тут $p_i = P(X = x_i)$. Якщо $y_i = f(x_i) = f(x_j)$, то один раз записують y_i, а ймовірності додають $p_i + p_j$. Побудову законів розподілів деяких дискретних випадкових величин $(kX, X^m, X+Y, X-Y, X\cdot Y)$

ми розглядали раніше (див. „Математичні операції з випадковими величинами").

Якщо X – неперервна випадкова величина з відомою щільністю ймовірностей $f(x)$, то алгоритм знаходження закону розподілу $Y=\varphi(X)$ залежить від виду φ. Розглянемо проміжок осі абсцис $[a,b]$, на якому лежать всі можливі значення X, тобто $P(a\le X\le b)=1$, в частинному випадку $a=-\infty$, $b=+\infty$. Спосіб розв'язування поставленого завдання залежить від поведінки функції φ на проміжку $[a,b]$: монотонна вона на цьому проміжку чи ні. При цьому окремо проаналізуємо два випадки: монотонного зростання і монотонного спадання функції.

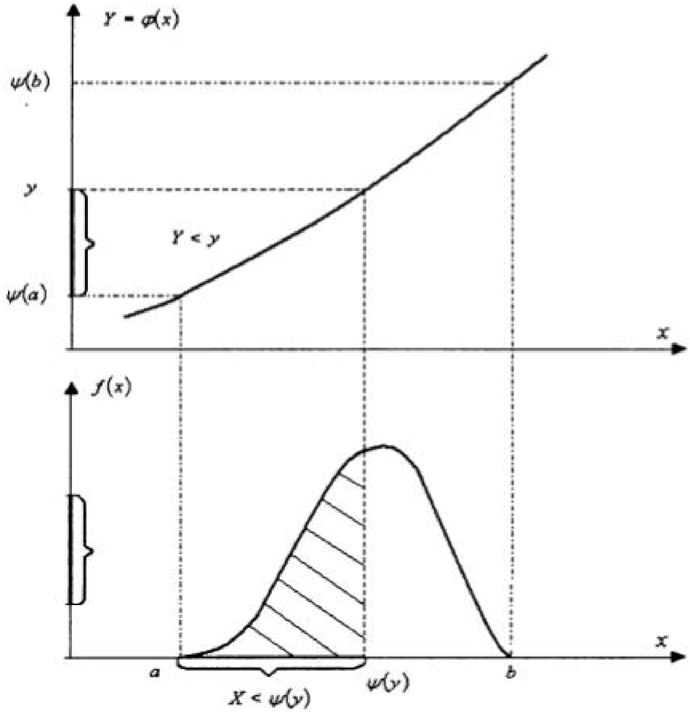
1) $Y=\varphi(X)$ – **монотонно зростаюча функція**. Знайдемо функцію розподілу $G(Y)$ випадкової величини Y. За означенням вона рівна

$$G(y)=P(Y<y)=P(\varphi(x)<y)=P(X<\psi(y))=\int_{-\infty}^{\psi(y)}f(x)dx,$$

де $\psi(y)$ – функція обернена до $\varphi(x)$.

Для виконання умови $Y<y$ необхідно і достатньо, щоб випадкова величина X потрапила на проміжок осі абсцис від **a** до $\psi(y)$. Таким чином, функція розподілу Y для аргумента X, розподіленого в інтервалі $[a,b]$, рівна

$$G(y)=\begin{cases}0, y<\psi(a),\\ \int_{a}^{\psi(y)}f(x)dx, \psi(a)\le y\le\psi(b),\\ 1, y>\psi(b)\end{cases}$$



2) $Y = \varphi(X)$ – **монотонно-спадна функція.**

Знайдемо функцію розподілу $G(Y)$ випадкової величини Y. За визначенням вона рівна

$$G(y) = P(Y < y) = P(\varphi(x) < y) = P(X > \psi(y)) = \int_{\psi(y)}^{\infty} f(x)dx\,,$$

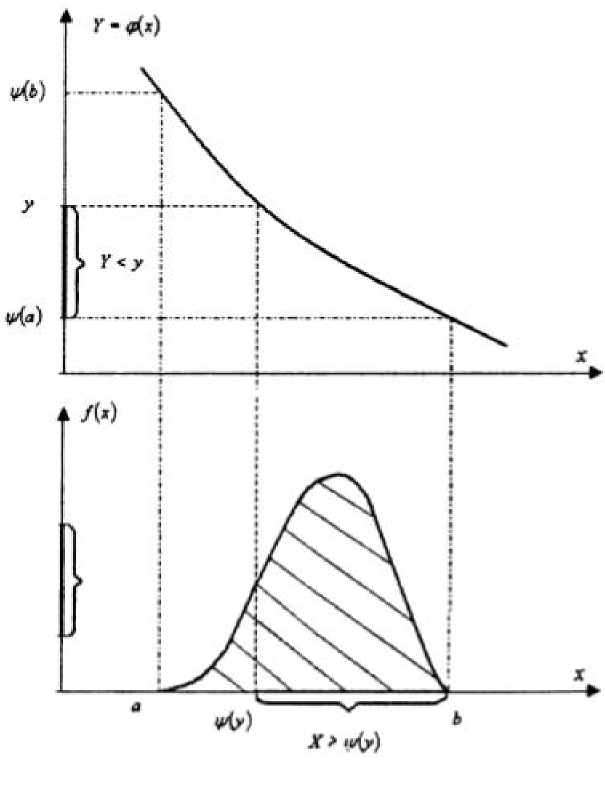
де $\psi(y)$ – функція, обернена до $\varphi(x)$.

Для виконання умови $Y < y$ необхідно і достатньо, щоб випадкова величина X потрапила на проміжок осі абсцис від $x = \psi(y)$ до **b**. Таким чином, функція розподілу Y для аргумента X, розподіленого в інтервалі $[a, b]$, рівна

$$G(y)=\begin{cases} 0, y< \psi(b), \\ \int\limits_{\psi(y)}^{b} f(x)dx, \psi(b)\le y\le \psi(a), \\ 1, y> \psi(a) \end{cases}$$

Щільність ймовірностей випадкової величини $Y=\varphi(X)$ для будь-якого монотонного випадку має такий вигляд:

$$g(y)= G'(y)=\begin{cases} 0, y< y_{min}, \\ f(\psi(y))\cdot\left|\psi'(y)\right|, y_{min}\le y\le y_{max}, \\ 0, y> y_{max} \end{cases}$$



Приклад 8. Знайти щільність ймовірностей випадкової величини $Y = X^2$, якщо X – випадкова величина, рівномірно розподілена на інтервалі $[-1;2]$.

Розв'язування:

▼ Оскільки X рівномірно розподілена на інтервалі $[-1;2]$, то її щільність ймовірностей рівна:

$$f(x) = \begin{cases} 1/3, a \le x \le b, \\ 0, x < a, x > b. \end{cases}$$

Побудуємо графік величини $Y = X^2$ для x в інтервалі $[-1;2]$ та залежно від числа k обернених функцій виділимо такі інтервали для Y:

$(-\infty;0)$ $k = 0$,

$(0;1)$ $k = 2$,

$(1;4)$ $k = 1$,

$(4;+\infty)$ $k = 0$.

Так як на інтервалах $(-\infty;0), (4;+\infty)$ обернена функція не існує, то $f(y) = 0$.

В інтервалі $(0;1)$ дві обернені функції:

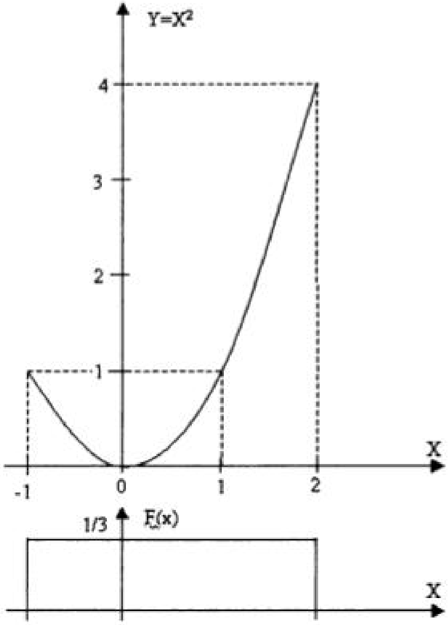
$\psi_1(y) = +\sqrt{y}$ та $\psi_2(y) = -\sqrt{y}$.

Будемо мати

$$g(y) = f_X(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| + f_X(\psi_2(y)) \cdot |\psi_2'(y)| = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{3\sqrt{y}}.$$

В інтервалі $(1;4)$ одна обернена функція

$$\psi_1(y) = +\sqrt{y} \Rightarrow g(y) = f_1(\psi_1(y)) \cdot |\psi_1'(y)| = f_x(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{6\sqrt{y}}.$$



Таким чином, щільність ймовірностей величини Y рівна

$$g(y)=\begin{cases} 0, y<0, \\ \dfrac{1}{3\sqrt{y}}, 0\le y<1, \\ \dfrac{1}{6\sqrt{y}}, 1\le y<4, \\ 0, y\ge 4 \end{cases}$$

▲

Приклад 9 Нехай випадкова величина X має нормальний закон розподілу

$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2\sigma^2}$, $Y=X^3$. Знайти $g(y)$.

Розв'язування:

▼ Функція $Y=\varphi(X)$ строго монотонна, диференційована і має обернену функцію $X=\psi(y)=\sqrt[3]{Y}$. Скористаємося останньою формулою. Оскільки

$$f_X(\psi(y))=f_X(y^{\frac{1}{3}})=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-y^{2/3}/2\sigma^2},$$

$$|\psi'(y)|=\left|(y^{1/3})'\right|=\frac{1}{3y^{2/3}},$$

Тоді шукана щільність розподілу функції $Y=X^3$:

$$g(y)=\frac{1}{3\sigma y^{2/3}\sqrt{2\pi}}e^{-y^{2/3}/2\sigma^2}. ▲$$

3) $Y=\varphi(X)$ — **немонотонна функція.** Алгоритм знаходження закону розподілу $Y=\varphi(X)$ наведено нижче.

1. Побудувати графік $Y=\varphi(X)$ і визначити діапазон значень Y $[y_{min}, y_{max}]$.

2. Діапазон Y розбити на M інтервалів, у кожному з яких однаковий ступінь неоднозначності $k_i, i=1,2,...,M$: $[y_{min}, y_1), [y_1, y_2), ... [y_{M-1}, y_{max}]$.

Ступінь неоднозначності k_i — число значень X, що відповідають одному значенню Y, або кількість обернених функцій для даного інтервалу $\psi_j(y), j=1,...,k_i$.

3. Знайти обернені функції $\psi_j(y)=\varphi^{-1}(x)$ і визначити $|\psi_j'(y)|$. В загальному випадку кількість обернених функцій $\psi_j(y)$ в i-му інтервалі рівне k_i.

4. Знайти щільність ймовірностей $f(y)$ за такою формулою:

$$g(y)=\begin{cases} 0, y< y_{min}, \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{k_i} f_X(\psi_j(y))\cdot\left|\psi'_j(y)\right|, y_{i-1}\le y< y_i, \\ \vdots \\ 0, y> y_{max} \end{cases}$$

В частинному випадку, коли обернені функції однакові для всіх інтервалів

$\psi'_j(y)=\psi'(y), \left|\psi'_j(y)\right|=\left|\psi'(y)\right|$, то остання формула перепишеться так:

$$g(y)=\begin{cases} 0, y< y_{min}, \\ \vdots \\ k_i\cdot f_X(\psi(y))\cdot\left|\psi'(y)\right|, y_{i-1}\le y< y_i, \\ \vdots \\ 0, y> y_{max} \end{cases}$$

А якщо величина X розподілена рівномірно в інтервалі $[a,b]$, то вираз для щільності розподілу можна подати так:

$$g(y)=\begin{cases} 0, y< y_{min}, \\ \vdots \\ k_i\cdot \dfrac{1}{b-a}\left|\psi'(y)\right|, y_{i-1}\le y< y_i, \\ \vdots \\ 0, y> y_{max} \end{cases}$$

Нехай $Y=\varphi(X)$, де X – випадкова величина з відомим законом розподілу. Необхідно знайти числові характеристики Y. В тому випадку, коли закон розподілу Y визначений щільністю розподілу, то числові характеристики Y легко обчислити за загальними формулами. Однак, якщо закон розподілу величини Y в явному вигляді не потрібний, а потрібні тільки її числові характеристики, то можна застосовувати наступні формули.

Якщо X – дискретна випадкова величина з відомим рядом розподілу ймовірностей, то $M(Y)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\cdot p_i$;

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)\cdot p_i-(M(Y))^2;$$

$$\nu_k(Y)=M(Y^k)=\sum_{i=1}^{n}\varphi^k(x_i)\cdot p_i;$$

$$\alpha_k(Y)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-M(Y))^k\cdot p_i.$$

Якщо X – неперервна випадкова величина з відомою щільністю ймовірностей $f(x)$, то формули набудуть вигляду:

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot f(x)dx;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(x)\cdot f(x)dx-M(Y)^2;$$

$$\nu_k(Y)=M(Y^k)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^k(x)\cdot f(x)dx;$$

$$\alpha_k(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-M(Y))^k\cdot f(x)dx.$$

5. Характеристична функція випадкової величини

Нехай $Y=e^{itX}$, де X – випадкова величина з відомим законом розподілу, t – параметр, $i=\sqrt{-1}$. Така випадкова величина називається комплексною.

Характеристичною функцією випадкової величини X називають математичне сподівання функції $Y=e^{itX}$:

$$\alpha_X(t)=M(e^{itX})=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{itX_k}\cdot p_k, \text{ для дискретних випадкових величин}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itX}\cdot f(x)dx, \text{ для неперервних випадкових величин.}\end{cases}$$

Таким чином, характеристична функція $\alpha_X(t)$ і закон розподілу випадкової величини однозначно пов'язані перетворенням Фур'є. Наприклад, щільність розподілу f(x) випадкової величини X однозначно виражається через її характеристичну функцію за допомогою оберненого перетворення Фур'є:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\alpha(t)\cdot e^{-itX}dt.$$

Основні властивості характеристичної функції:

1. $\alpha_X(0)=1$.

2. $\alpha'_X(t)=i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{itX}f(x)dx \Rightarrow \alpha'_X(0)=i\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{itX}f(x)dx=iM(X)\Rightarrow$

$\Rightarrow M(X)=-i\alpha'_X(0)$

3. $\alpha''_X(0)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{itX}f(x)dx\Big|_{x=0}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=-M(X^2)\Rightarrow$

$\Rightarrow M(X^2)=-\alpha''_X(0)\Rightarrow D(X)=-\alpha''_X(0)-(\alpha'_X(0))^2$

4. Характеристична функція величини $Z=aX+b$, де X – випадкова величина з характеристичною функцією $\alpha_X(t)$, рівна $\alpha_Z(t)=M(e^{it(aX+b)})=e^{itb}\alpha_X(at)$

5. Початковий момент k-го порядку випадкової величини X рівний:

$$\nu_k(X)=\alpha_X^{(k)}(0)i^{-k},$$

де $\alpha_X^{(k)}(0)$ — значення k-ої похідної характеристичної функції при t=0.

6. Характеристична функція суми $Y=\sum_{k=1}^{n} X_k$ незалежних випадкових величин дорівнює добутку характеристичних функцій доданків:

$$\alpha_Y(t)=\prod_{i=1}^{T}\alpha_{X_i}(t).$$

7. Характеристична функція нормальної випадкової величини (див. тему „Нормальний закон розподілу") з параметрами a, σ^2 рівна:

$$\alpha_X(t)=e^{ita-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Приклад 10. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини X, яка має розподіл Пуассона з параметром λ.

Розв'язування:

▼ За визначенням маємо:

$$\alpha_X(t)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\cdot\lambda)^m}{m!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}. \blacktriangle$$

Приклад 11. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини X, яка має розподіл Бернуллі з параметром p.

Розв'язування:

▼ За визначенням маємо:

$$\alpha_X(t)=e^{it\,0}\cdot P(X=0)+e^{it\,1}\cdot P(X=1)=1-p+pe^{it}. \blacktriangle$$

Приклад 12. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини X, яка має біноміальний розподіл з параметрами n та p.

Розв'язування:

▼ За визначенням маємо:

$$\alpha_X(t)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}\cdot P(x=m)=\sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}\cdot C_n^m p^m(1-p)^{n-m}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} C_n^m(pe^{it})^m\cdot(1-p)^{n-m}=(1-p+pe^{it})^n.$$

▲

Приклад 13. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини X, яка має показниковий розподіл з параметром λ (див. наступну тему).

Розв'язування:

▼ За визначенням маємо:

$$\alpha_X(t) = \int_0^\infty e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda - it)} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}\left(-e^{-x(\lambda - it)}\Big|_0^\infty\right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

▲

6. Основні закони розподілів неперервних випадкових величин

1) ***Рівномірний закон розподілу***

Рівномірним називають такий розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, що на інтервалі $(a;b)$, якому належать усі можливі значення X, щільність розподілу зберігає стале значення.

Наприклад, шкала будь-якого вимірювального приладу проградуйована в деяких одиницях. Покази округлюють до найближчої цілої поділки. Похибку округлення при цьому можна розглядати як випадкову величину X, яка може набувати зі сталою щільністю ймовірностей будь-якого значення між двома сусідніми цілими поділками. Отже, X має рівномірний розподіл.

Щільність рівномірно розподіленої випадкової величини X, можливі значення якої знаходяться в інтервалі $(a;b)$ зберігає стале значення C. Знайдемо C з умови нормування:

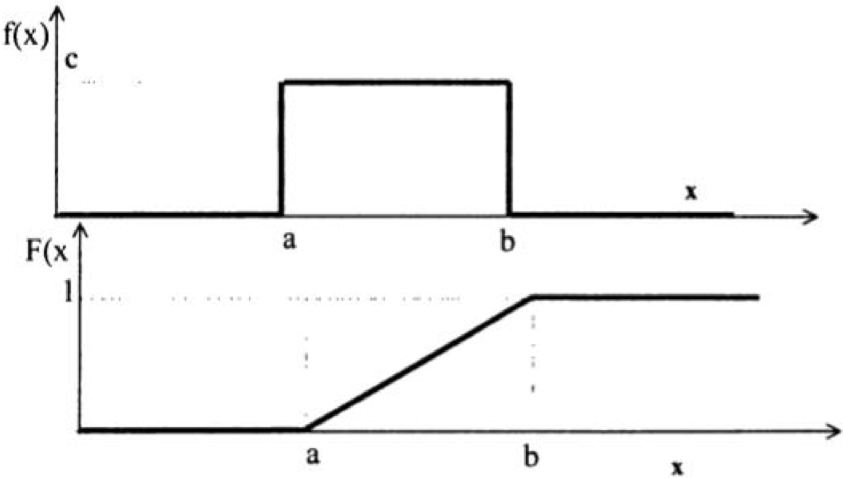
$$\int_a^b C dx = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b - a}$$

Отож, $f(x)=\begin{cases} 0; \text{якщо} \quad x \le a \\ \dfrac{1}{b-a}; \text{якщо} \quad a < x \le b \\ 0; \text{якщо} \quad x > b \end{cases}$, тоді

$$F(x)=\begin{cases} 0; \text{якщо} \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}; \text{якщо} \quad a < x \le b \\ 1; \text{якщо} \quad x > b \end{cases}$$

$$M(X)=\int_a^b \frac{1}{b-a} x dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \left.\frac{x^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{(a-b)^2}{12}.$$



Якщо необхідно знайти параметри $a; b$ рівномірно розподіленої випадкової величини X, якщо відомі M(X) та D(X), то використовують формули: $a = M(X) + \sigma(X) \cdot \sqrt{3}$; $b = M(X) - \sigma(X) \cdot \sqrt{3}$.

Приклад 14. Потяги метрополітену ходять регулярно з інтервалом 2 хвилини. Пасажир виходить на платформу у будь-який момент часу. Яка ймовірність того, що чекати пасажиру доведеться не більше, як півхвилини. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X – часу чекання потягу.

Розв'язування:

▼ Випадкова величина X – час чекання потягу на часовому (в хвилинах) відрізку $[0;2]$ має рівномірний закон розподілу $f(x) = \frac{1}{2}$.

Тому ймовірність того, що пасажиру доведеться чекати не більше як півхвилини, рівна

$$P(X \le 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{4};$$

$$M(X) = \frac{0+2}{2} = 1(\text{хвилина});\ D(X) = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}; \blacktriangle$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58(\text{хвилини}).$$

2) *Показниковий (експоненціальний) закон розподілу*

Показниковим (експоненціальним) називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, який описується щільністю:

$$f(x) = \begin{cases} 0; \text{якщо} \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}; \text{якщо} \quad x \ge 0 \end{cases}, \text{ де } \lambda - \text{стала додатна величина.}$$

Як бачимо, показниковий розподіл визначається одним тільки параметром λ. Ця особливість показникового розподілу вказує на його перевагу порівняно з розподілами, які залежать від більшої кількості параметрів. Зазвичай параметри невідомі і доводиться знаходити їх оцінки (наближені значення); зрозуміло, що легше оцінити один параметр, ніж два чи три і т.і.

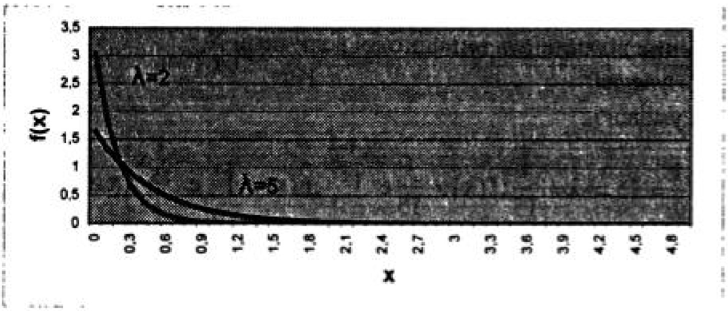
Прикладом неперервної випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, є час між появами двох послідовних подій найпростішого потоку.

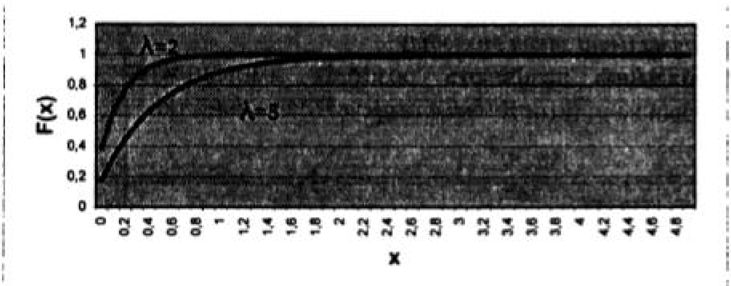
Знайдемо функцію розподілу показникового закону:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{0}0dx+\lambda\int_{0}^{x}e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x},$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0;\text{якщо}\quad x<0\\1-e^{-\lambda x};\text{якщо}\quad x\geq 0\end{cases},\quad M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$





Для показникового закону розподілу $M(X)=\frac{1}{\lambda}; D(X)=\frac{1}{\lambda^2}; \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Серед усіх законів розподілів неперервних випадкових величин лише експоненціальному притаманна властивість – відсутність післядії, а саме: якщо пов'язати випадкову величину з часом, то для цього закону минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому. Цю властивість експоненціального закону використовують у марковських випадкових процесах, теорії масового обслуговування, теорії надійності.

Приклад 15. Встановлено, що час ремонту телевізорів є випадкова величина X, розподілена за показниковим законом. Знайти ймовірність того, що ремонт телевізора потребуватиме не менше 20 днів, якщо середній час ремонту телевізорів становить 15 днів. Знайти щільність ймовірності, функцію розподілу та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Розв'язування:

▼ За умовою :

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}=15 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{15}; f(x)=\frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}; F(x)=1-e^{-\frac{1}{15}x} \ (x \geq 0).$$

$$P(X \geq 20)=1-P(X<20)=1-F(20)=1-(1-e^{-\frac{20}{15}})=e^{-\frac{20}{15}}=0,264;$$

$\sigma(x)=M(X)=15$(днів).

▲

3) ***Нормальний закон розподілу***

Нормальним називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини X, який описується щільністю:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами: a, σ.

Ймовірнісний зміст параметрів (це легко доводиться):

$a = M(X), \ \sigma^2 = D(X)$.

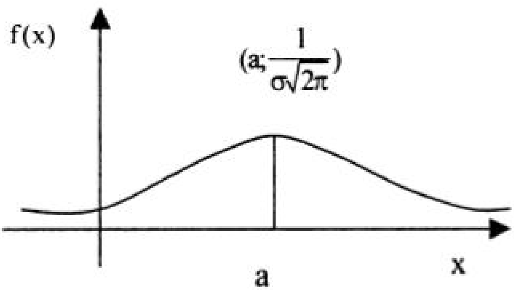
Випадкову величину X, розподілену за нормальним законом, позначають $X \approx N(a;\sigma)$.

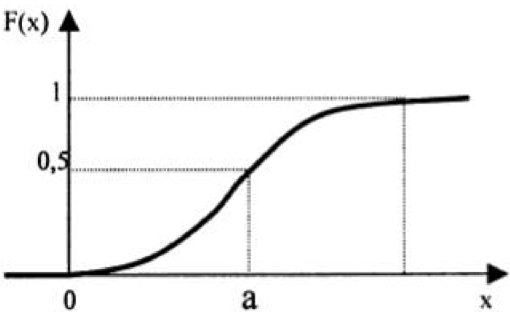
Щоб побудувати графік щільності нормального розподілу (нормальну криву або криву Гаусса), слід пам'ятати: 1)функція визначена для всіх x; 2) крива розміщена над віссю ox; 3) вісь ox – горизонтальна асимптота графіка; 4) при x = a функція має максимум, рівний $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$; 5)графік функції симетричний щодо прямої x = a; 6) точками перегину графіка є точки :

$(a-\sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot e})$, $(a+\sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\cdot e})$.

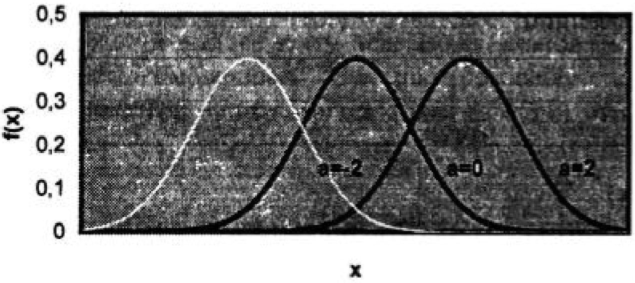
За визначенням:

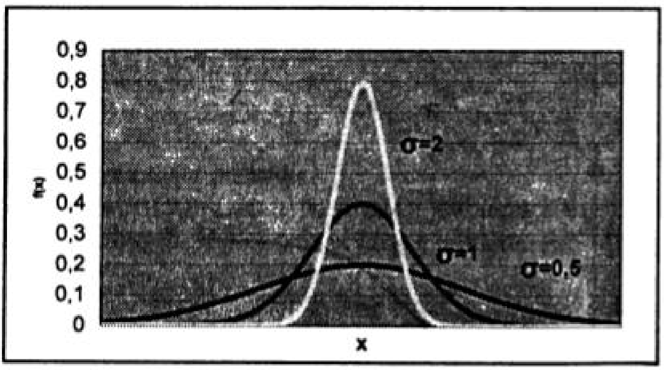
$$N(x,a,\sigma) = F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$ — функція розподілу.





З'ясуємо, як буде мінятися нормальна крива при зміні параметрів a, σ^2. Якщо $\sigma = \text{const}$, і змінюється параметр a $(a_1 < a_2 < a_3)$, тобто центр симетрії розподілу, то нормальна крива буде зміщуватися вздовж осі абсцис, не змінюючи форми. А якщо $a = \text{const}$ і змінюється параметр σ, то змінюється ордината максимуму кривої. При збільшенні σ ордината максимуму кривої зменшується, але оскільки площа під будь-якою кривою розподілу повинна залишатися рівною 1, то крива стає більш плоскою, розтягуючись уздовж осі абсцис; при зменшенні σ, навпаки, нормальна крива витягується вгору, одночасно стискаючись із боків.





Якщо задати параметри нормального розподілу, взявши $a=0$, $\sigma=1$, то отримаємо так званий *нормований* (стандартний) розподіл. Наприклад, якщо X нормальна величина з параметрами a та σ, то $t=\frac{x-a}{\sigma}$ — нормована нормальна величина, причому $M(t)=0, \sigma(t)=1$. Щільність нормованого розподілу описується функцією

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значення цієї функції (функція Гаусса) табульовані (додаток 1).

Знайдемо вигляд функції розподілу для загального нормального закону розподілу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx,$$

А функція нормованого розподілу $F_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}dt$.

Функція $F_0(x)$ табульована (додаток 2). Легко перевірити, що $F(X)=F_0(\frac{x-a}{\sigma})$.

Ймовірність потрапляння нормованої нормальної величини X в інтервал $(0;x)$ можна знайти, користуючись функцією Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}}dz:$$

$P(0< X < x)=\int_{0}^{x} f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\Phi(x)$. Враховуючи, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ та симетрію $f(x)$ відносно нуля $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=0.5$, а значить $P(-\infty < X < 0) = 0,5)$. Тому

$$F_0(x) = P(-\infty < X < x) = P(-\infty < X < 0) + P(0 < X < x) = 0,5 + \Phi(x).$$

Для нормального розподілу $Me(X) = a$, $As(X) = Ek(X) = 0$.

Для розрахунку ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини X на проміжок від α до β використовується формула:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

Для симетричного відносно а проміжку $(a - \Delta; a + \Delta)$ маємо

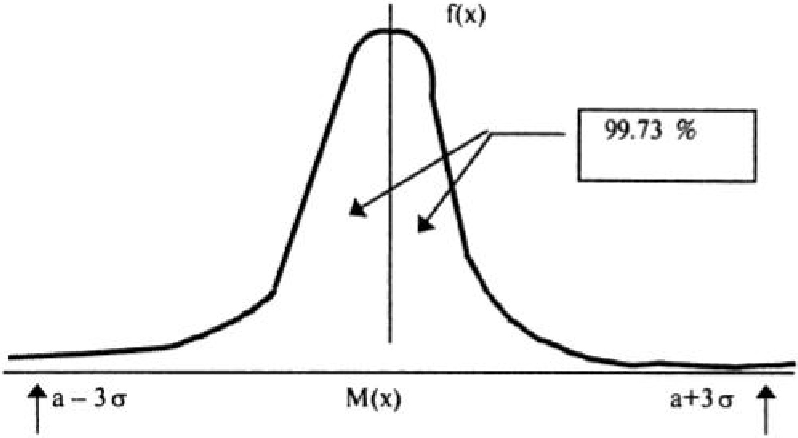
$$\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{a}| < \Delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right).$$

Якщо взяти $\Delta = 3\sigma$, то отримаємо

$$\mathrm{P}(|\mathrm{X} - \mathrm{a}| < 3\sigma) \approx 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973,$$

тобто ймовірність того, що відхилення за абсолютною величиною не перевищить потроєного середнього квадратичного відхилення практично рівна одиниці. В цьому й полягає суть ***правила трьох сигм***: якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення.

На практиці правило трьох сигм застосовують так: якщо розподіл досліджуваної випадкової величини невідомий, але правило трьох сигм виконується, то є підстави припустити, що досліджувана величина розподілена нормально; інакше — вона не розподілена нормально.



Нормальному закону розподілу підкоряються зріст людини, дальність польоту снаряда та інші.

Приклад 16. На ринок надійшла велика партія яловичини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підкоряється нормальному закону розподілу з математичним сподіванням $a = 950$ кг та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 150$ кг.

1) Знайти ймовірність того, що вага випадково відібраної туші: а) виявиться більшою 1250 кг; б) виявиться меншою 850 кг; в) буде знаходитись між 800 та 1300 кг; г) відхилиться від математичного сподівання менше, ніж на 50 кг; д) відхилиться від математичного сподівання більше, ніж на 50 кг.

2) Знайти межі, в яких відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання не перевищить потроєного середнього квадратичного відхилення.

3) З ймовірністю 0,899 визначити межі, в яких буде знаходитися вага випадково відібраної туші. Яка за цієї умови максимальна величина відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання?

Розв'язування:

▼ 1) а) Ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться більшою 1250 кг, можна розуміти як ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться в інтервалі від 1250 кг до $+\infty$.

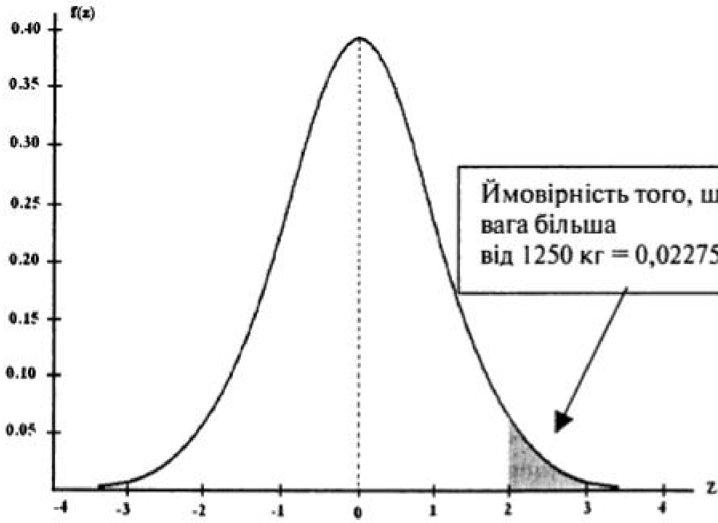
Скористаємось формулою розрахунку ймовірності попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини X:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \quad \text{де} \quad \Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \text{ -}$$

функція Лапласа (додаток 2). За умовою $\alpha = 1250, \beta = +\infty, a = 950, \sigma = 150$:

$$P(X > 1250) = P(1250 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 950}{150}\right) - \Phi\left(\frac{1250 - 950}{150}\right) =$$

$$= \Phi(\infty) - \Phi(2) = 0,5 - 0,47725 = 0,02275$$

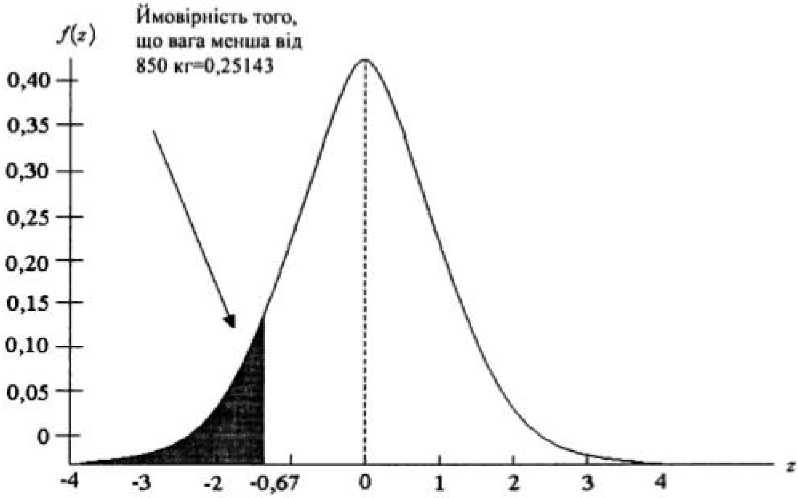


б) Ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться меншою від 850 кг – це те саме, що і ймовірність того, що вага випадково відібраної туші виявиться в інтервалі $(-\infty;850)$. Скористаємося попередньою формулою:

$$P(X<850)=P(-\infty<X<850)=\Phi(\frac{850-950}{150})-\Phi(\frac{-\infty-950}{150})=$$

$$=\Phi(-\frac{2}{3})-\Phi(-\infty)=\Phi(\infty)-\Phi(0,67)=0,5-0,24857=0,25143$$

Проілюструємо розв'язок задачі графічно:

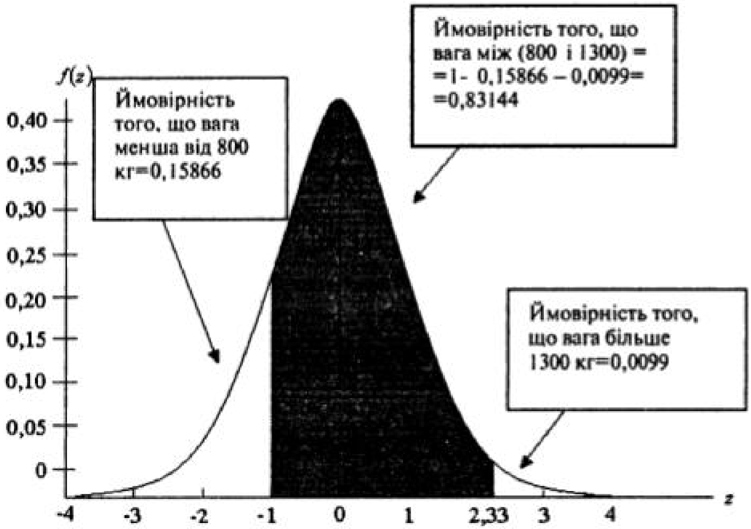


в) Знайдемо ймовірність того, що вага випадково відібраної туші знаходиться в інтервалі $\left(800;\ 1300\right)$ кг. Скористаємося тією самою формулою, що і в попередніх пунктах:

$$P(800<X<1300)=\Phi(\frac{1300-950}{150})-\Phi(\frac{800-950}{150})=\Phi(2,33)+\Phi(-1)=$$

$$=\Phi(2,33)+\Phi(1)=0,49010+0,34134=0,83144$$

Проілюструємо розв'язок задачі графічно:



г) Знайдемо ймовірність того, що вага випадково відібраної туші відхилиться від математичного сподівання менше, ніж на 50 кг. Скористаємось формулою розрахунку ймовірності заданого відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від свого математичного сподівання ($\Delta = 50, a = 950, \sigma = 150$):

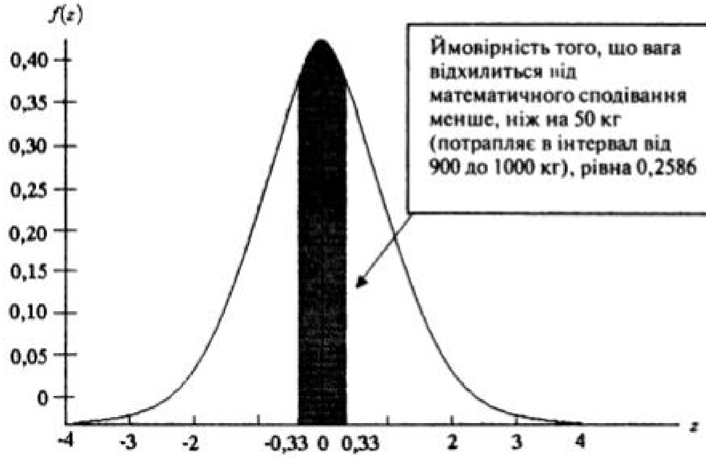
$$P(|X - a| < \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right); P(|X - 950| < 50) = 2\Phi(\frac{50}{150}) = 2\Phi(0,33) =$$

$$= 2 \cdot 0,1293 = 0,2586$$

д) Знайдемо ймовірність того, що вага випадково відібраної туші відхилиться від математичного сподівання більше, ніж на 50 кг. Це ймовірність події, протилежної до події розглянутої в попередньому пункті, тому:

$$P(|X - 950| > 50) = 1 - P(|X - 950| < 50) = 1 - 0,2586 = 0,7414.$$

Проілюструємо розв'язування задачі графічно:



2) Знайдемо межі, в яких відхилення ваги від свого математичного сподівання не перевищить потроєного середнього квадратичного відхилення, тобто

$$a - 3\sigma < X < a + 3\sigma,$$

$$950 - 3 \cdot 150 < X < 950 + 3 \cdot 150,$$

$$500 < X < 1400.$$

Враховуючи, що вага відібраної туші – нормально розподілена випадкова величина, можна бути практично впевненому в тому, що вага випадково відібраної туші не вийде за межі від 500 до 1400 кг.

3) Знайдемо межі, в яких із ймовірністю 0,899 буде знаходитися вага випадково відібраної туші.

Формулу ймовірності заданого відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від свого математичного сподівання можна подати так:

$$P(|X - a| < \Delta) = 2\Phi(\frac{\Delta}{\sigma}) = \gamma \Rightarrow P(a - \Delta < X < a + \Delta) = 2\Phi(\frac{\Delta}{\sigma}) = \gamma,$$

де γ – ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від свого математичного сподівання не перевищить заданої величини Δ.

Будемо мати:

$$P(950-\Delta < X < 950+\Delta) = 2\Phi(\frac{\Delta}{150}) = 0.899 \Rightarrow \Phi(\frac{\Delta}{150}) = \frac{0,899}{2} = 0,4495.$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо аргумент:

$$\frac{\Delta}{150} = 1,64 \Rightarrow \Delta = 1,64 \cdot 150 = 246.$$

З імовірністю 0,899 можна чекати, що відхилення ваги випадково відібраної туші від свого математичного сподівання не перевищить 246 кг. Тоді межі інтервалу, який нас цікавить $\left(950-246;\ 950+246\right)$ або $\left(704;\ 1196\right)$.

Приклад 17. На ринок надійшла велика партія яловичини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підкоряється нормальному закону розподілу з невідомим математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 150$ кг. Відомо, що 37,07% туш мають вагу більшу, ніж 1000 кг. Знайти очікувану вагу випадково відібраної туші.

Розв'язування:

▼ За умовою задачі $\sigma = 150; a = 1000; \beta = +\infty; P(X > 1000) = 0,3707$.

Очікувана вага випадково відібраної туші – це середня очікувана вага (математичне сподівання). Скористаємося формулою розрахунку ймовірності потрапляння в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини X:

$$P(1000 < X < +\infty) = \Phi(\frac{\infty-a}{150}) - \Phi(\frac{1000-a}{150}) = 0,3707 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,5 - \Phi(\frac{1000-a}{150}) = 0,3707 \Rightarrow \Phi(\frac{1000-a}{150}) = 0,5 - 0,3707 = 0,1293$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо аргумент за даним значенням функції: $\frac{1000-a}{150} = 0,33 \Rightarrow a = 1000 - 0,33 \cdot 150 = 950$ (кг) ▲

Приклад 18. На ринок надійшла велика партія яловичини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підкоряється нормальному закону розподілу з математичним сподіванням а = 950 кг та невідомим середнім квадратичним відхиленням. Відомо, що 15,87% туш мають вагу, меншу від 800 кг. Знайти середнє квадратичне (стандартне) відхилення ваги туш.

Розв'язування:

▼ За умовою задачі $a = 950;\ \alpha = -\infty;\ \beta = 800; P(X < 800) = 0{,}1587$.

Скористаємося формулою розрахунку ймовірності потрапляння в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини X:

$$P(-\infty < X < 800) = \Phi(\frac{800-950}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\infty-950}{\sigma}) = 0{,}1587 \Rightarrow \Phi(\frac{800-950}{\sigma}) +$$

$$+\Phi(\infty) = 0{,}1587 \Rightarrow \Phi(\frac{800-950}{\sigma}) + 0{,}5 = 0{,}1587 \Rightarrow 0{,}5 - \Phi(\frac{150}{\sigma}) = 0{,}1587 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{150}{\sigma}) = 0{,}3413$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо невідомий аргумент.

$$\frac{150}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 150\ .\ \blacktriangle$$

Приклад 19. На ринок надійшла велика партія яловичини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підкоряється нормальному закону розподілу з невідомими математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням. Відомо, що 15,87% туш мають вагу меншу, від 800 кг і 37,07% туш – більшу від 1000 кг. Знайти середню очікувану вагу та середнє квадратичне (стандартне) відхилення ваги туш.

Розв'язування:

▼ За умовою задачі:

$$\alpha = -\infty;\ \beta = 800; P(X < 800) = 0{,}1587; P(X > 1000) = 0{,}3707.$$

Скористаємося формулою розрахунку ймовірності потрапляння в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини X:

$$P(-\infty < X < 800) = \Phi(\frac{800-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\infty-a}{\sigma}) = 0{,}1587 \Rightarrow \Phi(\frac{800-a}{\sigma}) + \Phi(\infty) =$$

$$= 0{,}1587 \Rightarrow \Phi(\frac{800-a}{\sigma}) + 0{,}5 = 0{,}1587 \Rightarrow 0{,}5 - \Phi(\frac{a-800}{\sigma}) = 0{,}1587 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi(\frac{a-800}{\sigma}) = 0{,}3413.$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо невідомий аргумент.

$$\frac{a-800}{\sigma}=1 .$$

З іншого боку,

$$P(1000<X<+\infty)=\Phi\left(\frac{\infty-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{1000-a}{\sigma}\right)=0{,}3707 \Rightarrow 0{,}5-\Phi\left(\frac{1000-a}{\sigma}\right)=$$

$$=0{,}3707 \Rightarrow \Phi\left(\frac{1000-a}{\sigma}\right)=0{,}5-0{,}3707=0{,}1293.$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо аргумент за даним значенням функції: $\frac{1000-a}{\sigma}=0{,}33$.

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{a-800}{\sigma}=1 \\ \frac{1000-a}{\sigma}=0{,}33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma=a-800 \\ 0.33\sigma=1000-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma=150 \\ a\approx 950 \end{cases}. \blacktriangle$$

Приклад 20. На ринок надійшла велика партія яловичини. Припускається, що вага туші – випадкова величина, яка підкоряється нормальному закону розподілу з математичним сподіванням ф = 950 кг та невідомим середнім квадратичним відхиленням. Яким має бути середнє квадратичне (стандартне відхилення, щоб з імовірністю 0,81648 можна було стверджувати, що абсолютне відхилення ваги випадково відібраної туші від математичного сподівання не перевищить 200 кг?

Розв'язування:

▼ За умовою задачі:

$$a=950; \Delta=200; P(|X-950|<200)=0{,}81648 .$$

Скористаємося формулою розрахунку ймовірності заданого відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від свого математичного сподівання. Тоді отримаємо:

$$P(|X-a|<\Delta)=2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right);\ P(|X-950|<200)=2\Phi(\frac{200}{\sigma})=0,81648;$$

$$\Phi(\frac{200}{\sigma})=\frac{0,81648}{2}=0,40824$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо невідомий аргумент.

$$\frac{200}{\sigma}=1,33\Rightarrow\sigma=\frac{200}{1,33}=150\ .\blacktriangle$$

4) ***Логарифмічний нормальний закон розподілу***

Неперервна випадкова величина X має **логарифмічно- нормальний розподіл** (скорочено логнормальний), якщо її логарифм підкоряється нормальному закону розподілу.

Оскільки при x>0 нерівності $X<x$ та $\ln X<\ln x$ рівносильні, то функція розподілу логнормального розподілу співпадає з функцією нормального розподілу для випадкової величини lnX, тобто

$$F(X)=P(X<x)=P(\ln X<\ln x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{\ln x}e^{-\frac{(z-\ln a)^2}{2\sigma^2}}dz.$$

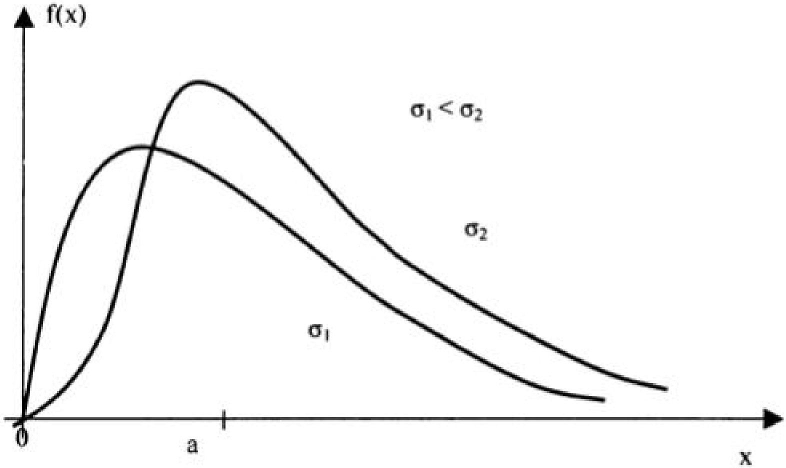
Якщо продиференціювати останній вираз по x, то отримаємо вираз щільності ймовірності для логнормального розподілу

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\ln x-\ln a)^2}{2\sigma^2}}$$

Можна довести, що числові характеристики випадкової величини X, розподіленої за логнормальним законом, мають вигляд:

$$M(X)=a\cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}};D(X)=a^2\cdot e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1);Mo(X)=a\cdot e^{-\sigma^2};Me(X)=a$$

Очевидно, чим менше σ, тим ближчі одне до одного значення моди, медіани та математичного сподівання, а крива – ближча до симетрії. Якщо в нормальному законі параметр *a* є середнім значенням випадкової величини, то в логнормальному – медіаною.



Логнормальний розподіл використовується для опису розподілу доходів, банківських вкладів, місячної заробітної плати, посівних площ під різні культури, довговічності виробів у режимі зносу і старіння та інше.

Приклад 21. Проведене дослідження показало, що вклади населення в даному банку можна описати випадковою величиною X, розподіленою за логнормальним законом з параметрами $a = 530, \sigma^2 = 0,64$. Знайти: а) середній розмір вкладу; б) частку вкладників, розмір вкладу яких не менший за 1000 грн; в) моду та медіану випадкової величини X і пояснити їх зміст.

Розв'язування:

▼ а) Знайдемо середній розмір вкладу, тобто

$$M(X) = a \cdot e^{\sigma^2/2} = 530 \cdot e^{0.64/2} = 730 \text{ (грн.)}.$$

б) Доля вкладників, розмір вкладу яких становитьне менше ніж 1000 грн., становить $P(X \geq 1000) = 1 - P(X < 1000) = 1 - F(1000)$.

$$F(X) = 0,5 + \Phi(z) = 0,5 + \Phi(\frac{\ln x - \ln a}{\sigma}) = 0,5 + \Phi(\frac{\ln 1000 - \ln 530}{\sqrt{0,64}}) =$$

$$= 0,5 + \Phi(0.79) = 0,5 + 0,2852 = 0,7852$$

Тоді $P(X \geq 1000) = 1 - 0,7852 = 0,2148$

в) Підрахуємо моду випадкової величини X:

$Mo(X) = a \cdot e^{-\sigma^2} = 530 \cdot e^{-0,64} \approx 280$, тобто найчастіше зустрічається вклад 280 грн. (точніше, найчастіше зустрічається елементарний інтервал з центром 280 грн., тобто інтервал $(280-\Delta, 280+\Delta)$ грн.).

Якщо керуватися ймовірнісним змістом параметра *a* логнормального розподілу, то медіана $Me(X) = a = 530$, тобто половина вкладників має вклади до 530 грн., а інша половина – понад 530 грн. ▲

5) *<u>Урізаний(ліворуч) нормальний закон</u>*

Нормальний закон посідає особливе місце в теорії ймовірностей та математичній статистиці, особливо у прикладних задачах. Але існує певний клас задач, які характерні для теорії надійності, коли випадкова величина X може набувати лише додатних числових значень. У цьому разі використовують урізаний ліворуч нормальний закон (для a>0), щільність ймовірностей якого:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sigma\left(0,5 + \Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right)\right)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x > 0; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0; \\ \dfrac{1}{\sigma\left(0,5 + \Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right)\right)\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x > 0. \end{cases}$$

$$M(X) = \frac{\sigma}{\left[0,5 + \Phi\left(\dfrac{a}{\sigma}\right)\right]\sqrt{2\pi}} e^{\frac{a^2}{2\sigma^2}}.$$

$$D(X)= M(X^2)- M^2(X)= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}+\frac{a\sigma}{\left[0,5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right]}- e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}+\frac{a^2}{\sqrt{2\pi}}-$$

$$-\left(a+\frac{\sigma * e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\left(0,5+\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right)}}\right)^2.$$

Приклад 22. За даним $N(2;4)$ записати $f(x), F(x)$ для урізаного нормального закону(ліворуч) і знайти $M(X), D(X)$.

Розв'язування:

▼

$$f(x)=\begin{cases} 0, x< 0 \\ \frac{1}{2,766\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-2)}{32}}, x> 0; \end{cases}$$

$$F(X)=\begin{cases} 0, x< 0 \\ \frac{1}{2,766\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{(x-2)}{32}} dx, x> 0. \end{cases}$$

$$M(X)= 2+\frac{5,79}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}};$$

$$D(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(20+11,57 * e^{-\frac{1}{8}}\right)-\left(2+\frac{5,78}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{8}}\right)^2. \ ▲$$

6) *<u>Гамма - розподіл</u>*

Неперервна випадкова величина Х має **гамма-розподіл** ймовірностей, якщо

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, x> 0 \end{cases}$$

де $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}dz$ — гамма-функція Ейлера (для цілих додатних значень $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$) .

Функція розподілу ймовірностей гамма-розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<0 \\ \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx, x\geq 0 \end{cases}$$

Числові характеристики:

$$M(X)=\frac{\alpha}{\lambda};\ \ D(X)=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Отже, гамма-розподіл визначається двома параметрами — λ і α

Розглянемо властивості гамма-функції:

1. $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-z}dz=-e^{-z}\Big|_0^\infty=1;$

2. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

3. $\Gamma(n+1)=n!$

Цей розподіл має правосторонню асиметрію.

7) <u>Розподіл Ерланга k-го порядку</u>

Якщо в гамма-розподілі k набуває лише цілих значень ($k\geq 1$), то гамма-розподіл перетворюється на **розподіл Ерланга k-го порядку**, щільність ймовірностей якої

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\leq 0; \\ \dfrac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x}, x>0, k=1,2,3... \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\leq 0; \\ \dfrac{\gamma}{(k-1)!}\int\limits_0^x(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}, x>0. \end{cases}$$

Закону розподілу Ерланга k-го порядку підлягає сума незалежних випадкових величин $x = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_k$, кожна з яких має експоненціальний закон розподілу із параметром λ.

Числові характеристики:

$$M(X) = \frac{k}{\lambda};$$

$$D(X) = \frac{k}{\lambda^2};$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}.$$

Приклад 23. Задано $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ Cx^5 e^{-\frac{1}{2}x}, x > 0. \end{cases}$

Знайти C і $F(x)$. Обчислити $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Розв'язування:

▼ Із умови задачі маємо: $\alpha = 6, \lambda = \frac{1}{2}$.

$$C = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}^6}{\Gamma(6)} = \frac{1}{64 \cdot 5!} = \frac{1}{64 \cdot 120} = \frac{1}{7680}.$$

Тоді

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 0; \\ \frac{1}{7680} x^5 e^{-\frac{1}{2}x}, x > 0 \end{cases}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x > 0; \\ \frac{1}{7680} \int\limits_0^x x^5 e^{-\frac{1}{2}x} dx, x \geq 0 \end{cases}.$$

$$M(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{6}{\frac{1}{2}} = 12; \; D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \frac{6}{\frac{1}{4}} = 24; \; \sigma(X) = \sqrt{24} \approx 4{,}9. \blacktriangle$$

8) ***Нормований бета-розподіл***

Неперервна випадкова величина X має **бета-розподіл**, якщо

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \dfrac{\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}, 0<x\le 1,\\ 0, x>1.\end{cases}$$

де інтеграл $\int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx$ називають *бета-функцією* і позначають $B(\beta;\gamma)$, де $\beta>0, \gamma>0$. $B(\beta;\gamma)=\int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx=\dfrac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)}$,

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \dfrac{\tilde{A}(\beta+\gamma)}{\tilde{A}(\beta)\tilde{A}(\gamma)}\int\limits_0^x x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-1}dx, 0<x\le 1;\\ 1, x>1.\end{cases}$$

Числові характеристики:

$$M(X)=\frac{\beta}{\beta+\gamma};\ D(X)=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma+1)};\ \sigma(X)=\frac{1}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}}.$$

Приклад 24. Задано

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ Cx^5(1-x)^6, 0<x\le 1;\\ 0, x>1.\end{cases}$$

Знайти $C, M(X), D(X), \sigma(X)$.

Розв'язування:

▼ За вищезгаданими формулами будемо мати:

$$C=\frac{\tilde{A}(\beta+\gamma)}{\tilde{A}(\beta)\tilde{A}(\gamma)}=\frac{\tilde{A}(13)}{\tilde{A}(6)\tilde{A}(7)}=\frac{12!}{5!6!}=11\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5544;$$

$$M(\tilde{O})=\frac{\beta}{\beta+\gamma}=\frac{6}{6+7}=\frac{6}{13};$$

$$D(X)=\frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2(\beta+\gamma+1)}=\frac{6\cdot 7}{(6+7)^2(6+7+1)}=\frac{42}{13^2\cdot 14}=\frac{21}{1183}=\frac{3}{169};$$

$$\sigma(X)=\frac{1}{\beta+\gamma}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma+1}}=\frac{1}{13}\sqrt{\frac{42}{14}}=\frac{\sqrt{3}}{13}. \blacktriangle$$

9) Розподіл Вейбулла

Неперервна випадкова величина X має **розподіл Вейбулла**, якщо

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}, & x>0. \end{cases}$$

Тоді функція розподілу ймовірностей:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 1-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Отже, розподіл Вейбулла визначається двома параметрами — β,θ.

Числові характеристики:

$$M(x)=\theta\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right);$$

$$D(x)=\theta^2\left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right);\quad \sigma(X)=\theta\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}.$$

Приклад 25. За даними параметрами $\beta=2$, $\theta=4$ записати математичний вираз для $f(x),F(x)$ і обчислити числові характеристики $M(X),D(X),\sigma(X)$.

Розв'язування:

▼ За вищезгаданими формулами:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \frac{1}{8}xe^{-\frac{1}{16}x}, & x>0. \end{cases}.$$

$M(X)=\theta\cdot\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)=4\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=4\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}$, оскільки

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$;

$$D(x)=\theta^2\cdot\left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right)=16\cdot\left(\Gamma(2)-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)=16\left[1-\frac{1}{4}\right]= ;$$

$$=4(4-\pi)$$

$$\sigma(x)=2\sqrt{4-\pi}. \blacktriangle$$

7. Закони розподілу випадкових величин, пов'язаних із нормальним законом розподілу

Нормальному закону розподілу належить центральне місце в побудові статистичних моделей у теорії надійності та математичній статистиці. Наступні закони розподілів не залежать від параметрів тих законів розподілу, які лежать в основі їх побудови, а залежать лише від числа ступенів свободи.

1) Розподіл χ^2 („хі – квадрат")

Якщо кожна із X_i ($i=1,2,\ldots,k$) незалежних випадкових величин характеризується нормованим законом розподілу ймовірності $(N(0;1))$, то випадкова величина $X=\sum_{i=1}^{k}X_i^2$ матиме **розподіл** χ^2 із k ступенями свободи, щільність ймовірностей та функція розподілу якої буде:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0;\\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}\int\limits_0^x x^{\frac{k}{2}-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx, x>0.\end{cases}$$

Числові характеристики:

$M(X)=k$; $D(X)=2k$; $\sigma(X)=\sqrt{2k}.$

(Таблицю розподілу χ^2 дивись у додатку 4.)

Якщо величини X_i ($i=1,2,\ldots,k$) пов'язані одним лінійним співвідношенням, число ступенів свободи рівне величині $k=n-1$. Із збільшенням числа ступенів свободи розподіл χ^2 повільно наближається до нормального. Розподіл χ^2 пов'язаний з критерієм χ^2, який використовується для порівняння передбачуваних і спостережуваних значень.

Приклад 26. Кожна з 10 незалежних випадкових величин x_i має закон розподілу N (0;1). Записати вирази для $f(x), F(x)$ і обчислити $M(X)$, $D(X), \sigma(X)$, якщо $X=\sum\limits_{i=1}^{10} X_i^2$.

Розв'язування: ▼

$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2^5\Gamma(5)}x^4e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{32*4!}x^4e^{-\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{32*24}x^4e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{768}x^4e^{-\frac{x}{2}}.$$

Таким чином: $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{1}{768}x^4e^{-\frac{x}{2}}, x>0\end{cases}$; $F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \frac{1}{768}\int\limits_0^\infty x^4e^{-\frac{x}{2}}dx, x>0.\end{cases}$

$M(X)=k=10; D(X)=2k=20; \sigma(X)=\sqrt{2k}=\sqrt{20}=4,47.$

▲

2) ***Розподіл*** $\frac{\chi^2}{k}$

Нехай випадкова величина Y має розподіл χ^2 із k ступенями свободи:

$$f(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0. \end{cases}$$

Знайти f(x),якщо $X=\frac{Y}{k}$. Оскільки $Y=kX$ і при цьому $y'_x=k$, то отримаємо

$$f(x)=f(\Psi(x))\left|\Psi'(x)\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}(kx)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}k=\frac{k^{\frac{k}{2}}k}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}=$$

$$=\frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}.$$

Отже, щільність ймовірностей розподілу $\frac{\chi^2}{k}$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{kx}{2}}, & x>0. \end{cases}$$

3) ***Розподіл*** χ

Нехай випадкова величина Y має розподіл χ^2 із k ступенями свободи:

$$f(y)=\begin{cases} 0, & y\le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0. \end{cases}$$

Знайдемо $f(x)$, якщо $X=\sqrt{Y}$. Оскільки $Y=X^2=\Psi(x)$, то $\Psi'(Y)=2X$.

Тоді:

$$f(x)=f(\Psi(x))\left|\Psi'(x)\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}(x^2)^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x^2}{2}}2x=\frac{2}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Випадкова величина X має розподіл χ, якщо

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0. \end{cases}$$

Тоді функція розподілу ймовірностей :

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma(\frac{k}{2})\int\limits_0^x x^{k-1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & x>0. \end{cases}$$

Числові характеристики χ - розподілу

$$M(X)=\frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})};\ D(X)=k-\frac{2\Gamma^2(\frac{k+1}{2})}{\Gamma^2(\frac{k}{2})};\ \sigma(X)=\sqrt{k-\frac{2\Gamma^2(\frac{k+1}{2})}{\Gamma^2(\frac{k}{2})}}.$$

Приклад 27. Випадкова величина X має розподіл χ із k=8 ступенями свободи. Записати вираз для f(x), F(x). Обчислити M(X), D(X), $\sigma(x)$.

Розв'язування:

▼ Обчислимо гамма-функції для k=8:

$$\Gamma(\frac{k}{2})=\Gamma(\frac{8}{2})=\Gamma(4)=3!=6.$$

$$\Gamma(\frac{k+1}{2})=\Gamma(\frac{8+1}{2})=\Gamma(4,5)=\Gamma(\frac{7}{2}+1)=\frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2})=\frac{7}{2}\Gamma(\frac{5}{2}+1)=\frac{7}{2}\,\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})=$$

$$=\frac{7\cdot 5\cdot 3}{16}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{16}\sqrt{\pi}=\frac{7!!}{16}\sqrt{\pi}.$$

Тоді:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{48}x^7e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases};;$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{48}\int\limits_0^{\infty}x^7e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & x>0\end{cases};$$

$$M(X)=\frac{\sqrt{2}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})}=1.1\cdot\sqrt{2\pi};\ D(X)=k-\frac{2\Gamma^2(\frac{k+1}{2})}{\Gamma^2(\frac{k}{2})}=8-2,2\pi;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{8-2,2\pi}.$$

▲

4) ***Розподіл*** $\frac{x}{\sqrt{k}}$

Нехай випадкова величина Y має розподіл x із k ступенями свободи :

$$f(y)=\begin{cases} 0, y\le 0 \\ \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\cdot\Gamma(\frac{k}{2})}\cdot y^{k-1}e^{-\frac{y^2}{2}}, y>0. \end{cases}$$

Необхідно знайти $f(x)$, якщо X= X_n . Оскільки $Y=\sqrt{k}*X=\psi(x)$ і при цьому $\psi'_x=\sqrt{k}$, то

$$f(x)=(\psi(x))\ \left|\psi^{I}(x)\right|=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}(\sqrt{k}x)^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}\sqrt{k}=$$

$$=\frac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma(\frac{k}{2})}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}.$$

Отже,

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\le 0; \\ \dfrac{k^{\frac{k}{2}}}{2^{\frac{k}{2}-1}\cdot\Gamma(\frac{k}{2})}x^{k-1}e^{-\frac{kx^2}{2}}, x>0. \end{cases}$$

5) ***Розподіл Стьюдента***

Якщо випадкова величина Y має розподіл N (0, 1), а випадкова величина X - $X\approx\frac{\chi}{\sqrt{k}}$, то випадкова величина $Z=\frac{Y}{X}$ характерризуватиметься розподілом Стьюдента зі щільністю ймовірностей:

$$f(z)=\frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma(\frac{k}{2})}(1+\frac{z^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}}, -\infty<z<\infty.$$

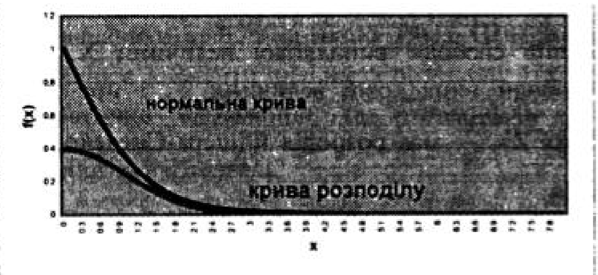
Тоді функція розподілу ймовірностей:

$$F(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_{-\infty}^{z}\left(1+\frac{z^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}dz.$$

Числові характеристики розподілу Стьюдента:

$$M(Z)=0;\ \ D(Z)=\frac{k}{k-2};\ \ \sigma(Z)=\sqrt{\frac{k}{k-2}}.$$

Як і стандартна нормальна крива, крива розподілу Стьюдента симетрична відносно осі ординат, але порівняно з нормальною кривою більш полога. При $k\to\infty$ розподіл Стьюдента наближається до нормального. (Таблицю функції розподілу Стьюдента дивись у додатку 5).



Приклад 28. Випадкова величина X має розподіл Стьюдента із k=7 ступенями свободи. Записати вираз для f(x), F(x) і обчислити M(X), D(X), $\sigma(X)$.

Розв'язування:

▼ За даним числом ступенів свободи к=7 обчислимо гамма-функції:

$$\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)=\tilde{A}\left(\frac{7}{2}\right)=\tilde{A}\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\tilde{A}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\tilde{A}\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\frac{3}{2}\tilde{A}\left(\frac{3}{2}\right)=$$

$$= \frac{5}{2}\frac{3}{2}\tilde{A}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\tilde{A}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi};$$

$$\left(\frac{k}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi};$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{7}}{2\pi}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4}, -\infty < x < \infty;$$

$$F(X) = \frac{\sqrt{7}}{2\pi}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{x^2}{7}\right)^{-4}dx;$$

$$M(X)=0;\ D(X) = \frac{k}{k-2} = \frac{7}{7-2} = \frac{7}{5} = 1,4;\ \sigma(X) = \sqrt{1,4} = 1,18.\ \blacktriangle$$

б) *Розподіл Фішера-Снедекора*

Якщо випадкова величина X має розподіл $\frac{\chi^2}{k_1}$, а $Y \approx \frac{\chi^2}{k_2}$, де k_1 – число ступенів свободи випадкової величини X, k_2 – число ступенів свободи випадкової величини У, і при цьому X та У незалежні, то $Z = \frac{Y}{X}$ має розподіл Фішера-Снедекора зі щільністю ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, z < 0; \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{2}} z^{\frac{k_2}{2}-1}\left(1+\dfrac{k_2}{k_1}z\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, z \geq 0. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0, z < 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\dfrac{k_2}{k_1}\right)^{\frac{k_2}{2}} \displaystyle\int_0^z z^{\frac{k_2}{2}-1}\left(1+\dfrac{k_2}{k_1}z\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} dz, z \geq 0. \end{cases}$$

Числові характеристики розподілу Фішера-Снедекора:

$M(Z)=\dfrac{k_1}{k_1-2}$; $D(Z)=\dfrac{2k_1^2(k_2+k_1-2)}{k_2(k_1-2)^2(k_1-4)}$;

$\sigma(Z)=\dfrac{k_1}{k_1-2}\sqrt{\dfrac{2(k_2+k_1-2)}{k_2(k_1-4)}}$.

(Таблиця значень розподілу Фішера-Снедекора представлена у додатку 6.)

Приклади розв'язування задач на обчислення числових характеристик випадкових величин.

Приклад 1. Випадкова величина X набуває значень на відрізку (a,b), на якому задається щільністю: $f(x)=\dfrac{3\cdot(x-c)^2}{250}$, де $c=\text{const}$. Визначити a, b та c, якщо $f(a)=f(b)$, а математичне сподівання дорівнює 3. Знайти щільність розподілу $f(x)$, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та ймовірність знаходження випадкової величини в інтервалі $\left[\dfrac{c+a}{2};\dfrac{c+b}{2}\right]$.

Розв'язування:

▼ За умовою $f(a)=f(b)$, тому

$$\frac{3\cdot(a-c)^2}{250}=\frac{3\cdot(b-c)^2}{250}\Rightarrow(a-c)^2=(b-c)^2.$$

Якщо $a-c=b-c\Rightarrow a=b$, чого бути не може, оскільки інтервал "вироджується" в точку. Тому $a-c=c-b\Rightarrow c=\dfrac{a+b}{2}$. Щільність розподілу випадкової величини X матиме вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\cdot(x-\frac{a+b}{2})^2}{250}, & x\in[a;b]\\ 0, & x\notin[a;b]\end{cases}.$$

Щоб знайти невідомі межі a та b інтервалу, скористаємося умовою нормування $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ і тим, що математичне сподівання $M(X)=3$. Отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases}\dfrac{3}{250}\int\limits_a^b (x-\dfrac{a+b}{2})^2dx=1\\ \dfrac{3}{250}\int\limits_a^b x\cdot(x-\dfrac{a+b}{2})^2dx=3\end{cases}$$

Після спрощення отримаємо:

$$\begin{cases}(\dfrac{b-a}{2})^3-(\dfrac{a-b}{2})^3=250\\ \dfrac{1}{4}(b^4-a^4)-\dfrac{2}{3}\dfrac{a+b}{2}(b^3-a^3)+\dfrac{1}{2}(\dfrac{a+b}{2})^2\cdot(b^2-a^2)=250\end{cases}\quad \text{або}$$

$$\begin{cases}(b-a)^3=1000\\ (b-a)^3\cdot(b+a)=250\cdot 24\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}b-a=10\\ b+a=6\end{cases}$$

Звідси $a=-2;\ b=8;\ c=\dfrac{-2+8}{2}=3$.

Тоді остаточно $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\cdot(x-3)^2}{250}, & x\in[-2;8]\\ 0, & x\notin[-2;8]\end{cases}$

Підрахуємо дисперсію:

$$D(X)=\frac{3}{250}\int_{-2}^{8}x^2\cdot(x-3)^2dx-(M(X))^2=$$

$$=\frac{3}{250}\int_{-2}^{8}(x^4-6x^3+9x^2)dx-3^2=15$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15}$.. Знайдемо ймовірність знаходження випадкової величини X в інтервалі $\left[\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right]$.

$$P(0,5\le X\le 5,5)=\frac{3}{250}\int_{0,5}^{5,5}(x-3)^2dx=\frac{1}{250}(x-3)^3\Big|_{0,5}^{5,5}=\frac{1}{250}((2,5)^3+$$

$$+(2,5)^3)=0,125.$$

Приклад 2. Відомі закони розподілів дискретних випадкових величин X

та Y – числа балів, які вибивають відповідно перший та другий стрільці:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

y_j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_j	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Необхідно з'ясувати, який зі стрільців стріляє краще.

Розв'язування:

▼ Через погану „охоплюваність" рядів розподілу важко відповісти на питання задачі. Знайдемо числові характеристики даних випадкових величин. Очевидно, краще стріляє той, хто в середньому вибиває більшу кількість балів. Математичні сподівання даних випадкових величин рівні:

$$M(X)=0\cdot 0,15+1\cdot 0,11+2\cdot 0,04+3\cdot 0,05+...+9\cdot 0,12+10\cdot 0,20=5,36$$

$$M(Y)=0\cdot 0,01+1\cdot 0,03+2\cdot 0,05+...+9\cdot 0,04+10\cdot 0,02=5,36.$$

Як бачимо, середня кількість вибитих балів у обох стрільців однакова.

Очевидно, краще стріляє той стрілець, у якого при рівності середніх значень числа вибитих балів менше розсіювання цього числа відносно середнього значення. Дисперсії та середні квадратичні відхилення даних випадкових величин рівні:

$$D(X) = (0-5{,}36)^2 \cdot 0{,}15 + (1-5{,}36)^2 \cdot 0{,}11 + \ldots + (10-5{,}36)^2 \cdot 0{,}20 = 13{,}61$$

$$\sigma(X) = \sqrt{13{,}61} = 3{,}69.$$

$$D(Y) = (0-5{,}36)^2 \cdot 0{,}01 + (1-5{,}36)^2 \cdot 0{,}03 + \ldots + (10-5{,}36)^2 \cdot 0{,}02 = 4{,}17$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{4{,}17} = 2{,}04.$$

Середнє квадратичне відхилення менше у другого стрільця і, очевидно, йому (для того щоб мати більш високі результати стрільби порівняно з першим стрільцем) потрібно змістити „центр" розподілу числа вибитих балів, тобто збільшити $M(Y)$. ▲

Приклад 3. Ряд розподілу дискретної випадкової величини складається з двох незалежних значень. Ймовірність того, що випадкова величина набуде одного зі своїх можливих значень, рівна 0,6. Знайти функцію розподілу випадкової величини, якщо її математичне сподівання рівне 3,2, а дисперсія 2,16.

Розв'язування:

▼ Ряд розподілу шуканої випадкової величини X має вигляд:

x_i	x_1	x_2
p_i	0,6	0,4

де $p_1 = 0{,}6, p_2 = 1-0{,}6 = 0{,}4.$

За умовою

$$\begin{cases} M(X) = 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 3{,}2; \\ D(X) = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - (3{,}2)^2 = 2{,}16 \end{cases} \quad x_1 < x_2 \text{ або}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 16; \\ 3x_1^2 + 2x_2^2 = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8 - 1{,}5x_1 \\ 3x_1^2 + 2(8-1{,}5x_1)^2 = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 8 - 1{,}5x_1; \\ 5x_1^2 - 32x_1 + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} = 2; \\ x_{12} = 4{,}4 \\ x_{21} = 5 \\ x_{22} = 1{,}4 \end{cases}$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то маємо такий ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	2	5
p_i	0,6	0,4

Тоді вирази функцій розподілу мають вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 2; \\ 0.6, 2 < x \le 5; \\ 1, x > 5. \end{cases}$$

▲

<u>Приклад 4.</u> Зазвичай тато сварить Петю за принесену "*двійку*" близько

6 хвилин. Цього разу нотація тривала більше 6 хвилин. Знайти математичне сподівання і дисперсію тривалості нотації. Визначити, з якою ймовірністю тато закінчить "*читати нотацію*" протягом найближчої хвилини?

Розв'язування:

▼ Тривалість нотації X можна вважати розподіленою за показниковим законом. За умовою звичайна середня тривалість нотації (чи її математичне сподівання) становить M(X) = 6 хв. Але для показникового розподілу $M(X)=\frac{1}{\lambda}$, звідки $\lambda=\frac{1}{M(X)}=\frac{1}{6}$. Дисперсія тривалості нотації при цьому рівна $D(X)=\frac{1}{\sigma^2}=\left(\frac{1}{1/6}\right)^2=36$. Ймовірність того, що тато закінчить "*читати нотацію*" протягом найближчої (сьомої) хвилини за умови, що нотація триває більше 6 хв., рівна

$$P\{X<7/X>6\}=\frac{P\{X<7\cap X>6\}}{P\{X>6\}}=\frac{P\{6<X>7\}}{P\{X>6\}}=\frac{F(7)-F(6)}{1-F(6)}=$$

$$=\frac{1-e^{-7/6}-(1-e^{-6/6})}{1-(1-e^{-6/6})}=\frac{e^{-1}-e^{-7/6}}{e^{-1}}=1-e^{-1/6}\approx 0,154.$$

▲

Приклад 5. У середньому лівші становлять 1% усього населення. Скільки в середньому потрібно опитати людей, щоб набрати десятьох лівшів?

Розв'язування:

▼ Будемо розглядати опитування як послідовності незалежних випробувань з імовірністю успіху $p = 1\% = 0{,}01$. Число X опитаних до появи першого лівші (як і число опитаних після появи лівші i-го разу до появи першого лівші (i+1)-го разу) – це геометрично розподілена випадкова величина $X \sim G(p=0.01)$, і її середнє значення оцінюється математичним сподіванням $M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}01} = 100$. Для того, щоб відібрати десять лівшів, враховуючи властивість адитивності математичних сподівань, у середньому потрібно опитати в 10 разів більше людей, тобто 1000 людей. ▲

Приклад 6. (Розподіл Парето). Річний дохід випадково вибраного платника податків описується випадковою величиною X зі щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \dfrac{c}{x^{3.5}}, x \geq 1 \end{cases}$$

Знайти значення параметра c, функцію розподілу річного доходу, середній річний дохід і середнє квадратичне відхилення річного доходу. Визначити розмір річного доходу x_{min}, не нижче якого з ймовірністю 0,5 знайдеться річний дохід випадково вибраного платника податків.

Розв'язування:

▼ Параметр c знайдемо із умови нормування:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_{1}^{\infty} \frac{c}{x^{3,5}}dx = -\frac{c}{2,5} * \frac{1}{x^{2,5}}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{c}{2,5},$$ звідки c =2,5. Таким чином, $f(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \dfrac{2,5}{x^{3,5}}, x \geq 1 \end{cases}$

Функцію розподілу знайдемо за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int_{-\infty}^{x} 0dz=0$$

при x<1,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(z)dz=\int_{-\infty}^{1} f(z)dz+\int_{1}^{x} f(z)dz=\int_{1}^{x}\frac{2,5}{z^{3,5}}dt=-\frac{1}{t^{2,5}}\Bigg|_{1}^{x}=1-\frac{1}{x^{2,5}}$$ пр

и $x \geq 1$.

Таким чином, $F(x)=\begin{cases}0, x<1\\ 1-\dfrac{1}{x^{2,5}}, x\geq 1\end{cases}$.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{1}^{\infty} x\frac{2,5}{x^{3,5}}dx=-\frac{2,5}{1,5}*\frac{1}{x^{1,5}}\Bigg|_{1}^{\infty}=\frac{5}{3};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx-(MX)^2=\int_{1}^{\infty} x^2\frac{2,5}{x^{3,5}}dx-\left(\frac{5}{3}\right)^2=-\frac{2,5}{0,5}*\frac{1}{x^{0,5}}\Bigg|_{1}^{\infty}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=$$

$$=5-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{20}{9};\sigma_X=\frac{2\sqrt{5}}{3}\approx 1,49.$$

За умовою $P\{X\geq x_{min}\}=1-P\{X<x_{min}\}=1-F(x_{min})=0,5$, звідки

$F(x_{min})=0,5$, тобто, $1-\dfrac{1}{x^{2,5}}=0,5$ або $x_{min}^{2,5}=2$, тому

$$\ln x_{min}=\frac{\ln 2}{2,5}\approx\frac{0,693}{2,5}\approx 0,28, \text{ тому } x_{min}\approx e^{0,28}\approx 1,32 \ ▲$$

<u>Приклад 7.</u> Розрахувати розмірний асортимент пошиття одягу за умови, що розміри обхвату грудей описуються нормальним законом з параметрами: середнє значення a=82,3, середнє квадратичне відхилення $\sigma=3,4$.

Розв'язування:

▼ Розрахувати розмірний асортимент одягу – це означає визначити який процент від усього випущеного одягу необхідно пошити 20, 22, ..., 60, 62-го розмірів. В подальших розрахунках обмежимося лише тими розмірами, які знаходяться поблизу середнього розміру (3 менше середнього, 3 більше середнього і сам "середній" розмір).

Розмір необхідного одягу – це число, яке наближено дорівнює напівобхвату грудей. На кожний розмір надається допуск ± 2 см. Це означає, наприклад, що розміру №50 відповідає інтервал обхвату грудей від 100 – 2 = 98 до 100 + 2 = 102 (см), а розміру №42 відповідає інтервал обхвату грудей від 82 см до 86 см (42*2 – 2 = 84 – –2 = 82, 42*2+2 = 84 + 2 = 86). Таким чином, для визначення розмірного асортименту для розміру №42 необхідно підрахувати, яка частина населення має обхват грудей від 82 до 86 см, для розміру №44 – від 86 до 90 см і т.і. Для підрахунку частини населення з обхватом грудей від 82 до 86 необхідно знайти число $P(82 < X < 86)\cdot 100\%$, що і дасть потрібний результат. Очевидно, що середній обхват грудей 82.3 у даному прикладі відповідає розміру №42 і в наших розрахунках обмежимося розмірами від №36 до №48.

Розмір №36

$$P\{70 \le X \le 74\} = \Phi\left(\frac{74-82,3}{3,4}\right) - \Phi\left(\frac{70-82,3}{3,4}\right) = \Phi(-2,44) - \Phi(-3,618) =$$

$$= \Phi(3,6) - \Phi(2,4) = 0,4998 - 0,4927 = 0,0071 \approx 0,007.$$

Розмір №38

$$P\{74 \le X \le 78\} = \Phi\left(\frac{78-82,3}{3,4}\right) - \Phi\left(\frac{74-82,3}{3,4}\right) \approx 0,1.$$

Розмір №40

$$P\{78 \le X \le 82\} = \Phi\left(\frac{82-82,3}{3,4}\right) - \Phi\left(\frac{78-82,3}{3,4}\right) \approx 0,36.$$

Розмір №42

$$P\{82 \le X \le 86\} = \Phi\left(\frac{86-82,3}{3,4}\right) - \Phi\left(\frac{82-82,3}{3,4}\right) \approx 0,39.$$

Розмір №44

$$P\{86 \le X \le 90\} = \Phi\left(\frac{90-82,3}{3,4}\right) - \Phi\left(\frac{86-82,3}{3,4}\right) \approx 0,13.$$

Розмір №46

$$P\{90 \le X \le 94\} = \Phi(\frac{94-82,3}{3,4}) - \Phi(\frac{90-82,3}{3,4}) \approx 0,01.$$

Розмір №48

$$P\{94 \le X \le 98\} = \Phi(\frac{98-82,3}{3,4}) - \Phi(\frac{94-82,3}{3,4}) \approx 0,0003.$$

Результати обчислень занесемо в таблицю:

Розмір	№36	№38	№40	№42	№44	№46	№48
Відсоток виробів	0,7	10	36	39	13	1	0,3

Звертаємо увагу, що сума всіх відсотків близька до 100%.▲

Приклад 8. Розглянути задачу на знаходження відсотка незадоволеного попиту населення в одязі за умови нормального розподілу розмірних ознак.

Розв'язування:

▼ Припустимо, що в деякому районі під час проведення антропометричних досліджень знайдені помилкові значення середнього показника обхвату грудей (x_1 в см) та середнього квадратичного відхилення (σ_1 в см). Реальні значення показників для цього району становлять – x_2 та σ_2 відповідно. Таким чином, у районі виявиться нестача одягу одних розмірів і надлишок інших. Визначимо, яка частина населення не отримає одягу і яка частина одягу не знайде свого покупця, якщо кількість виробів точно дорівнює населенню району, тобто визначимо відсоток незадоволення попиту, який позначимо $P_н$ та відсоток затоварювання, який позначимо $P_з$. Зрозуміло, що $P_н = P_з$.

Характеристики обхвату грудей будуть нормальними випадковими величинами, з щільностями розподілу

$$X_1 : f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$ — для параметрів (x_1, σ_1);

$$X_2 : f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$ — для параметрів (x_2, σ_2);

На наступному рисунку побудовані графіки цих щільностей за умови $\sigma_2 < \sigma_1$.

Площа заштрихованої ділянки світлового кольору і знайдена у відсотках, дорівнює числу $P_н$.

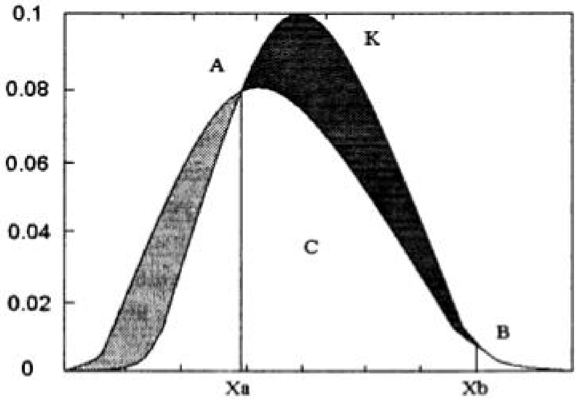
Площа ділянки темного кольору (пл. AKBCA) виражена у відсотках і чисельно дорівнює $P_з$ і може бути знайдена за формулою:

пл.AKBCA=пл.X_AAKBX_B–пл.X_AACBX_B=

$P(X_A \le X_1 \le X_B) - P(X_A \le X_2 \le X_B)$

$$P\{x_A \le X_1 \le x_B\} = \Phi(\frac{x_B - x_1}{\sigma_1}) - \Phi(\frac{x_A - x_1}{\sigma_1}),$$

$$P\{x_A \le X_2 \le x_B\} = \Phi(\frac{x_B - x_2}{\sigma_2}) - \Phi(\frac{x_A - x_2}{\sigma_2}),$$



Абсциси x_A та x_B точок A і B знаходимо, прирівнюючи щільності: $f_1(x) = f_2(x)$.

Ми припускали, що $\sigma_2 > \sigma_1$. При $\sigma_2 < \sigma_1$ остання формула дає правильну відповідь, але з протилежним знаком. Тому в загальному випадку формула має вигляд

$$P_H = P_3 = \left|P\{x_A \le X_1 \le x_B\} - P\{x_A \le X_2 \le x_B\}\right| / 100\%$$

Розглянемо розв'язок даної задачі при $x_1 = 97$, $\sigma_1 = 4$ та $x_2 = 95$, $\sigma_2 = 5$:

$$f_1(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-97)^2}{32}};$$

$$f_2(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-95)^2}{50}};$$

$$(f_1(x) = f_2(x)) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-97^2}{32}} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-95)^2}{50}}\right).$$

Скоротивши на $\sqrt{2\pi}$ і прологарифмувавши, одержимо рівняння: $178+16(x-95)^2=25(x-97)^2$.

Розв'язуємо останнє рівняння і одержуємо:

$x_A = 94,26$, $\qquad x_B = 106,85$.

Підставляючи ці значення в останню формулу, маємо:

$P_H = P_3 = 0,27 * 100\% = 27\%$.

▲

Приклад 9. Розрахувати розмірний асортимент жіночого взуття для Сумської області. Середнє значення довжини ступні $X = 240,2$ мм, середнє квадратичне відхилення $\sigma = 10,8$ мм.

Розв'язування:

▼ Розрахувати розмірний асортимент взуття – це означає визначити, який відсоток від усього випуску взуття треба виготовити 33, 34,..., 40,5, 41, 42,... розмірів. При цьому використовуються як штихмасова система, так і матрична.

У метричній системі нумерації суміжні типорозміри взуття, які відповідають довжині ступні в мм, відрізняються за довжиною на 5мм. Однак взуття, виготовлене для типової ступні, буде зручним і для людей, розміри ступні яких відхиляються від типових на ± 2,5 мм. Так, люди які мають довжину ступні 238, 241, 242 мм, можуть носити взуття 240 розміру. Таким чином, для визначення розмірного асортименту по розміру 240 необхідно обчислити, яка частина населення має довжину ступні від 237,5 до 242,5 мм. Інтервал [237,5; 242,5] називається <u>інтервалом байдужості</u> для розміру №37,5. для цього треба знайти ймовірність $P_{240} = P(237{,}5 \le \xi \le 242{,}5)$, а перевсдення числа P_{240} у відсотки і дасть потрібний результат.

За умовою, середня довжина ступні для нашого прикладу $\approx$ 240 мм, що відповідає 37,5 розміру за штихмасовою системою. Для розрахунків вибираємо розміри від 210 до 270 (або від 33 до 42).

Наведемо приклад таких розрахунків. При цьому обмежимося лише тими розмірами, які знаходяться поблизу середнього розміру (3 розміри менше середнього та 3-більше середнього і сам "середній" розмір).

<u>Розмір №35</u>

$$P(222.5< \xi < 227.5) = \tilde{O}\left(\frac{227{,}5-240{,}5}{10{,}8}\right) - \tilde{O}\left(\frac{222{,}5-240{,}5}{10{,}8}\right) = \tilde{O}(-1{,}176) -$$

$$-\tilde{O}(-1{,}639) = \tilde{O}(1{,}639) - \tilde{O}(1{,}176) = 0{,}4495 - 0{,}3810 = 0{,}0685$$

<u>Розмір №36</u>

$$P(227.5< \xi < 232.5) = \Phi(-0{,}713) - \Phi(-1{,}176) = 0{,}3810 - 0{,}2611 \approx 0{,}120$$

<u>Розмір №37</u>

$$P(232{,}5< \xi < 237{,}5) = \tilde{O}(-0{,}25) - \tilde{O}(-0{,}713) = 0{,}2611 - 0{,}0987 \approx 0{,}162$$

<u>Розмір№37,5</u>

$$P(237{,}5< \xi < 242{,}5) \approx 0{,}187$$

<u>Розмір№38</u>

$$P(242{,}5< \xi < 247{,}5) \approx 0{,}1668$$

<u>Розмір№39</u>

$$P(247{,}5< \xi < 252{,}5) \approx 0{,}1229$$

<u>Розмір№40</u>

$$P(252{,}5< \xi < 257{,}5) \approx 0{,}0729$$

Результати обчислення занесемо в таблицю. Розглянемо задачу оцінки відсотка незадоволеного попиту населення у взутті за умови нормального розподілу розмірів.

штихномер	мм	%
33	210	0,39
34	215	1,27
34,5	220	3,26
35	225	6,85
36	230	12
37	235	16,2
37,5	240	18,1
38	245	16,68
39	250	12,29
40	255	7,29
40,5	260	3,52
41	265	1,39
42	270	0,43

Припустимо, що партія взуття випущена для району із значеннями середнього показника довжини стопи X_1 і середнього квадратичного відхилення σ_1, була помилково завезена до другого району із фактичними значеннями цих показників X_2 та σ_2. Параметри (x_1, σ_1) визначають пропозицію, тоді як (x_2, σ_2) – попит населення у взутті.

Таким чином, у цьому районі буде мати місце нестача взуття одних розмірів і надлишок інших.

Визначимо, яка частина взуття не знайде свого покупця за умови, що кількість виробів точно відповідає населенню району, тобто визначено процент незадоволеного попиту, який позначено $Đ_i$ і відсоток затоварювання $Đ_ç$. Зрозуміло, що $Đ_i = Đ_ç$.

Довжина ступні X випадково обраної людини буде випадковою величиною, яка має наближено нормальний розподіл зі щільністю розподілу $f(x)$:

Для I району (випуск) з параметрами X_1, σ_1:

$$X = X_1 : f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

Для 2 району (фактичні потреби) з параметрами X_2, σ_2

$$X = X_2 : f_2(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Графіки функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ наведені на рис.4. величини $P_н$, $P_з$ обчислюються аналогічно попередньому прикладу. Абсциси A і B знаходимо із рівняння: $f_1(x) = f_2(x)$.

Розглянемо розв'язок даної задачі у випадку коли партія чоловічих кросівок, виготовлених для України (параметри випуску $X_1 = 268{,}5мм, \sigma_1 = 12{,}4мм$), потрапляє в Сумську область, населення якої має середню довжину стопи $X_2 = 251{,}5мм, \sigma_2 = 10{,}2мм$

Маємо $f_1(x) = f_2(x)$,

де $f_1(x) = \frac{1}{12{,}4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-268{,}5)^2}{2(12{,}4)^2}}$, $f_2(x) = \frac{1}{10{,}2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-251{,}3)^2}{2(10{,}2)^2}}$

Скоротивши на $\sqrt{2\pi}$ і прологарифмувавши праву і ліву частини рівняння, одержуємо:

$$0{,}195 = \frac{(X-268{,}5)^2}{307{,}52} - \frac{(X-251{,}3)^2}{208{,}08}$$

Розкриваючи дужки та розв'язуючи квадратне рівняння отримаємо:

$X_A = 260{,}476, X_B = 170{,}141$

$$P_н = P_з =$$

$$= \left| \Phi\left(\frac{260{,}476-251{,}3}{12{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{170{,}141-268{,}5}{12{,}4}\right) - \Phi\left(\frac{260{,}476-251{,}3}{10{,}2}\right) + \right.$$

$$\left. + \Phi\left(\frac{170{,}141-251{,}3}{10{,}21}\right) \right| \cdot 100\% = 0{,}5577 \cdot 100\% = 55{,}77\%.$$

Відзначимо, що таблиця розмірного асортименту взуття в даному випадку, враховуючи попит та пропозицію, набуває такого вигляду. Центральний розмір у таблиці відповідає середньому розміру довжини стопи для пропозиції.

Розміри	40	40,5	41	42	43	43,5	44
Інтервал байдужості	252,5-262,5	257,5-262,5	262,5-267,5	267,5-272,5	272,5-277,5	277,5-282,5	282,5-287,5
Пропозиція	6%	9%	16%	21%	15%	10%	6%
Попит	24%	14%	10%	4%	1%	0%	0%
Різниця "пропозиція -попит"	-18%	-5%	6%	17%	14%	10%	6%

При підрахунках обмежилися трьома розмірами ліворуч та праворуч від середнього розміру. ▲

Приклад 10. У районі десять універсамів. Їх сумарна добова виручка в середньому становить 10000 грн. і в 90% випадків відрізняється від 10000 грн. не більше, ніж на 1000 грн. Знайти ймовірність того, що чергова сумарна добова виручка виявиться в межах від 8000 до 12000 грн.

Розв'язування:

▼ Нехай x- сумарна добова виручка. За умовою, покупці діють незалежно один від одного і купують товари на відносно невеликі суми $x_i << x$, але покупців в районі достатньо багато, так що можна враховувати, що їх кількість $n \to \infty$. Тому сумарна виручка буде мати нормальний розподіл з деякими параметрами α і σ. Оскільки для нормального розподілу $a = M(X)$, то за умовою $a = M(X) = 10000$. Також відомо, що $P\{9000 < x < 11000\} = 0,9$.

Але

$$P\{9000 < x < 11000\} = \Phi\left(\frac{11000-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{9000-a}{\sigma}\right) =$$

$$P\{9000 < x < 11000\} = \Phi\left(\frac{11000-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{9000-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{-1000}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right).$$

Звідси $\Phi\left(\frac{1000}{\sigma}\right)=0,45$, і за таблицею додатку 2 можна знайти $\frac{1000}{\sigma}\approx 1.65$. Шукана ймовірність:

$$P\{8000< x< 12000\}=\Phi\left(\frac{12000-10000}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{8000-10000}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{2000}{\sigma}\right)=$$

$$=2\Phi(2*1,65)=2\Phi(3,3)=2*0,4995=0,999.\ \blacktriangle$$

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

1. Види збіжності послідовностей випадкових величин

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_T, \ldots$ *збігається майже напевне до випадкової величини X*, якщо

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\right\} = 1.$$

Збіжність майже напевне позначається так: $x_n \xrightarrow{\text{м.н.}} x$.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *збігається за ймовірністю* до випадкової величини X, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{|x_n - x| \le \varepsilon\} = 1.$$

Збіжність за ймовірністю позначається так: $X_n \xrightarrow{P} X$, тобто гарантується з імовірністю, скільки завгодно близькою до 1 при $n \to \infty$.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *збігається за розподілом (або слабо збігається)* до випадкової величини X, якщо в усіх точках x, у яких функція розподілу $F_X(x)$ неперервна,

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

Збіжність за розподілом позначається так: $X_n \Rightarrow X$ або $X_n \xrightarrow{D} X$.

Прикладом збіжності за розподілом є формула Пуассона. Різні види збіжності мають такі властивості :

Якщо

$$X_n \xrightarrow{P} X, Y_n \xrightarrow{P} Y, X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y, X_n * Y_n \xrightarrow{P} X * Y;$$

Якщо $X_n \xrightarrow{P} X, f(x)$ – неперервна функція, то $f(x_n) \xrightarrow{P} f(x)$;

Якщо $X_n \xrightarrow{P} x_0, f(x)$ неперервна в точці $x_0, f(X_n) \xrightarrow{P} f(x_0)$;

Якщо $X_n \xrightarrow{P} x = \text{const}, Y_n \Rightarrow Y, X_n + Y_n \Rightarrow x + Y, X_n * Y_n \Rightarrow x * Y$;

Зі збіжності майже напевне випливає збіжність за ймовірністю:

якщо $X_n \xrightarrow{\text{м.н.}} X$, то $X_n \xrightarrow{P} X$ але не навпаки !

Зі збіжності за ймовірністю випливає збіжність за розподілом:

Якщо $X_n \xrightarrow{P} X$, то $X_n \Rightarrow X$.

Зі збіжності за розподілом до константи випливає збіжність за ймовірністю:

якщо $X_n \Rightarrow x = \text{const}, X_n \xrightarrow{P} x$.

2. Нерівності теорії ймовірностей

Під час доведення багатьох теорем теорії ймовірностей і математичної статистики використовують ряд додаткових нерівностей, відомих із курсу математичного аналізу:

1) Нерівність Маркова

Якщо додатна випадкова величина X має скінчене математичне сподівання $M(X)$, то для будь -якого $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність:

$$P\{X \le \varepsilon\} > 1 - \frac{M(X)}{\varepsilon}$$

Нерівність Маркова застосовують до будь-яких невід'ємних випадкових величин.

Приклад 1. Сума всіх вкладів деякого банку становить 2000000 грошових одиниць, а ймовірність того, що випадково взятий вклад не перевищить 10000 грошових одиниць, рівна 0,8. Оцінити кількість вкладників банку.

Розв'язування

▼ Нехай n – кількість вкладників, а випадкова величина X описує розмір випадково вибраного вкладу. Тоді середній розмір вкладу

$$M(X) = \frac{2000000}{n}$$

грошових одиниць. І за нерівністю Маркова:

$$P\{X \le 10000\} \ge 1 - \frac{M(X)}{10000} = 1 - \frac{200}{n}.$$

За умовою $P\{X \le 10000\} = 0,8 \Rightarrow 1 - \frac{200}{n} \le 0,8 \Rightarrow n \le 1000$ (чоловік). ▲

2) Нерівність Чебишева

Якщо випадкова величина X має скінчене математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ справедлива нерівність:

$$P\{|X - M(X)| \le \varepsilon\} > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишева застосовують до будь-яких випадкових величин.

Приклад 2. Ймовірність появи випадкової події у кожному з 400 незалежних випробувань є величиною сталою і дорівнює 0,9. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність події $|X - M(X)| < 10$.

Розв'язування

▼ За умовою: $n = 400; p = 0,9; q = 0,1; \varepsilon = 10$.

$M(X) = np = 400 \cdot 0,9 = 360; D(X) = npq = 360 \cdot 0.1 = 36$.

$$P(|X - 360| < 10) \ge 1 - \frac{36}{100} = 0,64. ▲$$

2) Нерівність Йенсена

Для будь-якої випадкової величини X і будь-якої випуклої (ввігнутої) функції $g(x)$ справедлива нерівність:

$$M(g(x)) \le g\, M(X) \quad (M(g(x)) \ge g\, M(X)).$$

3) Нерівність Коші – Буняковського – Шварца

Для будь-яких випадкових величин X,Y справедлива нерівність:

$$M(X \cdot Y) \le \sqrt{M(X^2)} \cdot \sqrt{M(Y^2)}.$$

4) Нерівність Гьольдера

Для будь-яких випадкових величин X,Y при $\alpha \in (0;1)$ справедлива нерівність:

$$M(|X\cdot Y|)\le (M(|X|^{\frac{1}{\alpha}}))^{\alpha}\cdot (M(|Y|^{\frac{1}{1-\alpha}}))^{1-\alpha}.$$

5) Нерівність Мінковського

Для будь-яких випадкових величин X,Y при $r\ge 1$ справедлива нерівність:

$$M(|X+Y|^{r})^{\frac{1}{r}}\le (M(|X|^{r}))^{\frac{1}{r}}+(M(|Y|^{r}))^{\frac{1}{r}}.$$

3. Теореми закону великих чисел

Під законом великих чисел у широкому розумінні слід розуміти *загальний принцип*, за яким, по Колмогорову, *сукупна дія великої кількості випадкових факторів приводить* (за деяких загальних умов) *до результату, який майже не залежить від випадку*. Іншими словами, *при великій кількості випадкових величин їх середній результат перестає бути випадковим і його можна передбачити з великим ступенем надійності*.

Законом великих чисел у вузькому розумінні називають групу теорем, у кожній з яких для тих чи інших умов встановлюється факт наближення середніх характеристик великої кількості випробувань до деяких сталих. Найбільш загальною із цих теорем є теорема Чебишева, яка також називається просто *законом великих чисел*.

1) Теорема Чебишева

Якщо дисперсії некорельованих випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *обмежені зверху числом* β, *то для будь-якого скільки завгодно малого* $\varepsilon > 0$ *справедлива нерівність:*

$$P\left\{\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right|\le \varepsilon\right\}>1-\frac{\beta}{n\varepsilon^2}$$

та гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right| \le \varepsilon\right\} = 1,$$

тобто при необмеженому збільшенні числа n середня арифметична випадкових величин збігається за ймовірністю до середньої арифметичної їх математичних сподівань.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}.$$

Наслідок. *Нехай* $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ *— послідовність незалежних випадкових величин така, що* $M(X) = a$, $D(X) \le c$, $n=1,2,...$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| \le \varepsilon\right\} > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| \le \varepsilon\right\} = 1$$

або $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} a.$

Теорема Чебишева та її наслідок мають велике практичне значення. Наприклад, страховій компанії необхідно встановити розмір страхового внеску, який повинен сплачувати застрахований; при цьому страхова компанія зобов'язується виплатити, коли настане страховий випадок, певну страхову суму. Розглядаючи відношення "частота-збитки" застрахованого, коли має місце страховий випадок, як величину випадкову, і, маючи статистику таких випадків, можна визначити відношення середнього числа страхових випадків до середніх збитків при настанні страхових випадків, яке на основі теореми Чебишева з великим ступенем надійності можна вважати величиною майже невипадковою. Тоді на основі цих даних і передбачуваної страхової суми визначається розмір страхового внеску. Без урахування дії закону великих чисел (теореми Чебишева) можливі суттєві збитки страхової компанії (при заниженні розміру страхового внеску) або втрата привабливості страхових послуг (при завищенні розміру внеску).

Якщо потрібно виміряти деяку величину, істинне значення якої рівне a, проводять n незалежних вимірювань цієї величини. Нехай результат кожного вимірювання – випадкова величина $X_i (i = 1, 2, ..., n)$. Якщо при вимірюваннях відсутні систематичні похибки (що спотворюють результат вимірювання в один і той же бік), то природно припустити, що $M(X_i) = a$ для будь-яких i. Тоді на основі наслідку з теореми Чебишева середня арифметична результатів n вимірювань $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$ збігається за ймовірністю до істинного значення a.

Якщо всі вимірювання проводяться з однаковою точністю, що характеризується дисперсією $D(X_i) = \sigma^2$, то дисперсія їх середньої

$$D\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}(n\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n},$$

а її середнє квадратичне відхилення рівне $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Отримане відношення , відоме під назвою *„правило кореня з n"*, говорить про те, що середнє очікуване розсіювання середньої n вимірювань в $\sqrt{n}$ разів менше розсіювання кожного виміру. Таким чином, збільшуючи кількість вимірювань, можна як завгодно зменшувати вплив випадкових похибок (але не систематичних), тобто збільшувати точність визначення істинного значення a.

Закони великих чисел стверджують, що середнє арифметичне випадкових величин при збільшенні їх числа володіє властивістю *статистичної стійкості*, тобто збігається за ймовірністю до невипадкової величини – середньої арифметичної математичних сподівань цих випадкових величин. Практичне застосування законів великих чисел полягає в тому, що середня арифметична, обчислена для достатньо великої кількості результатів вимірювань будь-якої величини, буде скільки завгодно близькою до величини, що вимірюється.

Статистична стійкість відносної частоти появи успіху в серії незалежних випробувань доводиться в теоремі Бернуллі (див. далі).

Приклад 3. Для визначення середньої тривалості горіння електроламп у партії із 200 однакових ящиків взяли вибірку по одній лампочці з кожного ящика. Оцінити ймовірність того, що середня тривалість горіння відібраних 200 електроламп відрізняється від середньої тривалості горіння ламп у всій партії не більше, ніж на 5 годин (за абсолютною величиною), якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння ламп у кожному ящику менше, ніж 7 годин.

Розв'язування:

▼ Нехай X_i – тривалість горіння електролампи, взятої з і-го ящика (год.). За умовою дисперсія $D(X_i) < 7^2 = 49$.

Очевидно, що середня тривалість горіння відпрацьованих ламп рівна $(X_1 + X_2 + ... + X_{200})/200$, а середня тривалість горіння ламп у всій партії:

$$(M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_{200}))/200 = (a_1 + a_2 + ... + a_{200})/200.$$

Тоді ймовірність шуканої події за теоремою Чебишева:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_{200}}{200} - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{200}}{200}\right| \le 5\right) \ge 1 - \frac{49}{200 \cdot 5^2} \approx 0,9902,$$

тобто не менша, ніж 0,9902. ▲

Приклад 4. Скільки треба провести вимірювань даної величини, щоб з імовірністю, не меншою 0,95, гарантувати відхилення середньої арифметичної цих вимірювань від істинного значення величини не більше, ніж на 1 (за абсолютною величиною), якщо середнє квадратичне відхилення кожного з вимірювань не перевищує 5?

Розв'язування:

▼ Нехай X_i – результат і-го вимірювання (i=1,2,..,n) – істинне значення величини, тобто $M(X_i) = a$ при будь-якому і.

Необхідно знайти n, при якому

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-a\right|\le 1\right)\ge 0,95.$$

За наслідком з теореми Чебишева нерівність буде виконуватися, якщо

$$1-\frac{C}{n\varepsilon^2}=1-\frac{5^2}{n*1^2}\ge 0,95,\ \text{звідси}\ \frac{25}{n}\le 0,05\ \text{ і }\ n\ge\frac{25}{0,05}=500,\ \text{тобто}$$

потрібно не менше 500 вимірювань. ▲

2) Теорема Бернуллі

Якщо ймовірність успіху в кожному з n незалежних випробувань постійна та рівна p, то для довільного скільки завгодно малого $\varepsilon > 0$ *справедлива гранична рівність:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=1 \ \textit{або}\ \frac{m}{n}\xrightarrow{P}p,$$

де m — число успіхів в серії з n випробувань.

Нерівність Чебишева для теореми Бернуллі матиме такий вигляд:

$$P(|W(A)-p|<\varepsilon)\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Історично теорема Бернуллі була доведена набагато раніше, ніж більш загальна теорема Чебишева. Вона дає теоретичне обґрунтування заміни невідомої ймовірності події її частотою, або статистичною ймовірністю, отриманою в *n* повторних незалежних випробуваннях, що проводяться в однакових умовах.

Безпосереднім узагальненням теореми Бернуллі є теорема Пуассона, коли ймовірності події у кожному випробуванні різні.

Приклад 5. Ймовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від ймовірності 0,95 не більше, ніж на величину 0,02.

Розв'язування:

▼ За умовою: $p = 0,95; q = 0,05; n = 400$. Тоді:

$$P(|W(A) - 0,95| < 0,02) \geq 1 - \frac{0,95 \cdot 0,05}{400 \cdot (0,02)^2} = 1 - 0,2969 = 0,7031 . ▲$$

Приклад 6. Скільки потрібно провести випробувань n, щоб ймовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від ймовірності p=0,85, взяте за абсолютною величиною, на $\varepsilon = 0,01$, була б меншою від 0,99.

Розв'язування:

▼ За умовою:

$p = 0,85; q = 0,15; \varepsilon = 0,001; P(|W(A) - 0,85| < 0,001) = 0,99$.

Тоді $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0,99 \to n = \frac{pq}{0,01\varepsilon^2} = \frac{0,85 \cdot 0,15}{0,01 \cdot 0,000001} = 1245000.$ ▲

3) Теорема Пуассона

Частота події в n повторних випробуваннях , у кожному з яких вона може відбутися відповідно з імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *при необмеженому збільшенні числа n збігається за ймовірністю до середньої арифметичної ймовірностей події в окремих випробуваннях:*

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right\} = 1 \text{ або } \frac{m}{n} \xrightarrow{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{n} .$$

1) Теорема Хінчина

Нехай $\{X_n\}$ *— послідовність незалежних однаково розподілених величин, які мають скінченне математичне сподівання* $M(X_n) = a$. *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right\} = 0 .$$

5) Теорема Маркова

Нехай випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ *як завгодно залежні. Для виконання граничної рівності* $\lim_{n\to\infty} P\{\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| \le \varepsilon\} = 1$ *достатньо, щоб* $\frac{1}{n^2} D \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$, *при* $n \to \infty$.

Так, температура повітря в деякій місцевості $X_i (i = 1, 2, ..., 365)$ кожний день року – величини випадкові, суттєво коливаються протягом року, причому залежні, тому що на погоду кожного дня, очевидно, помітно впливає погода попередніх днів. Однак середньорічна температура майже не змінюється для даної місцевості протягом багатьох років і є практично невипадковою, передбачуваною.

Окрім різних форм закону великих чисел, у теорії ймовірностей є ще різні форми так званого „посиленого закону великих чисел", де говориться не про „збіжність за ймовірністю", а „збіжність з імовірністю 1" різних середніх випадкових величин до невипадкових середніх. Однак він не застосовується в економіці.

4. Центральна гранична теорема

Розглянутий вище закон великих чисел встановлює факт наближення середньої великої кількості випадкових величин до певних сталих. Але цим не обмежуються закономірності, які виникають у результаті сумарної дії випадкових величин. Виявляється, що за деяких умов сукупна дія випадкових величин приводить до певного, а саме – до нормального закону розподілу.

Центральна гранична теорема є групою теорем, присвячених встановленню умов, за яких виникає нормальний закон розподілу. Серед цих теорем найважливіше місце належить теоремі Ляпунова.

1) Теорема Ляпунова

Якщо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — *незалежні випадкові величини, для кожної з яких існує математичне сподівання* $M(X_i) = a$, *дисперсія* $D(X_i) = \sigma^2$, *абсолютний центральний момент третього порядку* $M\left(\left|X_i - a_i\right|^3\right) = m_i$ *і*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0,$$

то закон розподілу суми $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *при* $n \to \infty$ *необмежено наближається до нормального з математичним сподіванням* $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ *і дисперсією* $\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Необмежене наближення закону розподілу суми $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ до нормального закону при $n \to \infty$ у відповідності з властивостями нормального закону означає, що

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\frac{Y_n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}\right| \le z\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \Phi(z).$$

Суть умови теореми Ляпунова полягає в тому, щоб у сумі $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ не було доданків, вплив яких на розсіювання Y_n дуже великий порівняно з впливом усіх інших, а також не повинно бути більшої кількості випадкових доданків, вплив яких дуже малий порівняно з сумарним впливом решти. Таким чином, питома вага кожного окремого доданку прямує до нуля при збільшенні числа доданків.

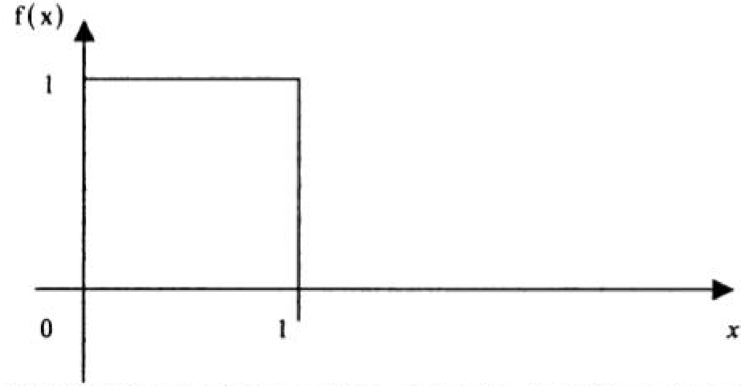
Так, наприклад, споживання електроенергії для побутових потреб за місяць у кожній квартирі багатоквартирного будинку можна подати у вигляді *n* різних випадкових величин. Якщо споживання електроенергії в кожній квартирі за своїм значенням різко не виділяється серед інших, то на підставі теореми Ляпунова можна вважати, що споживання електроенергії всього будинку, тобто сума *n* незалежних випадкових величин, буде випадковою величиною, яка має приблизно нормальний закон розподілу. Якщо, наприклад, в одному з приміщень будинку розміститься обчислювальний центр, у якого рівень споживання електроенергії незрівнянно вищий, ніж у кожній квартирі для побутових потреб, то висновок про приблизно нормальний розподіл споживання електроенергії всього будинку буде неправомірним, оскільки порушена умова теореми Ляпунова, бо споживання електроенергії обчислювальним центром гратиме головну роль в утворенні всієї суми споживання.

Інший приклад. При стійкому і налагодженому режимі роботи верстатів, однорідного оброблюваного матеріалу і т.і. варіювання якості продукції набуває форми нормального закону розподілу внаслідок того, що виробнича похибка є результатом сумарної дії великої кількості випадкових величин: похибки верстата, інструменту, робітника тощо.

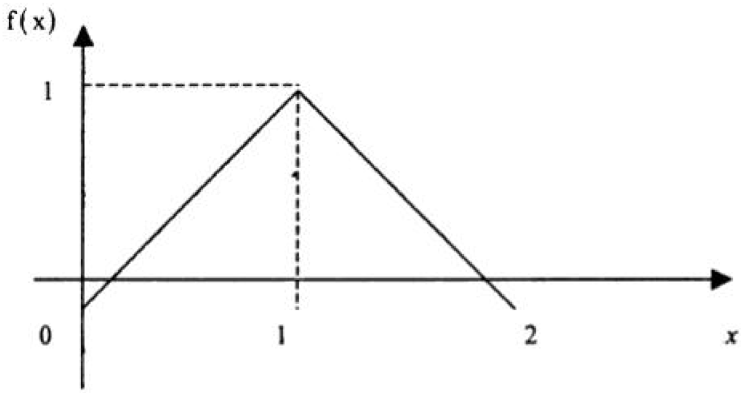
Наслідок. *Якщо* $X_1, X_2, ..., X_n$ *— незалежні випадкові величини, для яких існують рівні математичні сподівання* $M(X_i) = a$, *дисперсії* $D(X_i) = \sigma^2$ *і абсолютні центральні моменти третього порядку* $M\left(|X_i - a_i|^3\right) = m_i \; (i = 1, 2, ..., n)$, *то закон розподілу суми* $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ *при* $n \to \infty$ *необмежено наближається до нормального закону.*

Зокрема, якщо всі випадкові величини X_i однаково розподілені, то закон розподілу їх суми необмежено наближається до нормального закону при $n \to \infty$.

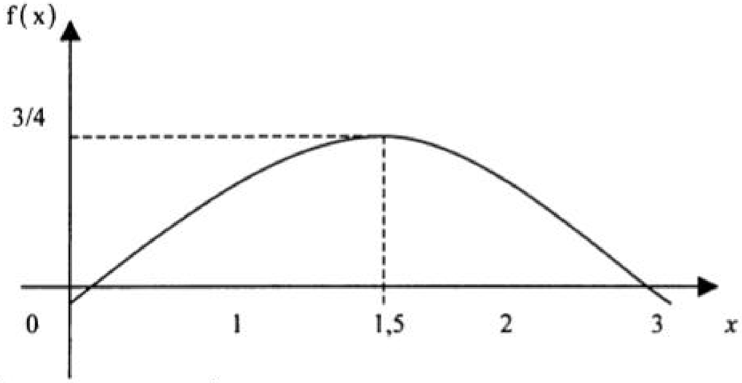
Проілюструємо це твердження на прикладі підсумовування незалежних випадкових величин, що мають рівномірний розподіл на інтервалі (0, 1). Крива розподілу однієї такої випадкової величини показана на малюнку:



На наступному малюнку маємо щільність ймовірності суми двох таких випадкових величин:



Щільність ймовірності суми трьох таких випадкових величин подана на наступному малюнку (її графік складається з трьох відрізків парабол на інтервалах (0, 1), (1, 2) і (2, 3) і на вигляд вже нагадує нормальну криву):



Якщо додати шість таких випадкових величин, то вийде випадкова величина з щільністю ймовірності, яка практично не відрізняється від нормальної.

Необхідно обережно застосовувати центральну граничну теорему в статистичних дослідженнях. Так, якщо сума $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ при $n \to \infty$ завжди має нормальний закон розподілу, то швидкість збіжності до нього істотно залежить від типу розподілу її доданків. Так, наприклад, при підсумовуванні рівномірно розподілених випадкових величин вже при 6—10 доданках можна досягти достатньої близькості до нормального закону, тоді як для досягнення тієї ж близькості при підсумовуванні χ^2— розподілених випадкових доданків знадобиться більше 100 доданків.

Спираючись на центральну граничну теорему, можна стверджувати, що розглянуті випадкові величини, що мають закони розподілу — біноміальний, Пуассона, гіпергеометричний, χ^2 („хі-квадрат"), Стьюдента при $n \to \infty$, розподілені асимптотично нормально.

Приклад 7. Дисперсія кожної з 4500 незалежних, однаково розподілених випадкових величин дорівнює 5. Знайти ймовірність того, що середнє арифметичне цих випадкових величин відхиляється від свого математичного сподівання не більше, ніж на 0, 04.

Розв'язування:

▼ Нехай ξ_k – дані однаково розподілені випадкові величини. Оскільки n=4500 – велике і випадкові величини незалежні, однаково розподілені та мають скінченну дисперсію, то можна застосувати центральну граничну теорему.

Таким чином,

$$P\{\frac{1}{4500}\left|\sum_{k=1}^{4500}(\xi_k - M(\xi_k))\right| \le 0,04\} =$$

$$= P\left\{\frac{1}{150}\left|\sum_{k=1}^{4500}(\xi_k - M(\xi_k))\right| \le 0,04\sqrt{\frac{4500}{5}}\right\} \cdot ▲$$

Приклад 8. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку $[0;0,12]$. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Розв'язування:

▼ Знайдемо числові характеристики для X_i: $M(X_i) = 0,06; D(X_i) = 0,1$. Тоді

$$M(Y) = M(\sum_{i=1}^{100} X_i) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot 0,06 = 6.$$

$$D(Y) = D(\sum_{i=1}^{100} X_i) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot 0,1 = 10.$$

На підставі центральної граничної теореми маємо:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{20}}, -\infty < y < \infty. ▲$$

2) Теорема Муавра-Лапласа

У загальному випадку випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$, що розглядаються в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні закони розподілу.

Якщо X_i є дискретними і мають лише два значення: $P(X_i = 0) = q, P(X_i = 1) = p$, то приходимо до теореми Муавра-Лапласа, яка є найпростішим випадком центральної граничної теореми.

Якщо здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких ймовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то для інтервалу $[\alpha; \beta)$ *справедлива рівність:*

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}).$$

Приклад 9. Завод виготовляє 80% виробів першого сорту. Навмання вибирають 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язування:

▼ За умовою $p = 0.8; q = 0.2; n = 800; \alpha = 600; \beta = 680$.

Обчислимо: $np = 800 \cdot 0,8 = 640; \sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0,8 \cdot 0,2} = 11,3$.

Тоді

$$P(600 < y < 680) = \Phi(\frac{680 - 640}{11,3}) - \Phi(\frac{600 - 640}{11,3}) = 2\Phi(\frac{40}{11,3}) = \blacktriangle$$

$$= 2\Phi(3,5) = 2 \cdot 0,49977 = 0,99954$$

Приклади розв'язування задач на закони великих чисел.

Приклад 1. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ задана законом розподілу:

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_n	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

Чи можна застосувати до заданої послідовності теорему Чебишева?

Розв'язування:

▼ Для того, щоб до заданої послідовності випадкових величин була застосовна теорема Чебишева, достатньо, щоб ці величини були попарно незалежні, мали скінченне математичне сподівання та рівномірно обмежені дисперсії.

Оскільки випадкові величини незалежні за умовою, то перша вимога теореми Чебишева виконується.

Перевіримо, чи виконується вимога скінченності математичних сподівань: $M(\xi_n) = -n\alpha\frac{1}{2n^2} + 0\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n\alpha\cdot\frac{1}{2n^2} = 0$.

Таким чином, кожна випадкова величина має скінченне (рівне нулю) математичне сподівання , тобто друга умова теореми виконана.

Перевіримо, чи виконується вимога рівномірної обмеженості дисперсії. Запишемо закон розподілу ξ_n^2 :

ξ_n^2	$n^2\alpha$	0	$n^2\alpha$
p	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

$$M(\xi_n{}^2) = n^2\alpha^2\cdot\frac{1}{n^2} = \alpha^2;\ D(\xi_n) = M\xi_n{}^2 - [M\xi_n]^2 = \alpha^2$$

Звідси випливає, що дисперсії заданих випадкових величин рівномірно обмежені числом α^2. Таким чином, до заданої послідовності випадкових величини можна застосувати теорему Чебишева. ▲

__Приклад 2.__ Чому вартість акції краще описується логнормальним розподілом, ніж нормальним?

Розв'язування:

▼ У період часу (n-1) інвестор купує деяку акцію по ціні s_{n-1}, а в момент n продає її по ціні s_n, забезпечуючи дохідність $\rho_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_{n-1}}$. Припустимо, що дохідність ρ_n у будь-який момент часу $n = 1,2,3,...$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з математичним сподіванням (очікуваної дохідності) α_n і середнім квадратичним відхиленням σ_n. Нехай в початковий момент акція коштувала S_0 грошових одиниць, тоді в момент n її вартість становитиме $S_0=S_0(1+p_1)(1+p_2)...(1+p_n)$. Перетворимо цю формулу:

$$S_n=S_0(1+p_1)(1+p_2)...(1+p_n)=S_0e^{\ln\left[(1+p_1)(1+p_2)...(1+p_n)\right]}=$$

$$=S_0e^{\ln(1+p_1)+\left(1+p_2\right)+...\left(1+p_n\right)}=S_0e^{h_1+h_2+...+h_n},$$

де $h_i=\ln(1+p_i)$, $(i=\overline{1,n})$.

Розіб'ємо відрізок $[0;t]$ на n частин та спрямуємо n до нескінченності. Тоді, за центральною граничною теоремою, сума $H_t=\lim\limits_{n\to\infty}(h_1+h_2+...h_n)$ буде розподілена за нормальним законом. Отже, оскільки випадкова величина $\ln S_t=H_t+\ln S_0$ буде розподілена за нормальним законом, то S_t буде мати логнормальний розподіл. ▲

Приклад 3. Ймовірність смерті тридцятилітнього чоловіка становить 0,006. Страхова компанія уклала 10000 страхових контрактів з чоловіками віком тридцять років, згідно з якими у разі смерті застрахованої особи протягом найближчого року його спадкоємцям виплачується 100000 грн. Сума одного контракту рівна 1200грн. Знайти ймовірність наступних подій: а) до кінця року страхова компанія матиме збитки; б) дохід страхової компанії перевищить 4000 000 грн.

Розв'язування:

▼ Нехай за рік настало k страхових випадків, тоді дохід страхової компанії складатиме П=10 000*1 200 — 100 000k=100000*(120-k) грн. Тому компанія матиме збитки (П<0), якщо за рік настане більше 120 страхових випадків (тобто від 121 до 10 000 страхових випадків). Дохід страхової компанії перевищить 4000000 грн. (П>4 000000), якщо за рік настане менше 80 страхових випадків. Ймовірність настання страхового випадку $P=0,006$. Всього проводиться $n=10000$ випробувань. Оскільки число випробувань n велике, а добуток $np=60>10$, можна використати інтегральну теорему Муавра-

Лапласа:

$$10\,000(121;10\,000) \approx \Phi\left(\frac{10000-60}{\sqrt{60*(1-0,006)}}\right) - \Phi-\left(\frac{121-60}{\sqrt{60*(1-0,006)}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{9940}{\sqrt{59,64}}\right) - \Phi\left(\frac{61}{\sqrt{59,64}}\right) = \Phi(1287,56) - \Phi(7,90) \approx 0,5 - 0,5 = 0,$$

тобто страхова компанія матиме збитки з нульовою ймовірністю;

$$10000(0;80) \approx \Phi\left(\frac{80-60}{\sqrt{60*(1-0,006)}}\right) - \Phi\left(\frac{0-60}{\sqrt{60*(1-0,006)}}\right) = \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{59,64}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{60}{\sqrt{59,64}}\right) = \Phi(2,589) - (-7,77) = \Phi(2,589) + \Phi(7,77) \approx$$

$$\approx 0,495 + 0,5 = 0,995.$$

отже, дохід страхової компанії перевищить 4000000 грн. з імовірністю, близькою до одиниці, тобто майже напевне. ▲

БАГАТОВИМІРНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. СИСТЕМА ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба виникає, наприклад, коли досліджуваний процес чи явище характеризується кількома випадковими параметрами.

Коли результат випробування характеризується не однією випадковою величиною, а деякою системою випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, то таку систему випадкових величин називають багатовимірною випадковою величиною.

Наприклад, успішність студента характеризується системою n випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ – оцінками з різних дисциплін у дипломі. Стан погоди в певній місцевості в певний час доби характеризується системою випадкових величин: X_1 – температура повітря, X_2 – вологість повітря, X_3 – атмосферний тиск, X_4 – швидкість вітру тощо.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін усі основні означення, які були розглянуті для одновимірної випадкової величини.

У теоретико-множинному трактуванні будь-яка випадкова величина $X_i (i = 1, 2, 3, ..., n)$ є функцією елементарних подій ω, які входять до простору елементарних подій $\Omega (\omega \in \Omega)$. Тому і *багатовимірна випадкова величина* є функцією елементарних подій ω: $(X_1, X_2, ..., X_n) = f(\omega)$, тобто кожній елементарній події ω ставиться у відповідність декілька дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, значень яких набули випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ в результаті випробування. В цьому випадку вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ називають *реалізацією випадкового вектора* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$, які входять у систему, можуть бути *дискретними, неперервними і мішаними.*

Геометрично двовимірну $(X;Y)$ та тривимірну $(X;Y;Z)$ випадкові величини можна зобразити випадковою точкою або випадковим вектором площини OXY чи тривимірного простору $OXYZ$; при цьому випадкові величини X, Y та X, Y, Z є *складовими (компонентами)* цих векторів. У випадку n-вимірного простору ($n>3$) також говорять про випадкові точки або випадкові вектори цього простору, хоча геометрична інтерпретація в цьому випадку втрачає свою наочність.

1. Система двох дискретних випадкових величин та їх умовні закони розподілу

Законом розподілу дискретної двовимірної випадкової величини називають перелік усіх можливих значень цієї величини, тобто пар чисел (x_i, y_j) та їх ймовірностей $p(x_i, y_j)$ ($i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m$).

Для двовимірної дискретної випадкової величини $(X;Y)$ закон розподілу задають у вигляді ***таблиці (матриці) розподілу***:

X	Y					
	y_1	...	y_j	...	y_m	$\sum_{i=1}^{n} Px_i$
x_1	$p(x_1;y_1)$	...	$p(x_1;y_j)$	...	$p(x_1;y_m)$	p_1
...	...	...	...	...	...	...
x_i	$p(x_i;y_1)$	...	$p(x_i;y_j)$	...	$p(x_i;y_m)$	p_i
...	...	...	...	...	...	...
x_n	$p(x_n;y_1)$	...	$p(x_n;y_j)$	...	$p(x_n;y_m)$	p_n
$\sum_{j=1}^{m} Py_j$	p_1	...	$\dot{p}_j$	...	p_m	1

Перший рядок таблиці містить усі можливі значення складової X, а перший стовпчик – всі можливі значення складової Y. У клітинці, яка стоїть на перетині рядка x_i та стовпчика y_j, вказана ймовірність $p(x_i, y_j)$ того, що двовимірна випадкова величина набуде значення (x_i, y_j).

Оскільки події $(X = x_i; Y = y_j)(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m)$ несумісні і єдино можливі, тобто утворюють повну групу, то сума ймовірностей, розміщених в усіх клітинках таблиці, рівна одиниці: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Підсумкові стовпчик та рядок таблиці розподілу $(X; Y)$ є розподілами одновимірних складових $(x_i, p_i); (y_j, p_j)$.

Дійсно, розподіл одновимірної випадкової величини X можна отримати, обчисливши ймовірність події $X = x_i (i = 1, 2, ..., n)$ як суму ймовірностей несумісних подій:

Аналогічно $p_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Таким чином, *щоб за таблицею розподілу знайти ймовірність того, що одновимірна випадкова величина набуде певного значення, потрібно додати ймовірності* p_{ij} *із відповідного цьому значенню рядка чи стовпчика даної таблиці.*

Основні числові характеристики для дискретних випадкових величин X, Y, що утворюють систему $(X; Y)$ обчислюють за формулами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - M^2(X);$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij};$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij}-M^2(Y);\ \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}.$$

Якщо зафіксувати значення одного з аргументів, наприклад, покласти $Y=y_j$, то отриманий розподіл випадкової величини X називається ***умовним розподілом X за умови*** $Y=y_j$. Ймовірності $p_j(x_i)$ цього розподілу будуть умовними ймовірностями події $X=x_i$, знайденими за умови, що подія $Y=y_j$ відбулася. За визначенням умовної ймовірності:

$$p_j(x_i)=\frac{P((X=x_i)(Y=y_j))}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогічно ***умовний розподіл випадкової величини Y за умови*** $X=x_i$ задається з допомогою умовних ймовірностей:

$$p_i(y_j)=\frac{P((X=x_i)(Y=y_j))}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_i}$$

Приклад 1. Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ заданий матрицею розподілу:

X	**Y**			
	-1	**0**	**1**	**2**
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0,00	0,05

Знайти: а) закони розподілів одновимірних випадкових величин X та Y;

б) умовні закони розподілу випадкової величини X за умови Y=2 та випадкової величини Y за умови X=1;

в) обчислити $P(Y<X)$.

Розв'язування:

▼ а) Випадкова величина X може набувати значень:

X=1 з імовірністю $p_1=0{,}10+0{,}25+0{,}30+0{,}15=0{,}8$;

X=2 з імовірністю $p_2=0{,}10+0{,}05+0{,}00+0{,}05=0{,}2$,

тобто її закон розподілу має вигляд:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

Аналогічно закон розподілу Y:

y_j	-1	0	1	2
p_j	0,2	0,3	0,3	0,2

б) Умовний закон розподілу X за умови, що Y=2, отримаємо, якщо ймовірності p_{ij}, які стоять в останньому стовпчику матриці розподілу, розділимо на їх суму, тобто $p(Y=2)=0,2$. Отримаємо:

x_i	1	2
$p_j(x_i)$	$\frac{0,15}{0,2}=0,75$	$\frac{0,05}{0,2}=0,25$

Аналогічно, щоб отримати умовний закон розподілу Y за умови X=1, ймовірності p_{ij}, які стоять у першому рядку матриці розподілу, розділимо на їх суму, тобто $p(X=1)=0,8$. Отримаємо:

y_j	-1	0	1	2
$p_i(y_j)$	$\frac{0,1}{0,8}=0,125$	$\frac{0,25}{0,8}=0,3125$	$\frac{0,3}{0,8}=0,375$	$\frac{0,15}{0,8}=0,1875$

в) Щоб знайти ймовірність $P(Y<X)$, додаємо ймовірності подій p_{ij} з матриці розподілу, для яких $y_j<x_i$.

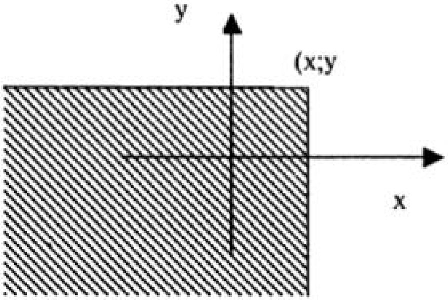
Отримаємо: $P(Y<X)=0,10+0,25+0,05+0,00=0,5$ ▲

2. Функція розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин

Розглянемо двохвимірну випадкову величину $(X;Y)$ (не має різниці, дискретну чи неперервну). Нехай x, y – пара дійсних чисел. Ймовірність події, яка полягає у тому, що X набуває значення меншого x, і при цьому Y набуде значення, меншого y, позначимо $F(x;y)$. Якщо x та y будуть змінюватись, то, взагалі кажучи, буде змінюватись і $F(x;y)$, тобто $F(x;y)$ є функцією від x та y.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ називають функцію $F(x;y)$, яка виражає для кожної пари чисел x, y ймовірність одночасного виконання нерівностей: $F(x;y)=P(X<x;Y<y)$.

Геометрично цю рівність можна тлумачити так: $F(x;y)$ є ймовірність того, що випадкова точка $(X;Y)$ потрапить у нескінченний квадрант з вершиною $(x;y)$, розміщений лівіше і нижче від цієї вершини.



Властивості функції розподілу двовимірної випадкової величини:

1. $0 \le F(x;y) \le 1$.

2. *Функція розподілу* $F(x;y)$ *неспадна за кожним із аргументів.*

Якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2;y) \ge F(x_1;y)$, *якщо* $y_2 > y_1$, то $F(x;y_2) \ge F(x;y_1)$.

3. *Якщо хоча б один із аргументів перетворюється в* $-\infty$, *функція розподілу* $F(x;y)$ *рівна 0, тобто*

$F(x;-\infty)=F(-\infty;y)=F(-\infty;-\infty)=0$.

4. *Якщо один з аргументів перетворюється в* $+\infty$, *функція розподілу* $F(x;y)$ *стає рівною функції розподілу випадкової величини, яка відповідає другому аргументу:*

$F(x;+\infty)=F_1(x)$,

$F(+\infty;y)=F_2(y)$,

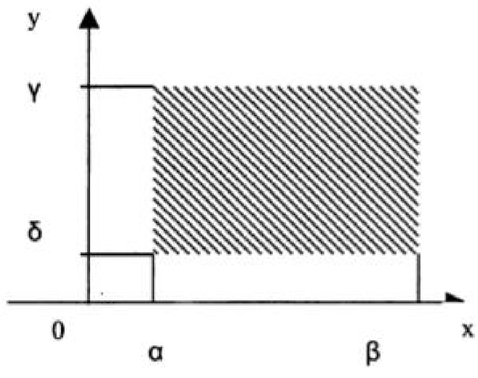
де $F_1(x)=P(X<x), F_2(y)=P(Y<y)$.

5. *Якщо обидва аргументи рівні* $+\infty$, *то функція розподілу рівна 1:*

$F(+\infty;+\infty)=1$.

Ймовірність подання випадкової точки $(X;Y)$ **в прямокутну область** обчислюється за формулою:

$$P(a\le X\le \beta;\delta\le Y\le \gamma)= F(\beta,\gamma)- F(\beta,\delta)- F(a,\gamma)+ F(a,\delta).$$



Приклад 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування складова X двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ набуде значення $X<2$ і при цьому складова Y набуде значення $Y<3$, якщо відома функція розподілу системи: $F(x;y)=(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}+\frac{1}{2})$.

Розв'язування:

▼ За визначенням функції розподілу двовимірної випадкової величини, $F(x;y)=P(X<x;Y<y)$. Покладемо x=2, y=3. Отримаємо шукану ймовірність

$$P(X<2;Y<3)=F(2;3)=(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{3}+\frac{1}{2})=$$

$$=(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})\cdot(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}.$$ ▲

3. Щільність ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин

Двовимірна випадкова величина $(X;Y)$ називається ***неперервною***, якщо її функція розподілу $F(x;y)$ — неперервна функція, диференційована за кожним зі своїх аргументів та існує друга мішана похідна $F''_{xy}(x;y)$.

Аналогічно до одновимірного випадку ймовірність пари окремо взятих значень двовимірної неперервної випадкової величини рівна 0, тобто $P(X=x_1; Y=y_1)=0$.

Для двовимірної випадкової величини, так як і для одновимірної, уводиться поняття щільності ймовірності.

Щільністю ймовірностей (***щільністю розподілу або сумісною щільністю***) неперервної випадкової величини $(X;Y)$ називається друга мішана частинна похідна її функції розподілу, тобто

$$f(x;y)=\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}=F''_{xy}(x;y).$$

Геометрично щільність ймовірностей двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ є ***поверхнею розподілу*** в просторі $oxyz$.

Властивості щільності ймовірностей $f(x;y)$

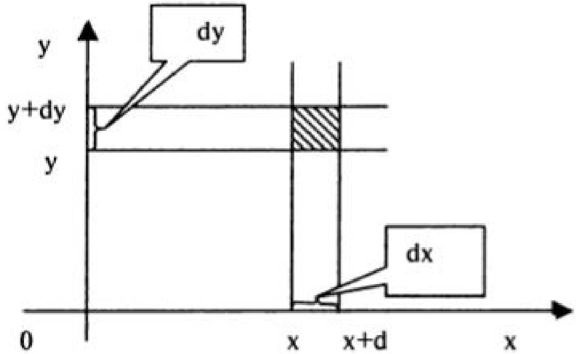
(аналогічні до властивостей щільності ймовірностей одновимірної випадкової величини)

1. Щільність ймовірностей двовимірної випадкової величини – функція невід'ємна, тобто $f(x;y)\geq 0$.

2. Ймовірність попадання неперервної двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ *в область D рівна:*

$$P((X;Y)\in D)=\iint\limits_D f(x;y)dxdy.$$

Пояснимо це геометрично. Подібно до того, як для одномірної величини X вводилося поняття „елемент ймовірності", рівний $f(x)dx$, для двовимірної випадкової величини (X,Y) вводиться також поняття „елемент ймовірності", рівний $f(x,y)dxdy$. Він є (з точністю до нескінченно малих більш високих порядків) ймовірністю потрапляння випадкової величини (X,Y) в елементарний прямокутник зі сторонами dx та dy.



Ця ймовірність наближено рівна об'єму елементарного паралелепіпеда з висотою $f(x,y)$, що спирається на елементарний прямокутник з сторонами dx та dy.

Якщо ймовірність потрапляння одновимірної випадкової величини на відрізок $[a,b]$ геометрично виражалася площею фігури, обмеженої зверху кривою розподілу $f(x)$, що спирається на відрізок $[a,b]$, аналітично виражалася інтегралом $\int_a^b f(x)dx$, то ймовірність потрапляння двовимірної випадкової величини в область D на площині Oxy геометрично зображується об'ємом циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею розподілу $f(x,y)$, що спирається на область D, а аналітично – подвійним інтегралом.

3. Функцію розподілу неперервної двовимірної випадкової величини можна виразити через її щільність ймовірностей $f(x;y)$ *за формулою:*

$$F(x;y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x;y)dxdy.$$

4. Подвійний невласний інтеграл з нескінченними межами від щільності ймовірностей двовимірної випадкової величини дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy=1$$

(повний об'єм тіла, обмеженого поверхнею розподілу та площиною Oxy, *дорівнює 1).*

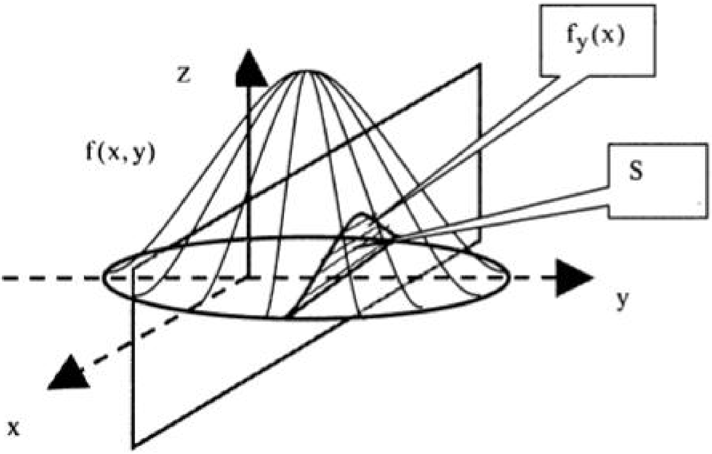
5. ***Знаючи щільність ймовірностей двовимірної випадкової величини*** $(X;Y)$, ***можна знайти функції розподілу та щільності ймовірностей її одновимірних складових X та Y за формулами:***

$$F(x)=F(x;\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dxdy,$$

$$F(y)=F(\infty;y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x;y)dxdy;$$

$$f(x)=F'(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dy,\quad f(y)=F'(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx.$$

Якщо маємо криву розподілу $f(x)$ одновимірної випадкової величини X, то конкретне значення її щільності ймовірностей в даній точці x визначається геометрично *ординатою* кривої $f(x)$. Якщо маємо поверхню розподілу $f(x,y)$ двовимірної випадкової величини (X,Y), то конкретне значення її сумісної щільності в даній точці (x,y) визначається геометрично *аплікатою* поверхні $f(x,y)$. У цьому випадку конкретне значення щільності ймовірностей $f_1(x)$ одновимірної складової X у даній точці x визначається геометрично площею перерізу поверхні $f(x,y)$ площиною $X=x$, паралельною координатній площині Oyz, що відтинає на осі Ox відрізок x. Аналогічно конкретне значення щільності $f_1(y)$ одновимірної складової Y в даній точці y є площа перерізу поверхні $f(x,y)$ площиною $Y=y$, паралельною координатній площині Oxz, що відтинає на осі Oy відрізок y.



Основні числові характеристики для неперервних випадкових величин X, Y, що утворюють систему $(X;Y)$ обчислюють за формулами:

$$M(X)=\iint\limits_{\Omega} xf(x;y)dxdy\,;$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\iint\limits_{\Omega} x^2 f(x;y)dxdy-M^2(X)\,;$$

$$M(Y)=\iint\limits_{\Omega} yf(x;y)dxdy\,;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=\iint\limits_{\Omega} y^2 f(x;y)dxdy-M^2(Y)\,;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)},\sigma_y=\sqrt{D(Y)}\,.$$

Приклад 3. Знайти щільність сумісного розподілу $f(x;y)$ системи випадкових величин $(X;Y)$ за відомою функцією розподілу:

$$F(x;y)=\sin x\cdot\sin y(0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}).$$

Розв'язування:

▼ За визначенням щільності сумісного розподілу:

$$f(x;y)=\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}=F''_{xy}(x;y).$$

Знайдемо частинну похідну по x від функції розподілу:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\cos x\cdot \sin y.$$

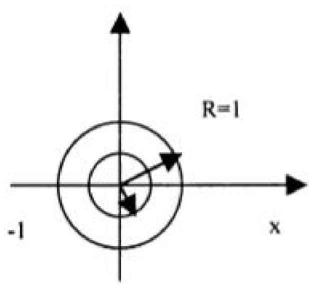
Знайдемо від отриманого результату частинну похідну по y, і в результаті отримаємо шукану щільність сумісного розподілу:

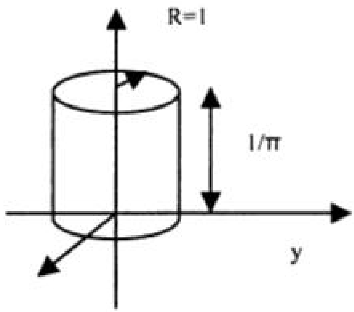
$$f(x;y)=\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x \partial y}=\cos x\cdot \cos y\left(0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \frac{\pi}{2}\right).$$ ▲

Приклад 4. Двовимірна випадкова величина розподілена рівномірно в крузі $R=1$. Знайти: а) вираз сумісної щільності і функції розподілу двохвимірної випадкової величини $(X;Y)$; б) щільності ймовірностей та функції розподілу одновимірних складових X та Y; в) ймовірність того, що відстань від точки $(X;Y)$ до початку координат буде меншою $\frac{1}{3}$.

Розв'язування:

▼ а) За умовою $f(x;y)=\begin{cases} C, x^2+y^2\le 1 \\ 0, x^2+y^2>1 \end{cases}$.





Сталу C знайдемо з умови нормування:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dxdy = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} Cdxdy = 1.$$

Простіше це зробити, виходячи з геометричного змісту щільності ймовірностей двовимірної випадкової величини (див. властивість 4), яке означає, що об'єм тіла, обмеженого поверхнею розподілу $f(x;y)$ та площиною OXY, дорівнює 1. В даній задачі, це об'єм циліндра з площею основи $\pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$ з висотою C, рівний $\pi \cdot C = 1$, звідки $C = \frac{1}{\pi}$. Отже,

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 \le 1 \\ 0, x^2 + y^2 > 1 \end{cases}.$$

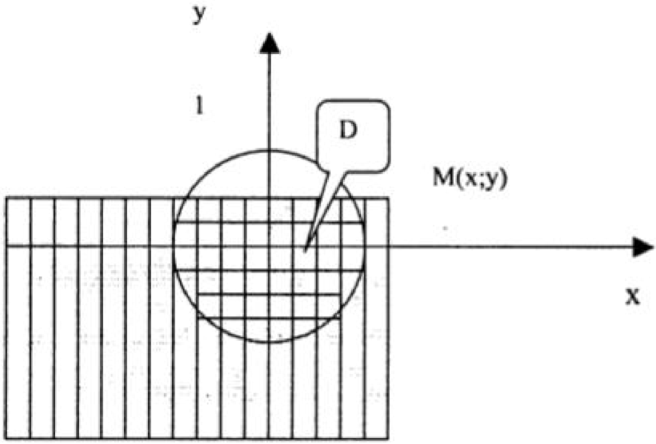
Знайдемо функцію розподілу $F(x;y)$ за відомою щільністю ймовірностей:

$$F(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x;y)dxdy = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} dy.$$

Очевидно, що цей інтеграл з точністю до множника $\frac{1}{\pi}$ співпадає з площею області D – області перетину круга $x^2 + y^2 \le 1$ з нескінченним квадрантом лівіше і нижче від точки $M(x;y)$ (дивись на наступному рисунку).

Щоб підрахувати цей інтеграл, потрібно розглянути декілька різних можливих випадків розміщення круга та квадранта. Очевидно, що при $x \le -1, -\infty < y < \infty, F(x;y) = 0$, оскільки у цьому випадку область D — порожня, а при $x > 1, y > 1, F(x;y) = 1$, оскільки при цьому область D повністю співпадає з кругом $x^2 + y^2 \le 1$, на якому сумісна щільність $f(x;y)$ відмінна від нуля.

б) Знайдемо функції розподілу одновимірних складових X та Y.



При $-1< x\le 1$ будемо мати:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dxdy=\int\limits_{-1}^{x}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{x}(y\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}})dx=\frac{1}{\pi}$$

$$\int\limits_{-1}^{x}2\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{\pi}((x\sqrt{1-x^2})+\arcsin x\Big|_{-1}^{x})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$$

Отож,

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le -1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x), -1< x\le 1.\\ 1, x>1\end{cases}$$

$$F(y)=\begin{cases}0, y\le -1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y), -1< y\le 1.\\ 1, y>1\end{cases}$$

Знайдемо щільності ймовірностей одновимірних складових X та Y:

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dy=\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,(-1\le x\le 1);$$

$$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dx=\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,(-1\le y\le 1)..$$

в) Шукану ймовірність $P(\sqrt{X^2+Y^2}<\frac{1}{3})=P(X^2+Y^2<\frac{1}{9})$, тобто ймовірність того, що випадкова точка $(X;Y)$ буде знаходитись в крузі радіусом $R=\frac{1}{3}$, можна було знайти за формулою обчислення ймовірності попадання випадкової величини $(X;Y)$ в область $P(X^2+Y^2<\frac{1}{9})=\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\int\limits_{-\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}}\frac{1}{\pi}dxdy$, але простіше це зробити, використовуючи поняття „геометричної ймовірності", тобто $P(X^2+Y^2<\frac{1}{9})=(\pi R^2{}_1)/(\pi R^2)=\frac{R^2{}_1}{R^2}=(\frac{1}{3})^2/1^2=\frac{1}{9}$. ▲

4. Числові характеристики та умовні закони розподілу системи двох неперервних випадкових величин

Умовним законом розподілу однієї з одновимірних складових неперервної двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ називають її закон розподілу, обчислений за умови, що інша складова набула певного значення (або потрапила в певний інтервал).

Щоб записати формули підрахунку числових характеристик, потрібно в формулах для дискретних двовимірних випадкових величин замінити ймовірності подій на „елементи ймовірності", тобто $P((X=x_i)(Y=y_j))$ на $f(x;y)dxdy$, $P(X=x_i)$ на $f(x)dx$, $P(Y=y_j)$ на $f(y)dy$:

$$f(y/x)=\frac{f(x;y)}{f(x)}=\frac{f(x;y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dy}$$

Аналогічно,

$$f(x/y)=\frac{f(x;y)}{f(y)}=\frac{f(x;y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x;y)dx}.$$

З останніх двох рівностей дістаємо:

$$f(x;y)=f(x)\cdot f(y/x)=f(y)\cdot f(x/y).$$

Для умовних законів розподілу неперервних випадкових величин умова нормування має вигляд:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x/y)dx=1,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y/x)dy=1.$$

Якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то

$$f(x/y)=f(x), f(y/x)=f(y) \Rightarrow f(x;y)=f(x)\cdot f(y), F(x;y)=F(x)\cdot F(y)$$

Числові характеристики для умовних законів розподілу ймовірностей обчислюють за формулами:

$$M(X/y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx,$$

$$M(Y/x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy,$$

$$D(X/y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x/y)dx-M^2(X/y),$$

$$D(Y/x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2f(y/x)dy-M^2(Y/x).$$

Приклад 5. За даними прикладу 4 знайти: а) умовні щільності випадкових величин X та Y; б) залежні чи незалежні випадкові величини X та Y; в) умовні математичні сподівання та умовні дисперсії.

Розв'язування:

▼ а) Знайдемо умовні щільності випадкових величин X та Y:

$$f(x/y)=\frac{f(x;y)}{f(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, |x|<\sqrt{1-y^2}\\ 0, |x|>\sqrt{1-y^2}\end{cases}$$

Аналогічно

$$f(y/x)=\frac{f(x;y)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, |y|<\sqrt{1-x^2}\\ 0, |y|>\sqrt{1-x^2}\end{cases}$$

б) X та Y – залежні випадкові величини, тому що $f(x;y)\neq f(x)\cdot f(y)$ або $f(x/y)\neq f(x), f(y/x)\neq f(x)$.

в) Знайдемо умовне математичне сподівання $M(Y/x)$, враховуючи, що $f(y/x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

$$M(Y/x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}ydy=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Аналогічно $M(X/y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx=0$.

Цей результат очевидний тому, що круг $x^2+y^2\leq 1$ симетричний відносно координатних осей. Таким чином, лінія регресії Y по X співпадає з віссю ох, а лінія регресії X по У – з віссю оу.

Знайдемо умовну дисперсію $D(Y/x)$:

$$D(Y/x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-M(Y/x))^2 f(y/x)dy=\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}y^2dy=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{(1-x^2)^3}=\frac{1-x^2}{3}(0\le x\le 1).$$

(такий самий результат можна було отримати простіше – за формулою дисперсії рівномірного закону розподілу:

$$D(Y/x)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(\sqrt{1-x^2}-(-\sqrt{1-x^2}))^2}{12}=\frac{1-x^2}{3}).$$

Аналогічно, $D(X/y)=\frac{1-y^2}{3}(0\le y\le 1)$. Таким чином, із віддаленням від початку координат дисперсія умовних розподілів зменшується від $\frac{1}{3}$ до 0. ▲

5. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції

Вище було дане поняття ***незалежності*** дискретних випадкових величин X та Y, яке базується на незалежності пов'язаних з ними подій $X=x_i, Y=y_j$ при будь-яких i,j. Також було наведене більш загальне визначення незалежності випадкових величин, яке базується на незалежності подій $X<x, Y<y$, тобто функцій розподілів $F(x), F(y)$ (для незалежних випадкових величин $F(x;y)=F(x)\cdot F(y)$). Інакше, при невиконанні останньої рівності, випадкові величини X та Y називають ***залежними***. Диференціюючи двічі останню рівність по x та по y, отримаємо: $f(x;y)=f(x)\cdot f(y)$. Незалежність двох випадкових величин X та Y означає, що умовні щільності ймовірностей кожної з них співпадають з відповідними „безумовними" щільностями.

До цього часу йшлося тільки про ***функціональні залежності*** між змінними X та Y, коли кожному значенню x однієї змінної відповідало одне або декілька точно заданих значень y іншої. (При

$y=\sqrt{x}$ – зв'язок між y та x є строго функціональним, але значенню $x=4$ відповідає не одне, а два значення $y=\pm 2$). Наприклад, залежність між кількістю одиниць обладнання, що вийшло з ладу за певний період часу, і вартістю цього обладнання – функціональна.

У загальному випадку при невиконанні умов незалежності мають справу з залежністю іншого типу.

Залежність між двома випадковими величинами називається ***ймовірнісною (стохастичною або статистичною)***, якщо кожному значенню однієї з них відповідає певний (умовний) розподіл іншої.

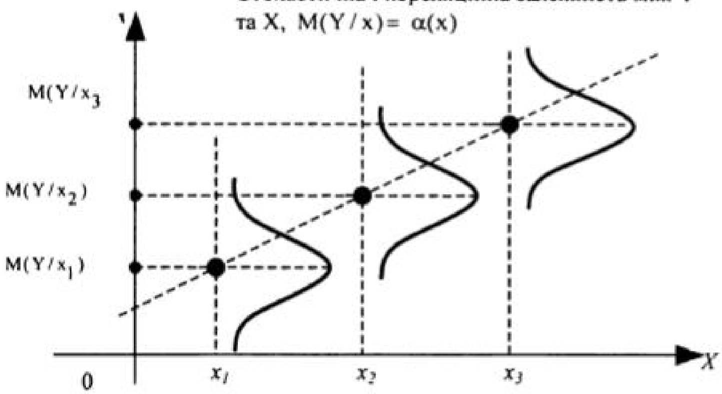
Стохастична залежність проявляється не в кожному окремому випадку, а взагалі, в середньому, при великій кількості випробувань. При такій залежності неможливо, знаючи значення однієї з випадкових величин, точно визначити значення іншої, а можна тільки вказати розподіл іншої величини. Наприклад, залежність між зростом дітей і зростом батьків стохастична. В сім'ях, де батьки більш високого зросту, діти в середньому вищі від батьків. І навпаки, в сім'ях, де батьки нижчі на зріст, діти в середньому вищі від батьків. Між кількістю зібраного врожаю з певної ділянки землі та кількістю внесених добрив теж існує стохастична залежність, оскільки врожайність залежить ще від багатьох інших факторів.

Якщо між випадковими величинами існує стохастична залежність, то за значенням однієї з них можна встановити тільки умовний розподіл ймовірностей другої, тобто визначити, з якою ймовірністю з'явиться те чи інше значення іншої величини.

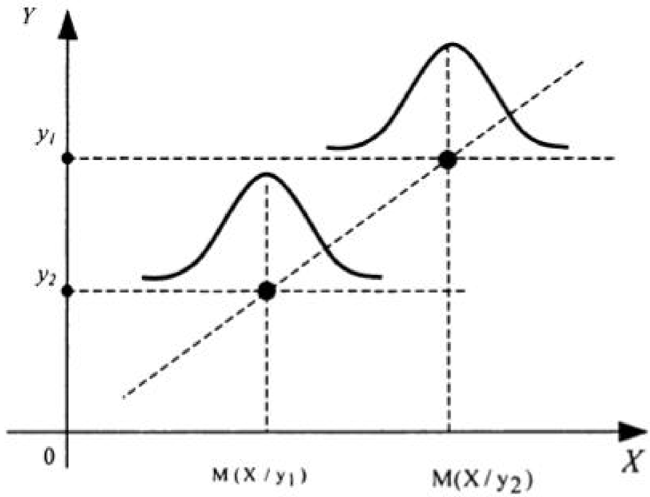
Виявляється стохастична залежність не лише у зміні умовних законів розподілу, а й у зміні умовних математичних сподівань та умовних дисперсій.

Кореляційна залежність – це залежність математичного сподівання однієї випадкової величини від зміни іншої випадкової величини; в той час як кожному окремому значенню однієї випадкової величини може відповідати множина різних значень іншої.

Стохастична і кореляційна залежність між Y та X, $M(Y/x)= \alpha(x)$



Стохастична і кореляційна залежність між X та Y,
$M(X/y)=\beta(y)$



Ці рисунки ілюструють те, що кореляційною залежністю між випадковими величинами Y та X є функціональна залежність умовних математичних сподівань $M(X/y), M(Y/x)$ від аргументів у та x:

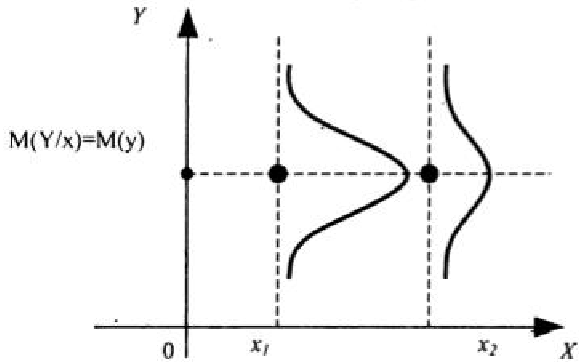
$M(Y/x) = \alpha(x);$

$M(X/y) = \beta(y).$

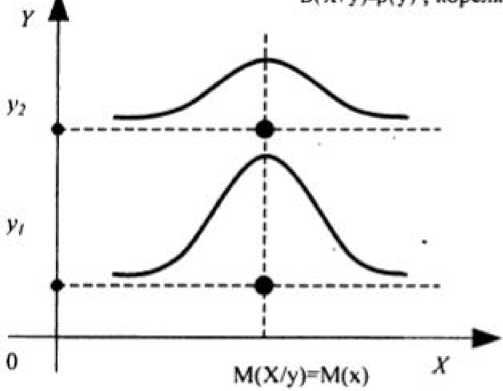
Останні рівняння називають ***рівняннями регресії***.

Якщо $M(Y/x) = M(y)$, $M(X/y) = M(x)$, то кореляційна залежність відсутня, але існує стохастична залежність, оскільки змінюються умовні дисперсії (див. наступні два рисунки).

Стохастична залежність між Y та X,
$D(Y/x)=\alpha(x)$; кореляційний зв'язок відсутній



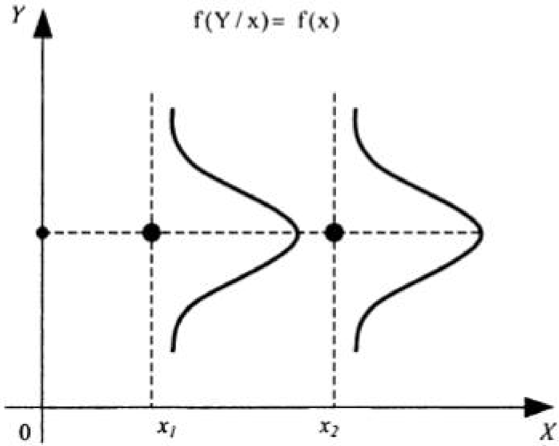
Стохастична залежність між X та Y,
$D(X/y)=\beta(y)$; кореляційний зв'язок відсутній



Випадок, коли між X та Y відсутня стохастична, а отже, і кореляційна залежність, ілюструють такі рисунки.

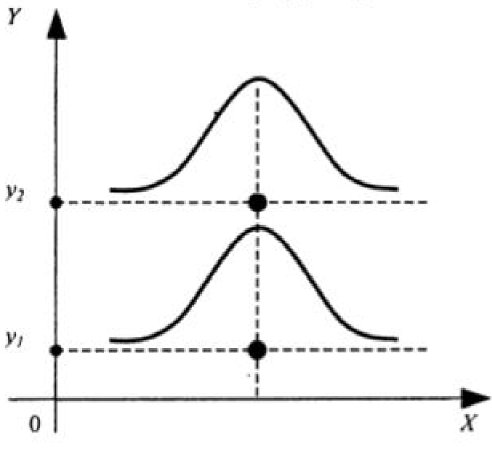
Незалежні випадкові величини.

$f(Y/x) = f(x)$



Незалежні випадкові величини.

$f(X/y) = f(x)$



Отже, якщо між випадковими величинами Y та X існує кореляційна залежність, то між ними обов'язково існує й стохастична залежність. Але за наявності стохастичної залежності між випадковими величинами X та Y кореляційної залежності між ними може й не бути.

Якщо випадкові величини Y та X незалежні, то лінії регресії Y по X та X поY паралельні координатним осям.

Нехай маємо двовимірну випадкову величину $(X;Y)$, розподіли яких відомі, тобто відома або таблиця розподілу для дискретного випадку, або сумісна щільність ймовірностей $f(x;y)$ для неперервного випадку. Тоді можна знайти математичні сподівання та дисперсії одновимірних складових $(X;Y)$ X та Y. Однак ці числові характеристики не досить повно характеризують двовимірну випадкову величину $(X;Y)$, тому що не виражають ступінь залежності її складових $(X;Y)$. З цією метою застосовують такі числові характеристики, як коваріації та коефіцієнт кореляції.

Коваріацією (або кореляційним моментом) K_{xy} випадкових величин X та Y називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин від своїх математичних сподівань, тобто

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X)M(Y)$$

(для дискретних випадкових величин)

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \iint_{\Omega} xyf(x;y)dxdy - M(X)M(Y)$$

(для неперервних випадкових величин).

У разі $K_{xy} = 0$ зв'язок між величинами X та Y, що належать системі $(X;Y)$, відсутній. Коли $K_{xy} \neq 0$, то між відповідними X та Y кореляційний зв'язок існує.

Коваріація характеризує не тільки ступінь залежності двох випадкових величин, а й їх розсіювання навколо точки $(M(X), M(Y))$. Крім того, вона – величина розмірна, її розмірність визначається добутком розмірностей випадкових величин. Це ускладнює використання коваріації для оцінки ступеня кореляційної залежності випадкових величин. Таких недоліків не має коефіцієнт кореляції.

Коефіцієнтом кореляції двох випадкових величин називають відношення їх коваріації до добутку їх середніх квадратичних відхилень:

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y},\ -1\le r_{xy}\le 1.$$

Отже, якщо випадкові величини X та Y є незалежними, то $K_{xy}=0$ і $r_{xy}=0$. Рівність нулеві r_{xy} є необхідною, але недостатньою умовою незалежності випадкових величин. Якщо коефіцієнт кореляції двох випадкових величин дорівнює (за абсолютною величиною) одиниці, то між цими випадковими величинами існує лінійна функціональна залежність

$$Y=M(Y)\pm\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-M(X)).$$

Справді, може існувати система залежних випадкових величин, у якої коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин $(X;Y)$, яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом R із центром у початку координат. Дві випадкові величини X та Y називають ***некорельованими***, якщо $r_{xy}=0$, і ***корельованими***, якщо $r_{xy}\ne 0$.

Отже, якщо X та Y незалежні, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

За допомогою коваріації можна доповнити і уточнити деякі *властивості математичного сподівання та дисперсії,* розглянуті раніше:

$M(AX+BY+C)=A\cdot M(X)+B\cdot M(Y)+C$, A,B,C – сталі;

$M(XY)=M(X)\cdot M(Y)+K_{xy}$;

$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2K_{xy}$;

$D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)+2\sum_{j\ne i}K_{ij}\ \ (i,j=\overline{1,n})$;

$D(AX+BY+C)=A^2\cdot D(X)+B^2\cdot D(Y)+2ABK_{xy}$.

Для n незалежних випадкових величин:

$$D\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) = \prod_{i=1}^{n}(D(X_i) + M^2(X_i)) - \prod_{i=1}^{n} M^2(X_i).$$

Приклад 6. За даними прикладу 1 знайти коваріацію та коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y.

Розв'язування:

▼ У прикладі 1 ми отримали такі закони розподілів одновимірних випадкових величин:

x_i	1	2
$p_j(x_i)$	0,75	0,25

y_j	-1	0	1	2
$p_i(y_j)$	0,125	0,3125	0,375	0,1875

Знайдемо математичні сподівання та середні квадратичні відхилення цих випадкових величин:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}2;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{2} x^2{}_i p_i = 1^2 \cdot 0{,}8 + 2^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}6;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 1{,}6 - 1{,}2^2 = 0{,}16;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4;$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_j p_j = (-1) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}5;$$

$$M(Y^2) = \sum_{i=1}^{4} y^2{}_j p_j = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 = 1{,}3;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 1{,}3 - 0{,}5^2 = 1{,}05;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{1{,}05} = 1{,}025.$$

Для знаходження математичного сподівання M(XY) добутку випадкових величин X та У можна скласти закон розподілу добутку двох дискретних випадкових величин, а потім за ним знайти $M(XY)$. Але робити це не обов'язково. $M(XY)$ можна знайти безпосередньо за таблицею розподілу двовимірної випадкової величини $(X;Y)$ за формулою:

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j p_{ij}.$$

$$M(XY)=1\cdot(-1)\cdot 0{,}10+(-1)\cdot 0\cdot 0{,}25+1\cdot 1\cdot 0{,}30+1\cdot 2\cdot 0{,}15+$$
$$+2\cdot(-1)\cdot 0{,}10+2\cdot 0\cdot 0{,}05+2\cdot 1\cdot 0+2\cdot 2\cdot 0{,}05=0{,}5$$

Підрахуємо коваріацію:

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=0{,}5-1{,}2\cdot 0{,}5=-0{,}1$$

Підрахуємо коефіцієнт кореляції:

$r=\dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\dfrac{-0{,}1}{0{,}4\cdot 1{,}025}=-0{,}244$, тобто між випадковими величинами X та У існує зворотний лінійний зв'язок. Із зростанням однієї з випадкових величин інша спадає, і навпаки. ▲

Приклад 7. За даними прикладу 4 знайти: а) коваріацію та коефіцієнт кореляції випадкових величин X та Y; б) корельовані чи некорельовані ці випадкові величини.

Розв'язування:

▼ а) Знайдемо математичні сподівання складових системи випадкових величин $(X;Y)$:

$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x;y)dxdy=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}xdx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=0.$ Аналогічно $M(У)=0$. Тоді

$$K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x;y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\frac{1}{\pi}dxdy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}xdx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}x\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=0.$$

б) Оскільки $r=0$, то випадкові величини X та У некорельовані. ▲

6. Нормальний закон розподілу на площині

Випадкова величина $(X;Y)$ називається ***розподіленою за двовимірним нормальним законом***, якщо її сумісна щільність має вигляд:

$$f_N(x;y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}e^{-L(x;y)},$$

де $L(x;y)=\frac{1}{2(1-r^2)}((\frac{x-a_x}{\sigma_x})^2-2r\frac{x-a_x}{\sigma_x}\frac{y-a_y}{\sigma_y}+(\frac{y-a_y}{\sigma_y})^2)$.

Теоретико – ймовірнісний зміст параметрів цього розподілу такий:

$$M(X)=a_x.\ \ M(Y)=a_y,\ \ D(X)=\sigma_x{}^2,\ \ D(Y)=\sigma_y{}^2,\ \ r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Щільності ймовірностей одновимірних випадкових величин X та Y нормальні:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x;y)dy=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x{}^2}},$$

$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_N(x;y)dx=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y{}^2}}$$

.

Якщо $r_{xy}=0$, то щільність ймовірностей набуде такого вигляду:

$$f_N(x;y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2})},\ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty.$$

У цьому випадку

$$f(x;y)=f(x)\cdot f(y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

Якщо $a_x=a_y=0$, то

$$f(x;y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)},\ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty.$$

Ймовірність потрапляння (X,Y) у прямокутну область $a<x<b,\ c<y<d$, якщо $K_{xy}=0$ знаходиться за формулою:

$$P(a<x<b,c<y<d)=\left(\Phi\left(\frac{b-a_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-a_x}{\sigma_x}\right)\right)\cdot\left(\Phi\left(\frac{d-a_y}{\sigma_y}\right)-\Phi\left(\frac{c-a_y}{\sigma_y}\right)\right).$$

Приклад 8. Робітник на верстаті виготовляє валики. Довжина Y і діаметр X валика є незалежними випадковими величинами, що мають нормальний закон розподілу з числовими характеристиками: $M(X)=50$ мм, $\sigma(X)=0{,}1$ мм, $M(Y)=20$ мм, $\sigma(Y)=0{,}005$ мм. Визначити відсоток бракованих валиків, якщо валик вважається стандартним, коли його розміри задовольняють умови:

$(50-0{,}1)$ мм $<x<(50+0{,}1)$ мм,

$(20-0{,}05)$ мм $<x<(20+0{,}05)$ мм.

Розв'язування :

▼ Ймовірність того, що валик не буде забракованим, визначається ймовірністю влучення розмірів (x,y) у прямокутну область:

$$P((|x-50|<0,1)\cap(|y-20|<0,05))=4\Phi\left(\frac{0,1}{0,1}\right)\Phi\left(\frac{0,05}{0,005}\right)=4\Phi(1)\cdot\Phi(10)=$$

$$=4\cdot 0,3413\cdot 0,5=0,6826.$$

Тоді ймовірність браку становить:

$1-P((|x-50|<0,1)\cap(|y-20|<0,05))=1-0,6826=0,3174$ або 31,74%. ▲

Умовні щільності ймовірностей випадкових величин X та Y визначаються за формулами:

$$f(X/y)=\frac{f(x;y)}{f(y)}=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}-r\frac{y-a_y}{\sigma_y}\right)^2},$$

$$f(Y/x)=\frac{f(x;y)}{f(x)}=\frac{1}{\sigma_y\sqrt{1-r^2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{y-a_y}{\sigma_y}-r\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2}$$

Кожний із умовних законів розподілу випадкових величин X та Y є нормальним з умовним математичним сподіванням та умовною дисперсією, які визначається за формулами:

$$M_y(X)=a_x+r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-a_y),\ D_y(X)=\sigma_x^2(1-r^2),$$

$$M_x(Y)=a_y+r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-a_x)$$

$$D_x(Y)=\sigma_y^2(1-r^2).$$

Лінії регресії $M_y(X)$ та $M_x(Y)$ нормально розподілених випадкових величин є прямими лініями, тобто нормальні регресії Y по X та X по Y завжди лінійні.

Умовні дисперсії $D_y(X)$ та $D_x(Y)$ сталі і не залежать від значень y або x. Цю властивість називають ***гомоскедатичністю*** або рівнозмінюваністю умовних нормальних розподілів і використовують в статистичному аналізі.

Для нормально розподілених випадкових величин терміни „некорельованість” та „незалежність” рівносильні.

7. Багатовимірні випадкові величини

Багатовимірна випадкова величина $X = (x_1, x_2,...,x_n)$ – це сукупність випадкових величин X_i $(i = 1,2,...,n)$, заданих на одному і тому ж ймовірнісному просторі Ω.

Закон розподілу ймовірностей багатовимірної випадкової величини задається її функцією розподілу

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i < x_i).$$

Властивості цієї функції такі самими як і властивості функції розподілу ймовірностей одного та двох випадкових аргументів.

Якщо хоча б один із аргументів $x_i \to -\infty$, то функція розподілу ймовірностей системи n випадкових величин прямує до нуля.

Якщо із системи $(x_1, x_2,...,x_n)$ виділимо деяку підсистему $(x_1, x_2,...,x_k)$ $(k<n)$, то функцію розподілу для цієї підсистеми дістанемо, коли решта аргументів прямуватиме до ∞:

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = F(x_1, x_2, ..., x_k, \infty, ..., \infty).$$

Зокрема, дістанемо функцію розподілу одного аргументу, якщо всі аргументи, окрім x_1, спрямуємо до ∞:

$$F(x_1) = F(x_1, \infty, ..., \infty).$$

Якщо всі аргументи спрямувати до ∞, то $F(\infty, \infty, ..., \infty) = 1$.

Щільність ймовірностей системи n випадкових величин є функцією

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 .. \partial x_n}.$$

Умова нормування для системи n неперервних випадкових величин

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n = 1.$$

Щільність ймовірностей для деякої підсистеми $(x_1, x_2,...,x_k)$ системи $(x_1, x_2,...,x_n)$, де $(k<n)$ подається у вигляді:

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_{k+1} dx_{k+2} ... dx_n$$

Наприклад, $f(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_2dx_3\ldots dx_n$.

Умовна щільність підсистеми $(x_1, x_2,\ldots,x_k)$ системи $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, де $(k<n)$ визначається за формулою:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k / x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)=\frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f(x_{k+1},x_{k+2},\ldots,x_n)}.$$

Якщо випадкові величини системи $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ є незалежними, то

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)= f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n).$$

Числові характеристики системи n випадкових величин обчислюють за формулами:

1) ***Математичні сподівання***

$$M(x_i)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

2) ***Дисперсії***

$$D(x_i)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2{}_i f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n - M^2(x_i),$$

3) ***Коваріація***

$$K_{x_ix_j}=K_{ij}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_ix_jf(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n - M(x_i)M(x_j)$$

При цьому виконується рівність

$K_{ij}=K_{ji}$.

Коли $i=j$, маємо $K_{ii}=K_{jj}=D(x_i)=\sigma_i{}^2$.

4) ***Змішаний початковий момент*** порядку k+s дорівнює математичному сподіванню добутку X^kY^s;

$$\nu_{ks}(x,y)=M\left[X^kY^s\right]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}x_i^ky_j^sp_{ij}, & \text{для ДВВ}\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^ky^sf(x,y)\,dxdy, & \text{для НВВ}\end{cases}$$

5) ***Змішаний центральний момент*** порядку k+s дорівнює математичному сподіванню добутку центрованих величин X^kY^s;

$$\alpha_{k,s}(x,y) = M[X - M(X)]^k (Y - M(Y))^s =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - M(X))^k (y_j - M(Y)) p_{i,j}, & \text{для ДВВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^k (y - M(Y))^s f(x,y)\,dx\,dy & \text{для НВВ} \end{cases}$$

Найчастіше використовуються такі початкові і центральні моменти:
$M(X) = \nu_{1,0}(x,y)$, $M(Y) = \nu_{0,1}(x,y)$,

$D(X) = \alpha_{2,0}(x,y) = \nu_{2,0}(x,y) - M^2(X)$,

$D(Y) = \alpha_{0,2}(x,y) = \nu_{0,2}(x,y) - M^2(Y)$.

Усі кореляційні моменти і дисперсії розміщують у вигляді квадратної таблиці, яка називається ***кореляційною матрицею системи n випадкових величин*** і має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \dots & k_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи кореляційної матриці симетричні відносно головної діагоналі. Оскільки $K_{ij} = K_{ji}$, $K_{ii} = \sigma_i^{\,2}$, то заповнюють тільки половину кореляційної матриці. Тоді вона набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2{}_1 & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ & \sigma^2{}_2 & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ & & \sigma^2{}_3 & \dots & k_{3n} \\ & & & & \dots \\ & & & & \sigma^2{}_n \end{pmatrix}$$

Якщо $K_{ij} = 0$ для всіх $i = 1,...,n; j = 1,...,n$, то кореляційна матриця матиме вигляд:

$$\begin{pmatrix} \sigma^2_1 & 0 & 0 & & 0 \\ & \sigma^2_2 & 0 & & 0 \\ & & \sigma^2_3 & ... & 0 \\ & & & & ... \\ & & & & \sigma^2_n \end{pmatrix}$$

Таку матрицю називають ***діагональною***.

За відомими кореляційними моментами K_{ij} визначимо парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j}.$$

При $i = j$ маємо $r_{ij} = 1$.

З парних коефіцієнтів кореляції утворюють так звану ***нормовану*** квадратну матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ & & 1 & \cdots & r_{3n} \\ & & & & \cdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 9. Дано кореляційну матрицю системи $(x_1, x_2,...,x_n)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 1 & -0,8 \\ & 4 & -1 & 0,8 \\ & & 16 & 2 \\ & & & 25 \end{pmatrix}$$

Побудувати нормовану кореляційну матрицю.

Розв'язування:

▼ За відомими кореляційними моментами K_{ij} визначимо парні коефіцієнти кореляції за формулою:

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j};$$

$$r_{12} = \frac{K_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{0,5}{1 \cdot 2} = 0,25; \quad r_{13} = \frac{K_{13}}{\sigma_1 \cdot \sigma_3} = \frac{1}{1 \cdot 4} = 0,25;$$

$$r_{14} = \frac{K_{14}}{\sigma_1 \cdot \sigma_4} = \frac{-0,8}{1 \cdot 5} = -0,16; \quad r_{23} = \frac{K_{23}}{\sigma_2 \cdot \sigma_3} = \frac{-1}{2 \cdot 4} = -0,125;$$

$$r_{24} = \frac{K_{24}}{\sigma_2 \cdot \sigma_4} = \frac{0,8}{2 \cdot 5} = 0,08; \quad r_{34} = \frac{K_{34}}{\sigma_3 \cdot \sigma_4} = \frac{2}{4 \cdot 5} = 0,1.$$

Нормована кореляційна матриця матиме такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,25 & -0,16 \\ & 1 & -0,125 & 0,08 \\ & & 1 & 0,1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \blacktriangle$$

8. Функції двох випадкових аргументів

Як будуються закони розподілів функції одного аргумента для дискретного та неперервного випадків ми розглянули у темі з відповідною назвою.

Зупинимося на задачі складання закону розподілу функцій двох випадкових величин. Серед них найбільш важливою для практики є випадкова величина $Z = X + Y$. У випадку, коли X та У – незалежні випадкові величини говорять про ***композицію (згортку)*** законів розподілу.

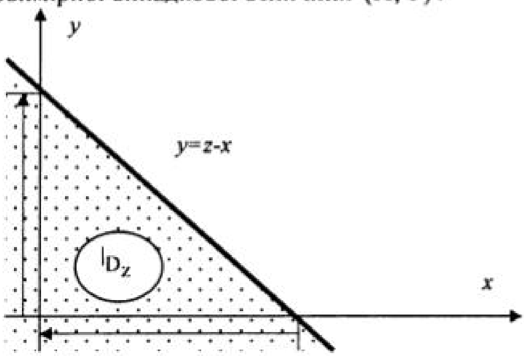
Раніше було встановлено, що сума двох і більше альтернативних випадкових величин (розподілені за законом Бернуллі) розподілена за біноміальним законом; сума двох випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, також розподілена за законом Пуассона.

Розглянемо композицію законів розподілу двох неперервних випадкових величин. Нехай щільності ймовірностей випадкових величин X та У рівні відповідно $f(x)$ та $f(y)$.

Знайдемо спочатку функцію розподілу випадкової величини Z:

$$F(Z)=P(Z<z)=P(X+Y<z)=\iint\limits_{D_z} f(x;y)dxdy,$$

де D_z — множина всіх точок площини Oxy, координати яких задовольняють нерівність $x+y<z$, $f(x;y)$ — сумісна щільність двовимірної випадкової величини $(X;Y)$.



Так як X та У – незалежні випадкові величини, то $f(x;y)=f(x)\cdot f(y)$ і остання формула набуде вигляду:

$$F(z)=P(Z<z)=P(X+Y<z)=\iint\limits_{D_z} f(x;y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(x)\cdot f(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(y)dy$$

Знайдемо щільність ймовірностей $f(z)$:

$$f(z)=F'(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\Big(\int\limits_{-\infty}^{z-x} f(y)dy\Big)'=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot f(z-x)dx.$$

Аналогічно, $f(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z-y)\cdot f(y)dy.$

Останні формули називають ***формулами композиції двох розподілів*** або ***формулами згортки***.

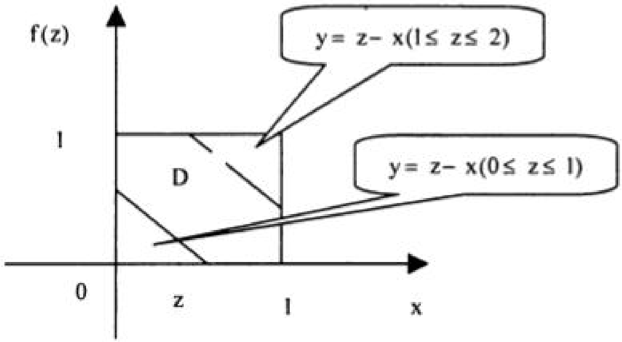
Приклад 10. Знайти закон розподілу суми двох випадкових величин, розподілених рівномірно на відрізку $[0;1]$.

Розв'язування:

▼ Нехай $Z = X + Y$, де $f_1(x) = 1$ при $0 \le x \le 1$ та $f_2(y) = 1$ при $0 \le y \le 1$.

За формулою згортки щільність ймовірності:

$$f(z) = \int_0^1 1 \cdot f_2(z - x)dx = \int_0^1 f_2(z - x)dx.$$



Якщо $z < 0$, то для $0 \le x \le 1$, $z - x < 0$; якщо $z > 2$, то для $0 \le x \le 1$ $z - x > 1$, а тому, в цих випадках $f_2(z - x) = 0$, $f(z) = 0$.

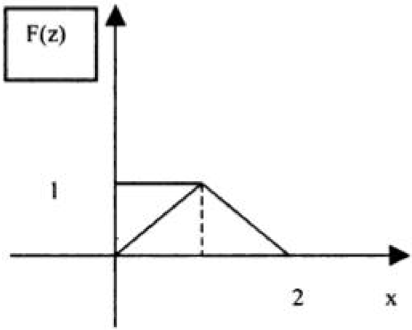
Нехай $0 \le z \le 2$. Підінтегральна функція $f_2(z - x)$ буде відмінна від нуля тільки для значень x, при яких $0 \le z - x \le 1$ або, що те ж саме, при $z - 1 \le x \le z$.

Якщо $0 \le z \le 1$, то $f(z) = \int_0^z 1dx = z.$

Якщо $1 \le z \le 2$, то $f(z) = \int_{z-1}^1 1dx = 2 - z.$

Об'єднаємо всі випадки і отримаємо:

$$f(z)=\begin{cases} 0; & z<0, z>2 \\ z; & 0\le z\le 1 \\ 2-z, & 1\le z\le 2. \end{cases}$$



Такий закон розподілу називають законом розподілу Симпсона або законом рівнобедреного трикутника. ▲

Обчислення в останньому прикладі можна було б провести інакше: спочатку знайти функцію розподілу $F(z)$, а потім – її похідну. Перевага такого підходу полягає в можливості використання геометричної інтерпретації функції $F(z)$ як площі області D – частини квадрата (зі стороною, рівною 1), яка лежить лівіше і нижче від прямої $y=z-x$.

Композиція нормальних законів розподілу також має нормальним розподілом.

Приклад 11. Пристрій складається з двох блоків – основного та резервного. При відмові основного блоку автоматично включається резервний блок. Визначити ймовірність безвідмовної роботи пристрою протягом 10 годин. якщо час безвідмовної роботи блоків випадковий і розподілений за показниковим законом, а середній час напрацювання на відмову – 10 годин.

Розв'язування:

▼ Знайдемо закон розподілу ймовірностей часу Y безвідмовної роботи пристрою: $Y = X_1 + X_2$, де X_1, X_2 — час безвідмовної роботи блоків. Величини X_1 та X_2 незалежні і мають однакову щільність ймовірностей:

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Підрахуємо λ. Для показникового закону $\lambda = \dfrac{1}{M(X)} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

Знайдемо щільність ймовірностей випадкової величини Y:

$$f(y) = \int_0^y \lambda \cdot e^{-\lambda x_1} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(y - x_1)} dx_1 = \lambda^2 \cdot y \cdot e^{-\lambda y}, y > 0$$

Підрахуємо ймовірність того, що $Y \geq 10$:

$$P(Y \geq 10) = \int_{10} f(y)dy = \lambda^2 \cdot \int_{10} y \cdot e^{-\lambda y} dy \approx 0{,}736 .$$ ▲

Приклади розв'язування задач на багатовимірні випадкові величини .

Приклад 1. Задано:

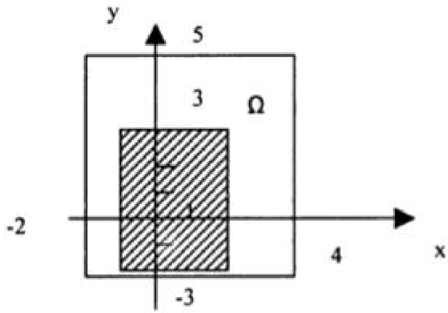
$$f(x;y) = \begin{cases} a, (x;y) \in \Omega \\ 0, (x;y) \notin \Omega \end{cases},$$

де $\Omega = (-2 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 5)$.

Знайти: a, $F(x,y)$, $P(-1 < x < 2, -2 < y < 3)$.

Розв'язування:

▼ Множина Ω зображена на наступному рисунку.



Для визначення *a* використаємо умову нормування:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y)dxdy = 1 \Rightarrow \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-3}^{5} adxdy = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{-3}^{5} dxdy} = \frac{1}{48}..$$

Отже, маємо

$$f(x;y) = \frac{1}{48}, \text{якщо } (x;y) \in \Omega,$$

$$f(x;y) = 0, \text{якщо } (x;y) \notin \Omega.$$

Знайдемо функцію розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин $(X;Y)$.

Якщо $-2 < x < 4, -3 < y < 5$ дістанемо:

$$F(x;y) = \int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-3}^{y} f(x;y)dxdy = \int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-3}^{y} \frac{1}{48}dxdy =$$

$$= \frac{1}{48}\int\limits_{-2}^{x}\int\limits_{-3}^{y} dxdy = \frac{1}{48}\left(x\Big|_{-2}^{x}\right)\left(y\Big|_{-3}^{y}\right) = \frac{(x+2)(y+3)}{48}.$$

Якщо $-2 < x < 4, y > 5$, то

$$F(x,5) = \frac{(x+2)(5+3)}{48} = \frac{x+2}{6}.$$

Якщо $x > 4, -3 < y < 5$, то

$$F(x,5)=\frac{(4+2)(y+3)}{48}=\frac{y+3}{8}.$$

Звідси

$$F(x;y)=\begin{cases}0, x\le -2, y\le -3\\ \frac{x+2}{6}, -2< x\le 4, y>5\\ \frac{(x+2)(y+3)}{48}, -2< x\le 4, -3< y\le 5\\ \frac{y+3}{8}, x>4, -3< y\le 5\\ 1, x>4, y>5.\end{cases}$$

$$P(-1< x< 2, -2< y< 3)=\int_{-1}^{2}\int_{-2}^{3} f(x;y)dzdy=\int_{-1}^{2}\int_{-2}^{3}\frac{1}{48}dxdy=$$

$$=\frac{1}{48}\int_{-1}^{2}dx\int_{-2}^{3}dy=\frac{1}{48}3\cdot 5=\frac{15}{48}=\frac{5}{16}.$$

▲

Приклад 2. Задано f(x, y) = 1/48, якщо $(x,y)\in\Omega$; $f(x,y)=0$, якщо $(x,y)\notin\Omega$.

Де $\Omega=\{-4\le x\le 2,\quad -3\le y\le 5\}$. Знайти K_{xy}, r_{xy}.

Розв'язування:

▼

$$M(X)=\int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} x\, f(x,y)dx\, dy=\int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} x\frac{1}{48}dx\, dy=$$

$$=\frac{1}{48}\int_{-4}^{2} x\, dx\int_{-3}^{5}dy=\frac{1}{48}\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{4}^{2}\right)\left(y\Big|_{-3}^{5}\right)=\frac{1}{96}(4-16)(5+3)=\frac{-12\cdot 8}{96}=-1;$$

$$M(Y)=\int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} y\ f(x,y)\ dx\ dy=\int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} y\frac{1}{48}dy\ dx=$$

$$=\frac{1}{48}\int_{-4}^{2} dx\ \int_{-3}^{5} y\ dy=\frac{1}{48}x\Big|_{4}^{2}\ \frac{y^2}{2}\Big|_{3}^{5}=\frac{1}{96}(2+4)(25-9)=\frac{6\cdot 16}{96}=1;$$

$$M(XY)=\int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} xy\ f(x,y)\ dx\ dy=\int_{-4}^{2}\int_{-3}^{5} xy\frac{1}{48}dx\ dy=\frac{1}{48}\int_{-4}^{2} dx\ \int_{-3}^{5} y\ dy=$$

$$=\frac{1}{48}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{4}^{2}\right)\left(y^2\Big|_{3}^{5}\right)=\frac{1}{192}(4-16)(25-9)=\frac{1}{192}(-12)\ 16=-\frac{192}{192}=-1;$$

$K_{xy} = M(XY) – M(X)\,M(Y) = -1 – (-1)\,1 = -1 + 1 = 0.$

Отже, $K_{xy} = 0$, що говорить про відсутність кореляційного зв'язку між випадковими величинами X та Y.

Оскільки $K_{xy} = 0$, то й $r_{xy} = 0$.

▲

Приклад 3. Задано

$$f(x,y)=a\ e^{-x^2+xy-y^2}\qquad -\infty<x<\infty,\ \ -\infty<y<\infty.$$

Знайти a, M(x/y), M(y/x). Обчислити r_{xy}.

Розв'язування.

▼

Згідно з умовою нормування маємо:

$$a=\frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+xy-y^2}dx\ \ dy}\to\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2+xy-y^2}dx\ \ dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx\right)dy=\left|\begin{matrix}x-\frac{y}{2}=\frac{z}{\sqrt{2}}\\ dx=\frac{dz}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2}}\right)dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\quad \text{є інтегралом Пуассона}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=\left|\sqrt{\frac{3}{2}}\,y=t\to dy=\sqrt{\frac{2}{3}}\,dt\right|=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\,dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}\sqrt{2\pi}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Отже, $a=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ і при цьому

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-x^2+xy-y^2},\quad -\infty<x<\infty,\ \ -\infty<y<\infty.$$

Знайдемо щільності розподілу ймовірностей складових X та У:

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dy=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ e^{-x^2+xy-y^2}dy=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}dy=$$

$$=\left|\begin{matrix} y-\dfrac{x}{2}=\dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ dy=\dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}x^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}x^2}\sqrt{2\pi}=\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{3}{4}x^2}$$

Отже,

$$f(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{3}{4}x^2},\quad -\infty< x<\infty.$$

$$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dx=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ e^{-x^2+xy-y^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}y^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} x-\dfrac{y}{2}=\dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}y^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}y^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{2\pi}\ e^{-\frac{3}{4}y^2}\sqrt{2\pi}=\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{3}{4}y^2}.$$

Отже,

$$f(y)=\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{3}{4}y^2},\quad -\infty< y<\infty.$$

Знайдемо основні числові характеристики:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ \ f(x)dx\ =\sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ e^{-\frac{3}{4}x^2}dx=0,$$

оскільки підінтегральна функція є непарною, а межі інтегрування симетричні відносно нуля.

$$D(X)=M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\frac{3}{4}x^2}dx=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\frac{3}{4}x^2}dx=\left|\begin{array}{l} u=x,\quad du=dx \\ xe^{-\frac{3}{4}x^2}dx=d\,v\to \\ \to v=-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{4}x^2}\end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}xe^{-\frac{3}{4}x^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{\infty}e^{-\frac{3}{4}x^2}dx\right]=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{3}{2}}x=t\to \\ \to dx=\sqrt{\frac{2}{3}}dt\end{array}\right|=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}xe^{-\frac{3}{4}x^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{2}{3}.$$

Отже, $D(X)=\frac{2}{3}$, звідки $\sigma(X)=\sigma_x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{3}{4}y^2}dy=0.$$

$$D(Y)=M(Y^2)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(y)dy=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=y,\quad du=dy \\ ye^{-\frac{3}{4}y^2}dy=dv\to \\ \to v=-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{4}y^2}\end{array}\right|=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\int_0^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}dy\right]=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sqrt{\frac{3}{2}}y=t\to \\ \to dy=\sqrt{\frac{2}{3}}dt\end{array}\right|=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{2}{3}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\Big|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]=$$

$$=2\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{2}{3}.$$

Отже, $D(Y)=\frac{2}{3}$; звідки $\sigma(Y)=\sigma_y=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$$M(XY)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xyf(xy)dxdy=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}xye^{-x^2+xy-y^2}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}xe^{-(x-\frac{y}{2})^2}dx\right)dy=\left|\begin{matrix}x-\frac{y}{2}=\frac{z}{\sqrt{2}}\\ x=\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{y}{2}\\ dx=\frac{dz}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\frac{z}{\sqrt{2}}+\frac{y}{2})e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{y}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}y^2e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=y, du=dy,\\ ye^{-\frac{3}{4}y^2}dy=dv\rightarrow v=-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{4}y^2}\end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{2}{3}ye^{-\frac{3}{4}y^2}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}dy\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{3}{4}y^2}dy=\left|\sqrt{\frac{3}{2}}y=t\rightarrow dy=\sqrt{\frac{2}{3}}dt\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\frac{1}{3}.$$

Таким чином, дістали

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{1}{3};$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Визначимо умовні щільності ймовірностей:

$$f(y/x) = \frac{f(x;y)}{f(x)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-x^2+xy-y^2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{4}x^2+xy-y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-(y-\frac{1}{2}x)^2}, -\infty < y < \infty$$

Аналогічно,

$$f(x/y) = \frac{f(x;y)}{f(y)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\pi}e^{-x^2+xy-y^2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{3}{4}y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\frac{1}{2}y)^2}, -\infty < x < \infty$$

$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-\frac{1}{2}y)^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}y = \frac{z}{\sqrt{2}} \to x = \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}y \\ dx = \frac{dz}{\sqrt{2}} \end{array} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}y\right)e^{-\frac{z^2}{2}}\frac{dz}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}}dz + \frac{1}{2}y\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}y\sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}y.$$

Отже, $M(X/y)=\frac{1}{2}y$ є лінійною функцією регресії відносно аргументу y.

Аналогічно, маємо:

$$M(Y/x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-(y-\frac{1}{2}x)^2}dy=$$

$$=\left|\begin{matrix} y-\frac{1}{2}x=\frac{t}{\sqrt{2}}\to y=\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}x \\ dx=\frac{dz}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right|=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{2}x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}x\sqrt{2\pi}=\frac{1}{2}x.$$

Таким чином, $M(Y/x)=\frac{1}{2}x$ також є лінійною функцією регресії відносно аргументу x. ▲

<u>*Приклад 4*</u>. X та Y – незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на відрізку $[0;4]$. Знайти ймовірність того, що квадратне рівняння $t^2+xt+y=0$ (відносно t) має дійсні корені.

Розв'язування:

▼ Квадратне рівняння має дійсні корені, якщо його дискримінант невід'ємний .

$$P\left\{x^2-4y\geq 0\right\}=P\left\{y\leq\frac{x^2}{4}\right\}=\iint\limits_{\substack{y\leq\frac{x^2}{4}\\ 0\leq x\leq 4\\ 0\leq y\leq 4}}\frac{1}{16}dxdy=\frac{1}{16}\int_0^4\int_0^{\frac{x^2}{4}}dydx=\frac{1}{16}\int_0^4\frac{x^2}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{16*4}*\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{4}=\frac{1}{3}.$$

▲

Приклад 5. Відомі значення: $M(X) = -2$; $D(X)= 4$; $M(Y) = -3$; $K_{xy} = -1$. Знайти $M(Z), D(Z), \sigma(Z)$, якщо $Z = -9X + 5Y + 3$.

Розв'язування:

▼ За властивостями математичного сподівання та дисперсії:

$M(Z) = M(-9X + 5Y + 3) = -9M\cdot(X) + 5M\cdot(Y) + 3 =$

$= -9\cdot(-2) + 5\cdot(-3) + 3 = 6.$

$D(Z) = D(-9X + 5Y + 3) = 81\cdot D(X) + 25\cdot D(Y) + 2\cdot(-9)\cdot 5\cdot K_{xy} =$ ▲

$= 81\cdot 4 + 25\cdot 3 - 90\cdot(-1) = 489.$ $\sigma(Z) = \sqrt{D(Z)} = \sqrt{489} \approx 22{,}1$

Приклад 6. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

знайти $M(Y), K_{xy}$, якщо $Y = 3X^3 - 2X^2 + X + 1$.

Розв'язування:

▼ Спочатку визначимо $M(X^4), M(X^3), M(X^2), M(X)$, оскільки

$M(Y) = M(3X^3 - 2X^2 + X + 1) = 3\cdot M(X^3) - 2M(X^2) + M(X) + 1;$

$K_{xy} = M(XY) - M(X)\cdot M(Y);$

$M(XY) = M(X\cdot(3X^3 - 2X^2 + X + 1)) = M(3X^4 - 2X^3 + X^2 + X) =$

$= 3\cdot M(X^4) - 2\cdot M(X^3) + M(X^2) + M(X).$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0;$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x, du=dx \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=dv\to v=-e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=1;$$

$$M(X^3)=\int_{-\infty}^{\infty}x^3 f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^3\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=0;$$

$$M(X^4)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4 f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^4\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=x^3, du=3x^2dx \\ xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=dv\to v=-e^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(-x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg|_0^{\infty}+3\int_0^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left((-x^3e^{-\frac{x^2}{2}}-3xe^{-\frac{x^2}{2}})\Bigg|_0^{\infty}+\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)=\frac{6}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=3;$$

$$M(Y)=3M(X^3)-2M(X^2)+M(X)+1=3\cdot 0-2\cdot 1+0+1=-1;$$

$$M(XY)=3\cdot M(X^4)-2\cdot M(X^3)+M(X^2)+M(X)=3\cdot 3-2\cdot 0+1+0=8;$$ ▲

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=8-(-1)\cdot 0=8.$$

Приклад 7. Задано щільності ймовірностей незалежних випадкових величин X та Y:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 2e^{-2x}, & \text{якщо } x>0,\end{cases} \qquad f(y)=\begin{cases}0, & \text{якщо } y\le -2;\\ 1/6, & \text{якщо } -2<y\le 4;\\ 0, & \text{якщо } y>4.\end{cases}$$

Знайти $M(Z), D(Z)$, якщо виконуються умови:
1) $Z=3X-5Y+1$; 2) $Z=X\cdot Y$.

Розв'язування:

$$M(X)=\int_0^{\infty} xf(x)dx=\int_0^{\infty} x2e^{-2x}dx=\left|\begin{matrix}u=x, du=dx,\\ 2e^{-2x}dx=dv\to v=-e^{-2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-xe^{-2x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2};$$

$$M(X^2)=\int_0^{\infty} x^2f(x)dx=\int_0^{\infty} x^2 2e^{-2x}dx=\left|\begin{matrix}x^2=u, du=2xdx\\ 2e^{-2x}dx=dv\to v=-e^{-2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-x^2e^{-2x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx=\int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx=\left|\begin{matrix}u=x, du=dx\\ 2e^{-2x}dx=dv\to v=-e^{-2x}\end{matrix}\right|=$$

$$=-xe^{-2x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=\int_0^{\infty} e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};$$

$$M(Y)=\int_{-2}^{4} yf(y)dy=\int_{-2}^{4} y\frac{1}{6}dy=\frac{y^2}{12}\Big|_{-2}^{4}=\frac{16}{12}-\frac{4}{12}=1;$$

$$M(Y^2)=\int_{-2}^{4} y^2f(y)dy=\int_{-2}^{4} y^2\frac{1}{6}dy=\frac{y^3}{18}\Big|_{-2}^{4}=\frac{64+8}{18}=4;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-M^2(Y)=4-1=3.$$

$$1)\ M(Z)=M(3X-5Y+1)=3M(X)-5M(Y)+1=3\cdot\frac{1}{2}-5\cdot 1+1=-2,5;$$

$$D(Z)=D(3X-5Y+1)=9D(X)+25D(Y)=9\cdot\frac{1}{4}+25\cdot 3=\frac{309}{4}=77,29.$$

$$2)\ M(Z)=M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};$$

$$D(Z)=D(X\cdot Y)=(D(X)+M^2(X))(D(Y)+M^2(Y))-M^2(X)M^2(Y)=$$
$$=(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})(3+1)-\frac{1}{4}\cdot 1=2-\frac{1}{4}=1,75.$$

▲

__*Приклад 8*__. Двовимірна випадкова величина (X, Y) має такий закон розподілу ймовірностей:

X	**Y**				
	5	**10**	**15**	**20**	$\sum_{i=1}^{n} p_{x_i}$
-6	0,02	0,01	0,03	0,04	0,1
-4	0,18	0,09	0,07	0,06	0,4
-2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,5
$\sum_{j=1}^{m} p_{y_j}$	0,3	0,3	0,2	0,2	1

Знайти $M(Z), D(Z)$, якщо $Z=-4X-3Y+10$.

Розв'язування:

▼ Обчислимо $M(X)$; $D(Y), D(Y)$; K_{xy}.

$$M(X)=\sum_{j=1}^{4} x_j p_{xj}=5\cdot 0,3+10\cdot 0,3+15\cdot 0,2+20\cdot 0,2=1,5+3+3+4=11,5$$

$$M(X^2)=\sum_{j=1}^{4} x^2{}_j p_{xj}=25\cdot 0,3+100\cdot 0,3+225\cdot 0,2+400\cdot 0,2=7,5+30+$$
$$+45+80=162,5$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=162,5-(11,5)^2=162,5-132,25=30,25.$$

$M(Y)= \sum_{i=1}^{3} y_i p_{yi} = -6\cdot 0,1-4\cdot 0,4-2\cdot 0,5=-0,6-1,6-1=-3,2.$

$M(Y^2)\sum_{i=1}^{3} y_j^2 p_{yi} = 36\cdot 0,1+16\cdot 0,4+4\cdot 0,5= 3,6+6,4+2=12.$

$D(Y)= M(Y^2)-M^2(Y)= 12-(-3,2)^2 = 12-10,24= 1,76.$

$M(XY)= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} y_i x_j p_{ij} = -6\cdot 5\cdot 0,02-6\cdot 10\cdot 0,01-6\cdot 15\cdot 0,03-6\cdot 20\cdot 0,04-$

$-4\cdot 5\cdot 0,18-4\cdot 10\cdot 0,09-4\cdot 15\cdot 0,07-4\cdot 20\cdot 0,06-2\cdot 5\cdot 0,1-2\cdot 10\cdot 0,2-$

$-2\cdot 15\cdot 0,1-2\cdot 20\cdot 0,1=-0,6-0,6-2,7-4,8-3,6-3,6-4,2-4,8-1-4-$

$-3-4=-36,9$

$K_{xy} = M(XY)-M(X)M(Y)=-36,9-11.5(-3,2)=-36,9+36,8=-0,1.$

$M(Z)= M(-4X-3Y+10)=-4M(X)-3M(Y)+10=$

$=-4\cdot 11,5-3\cdot(-3,2)+10=-46+9,6+10=-26,4.$

$D(Z)= D(-4X-3Y+10)= 16D(X)+9D(Y)+2(-4)(-3)K_{xy} =$ ▲

$= 16\cdot 30,25+9\cdot 1,76+2\cdot 12(-0,1)= 484+15,84-2,4= 497,44.$

Приклад 9. Відомо, що $X = 2X_1 - 3X_2 - 4X_3 + 5$. Знайти $M(X)$,
$D(X)$, коли

$M(X_1)=-2,\ M(X_2)= 3,\ M(X_3)= 1;\ D(X_1)= 4;\ D(X_2) = 3;$

$D(X_3)= 5;\ r_{12} = 0,36;\ r_{13} = 0,3;\ r_{23} =-0,1.$

Розв'язування:

▼ Використовуючи властивості математичного сподівання, дисперсії та парного коефіцієнта кореляції, одержимо:

$M(x)= M(2X_1-3X_2-4X_3+5)= 2M(x_1)-3M(x_2)+4M(x_3)+5=$

$= 2(-2)-3\cdot 3+4\cdot 1+5=-4-9+4+5=-4.$

$D(x)= D(2X_1-3X_2-4X_3+5)= 4D(X_1)+9D(X_2)+16D(X_3)+$

$+2(2)(-3)K_{12}+2(2)(-4)K_{13}+2(-3)(-4)K_{23} =$

$= 4D(X_1)+9D(X_2)+16D(X_3)-12K_{12}-16K_{13}+24K_{23}.$

Оскільки $r_{12} = \dfrac{K_{12}}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}$; $r_{13} = \dfrac{K_{13}}{\sigma(X_1)\sigma(X_2)}$; $r_{23} = \dfrac{K_{23}}{\sigma(X_2)\sigma(X_3)}$,

то:

$K_{12} = r_{12}\sigma(x_1)\cdot\sigma(x_2) = 0{,}36\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)} = 0{,}36\sqrt{4}\sqrt{3} =$
$= 0{,}36\cdot 2\cdot 1{,}732 = 1{,}24704;$

$K_{13} = r_{13}\sigma(X_1)\cdot\sigma(X_2) = r_{13}\cdot\sqrt{D(X_1)}\cdot\sqrt{D(X_2)} = 0{,}3\sqrt{4}\sqrt{5} =$
$= 0{,}3\cdot 2\cdot 2{,}236 = 1{,}3418;$

$K_{23} = r_{23}\sigma(X_2)\cdot\sigma(X_3) = -0{,}1\cdot\sqrt{D(X_2)}\cdot\sqrt{D(X_3)} = -0{,}1\sqrt{3}\sqrt{5} \approx -0{,}397.$

Отже, $D(x) = 4\cdot 4 + 9\cdot 3 + 16\cdot 5 - 12\cdot 1{,}24704 - 16\cdot 1{,}3418 + 24\cdot(-0.397) =$
$= 16 + 27 + 80 - 14{,}965 - 21{,}469 - 9{,}528 = 77{,}038.$

▲

Приклад 10. За заданою кореляційною матрицею

$$\begin{pmatrix} 16 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ & 9 & 1 & -0{,}8 \\ & & 25 & -0{,}4 \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

знайти $D(X)$, якщо $X = 4X_1 - 3X_2 - 5X_3 - X_4 + 5$.

Розв'язування :

▼ Використовуючи властивості дисперсії, дістаємо:

$D(X) = D(4X_1 - 3X_2 - 5X_3 - X_4 + 5) = 16D(X_1) + 9D(X_2) + 25D(X_3) +$
$+ D(X_4) + 2\cdot 4\cdot(-3)\cdot K_{12} + 2\cdot 4\cdot(-5)\cdot K_{13} + 2\cdot 4\cdot(-1)K_{14} + 2\cdot(-3)\cdot$
$\cdot(-5)K_{23} + 2\cdot(-3)\cdot(-1)K_{24} + 2\cdot(-5)\cdot(-1)K_{34} = 16D(X_1) + 9D(X_2) +$
$+ 25D(X_3) + D(X_4) - 24K_{12} - 40K_{13} - 8K_{14} + 30K_{23} + 6K_{24} + 10K_{34} =$
$= 16\cdot 16 + 9\cdot 9 + 25\cdot 25 + 4 - 24\cdot 0.1 - 40\cdot 0{,}2 - 8\cdot 0{,}5 + 30\cdot 1 + 6\cdot(-0{,}8) +$
$+ 10\cdot(-0{,}4) = 972{,}8.$

▲

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

У XX ст. потреби природничих наук поставили перед теорією ймовірностей нові завдання, для розв'язання яких існуючий апарат виявився недостатнім. Це викликало появу нової галузі теорії ймовірностей – теорії випадкових (або стохастичних) процесів. Створення цієї теорії було здійснене в тридцятих роках А.М. Колмогоровим і О.Я. Хінчиним, пізніше А.А. Марковим та ін. У сучасній теорії ймовірностей переважна більшість досліджень стосується вивчення випадкових процесів.

Теорія випадкових процесів (в іншій термінології — теорія випадкових функцій) є математичною наукою, яка вивчає закономірності випадкових подій у динаміці.

У світі, що нас оточує, часто спостерігаються процеси, перебіг яких передбачити неможливо. Ця невизначеність зумовлюється впливом випадкових факторів на хід процесу.

Наприклад, рівень води в річці або водосховищі змінюється під впливом випадкових чинників залежно від погоди, кількості опадів, інтенсивності зрошувальних заходів; напруга в електромережі відхиляється від номіналу під впливом таких випадкових факторів, як кількість увімкнених у мережу приладів, моменти їх вмикання чи вимикання тощо. Можна переконатися, що в будь-якому процесі є елемент випадковості, який виявляється більшою чи меншою мірою залежно від його фізичної основи. Отже, детермінованих процесів у навколишньому світі не існує — на перебіг будь-якого процесу впливає багато чинників, які під час дослідження (моделювання) врахувати практично неможливо.

Теорія випадкових процесів широко застосовується, коли йдеться про вивчення економічних, екологічних, соціальних та технічних систем. Базуючись на цій теорії, створюють стохастичні моделі, що описують більшість видів господарської діяльності людини і дають змогу з певною ймовірністю прогнозувати ситуації, які можуть виникати внаслідок цієї діяльності.

Випадковий процес пов'язаний із часом t. Тому в загальному випадку випадкові процеси позначають $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. Поняття випадкового процесу є узагальненням випадкової величини.

Випадковим називається процес $X(t)$, значення якого при будь-якому фіксованому $t = t_i$ $(i = 1, 2, 3,...)$ є випадковою величиною $X(t_i)$ $(i = 1,2,3,....)$. Отже, випадковий процес є функцією від t. Випадкова величина $X(t_i)$ $(i = 1,2,3,....)$, в яку реалізувався випадковий процес $X(t)$ при значенні аргументу $t = t_i$, називають ***перерізом*** цього процесу.

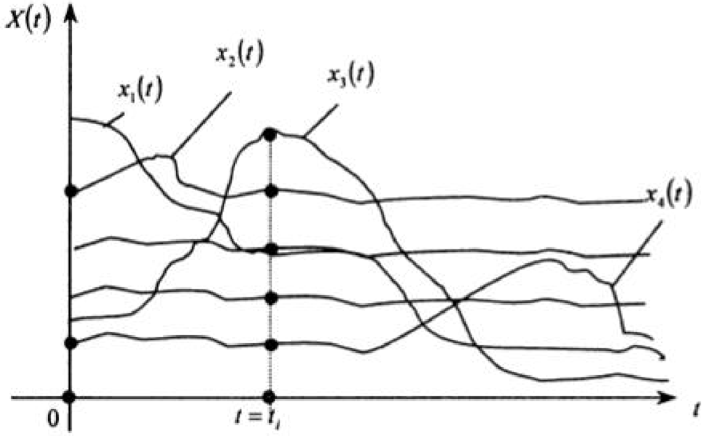
Той факт, що в деякому експерименті випадковий процес $X(t)$ здійснився, записуватимемо так: $X(t) = x(t)$, де $x(t)$ уже не є випадковим процесом, і його залежність від t набуває цілком певного вигляду. Отже, $X(t) = x(t)$ — не випадкова функція.

Таким чином, провівши експеримент, дістанемо деяку ***реалізацію випадкового процесу*** $X(t) = x(t)$.

Кожна реалізація випадкового процесу $\boldsymbol{X}(t)$ є невипадкою функцією $\boldsymbol{x}(t)$, на яку перетворюється випадковий процес у результаті проведення експерименту (опитування, спостереження).

Здійснивши не один експеримент, а кілька, дістанемо деяку ***множину реалізацій випадкового процесу***.

Схематично це можна проілюструвати графіками, поданими на рисунку:



Реалізації $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ відрізняються між собою. Провівши переріз при $t = t_i$, дістанемо випадкову величину, спостережувані значення якої позначено точками на вертикальній прямій, проведеній через $t = t_i$.

Якщо випадковий процес $X(t)$ є випадковою функцією від аргументу t, то випадкова величина $X(t_i) = (x_1(t_i),\ x_2(t_i),...x_n(t_i))$, яку дістаємо, проводячи переріз при $t = t_i$, є фіксацією випадкового процесу в даний момент часу (процес розглядається у статиці). Отже, функції $X(t_i)$ є стохастичними, тоді як випадковий процес $X(t)$ є динамічним унаслідок зміни t.

Таким чином, **випадковий процес є системою випадкових величин усіх перерізів процесу**.

Таких перерізів може бути нескінченна множина. Тому досліджувати утворювану систему випадкових величин неможливо.

У реальних задачах обмежуються двома чи трьома перерізами. Значне збільшення кількості перерізів приводить до непомірно складної математичної задачі, розв'язати яку практично неможливо.

Випадкові процеси можна класифікувати за часом і за станами.

Випадковий процес $X(t)$ називають ***процесом із дискретним часом***, якщо система, в якій він відбувається, може змінювати свої стани лише у фіксовані моменти часу $t_1, t_2, ... t_i, ...,$ кількість яких скінченна або зліченна. Множина $T = (t_1, t_2, ...t_n)$ моментів переходу системи є зліченною і дискретною.

Приклади випадкових процесів із дискретним часом: 1) процес роботи технічних систем, які підлягають огляду в моменти часу $t_1, t_2, ...$ і які потім переводять із однієї категорії придатності для експлуатації до іншої; 2) процес роботи обчислювального центру, що може змінювати свої стани в моменти часу $t_1, t_2, ...,$ та ін.

Випадковий процес $X(t)$ називається ***процесом із неперервним часом***, якщо переходи системи із одного стану до іншого можуть здійснюватися в будь-який момент $T = t$.

Для випадкового процесу з неперервним часом множина T моментів переходу системи із одного стану до іншого є незліченною.

Приклади випадкових процесів із неперервним часом: 1) $X(t)$ — кількість відмов у роботі технічного пристрою; 2) $X(t)$ — кількість осіб, які захворіли на грип у деякому місті в період епідемії, тощо.

Випадковий процес $X(t)$ називають ***процесом із неперервними станами***, якщо його переріз у будь-який момент часу t є не дискретною, а неперервною випадковою величиною.

Випадковий процес $X(t)$ називають ***процесом із дискретними станами***, якщо в будь-який момент часу t перерізом його є дискретна випадкова величина.

Приклади процесів із дискретним і неперервним станами:

1) у певні моменти часу $t_1, t_2, ...$ вимірюється температура повітря в деякій місцевості. Послідовність значень цієї величини є випадковим процесом $X(t)$ із неперервним станом і дискретним часом;

2) процес зміни напруги в електромережі є випадковим процесом $U(t)$ із неперервним станом і неперервним часом;

3) технічний прилад містить n елементів, які працюють незалежно один від одного і в процесі роботи можуть виходити з ладу.

Випадковий процес $X(t)$ — кількість елементів, які можуть вийти з ладу, є процесом із дискретним станом і неперервним часом.

У реальних задачах випадкові процеси зручно подавати у вигляді найпростіших елементарних функцій.

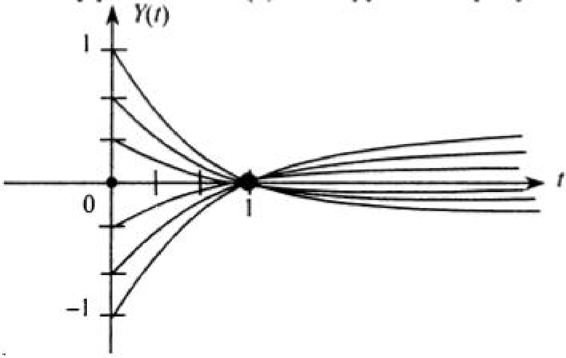
Елементарною випадковою функцією називається така функція від аргументу t, в якій залежність від t подається звичайною невипадковою функцією, причому як параметри туди входять одна або кілька звичайних, незалежних від t випадкових величин.

Приклад 1. Елементарна випадкова функція має такий вигляд:

$$Y(t) = X \ln t \quad (t > 0),$$

де X — неперервна випадкова величина, яка має, наприклад, рівномірний закон розподілу на проміжку $(-1; 1)$.

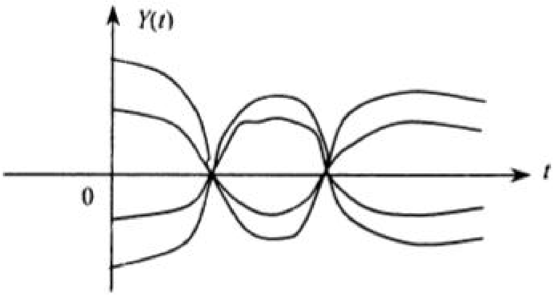
Множину реалізацій $Y(t)$ ілюструє такий рисунок.



Приклад 2. Елементарна випадкова функція подається у вигляді

$$Y(t) = X \cos at,$$

де X — випадкова величина; a — невипадковий параметр. Множину реалізацій зображено на наступному рисунку.



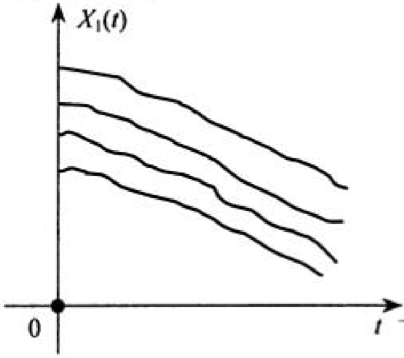
Нехай маємо випадковий процес $X(t)$. Переріз для $X(t)$ при будь-якому значенні аргументу t є випадковою величиною, яка має такий закон розподілу:

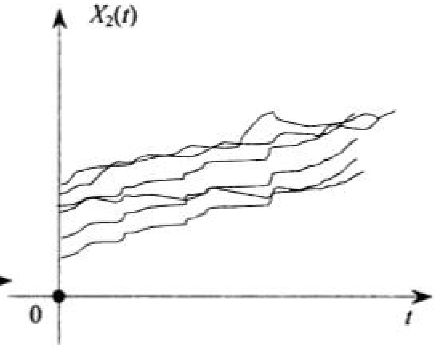
$$F(t,x)=P(X(t)<x).$$

$F(x,t)$ є функцією розподілу ймовірностей, яка залежить від двох аргументів: t, для якого проводиться переріз, та X, меншим за яке має бути випадкова функція $X(t)$.

Функція $F(t,x)$ називається ***одновимірним законом розподілу випадкового процесу*** $X(t)$. Ця функція характеризує лише властивості одного, окремо вибраного перерізу випадкового процесу $X(t)$, але не дає інформації про спільний розподіл двох і більше перерізів.

Розглянемо два випадкові процеси, подані реалізаціями на наступних рисунках.





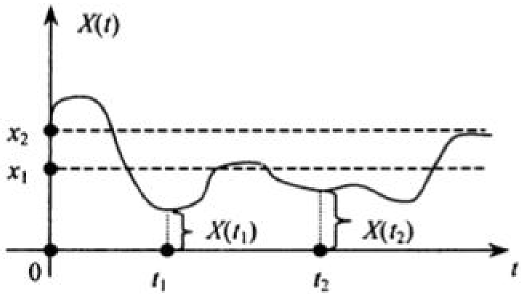
Якщо реалізації випадкового процесу $X_1(t)$ мають плавний характер, то для $X_2(t)$ ми спостерігаємо різкі зміни реалізації. Для процесу $X_1(t)$ характерна тісна залежність між перерізами випадкового процесу, тоді як для $X_2(t)$ тіснота цієї залежності зменшується зі збільшенням відстані між перерізами.

Отже, $F(t,x)$ не дає повної інформації про випадковий процес. Очевидно, повнішу інформацію може дати двовимірний закон розподілу, який подається спільною функцією розподілу двох перерізів випадкового процесу $X(t)$, які беруться для моментів часу t_1, t_2:

$$F(t_1,t_2,x_1,x_2)=P(X(t_i)<x_1, X(t_2)<x_2).$$

Таким чином, ми дістали функцію чотирьох аргументів: t_1, t_2, x_1, x_2.

Це показано на наступному рисунку.

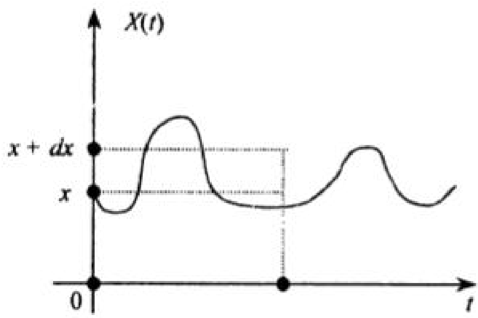


Теоретично можна необмежено збільшувати кількість перерізів і діставати при цьому повнішу інформацію про випадковий процес $X(t)$. Але оперувати з такими функціями, які залежать від багатьох аргументів, дуже незручно. Обсяг інформації, який дістаємо зі збільшенням кількості перерізів, дуже швидко зростає. Тому, як правило, обмежуються лише двома перерізами. Для одного перерізу закон розподілу можна задати щільністю ймовірностей $f(t,x)$.

Добуток $f(t,x)dx$ наближено дорівнює значенню ймовірності $P(x < X(t) < x + dx)$.

Отже, $$f(t,x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(t, x + \Delta x) - F(t,x)}{\Delta x} = F'_x(t,x).$$

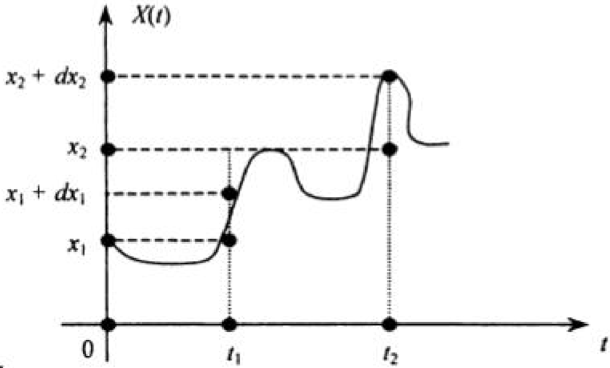
Ймовірність $P(x < X(t) < x + \Delta x)$ демонструє наступний рисунок.



Щільність імовірностей для двох перерізів подається так:

$$f(t_1,t_2,x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F(t_1,t_2,x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Добуток $f(t_1,t_2,x_1,x_2)dx_1dx_2$ є наближеним значенням імовірності $P(x_1 < X(t_1) < x_1 + dx_1, x_2 < X(t) < x_2 + dx_2)$, яку зображено на наступному рисунку.



Функція $f(t_1,t_2,x_1,x_2)$ має дві важливі властивості:

1) $f(t_1,t_2,x_1,x_2)=f(t_2,t_1,x_2,x_1)$ — симетрія;

2) $\int\limits_{-\infty} f(t_1,t_2,x_1,x_2)dx_2 = f(t_1,x_1)$.

Математичним сподіванням випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $M_x(t)$ від аргументу t, яка при будь-якому значенні аргументу $t=t_i$ дорівнює математичному сподіванню для цього перерізу:

$$M_x(t)=M(X(t))=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(t,x)dx.$$

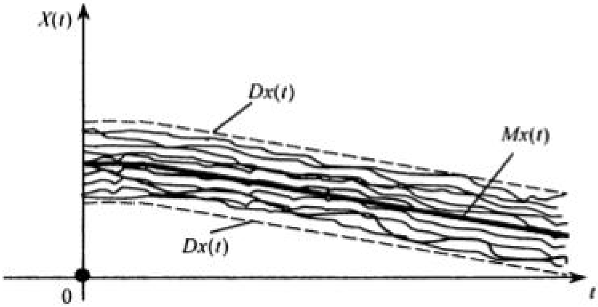
Різницю $X(t)-M_x(t)$ називають ***флуктуаційною частиною випадкового процесу*** $X(t)$.

Дисперсією випадкового процесу $X(t)$ називається невипадкова функція $D_x(t)$ від аргументу t, яка при будь-якому значенні t дорівнює дисперсії цього перерізу: $D(X(t))=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-M_x(t))^2 f(t,x)dx$.

Функція $D_x(t)$ характеризує ***розсіювання реалізацій випадкового процесу*** $X(t)$ ***відносно математичного сподівання*** $M_x(t)$.

Тоді ***середньоквадратичне відхилення випадкового процесу*** обчислюється за формулою: $\sigma_x(t) = \sigma(X(t)) = \sqrt{D_x(t)}$.

На наступному рисунку схематично зображено $M_x(t)$, $D_x(t)$.



Функції $M_x(t)$, $D_x(t)$ є важливими числовими характеристиками, але вони не дають повної інформації про поведінку випадкового процесу $X(t)$. Зустрічаються випадки, коли два випадкові процеси мають однакові $M_x(t)$, $D_x(t)$, але за своєю внутрішньою структурою вони істотно різні.

Як відомо, що тісноту лінійної залежності між випадковими величинами X і Y можна визначити ***кореляційним моментом***

$K_{xy} = M(x, y) - M(x)M(y)$.

Аналогічна характеристика використовується і для випадкових процесів:

$$K_x(t_1, t_2) = M(X(t_1)X(t_2)) - M_x(t_1)M_x(t_2).$$

Ця функція називається ***кореляційною***. При $t_1 = t_2 = t$ дістаємо

$$K_x(t, t) = M(X(t))^2 - M_x^2(t).$$

Кореляційна функція $K_x(t_1, t_2)$ симетрична відносно аргументів t_1, t_2:

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1).$$

Нормованою кореляційною функцією $r_x(t_1, t_2)$ ***випадкового процесу*** $X(t)$ називають функцію $r_x(t_1, t_2) = \dfrac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}$.

Властивості $r_x(t_1,t_2)$:

1) при $t_1=t_2=t$, $r_x(t,t)=1$;

2) $r_x(t_1,t_2)=r_x(t_2,t_1)$;

3) $|r_x(t_1,t_2)|\le 1$, тобто $-1\le r_x(t_1,t_2)\le 1$.

Приклад 3. Елементарна випадкова функція подається у вигляді:

$Y(t)=Xe^{-3t}$ $(t>0)$,

де X — випадкова величина, яка має нормальний закон розподілу із параметрами $a=2$; $\sigma=4$. Знайти $M_y(t)$, $D_y(t)$, $K_{xy}(t_1,t_2)$, $r_{xy}(t_1,t_2)$.

Розв'язування:

▼ Обчислимо математичне сподівання процесу, що розглядається:

$$M_y(t)=M\left(Xe^{-3t}\right)=e^{-3t}M(X)=2e^{-3t}.$$

Тепер визначимо дисперсію цього процесу:

$$D_y(t)=D\left(Xe^{-3t}\right)=e^{-6t}D(X)=16e^{-6t},$$

а далі — відповідні середньоквадратичні відхилення:

$$\sigma_y(t_1)=\sqrt{D_y(t_1)}=\sqrt{16e^{-6t}}=4e^{-3t_1},$$

$$\sigma_y(t_2)=\sqrt{D_y(t_2)}=\sqrt{16e^{-6t}}=4e^{-3t_2}.$$

Шукана кореляційна функція подається так:

$$K_x(t_1,t_2)=M(X(t)X(t_2))-M(X(t_1))M(X(t_2))=$$

$$=M\left(Xe^{-3t_1}Xe^{-3t_2}\right)-M\left(Xe^{-3t_1}\right)M\left(Xe^{-3t_2}\right)=$$

$$=e^{-3(t_1+t_2)}M\left(X^2\right)-e^{-3(t_1+t_2)}M^2(X)=$$

$$=e^{-3(t_1+t_2)}\left(M\left(X^2\right)-M^2(X)\right)=e^{-3(t_1+t_2)}D(X)=16e^{-3(t_1+t_2)}.$$

Звідси знаходимо нормовану кореляційну функцію:

$$r_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_y(t_1)\sigma_y(t_2)}=\frac{16e^{-3(t_1+t_2)}}{16e^{-3(t_1+t_2)}}=1.$$

1. Марковські випадкові процеси

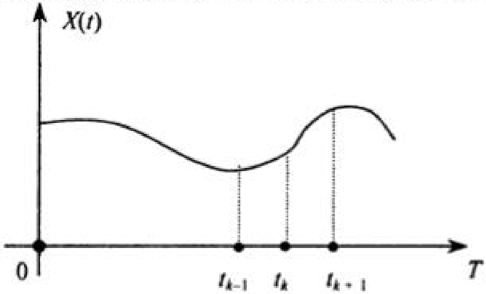
Серед випадкових процесів марковські становлять окремий клас. Вони посідають важливе місце серед інших з огляду на те, що для них добре розроблено математичний апарат, який дає змогу розв'язувати широке коло прикладних задач. За допомогою марковських процесів можна достатньо точно описати функціонування й розвиток реальних фізичних, економічних, екологічних, соціологічних систем.

Випадковий процес $X(t)$, $t \in [0;T]$, називають ***марковським***, якщо для моментів часу $t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n$ умовна функція розподілу для моменту часу t_k випадкового процесу $X(t_k)$ $(k = 1,2,3,...,n)$ залежить лише від функції розподілу для моменту часу t_{k-1} цього процесу $X(t_{k-1})$ і не залежить від функцій розподілу $X(t_i)$ для $t_i = t_1, t_2, t_3, ..., t_{k-2}$.

Отже, для марковського випадкового процесу справджується така рівність імовірностей:

$$P(X(t_k) < x_k / X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, ..., X(t_{k-1}) = x_{k-1}) =$$
$$= P(X(t_k) < x_k / X(t_{k-1}) = x_{k-1}).$$

Таким чином, для марковського випадкового процесу його майбутнє в момент часу $t = t_{k+1}$ залежить від теперішнього моменту часу $t = t_k$, в якому процес перебуває, а через нього також і від того, в якому стані цей процес перебував у момент часу $t = t_{k-1}$ в минулому. Цю закономірність унаочнює нижченаведений рисунок.



Наприклад, розвиток енергогенеруючих систем у 2009 році (майбутнє) залежить від діяльності в 2008 році (теперішнє), яка також залежить від їх стану в 2007 році (минуле).

Отже, для марковського випадкового процесу його майбутнє залежить від його минулого лише через теперішнє.

Вивчаючи марковські процеси, часто з метою наочного висвітлення цього питання розглядають певну економічну або будь-яку іншу систему *A*, котра в кожний фіксований момент часу $t = t_i$

може перебувати в одному з несумісних станів $\omega_i = \omega_1, \omega_2, ... \omega_k, ...$, причому перехід цієї системи з одного стану ω_i до іншого ω_j може відбуватися в моменти часу $t = t_1, t_2, ...\ t_k, ...$.

Нехай випадковий перехід системи A із одного стану в будь-який можливий інший здійснюється лише в певні моменти часу $t = t_1, t_2, ...\ t_k, ...,$ які називають ***кроками процесу***. Такі процеси називаються ***марковськими з дискретними станами і дискретним часом***. Множину всіх можливих станів системи, в яких може перебувати марковський процес, називають ***простором станів процесу*** і позначають Ω.. Символами $\omega_i \in \Omega$ позначають ***конкретні стани*** процесу.

Запис $\omega_i \to \omega_j$ означає ***перехід процесу із і-го стану до j-го***. Простір станів Ω може бути обмеженим і необмеженим. Далі розглядатимемо марковські процеси з обмеженою кількістю станів простору Ω.

Приклад 4. Футбольна команда готується до чергового матчу, результатом якого можуть бути з певною ймовірністю лише три несумісні стани (події): команда виграє — стан ω_1; нічийний результат матчу — стан ω_2; команда програє матч — стан ω_3. Отже, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Перелічені стани є несумісними, і перехід команди в кожний із цих станів може здійснюватися з певною ймовірністю. Розглядаючи команду як систему, можна стверджувати, що в ній відбувається марковський процес із дискретними станами та дискретним часом переходу з одного стану до іншого за один крок (за один матч).

Приклад 5. Фермер купив трактор. У процесі роботи його в господарстві трактор може з певною ймовірністю перебувати в одному з несумісних станів: ω_1 — робочому; ω_2 — неробочому. Перехід із одного стану до іншого може відбуватися в дискретні моменти часу.

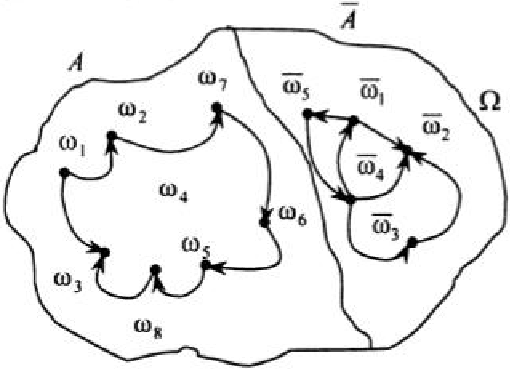
Отже, випадковий процес, який маємо в системі (тракторі), буде марковським процесом із дискретними станами та дискретним часом. Простір станів $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

1. Нехай задано простір станів марковського процесу Ω і певну підмножину станів $A \subset \Omega$, при цьому $\overline{A} = \Omega / A$ буде доповненням до A.

Якщо з кожного стану ω_i підмножини A можна перейти до будь-якого стану $\omega_j \in A$, і при цьому до стану $\omega_k \in \overline{A}$ процес не зможе перейти ні з одного зі станів, які належать підмножині A, то в цьому разі A називають ***ергодичною множиною***, або ***множиною ергодичного стану процесу***. Одного разу потрапивши до ергодичної множини, процес ніколи не зможе залишити її, і з цього моменту часу переміщуватиметься лише серед тих станів, які належать ергодичній множині A.

Отже, **ергодичний стан є елементом ергодичної множини**.

Це ілюструє такий рисунок.

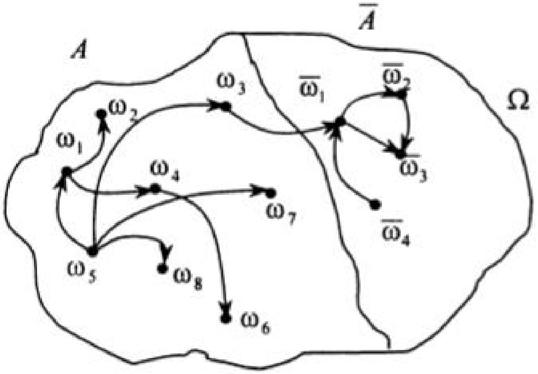


На рисунку бачимо, що стани $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8$ утворюють ергодичну множину A. Стани $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3, \overline{\omega}_4, \overline{\omega}_5$ також утворюють ергодичну множину $\overline{A}$. Перехід процесу із A в $\overline{A}$, як і навпаки, є неможливим.

2. Нехай задано простір станів випадкового процесу Ω, а також $A \subset \Omega$: $\overline{A} = \Omega - A$. Тоді, якщо будь-який стан підмножини A може бути досягнутий із будь-якого іншого стану цієї самої підмножини і при цьому існує хоча б один стан $\omega_k \in A$, із якого процес може перейти до стану $\omega_j \in \overline{A}$, то підмножину станів A називають ***нестійкою***.

Нестійкий стан є елементом нестійкої множини A.

Це схематично ілюструє наступний рисунок.



Як бачимо з рисунка, процес зі стану $\omega_3 \in A$ може з певною ймовірністю перейти до стану $\overline{\omega}_i \in \overline{A}$.

3. Якщо ергодична множина має лише один стан, то його називають ***поглинальним***. Одного разу потрапивши до цього стану, процес у ньому залишається назавжди.

У загальному випадку марковський процес може мати одну, дві і більше ергодичних множин, але при цьому не мати нестійких множин.

Марковський процес із дискретними станами і дискретним часом називають також ***марковським ланцюгом***, що є різновидом марковського процесу, в якому майбутнє залежить від минулого лише через теперішнє.

Перехід системи зі стану ω_i до стану ω_j, який може відбуватися з певною ймовірністю в момент часу t, позначається як $p_{ij}(t)$ і називається ***умовною ймовірністю переходу***.

Повна ймовірнісна картина всіх можливих переходів системи, яка має N станів, подається у вигляді квадратної матриці:

$$\pi = \|p_{ij}(t)\| = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) & \dots & p_{1N}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) & \dots & p_{2N}(t) \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ p_{N1}(t) & p_{N2}(t) & p_{N3}(t) & \dots & p_{NN}(t) \end{pmatrix},$$

яку називають ***імовірнісною матрицею переходів***. При цьому $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(t)=1\ \left(i=\overline{1,N}\right)$, оскільки ці випадкові події (перехід системи з фіксованого стану ω_i до будь-якого можливого стану ω_j $\left(j=\overline{1,N}\right)$ утворюють ***повну групу***. Враховуючи те, що моменти часу переходу системи $\omega_i \to \omega_j$ названо кроками, умовні ймовірності переходу на k-му кроці позначають $p_{ij}(k)$ і називають ***перехідними ймовірностями марковського ланцюга***.

Величина $p_{ii}(k)$ є умовною ймовірністю того, що на k-му кроці система перебувала у стані ω_i і в цьому самому стані вона й залишиться.

Перехідні ймовірності $p_{ij}(k)$ можна записати такою квадратною матрицею:

$$\pi=\left\|p_{ij}(k)\right\|=\begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & p_{13}(k) & \dots & p_{1N}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & p_{23}(k) & \dots & p_{2N}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ p_{N1}(k) & p_{N2}(k) & p_{N3}(k) & \dots & p_{NN}(k) \end{pmatrix}.$$

Тут також $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}(k)=1\ \left(i=\overline{1,N}\right)$.

Ланцюг Маркова називають ***однорідним***, якщо $p_{ij}(k)=p_{ij}=const$, тобто перехідні ймовірності не залежать від кроку k.

Матриця перехідних імовірностей для однорідних ланцюгів Маркова подається у вигляді

$$\pi=\left\|p_{ij}\right\|=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & & p_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

Матриця π називаєть ***матрицею однокрокового переходу системи***.

Приклад 6. У певному містечку діють три супермаркети A_1, A_2, A_3, які конкурують між собою. Фірма з вивчення ринку зібрала й обробила інформацію за 5 місяців про частку (у відсотках) покупців, які користуються послугами цих супермаркетів. Було з'ясовано, що магазин A_1 зберіг 80% своїх покупців, набувши водночас 10% покупців магазину A_2 і 2% — магазину A_3; магазин A_2 зберіг 70% своїх покупців і набув 8% покупців магазину A_3 і 14% — магазину A_1; магазин A_3 зберіг 90% своїх покупців і при цьому набув 6% покупців магазину A_1 і 20% — магазину A_2.

Побудувати ймовірнісну матрицю переходів покупців за один крок.

Розв'язування:

Матриця однокрокового переходу для цієї системи подається у вигляді

$$\pi = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}14 & 0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}02 & 0{,}08 & 0{,}9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Як бачимо, виконується умова стохастичної матриці для кожного її рядка. І справді, магазин A_1 зберіг 80% своїх покупців, а водночас втратив 20%, із яких 14% вибрали магазин A_2 і 6% — магазин A_3; аналогічно A_2 зберіг 70% своїх покупців і втратив 30% покупців, із них 10% вибрали магазин A_1 і 20% — магазин A_3; і магазин A_3 зберіг 90% своїх покупців, втративши при цьому 10%, із яких 2% вибрали магазин A_1 і 8% — A_2. ▲

Для наочності стани марковських ланцюгів та ймовірності переходу системи з одного стану до іншого зручно подавати ***ймовірнісними графами***.

У загальному випадку графи зображаються ***вершинами***, які розміщуються на площині в певному порядку, і лініями, що сполучають вершини, — так званими ***ребрами***. Вершина графа інформує про стан, в якому може перебувати система, а ребро графа, що сполучає дві вершини, вказує на той стан, до якого може перейти система з певною ймовірністю.

Приклад 7. За заданою матрицею однокрокового переходу системи

$$\pi = \left\| p_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

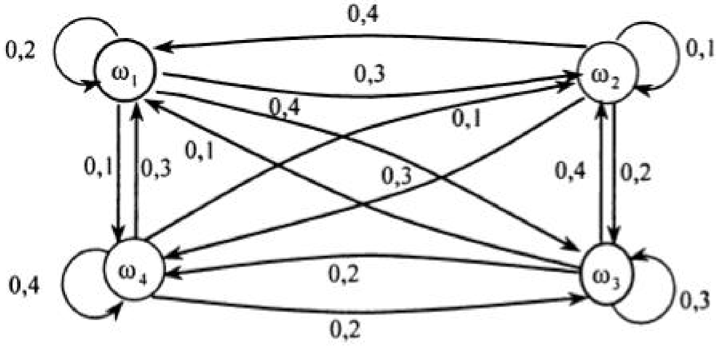
побудувати ймовірнісний граф.

Розв'язування:

▼ За заданою матрицею π з'ясовуємо, що система може перебувати з певною ймовірністю в одному з несумісних чотирьох станів $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, які у структурі графа будуть вершинами. Відповідні ймовірності переходу такі:

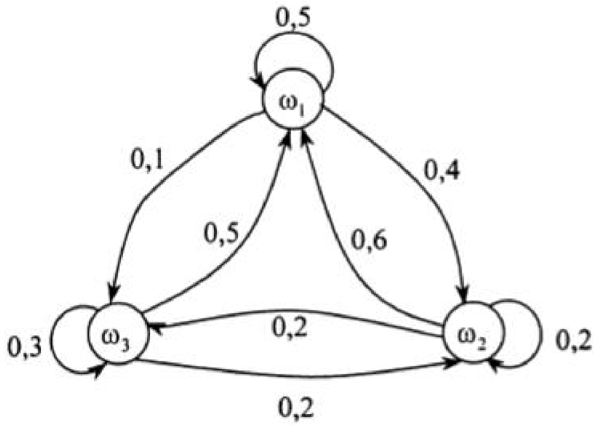
$$p_{11} = 0{,}2, \quad p_{12} = 0{,}3, \quad p_{19} = 0{,}4, \quad p_{14} = 0{,}1;$$
$$p_{21} = 0{,}4, \quad p_{22} = 0{,}1, \quad p_{23} = 0{,}2, \quad p_{24} = 0{,}3;$$
$$p_{31} = 0{,}1, \quad p_{32} = 0{,}4, \quad p_{33} = 0{,}3, \quad p_{34} = 0{,}2;$$
$$p_{41} = 0{,}3, \quad p_{42} = 0{,}1, \quad p_{43} = 0{,}2, \quad p_{44} = 0{,}4.$$

Імовірнісний граф з чотирма вершинами зображено на рисунку.



▲

Приклад 8. За заданим імовірнісним графом побудувати матрицю ймовірностей однокрокового переходу.



Розв'язування:

▼ Квадратна матриця ймовірностей однокрокового переходу матиме розмір 3Ч3.

Імовірності першого рядка матриці такі:

$p_{11} = 0{,}5;\quad p_{12} = 0{,}4;\quad p_{13} = 0{,}1;$

імовірності другого рядка:

$p_{21} = 0{,}6;\quad p_{22} = 0{,}2;\quad p_{23} = 0{,}2;$

імовірності третього рядка:

$p_{31} = 0{,}5;\quad p_{32} = 0{,}2;\quad p_{33} = 0{,}3.$

Отже, матриця ймовірностей однокрокового переходу така:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$ ▲

Імовірності переходу системи зі стану ω_i до стану ω_j за n кроків називають ***n*-кроковою ймовірністю переходу** і позначають $p_{ij}^{(n)}$, а квадратну матрицю, елементами якої є ці ймовірності, називають ***n*-кроковою матрицею ймовірностей переходів**.

Нехай задано матрицю однокрокового переходу

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \ldots \quad \omega_k \quad \ldots \quad \omega_N$

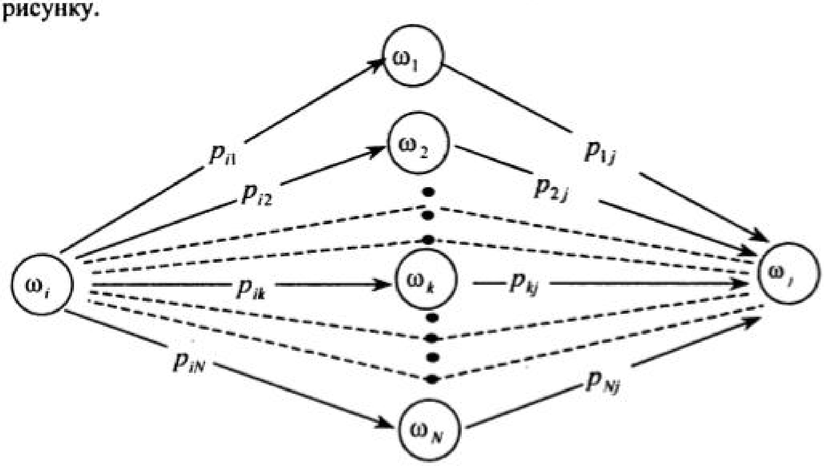
$$\pi = \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_k \\ \dots \\ \dots \\ \omega_N \end{array} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} & \dots & p_{2N} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} & \dots & p_{kN} \\ \dots & \dots & & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N1} & p_{N2} & \dots & p_{Nk} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо елементи матриці $\pi^{(n)}$, тобто ймовірності n-крокового переходу системи.

Цілком зрозуміло, що при $n = 1$

$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Як знайти $p_{ij}^{(2)}$, тобто двокрокові ймовірності переходу системи ($n = 2$)? Для наочності цей перехід $\omega_i \to \omega_j$ показано на наступному рисунку.



Як бачимо з рисунка, існує N несумісних можливих шляхів переходу системи зі станів $\omega_i \to \omega_j$ за два кроки, а саме: $\omega_i \to \omega_1 \to \omega_j$, $\omega_i \to \omega_2 \to \omega_j, \dots,$ $\omega_i \to \omega_k \to \omega_j, \dots,$ $\omega_i \to \omega_N \to \omega_j$. Імовірності цих шляхів переходу системи обчислюються відповідно так:

$p_{i1}p_{1j}$, $p_{i2}p_{2j}, \dots$ $p_{ik}p_{kj}, \dots$ $p_{iN}p_{Nj}$.

Отже, імовірність переходу $\omega_i \to \omega_j$ за два кроки дорівнює сумі добутків цих імовірностей: $p_{ij}^{(2)} = \sum_{m=1}^{N} p_{im} p_{mj}$.

А це є елемент матриці $\pi^{(2)}$, який міститься в i-му рядку і j-му стовпці.

Розмірковуючи аналогічно, можна довести, що на $k = n + 1$-му кроці дістанемо $p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{m=1}^{N} p_{im} p_{mj}^{(n)}$.

Перший стан, із якого система починає свій процес переходу, може бути заданим або визначеним за певним правилом. У загальному випадку для системи (процесу) задається вектор її початкового стану, що позначається так: $\vec{a}_0 = (a_1 a_2 \ldots \ a_n)$, де a_i — імовірність того, що система в початковий момент перебуває у стані ω_i. При цьому $\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$.

Приклад 9. За заданою матрицею однокрокового переходу $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}$ системи і початковим вектором $\vec{a}_0 = (0{,}8 \quad 0{,}2)$ знайти ймовірності перебування системи у стані ω_1 і ω_2 для $n = 5$.

Розв'язування:

▼ Нехай $\vec{a}_5 = \left(a_1^{(5)} \ a_2^{(5)}\right)$ — вектор станів системи через 5 кроків. Тоді

$$\vec{a}_5 = \vec{a}_0 \pi^5 = (0{,}8 \quad 0{,}2) \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 \\ 0{,}39 & 0{,}61 \end{pmatrix}^5 =$$

$$= (0{,}8 \quad 0{,}2) \begin{pmatrix} 0{,}342 & 0{,}658 \\ 0{,}342 & 0{,}658 \end{pmatrix} = (0{,}342 \quad 0{,}658).$$

Отже, через 5 кроків система з імовірністю 0,342 перебуватиме в стані ω_1 і з імовірністю 0,658 — у стані ω_2. ▲

Приклад 10. Мета дослідження полягала в тому, щоб з'ясувати, яким видом транспорту (тролейбус, автобус, метро) користується середньостатистичний мешканець столиці, дістаючись від свого дому до місця роботи. Було виявлено, що коли він певного дня на робочому тижні їхав до місця роботи автобусом, то ймовірність того, що й наступного дня він також скористається автобусом, дорівнює 0,6, а ймовірність того, що змінить автобус на тролейбус або метро, дорівнює відповідно 0,35 і 0,05. Якщо ж він спочатку їхав тролейбусом, то ймовірність того, що наступного дня він не змінить виду транспорту, становить 0,7, а ймовірність того, що змінить вид транспорту на автобус або метро, дорівнює відповідно 0,25 і 0,05. Нарешті, якщо мешканець насамперед скористався метро, то ймовірність того, що й наступного дня буде той самий вид транспорту, дорівнює 0,8, а ймовірність змінити його на автобус або тролейбус дорівнює відповідно 0,05 і 0,15.

Скласти матрицю однокрокового переходу системи, яка має три стани, що відповідають трьом видам міського транспорту, використовуваного мешканцем, і визначити ймовірність того, що він буде користуватися автобусом у середу та п'ятницю, якщо в понеділок він їздив у метро (розглядається п'ятиденний робочий тиждень).

Розв'язування:

▼ Формалізуючи задачу, ми розглядаємо систему, яка може перебувати в одному із трьох несумісних станів: ω_1 — мешканець користується автобусом; ω_2 — тролейбусом; ω_3 — метро.

Матриця однокрокового переходу системи (крок — один робочий день) має такий вигляд

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,6 & 0,35 & 0,05 \\ 0,25 & 0,7 & 0,05 \\ 0,05 & 0,15 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Знаючи, що мешканець почав робочий тиждень із поїздки в метро, записуємо вектор початкового стану системи:

$\vec{a}_0 = (0,\ 0,\ 1)$.

Імовірність того, що мешканець у середу користуватиметься автобусом, обчислюється так:

$$\vec{a}_3 = (0 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 0,6 & 0,35 & 0,05 \\ 0,25 & 0,7 & 0,05 \\ 0,05 & 0,15 & 0,8 \end{pmatrix}^3 =$$

$$=(0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0{,}39 & 0{,}494375 & 0{,}115625\\ 0{,}347125 & 0{,}53725 & 0{,}115625\\ 0{,}157625 & 0{,}304875 & 0{,}5375\end{pmatrix}=(0{,}157625\ \ 0{,}304875\ \ 0{,}5375).$$

Отже, ймовірність того, що в середу мешканець обере автобус, наближено дорівнює 0,158.

Імовірність того, що в п'ятницю це також буде автобус, визначається аналогічно:

$$\vec{a}_5=(0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0{,}6 & 0{,}35 & 0{,}05\\ 0{,}25 & 0{,}7 & 0{,}05\\ 0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}8\end{pmatrix}^5=$$

$$=(0\ \ 0\ \ 1)\begin{pmatrix}0{,}349838 & 0{,}497623 & 0{,}152539\\ 0{,}344585 & 0{,}502876 & 0{,}152539\\ 0{,}228559 & 0{,}381597 & 0{,}389844\end{pmatrix}=(0{,}228559\ \ 0{,}381597\ \ 0{,}389844).$$

Отже, імовірність того, що мешканець у п'ятницю скористається автобусом, наближено дорівнює 0,229. ▲

Усі ланцюги Маркова можна поділити на два класи: на ті, які мають нестійкі стани, й на ті, які таких станів не мають.

Ланцюг Маркова називають **поглинальним**, якщо серед множини станів відповідної системи існує хоча б один, набувши якого з певною ймовірністю, система перебуватиме в ньому й надалі. Отже, поглинальними є такі ланцюги Маркова, для яких стійкими станами є поглинальні.

Приклад 11. Існує гра, яку називають револьверною рулеткою. Правила її такі. Револьвер із шестизарядним барабаном заряджається одним патроном. Гравець натискує курок. У разі першого експерименту можливі два наслідки: ω_1 — постріл здійсниться; ω_2 — не здійсниться. Побудувати матриці ймовірностей та імовірнісний граф.

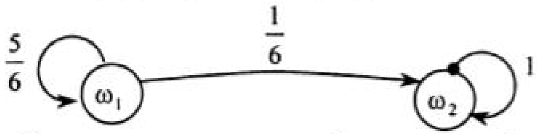
Розв'язування:

▼ Розглянемо цю гру як систему, що має лише два несумісні стани. Тоді матриця ймовірностей переходу складатиметься з двох рядків:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У першому рядку $p_{11} = \frac{5}{6}$ — імовірність того, що постріл не відбувся, а тому гра триватиме; $p_{12} = \frac{1}{6}$ — імовірність того, що постріл відбувся і гра на цьому закінчилася; другий рядок $p_{21} = 0$; $p_{22} = 1$.

Імовірнісний граф зображено на рисунку.



▲

Ланцюг Маркова називається ***ергодичним***, якщо він має лише одну ергодичну множину станів системи.

Ергодичні ланцюги Маркова бувають двох типів: ***циклічні*** та ***регулярні***.

Ланцюг Маркова називається ***циклічним***, якщо кожного свого стану система може набувати з певною ймовірністю через певні однакові інтервали — періоди.

Приклад 12. За даною матрицею ймовірностей переходу

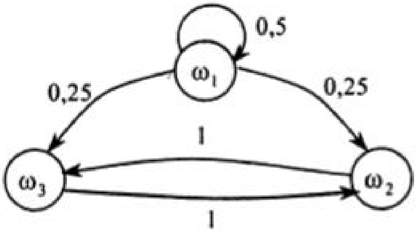
$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

визначити тип ланцюга Маркова та побудувати ймовірнісний граф.

Розв'язування:

▼ Система може перебувати в трьох несумісних станах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а перейшовши зі стану ω_1 до стану ω_2 або ω_3, вона циклічно робитиме перехід $\omega_2 \leftrightarrow \omega_3$. Отже, ланцюг Маркова буде циклічним.

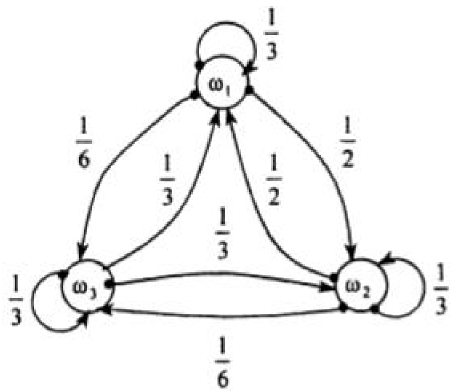
Імовірнісний граф для цього ланцюга зображено на рисунку.



Ланцюг Маркова називається ***регулярним***, якщо за певної кількості кроків n матриця $\pi^{(n)}$ не матиме нульових елементів, тобто можливий перехід між будь-якими станами за n кроків.

Приклад 13. Споживання електроенергії влітку тісно пов'язане з температурою повітря. Тому, плануючи на кожний день виробництво та використання електроенергії, енергокомпанія, яка забезпечує населення міста електроживленням, має брати до уваги ймовірність спекотної, помірної чи прохолодної погоди. Багаторічні спостереження показали: імовірність того, що завтра буде спекотна, помірна чи прохолодна погода, залежить лише від того, яка погода сьогодні — спекотна, помірна чи прохолодна. Перехідні ймовірності зазначено на ймовірнісному графі, де ω_1 — спекотна погода, ω_2 — помірна і ω_3 — прохолодна.

Побудувати матрицю ймовірностей однокрокового переходу та визначити тип ланцюга Маркова.



Розв'язування:

▼ За графом визначаємо ймовірності переходу для рядків матриці :

$$p_{11}=\frac{1}{3};\quad p_{12}=\frac{1}{2};\quad p_{13}=\frac{1}{6};$$
$$p_{21}=\frac{1}{2};\quad p_{22}=\frac{1}{3};\quad p_{23}=\frac{1}{6};$$
$$p_{31}=\frac{1}{3};\quad p_{32}=\frac{1}{3};\quad p_{33}=\frac{1}{3}.$$

Отже, ця матриця матиме такий вигляд:

$$\pi=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

тобто дістанемо регулярний ланцюг Маркова.▲

Вивчаючи поглинальні ланцюги Маркова, визначають:

1) ймовірності переходу до поглинального стану за умови, що процес почався з непоглинального стану;

2) середнє значення часу перебування процесу в непоглинальному стані, перш ніж він перейде до одного з поглинальних станів, за умови, що в початковий момент часу процес був у непоглинальному стані;

3) середню кількість зроблених кроків, перш ніж процес перейде до поглинального стану, якщо початковий стан процесу був непоглинальним.

Розглядаючи поглинальні ланцюги Маркова, стани процесу нумерують так, щоб поглинальні дістали перші номери.

З огляду на це матриця — вона в такому разі називається ***канонічною формою матриці π*** — у загальному випадку подається у вигляді:

$\omega_1 \quad \omega_2 \quad \omega_m \quad \omega_{m+1} \quad \omega_{m+2} \quad \omega_N$

$$\pi = \begin{array}{ll} \text{Поглинальні стани} & \begin{array}{c}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_m\end{array} \\ \text{Непоглинальні стани} & \begin{array}{c}\omega_{m+1}\\ \omega_{m+2}\\ \vdots\\ \omega_N\end{array}\end{array} \left(\begin{array}{c:c} I & O \\ \hdashline R & Q \end{array}\right). \quad (24)$$

Тут I — одинична матриця розміром $m Чm$;

O — матриця розміром $m\cdot (N-m)$, усі елементи якої дорівнюють нулю;

Q — матриця розміром $(N-m)\cdot (N-m)$, елементами якої є ймовірності переходів системи з непоглинальних станів до непоглинальних;

R — матриця розміром $(N-m)\cdot m$, елементами якої є ймовірності, що визначають перехід системи з непоглинального стану до поглинального.

Приклад 14. За даною матрицею ймовірностей однокрокового переходу поглинального ланцюга Маркова

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

побудувати її канонічну форму.

Розв'язування:

▼ Матриця π описує поглинальний ланцюг Маркова з чотирма станами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, із яких стан ω_4 є поглинальним.

Тому для матриці

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

канонічна форма набирає такого вигляду:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} \omega_4 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \omega_4 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}05 & 0{,}75 & 0 \end{pmatrix},
\end{array}$$

де $I = (1)$; $\quad O = (0 \quad 0 \quad 0)$;

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}2 \end{pmatrix}; \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Приклад 15. За даною матрицею ймовірностей однокрокового переходу системи

$$\pi = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

побудувати канонічну матрицю.

Розв'язування:

▼ Канонічна форма матриці буде така:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \omega_{н} & \omega_5 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix},
\end{array}$$

де $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. ▲

Для поглинального ланцюга Маркова з однокроковою матрицею ймовірностей, поданою в канонічній формі, справджуються такі твердження:

1) $\lim\limits_{k \to \infty} Q^k = O$, де O — нульова матриця, всі елементи якої – нулі;

2) матриця $(I - Q)$, де I — одинична матриця, має обернену;

3) $(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q^k$.

Для поглинального ланцюга Маркова ймовірність переходу системи (процесу) в поглинальний стан зі збільшенням числа кроків переходу k прямує до одиниці. А тому і буде виконуватися рівність $\lim\limits_{k \to \infty} Q^k = O$.

Приклад 16. За даною однокроковою матрицею ймовірностей

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}2 & 1 & 0{,}35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

установити, як змінюються значення ймовірностей переходу з одного стану до іншого зі зростанням кількості кроків k.

Розв'язування:

▼ Перейдемо від матриці до її канонічної форми, беручи до уваги, що стани ω_2 і ω_5 поглинальні:

$$\begin{array}{c} \\ \omega_2 \\ \omega_5 \\ \omega_1 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \omega_2 & \omega_5 & \omega_1 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Отже, маємо:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ldots$$

$R = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 \\ 0,15 & 0,35 \end{pmatrix}$ — матриця, елементи якої є ймовірності переходів системи з непоглинальних станів $\omega_i \in Q = (\omega_1, \omega_3, \omega_4)$ до поглинальних $\omega_j \in I = (\omega_2, \omega_5)$;

$Q = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,5 & 0,1 & 0,15 \\ 0,25 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}$ — матриця, елементами якої є ймовірності переходів системи з непоглинальних станів до непоглинальних (тобто система перебуває лише у станах $\omega_i \in Q(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$).

Простежимо, як змінюються значення ймовірностей переходу для матриць R і Q зі зміною кількості кроків.

1) $k = 5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,05 & 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,15 \\ 0,15 & 0,35 & 0,25 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,288 & 0,502 & 0,091 & 0,075 & 0,044 \\ 0,24 & 0,557 & 0,091 & 0,07 & 0,042 \\ 0,271 & 0,59 & 0,061 & 0,049 & 0,029 \end{pmatrix}$$

2) $k = 20$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,05 & 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,15 \\ 0,15 & 0,35 & 0,25 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}^{20} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,357 & 0,641 & 6,611 \cdot 10^{-4} & 5,289 \cdot 10^{-4} & 3,16 \cdot 10^{-4} \\ 0,307 & 0,692 & 6,396 \cdot 10^{-4} & 5,117 \cdot 10^{-4} & 3,057 \cdot 10^{-4} \\ 0,316 & 0,683 & 4,379 \cdot 10^{-4} & 3,503 \cdot 10^{-4} & 2,093 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, зі зростанням кількості кроків імовірності матриці R збільшуються, а ймовірності матриці Q зменшуються. І вже за $k = 105$ матриця набуває такого вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix}^{105} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}358 & 0{,}642 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}307 & 0{,}693 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}317 & 0{,}683 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Отже, коли кількість кроків $k = 105$, усі елементи матриці Q дорівнюють нулям, і система може перебувати лише у стані $\omega_i \in R$, із якого вона неодмінно переходить до одного з поглинальних станів — ω_2 чи ω_5.

Матриця $(I - Q)$ матиме обернену лише за умови, що визначник її не дорівнює нулю, тобто $\det(I - Q) \neq 0$.

Доведемо, що $\det(I - Q) \neq 0$.

Скориставшись властивістю визначника $\det(AB) = \det A \det B$, розглянемо рівність

$$(I - Q)\left(I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots + Q^{n-1}\right) =$$
$$= (I - Q) + \left(Q - Q^2\right) + \ldots + \left(Q^{n-1} - Q^n\right) = I - Q^n,$$

звідки

$$(I - Q)\left(I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots + Q^{n-1}\right) = I - Q^n.$$

Отже, $\lim\limits_{n \to \infty}\left(I - Q^n\right) = I$, а тому для великих значень n (кількості кроків) $\det\left(I - Q^n\right) \neq 0$.

$$\det(I - Q)\left(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1}\right) =$$
$$= \det(I - Q)\det\left(I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1}\right) \neq 0.$$

Оскільки $\det(I - Q) \neq 0$, то матриця $(I - Q)$ має обернену. Із маємо: $I + Q + Q^2 + \ldots + Q^{n-1} = (I - Q)^{-1}\left(I - Q^n\right)$. Звідси при $n \to \infty$ дістаємо $I + Q + Q^2 + Q^3 + \ldots = (I - Q)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} Q^k$.

На практиці обернену матрицю $(I - Q)^{-1}$ знаходять, здебільшого, традиційними методами.

Матрицю $N=(I-Q)^{-1}$ називають ***фундаментальною для поглинального ланцюга Маркова***.

Елемент, який у матриці N міститься на перетині i-го рядка і j-го стовпця, характеризує середнє значення кількості випадків перебування системи (процесу) у стані ω_j і позначається $M_i(\omega_j)$.

Фундаментальну матрицю N можна дістати й іншим методом. Справді, нехай n_j — функція, значення якої дорівнює загальній кількості моментів часу, протягом якого система (процес) перебуватиме у стані $\omega_j \in Q$, а $u_j^{(k)}$ — функція, яка може набувати лише двох значень: 1 — з імовірністю $p_{ij}^{(k)}$, коли система на k-му кроці перебуватиме у стані ω_j, і 0 — з імовірністю $\left(1-p_{ij}^{(k)}\right)$ у протилежному випадку.

Тоді дістаємо:

$$M_i(n_j)=\left\{M_i\sum_{k=0}^{\infty}u_j^{(k)}\right\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}M_i\left(u_j^{(k)}\right)\right\}=$$

$$=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(1\cdot p_{ij}^{(k)}+0\cdot\left(1-p_{ij}^{(k)}\right)\right)\right\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty}p_{ij}^{(k)}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{p_{ij}^{(k)}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}Q^k.$$

Приклад 17. За даною однокроковою матрицею

$$\pi=\begin{array}{c} \\ \omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4\\ \omega_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}\end{array},$$

яка описує поглинальний марковський процес, знайти фундаментальну матрицю N.

Розв'язування:

▼ Визначаємо матрицю $(I-Q)$. Оскільки

$$Q=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix},$$

то

$$(I-Q)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,2&0,5&0,2\\0,4&0,2&0,1\\0,1&0,3&0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,8&-0,5&-0,2\\-0,4&0,8&-0,1\\-0,1&-0,3&0,7\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix}0,8&-0,5&-0,2\\-0,4&0,8&-0,1\\-0,1&-0,3&0,7\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2,22&1,72&0,88\\1,21&2,26&0,67\\0,84&1,21&1,84\end{pmatrix}.\ \blacktriangle$$

Приклад 18. За результатами обробки статистичної інформації про навчальний процес деякого вищого навчального закладу України дістали такі дані про його середньостатистичного студента:

- студент 1-го курсу з імовірністю 0,1 припиняє навчання через неуспішність, з імовірністю 0,25 ще на рік залишається першокурсником та з імовірністю 0,65 переходить на 2-й курс;
- студент 2-го курсу з імовірністю 0,15 відсівається через неуспішність, з імовірністю 0,3 залишається повторно студіювати 2-й курс, з імовірністю 0,55 переходить на 3-й курс;
- студент 3-го курсу відсівається з імовірністю 0,22, з імовірністю 0,31 стає другорічником, з імовірністю 0,57 переходить на 4-й курс;
- студент 4-го курсу відсівається з імовірністю 0,12, з імовірністю 0,2 стає другорічником, з імовірністю 0,68 переходить на 5-й курс;
- студент 5-го курсу відсівається з імовірністю 0,05, з імовірністю 0,15 стає другорічником, з імовірністю 0,8 захищає дипломну роботу і виходить з ВНЗ дипломованим фахівцем.

Побудувати матрицю π імовірностей переходу та записати фундаментальну матрицю $N=(I-Q)^{-1}$.

Розв'язування:

▼ Розглянемо умовно студента як деяку ймовірнісну систему, що може перебувати в одному із семи несумісних станів: ω_1 — відсіятися через незадовільне навчання; ω_2 –навчатися на 1-му курсі; ω_3, ω_4, ω_5, ω_6 — навчатися відповідно на 2-му, 3-му, 4-му та 5-му курсах; ω_7 — залишити вищий навчальний заклад дипломованим фахівцем. За умовою задачі будуємо матрицю ймовірностей переходу:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \\ \omega_7 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 & \omega_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}25 & 0{,}65 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0 & 0{,}3 & 0{,}55 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}22 & 0 & 0 & 0{,}31 & 0{,}57 & 0 & 0 \\ 0{,}12 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}68 & 0 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

У канонічній формі ця матриця подається так:

$$\begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_7 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{array} \!\!\! \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \omega_1 & \omega_7 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 & \omega_5 & \omega_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}25 & 0{,}65 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}15 & 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}55 & 0 & 0 \\ 0{,}22 & 0 & 0 & 0 & 0{,}31 & 0{,}57 & 0 \\ 0{,}12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}68 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця $Q = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}31 & 0{,}57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$

Матриця $(I - Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}31 & 0{,}57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}15 \end{pmatrix} =$

$$
= \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & -0{,}65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}69 & -0{,}57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & -0{,}68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}.
$$

Тоді

$$
(I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & -0{,}65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & -0{,}65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}69 & -0{,}57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 & -0{,}69 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}^{-1} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 1{,}33 & 1{,}24 & 1{,}17 & 0{,}83 & 0{,}67 \\ 0 & 1{,}43 & 1{,}35 & 0{,}96 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1{,}45 & 1{,}03 & 0{,}84 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}25 & 1{,}01 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}18 \end{pmatrix}.
$$

Отже, середнє значення (математичне сподівання) часу, протягом якого система (процес) перебуває в одному зі станів $\omega_j \in Q$, визначається відповідним елементом матриці $(I-Q)^{-1}$. Так, у даному прикладі середньостатистичний студент у середньому на 1-му курсі може перебувати 1,33 одиниці часу, на 2-му— 1,24, на 3-му — 1,17, на 4-му — 0,83 і на 5-му курсі — 0,67. ▲

Як уже наголошувалося, **регулярні ланцюги Маркова** є частинним випадком ергодичних ланцюгів.

Регулярний ланцюг — це такий ланцюг, для якого за деякого значення k (кількість кроків) у матриці $\pi^{(k)}$ не буде нульових елементів. А це означає, що перехід системи з будь-якого стану до будь-якого іншого стану здійсниться за k кроків.

1. *Визначення стаціонарних (фінальних) імовірностей*

Нехай задано перехідну матрицю π регулярного ланцюга Маркова. Тоді виконуються такі умови:

1) для будь-якого ймовірнісного вектора $\bar{a}$ вектор $\bar{a}\pi^{(k)}$ прямує до вектора $\vec{W}$ за $k \to \infty$;

2) $\vec{W}$ — єдиний вектор, який має властивість

$$\vec{W}\pi = \vec{W};$$

3) $\pi\vec{W} = \vec{W}\pi = \vec{W}$.

Перша умова означає, що незалежно від імовірнісного вектора $\vec{a}$ (це може бути початковий вектор станів системи) для регулярних ланцюгів Маркова, які моделюються певною матрицею π, виконується рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{a}\pi^{(k)} = \vec{W}$.

Вектор $\vec{W}$ називають ***вектором стаціонарних (фінальних) імовірностей***. Його компоненти задовольняють умову

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1.$$

Приклад 19. Дано однокрокову матрицю ймовірностей переходу, що є регулярним ланцюгом Маркова:

$$\pi = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix},$$

а також вектор $\vec{a} = (0{,}1 \quad 0{,}08 \quad 0{,}32 \quad 0{,}5)$.

Знайти стаціонарні (фінальні) ймовірності та визначити кількість кроків k, за яких регулярний процес вийде на стаціонарний режим.

Розв'язування:

▼ $\vec{a}\pi^{(k)} = \vec{W} \to$

$$\to (0{,}1 \;\; 0{,}08 \;\; 0{,}32 \;\; 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}^k.$$

При $k = 5$ маємо:

$$(0{,}1 \;\; 0{,}08 \;\; 0{,}32 \;\; 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}^5 = (0{,}208 \;\; 0{,}145 \;\; 0{,}204 \;\; 0{,}443);$$

при $k = 8$:

$$(0{,}1\ \ 0{,}08\ \ 0{,}32\ \ 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}^8 = (0{,}209\ \ 0{,}145\ \ 0{,}205\ \ 0{,}441);$$

при $k = 15$:

$$(0{,}1\ \ 0{,}08\ \ 0{,}32\ \ 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}7 \end{pmatrix}^{15} = (0{,}209\ \ 0{,}145\ \ 0{,}205\ \ 0{,}441).$$

За $k = 8$ і $k = 15$ імовірності не змінилися. Отже, можна стверджувати, що при $k = 8$ регулярний марковський процес досягає стаціонарних (фінальних) імовірностей, а саме: якщо далі збільшувати кількість кроків k, імовірності станів марковського процесу не змінюватимуться.▲

Отже, згідно зі щойно сказаним для регулярних ланцюгів Маркова маємо: $\lim\limits_{k\to\infty} \pi^{(k)} = W$, де

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_N \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_N \end{pmatrix}.$$

Тут W є матрицею стаціонарних (фінальних) імовірностей, в якій усі рядки однакові.

Практично вже за $k \geq 10$ система стає стаціонарною.

Приклад 20. За даною однокроковою матрицею ймовірностей переходу для регулярного марковського процесу

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}35 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}35 & 0{,}3 \\ 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}42 & 0{,}38 \\ 0{,}1 & 0{,}03 & 0{,}37 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

знайти матрицю W.

Розв'язування:

▼ Обчислимо π^k для послідовних значень $k = 4; 8; 10$.

$$\pi^4=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,25 & 0,35\\ 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,3\\ 0,02 & 0,18 & 0,42 & 0,38\\ 0,1 & 0,03 & 0,37 & 0,5\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}0,071 & 0,136 & 0,378 & 0,416\\ 0,07 & 0,137 & 0,377 & 0,416\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,069 & 0,135 & 0,378 & 0,418\end{pmatrix};$$

$$\pi^8=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,25 & 0,35\\ 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,3\\ 0,02 & 0,18 & 0,42 & 0,38\\ 0,1 & 0,03 & 0,37 & 0,5\end{pmatrix}^8=\begin{pmatrix}0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\end{pmatrix};$$

$$\pi^{10}=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,25 & 0,35\\ 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,3\\ 0,02 & 0,18 & 0,42 & 0,38\\ 0,1 & 0,03 & 0,37 & 0,5\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, за $k=8$ марковський процес стає стаціонарним. Стаціонарним вектором буде $\vec{W}=(0,07 \quad 0,135 \quad 0,378 \quad 0,417)$.

Застосовуючи результати, здобуті в прикладі 20, підтвердимо властивості

$\vec{W}\pi=\vec{W}\to$

$$\to(0,07 \quad 0,135 \quad 0,378 \quad 0,4)\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,25 & 0,35\\ 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,3\\ 0,02 & 0,18 & 0,42 & 0,38\\ 0,1 & 0,03 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}=$$

$=(0,07 \quad 0,135 \quad 0,372 \quad 0,4);$

$\vec{W}\pi=\pi\vec{W}=\vec{W}\to$

$$\to\begin{pmatrix}0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,25 & 0,35\\ 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,3\\ 0,02 & 0,18 & 0,42 & 0,38\\ 0,1 & 0,03 & 0,37 & 0,5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,25 & 0,35\\ 0,15 & 0,2 & 0,35 & 0,3\\ 0,02 & 0,18 & 0,42 & 0,38\\ 0,1 & 0,03 & 0,37 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\\ 0,07 & 0,135 & 0,378 & 0,417\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}135 & 0{,}378 & 0{,}417\\ 0{,}07 & 0{,}135 & 0{,}378 & 0{,}417\\ 0{,}07 & 0{,}135 & 0{,}378 & 0{,}417\\ 0{,}07 & 0{,}135 & 0{,}378 & 0{,}417\end{pmatrix}.$$

Із системи рівнянь $\begin{cases}\vec{W}\pi=\vec{W}\\ \sum w_i=1,\end{cases}$ знаходимо значення елементів стаціонарного вектора $\vec{W}=(w_1 \quad w_2 \quad w_3 \ldots \quad w_N)$.

Існування стаціонарних імовірностей для регулярних ланцюгів Маркова в попередніх міркуваннях було взято до уваги без доведення, але досить наочно проілюстровано конкретними прикладами.

Тепер на вищому рівні строгості висвітлимо питання про існування стаціонарного вектора $\vec{W}$ для регулярного процесу.

Із цією метою розглянемо стохастичну матрицю

$$\pi=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix},$$

мінімальний елемент якої $\varepsilon=0{,}1$, а також деякий вектор, наприклад

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}05\\ 0{,}4\\ 0{,}3\end{pmatrix},$$

найменший і найбільший компонент якого відповідно такі: $m_0=0{,}05$ і $M_0=0{,}4$.

Принагідно зазначимо, що в загальному випадку таких компонентів може бути кілька.

Знайдемо вектор

$$\pi\,\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}22\\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}25\\ 0{,}05\\ 0{,}4\\ 0{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}301\\ 0{,}3\\ 0{,}225\\ 0{,}32\end{pmatrix},$$

де $m_1=0{,}225$ є найменшим компонентом цього вектора, а $M_1=0{,}32$ — найбільшим.

Як бачимо, $M_1 < M_0$, $m_1 > m_0$. У загальному випадку $M_1 \le M_0$, $m_1 \ge m_0$.

Потрібно довести, що виконується нерівність

$M_1 - m_1 \le (1-2\varepsilon)(M_0 - m_0)$.

Побудуємо вектор $\vec{x}^*$, скориставшись для цього вектором $\vec{x}$, в якому замінимо всі компоненти, крім $m_0 = 0{,}05$, на $M_0 = 0{,}4$:

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}05 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Отже, $\vec{x} \le \vec{x}^*$. Далі знаходимо

$$\pi \vec{x}^* = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}05 \\ 0{,}4 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}338 \\ 0{,}365 \\ 0{,}295 \\ 0{,}365 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}4(1-0{,}2) \\ 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}4(1-0{,}1) \\ 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}4(1-0{,}3) \\ 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}4(1-0{,}1) \end{pmatrix}$$

▲

При $k \to \infty$ $\pi^k \vec{x}$ прямує до вектора, усі компоненти якого дорівнюють ω_i:

$$\lim_{k \to \infty} \pi^k = W,$$

де $W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ w_1 & w_2 & \dots & w_N \\ \vdots & & \dots & \\ w_1 & w & \dots & w_N \end{pmatrix}$ — матриця стаціонарних імовірностей.

Для регулярних ланцюгів Маркова довготривале поводження системи (процесу) не залежить від початкового стану, з якого система почала функціонувати.

Приклад 21. Дано матрицю однокрокового переходу, що описує регулярний процес переходу системи з одного стану до іншого $(\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4))$:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Знайти ймовірність того, що у стаціонарному режимі система перебуватиме у стані ω_2, якщо перший крок вона зробила зі стану ω_1; зі стану ω_3.

Розв'язування:

▼ Визначивши граничну матрицю

$$W = \lim_{k \to \infty} \pi^k = \begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \end{pmatrix},$$

дістанемо

$$(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \end{pmatrix} = (0{,}27 \quad 0{,}171 \quad 0{,}179 \quad 0{,}38);$$

$$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \\ 0{,}27 & 0{,}171 & 0{,}179 & 0{,}38 \end{pmatrix} = (0{,}27 \quad 0{,}171 \quad 0{,}179 \quad 0{,}38).$$

Отже, незалежно від того, з якого стану — ω_1 чи ω_3 — почала функціонувати система, ймовірність набути стан ω_2 буде однакова й дорівнюватиме 0,171.▲

При переході системи з одного стану в інший за один крок її функціонування, а також у разі, коли система залишиться в тому самому стані, в якому вона перебувала, вводиться так званий коефіцієнт вартості r_{ij}, що інформує про витрати, які пов'язані з переходом системи із стану A_i в стан A_j за один крок.

Щоб визначити загальні витрати, які можна очікувати за n кроків роботи системи, використовується матриця вартостей

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2N} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ r_{N1} & r_{N2} & \cdots & r_{NN} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці R можуть набувати додатних, нульових і від'ємних значень. Якщо умовно позначити $v_i(n)$ сумарні витрати після n кроків переходів системи, починаючи із A_i стану, то $(\vec{v}(n))' = (v_1(n), v_2(n), \ldots, v_N(n))$ буде вектором сумарних витрат за n кроків для кожного з A_i станів $(i = 1, 2, \ldots, N)$ системи.

Якщо система досягла A_j стану, то очікувану винагороду після всіх переходів можна подати як $r_{ij} + v_j(n-1)$, де r_{ij} — винагорода, яку дістанемо при переході системи із стану A_i в стан A_j за один крок, а $v_j(n-1)$ — очікувана винагорода, яку матимемо за решту $n-1$ кроків.

Враховуючи те, що ймовірність переходу системи із стану A_i в стан A_j за один крок дорівнює p_{ij}, то сумарна очікувана вартість (винагорода) за n переходів системи, починаючи зі стану A_i, буде

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} r_{ij} \cdot p_{ij} + \sum_{j=1}^{N} v_j(n-1) \cdot p_{ij} = g_i + \sum_{j=1}^{N} v_j(n-1) \cdot p_{ij},$$

де $g_i = \sum_{j=1}^{N} r_{ij} \cdot p_{ij}$.

Оскільки остання рівність виконується для всіх $i = \overline{1,N}$, то його можна записати у векторно-матричній формі

$$\vec{v}(n) = \vec{g} + \pi \vec{v}(n-1),$$

тут $\vec{g}' = (g_1, g_2, \ldots, g_N)$, де g_i — елементи головної діагоналі матриці $\pi \cdot R'$; R' - транспонована матриця вартостей R.

Компоненти вектора $\vec{v}(n)$ визначають із векторно-матричного рівняння

$$\vec{v}(n) = (E + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \ldots + \pi^{n-1}) \cdot \vec{g} + \pi^{(n)} \cdot \vec{v}(0),$$

де E – одинична матриця, $\vec{v}(0)$ - вектор винагороди за n=0 кроків.

Розглянемо марковський випадковий процес з дискретними станами і неперервним часом. При цьому будемо вважати, що всі переходи із стану A_i в стан A_j, відбуваються під дією найпростіших потоків подій з інтенсивностями λ_{ij} ($i=\overline{1,N}, j=\overline{1,N}$). Ймовірності можливих станів системи як функції часу можна знайти, використовуючи систему диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_i'(t)=\sum\limits_{j=1}^{k1} p_j(t)\cdot\lambda_{ji}-(\sum\limits_{m=1}^{k2}\lambda_{im})\cdot p_i(t) \\ \sum\limits_{i=1}^{N} p_i(t)=1 \end{cases},$$

де $p_i(t)$ — ймовірності можливих станів системи ($i=\overline{1,N}$) в момент часу t;

k_1 — кількість потоків, що приводять систему до даного стану;

k_2 — кількість потоків, що виводять систему з даного стану.

Сформулюємо правило складання рівнянь Колмогорова. В лівій частині кожного рівняння стоїть похідна ймовірності i -го стану. В правій частині – сума добутків ймовірностей всіх станів (з яких ідуть стрілки до даного стану) на інтенсивності відповідних потоків подій мінус сумарна інтенсивність всіх потоків, що виводять систему з даного стану, помножена на ймовірність даного i -го стану.

Особливий інтерес представляють ймовірності системи $p_i(t)$ в граничному стаціонарному режимі. Так як стаціонарні ймовірності сталі, то, замінивши в рівняннях Колмогорова їх похідні нульовими значеннями, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (\sum\limits_{m=1}^{k2}\lambda_{im})\cdot p_i=\sum\limits_{j=1}^{k1}\sum\limits_{m=1}^{k2} p_j\cdot\lambda_{ji} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} p_i=1 \end{cases},$$

де p_i — граничні ймовірності можливих станів системи ($i=\overline{1,N}$);

k_1 — кількість потоків, що приводять систему до даного стану;

k_2 — кількість потоків, що виводять систему з даного стану.

Цю систему можна складати безпосередньо за розміченим графом станів, якщо керуватись правилом, за яким зліва в рівняннях стоїть гранична ймовірність даного стану p_i помножена на сумарну інтенсивність усіх потоків, що виводять з даного стану, а справа – сума добутків інтенсивностей усіх потоків, що входять в і-ий стан, на ймовірності тих станів, з яких ці потоки виходять.

Приклад 22. У друкарні "Експрес" є три друкарські верстати, від роботи яких залежить кількість надрукованих примірників газет.

Необхідно знайти ймовірності всіх можливих станів роботи верстатів, а також середній випуск примірників газет за день, якщо у випадку роботи:

1) першого верстата може бути надруковано 50000 екземплярів за день;
2) другого верстата – 70000 примірників за день;
3) третього верстата – 100000 примірників за день.

Відомий середній час безвідмовної роботи за рік для:

1) першого верстата – 350 днів ($t_{1ср}$);
2) другого верстата – 340 днів ($t_{2ср}$);
3) третього верстата – 355 днів ($t_{3ср}$).

Середня тривалість ремонту за рік складає для:

1) першого верстата – 10 днів ($T_{1ср}$);
2) другого верстата – 20 днів ($T_{2ср}$);
3) третього верстата – 5 днів ($T_{3ср}$).

Розв'язування:

▼ Підрахуємо інтенсивності відмов друкарських верстатів за формулою: $\lambda = 1/t_{ср}$.

$\lambda_1 = 1/350 = 0{,}0028;$ $\lambda_{12} = 1/(350 + 340) = 0{,}00145;$

$\lambda_2 = 1/340 = 0{,}0029;$ $\lambda_{13} = 1/(350 + 355) = 0{,}00142;$

$\lambda_3 = 1/355 = 0{,}0028;$ $\lambda_{23} = 1/(340 + 355) = 0{,}00144;$

$\lambda_{123} = 1/(350 + 340 + 355) = 0{,}00096.$

Підрахуємо інтенсивності відновлення верстатів за формулою: $\mu = 1/T_{ср}$.

$\mu_1 = 1/10 = 0{,}1;$

$\mu_2 = 1/20 = 0{,}05;$

$\mu_3 = 1/5 = 0{,}2;$

$\mu_{123} = 1/(10 + 20 + 5) = 0{,}029.$

$\mu_{12} = 1/(10 + 20) = 0{,}03;$

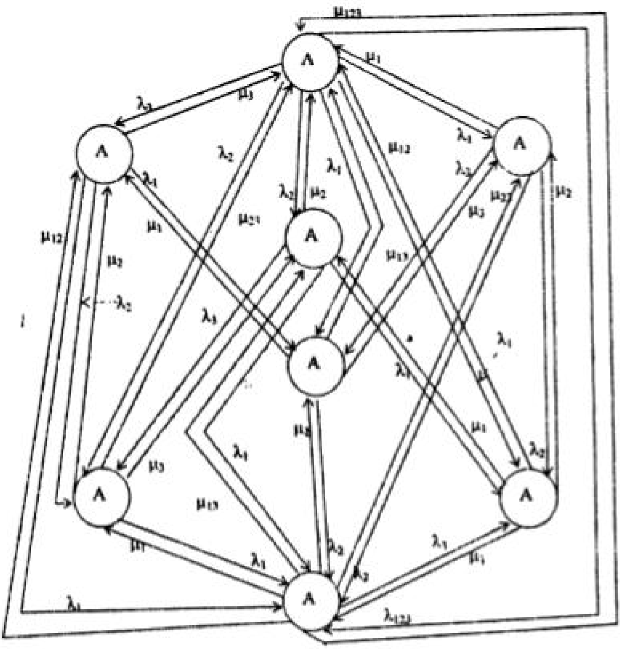
$\mu_{13} = 1/(10 + 5) = 0{,}07;$

$\mu_{23} = 1/(20 + 5) = 0{,}04;$

Процес роботи друкарні опишемо за допомогою таблиці:

Стан	Працює	Не працює
A_0	1; 2; 3	–
A_1	1; 2	3
A_2	1; 3	2
A_3	2; 3	1
A_4	1	2; 3
A_5	2	1; 3
A_6	3	1; 2
A_7	–	1; 2; 3

В даній системі перехід із одного стану до іншого відбувається миттєво.



Запишемо систему рівнянь Колмогорова для даного процесу:

$$\begin{cases}(\lambda_3 + \lambda_{23} + \lambda_2 + \lambda_{13} + \lambda_{12} + \lambda_1 + \lambda_{123})\, p_0 = \mu_3 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_1 p_3 + \\ + \mu_{23} p_4 + \mu_{13} p_5 + \quad + \mu_{12} p_6 + \mu_{123} p_7; \\ (\mu_3 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})\, p_1 = \lambda_3 p_0 + \mu_2 p_4 + \mu_1 p_5 + \mu_{12} p_7; \\ (\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_{13} + \lambda_3)\, p_2 = \lambda_2 p_0 + \mu_3 p_4 + \mu_1 p_6 + \mu_{13} p_7; \\ (\mu_1 + \lambda_{23} + \lambda_2 + \lambda_3)\, p_3 = \lambda_1 p_0 + \mu_3 p_5 + \mu_2 p_6 + \mu_{23} p_7; \\ (\mu_2 + \mu_{23} + \mu_3)\, p_4 = \lambda_{23} p_0 + \lambda_2 p_1 + \lambda_3 p_2 + \mu_1 p_7; \\ (\mu_1 + \mu_{13} + \mu_3 + \lambda_2)\, p_5 = \lambda_{13} p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_3 p_3 + \mu_2 p_7; \\ (\mu_1 + \mu_{12} + \mu_2 + \lambda_3)\, p_6 = \lambda_{12} p_0 + \lambda_1 p_2 + \lambda_2 p_3 + \mu_3 p_7; \\ (\mu_{12} + \mu_1 + \mu_2 + \mu_{13} + \mu_3 + \mu_{23} + \mu_{123})\, p_7 = \lambda_{123} p_0 + \lambda_{12} p_1 + \lambda_{13} p_2 + \lambda_{23} p_3 + \\ + \lambda_1 p_4 + \lambda_2 p_5 + + \lambda_3 p_6 .\end{cases}$$

Останнє рівняння в системі замінимо умовою нормування:

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1.$$

Отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}0{,}2p_1 - 0{,}01387p_0 + 0{,}05p_2 + 0{,}1p_3 + 0{,}04p_4 + 0{,}07\, p_5 + 0{,}03p_6 + \\ + 0{,}0029p_7 = 0; \\ 0{,}0029p_0 - 0{,}20715p_1 + 0{,}05p_4 + 0{,}1p_5 + 0{,}0029p_7 = 0; \\ 0{,}0029p_0 - 0{,}06012p_2 + 0{,}2p_4 + 0{,}1p_6 + 0{,}07p_7 = 0; \\ 0{,}0028p_0 - 0{,}10724p_3 + 0{,}2p_5 + 0{,}05p_6 + 0{,}04p_7 = 0; \\ 0{,}00144p_0 + 0{,}0029p_1 + 0{,}0029p_2 - 0{,}20434p_4 + 0{,}1p_7 = 0; \\ 0{,}00142p_0 + 0{,}0028p_1 + 0{,}0029p_3 - 0{,}3729p_5 + 0{,}05p_7 = 0; \\ 0{,}03_0 + 0{,}0028p_2 + 0{,}0029p_3 - 0{,}1829p_6 + 0{,}2p_7 = 0; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 1.\end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$P_0 = 0{,}824;$

$P_1 = 0{,}0012;$

$P_2 = 0{,}097;$

$P_3 = 0{,}044;$

$P_4 = 0{,}013;$

$P_5 = 0{,}0021;$

$P_6 = 0{,}0091;$

$P_7 = 0{,}042$.

Знайдемо середню кількість примірників газет, яку можна видрукувати в друкарні за рік:

S_0: 0,824 * (50000 + 70000 + 100000) = 181280 (екз.);

S_1: 0,0012 * (50000 + 70000) = 144 (екз.);

S_2: 0,097 * (50000 + 100000) = 14550 (екз.);

S_3: 0,0044 * (70000 + 100000) = 7480 (екз.);

S_4: 0,013 * 50000 = 650 (екз.);

S_5: 0,0021 * 70000 = 147 (екз.);

S_6: 0,091 * 100000 = 9100 (екз.);

S_7: 0,042 * 0 = 0 (екз.).

181280 + 144 + 14550 + 7480 + 650 + 147 + 9100 = 213351 (екз.).

Таким чином, середня кількість примірників газет, що може бути надрукована в друкарні за рік, за даних умов становить 213351 пирмірників.

▲

Будь-яка ймовірнісна модель більш адекватно, ніж детермінована, описує модельований реальний процес, але не дає змоги однозначно передбачити зміну окремих його параметрів. На підставі такої моделі можна, проте, доволі точно спрогнозувати очікувані значення тих чи інших параметрів випадкового процесу. Втім, у навколишньому світі всі процеси є, по суті, ймовірнісними, а описувати їх детермінованими моделями неможливо, хоча математичний апарат, застосовуваний для дослідження детермінованих моделей, придатний, здебільшого, і для дослідження ймовірнісних моделей.

Марковські ланцюги, як ефективний апарат дослідження, використовуються в багатьох галузях науки і техніки.

Розглянемо відповідні приклади.

Імовірнісні моделі із застосуванням поглинальних ланцюгів Маркова

Ланцюги Маркова можуть застосовуватися в задачах, які, на перший погляд, не містять імовірнісних елементів. Проте, виклавши мовою математики основну сутність такої задачі, доходимо висновку, що її можна ефективно розв'язати, скориставшись теорією ланцюгів Маркова.

Існують, наприклад, так звані ***потокові моделі***, що описують поводження грошових потоків у деякій країні (регіоні), і потоків виробничих відходів, які забруднюють атмосферу певного регіону. У першому випадку йдеться про розв'язання економічних, а у другому — еколого-економічних проблем.

Розглядається, скажімо, деяка країна (регіон), в якій є N міст. У певний момент часу — назвемо його початковим моментом — у кожному з $\omega_i\,(i=1,2,...,N)$ міст перебуває в обігу певна кількість грошей. Ці гроші утворюють потоки, що циркулюють між містами. Якщо такі грошові потоки не контролювати, може створитися нестійка ситуація, а саме: у деяких містах будуть надлишки грошової маси, а в інших її бракуватиме. Поводження зазначених потоків має контролювати уряд, щоб досягти найбільш оптимального розподілу грошової маси між містами. Отже, потрібно визначити умову, за якої уряд досягне своєї мети, а також установити, яка кількість грошової маси має надходити до того чи іншого міста в кожний період часу.

Основним припущенням у цій моделі є те, що із зовні до країни гроші не надходять, але частина їх може «зникнути» в місті протягом певного часу. Така ситуація виникає, коли, наприклад, певну кількість грошової маси мешканці зберігають удома, а отже, вона не бере участі в грошових потоках.

А. Потокова модель із втручанням уряду в грошову ситуацію кожного міста

Побудуємо три вектори: вектор-рядок $\vec{m}=(m_1,m_2,m_3,...m_N)$, компоненти m_i якого інформують про кількість грошей, які в певний момент часу перебувають у місті $\omega_i\,(i=1,2,...,N)$; вектор-рядок $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3,...f_N)$, компоненти f_i якого інформують про кількість грошей, що їх уряд додає місту ω_i або забирає в нього $(i=1,2,...,N)$; за побудовою компоненти цього вектора можуть бути додатними, від'ємними, а також дорівнювати нулю, коли уряд не втручається в грошову ситуацію міста; вектор-рядок $\vec{q}=(q_1,q_2,q_3,...q_N)$, компоненти q_i якого інформують про те, що саме має на меті уряд: через певну кількість періодів грошей у місті ω_i має бути не менше ніж q_i, коли грошові потоки між містами стабілізуються.

Отже, вектори $\vec{m}$ і $\vec{q}$ мають бути додатними. Компоненти вектора $\vec{f}$ можуть бути як додатними, коли уряд вкладає гроші в економіку міста, так і від'ємними, коли уряд вилучає певну суму грошей з обігу міста. Крім того, ці компоненти можуть дорівнювати нулеві, якщо уряд не втручається у грошову ситуацію міст.

Нехай p_{ij} — частка грошей міста ω_i, яка перейде до міста ω_j протягом одного періоду часу. Тоді, оскільки $0 \le p_{ij} \le 1$, то значення p_{ij} можна розглядати як відповідні ймовірності зазначеного переходу.

Отже, можна скористатися теорією ланцюгів Маркова, станами яких є грошові ситуації в містах регіону (країни). Якщо $p_{ij} > 0$, то це означає, що між містами ω_i та ω_j існує грошовий потік, за $p_{ij} = 0$ - такого потоку немає.

Загальна картина грошових потоків між містами описується матрицею перехідних імовірностей для ергодичних ланцюгів Маркова. А якщо гроші відпливатимуть із регіону, то в цьому разі додасться поглинальний стан.

Отже, матриця $\pi = \{p_{ij}\}$ буде матрицею для поглинальних ланцюгів Маркова з одним поглинальним станом.

Якщо початкові суми грошей у кожному з міст ω_i задаються компонентами вектора $\vec{m}$, то через певний період часу (крок) у місті ω_i сума грошей становитиме $\sum_{j=1}^{N} m_i p_{ij}$.

Тоді вектор $\vec{m}Q$ задає розподіл грошових сум через один період часу;

$\vec{m}Q^2$ — через два періоди;

$\vec{m}Q^3$ — через три періоди;

$\vdots$

$\vec{m}Q^k$ — через k періодів.

Аналогічно сума грошей, які спочатку було вкладено в економіку урядом, зміниться за k кроків на $\vec{f}Q^k$.

Отже, за $k=n$ періодів загальна сума становитиме $\vec{u}(t)=\vec{m}Q^n+\sum\limits_{k=0}^{n}\vec{f}Q^k$, причому має виконуватися нерівність $\vec{u}(t)\le\vec{q}$, оскільки вектор $\vec{f}=(f_1,f_2,f_3,\dots f_N)$ потрібно вибрати так, щоб після певного часу кількість грошових одиниць у кожному місті задовольняла умову $u_i(t)\le q_i$.

Відомо, що для поглинального ланцюга Маркова $\lim\limits_{n\to\infty}Q^n=O$, тому головну роль у останньому рівнянні відіграватиме другий член суми в правій його частині: $\sum\limits_{k=0}^{n}\vec{f}Q^k=\vec{f}\sum\limits_{k=0}^{n}Q^k$. З огляду на те, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q^k=I+Q^2+Q^3+\dots=N=(I-Q)^{-1}$, попереднє рівняння за $n\to\infty$ набирає такого вигляду: $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\vec{f}Q^k=\vec{f}\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q^k=\vec{f}\cdot N$, звідки випливає $\vec{u}(t)=\vec{f}\cdot N$. Отже, для великих значень n нерівність $u_i(t)\le q_i$. можна записати так: $\vec{f}\cdot N\le\vec{q}$ або $\vec{f}\le(I-Q)\vec{q}$.

У загальному випадку, щоб перевірити прийнятність вектора $\vec{q}$, підставимо значення $\vec{f}\le(I-Q)q$ в останнє рівняння. Тоді дістанемо:

$$\vec{u}(t)=\vec{m}Q^n+\vec{q}(I-Q)\sum_{k=0}^{n}Q^k=\vec{m}Q^n+(\vec{q}-\vec{q}Q)\sum_{k=0}^{n}Q^k.$$

Тут $\vec{m}\ge 0$, $Q\ge 0$, $Q^k\ge 0$ і $\sum\limits_{k=0}^{n}Q^k\ge 0$. Отже, якщо $\vec{q}-\vec{q}Q\ge 0$, тобто $\vec{q}\ge\vec{q}Q$, то $q_i(t)\ge 0$ для всіх значень i та t незалежно від вектора $\vec{m}$.

Таким чином, можна стверджувати, що коли $\vec{q}Q\le\vec{q}$, то вектор $\vec{q}$ прийнятний для будь-яких значень вектора $\vec{m}$.

Приклад 23. За даною матрицею , що описує грошові потоки між трьома містами

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 & 0{,}13 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 & 0{,}18 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

та векторами $\vec{m} = (10,\ \ 4,\ \ 16)$, $\vec{f} = (-2,\ \ 8,\ \ -6)$ знайти компоненти вектора $\vec{u}(t)$ за період часу $t = 3$ (три кроки).

Розв'язування:

▼ $\vec{u}(3) = \vec{m}Q^3 + \sum\limits_{k=0}^{3} \vec{f}Q^k$. Канонізуємо матрицю π:

$$\begin{array}{c} \\ \omega_4 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \omega_4 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}13 & 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}2 & 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Далі, запишемо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{pmatrix},$$

подамо рівняння $\vec{u}(3) = \vec{m}Q^3 + \sum\limits_{k=0}^{3} \vec{f}Q^k$ у розгорнутому вигляді:

$$(u_1(3), u_2(3), u_3(3)) = (10, 4, 16)\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}22 \end{pmatrix}^3 +$$

$$+ (-2, 8, -6) + (-2, 8, -6)\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}31 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-2, 8, -6)\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}31 \end{pmatrix}^2 + (-2, 8, -6)\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}32 & 0{,}4 \\ 0{,}12 & 0{,}39 & 0{,}31 \\ 0{,}26 & 0{,}32 & 0{,}31 \end{pmatrix}^3 =$$

$$= (3{,}628;\ 7{,}148;\ 6{,}064) + (-2;\ 8;\ -6) + (-0{,}9;\ 0{,}56;\ 0{,}36) +$$
$$+ (0{,}026;\ 0{,}046;\ -0{,}107) + (-0{,}019;\ -0{,}008264;\ 0{,}00872) =$$
$$= (0{,}735;\ 15{,}746;\ 0{,}326).$$

Отже, по закінченні часу $t = 3$ у першому місті буде 0,735, у другому — 15,746 і у третьому — 0,326 грошової одиниці. ▲

Приклад 24. За даною матрицею

$$Q = \begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array}\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}29 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix},$$

яка описує грошові потоки між чотирма містами певного регіону із поглинальним станом ω_5, і вектором $\vec{q} = (10, 10, 10, 10)$ бажаного розподілу грошових одиниць між чотирма містами визначити компоненти вектора $\vec{f}$ — грошову політику уряду в цьому регіоні.

Розв'язування:

▼ Компоненти вектора $\vec{f}$ знаходимо з рівняння $\vec{f} = \vec{q}(I - Q)$, або

$$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (10, 10, 10, 10)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}28 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (10, 10, 10, 10)\begin{pmatrix} 0{,}98 & -0{,}18 & -0{,}36 & -0{,}1 \\ -0{,}12 & 0{,}68 & -0{,}44 & -0{,}02 \\ -0{,}21 & -0{,}28 & 0{,}54 & -0{,}05 \\ 0{,}1 & -0{,}32 & -0{,}12 & 0{,}68 \end{pmatrix} = (5{,}5;\ -1;\ -4{,}4;\ 5{,}1).$$

Отже, для стабілізації грошових потоків уряд має внести в місто ω_1 5,5 грошової одиниці, з міста ω_2 вилучити одну, а з міста ω_3 — 4,4 грошової одиниці і в місто ω_4 внести 5,1 грошової одиниці.

Щоб перевірити прийнятність вектора $\vec{q}$, обчислимо $\vec{q}Q$:

$$(10, 10, 10, 10)\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}28 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix} = (4{,}5;\ 11;\ 14{,}4;\ 4{,}9).$$

Як бачимо, не всі компоненти вектора $\vec{q}Q$ задовольняють умову $\vec{q}Q \le \vec{q}$, тому вектор $\vec{q}$ є неприйнятним. У разі, коли умова $\vec{q} \ge \vec{q}Q$ не виконується, застосовують інший критерій перевірки прийнятності вектора $\vec{q}$, який розглянемо далі

$\vec{u}(t) = \vec{m}Q^n + (\vec{q} - \vec{q}Q)\sum_{k=0}^{n} Q^k = \vec{m}Q^n + \vec{q}\left(I - Q^{n+1}\right)$. Отже, для того, щоб нерівність $q_i(t) \ge u(t)$ виконувалася для всіх t та i, необхідне виконання умови $\vec{m}Q^n + \vec{q} - \vec{q} \cdot Q^{n+1} \ge 0$ для всіх $t \ge 0$, звідки випливає співвідношення

$$\vec{q} \ge (\vec{q}Q - \vec{m})Q^n,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Отже, ця умова є іншим критерієм для перевірки прийнятності вектора $\vec{q}$.

Так, для початкового вектора $\vec{m} = (10, 4, 10, 8)$, вектора $\vec{q} = (10, 10, 10, 10)$ і матриці Q попереднього прикладу ($k = 1$) дістаємо:

$$(\vec{q}Q - \vec{m})Q = \left((10, 10, 10, 10)\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}28 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix} - (10, 4, 10, 8) \right) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}28 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix} = (4{,}5;\ 11;\ 14{,}4;\ 4{,}9) - (10,\ 4,\ 10,\ 8) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}28 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix} = (-5{,}5;\ 7;\ 4{,}4;\ -3{,}1) \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}1 \\ 0{,}12 & 0{,}32 & 0{,}44 & 0{,}02 \\ 0{,}21 & 0{,}28 & 0{,}46 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}32 & 0{,}18 & 0{,}32 \end{pmatrix} =$$

$$= (1{,}344;\ 1{,}49;\ 2{,}566;\ -1{,}182).$$

Очевидно, що нерівність $(\vec{q}Q - \vec{m})Q < \vec{q}$ справджується.

Це означає, що вектор $\vec{q}$ є прийнятним відносно початкового вектора $\vec{m}$. ▲

Існує ще один критерій для перевірки прийнятності вектора $\vec{q}$, а саме: якщо сума абсолютних величин компонентів вектора $(\vec{q} \cdot Q - \vec{m})Q^k$ не перевищує найменшого компонента вектора $\vec{q}$, то цей вектор задовольняє вимоги прийнятності.

Приклад 25. За даною матрицею,

$$Q=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix},$$

яка описує грошові потоки між чотирма містами певного регіону та векторами $\vec{q}=(4,\ 7,\ 1,\ 5)$, $\vec{m}=(5,\ 2,\ 1,\ 4)$ перевірити на прийнятність вектор $\vec{q}$, скориставшись для цього третім критерієм.

Розв'язування:

▼ Обчислимо компоненти вектора $(\vec{q}Q-\vec{m})Q^k$ при $k=1$:

$$\left((4,7,1,5)\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix}-(5,\ 2,\ 1,\ 4)\right)\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,},22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix}=$$

$$=(-1{,}41;1{,}89;2{,}44;-0{,}05)\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix}=(0{,}347;0{,}933;0{,}555;0{,}804)$$

Оскільки $0{,}347+0{,}933+0{,}555+0{,}804=2{,}638>1$, де 1 — значення найменшого компонента вектора $\vec{q}$, то цей вектор неприйнятний.

Візьмемо тепер вектор $\vec{q}=(4,\ 3,\ 6,\ 2)$ та інший початковий вектор $\vec{m}=(2,\ 3,\ 2,\ 4)$. Для цих векторів за $k=1$ дістаємо:

$$\left((4,3,6,2)\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix}-(2,3,2,4)\right)\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix}=$$

$$=(1{,}18;0{,}72;1{,}24;-1{,}01)\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}31 & 0{,}1\\ 0{,}12 & 0{,}22 & 0{,}28 & 0{,}25\\ 0{,}2 & 0{,}31 & 0{,}19 & 0{,}2\\ 0{,}31 & 0{,}28 & 0{,}01 & 0{,}32\end{pmatrix}=$$

$$=(0{,}316\quad 0{,}448\quad 0{,}793\quad 0{,}223).$$

Оскільки $0{,}316+0{,}448+0{,}793+0{,}223=1{,}781<2$, де 2 — значення найменшого компонента вектора $\vec{q}$, то цей вектор прийнятний. ▲

Б. Потокова модель вибіркового втручання уряду у грошову ситуацію міст

Розглянемо випадок, коли уряд втручається у грошову ситуацію окремо вибраних міст регіону. Оскільки нумерація міст довільна, можна вважати, що ці міста будуть $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots \omega_k$. Тоді для решти міст $\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \dots \omega_N$ маємо $f_{k+1} = f_{k+2} = \dots = f_N = 0$.

Для зручності матрицю Q поділяють на чотири підматриці, виокремлюючи при цьому стани (міста) m_i, в які уряд втручається в процесі стабілізації грошових потоків.

Отже, матриця Q матиме такий вигляд:

$$Q=\begin{array}{r}\text{Вибрані міста}\left\{\begin{array}{l}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_k\end{array}\right.\\ \text{Інші міста}\left\{\begin{array}{l}\omega_{k+1}\\ \omega_{k+2}\\ \vdots\\ \omega_N\end{array}\right.\end{array}\left(\begin{array}{c|c}T & U\\ \hline V & S\end{array}\right).$$

Аналогічно вектор $\vec{q}$ у цьому разі набуде такого вигляду:

$\vec{q} = (\vec{q}^*, \vec{q}^{**})$,

де $\vec{q}^*$ — вектор із компонентами вибраних станів (міст), де уряд втручається у грошову ситуацію;

$\vec{q}^{**}$ — вектор із компонентами, що стосуються інших станів.

Тоді $\vec{f} = \vec{q}(I-Q) = (\vec{q}^*, \vec{q}^{**})(I-Q)$, або

$$(\vec{q}^*, \vec{q}^{**})\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & L\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T & U\\ V & S\end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\vec{q}^*, \vec{q}^{**}) - (\vec{q}^*T + \vec{q}^{**}V, \vec{q}^*u + \vec{q}^{**}S) =$$

$$= (q^* - q^*T - \vec{q}^{**}V, \vec{q}^{**} - \vec{q}^*u - \vec{q}^{**}S).$$

Тут $\vec{q}^* - \vec{q}^*T - \vec{q}^{**}V$ — вибрані міста;

$\vec{q}^{**} - \vec{q}^*u - \vec{q}^{**}S$ — інші міста.

Отже, $\vec{f}=\left(\vec{f}^*, \vec{f}^{**}\right)=(\vec{q}^*-\vec{q}^*T-\vec{q}^{**}V, \vec{q}^{**}-\vec{q}^*u-\vec{q}^{**}S)$, де $\vec{f}^*$ — вектор, компонентами якого є ті значення грошових одиниць, які уряд додає містам; $\vec{f}^{**}$ — вектор, компоненти якого дорівнюють нулю (уряд не втручається в грошову ситуацію цих міст). Отже, $\vec{f}^{**}=(0\quad 0\quad 0\quad \ldots\quad 0)$. Урахувавши це, дістанемо:

$$\vec{q}^{**}-\vec{q}^*U-\vec{q}^{**}S=0 \rightarrow$$
$$\vec{q}^{**}(I-S)=\vec{q}^*U \rightarrow$$
$$\vec{q}^{**}=\vec{q}^*U(I-S)^{-1}.$$

Оскільки $\vec{q}^*$ задане, то можемо знайти ненульові елементи вектора $\vec{f}$:

$$\vec{f}^*=\vec{q}^*-\vec{q}^*T-\vec{q}^{**}V=$$
$$=\vec{q}^*-\vec{q}^*\cdot T-\vec{q}^*u\cdot(I-S)^{-1}V=$$
$$=\vec{q}^*\left(I-T-u(I-S)^{-1}V\right),$$

або $\vec{f}^*=\vec{q}^*(I-Q^*)$, де $Q^*=T+u(I-S)^{-1}V$.

Тут Q^* — матриця переходів для поглинальних ланцюгів Маркова, а тому суми елементів рядків можуть і не дорівнювати одиниці.

Отже, вектор $\vec{q}^*$ може бути досягнений лише за таких умов:

$(\vec{q}Q-\vec{m})Q^k \le \vec{q}$, $\vec{q}^{**}=\vec{q}U(I-S)^{-1}$, причому $\vec{f}^*=\vec{q}^*(I-Q^*)$.

Загальну кількість грошей, що їх необхідно вкласти в економіку за певний період часу, можна знайти у вигляді:

$$\vec{h}^*=(I-Q^*)\vec{\xi} \text{ і } \vec{f}\vec{\xi}=\vec{q}^*h^*.$$

Приклад 26. Грошові потоки між містами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ з урахуванням того, що частина грошей залишає цей регіон, задано матрицею

$$\pi=\begin{array}{c} \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33 & 0{,}05 \\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2 & 0{,}26 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24 & 0{,}27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

де ω_4 — поглинальний стан (місто).

За відомими векторами $\vec{m}=(4,4,4)$, $\vec{q}=(12,8,20)$ перевірити виконання умови $(\vec{q}Q-\vec{m})Q^k \le q \ (k=0)$.

Розглянути варіант, коли уряд має намір втручатися лише в міста ω_1, ω_2.

Розв'язування:

▼ Матрицю π зведемо до канонічного вигляду:

$$\pi = \begin{array}{c} \\ \omega_4 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \omega_4 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33 \\ 0{,}26 & 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2 \\ 0{,}27 & 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тоді матриця Q буде така:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24 \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо:

$$N = (I-Q)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24 \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}8 & -0{,}42 & -0{,}33 \\ -0{,}18 & 0{,}64 & -0{,}2 \\ -0{,}12 & -0{,}35 & 0{,}76 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}8974709501025290499 & 1{,}9808612440191387560 & 1{,}3451811346548188653 \\ 0{,}7327409432672590567 & 2{,}5601116427432216906 & 0{,}9997721576668945090 \\ 0{,}6370471633629528366 & 1{,}5055821371610845295 & 1{,}9886078833447254500 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1{,}897 & 1{,}981 & 1{,}345 \\ 0{,}733 & 2{,}59 & 0{,}999 \\ 0{,}637 & 1{,}506 & 1{,}989 \end{pmatrix}.$$

Для вектора $\vec{q}=(12,8,20)$ відшукуємо вектор $\vec{f}$ для випадку втручання уряду в грошову ситуацію трьох міст $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\vec{f}=\vec{q}-\vec{q}Q=(12,8,20)-(12,8,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}=(5{,}76;\ -6{,}92;\ 9{,}64).$$

Отже, уряд повинен протягом кожного періоду додавати місту ω_1 5,76, з міста ω_2 вилучати 6,92 і місту ω_3 додавати 9,64 грошової одиниці.

Переконаємося, що $\vec{f}N=\vec{q}$:

$$(5{,}76;\ -6{,}92;\ 9{,}64)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1{,}8974709501025290499 & 1{,}9808612440191387560 & 1{,}3451811346548188653\\ 0{,}7327409432672590567 & 2{,}5901116427432216906 & 0{,}9997721576668995090\\ 0{,}6370471633629528366 & 1{,}5055821371610845295 & 1{,}9886078833447254500\end{pmatrix}=$$

$$=(12,8,20).$$

Перевіримо умову прийнятності вектора $\vec{q}$, коли задано початковий вектор $\vec{m}=(4,4,4)$.

Для цього знайдемо $(\vec{q}Q-\vec{m})Q^k$ за $k=0$:

$$\vec{q}Q-\vec{m}=(12,8,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}-(4,4,4)=(2{,}24;\ 10{,}92;\ 6{,}36).$$

Як бачимо, другий компонент вектора $\vec{q}Q-\vec{m}$ перевищує другий компонент вектора $\vec{q}$. Не виконується також умова $\vec{q}Q\le\vec{q}$:

$$(12,8,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}=(6{,}24;\ 14{,}92;\ 10{,}36).$$

Змінивши вектор мети $\vec{q}=(20,30,20)$, дістанемо:

1) $$\vec{q}=(20,30,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}=(11{,}8;\ 26{,}2;\ 17{,}4);$$

отже, $\vec{q}Q\le\vec{q}$;

2)

$$\vec{q}Q-\vec{m}=(20,30,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}-(4,4,4)=(7{,}8;\ 22{,}2;\ 13{,}4),$$

звідки $(\vec{q}Q-\vec{m})\le\vec{q}$;

3) $(\vec{q}Q-\vec{m})Q=\left((20,30,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}-(4,4,4)\right)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}=$

$=(7{,}164;\ 15{,}958;\ 10{,}23).$

Остаточно маємо $(\vec{q}Q-\vec{m})Q\le\vec{q}$.

Таким чином, можна гарантувати, що мета досягти вектора $\vec{q}$ здійсненна для будь-яких початкових векторів $\vec{m}$.

Для вектора $\vec{q}=(20,30,20)$ дістаємо:

$$\vec{f}=\vec{q}-\vec{q}Q=(20,30,20)-(20,30,20)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}=(8{,}2;\ 3{,}8;\ 2{,}6).$$

Загальну кількість грошей, які необхідно вкласти в економіку за період, що розглядається, можна знайти так:

$$\vec{h}=(I-Q)\xi=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}42 & -0{,}33\\ -0{,}18 & 0{,}64 & -0{,}2\\ -0{,}12 & -0{,}35 & 0{,}70\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}26\\0{,}29\end{pmatrix};$$

$$\vec{q}\vec{h}=(20,30,20)\begin{pmatrix}0{,}05\\0{,}26\\0{,}29\end{pmatrix}=14{,}6\,.$$

Отже, загальна кількість грошей, що їх інвестують в економіку регіону, який складається з трьох міст, дорівнює 14,6 грошової одиниці.

Розглянемо тепер випадок, коли уряд втручається в грошову ситуацію в містах ω_1 і ω_2, залишаючи поза увагою місто ω_3.

У такому разі маємо:

$$T=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42\\ 0{,}18 & 0{,}36\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}0{,}33\\ 0{,}2\end{pmatrix};$$

$V=(0{,}12\quad 0{,}35);\ S=(0{,}24);$

$\vec{q}=(20,30,20),\ \vec{q}^{*}=(20,30),\ \vec{q}^{**}=(20).$

$(I-S)^{-1} = (1-0{,}24)^{-1} = (0{,}76)^{-1} = 1{,}316.$

$$U(I-S)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}(1{,}316) = \begin{pmatrix} 0{,}43428 \\ 0{,}2632 \end{pmatrix}$$

$$Q^* = T + U(I-S)^{-1}V = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 \\ 0{,}18 & 0{,}36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} 1{,}316 \cdot (0{,}12 \quad 0{,}35) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 \\ 0{,}18 & 0{,}36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}43428 \\ 0{,}2632 \end{pmatrix}(0{,}12 \quad 0{,}35) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 \\ 0{,}18 & 0{,}36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}052 & 0{,}152 \\ 0{,}032 & 0{,}092 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}252 & 0{,}572 \\ 0{,}212 & 0{,}452 \end{pmatrix}$$

Отже, $Q^* = \begin{pmatrix} 0{,}252 & 0{,}572 \\ 0{,}212 & 0{,}452 \end{pmatrix}$

Оскільки $f_3 = 0$, то

$$\vec{f}^* = \vec{q}^*(I - Q^*) \to \to (f_1, f_2) = (20, 30)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}252 & 0{,}572 \\ 0{,}212 & 0{,}452 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (20, 30) = \begin{pmatrix} 0{,}768 & -0{,}572 \\ -0{,}212 & 0{,}548 \end{pmatrix} = (8{,}6 \quad 5).$$

Тоді $\vec{q}^{**} = \vec{q}^*\, U(I-S)^{-1} \to$

$$\to q_3 = (20, 30)\begin{pmatrix} 0{,}43428 \\ 0{,}2632 \end{pmatrix} = (16{,}582).$$

Остаточно маємо: $\vec{q} = (20;\ 30;\ 16{,}582)$.

Щоб перевірити вектор $\vec{q}$ на прийнятність, обчислимо вектори $\vec{q}Q$, $(\vec{q}Q - \vec{m})$, $(\vec{q}Q - \vec{m})Q$:

$$\vec{q}Q = (20;\ 30;\ 16{,}582)\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24 \end{pmatrix} = (11{,}39;\ 25{,}004;\ 16{,}58);$$

$$(\vec{q}Q - \vec{m}) = (20;\ 30;\ 16{,}582)\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2 \\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24 \end{pmatrix} - (4, 4, 4) =$$

$$= (11{,}39;\ 25{,}004;\ 16{,}58) - (4, 4, 4) = (7{,}39;\ 21{,}004;\ 12{,}58);$$

$$(\vec{q}Q-\vec{m})Q=\left((20;30;16{,}582)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}-(4,4,4)\right)\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}42 & 0{,}33\\ 0{,}18 & 0{,}36 & 0{,}2\\ 0{,}12 & 0{,}35 & 0{,}24\end{pmatrix}=$$

$$=(6{,}778;\ 15{,}068;\ 9{,}659).$$

Отже, $\vec{q}Q<\vec{q}$, $(\vec{q}Q-\vec{m})<\vec{q}$, $(\vec{q}Q-\vec{m})Q<q$, тобто умова прийнятності вектора $\vec{q}$ виконується. Звідси випливає, що мети уряду зі стабілізації грошових потоків між містами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ буде досягнуто. ▲

2. Системи народження й загибелі

Одним із найважливіших напрямів застосування процесів Маркова є моделювання процесу народження і загибелі, що може відбуватися як із дискретними, так і з неперервними змінами часу t. При цьому головною умовою, котра неодмінно має виконуватися, є така: переходи процесу можливі лише до сусідніх станів.

Марковський процес у цьому разі описує зміни, які відбуваються в часі в певному обсязі популяції, а саме — зміни кількості одиниць певного виду організмів.

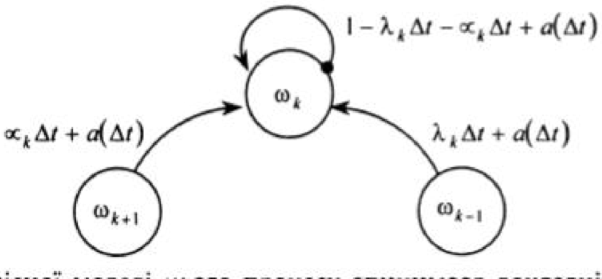
При цьому припускається, що процес народження певної кількості одиниць організмів моделюється пуассонівським процесом (потоком) із параметром λ_k, що є інтенсивністю народження k-го організму, а загибель — експоненціальним законом розподілу з параметром $\lambda_{\propto_k}$, де $\propto_k$ — інтенсивність загибелі k-го організму. Такі припущення добре узгоджуються з реальними процесами народження і загибелі, які відбуваються в певному обмеженому просторі популяції, а також дають змогу застосовувати математичний апарат, будуючи такі ймовірнісні моделі, котрі можна використати для розв'язання широкого кола задач, що постають у системах обслуговування.

Для процесу народження та загибелі, як уже наголошувалося, можливі лише переходи зі стану ω_k до стану ω_{k-1} або ω_{k+1}.

Нехай обсяг популяції дорівнює k одиницям, а отже, процес перебуває у стані ω_k.

Перехід процесу зі стану ω_k до стану ω_{k+1} відповідає випадковій події — *народженню з певною ймовірністю однієї одиниці організму*, а перехід процесу зі стану ω_k до стану ω_{k-1} відповідатиме такій випадковій події: *загибель із певною ймовірністю однієї одиниці організму.*

Три можливі переходи процесу розмноження та загибелі, де відсутні переходи процесу до несусідніх станів, унаочнює рисунок.



Для побудови ймовірнісної моделі цього процесу спинимося докладніше на його переходах до сусідніх станів і відповідних імовірностях преходів.

Нехай у момент часу t було k одиниць популяції, тобто процес розмноження та загибелі перебував у стані ω_k .

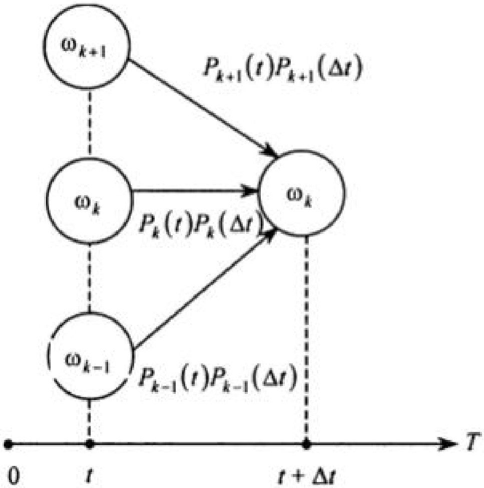
Тоді в момент часу $t+\Delta t$, де Δt — достатньо мала величина, процес перебуватиме у стані ω_k, якщо відбудеться одна з несумісних випадкових подій із відповідними ймовірностями, а саме:

а) якщо в момент часу t обсяг популяції дорівнював $k+1$ одиницям, то згідно зі протягом часу Δt одна одиниця неодмінно має загинути з імовірністю $p_{k+1}(\Delta t)=\propto_{k+1}\Delta t+a(\Delta t)$;

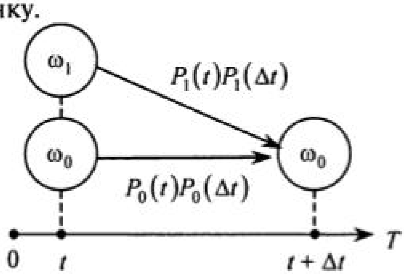
б) якщо в момент часу t обсяг популяції дорівнював $k-1$ одиниць, то згідно зі (143) протягом часу Δt одна одиниця неодмінно народиться з імовірністю $p_{k-1}(\Delta t)=\lambda_{k-1}\Delta t+a(\Delta t)$;

в) якщо в момент часу t обсяг популяції дорівнював k одиниць і протягом часу Δt ця кількість не зміниться, тобто згідно зі (139) жодна одиниця не загинула і не народилася із ймовірністю $p_k(t+\Delta t)=1-\lambda_k\Delta t-\propto_k\Delta t+a(\Delta t)$.

Наведені переходи та відповідні їм імовірності зображено на рисунку для $k\geq 1$.



Для $k=0$ переходи процесу та відповідні їм імовірності зображено на рисунку.



На основі наведених щойно міркувань дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_k(t+\Delta t) = p_k(t)p_k(\Delta t) + p_{k+1}(t)p_{k+1}(\Delta t) + p_{k-1}(t)p_{k-1}(\Delta t), & k \geq 1, \\ p_0(t+\Delta t) = p_0(t)p_0(\Delta t) + p_1(t)p_1(\Delta t). \end{cases}$$

При цьому $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$. Тоді

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + a(\Delta t)) + p_1(t)(\propto_1 \Delta t + a(\Delta t)), \\ p_k(t+\Delta t) = p_k(t)(1 - \lambda_k \Delta t - \propto_k \Delta t + a(\Delta t)) + \\ + p_{k+1}(t)(\propto_{k+1} \Delta t + a(\Delta t)) + p_{k-1}(t)(\lambda_{k-1} \Delta t + a(\Delta t)), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Розкривши дужки в системі, дістанемо:

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = p_0(t) - \lambda_0 \Delta t p_0(t) + p_0(t)\alpha(\Delta t) + \propto_1 \Delta t p_1(t) + p_1(t)\alpha(\Delta t), \\ p_k(t+\Delta t) = p_k(t) - \lambda_k \Delta t p_k(t) - \propto_k \Delta t p_k(t) + p_k(t)\alpha(\Delta t) + \propto_{k+1} \Delta t p_{k+1}(t) + \\ + p_{k+1}(t)\alpha(\Delta t) + \lambda_{k-1} \Delta t p_{k-1}(t) + p_{k-1}(t)\alpha(\Delta t), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) = p_0(t) - \lambda_0 \Delta t p_0(t) + \propto_1 \Delta t p_1(t) + (p_0(t) + p_1(t))\alpha(\Delta t); \\ p_k(t+\Delta t) = p_k(t) - (\lambda_k + \propto_k)\Delta t p_k(t) + \propto_{k+1} \Delta t p_{k+1}(t) + \\ + \lambda_{k-1} \Delta t p_{k-1}(t) + (p_k(t) + p_{k+1}(t) + p_{k-1}(t))\alpha(\Delta t). \end{cases}$$

Від останньої системи переходимо до системи:

$$\begin{cases} p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = -\lambda_0 \Delta t p_0(t) + \propto_1 \Delta t p_1(t) + (p_0(t) + p_1(t))\alpha(\Delta t), \\ p_k(t+\Delta t) - p_k(t) = -(\lambda_k + \propto_k)\Delta t p_k(t) + \propto_{k+1} \Delta t p_{k+1}(t) + \\ + \lambda_{k-1} \Delta t p_{k-1}(t) + (p_k(t) + p_{k+1}(t) + p_{k-1}(t))\alpha(\Delta t). \end{cases}$$

Поділивши ліву і праву чистини системи на Δt, дістанемо:

$$\begin{cases} \dfrac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 p_0(t) + \propto_1 p_1(t) + (p_0(t) + p_1(t))\dfrac{\alpha(\Delta)}{\Delta t}, \\ \dfrac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda_k + \propto_k)p_k(t) + \propto_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \\ + (p_k(t) + p_{k+1}(t)p_{k-1}(t))\dfrac{\alpha(\Delta)}{\Delta t}, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Переходячи до границі за $\Delta t \to 0$, дістаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \propto_1 p_1(t), \\ \dfrac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \propto_k)p_k(t) + \propto_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t), \quad k \geq 1, \end{cases}$$

оскільки $\lim\limits_{Xt \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta t)}{\Delta t} = 0$, або

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \propto_1 p_1(t), \\ p_k'(t) = -(\lambda_k + \propto_k)p_k(t) + \propto_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t), \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Отже, дістали систему диференціально-різницевих рівнянь, яка описує динаміку ймовірнісного процесу народження і загибелі.

Зосередивши увагу, наприклад, на стані ω_k, побачимо, що перейти до цього стану можна лише зі станів ω_{k-1} або ω_{k+1}, і навпаки, залишаючи стан ω_k, можна потрапити лише в стан ω_{k-1} або ω_{k+1}.

Такі процеси називають ***процесами розмноження і загибелі***.

Якщо візьмемо $\alpha_k = 0$ для всіх значень k, то дістанемо процес чистого розмноження:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda_k p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t), \quad k \ge 1, \\ \dfrac{dp_0(t)}{dt} = \lambda_0 p_0(t). \end{cases}$$

3. Елементи теорії масового обслуговування (ТМО)

Як у сфері виробництва, так і в побуті часто трапляються такі неприємні явища, як черга, що являє собою скупчення (яке буває численним) об'єктів (вимог), які чекають свого обслуговування (виконання певного комплексу операцій).

Черга може мати місце у повсякденному житті: у магазинах до кас чи продавця, у поліклініці до лікаря, на виробництві, коли накопичуються деталі, вузли, агрегати, що потребують обслуговування робітником або верстатом.

У більш складних системах обслуговування черги виникають під час навантажування чи розвантажування вагонів, річних та морських суден у портах тощо.

Причини, які призводять до черг як у сфері виробництва, так і в сфері обслуговування, мають випадковий характер і виникають тоді, коли:

1) пропускна здатність „приладу" обслуговування не задовольняє число вимог, що надходять;

2) об'єкти (вимоги) надходять нерегулярно, тобто у випадкові моменти часу, утворюючи при цьому пуассонівський потік;

3) час обслуговування об'єкта (вимоги) не є сталою величиною, а випадковою, і припускається, що вона має експоненціальний закон розподілу ймовірностей.

Математичною моделлю для найпростішої системи масового обслуговування з одним пуассонівський потоком і одним каналом обслуговування (одноканальний прилад), час якого має експоненціальний закон розподілу ймовірностей, є система диференціальних рівнянь (див. попередній пункт):

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \alpha p_1(t), \\ p_k'(t) = -(\lambda + \alpha) p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \alpha p_{k+1}(t). \end{cases}$$

У стаціонарному режимі (*при* $t \to \infty$) ймовірності вже не залежать від часу ($\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$, $p_k'(t) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$), тому система переходить в однорідну нескінченну систему алгебраїчних рівнянь відносно p_k і має вигляд:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \alpha p_1, \\ 0 = -(\lambda + \alpha) p_k + \lambda p_{k-1} + \alpha p_{k+1}. \end{cases}$$

Якщо ввести величину $\rho = \dfrac{\lambda}{\alpha}$ — коефіцієнт навантаження системи, то система матиме вигляд:

$$\begin{cases} \rho p_0 = p_1, \\ (1 + \rho) p_k = \rho p_{k-1} + p_{k+1} \end{cases}, \quad \rho < 1$$

Для розв'язування цієї системи використовують метод імовірнісних твірних функцій, а саме

$$\varphi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k = p_0 + x p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3 + \ldots + x^m p_m + \ldots,$$

$$p_k = P(X = k), \; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Якщо помножити ліву і праву частини другого рівняння системи на x^k, то дістанемо:

$$\begin{cases} \rho p_0 = p_1, \\ (1 + \rho) x^k \cdot p_k = \rho x^k \cdot p_{k-1} + x^k p_{k+1}. \end{cases}$$

Підсумовуючи ліву та праву частини системи, дістанемо функціональне рівняння щодо $\varphi(x)$:

$$(1 + \rho)\varphi(x) + \rho p_0 = \rho x \cdot p_0 + \rho x \cdot \varphi(x) + \frac{1}{x}\varphi(x) \to$$

$$\to \left((1 - x)\rho + \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) \varphi(x) = (x - 1)\rho p_0 \to \varphi(x) = \frac{\rho (x - 1) p_0}{\rho (1 - x) + \left(1 - \frac{1}{x} \right)} =$$

$$= \frac{\rho x \cdot p_0}{1 - \rho x}.$$

Тобто, маємо $j(x)=\frac{\rho\times x}{1-\rho\times x}\times p_0\, j(1)=\frac{\rho}{1-\rho}\times p_0$.

Оскільки $\varphi(1)+\ p_0=1$, то дістанемо:

$\frac{\rho}{1-\rho}\times p_0+p_0=1 \circledR p_0=1-\rho$.

Отже, ймовірність того, що в системі будуть відсутні вимоги на обслуговування (система не працює через відсутність вимог) p_0 залежить від коефіцієнта навантаження системи. Зі збільшенням ρ

зменшується p_0; при $\rho=1$ $p_0=0$.

Тому $j(1)=\frac{\rho}{1-\rho}\times p_0=\frac{\rho}{1-\rho}\times(1-\rho)=\rho$.

Як бачимо, ймовірність того, що система зайнята обслуговуванням вимог $\varphi(1)$, залежатиме від коефіцієнта завантаження $\varphi(1)=\ \rho$. При збільшенні ρ збільшується $\varphi(1)$.

Для визначення математичного сподівання числа вимог у системі застосовуються властивості $\varphi(x)$, а саме:

$$M=j'(x)\big|_{x=1}=\left((1-\rho)\times\frac{\rho x}{1-\rho x}\right)'\Big|_{x=1}=(1-\rho)\times\frac{\rho(1-\rho x)+\rho^2 x}{(1-\rho x)^2}\Big|_{x=1}=\frac{\rho}{1-\rho}.$$

Середнє число вимог у черзі обчислюється за формулою:

$$L=M-j(1)=\frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Середнє значення часу очікування вимоги в черзі до початку свого обслуговування приладом обчислюється так: $\bar{t}=\frac{M}{\lambda}$.

Для стабільності роботи системи необхідно дотримуватися умови $\rho<1$.

Приклад 27. Комп'ютер контролює певний технологічний процес шляхом обробки інформації, яка надходить від конвеєра, що працює в автоматичному режимі. Інформація, що надходить на комп'ютер,

утворює пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda=0{,}1\ c^{-1}$. Час обробки інформації є випадковою величиною, що має експоненціальний закон розподілу ймовірностей зі значенням параметра $\alpha = 0,4 \; c^{-1}$. У процесі роботи комп'ютер може вийти з ладу. Це трапляється у випадкові моменти часу й утворює пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda_0 = 0,08 \; c^{-1}$. Відновлення роботи комп'ютера здійснюється програмним методом, і час, витрачений на відновлення, є випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу ймовірностей зі значенням параметра $\alpha_0 = 0,4 \; c^{-1}$.

Число інформації, що надходить для обробки, є випадковим, і при цьому інформація, що чекає на обслуговування, не залишає систему (не губиться).

Необхідно:

1) побудувати математичну модель для цієї системи в стаціонарному режимі;
2) визначити M, L, t_c;
3) обчислити середнє число витрат при роботі заданої системи, використовуючи формулу:

$$G = (g_1 \cdot N_0 + g_2 \cdot L + g_3 \cdot M) \cdot T,$$

де g_1 – вартість одиниці часу простою системи, зумовленого відмовою роботи комп'ютера ($g_1 = 30$ грн./хв);

g_2 – вартість втрат, які пов'язані з тим, що інформація очікує черги на обслуговування ($g_2 = 300$ грн./хв);

g_3 – вартість експлуатації одного приладу ($g_3 = 100$ грн/хв);

N_0 – число приладів у системі ($N_0 = 1$);

Т – час роботи системи (Т = 60 хв).

Розв'язування:

▼ Позначимо через p_k ймовірність того, що в системі міститься k вимог інформації і комп'ютер обслуговує одиницю інформації, а через Q_k – ймовірність того, що в системі міститься k вимог і комп'ютер перебуває в стані налагодження.

Після ліквідації несправностей система зі стану Q_k переходить у стан p_k ($k = 0,1,2,3,\ldots$).

У стаціонарному режимі роботи цієї системи математична модель матиме такий вигляд:

$$\begin{cases}(\lambda_0+\lambda)\cdot p_0=\alpha\cdot p_1+\alpha_0\cdot Q_0,\\(\lambda_0+\lambda+\alpha)\cdot p_k=\alpha\cdot p_{k+1}+\lambda\cdot p_{k-1}+\alpha_0\cdot Q_k,\\(\lambda_0+\alpha_0)\cdot Q_0=\lambda_0\cdot p_0,\\(\lambda_0+\alpha_0)\cdot Q_k=\lambda_0\cdot p_k+\lambda\cdot p_{k-1}.\end{cases}$$

Для розв'язування системи використаємо метод імовірних твірних функцій у такому вигляді:

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+p_0\text{, де }\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k p_k\text{, }\varphi_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k Q_k\text{.}$$

Помножимо ліву і праву частини другого та четвертого рівнянь на x^k і дістанемо:

$$\begin{cases}(\lambda_0+\lambda)\cdot p_0=\alpha p_1+\alpha_0 Q_0,\\(\lambda_0+\lambda+\alpha)\cdot p_k\cdot x^k=\alpha\cdot p_{k+1}\cdot x^k+\lambda p_{k-1}\cdot x^k+\alpha_0\cdot Q_k\cdot x^k,\\(\lambda_0+\alpha_0)\cdot Q_0=\lambda_0 p_0,\\(\lambda_0+\alpha_0)\cdot Q_k\cdot x^k=\lambda_0\cdot p_k\cdot x^k+\lambda\cdot p_{k-1}x^k.\end{cases}$$

У системі просумуємо перше і друге рівняння, третє і четверте:

$$\begin{cases}\left(\lambda_0+\lambda\cdot(1-x)+\alpha\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)\cdot\varphi_1(x)-\alpha_0\cdot\varphi_2(x)=(\lambda\cdot(x-1)-\lambda_0)\cdot p_0,\\(\lambda(1-x)+\alpha_0)\cdot\varphi_2(x)-\lambda_0\cdot\varphi_1(x)-\lambda_0\cdot p_0.\end{cases}$$

Розв'язуючи таку систему функціональних рівнянь відносно $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$, отримаємо:

$$\varphi_1(x)=\frac{\lambda\cdot\alpha_0+\lambda_0\cdot\lambda+\lambda^2\cdot(1-x)\cdot p_0}{\alpha_0\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}-\lambda_0\cdot\lambda-\lambda\cdot\alpha_0-\lambda^2\cdot(1-x)-\lambda\cdot\alpha\left(1-\dfrac{1}{x}\right)},$$

$$\varphi_2(x)=\frac{\lambda_0\cdot\alpha\cdot p_0}{\alpha_0\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}-\lambda_0\cdot\lambda-\lambda\cdot\alpha_0-\lambda^2\cdot(1-x)-\lambda\cdot\alpha\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}.$$

При $x=1$ матимемо:

$$\varphi_1(1)=\frac{\rho\cdot(1+\rho_0)\cdot p_0}{1-\rho\cdot(1+\rho_0)},\quad\varphi_2(1)=\frac{\rho_0\cdot p_0}{1-\rho\cdot(1+\rho_0)}\text{, де }\rho=\frac{\lambda}{\alpha},\quad\rho_0=\frac{\lambda_0}{\alpha_0}.$$

Оскільки $\varphi(1)=\varphi_1(1)+\varphi_2(1)+p_0=1$ – з умови нормування, то дістанемо:

$$\frac{\rho(1+\rho_0)}{1-\rho(1+\rho_0)}p_0+\frac{\rho_0}{1-\rho(1+\rho_0)}p_0+p_0=1\rightarrow p_0=\frac{1}{1+\rho_0}(1-\rho(1+\rho_0)).$$

Підставимо p_0 у вираз для $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ і визначимо:

$\varphi_1(1)=\rho$ – ймовірність того, що система зайнята обслуговуванням вимог інформації;

$\varphi_2(1)=\dfrac{\rho_0}{1+\rho_0}$ – ймовірність того, що система перебуває у стані налагодження комп'ютера (приладу обслуговування).

Математичне сподівання кількості вимог інформації дорівнюватиме:

$$M=\varphi'(1)=\varphi_1'(1)+\varphi_2'(1)=\frac{\rho+\rho_0+\rho\,\rho_0\cdot(1+\alpha)}{1-\rho(1+\rho_0)}K_r,$$

де $\alpha=\dfrac{\alpha_0}{\alpha}$, $K_r=\dfrac{1}{1+\rho_0}$ називають коефіцієнтом готовності системи.

Візьмемо числові значення параметрів і отримаємо:

$$\rho=\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{0,1}{0,4}=0,25,\quad \rho_0=\frac{\lambda_0}{\alpha_0}=,\frac{0,08}{0,4}=0,2;$$

$$\alpha=\frac{\alpha_0}{\alpha}=\frac{0,4}{0,4}=1,\quad K_r=\frac{1}{1+\rho_0}=\frac{1}{1+0,2}=0,83;$$

$$M=\frac{0,25+0,2+0,25\cdot 0,2\cdot(1+1)}{1-0,25\cdot(1+0,2)}0,83=\frac{0,45+0,1}{1-0,3}0,83=\frac{0,55\cdot 0,83}{0,7}=0,652$$

Середнє число вимог у черзі дорівнюватиме:

$$L=M-\varphi(1)=M-\left(\rho+\frac{\rho_0}{1+\rho_0}\right)=0,652-\left(0,25+\frac{0,2}{1+0,2}\right)=0,205.$$

Середнє значення часу очікування вимоги у черзі становитиме:

$$t=\frac{\alpha}{\lambda}=\frac{0,652}{0,4}=1,63\ (с).$$

Середнє значення витрат системи для Т = 60 хв:

$$G=(g_1\cdot N_0+g_2\cdot L+g_3\cdot M)\cdot T=\left(\frac{30}{60}\cdot 1+300\cdot\frac{1}{60}\cdot 0{,}205+100\cdot\frac{1}{60}\cdot 0{,}652\right)$$

$$\cdot\, 360=(0{,}5+1{,}025+1{,}087)\cdot 360=940{,}32$$

Отже, витрати в середньому становлять 940 грн. 32 коп.▲

Приклади розв'язування задач на випадкові процеси

Приклад 1. Ланцюг Маркова керується матрицею

$$\pi=\begin{pmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/3 & 1/2 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/2\end{pmatrix}$$

Знайти матрицю ймовірностей переходу за два кроки.

Розв'язування:

▼

$$\pi(2)=\pi^2=\begin{pmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/3 & 1/2 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/3 & 1/2 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/18 & 7/18 & 2/9\\ 13/36 & 5/12 & 2/9\\ 5/18 & 7/18 & 1/3\end{pmatrix}$$ ▲

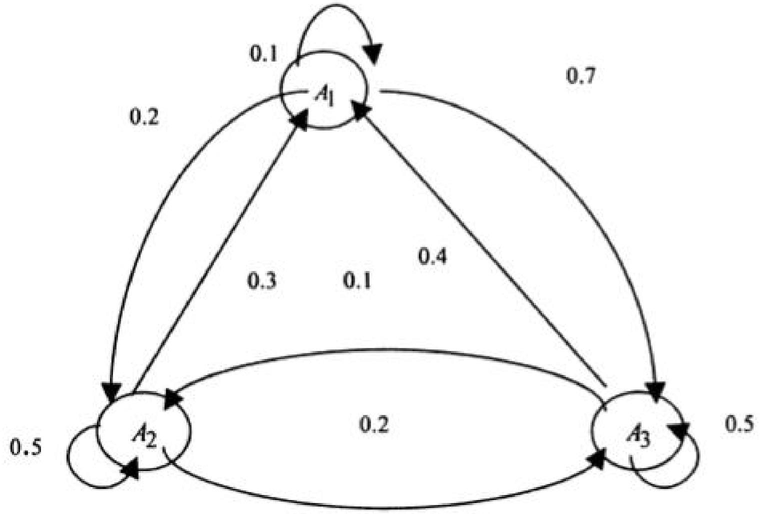
Приклад 2. За заданою матрицею ймовірностей переходу деякої системи

$$\pi=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}7\\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

побудувати орієнтований імовірнісний граф.

Розв'язування:

▼ За умовою задачі система має 3 стани A_1, A_2, A_3, тому граф має 3 вершини. Ймовірності переходу системи з одного стану в інший наведені в кожному рядку матриці π. Імовірнісний граф матиме такий вигляд:



▲

<u>Приклад 3</u>. Знайти стаціонарні ймовірності для регулярної матриці

$$\pi = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування:

▼ Для визначення стаціонарних ймовірностей регулярного ланцюга Маркова необхідно розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} \vec{b} = \pi \cdot \vec{b} \\ \sum\limits_{j=1}^{N} b_j = 1. \end{cases}$

Використовуючи останню систему, отримаємо:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3 & 0,1 & 0,6\\0,2 & 0,5 & 0,3\\0,1 & 0,4 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\\ b_1+b_2+b_3=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,3\cdot b_1 & 0,1\cdot b_2 & 0,6\cdot b_3\\0,2\cdot b_1 & 0,5\cdot b_2 & 0,3\cdot b_3\\0,1\cdot b_1 & 0,4\cdot b_2 & 0,5\cdot b_3\end{pmatrix}\\ b_1+b_2+b_3=1\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}b_1=0,3\cdot b_1+0,1\cdot b_2+0,6\cdot b_3\\ b_2=0,2\cdot b_1+0,5\cdot b_2+0,3\cdot b_3\\ b_3=0,1\cdot b_1+0,4\cdot b_2+0,5\cdot b_3\\ b_1+b_2+b_3=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-0,7\cdot b_1+0,1\cdot b_2+0,6\cdot b_3=0\\ 0,2\cdot b_1-0,5\cdot b_2+0,3\cdot b_3=0\\ 0,1\cdot b_1+0,4\cdot b_2-0,5\cdot b_3=0\\ b_1+b_2+b_3=1\end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему, маємо:

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}, \text{ тобто } b_1=\frac{1}{3}, b_2=\frac{1}{3}, b_3=\frac{1}{3}.$$

Приклад 4. Фермер придбав новий трактор, який може перебувати в одному з трьох несумісних станів: A_1 – трактор працює добре, тобто не потребує жодних втручань, пов'язаних із витратами; A_2 – трактор може бути використаний у роботі, але потребує дрібного ремонту, який вимагає певних витрат; A_3 – трактор перебуває в неробочому стані, що відбивається на прибутках фермера.

Матриця ймовірностей переходу трактора з одного стану в інший за один крок (за 1 місяць) має такий вигляд:

$$\pi=\begin{pmatrix}0,9 & 0,06 & 0,04\\0,3 & 0,6 & 0,1\\0,2 & 0,02 & 0,78\end{pmatrix}.$$

За заданою матрицею вартостей оцінити ефективність роботи трактора за три робочих місяці.

$$R=\begin{pmatrix}200 & 50 & -10\\150 & 40 & -20\\100 & 10 & -50\end{pmatrix}.$$

Елементи матриці вартостей r_{ij} вимірюються в гривнях.

При цьому $(\vec{v}(0))' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Розв'язування:

▼ З рівняння $\vec{v}(n) = (E + \pi + \pi^2 + \pi^3 + ... + \pi^{n-1}) \cdot \vec{g} + \pi^n \cdot \vec{v}(0)$ для $n = 3$ дістанемо

$\vec{v}(3) = (E + \pi + \pi^2) \cdot \vec{g} + \pi^3 \cdot \vec{v}(0)$.

Визначимо координати $\vec{g}$:

$$\pi R' = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,06 & 0,04 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,02 & 0,78 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 & 150 & 100 \\ 50 & 40 & 10 \\ -10 & -20 & -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182,6 & 136,6 & 88,6 \\ 89 & 67 & 31 \\ 33,2 & 15,2 & -18,8 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, маємо:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 182,6 \\ 67 \\ -18,8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} v_1(3) \\ v_2(3) \\ v_3(3) \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 & 0,06 & 0,04 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,02 & 0,78 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,9 & 0,06 & 0,04 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,02 & 0,78 \end{pmatrix}^2 \right] \cdot \begin{pmatrix} 182,6 \\ 67 \\ -18,8 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0,9 & 0,06 & 0,04 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,02 & 0,78 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182,6 \\ 67 \\ -18,8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 167,61 \\ 93,1 \\ 23,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 157,6 \\ 108,5 \\ 43,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 507,81 \\ 268,6 \\ 47,9 \end{pmatrix}$$

Отже, коли трактор за три місяці перейде до стану A_1 (справний), то прибуток фермера дорівнюватиме 507 грн 81 коп.; для стану A_2 цей прибуток становитиме 268 грн 60 коп. і для стану A_3 – лише 47 грн 90 коп. ▲

МОДУЛЬ 3

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математична статистика – наука, яка за допомогою математичних методів встановлює закономірності масових явищ, їхні взаємозв'язки, систематизує та обробляє результати експериментів. В математичній статистиці масовим називається явище, яке описується сукупністю однорідних елементів, що мають деякі загальні властивості. Завдання математичної статистики полягає в тому, щоб за результатами обмеженого числа спостережень над масовими явищами скласти уявлення про ті ймовірнісні закономірності, яким ці явища підлягають, і передбачити протікання їх у майбутньому. Логічною основою математичної статистики є ймовірність як числова характеристика вільного зв'язку: наслідки, викликані деякими причинами, дістають своє кількісне відображення у формі статистичних даних.

Математична статистика розвивалась колись і розвивається тепер паралельно з теорією ймовірностей, з якою вони взаємно доповнюють одна одну. Вона базується на поняттях та методах теорії ймовірностей, але розв'язує свої специфічні завдання своїми методами. У теорії ймовірностей вивчаються різні поняття, пов'язані з випадковими подіями і випадковими величинами; найважливішими з них є поняття ймовірності, функції розподілу, математичного сподівання тощо. Але в більшості випадків, що зустрічаються на практиці, точне значення ймовірності або точне вираження функції розподілу нам невідомі. Тому постає питання про їх експериментальне визначення.

Теоретичні основи теорії ймовірностей часто стають фундаментом для висунення гіпотез про розподіл статистичних даних. Перевірку цих гіпотез здійснюють на основі певних критеріїв узгодження, які гарантують, із встановленою ймовірністю (задається рівень значущості гіпотези), той чи інший розподіл вибіркової сукупності.

Предметом математичної статистики є розробка методів реєстрації, опису та аналізу статистичних експериментальних даних, отриманих в результаті спостережень масових випадкових явищ, щоб у подальшому отримати науково обґрунтовані практичні висновки. Саме використання фактично отриманих даних і є особливою рисою статистичного методу. В деякому сенсі математична статистика розв'язує задачі, обернені теорії ймовірностей – уточнює структуру статистичних моделей за результатами проведених експериментів.

За незалежними спостереженнями можна оцінити невідомий параметр. Нехай потрібно охарактеризувати темп приросту промислового виробництва за певний період часу серед підприємств галузі. Тоді можна оцінити невідомий параметр, взявши як характеристику темпу приросту середній з темпів приростів виробництва підприємств галузі, що розглядаються (припустимо він рівний 7%). Це означатиме, що саме такий показник є статистичною закономірністю зростання промислового виробництва галузі. Цей середній показник не виключає, а навпаки, припускає, що на окремих підприємствах темп приросту може бути більшим або меншим від 7%.

Математичну статистику застосовують під час розв'язання завдань планування і організації промислового виробництва, аналізу демографічних явищ, технологічних процесів, контролю якості продукції, надійності систем автоматичного управління тощо.

Сфера застосування математичної статистики надзвичайно широка і в ній можна виокремити декілька напрямків:

- **теорія вибірок**, присвячена методам формування вибірок з генеральної сукупності експериментальних даних, обсяг якої настільки великий, що не дає змогу проаналізувати її цілком;
- **теорія оцінок**, яка визначає методи та способи оцінки невідомих параметрів розподілу сукупності або розв'язання задачі передбачення наслідків експерименту на підставі експериментально отриманих даних;
- **перевірка статистичних гіпотез** (тести), яка використовується, коли потрібно вирішити, яка з пропозицій про розподіл експериментально отриманих даних більш правдоподібна;

- **регресійний аналіз**, завданням якого є підбір математичних формул, що якнайкраще описують експериментальні дані;
- **дисперсійний аналіз**, який дає змогу оцінити розсіювання експериментальних даних і співставити його з конкретною ситуацією, до якої належать дані.

Залежно від характеру питання, на яке потрібно отримати відповідь, та від обсяг експериментального матеріалу задачі математичної статистики можна умовно розділити на дві групи:

1. Задачі методів збирання та групування даних: задача на визначення числа необхідних випробувань до початку дослідження (планування експерименту); задачі на визначення способів збирання та групування статистичних відомостей отриманих у результаті спостережень спеціальної послідовності експериментів.

2. Задачі в галузі аналізу статистичних даних: задача на визначення закону розподілу випадкової величини (або системи випадкових величин) за статистичними даними; задачі перевірки правдоподібності гіпотез (про вигляд невідомого закону розподілу); задача визначення невідомих параметрів розподілу; задача визначення залежності випадкової величини від однієї або декількох випадкових величин.

Перші дослідження в галузі математичної статистики належать Я. Бернуллі і П. Лапласу. Значний внесок у розвиток математичної статистики зробили вчені П.Л. Чебишев, А.А. Марков, О.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн, Ю.В. Лінник, А.М. Колмогоров, В.І. Романовський, Є.Є. Слуцький, М.В. Смирнов, Г. Крамер, К. Пірсон, Стьюдент, Ф. Фішер, Ю. Нейман, А. Вальд, Ю. Нейман та інші.

У світі видається декілька журналів, які публікують праці з математичної статистики, в тому числі „Annals of Statistics" (до 1973 "Annals of Mathematical Statistics"), "International Statistical Institute Review", "Biometrical", "Journal of the Royal Statistical Society". Є наукові асоціації, які підтримують дослідження з математичної статистики та її застосування. Важливу роль відіграють Міжнародний статистичний інститут (ISI) з центром в Амстердамі та створена при ньому Міжнародна асоціація з статистичних методів у природничих науках (IASPS).

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 12

ВАРІАЦІЙНІ РЯДИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

1. Варіаційні ряди

Сукупність предметів або явищ, об'єднаних деякою загальною ознакою або властивістю якісного чи кількісного характеру, називають ***об'єктом спостереження***.

Кожний об'єкт статистичного спостереження складається з окремих елементів – ***одиниць спостереження***.

Результати статистичного спостереження є числовою інформацією – даними. ***Статистичні дані*** – це відомості про те, якого значення набула у статистичній сукупності досліджувана ознака, що вивчається. Ознаки бувають кількісними і якісними.

Кількісною називають ознаку, значення якої виражається числом (темп приросту, вік, стаж роботи, вартість основних фондів, маса і т. і.).

Якісною називають ознаку, яка характеризується деякою властивістю або станом елементів сукупності (стать, ґатунок, професія, освіта і т. д.).

Статистична сукупність називається ***генеральною***, якщо дослідженню підлягають всі елементи сукупності (суцільне спостереження).

Частина елементів генеральної сукупності, яка підлягає дослідженню, називається ***вибірковою сукупністю (вибіркою)***. Для того, щоб вибіркова сукупність відображала найбільш важливі властивості генеральної сукупності, вибірка має бути ***репрезентативною (представницькою)***. В різних галузях виробництва напрацьовані свої методи встановлення репрезентативності вибірки.

Значення ознаки, які при переході від одного елемента сукупності до іншого змінюються (варіюють), називають ***варіантами*** і, зазвичай, позначаються маленькими літерами латинського алфавіту x, y, z.

Порядковий номер варіанти (значення ознаки) називається ***рангом***.

Ряд значень ознаки (варіант), розміщених у порядку зростання з відповідними їм вагами, називають ***варіаційним рядом*** (рядом розподілу).

В якості ваг виступають частоти або частості.

Частота (n_i) показує, скільки разів зустрічається та чи інша варіанта (значення ознаки) в статистичній сукупності.

Частість або відносна частота (w_i) показує, яку частину одиниць сукупності становить та чи інша варіанта. Частість розраховують як відношення частоти тієї чи іншої варіанти до суми всіх частот ряду

$$w_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$$

Сума всіх частостей рівна 1: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Варіаційний ряд є статистичним аналогом розподілу ознаки (випадкової величини X). Варіаційні ряди бувають дискретними та інтервальними.

Дискретні варіаційні ряди будують зазвичай в тих випадках, коли значення досліджуваної ознаки можуть відрізнятися одне від одного не менше, ніж на деяку скінченну величину. В дискретних варіаційних рядах задаються точкові значення ознаки. Загальний вигляд дискретного варіаційного ряду:

Значення ознаки (x_i)	x_1	x_2	...	x_n
Частоти (n_i)	n_1	n_2	...	n_n

Інтервальні варіаційні ряди будують зазвичай у тих випадках, коли значення досліджуваної ознаки можуть відрізнятися одне від одного на скільки завгодно малу величину. Значення ознаки в цих випадках задаються у вигляді інтервалів. Загальний вигляд інтервального варіаційного ряду:

Значення ознаки (x_i)	$(x_1 ; x_2)$	$(x_2 ; x_3)$	...	$(x_{n-1} ; x_n)$
Частоти (n_i)	n_1	n_2	...	n_n

В інтервальних варіаційних рядах у кожному інтервалі виділяють верхню та нижню межі. Різницю між верхньою та нижньою межами називають ***шириною інтервалу***. Іноді інтервал може не мати верхньої або нижньої межі (це зазвичай, перший і останній). Такі інтервали називають ***відкритими***. Наприклад перший інтервал може бути задано як „до 20", другий – „(20 ; 30)", ..., передостанній – „(90; 100)", останній – „100 і більше". Якщо ж є обидві межі інтервалу, то його називають ***закритим***. Часто відкриті інтервали доводиться умовно закривати. Так, ширину першого інтервалу приймають рівною ширині другого інтервалу, а ширину останнього – ширині передостаннього інтервалу. В нашому прикладі ширина другого інтервалу рівна 30 – 20 = 10, отже, нижня межа першого інтервалу умовно становить 20 – 10 = 10; ширина передостаннього рівна 100 – 90 = 10, отже, верхня межа останнього інтервалу умовно становить 100 + 10 =110. Крім того, в інтервальних варіаційних рядах можуть зустрічатись інтервали різної ширини. Якщо інтервали варіаційного ряду мають однакову ширину, то їх називають ***рівновеликими*** або– ***нерівновеликими***.

При побудові інтервального варіаційного ряду часто постає проблема вибору кількості інтервалів та ширини інтервалу. Кількість інтервалів має бути не дуже великою, щоб після групування ряд не був громіздким, і не дуже малою, щоб не загубити особливостей розподілу ознаки. Для визначення оптимальної кількості інтервалів застосовують або формулу Стерджеса $k = 1 + 3.322 \cdot \lg n$ або формулу $k = [4 \lg n + 1]$, де n – кількість елементів сукупності. Тоді ширину рівновеликих інтервалів визначають за формулою: $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$,

де $x_{\max}$ та $x_{\min}$ – відповідно найбільше та найменше значення варіант ряду.

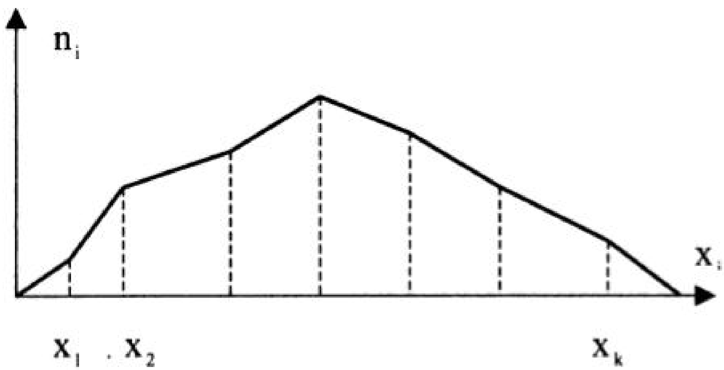
Для характеристики варіаційного ряду поруч з частотами та частостями використовують накопичені частоти та частості. Накопичені частоти (частості) показують, скільки елементів сукупності (яка їх частина) не перевищують заданого значення (варіанти) x.

Їх можна розраховувати за даними дискретного ряду, використовуючи формулу

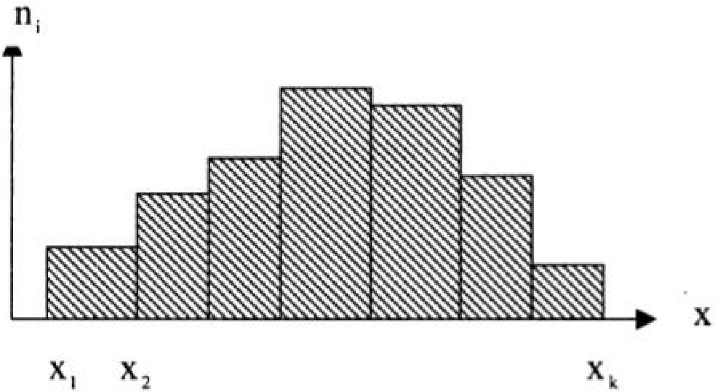
$f_i = n_i + n_{i-1} + \ldots + n_1$.

Для інтервального варіаційного ряду – це сума частот (частостей) всіх інтервалів, що не перевищують даний.

Дискретний варіаційний ряд графічно можна подати за допомогою ***полігона розподілу частот або частостей***.



Інтервальні варіаційні ряди графічно можна подати за допомогою ***гістограми***.



При її побудові по осі абсцис відкладаються значення досліджуваної ознаки (межі інтервалів). Якщо інтервали рівновеликі, то по осі ординат можна відкладати частоти або частості. Якщо ж інтервали мають різну ширину, по осі ординат необхідно відкладати значення абсолютної або відносної щільності розподілу. ***Абсолютна щільність*** – відношення частоти інтервалу до його ширини:

$$\rho(a)_i = \frac{n_i}{h_i},$$

де $\rho(a)_i$ – абсолютна щільність і-го інтервалу;

n_i – його частота;

h_i – ширина інтервалу.

Абсолютна щільність показує, скільки одиниць сукупності припадає на одиницю інтервалу.

Відносна щільність – відношення частості інтервалу до його ширини:

$$\rho(в)_i = \frac{w_i}{h_i},$$

де $\rho(в)_i$ - відносна щільність і-го інтервалу;

w_i - частість інтервалу;

h_i - ширина інтервалу.

Відносна щільність показує, яка частина елементів сукупності припадає на одиницю інтервалу.

Дискретні та інтервальні варіаційні ряди графічно можна подати також у вигляді *комуляти* та *огіви*. При побудові комуляти за даними дискретного ряду по осі абсцис відкладають значення ознаки (варіанти), а по осі ординат накопичені частоти або частості. На перетині значень ознаки (варіант) і відповідних їм накопичених частот (частостей) будуються точки, які також з'єднуються відрізками або кривою. Отримана таким чином ламана (крива) називається ***комулятою***. Якщо ряд інтервальний, то абсцисами її точок є верхні межі інтервалів. Ординати утворюють накопичені частоти (частості) відповідних інтервалів. Часто додають ще одну точку, абсцисою якої є нижня межа першого інтервалу, а ордината рівна нулю. З'єднуючи точки відрізками або кривою, отримаємо комуляту.

Огіва будується аналогічно до комуляти з тією тільки різницею, що на осі абсцис відкладаються точки, що відповідають накопиченим частотам (частостям), а по осі ординат – значення ознаки (варіанти).

Розглянемо деякі числові характеристики варіаційних рядів.

Середня арифметична. Існує дві формули розрахунку середньої арифметичної: *проста* та *зважена*. *Просту середню арифметичну* зазвичай використовують, коли дані спостереження не зведені у варіаційний ряд або всі частоти рівні одиниці чи однакові:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

де x_i - i-е значення ознаки або середина і-го інтервалу для інтервального ряду; n – об'єм ряду (число спостережень; число значень ознаки).

Якщо частоти відмінні одна від одної, розрахунок проводять за формулою *середньої арифметичної зваженої:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i},$$

де x_i - i-е значення ознаки або середина і–го інтервалу для інтервального ряду; m_i –частота і-го значення ознаки; k-число різних значень ознаки (варіант).

При розрахунку середньої арифметичної вагами можуть бути і частості, тоді формула розрахунку *середньої арифметичної зваженої* набуде вигляду:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot w_i,$$

де x_i - i –е значення ознаки або середина і-го інтервалу для інтервального ряду; w_i – частість і-го значення ознаки; n – число значень ознаки (варіантів).

***Медіана* Me(X).** Медіаною варіаційного ряду називають таке значення ознаки, яке припадає на середину ранжируваного ряду. Якщо кількість варіант непарна, то матимемо одне серединне значення, рівне медіані $Me(X) = x_g$; а якщо кількість варіант парна, то на середину припадуть два значення варіант, і тоді медіана буде рівною їх середньому арифметичному

$$Me(X) = \frac{x_g + x_{g+1}}{2}.$$

Для інтервального варіаційного ряду спочатку знаходять медіанний інтервал (інтервал, який містить серединне значення ознаки), а медіана на ньому визначається за формулою:

$$\mathrm{Me}(\mathrm{X}) = \mathrm{x}_0 + \mathrm{h} \cdot \frac{\frac{\mathrm{n}}{2} - \mathrm{f}_{\mathrm{me}-1}}{\mathrm{n}_{\mathrm{me}}},$$

де x_0 – початок медіанного інтервалу; h – ширина медіанного інтервалу; n – сума всіх частот ряду або об'єм ряду; f_{me-1} – частота, накопичена до початку медіанного інтервалу; n_{me} – частота медіанного інтервалу.

Мода **Mo(X).** Модою для дискретного варіаційного ряду називають таке значення варіанти, що має найбільшу частоту. Для інтервального варіаційного ряду спочатку знаходять модальний інтервал (з найбільшою частотою), а моду на ньому визначають за формулою:

$$Mo(X) = x_0 + h \cdot \frac{n_{mo} - n_{mo-1}}{2n_{mo} - n_{mo-1} - n_{mo+1}},$$

де x_0 – початок модального інтервалу; h – ширина модального інтервалу; n_{mo-1} – частота інтервалу, що передує модальному; n_{mo+1} – частота наступного за модальним інтервалу; n_{mo} – частота модального інтервалу.

Мод може бути кілька. Коли дискретний варіаційний ряд має одну моду, то його називають одномодальним, коли має дві моди – двомодальним і т.і.

Коливніть досліджуваної ознаки можна охарактеризувати за допомогою різних показників варіації. До основних ***показників варіації*** відносять: дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Дисперсія $D(X)$**.** Дисперсію можна розрахувати за простою і зваженою формулами:

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n};$$

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$. Середнє квадратичне відхилення розраховується за формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Коефіцієнт варіації $V(X)$. Коефіцієнт варіації визначається за формулою

$$V(X)=\frac{\sigma(X)}{\overline{x}}\cdot 100\%.$$

Початкові емпіричні моменти. Середнє зважене значення варіант у степені k ($k=1,2,3,...$) називають *початковим емпіричним моментом k-го порядку* ν_k^*, який обчислюється за формулою

$$\nu_k^*=\frac{\sum x_i^k\cdot n_i}{n}.$$

При k=1 дістанемо початковий момент першого порядку:

$$\nu_1=\frac{\sum x_i\cdot n_i}{n}=\overline{x}.$$

При k=2 обчислимо початковий момент другого порядку:

$$\nu_2=\frac{\sum x_i^2\cdot n_i}{n}.$$

$$D(X)=\nu_2-(\nu_1)^2$$

Центральні емпіричні моменти k-го порядку. Середнє зважене відхилення варіант у степені k ($k=1,2,3,...$) називають *центральним емпіричним моментом k-го порядку*:

$$\propto_k=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^k\cdot n_i}{n}.$$

При k=1 дістанемо:

$$\propto_1=\frac{\sum(x_i-\overline{x})\cdot n_i}{n}.$$

При k=2 обчислимо початковий момент другого порядку:

$$\propto_2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2\cdot n_i}{n}.$$

На практиці найчастіше застосовуються центральні емпіричні моменти третього та четвертого порядків, що обчислюються за формулами:

$$\propto_3=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^3\cdot n_i}{n},$$

$$\alpha_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 \cdot n_i}{n}.$$

Підносячи до третього та четвертого степеня відхилення варіант, подаємо α_3^* та α_4^* через відповідні початкові моменти:

$$\alpha_3 = \nu_3 - 3 \cdot \nu_2 \cdot \nu_1 + 2 \cdot (\nu_1)^2,$$

$$\alpha_4 = \nu_4 - 4 \cdot \nu_3 \cdot \nu_1 + 6 \cdot \nu_2 \cdot (\nu_1)^2 - 3 \cdot (\nu_1)^4.$$

Коефіцієнт асиметрії A_s^*. Центральний емпіричний момент третього порядку застосовується для обчислення коефіцієнта асиметрії:

$$A_s = \frac{\alpha_3}{\sigma^3}.$$

Якщо варіанти варіаційного ряду симетрично розміщені відносно $\bar{X}$, то в цьому разі $A_s = 0$, оскільки $\alpha_3 = 0$.

При $A_s < 0$ варіанти варіаційного ряду $x_i < \bar{x}$ переважають варіанти $x_i > \bar{x}$. Таку асиметрію вважають *від'ємною.* При $A_s > 0$ варіанти варіаційного ряду $x_i > \bar{x}$ переважають варіанти $x_i < \bar{x}$. Таку асиметрію вважають *додатною.*

Ексцес E_k. Центральний емпіричний момент четвертого порядку застосовується для обчислення ексцесу:

$$E_k = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3.$$

E_k, зазвичай використовується при дослідженні неперервних ознак генеральних сукупностей, оскільки він оцінює крутизну закону розподілу неперервної випадкової величини порівняно з нормальним. Для нормального закону розподілу, як відомо, $E_k = 0$.

Особливо важливим є поняття емпіричної функції розподілу.

Емпіричною функцією розподілу (або функцією розподілу вибірки) називають функцію аргументу х, що визначає відносну частоту події $X < x$:

$$F^*(x) = W(X < x) = w_x^{нак} = \frac{n_x^{нак}}{n},$$

де $n_x^{нак}$ – кількість варіантів варіаційного ряду, що менші за х, n – обсяг вибірки.

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ генеральної сукупності у математичній статистиці називається *теоретичною функцією розподілу*. Вона відрізняється від емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ тим, що визначає ймовірність події $X < x$, а не відносну частоту цієї події.

За теоремою Бернуллі, відносна частота $F^*(x) = \frac{n_x^{нак}}{n}$ події $X < x$ при $n \to \infty$ прямує до ймовірності цієї події $P(X < x) = F(x)$. Тому $F(x)$ та $F^*(x)$ мало відрізняються одна від одної при $n \to \infty$.

Доцільно використовувати $F^*(x)$ для наближеного представлення функції розподілу $F(x)$ генеральної сукупності.

Емпірична функція розподілу має такі властивості:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ зростаюча функція;

3) $$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad x \le x_1, \\ \\ 1 \quad , \quad x > x_m, \end{cases}$$

де X_1 - найменша варіанта, X_m — найбільша варіанта.

Приклад 1. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним варіаційним рядом і зобразити її графік. Побудувати полігон та комуляту цього розподілу.

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

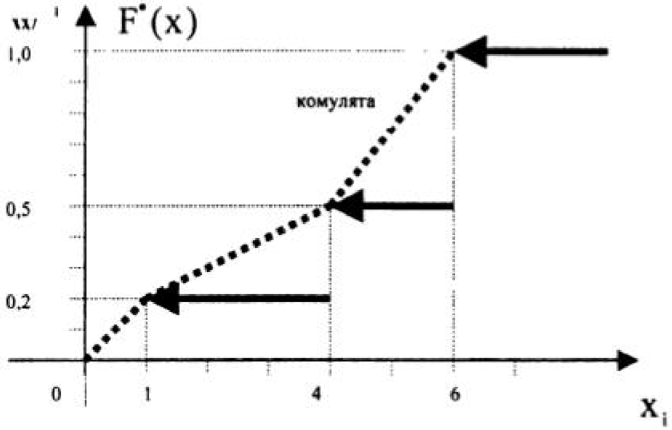
Розв'язування:

▼ Обсяг ряду $n = 10 + 15 + 25 = 50$. Найменше значення варіанти $x_1 = 1$. Отже,

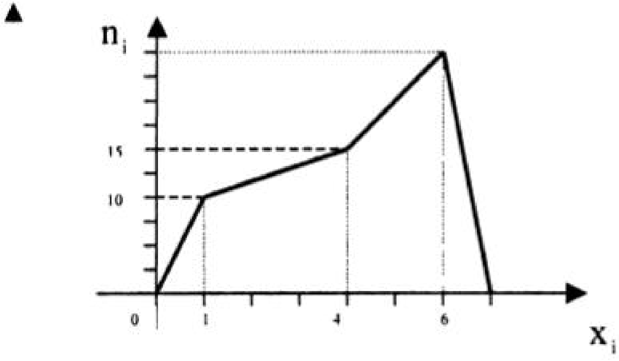
$$F^*(x) = W(X < x) = \begin{cases} 0 \ ; \ x \le 1 \\ 10/50 = 0.2 \ ; \ 1 < x \le 4 \\ 25/50 = 0.5 \ ; \ 4 < x \le 6 \\ 1 \ ; \ x > 6 \end{cases}.$$

Побудуємо графік $F^{*}(x)$. Звертаємо увагу на те, що для дискретного варіаційного ряду емпірична функція розподілу є розривною ступінчастою функцію за аналогією з функції розподілу для дискретної випадкової величини з тією лише різницею, що по осі ординат замість ймовірностей розміщують частості.

Комулята зображена пунктиром. Першою точкою комуляти є точка , що знаходиться на відстані одиничного відрізка від першої варіанти ряду з нульовою ординатою.



Подамо полігон варіаційного ряду. Першою і останньою точками полігону є точки, що знаходяться на відстані одного одиничного відрізка від першої та останньої варіант ряду з рівними нулю ординатами:



Приклад 2. При обстеженні 50 членів сімей робітників та службовців встановлено такі статистичні дані про кількість членів цих сімей: 5; 3; 2; 1; 4; 6; 3; 7; 9; 1; 3; 2; 5; 6; 8; 2; 5; 2; 3; 6; 8; 3; 4; 4; 5; 6; 5; 4; 7; 5; 6; 4; 8; 7; 4; 5; 7; 8; 6; 5; 7; 5; 6; 6; 7; 3; 4; 6; 5; 4.

1) Складіть варіаційний ряд розподілу частот.

2) Побудуйте полігон розподілу частот, комуляту.

3) Визначте середній розмір (середню кількість членів) сім'ї.

4) Охарактеризуйте коливніть розміру сім'ї за допомогою показників варіації (дисперсії, середнього квадратичного відхилення, коефіцієнта варіації).

5) Визначте моду та медіану.

Поясніть отримані результати, зробіть висновки.

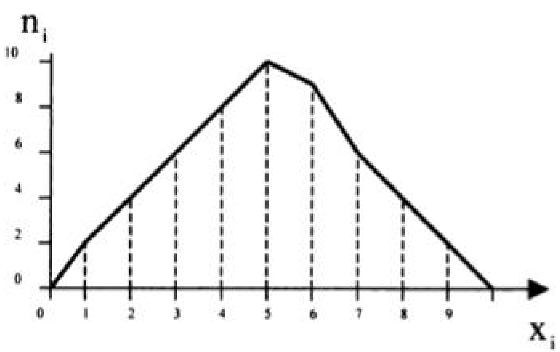
Розв'язування:

▼ 1) У даній задачі досліджувана ознака є дискретною, тому що розмір сімей не може відрізнятися один від одного менше, ніж на одного чоловіка. Щоб побудувати дискретний варіаційний ряд, потрібно підрахувати, скільки разів зустрічається те чи інше значення ознаки, а потім розмістити їх у порядку зростання. Значення досліджуваної ознаки – розмір сім'ї – позначимо x_i, частоти – n_i.

Результати розрахунків зведемо в таблицю

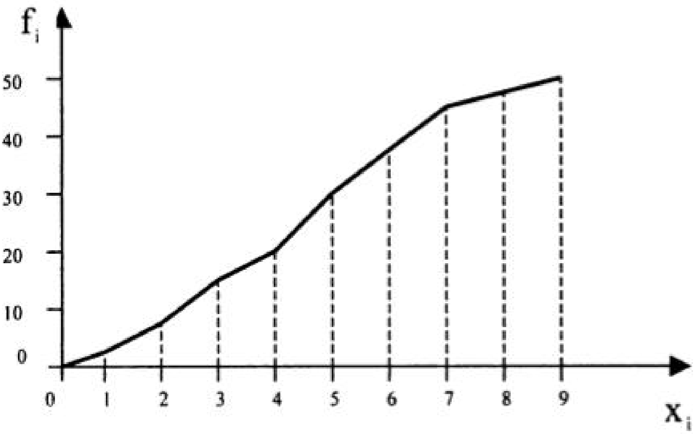
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	4	6	8	10	9	6	4	1

2) Дискретний варіаційний ряд можна подати графічно, побудувавши полігон розподілу частот або частостей.



Для того щоб побудувати комуляту, необхідно розрахувати накопичені частоти або частості. Накопичена частота першої варіанти ($x_1 = 1$) рівна самій частоті цієї варіанти, тобто $f_1 = 2$. Накопичена частота другої варіанти ($x_2 = 2$) дорівнює сумі частот першої та другої варіант, тобто $f_2 = 2 + 4 = 6$ і т. і.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	2	6	12	20	30	39	45	49	50



3) Розрахуємо середній розмір сім'ї. Так як частоти відмінні одна від одної, розрахунок проведемо за формулою середньої арифметичної зваженої

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 8 + 5\cdot 10 + 6\cdot 9 + 7\cdot 6 + 8\cdot 4 + 9\cdot 1}{2+4+6+8+10+9+6+4+1} =$$

$$= \frac{2+8+24+32+50+54+42+32+9}{50} = \frac{253}{50} = 5{,}06.$$

Це означає, що середній розмір сім'ї – 5 чоловік.

4) Розрахуємо дисперсію розміру сім'ї:

$$D(X)=\frac{(1-5{,}06)^2\cdot 2+(2-5.06)^2\cdot 4+(3-5{,}06)^2\cdot 6+(4-5{,}06)^2\cdot 8+(5-5{,}06)^2\cdot 10}{2+4+6+8+10+9+6+4+1}+$$

$$+\frac{(6-5{,}06)^2\cdot 9+(7-5{,}06)^2\cdot 6+(8-5{,}06)^2\cdot 4+(9-5{,}06)^2\cdot 1}{50}=3{,}6964\ \ (чол^2)$$

Середнє квадратичне відхилення розміру сім'ї $\sigma(X)=\sqrt{3{,}6964}=1{,}9226$.

Коефіцієнт варіації розміру сім'ї становить:

$$V(X)=\frac{1{,}9226}{5{,}06}\cdot 100\%=38\%.$$

Оскільки коефіцієнт варіації більший ніж 30%, можна зробити висновок, що досліджувана сукупність сімей є неоднорідною, чим і пояснюється велике коливання розміру сім'ї у даній сукупності.

Через неоднорідність сімей, які потрапили у вибірку, використання середньої арифметичної для характеристики найбільш типового рівня розміру сім'ї не виправдане – середня арифметична не є типовою для досліджуваної сукупності, характеристикою найбільш типового рівня розміру сім'ї в даній сукупності краще брати моду чи медіану.

5) $Mo(X)=5$, так як $x_5=5$ — варіанта з найбільшою частотою ($n_5=10$).

$Me(X)=5$, тому що серединне 25-е значення варіанти ($g=\frac{50}{2}=25$) рівне 5.▲

Приклад 3. Маємо такі статистичні дані про річну потужність підприємств цементної промисловості у 2005 році:

Річна потужність підприємств, тис. т	Кількість підприємств
До 500	27
500 - 1000	11
1000 - 2000	8
2000 - 3000	8
Більше 3000	2

1) Побудуйте гістограму, полігон та комуляту даного інтервального варіаційного ряду.

2) Розрахуйте середню потужність підприємств.

3) Знайдіть дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

4) Визначте моду, медіану.

Поясніть отримані результати, зробіть висновки.

Розв'язування

▼ 1) Дані про річну потужність підприємств цементної промисловості подані у вигляді інтервального варіаційного ряду – значення ознаки задані у вигляді інтервалів. Причому перший і останній інтервали відкриті. Крім того, даний інтервальний варіаційний ряд з нерівними інтервалами. Умовно закриємо межі відкритих інтервалів. Інтервальна різниця 2-го інтервалу 1000-500=500. Тому нижня межа першого інтервалу 500-500=0. Інтервальна різниця передостаннього інтервалу 3000-2000=1000. Отже, верхня межа останнього інтервалу 3000+1000=4000. В результаті отримаємо наступний варіаційний ряд:

x_i	n_i
0 - 500	27
500 - 1000	11
1000 - 2000	8
2000 - 3000	8
3000 - 4000	2

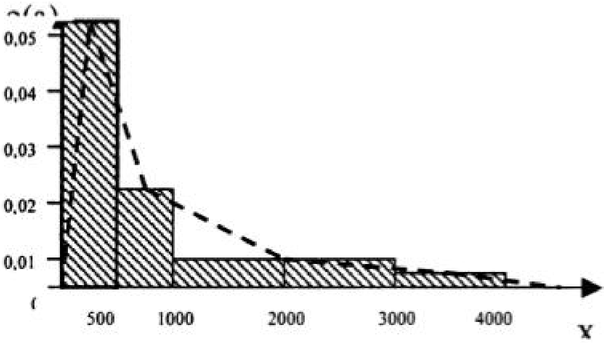
Враховуючи неоднакову ширину інтервалів, для побудови гістограми розрахуємо абсолютні щільності розподілу:

$$\rho(a)_1 = \frac{27}{500-0} 0{,}054; \quad \rho(a)_2 = \frac{11}{1000-500} = 0{,}022;$$

$$\rho(a)_3 = \frac{8}{2000-1000} = 0{,}008; \quad \rho(a)_4 = \frac{8}{3000-2000} = 0{,}008;$$

$$\rho(a)_5 = \frac{2}{4000-3000} = 0{,}002.$$

Побудуємо гістограму. Якщо з'єднати середини верхніх основ прямокутників відрізками, то отримаємо полігон цього ж розподілу (зображений пунктирною лінією).



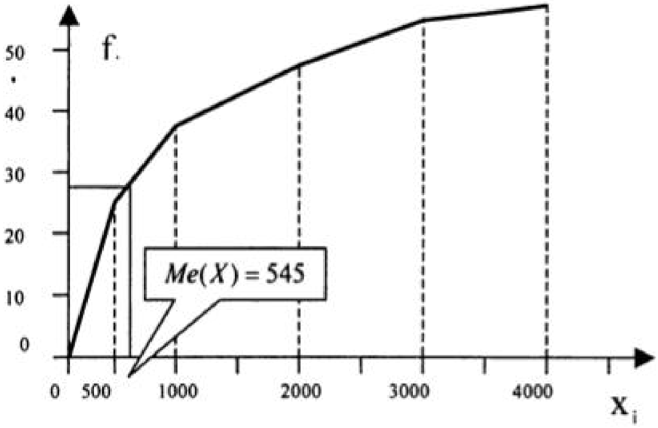
Для того, щоб побудувати комуляту, розрахуємо накопичені частоти або частості.

Накопичена частота нижньої межі 1-го інтервалу рівна нулю. Накопичена частота верхньої межі 1-го інтервалу рівна його частоті, тобто 27.

Накопичена частота верхньої межі 2-го інтервалу рівна сумі частот 1-го та 2-го інтервалів, тобто 27+11=38.

Далі, аналогічно 38+8=46; 46+8=54; 54+2=56.

Побудуємо комуляту:



2) Розрахуємо середню потужність підприємств цементної промисловості у 2005 році. Оскільки частоти інтервалів різні, то скористаємося формулою середньої арифметичної зваженої. При розрахунку числових характеристик інтервального варіаційного ряду замість значень ознаки беремо середини інтервалів:

$$x_1 = \frac{500+0}{2} = 250; \quad x_2 = \frac{1000+500}{2} = 750; \quad x_3 = \frac{2000+1000}{2} = 1500;$$

$$x_4 = \frac{3000+2000}{2} = 2500; \quad x_5 = \frac{4000+3000}{2} = 3500.$$

Тепер розрахунок середньої арифметичної набуде вигляду:

$$\bar{x} = \frac{250 \cdot 27 + 750 \cdot 11 + 1500 \cdot 8 + 2500 \cdot 8 + 3500 \cdot 2}{27+11+8+8+2} =$$

$$= \frac{6750+8250+12000+7000}{56} = \frac{54000}{56} = 964{,}29 \ \ (\textit{тис.т})$$

Слід відмітити, що використання з тією чи іншою метою середньої арифметичної, розрахованої за даними інтервального ряду з відкритими інтервалами, може призвести до серйозних похибок. Це пов'язано з тим, що відкриті інтервали закриваються умовно, тоді як дійсні значення ознаки у об'єктів, які потрапляють у відкриті інтервали, можуть виходити далеко за їх умовні межі.

У зв'язку з цим для оцінки найбільш типового рівня досліджуваної ознаки за даними інтервального ряду з відкритими інтервалами краще використовувати моду чи медіану.

3) Оцінимо варіацію потужності підприємств цементної промисловості в 2005 році.

Дисперсія буде рівна:

$$D(X)=\frac{(250-964{,}29)^2\cdot 27+(750-964{,}29)^2\cdot 11+(1500-964{,}29)^2\cdot 8}{27+11+8+8+2}+$$

$$+\frac{(2500-964{,}29)^2\cdot 8+(3500-964{,}29)^2\cdot 2}{56}=862563{,}78\ \ (\textit{тис.т})^2$$

Знайдемо середнє квадратичне відхилення потужності підприємств:

$$\sigma(X)=\sqrt{862563{,}78}=928{,}74\ \ (\textit{тис.т}).$$

Коефіцієнт варіації становить:

$$V(X)=\frac{928.74}{964{,}29}\cdot 100\%=96{,}31\%.$$

Оскільки коефіцієнт варіації більший за 30%, то можна зробити висновок, що досліджувана сукупність підприємств є неоднорідною, до її складу увійшли і великі, й малі підприємства, що й зумовило велике коливання річної потужності.

Тому використання середньої арифметичної для характеристики найбільш типового рівня річної потужності підприємств цементної промисловості недоцільне. Це ще раз підтверджує необхідність використання моди чи медіани для характеристики найбільш типового рівня потужності даної сукупності підприємств цементної промисловості.

4) Перш ніж визначити моду, знайдемо модальний інтервал (з найбільшою частотою). Це інтервал (0 – 500). Значення моди на цьому інтервалі рівне:

$$Mo(X)=0+500\cdot\frac{27-0}{2\cdot 27-0-11}=314\ \ (\textit{тис.т.}),$$

Медіанним інтервалом (містить серединне 28–е підприємство $g = \frac{56}{2} = 28$) є інтервал (500 – 1000). Значення медіани на цьому інтервалі рівне:

$$Me(X) = 500 + 500 \cdot \frac{\frac{56}{2} - 27}{11} = 545 \ (\textit{тис.т.}).$$

Якщо на комуляті знайти точку з ординатою $\frac{56}{2} = 28$, то абсциса цієї точки рівна $Me(X)$.▲

Приклад 4. Для того, щоб вивчити зміну виробітку на одного робітника механічного цеху у звітному році порівняно з попереднім, спеціалісти цеху згрупували дані про розподіл 100 робітників цеху за виробітком у звітному році (у відсотках до попереднього року) і результати подали у вигляді таблиці:

№	Виробіток у звітному році у відсотках до попереднього x	Частота (кількість робітників) n_i	Частість w_i	Накопичена частота f_i	Накопичена частість w_{inak}
1	94,0 – 100,0	3	0,03	3	0,03
2	100.0 – 106,0	7	0,07	10	0,10
3	106,0 – 112,0	11	0,11	21	0,21
4	112,0 – 118,0	20	0,20	41	0,41
5	118,0 – 124,0	28	0,28	69	0,69
6	124,0 – 130,0	19	0,19	88	0,88
7	130,0 – 136,0	10	0,10	98	0,98
8	136,0 – 142,0	2	0,02	100	1,00
	$\sum$	100	1,00	-	-

1) Побудувати гістограму, полігон, комуляту та емпіричну функцію розподілу робітників за виробітком.

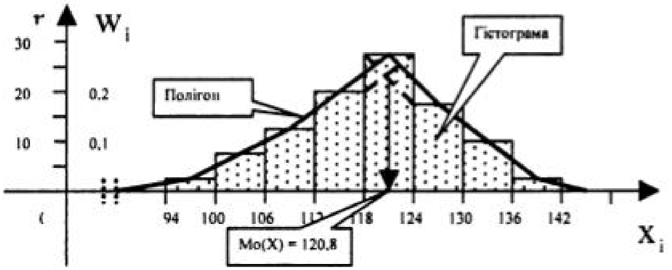
2) Знайти моду та медіану розподілу робітників за виробітком.

3) Обчислити середнє значення виробітку у відсотках до попереднього року, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії та ексцес даного варіаційного ряду.

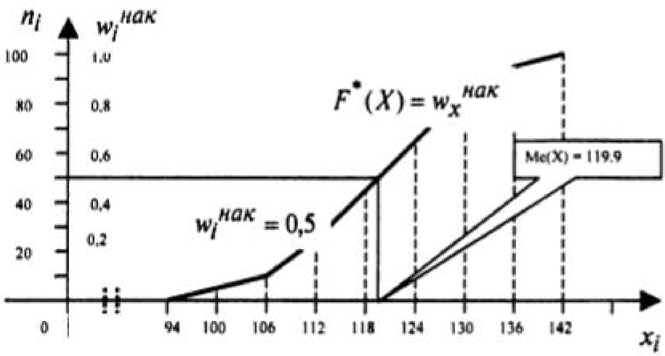
Розв'язування:

▼ 1) Маємо інтервальний варіаційний ряд з рівними інтервалами. Спочатку побудуємо гістограму даного варіаційного ряду, а потім, щоб побудувати полігон, з'єднаємо відрізками середини верхніх основ прямокутників.

Якщо на гістограмі розподілу знайти прямокутник з найбільшою частотою і з'єднати відрізками прямих вершини цього прямокутника з відповідними вершинами двох сусідніх прямокутників, то абсциса точки перетину цих відрізків і буде модою варіаційного ряду.



Для інтервального варіаційного ряду маємо тільки значення емпіричної функції розподілу на кінцях інтервалів (див. останній стовпчик таблиці). Тому для графічного зображення цієї функції доцільно її довизначити, з'єднавши точки графіка, які відповідають кінцям інтервалів відрізками прямої. В результаті отримана ламана співпаде з комулятою.



Якщо провести горизонтальну пряму $w_i^{нак} = 0{,}5$ до перетину з графіком емпіричної функції розподілу (або з комулятою), то абсциса точки перетину і буде медіаною варіаційного ряду.

2) Модальним є інтервал (118 – 124). Підрахуємо значення моди на цьому інтервалі:

$$Mo(X) = 118 + 6 \cdot \frac{28-20}{2 \cdot 28 - 20 - 19} = 120{,}8\ (\%).$$

Медіанним є інтервал (118 – 124), оскільки він містить серединний номер робітника (50-ий). Значення медіани на цьому інтервалі рівне

$$Me(X) = 118 + 6 \cdot \frac{\frac{100}{2} - 41}{28} = 119{,}9\ (\%).$$

3) Спочатку підрахуємо середнє значення виробітку на одного робітника у відсотках до минулого року, взявши за значення варіант середини інтервалів.

$$\overline{X} = \frac{97 \cdot 3 + 103 \cdot 7 + 109 \cdot 11 + 115 \cdot 20 + 121 \cdot 28 + 127 \cdot 19 + 133 \cdot 10 + 139 \cdot 2}{100} =$$

$$= 119.2(\%)$$

Дисперсія даного розподілу становить:

$$D(X) = \frac{(97-119{,}2)^2 \cdot 3 + (103-119{,}2)^2 \cdot 7 + (109-119.2)^2 \cdot 11 + (115-119{,}2)^2 \cdot 20}{100} +$$

$$+ \frac{(121-119{,}2)^2 \cdot 28 + (127-119{,}2)^2 \cdot 19 + (133-119{,}2)^2 \cdot 10 + (139-119{,}2)^2 \cdot 2}{100} = 87{,}48$$

Тоді середнє квадратичне відхилення рівне: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{87{,}48} = 9{,}35\ (\%)$.

Підрахуємо асиметрію та ексцес даного варіаційного ряду:

$$A_s = \frac{\alpha_3}{\sigma^3} = \frac{(97-119{,}2)^3 \cdot 3 + (103-119{,}2)^3 \cdot 7 + (109-119{,}2)^3 \cdot 11 + (115-119{,}2)^3 \cdot 20}{100 \cdot 9.35^3} +$$

$$+ \frac{(121-119{,}2)^3 \cdot 28 + (127-119{,}2)^3 \cdot 19 + (133-119{,}2)^3 \cdot 10 + (139-119{,}2)^3 \cdot 2}{100 \cdot 9{,}35^2} = -0{,}302$$

$$E_k = \frac{\alpha_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{(97-119{,}2)^4 \cdot 3 + (103-119{,}2)^4 \cdot 7 + (109-119{,}2)^4 \cdot 11 + (115-119{,}2)^4 \cdot 20}{100 \cdot 9.35^4} +$$

$$+ \frac{(121-119{,}2)^4 \cdot 28 + (127-119{,}2)^4 \cdot 19 + (133-119{,}2)^4 \cdot 10 + (139-119{,}2)^4 \cdot 2}{100 \cdot 9{,}35^4} - 3 = -0{,}286$$

Оскільки коефіцієнт асиметрії від'ємний і близький до нуля, то розподіл робітників за виробітком має незначну лівосторонню асиметрію. А, оскільки, ексцес близький до нуля, то розглядуваний розподіл за крутизною наближається до нормального. ▲

2. Вибірковий метод та статистичне оцінювання

За одним із поширених визначень, статистика – це наука, яка дає змогу поширювати висновки, зроблені на підставі вивчення частини сукупності (випадкової вибірки), на всю сукупність (генеральну сукупність). В цьому визначенні міститься суть вибіркового методу та визначається його провідна роль у статистиці.

Всі одиниці сукупності, які є носіями досліджуваної ознаки, утворюють ***генеральну сукупність***.

Частина сукупності, випадковим чином відібрана з генеральної сукупності, – ***вибіркова сукупність*** – вибірка.

Число одиниць (елементів) статистичної сукупності називається її ***об'ємом***. Обсяг генеральної сукупності позначають N, а обсяг вибіркової сукупності – n. Якщо обсяг сукупності великий, то його вважають рівним нескінченності.

Випадкова вибірка з n елементів – це такий відбір, при якому елементи вилучаються по одному з усієї генеральної сукупності і кожний із них має однакові шанси бути відібраним. Вимога випадковості забезпечується відбором за таблицями випадкових чисел чи за жеребом. Така вибірка називається ***власне-випадковою***. Одним із прикладів використання власне-випадкової вибірки є проведення тиражів виграшів грошово-речових лотерей, при яких забезпечується однакова можливість потрапляння в тираж будь-якого номера лотерейного білета.

За способом відбирання елементів розрізняють два типи випадкових вибірок: ***власне-випадкова повторна*** (вилучений у вибірку елемент реєструється і повертається до генеральної сукупності, звідки знову може бути вилучений випадковим чином); ***власне-випадкова безповторна*** (вилучений елемент не повертається до генеральної сукупності після реєстрації). Але незалежно від способу організації вибірки вона повинна являти собою зменшену копію генеральної сукупності, тобто бути представницькою (репрезентативною).

Нехай з генеральної сукупності вилучається вибірка об'ємом n, причому значення ознаки x_1 спостерігається n_1 раз, $X_2 - n_2$ рази, ..., x_k - n_k разів.

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – обсяг вибірки.

Статистичним розподілом вибірки називають перелік можливих значень ознаки X_i і відповідних їм частот n_i або відносних частот (частостей) W_i.

Числові характеристики генеральної сукупності, зазвичай невідомі (середнє значення, дисперсія та інші), називають ***параметрами генеральної сукупності*** (позначають $\overline{X}_{ген}$, $\sigma^2{}_{ген}$). Частка одиниць, які володіють тією чи іншою ознакою в генеральній сукупності, називається ***генеральною часткою*** і позначається p.

За даними вибірки розраховують числові характеристики, які називають ***статистиками*** (позначають $\widetilde{X}_{виб}$, $\sigma^2{}_{виб}$, вибіркова частка позначається ω). Статистики, які отримують за різними вибірками часто відрізняються одна від одної. Тому статистика, отримана за вибіркою, є тільки *оцінкою* невідомого параметра генеральної сукупності. ***Оцінка параметра*** – певна числова характеристика, отримана за вибіркою. Коли оцінка визначається одним числом, її називають ***точковою оцінкою***.

Як точкові оцінки параметрів генеральної сукупності використовують відповідні вибіркові характеристики. Теоретичне обґрунтування можливості використання цих вибіркових оцінок для характеристики генеральної сукупності дають закон великих чисел та центральна гранична теорема Ляпунова.

Для того, щоб будь-які статистики були хорошими оцінками параметрів генеральної сукупності, потрібно, щоб вони володіли рядом властивостей: незміщеності, ефективності, консистентності.

Оцінка $\bar{Q}$ називається ***консистентною***, якщо при збільшенні обсягу вибірки n вона збігається за ймовірністю до значення параметра Q:

$$\bar{Q} \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} Q \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (P|\bar{Q}-Q| < \varepsilon)) = 1, \forall \varepsilon > 0 .$$

Оцінка $\bar{Q}$ називається ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання точно рівне параметру Q для будь-якого об'єму вибірки:

$M(\bar{Q}) = Q, \forall n$.

Незміщена оцінка $\hat{Q}$ називається ***ефективною***, якщо її дисперсія мінімальна по відношенню до дисперсії будь-якої іншої оцінки цього параметра.

Всім переліченим властивостям відповідає вибіркова середня. Отже, вибіркова середня є точковою оцінкою генеральної середньої, тобто $\widetilde{X}_{виб} \approx \overline{X}_{ген}$.

Генеральна дисперсія має дві точкові оцінки: $\sigma^2_{виб}$ - вибіркова дисперсія; S^2 – виправлена вибіркова дисперсія. $\sigma^2_{виб}$ обчислюється при $n \geq 30$, а S^2 – при $n < 30$. Причому в математичній статистиці доводиться, що

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(X_i - \widetilde{X}_{виб}) \cdot n_i}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \sigma^2_{виб}$$

(поправка $\frac{n}{n-1}$ вводиться для усунення зміщеності у малих вибірках). При великих обсягах вибірки $\sigma^2_{виб}$ та S^2 практично співпадають.

Генеральне середнє квадратичне відхилення $\sigma_{ген}$ також має дві точкові оцінки: $\sigma_{виб}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення та S – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення. $\sigma_{виб}$

використовується для оцінювання $\sigma_{ген}$ при $n \geq 30$, а S для оцінювання $\sigma_{ген}$ при $n < 30$; при цьому $\sigma_{виб} = \sqrt{\sigma^2_{виб}}$, а $S = \sqrt{S^2}$.

Консистентна оцінка початкового моменту k-го порядку визначається за формулою $\hat{\nu}_k(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i)^k$.

Консистентна оцінка центрального моменту k-го порядку визначається формулою $\hat{\alpha}_k(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^k$.

Для обчислення оцінок параметрів варіаційного розподілу частіше всього використовують метод моментів та метод максимальної правдоподібності.

Суть ***методу моментів*** полягає в наступному. Нехай маємо вибірку $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ незалежних значень випадкової величини з відомим законом розподілу $f(x, Q_1, .., Q_m)$ та m незалежними параметрами $Q_1, .., Q_m$. Послідовність підрахунків така:

1) Обчислити значення m початкових або центральних теоретичних моментів $\nu_k(x) = M(x^k)$, $\alpha_k(x) = M((x - \bar{x})^k)$.

2) Обчислити значення m відповідних вибіркових початкових або центральних теоретичних моментів $\hat{\nu}_k(x)$ та $\hat{\alpha}_k(x)$.

3) Скласти і розв'язати відносно невідомих параметрів $Q_1, .., Q_m$ систему з m рівнянь, в яких прирівнюються теоретичні та вибіркові моменти. Кожне рівняння має вигляд $\nu_k = \hat{\nu}_k(x)$ або $\alpha_k = \hat{\alpha}_k(x)$. Знайдені корені є оцінками $\hat{Q}_1, .., \hat{Q}_m$ невідомих параметрів. При цьому частина рівнянь може містити початкові моменти, а решта – центральні.

Відповідно до ***методу максимальної правдоподібності*** оцінки $\hat{Q}_1, .., \hat{Q}_m$ отримуємо з умови максимуму за параметрами $Q_1, ..., Q_m$ додатної функції правдоподібності $L(x_1, ... x_n, Q_1, .., Q_m)$. Якщо випадкова величини X неперервна, а значення X_i незалежні, то

$$L(x_1, ... x_n, Q_1, .., Q_m) = \prod_{i=1}^{n} f(x_1, ... x_n, Q_1, .., Q_m).$$

Якщо випадкова величина X дискретна і набуває незалежних значень X_i з імовірностями $P(X = x_i) = p_i(x_1,...x_n,Q_1,...,Q_m)$, то функція правдоподібності рівна:

$$L(x_1,...x_n,Q_1,...,Q_m) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_1,...x_n,Q_1,...,Q_m).$$

Система рівнянь за цим методом може записуватись у двох видах:

$$\frac{\partial L(x_1,...x_n,Q_1,...,Q_m)}{\partial Q_i} = 0$$

або $\dfrac{\partial \ln(L(x_1,...x_n,Q_1,...,Q_m))}{\partial Q_i} = 0, \ i = 1,2,...,m$.

Знайдені корені вибраної системи рівнянь є оцінками $\hat{Q}_1,...,\hat{Q}_m$ невідомих параметрів $Q_1,...,Q_m$.

Приклад 5. Випадкова величина X розподілена рівномірно, тобто

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, x < a \cup x > b \end{cases}.$$

Необхідно знайти оцінки параметрів a та b.

Розв'язування:

▼ Для даного закону розподілу визначимо теоретичні вирази двох (за кількістю невідомих параметрів) моментів:

$$\nu_1(x) = M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2},$$

$$\alpha_2(x) = D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

За даною вибіркою знаходимо оцінки цих самих моментів $\tilde{X}$ та S^2 за відповідними формулами.

Складаємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \tilde{X} \\ \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = S \end{cases}$$

Розв'язавши систему відносно невідомих параметрів a та b, отримаємо оцінки:

$\hat{a} = \tilde{X} - \sqrt{3} \cdot S$, $\hat{b} = \tilde{X} + \sqrt{3} \cdot S$. ▲

Приклад 6. Нехай X_i – незалежні значення випадкової величини X, розподіленої за експоненціальним законом, тобто

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

Необхідно знайти оцінку параметра λ методом максимальної правдоподібності.

Розв'язування:

▼ Функція правдоподібності має вигляд:

$$\ln(L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Далі запишемо рівняння:

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial l} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 .$$

Розв'язавши це рівняння, отримаємо вираз для оцінки параметра λ:

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\tilde{X}} . ▲$$

Оскільки вибіркова сукупність є лише частиною генеральної сукупності, то природно, що вибіркові характеристики не будуть точно співпадати з відповідними генеральними. Похибку репрезентативності можна подати як різницю між генеральними та вибірковими характеристиками досліджуваної сукупності: $\varepsilon = \tilde{X} - \overline{X}$ або $\varepsilon = p - \omega$.

Щодо вибіркового методу з теореми Чебишева випливає, що з імовірністю, скільки завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що при досить великому обсязі вибірки та обмеженій дисперсії генеральної сукупності різниця між вибірковою середньою та генеральною середньою буде скільки завгодно малою:

$$P\left(\left|\tilde{X}-\overline{X}\right|<\frac{t\cdot\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}\right)>1-\frac{1}{t^2},$$

де $\tilde{X}$ – середня вибіркова; $\overline{X}$ – середня генеральної сукупності; $\sigma_{ген}$ - середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності.

Про величину розбіжності між параметром і статистикою $\Delta=\frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}=t\cdot\propto$, можна судити тільки з певною ймовірністю, від якої залежить величина t. Таким чином встановлюється зв'язок між ***граничною похибкою*** Δ, яка гарантується з деякою ймовірністю p, величиною t та ***середньою похибкою*** вибірки $\propto=\frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}$.

Із центральної граничної теореми Ляпунова випливає, що вибіркові розподіли статистик (при $n\geq 30$) будуть мати нормальний розподіл незалежно від того, який розподіл має генеральна сукупність. Отже,

$$P\left(\left|\tilde{X}-\overline{X}\right|<t\cdot\propto\right)\approx 2\Phi(t),$$

де $\Phi(t)$ – функція Лапласа.

Значення ймовірностей, які відповідають різним t, містяться в спеціальних таблицях: при $n\geq 30$ – в таблиці значень $\Phi(t)$, а при $n<30$ – в таблиці розподілу t - Стьюдента. Невідоме значення $\sigma_{ген}$ при розрахунку похибки вибірки заміняється $\sigma_{виб}$.

В залежності від способу відбору середня похибка вибірки визначається по різному:

α	Власне-випадковий відбір	
	повторний	**безповторний**
Для середньої	$\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}}$	$\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}$
Для частки	$\sqrt{\dfrac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}}$	$\sqrt{\dfrac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}$

Тут σ^2 – вибіркова дисперсія; $\omega\cdot(1-\omega)$ – вибіркова дисперсія частки значень ознаки m; n – обсяг вибірки;N– обсяг генеральної сукупності; $\dfrac{n}{N}$ – частка досліджуваної сукупності; $\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$- поправка на скінченність сукупності (в літературі $\left(1-\dfrac{n}{N}\right)$ іноді називають „поправкою на безповторність відбору").

Однією з найважливіших проблем вибіркового методу є визначення необхідного обсягу вибірки. Від обсягу вибірки залежить розмір середньої похибки (α) та економічність вибіркового спостереження, що проводиться, тому що чим більший обсяг вибірки, тим більші витрати на вивчення елементів вибірки, але тим менша при цьому похибка вибірки.

З формули граничної похибки $\Delta = t\cdot\alpha$ та формул середніх похибок вибірки визначаються формули необхідної чисельності вибірки для різних способів відбору:

n	Власне-випадковий відбір	
	повторний	**безповторний**
Для середньої	$\dfrac{t^2\cdot\sigma^2}{\Delta^2}$	$\dfrac{t^2\cdot\sigma^2\cdot N}{N\cdot\Delta^2+t^2\cdot\sigma^2}$
Для частки	$\dfrac{t^2\cdot\omega\cdot(1-\omega)}{\Delta^2}$	$\dfrac{t^2\cdot N\cdot\omega\cdot(1-\omega)}{N\cdot\Delta^2+t^2\omega(1-\omega)}$

Нехай $\varepsilon = \tilde{X} - \overline{X}$. Якщо Δ є границею, якою обмежена зверху абсолютна величина $|\varepsilon| < \Delta$, то $\left|\tilde{X} - \overline{X}\right| < \Delta$. Отож,

$$\tilde{X} - \Delta < \overline{X} < \tilde{X} + \Delta .$$

Ми отримали інтервальну оцінку генеральної середньої. З теореми Чебишева маємо

$$P(\tilde{X} - \Delta < \overline{X} < \tilde{X} + \Delta) = 2 \cdot \Phi(t) = \gamma .$$

Інтервальною оцінкою називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу, який з певною ймовірністю покриває невідомий параметр генеральної сукупності. Інтервал, який містить оцінюваний параметр генеральної сукупності, називають ***довірчим інтервалом***. Для його визначення обчислюють граничну похибку вибірки Δ, дає змогу встановити граничні межі, в яких із заданою ймовірністю (надійністю) має знаходитися параметр генеральної сукупності.

Гранична похибка вибірки рівна t – разовому числу середніх похибок вибірки. Коефіцієнт t дає змогу встановити, наскільки надійне твердження про те, що заданий інтервал містить параметр генеральної сукупності. Якщо ми виберемо коефіцієнт таким, що твердження в 95% випадків виявиться правильним і тільки в 5% – неправильним, то ми говоримо: зі статистичною надійністю в 95% довірчий інтервал вибіркової статистики містить параметр генеральної сукупності. Статистичній надійності в 95% відповідає довірча ймовірність – 0,95. В 5% випадків твердження „параметр належить довірчому інтервалу" буде неправильним, тобто 5% задає ***рівень значущості*** (α) або 0,05 ймовірність похибки. Зазвичай в статистиці рівень значущості вибирають таким, щоб він не перевищував 5% ($\alpha < 0{,}05$). Довірча ймовірність та рівень значущості доповнюють одне одного до 1 (або 100%) і визначають надійність статистичного твердження.

За допомогою довірчого інтервалу можна оцінити не тільки генеральну середню, але й інші невідомі параметри генеральної сукупності.

Для оцінки *генеральної середньої* або математичного сподівання a ($M(\tilde{X}) = a \approx \overline{X} \Rightarrow P\left(\left|\tilde{X} - a\right| < \Delta\right) \approx \overline{X}$) нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою середньою* $\widetilde{X}$ *з відомим середнім квадратичним відхиленням* σ *генеральної сукупності (на практиці – при великому обсязі вибірки, тобто при* $n \geq 30$*) та власне-випадковому повторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\widetilde{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \widetilde{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2 \cdot \Phi(t) = \gamma ,$$

де t визначається за таблицею функції Лапласа (додаток 2) із співвідношення $2 \cdot \Phi(t) = \gamma$; σ – середнє квадратичне відхилення; n - об'єм вибірки; $\Delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Для оцінки математичного сподівання а (генеральної середньої) нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою середньою* $\widetilde{X}$ *з відомим середнім квадратичним відхиленням* σ *генеральної сукупності (при великому обсязі вибірки, тобто при* $n \geq 30$*) та власне-випадковому безповторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\widetilde{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < \overline{X} < \widetilde{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}) = 2 \cdot \Phi(t) = \gamma;$$

$$\Delta = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} .$$

Для оцінки математичного сподівання а (генеральної середньої) нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою середньою* $\widetilde{X}$ *з невідомим середнім квадратичним відхиленням* σ *генеральної сукупності (на практиці – при малому обсязі вибірки, тобто при* $n < 30$*) та власне-випадковому повторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\widetilde{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \widetilde{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 2 \cdot S(t) = \gamma ,$$

де t визначається за таблицею Стьюдента (додаток 5) за надійністю γ та числом ступенів свободи $k = n - 1$; S – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення; n - об'єм вибірки; $\Delta = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$.

Для оцінки математичного сподівання a (генеральної середньої) нормально розподіленої кількісної ознаки X за вибірковою середньою $\tilde{X}$ *з невідомим середнім квадратичним відхиленням* σ *генеральної сукупності (при малому обсязі вибірки, тобто при* $n < 30$*) та власне-випадковому безповторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\tilde{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} < \overline{X} < \tilde{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}) = 2 \cdot S(t) = \gamma,$$

$$\Delta = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}}.$$

Для оцінки *генеральної частки p* нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою часткою* $\omega = \frac{m}{n}$ *(при великому обсязі вибірки, тобто при* $n \geq 30$*) та власне-випадковому повторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1 - \omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1 - \omega)}{n}}) = 2 \cdot \Phi(t) = \gamma,$$

де t визначається за таблицею функції Лапласа (додаток 2) із співвідношення $2 \cdot \Phi(t) = \gamma$; ω – вибіркова частка; n – об'єм вибірки; $\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1 - \omega)}{n}}$.

Для оцінки *генеральної частки p* нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою часткою* $\omega = \frac{m}{n}$ *(при великому обсязі вибірки, тобто при* $n \geq 30$*) та власне-випадковому безповторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1 - \omega)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1 - \omega)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}) = 2 \cdot \Phi(t) = \gamma,$$

$$\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1 - \omega)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

Для оцінки *генеральної частки p* нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою часткою* $\omega = \frac{m}{n}$ *(при малому обсязі вибірки, тобто при* $n < 30$*)* *та власне-випадковому повторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n}} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n}}) = 2 \cdot S(t) = \gamma,$$

де t визначається за таблицею Стьюдента (додаток 5) при рівні значущості $\alpha = 1 - \gamma$ та числом ступенів свободи $k = n - 1$; $\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n}}$.

Для оцінки *генеральної частки p* нормально розподіленої кількісної ознаки X *за вибірковою часткою* $\omega = \frac{m}{n}$ *(при малому обсязі вибірки, тобто при* $n < 30$*)* *та власне-випадковому безповторному відборі* матимемо формулу:

$$P(\omega - t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)} < p < \omega + t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}) = ,$$

$$= 2 \cdot S(t) = \gamma$$

$$\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n} \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}.$$

Довірчий інтервал з надійністю γ для дисперсії випадкової величини X з невідомим законом розподілу:

$$S^2 - Z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot S^2 < D(X) < S^2 + Z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot S^2,$$

де $\Phi(Z_j) = \frac{\gamma}{2}$.

Довірчий інтервал з надійністю γ для дисперсії нормально розподіленої випадкової величини X:

$$\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, n-1}} < D(X) < \frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, n-1}},$$

де $\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2},n-1}$; $\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2},n-1}$ – значення, взяті з таблиці розподілу χ^2 (див. додаток 4).

Приклад 7. За допомогою власне-випадкового повторного відбору керівництво фірми провело вибіркове обстеження 900 своїх службовців. Середній стаж їхньої роботи на фірмі становить 8,70 року, а середнє квадратичне (стандартне) відхилення – 2,70 року. Серед обстежених виявилось 270 жінок. Вважаючи стаж роботи службовців фірми розподіленим за нормальним законом, знайти: а) з імовірністю 0,95 довірчий інтервал, в якому виявиться середній стаж роботи всіх службовців фірми; б) з імовірністю 0,90 довірчий інтервал, що покриває невідому частку жінок в усьому колективі фірми.

Розв'язування:

▼ 1) За умовою задачі вибіркове обстеження проведене за допомогою власне-випадкового повторного відбору. Обсяг вибірки $n = 900$ одиниць, тобто вибірка велика.

а) Знайдемо межі довірчого інтервалу середнього стажу роботи всього колективу фірми, тобто межі довірчого інтервалу для генеральної середньої. За умовою $\tilde{X} = 8{,}70;\ \sigma = 2{,}70;\ n = 900;\ \gamma = 0{,}95$. Використаємо формулу $P(\tilde{X} - t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \tilde{X} + t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\cdot\Phi(t) = \gamma$. Знайдемо t із співвідношення $2\cdot\Phi(t) = \gamma$: $2\cdot\Phi(t) = 0{,}95;\ \Phi(t) = \frac{0.95}{2} = 0{,}475$. За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо $t = 1{,}96$. Далі знайдемо граничну похибку вибірки

$$\Delta = t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \Delta = 1{,}96\cdot\frac{2{,}7}{\sqrt{900}} = 1{,}96\cdot 0{,}09 = 0{,}1764.$$

$$\tilde{X} - \Delta < \overline{X} < \tilde{X} + \Delta;\ 8{,}70 - 0{,}1764 < \overline{X} < 8{,}70 + 0{,}1764;\ 8{,}5236 < \overline{X} < 8{,}8764.$$

З імовірністю 0,95 можна чекати, що середній стаж роботи всього колективу фірми знаходиться в інтервалі від 8,5236 до 8,8764 року.

б) Оцінимо істинне значення частки жінок в усьому колективі фірми.

За умовою $m = 270;$ $n = 900;$ $\gamma = 0.90$. Вибіркова частка $\omega = \frac{270}{900} = 0{,}30$.

Використаємо формулу

$$P(\omega - t\cdot\sqrt{\frac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)} < p < \omega + t\cdot\sqrt{\frac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}) = .$$

$$= 2\cdot\Phi(t) = \gamma$$

Знайдемо t із співвідношення $2\cdot\Phi(t) = \gamma$: $2\cdot\Phi(t) = 0{,}90;$

$\Phi(t) = \frac{0{,}90}{2} = 0{,}45$. За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо $t = 1{,}64$. Граничну похибку вибірки знайдемо за формулою

$$\Delta = t\cdot\sqrt{\frac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}};\ \ \Delta = 1{,}64\cdot\sqrt{\frac{0{,}30\cdot(1-0{,}30)}{900}} = 1{,}64\cdot 0{,}0153 = 0{,}0251.$$

$\omega - \Delta < p < \omega + \Delta;$ $0.30 - 0.0251 < p < 0.30 + 0.0251;$ $0.2749 < p < 0.3251.$

Отож, з імовірністю 0,90 можна чекати, що частка жінок в усьому колективі фірми знаходиться в інтервалі від 0,2749 до 0,3251. ▲

Приклад 8. Змінимо умову прикладу 7.

1) За допомогою власне-випадкового повторного відбору визначається середній стаж роботи службовців фірми. Припускається, що він підкоряється нормальному закону. Яким має бути обсяг вибірки, щоб з довірчою ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що, приймаючи отриманий середній стаж роботи за істинний, допускається похибка, яка не перевищує 0,50 року, якщо стандартне відхилення $\sigma = 2{,}70$ року? 2) Яким має бути обсяг власне-випадкової повторної вибірки, щоб з надійністю 0,90 можна було стверджувати, що максимальне відхилення вибіркової частки жінок у вибірці від частки жінок в усьому колективі фірми не перевищувало 0,05, якщо під час минулого аналогічного дослідження вибіркова частка жінок виявилася рівною 0,30?

Розв'язування:

▼ У цій задачі потрібно знайти необхідну чисельність вибірки. Її розрахунок дає відповідь на питання: „Скільки потрібно обстежити одиниць сукупності, щоб з наперед заданою ймовірністю не перевищити наперед заданої похибки?".

1) Дано: $\Delta = 0{,}50$; $\sigma = 2{,}70$; $\gamma = 0{,}95$.

За умовою задачі потрібно знайти необхідну чисельність вибірки для середньої при повторному відборі. Скористаємось формулою розрахунку необхідної чисельності вибірки для середньої при власне-випадковому повторному відборі: $n = \dfrac{t^2 \cdot \sigma^2}{\Delta^2}$.

Невідоме значення t знайдемо із співвідношення $2 \cdot \Phi(t) = \gamma$: $2 \cdot \Phi(t) = 0{,}95$; $\Phi(t) = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо $t = 1{,}96$.

Тоді необхідна чисельність вибірки становить $n = \dfrac{1{,}96^2 \cdot 2{,}7^2}{0{,}5^2} = 112{,}02$.

Оскільки n – ціле число, округлимо отриманий результат до більшого цілого, враховуючи, що необхідно не перевищувати задану похибку.

Отож, потрібно обстежити не менше 113 службовців.

2) Дано: $\Delta = 0{,}05$; $\omega = 0{,}302{,}70$; $\gamma = 0{,}90$.

За умовою задачі потрібно знайти необхідну чисельність вибірки для частки при власне-випадковому повторному відборі. Скористаємось формулою розрахунку необхідної чисельності вибірки для частки при власне-випадковому повторному відборі: $n = \dfrac{t^2 \cdot \omega \cdot (1-\omega)}{\Delta^2}$.

Знайдемо t із співвідношення

$2\cdot\Phi(t)=\gamma$: $2\cdot\Phi(t)=0{,}90$; $\Phi(t)=\dfrac{0{,}90}{2}=0{,}45$. За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо $t=1{,}64$.

Розрахуємо необхідну чисельність вибірки:

$$n=\frac{1{,}64^2\cdot 0{,}3\cdot(1-0{,}3)}{0{,}05^2}=225{,}93.$$

Оскільки n – ціле число, округлимо отриманий результат до більшого цілого, враховуючи, що необхідно не перевищувати задану похибку.

Отож, $n=226$. ▲

Приклад 9. Власник автостоянки боїться нещирості своїх службовців (охорони автостоянки). Протягом року (365 днів) власником автостоянки проведено 40 перевірок. За даними перевірок середня кількість автомобілів, що залишаються на ніч під охороною, становить 400 одиниць, а середнє квадратичне (стандартне) відхилення їх кількості – 10 автомобілів. Вважаючи відбір власне-випадковим, з імовірністю 0,99 оцінити за допомогою довірчого інтервалу істинну середню кількість автомобілів, що залишаються на ніч під охороною. Чи обгрунтовані побоювання власника автостоянки, якщо за звітністю охоронців середня кількість автомобілів, що залишаються на ніч під охороною, становить 395 автомобілів?

Розв'язування:

▼ За умовою задачі вибіркове обстеження проведене за допомогою власне-випадкового відбору. Очевидно, що відбір – безповторний, тому що немає сенсу проводити перевірку більше одного разу на добу. Обсяг вибірки $n=40$, що більше 30 одиниць, тобто вибірка велика. Обсяг генеральної сукупності $N=365$.

Знайдемо межі довірчого інтервалу для оцінки середньої кількості автомобілів, залишених під охороною, тобто межі довірчого інтервалу для генеральної середньої.

За умовою $\widetilde{X}=400$; $\sigma=10$; $n=40$; $\gamma=0{,}99$; $N=365$. Використаємо формулу

$$P(\tilde{X}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}}<\overline{X}<\tilde{X}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}})=2\cdot\Phi(t)=\gamma.$$

Знайдемо t із співвідношення

$$2\cdot\Phi(t)=\gamma:\quad 2\cdot\Phi(t)=0{,}99;\quad \Phi(t)=\frac{0{,}99}{2}=0{,}495\,.$$

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) знайдемо $t=2{,}58$. Граничну похибку вибірки підрахуємо за формулою $\Delta=t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}}$;

$$\Delta=2{,}58\cdot\frac{10}{\sqrt{40}}\cdot\sqrt{1-\frac{40}{365}}=3{,}8493.$$

$\tilde{X}-\Delta<\overline{X}<\tilde{X}+\Delta;$ $400-3{,}8493<\overline{X}<400+3.8493;$ $396{,}1507<$
$<\overline{X}<403{,}8493.$

З упевненістю в 99% можна чекати, що середня кількість автомобілів, залишених під охороною, знаходиться в інтервалі від 396 до 404. Отож, можна стверджувати, що службовці автостоянки вводять в оману її власника. ▲

Приклад 10. В 24 із 40 перевірок кількість автомобілів на автостоянці не перевищувала 400 одиниць. З імовірністю 0,98 знайти довірчий інтервал для оцінки істинної частки днів протягом року, коли кількість залишених на автостоянці автомобілів не перевищувала 400 одиниць.

Розв'язування:

▼ Знайдемо межі довірчого інтервалу для частки днів протягом року, коли кількість залишених на автостоянці автомобілів не перевищувала 400 одиниць.

За умовою $m=24;$ $n=40;$ $\gamma=0{,}98.$

Вибіркова частка $\omega=\frac{24}{40}=0{,}60$. Оскільки

$P(\omega-t\cdot\sqrt{\frac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)}<p<\omega+t\cdot\sqrt{\frac{\omega\cdot(1-\omega)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)})=2\cdot\Phi(t)=\gamma$, то

знайдемо t із співвідношення

$2 \cdot \Phi(t) = \gamma$: $2 \cdot \Phi(t) = 0{,}98$; $\Phi(t) = \frac{0{,}98}{2} = 0{,}49$. За таблицею функції Лапласа (додаток 2) $t = 2{,}33$.

Знайдемо граничну похибку вибірки:

$\Delta = t \cdot \sqrt{\frac{\omega \cdot (1-\omega)}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$; $\Delta = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot (1-0{,}6)}{40}\left(1 - \frac{40}{365}\right)} = 0{,}1703.$

$\omega - \Delta < p < \omega + \Delta$; $0{,}6 - 0.1703 < p < 0{,}6 + 0{,}1703$; $0{,}4297 < p < 0{,}7703$.

Отже, з імовірністю 0,98 можна чекати, що частка днів протягом року, коли кількість залишених на стоянці автомобілів не перевищувала 400 одиниць, знаходиться в інтервалі від 0,4297 до 0,7703. ▲

Приклад 11. Змінимо умову прикладу 9.

За допомогою власне-випадкового безповторного відбору визначається середня кількість автомобілів, які залишаються на ніч під охороною. Припускається, що вона підкоряється нормальному закону. Яким має бути обсяг вибірки, щоб з імовірністю 0,95 можна було стверджувати, що коли приймається отримана середня кількість автомобілів у вибірці за істинну, допускається похибка, яка не перевищує 3 автомобілі, якщо середнє квадратичне відхилення $\sigma = 10$ автомобілів?

Розв'язування:

▼ Дано: $\Delta = 3$; $\sigma = 10$; $\gamma = 0{,}95$; $N = 365$. Скористаємося формулою розрахунку необхідної чисельності вибірки для середньої при власне-випадковому безповторному відборі: $n = \frac{t^2 \cdot \sigma^2 \cdot N}{N \cdot \Delta^2 + t^2 \cdot \sigma^2}$.

Знайдемо t із співвідношення

$2 \cdot \Phi(t) = \gamma \to$ $2 \cdot \Phi(t) = 0{,}95$; $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$.

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) $t = 1{,}96$.

Розрахуємо обсяг вибірки:

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 10^2 \cdot 365}{365 \cdot 3^2 + 1{,}96^2 \cdot 10^2} = 38{,}22 .$$

Оскільки n – ціле число, округлимо отриманий результат до більшого цілого, враховуючи, що необхідно не перевищувати задану похибку.

Отож, необхідно провести не менше 39 перевірок. ▲

Приклад 12. Змінимо умову прикладу 9.

Яким має бути обсяг власне-випадкової безповторної вибірки, щоб із ймовірністю 0,90 можна було стверджувати, що максимальне відхилення вибіркової частки днів від частки днів протягом року (коли середня кількість залишених на охорону автомобілів не перевищувала 400 одиниць) не перевищує 0,10, якщо за даними минулих перевірок вибіркова частка таких днів складала 0,60?

Розв'язування:

▼ Дано: $\Delta = 0{,}10$; $\omega = 0{,}60$; $\gamma = 0{,}90$; $N = 365$. Скористаємось формулою розрахунку необхідної чисельності вибірки для частки при власне-випадковому безповторному відборі:

$$n = \frac{t^2 \cdot N \cdot \omega \cdot (1-\omega)}{N \cdot \Delta^2 + t^2 \omega (1-\omega)} .$$

Знайдемо t із співвідношення : $2 \cdot \Phi(t) = \gamma$

У нас $2 \cdot \Phi(t) = 0{,}90$. Звідси $\Phi(t) = \frac{0{,}90}{2} = 0{,}45$.

За таблицею функції Лапласа (додаток 2) $t = 1{,}64$. Розрахуємо обсяг вибірки:

$$n = \frac{1{,}64^2 \cdot 365 \cdot 0{,}60 \cdot (1-0{,}60)}{365 \cdot 0{,}10^2 + 1{,}64^2 \cdot 0{,}60 \cdot (1-0{,}60)} = 54{,}85 .$$

Оскільки n – ціле число, округлимо отриманий результат до більшого цілого, враховуючи, що необхідно не перевищувати задану похибку.

Отже, для того, щоб з імовірністю 0,90 та граничною похибкою 0,10 за допомогою власне-випадкового безповторного відбору визначити шукану частку днів протягом року, потрібно провести не менше 55 перевірок. ▲

Приклад 13. Служба контролю «Енергозбуту» провела вибіркову перевірку витрат електроенергії жителями одного з багатоквартирних будинків. За допомогою власне-випадкового відбору вибрали 10 квартир і визначили витрати електроенергії протягом одного з літніх місяців (кВт*год): 125; 78; 102; 140; 90; 45; 50; 125; 115; 112.

З імовірністю 0,95 визначте довірчий інтервал для оцінки середніх витрат електроенергії на 1 квартиру в усьому будинку за умови, що в будинку 70 квартир, а відбір був: а) повторним; б) безповторним.

Розв'язування:

▼ За умовою задачі вибіркове обстеження проведене за допомогою власне-випадкового відбору. Обсяг вибірки $n = 10$ одиниць, тобто вибірка мала.

а) Вважаючи відбір повторним, знайдемо довірчий інтервал для оцінки середніх витрат електроенергії на одну квартиру в усьому будинку, тобто межі довірчого інтервалу для оцінки генеральної середньої.

Для цього використаємо формули:

$$P(\tilde{X} - t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \tilde{X} + t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}) = 2 \cdot S(t) = \gamma \quad , \Delta = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Щоб визначити межі довірчого інтервалу необхідно розрахувати вибіркову середню та середнє квадратичне відхилення (стандартне).

Розрахуємо вибіркову середню арифметичну:

$$\tilde{X} = \frac{125 + 78 + 102 + 140 + 90 + 45 + 50 + 125 + 115 + 112}{10} = \frac{982}{10} = 98{,}2$$ Зн

айдемо виправлену вибіркову дисперсію:

$$S^2 = \frac{(125 - 98{,}2)^2 + (78 - 98{,}2)^2 + (102 - 98{,}2)^2 + (140 - 98{,}2)^2 + (90 - 98{,}2)^2}{10 - 1} +$$

$$+ \frac{(45 - 98{,}2)^2 + (50 - 98{,}2)^2 + (125 - 98{,}2)^2 + (115 - 98{,}2)^2 + (112 - 98{,}2)^2}{10 - 1} =$$

$$= 1033{,}2889$$

Знайдемо виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{1033{,}2889}=32{,}1448$.

Дано: $\tilde{X}=98{,}2;\ S=32{,}1448;\ n=10;\ \gamma=0{,}95$. За таблицею Стьюдента (додаток 5) знайдемо t за рівнем значущості $\alpha=1-\gamma=1-0{,}95=0{,}05$ та числом ступенів свободи $k=n-1=10-1=9$: $t_{\alpha=0{,}05;k=9}=2{,}26$. Знайдемо граничну похибку вибірки: $\Delta=t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}$; $\Delta=2{,}26\cdot\frac{32{,}1448}{\sqrt{10}}=22{,}9731$.

$\tilde{X}-\Delta<\overline{X}<\tilde{X}+\Delta;\ 98{,}2-22{,}9731<\overline{X}<98{,}2+22{,}9731;$ Отож, за умови, $75{,}2269<\overline{X}<121{,}1731$.
що відбір квартир був повторним, з імовірністю 0,95 можна чекати, що середні витрати електроенергії на одну квартиру в усьому домі знаходяться в інтервалі від 75,2269 до 121,1731 $кВт\cdot год$.

б) Знайдемо межі довірчого інтервалу для оцінки середніх витрат електроенергії на одну квартиру в усьому домі, вважаючи відбір безповторним.

Для цього використаємо формули:

$$P(\tilde{X}-t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}}<\overline{X}<\tilde{X}+t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}})=2\cdot S(t)=\gamma\quad;$$

$$\Delta=t\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{1-\frac{n}{N}}.$$

За умовою:

$\tilde{X}=98{,}2;\ S=32{,}1448;\ n=10;\ \gamma=0{,}95;$

$t_{\alpha=0{,}05;k=9}=2{,}26;\ N=70$

Знайдемо граничну похибку вибірки:

$$\Delta=2{,}26\cdot\frac{32{,}1448}{\sqrt{10}}\cdot\sqrt{1-\frac{10}{70}}=21{,}2689.$$

$\tilde{X}-\Delta<\overline{X}<\tilde{X}+\Delta$; $98{,}2-21{,}2689<\overline{X}<98{,}2+21{,}2689$; $76{,}9311<$
$<\overline{X}<119{,}4689$.

Отож, за умови, що відбір квартир був безповторним, з імовірністю 0,95 можна чекати, що середні витрати електроенергії на одну квартиру в усьому домі знаходяться в інтервалі від 76,9311 до 119,4689 *кВт·год* ▲.

3. Перевірка статистичних гіпотез

У процесі статистичного аналізу інколи буває необхідно сформулювати і перевірити припущення (гіпотези) відносно величини незалежних параметрів або закону розподілу досліджуваної генеральної сукупності (сукупностей). Наприклад, дослідник висуває гіпотезу про те, що "вибірка вилучена з нормальної генеральної сукупності" або "генеральні середні двох досліджуваних сукупностей рівні".

Співставлення висунутої гіпотези щодо генеральної сукупності за вибірковими даними, яке супроводжується кількісною оцінкою ступеня достовірності отримуваного результату і здійснюється за допомогою того чи іншого статистичного критерію, називається ***перевіркою статистичних гіпотез.***

Висунута гіпотеза називається ***нульовою (основною).*** Її прийнято позначати H_0.

По відношенню до висунутої (основної) гіпотези завжди можна сформулювати ***альтернативну (конкуруючу)***, таку, що їй протирічить. Альтернативну (конкуруючу) гіпотезу прийнято позначати H_1.

Мета статистичної перевірки гіпотез полягає в тому, щоб на основі вибіркових даних прийняти рішення про справедливість основної гіпотези H_0.

Якщо висунута гіпотеза зводиться до твердження про те, що значення деякого невідомого параметра генеральної сукупності рівне заданій величині, то ця гіпотеза називається ***простою.*** Наприклад: "Середньодушовий сукупний дохід населення України складає 850 грн. на місяць"; "Рівень безробітності (частка безробітних серед загального числа економічно активного населення) в Україні рівний 9 %". В інших випадках гіпотеза називається ***складною***.

В якості нульової гіпотези H_0 прийнято висувати просту гіпотезу, тому що зазвичай буває зручніше перевіряти більш строге твердження.

За своїм змістом статистичні гіпотези можна розділити на декілька основних типів:

- гіпотези про вид закону розподілу досліджуваної випадкової величини;
- гіпотези про числові значення параметрів досліджуваної генеральної сукупності;
- гіпотези про однорідність двох чи декількох вибірок або деяких характеристик досліджуваних сукупностей;
- гіпотези про рівність числових характеристик генеральних сукупностей; та інші.

Так як перевірка статистичних гіпотез здійснюється на підставі вибіркових даних, тобто обмеженого ряду спостережень, рішення відносно нульової гіпотези H_0 мають ймовірнісний характер. Іншими словами, таке рішення неминуче супроводжується деякою, хоча, можливо, і дуже малою, ймовірністю помилкового висновку у той чи інший бік.

Так, в якійсь незначній частці випадків α нульова гіпотеза H_0 може виявитися відхиленою, тоді як дійсно в генеральній сукупності вона є справедливою. Таку помилку називають ***помилкою 1-го роду,*** а її ймовірність – ***рівнем значущості*** і позначають α .

Навпаки, в якійсь невеликій частці випадків β нульова гіпотеза H_0 приймається, тоді як насправді в генеральній сукупності вона помилкова, а справедливою є альтернативна гіпотеза H_1. Таку помилку називають ***помилкою 2-го роду***. Ймовірність помилки 2-го роду позначають β . Ймовірність 1 - β називають ***потужністю критерію***.

При фіксованому обсязі вибірки можна вибрати на свій розсуд величину ймовірності тільки однієї з помилок α чи β . Збільшення ймовірності однієї з них призводить до зменшення іншої. Прийнято задавати ймовірність помилки 1-го роду α – рівень значущості. Як правило, користуються деякими стандартними значеннями рівня значущості α : 0,1; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005; 0,001. Тоді, очевидно, з двох критеріїв, які характеризуються однією і тією ж ймовірністю α (відхилити правильну в дійсності гіпотезу H_0), слід прийняти той, якому відповідає менша помилка 2-го роду β, тобто більша потужність. Зниження ймовірностей обох помилок α і β можна досягти за рахунок збільшення обсягу вибірки.

Правильне рішення щодо нульової гіпотези H_0 також може бути двох видів:

- буде прийнята нульова гіпотеза H_0, коли в генеральній сукупності правильною є нульова гіпотеза H_0; ймовірність такого рішення 1 - α ;

- нульова гіпотеза H_0 буде відхилена на користь альтернативної H_1, коли в генеральній сукупності нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь альтернативної H_1; ймовірність такого рішення 1- β - *потужність критерію.*

Результати рішення щодо нульової гіпотези можна проілюструвати за допомогою наступної таблиці:

Нульова гіпотеза H_0	Результати рішення щодо нульової гіпотези H_0	
	Відхилена	Прийнята
Правильна	Помилка 1-го роду, її ймовірність $P(H_1 / H_0) = \alpha$	Правильне рішення, його ймовірність $P(H_0 / H_0) = 1 - \alpha$
Неправильна	Правильне рішення, його ймовірність $P(H_1 / H_1) = 1 - \beta$	Помилка 2-го роду, її ймовірність $P(H_0 / H_0) = \beta$

Перевірка статистичних гіпотез здійснюється за допомогою *статистичного критерію* (назвемо його в загальному вигляді K), що є функцією від результатів спостереження.

Статистичний критерій – це правило (формула), за якою визначається міра розбіжності результатів вибіркового спостереження з висунутою гіпотезою H_0.

Статистичний критерій, як і будь-яка функція від результатів спостереження, є випадковою величиною і в припущенні щодо справедливості нульової гіпотези H_0 підпорядкований деякому добре вивченому теоретичному закону розподілу з щільністю ймовірностей $f(k)$.

Вибір критерію для перевірки статистичних гіпотез можна здійснити на підставі різних принципів. Частіше для цього користуються *принципом відношення правдоподібності*, який дає змогу побудувати критерій, найбільш потужний серед можливих критеріїв. Суть його зводиться до вибору такого критерію K з відомою функцією щільності $f(k)$ за умови справедливості гіпотези H_0, щоб при заданому рівні значущості α можна було знайти критичну точку $K_{кр}$ розподілу $f(k)$, яка розділила б область значень критерію на дві частини: область допустимих значень, в якій результати вибіркового спостереження виглядають найбільш правдоподібними, і критичну область, в якій результати вибіркового спостереження виглядають менш правдоподібними щодо нульової гіпотези H_0.

Якщо такий критерій K вибраний, і відома щільність його розподілу, то завдання перевірки статистичної гіпотези зводиться до того, щоб при заданому рівні значущості α розрахувати за вибірковими даними спостереження значення критерію $K_{спост}$ і визначити, чи є воно найбільш або найменш правдоподібним по відношенню до нульової гіпотези H_0.

Перевірка кожного типу статистичних гіпотез здійснюється за допомогою відповідного критерію, що є найбільш потужним у кожному конкретному випадку. Наприклад, перевірку гіпотези про вигляд закону розподілу випадкової величини можна здійснити за допомогою критерію згоди Пірсона χ^2; перевірка гіпотези про рівність невідомих значень дисперсій двох генеральних сукупностей – за допомогою критерію Фішера F; ряд гіпотез про невідомі значення параметрів генеральних сукупностей перевіряються за допомогою критерію Z – нормально розподіленої випадкової величини та критерію t – Стьюдента і т. і.

Значення критерію, що розраховується за спеціальними правилами на підставі вибіркових даних,називається ***спостережуваним значенням критерію*** ($K_{спост.}$).

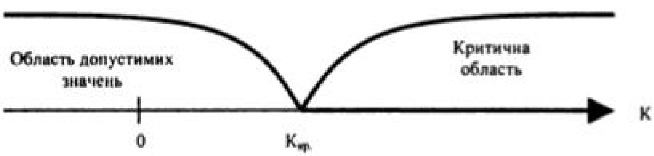
Значення критерію, які розділяють сукупність значень критерію на область допустимих значень (найбільш правдоподібних по відношенню до нульової гіпотези H_0) та критичну область (область значень менш правдоподібних по відношенню до нульової гіпотези H_0) і визначаються при заданому рівні значущості α за таблицями розподілу випадкової величини K, вибраної як критерій, називаються ***критичними точками*** ($K_{кр}$).

Областю допустимих значень (областю прийняття нульової гіпотези H_0) називають сукупність значень критерію K, при яких нульова гіпотеза H_0 не відхиляється.

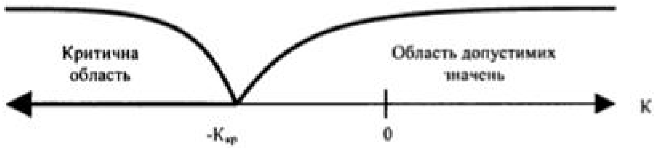
Критичною областю називають сукупність значень критерію K, при яких нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь конкуруючої H_1.

Розрізняють *односторонню* (правосторонню або лівосторонню) та *двосторонню* критичні області.

Якщо конкуруюча гіпотеза – правостороння, наприклад, $H_1 : a > a_0$, то й критична область – *правостороння*. При правосторонній конкуруючій гіпотезі критична точка ($K_{кр.п.}$) набуває додатних значень.



Якщо конкуруюча гіпотеза – лівостороння, наприклад, $H_1 : a < a_0$, то й критична область – *лівостороння*. При лівосторонній конкуруючій гіпотезі критична точка ($K_{кр.л.}$) набуває від'ємних значень.



Якщо конкуруюча гіпотеза – двостороння, наприклад, $H_1 : a \neq a_0$, то й критична область – *двостороння*. При двосторонній конкуруючій гіпотезі визначаються 2 критичні точки ($K_{кр.л.}$ та $K_{кр.п.}$).

Основний принцип перевірки статистичних гіпотез полягає в такому:

- якщо спостережуване значення критерію ($K_{спост.}$) належить критичній області, то нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь конкуруючої H_1;

- якщо спостережуване значення критерію ($K_{спост.}$) належить області допустимих значень, то нульова гіпотеза H_0 не відхиляється;

Можна прийняти рішення щодо нульової гіпотези H_0 шляхом порівняння спостережуваного ($K_{спост.}$) та критичного значення критерію ($K_{кр.}$).

При правосторонній конкуруючій гіпотезі:

- якщо $K_{спост.} \leq K_{кр.}$, то нульову гіпотезу H_0 не відхиляють;

- якщо $K_{спост.} > K_{кр.}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь конкуруючої H_1.

При лівосторонній конкуруючій гіпотезі:

- якщо $K_{спост.} \geq -K_{кр.}$, то нульову гіпотезу H_0 не відхиляють;

- якщо $K_{спост.} < -K_{кр.}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь конкуруючої H_1.

При двосторонній конкуруючій гіпотезі:

- якщо $-K_{кр.} \leq K_{спост.} \leq K_{кр.}$, то нульову гіпотезу H_0 не відхиляють;

- якщо $K_{спост.} > K_{кр.}$ або $K_{спост.} < -K_{кр.}$, то нульову гіпотезу H_0 відхиляють на користь конкуруючої H_1.

Алгоритм перевірки статистичних гіпотез зводиться до такого:

1) сформулювати нульову H_0 та альтернативну H_1 гіпотези;
2) вибрати рівень значущості α;
3) у відповідності з видом висунутої нульової гіпотези H_0 обрати статистичний критерій для її перевірки, тобто – спеціально підібрану випадкову величину K, точний або наближений розподіл якої наперед відомий;
4) за таблицями розподілу випадкової величини K, обраної як статистичний критерій, знайти критичне значення $K_{кр.}$ (критичну точку або точки);
5) на основі вибіркових даних за спеціальним алгоритмом обчислити спостережуване значення критерію $K_{спост.}$;
6) за видом конкуруючої гіпотези H_1 визначити тип критичної області;
7) визначити, в яку область (допустимих значень чи критичну) потрапляє спостережуване значення критерію $K_{спост.}$, і залежно від цього – прийняти рішення щодо нульової гіпотези H_0.

Якщо навіть нульову гіпотезу H_0 не можна відхилити, то це ще не означає, що висловлене припущення про генеральну сукупність є єдиним підходящим, просто йому не протирічать отримані вибіркові дані; однак таку саму властивість разом з висунутою гіпотезою можуть мати й інші гіпотези.

Результати перевірки нульової гіпотези можна інтерпретувати таким чином:

- якщо в результаті перевірки нульову гіпотезу H_0 не можна відхилити, то це означає, що отримані вибіркові дані не дають змогу з достатньою впевненістю відхилити нульову гіпотезу H_0, ймовірність нульової гіпотези H_0 більша α, а конкуруючої H_1 — менша $1-\alpha$;

- якщо в результаті перевірки нульова гіпотеза H_0 відхиляється на користь конкуруючої H_1, то отримані вибіркові дані не дають змогу з достатньою впевненістю прийняти нульову гіпотезу H_0, ймовірність нульової гіпотези H_0 менша α, а конкуруючої H_1 — більша $1-\alpha$.

Критерій узгодженості Пірсона. Цей критерій найчастіше використовується на практиці. Мірою розбіжності U береться величина χ^2, рівна сумі квадратів відхилень частостей (статистичних ймовірностей) ω_i від гіпотетичних p_i, які розраховані для передбачуваного розподілу і взяті з деякими вагами c_i:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \cdot (\omega_i - p_i)^2.$$

Ваги c_i вводяться таким чином, щоб при одних і тих самих відхиленнях $(\omega_i - p_i)^2$ більшу вагу мали відхилення, при яких p_i мала, а меншу вагу – при яких p_i велика. Очевидно, цього вдається досягти, якщо взяти c_i обернено пропорційними ймовірностям p_i. Взявши як ваги $c_i = \dfrac{n}{p_i}$, можна довести, що при $n \to \infty$ статистика

$U = \chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{n}{p_i} \cdot (\omega_i - p_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{(n_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$ має χ^2 – розподіл з $k = m - r - 1$ ступенями свободи, m — число інтервалів емпіричного розподілу (варіаційного ряду); r — число параметрів теоретичного розподілу, обчислених за експериментальними даними.

Числа $n_i = n \cdot w_i$ та $n \cdot p_i$ називаються відповідно емпіричними та теоретичними частотами.

Схема застосування критерію χ^2:

1. Знайти міру розбіжності емпіричних та теоретичних частот χ^2 за формулою $U = \chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$.

2. Для обраного рівня значущості α за таблицею χ^2 - розподілу (див. додаток 4) знаходять критичне значення $\chi^2_{\alpha;k}$ з числом ступенів свободи $k = m - r - 1$.

3. Якщо спостережуване значення χ^2 більше від критичного, то гіпотезу H_0 відхиляють, а якщо навпаки – гіпотеза H_0 не протирічить дослідним даним.

Статистика $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{(n_i - np_i)^2}{n \cdot p_i}$ має χ^2 – розподіл тільки $n \to \infty$, тому необхідно, щоб у кожному інтервалі була достатня кількість спостережень, у крайньому випадку 5 спостережень. Якщо в якомусь інтервалі число спостережень $n_i < 5$, доцільно об'єднати сусідні інтервали, щоб у об'єднаних інтервалах n_i було не менше 5.

Критерій узгодженості Колмогорова. На практиці, окрім критерію χ^2, часто використовують критерій Колмогорова, в якому як міру розбіжності між теоретичним та емпіричним розподілами розглядають максимальне значення абсолютної величини різниці між емпіричною функцією розподілу $F^*(X)$ і відповідною теоретичною функцією розподілу $D = \max\left|F^*(X) - F(X)\right|$, яке називають *статистикою критерію Колмогорова.*

Доведено, що яка б не була функція розподілу $F(X)$ неперервної випадкової величини X, при необмеженому збільшенні числа спостережень $(n \to \infty)$ ймовірність нерівності $P(D\sqrt{n} \ge \lambda)$ прямує до границі $P(\lambda) = 1 - \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$. Задаючи рівень значущості α, із співвідношення $P(\lambda_\alpha) = \alpha$ можна знайти відповідне критичне значення λ_α. В додатку 7 наводяться критичні значення λ_α критерію Колмогорова для деяких α.

Схема застосування критерію така:

1. Будується емпірична функція розподілу $F^*(X)$ та передбачувана теоретична функція розподілу $F(X)$.

2. Визначається міра розходження між теоретичним та емпіричним розподілом $D = \max|F^*(X) - F(X)|$ і обчислюється величина $\lambda = D\sqrt{n}$.

3. Якщо обчислене значення λ виявиться більшим від критичного λ_α, визначеного при рівні значущості α, то нульова гіпотеза H_0 про те, що випадкова величина X має заданий закон розподілу, відхиляється. Якщо $\lambda \le \lambda_\alpha$, то вважають, що гіпотеза H_0 не протирічить дослідним даним.

Перевагою критерію Колмогорова порівняно з критерієм χ^2 є можливість його застосування при дуже малих об'ємах вибірки $(n < 20)$, більш висока "чутливість", а отже менша трудомісткість підрахунків. Недоліком є те, що емпірична функція розподілу $F^*(X)$ має бути побудованою за незгрупованими вибірковими даними, що досить складно при великих об'ємах вибірки. Крім того, слід відмітити, що критерій Колмогорова можна застосовувати тільки у випадках, коли гіпотетичний розподіл відомий наперед із якихось теоретичних міркувань і коли відомий не тільки вид функції розподілу $F(X)$, але й параметри $\alpha_{1,\dots,}\alpha_k$, які входять до неї. Таке дуже рідко зустрічається на практиці. Звичайно, з теоретичних міркувань відомий лише загальний вид функції $F(X)$, а параметри, що входять до неї, визначаються за даним статистичним матеріалом. При застосуванні критерію χ^2 ці обставини враховуються за рахунок зменшення числа ступенів свободи розподілу k. Критерій Колмогорова таких поправок не передбачає. Якщо все ж таки застосовується даний критерій в таких випадках, коли параметри теоретичного розподілу ,визначаються за статистичними даними, критерій надає більше критичне значення λ_α; тому ми в ряді випадків ризикуємо застосувати як правдоподібну таку гіпотезу, яка дійсно погано узгоджується з дослідними даними.

Гіпотези про однорідність вибірок – це гіпотези про те, що розглядувані вибірки вилучені з однієї і тієї самої генеральної сукупності.

Нехай маємо дві незалежні вибірки, вилучені з генеральних сукупностей із невідомими теоретичними функціями розподілу $F_1(x)$ та $F_2(x)$. Висунута нульова гіпотеза має вигляд $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ проти конкуруючої $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$. Будемо припускати, що функції $F_1(x)$ та $F_2(x)$ неперервні.

Критерій Колмогорова-Смирнова. Порівнюються дві емпіричні функції розподілу. *Статистика критерію Колмогорова-Смирнова*:

$$\lambda' = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \max\left|F_1^*(x) - F_2^*(x)\right|,$$

де $F_1^*(x)$ та $F_2^*(x)$ - емпіричні функції розподілу, побудовані за двома вибірками об'ємом n_1 та n_2.

Гіпотеза H_0 відхиляється, якщо фактично спостережуване значення статистики λ' більше від критичного $\lambda'_{кр.}$, тобто $\lambda' > \lambda'_{кр.}$, а інакше – приймається.

При малих об'ємах вибірок $(n_1, n_2 \leq 20)$ критичні значення $\lambda'_{кр.}$ для заданих рівнів значущості критерію можна знайти в спеціальних таблицях. При $n_1, n_2 \to \infty$ (а практично при $n_1 \geq 50, n_2 \geq 50$) розподіл статистики λ' збігається до розподілу Колмогорова для статистики λ. Тому гіпотеза H_0 відхиляється при рівні значущості α, якщо фактично спостережуване значення λ' більше від критичного λ_α, а інакше – приймається.

Критерій Вілкоксона. Цей критерій служить для перевірки, чи відносяться дві вибірки до однієї й тієї самої генеральної сукупності; іншими словами, гіпотеза H_0 запевняє, що $F_X(x) \equiv F_Y(y)$. Відносно закону розподілу величин X, Y ніяких передбачень не робиться. Способи перевірки, при яких не робиться передбачень щодо розподілу генеральної сукупності, називаються способами, вільними від параметрів, на противагу параметричним критеріям. Значення $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}\}, \{y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}\}$ обох вибірок розподіляються разом у порядку їх зростання. Пара значень $(x_i;y_j)$ утворює *інверсію*, якщо $y_j < x_i$.

Нехай, наприклад, для $n_1 = 4$ та $n_2 = 5$ отримали таку послідовність: $y_5, x_3, x_4, y_1, y_2, x_2, y_4, y_3, x_1$. В нашому прикладі x_3 і x_4 утворюють по одній інверсії (з $y5$), y_2 утворює три інверсії (з y_5, y_1, y_2), а x_1 утворює п'ять інверсій (з усіма y).

Як критерій використовується величина U - повне число інверсій. Якщо гіпотеза правильна, значення U не повинне дуже відхилятися від свого математичного очікування $M_U = \frac{n_1 n_2}{2}$. Якщо величина розподілена за законом Вілкоксона, то від гіпотези H_0 відмовляються, якщо U більше від критичного значення U_α, взятого з таблиці Вілкоксона для заданого рівня значимості α (див. додаток 8). Для більших об'ємів вибірки (n_1 та n_2 більші 25) критичне значення U_α знаходиться за формулою

$$U_\alpha = Z_\alpha \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

де $Z_\alpha = \arg\Phi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$ — значення аргумента функції Лапласа, $\Phi(Z_\alpha) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Приклад 14. У 7 випадках з 10 фірма-конкурент компанії „А" діяла на ринку так, наче б то їй наперед були відомі рішення, які приймає фірма „А". При рівні значущості 0,05 визначте, чи випадково це, чи в фірмі „А" працює інформатор фірми-конкурента?

Розв'язування:

▼ Для того, щоб відповісти на поставлене питання, необхідно перевірити статистичну гіпотезу про те, чи співпадає даний емпіричний розподіл числа дій фірми-конкурента з рівномірним теоретичним розподілом?

Якщо кроки конкурента вибираються випадково, тобто в фірмі „А" немає інформатора, то число „правильних" і „неправильних" її дій має розподілитися порівну, тобто по 5, а це і є особливістю рівномірного розподілу.

Цей вид статистичних гіпотез належить до гіпотез про вид закону розподілу генеральної сукупності.

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези за умовою задачі.

$H_0 : X \approx R(a;b)$ — випадкова величина X підкоряється рівномірному розподілу з параметрами $(a;b)$ (в контексті задачі – „В фірмі „А" немає інформатора"; „Розподіл числа вдалих кроків фірми-конкурента - невипадковий").

Як критерій для перевірки статистичних гіпотез про невідомий закон розподілу генеральної сукупності використовується випадкова величина χ^2. Цей критерій називають *критерієм Пірсона*.

Його спостережуване значення ($\chi^2_{спост.}$) розраховується за формулою

$$\chi^2_{спост} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_{(емп.)i} - m_{(теор.)i})^2}{m_{(теор.)i}},$$

де $m_{(емп.)i}$ — емпірична частота і-ої групи вибірки; $m_{(теор.)i}$ - теоретична частота і-ої групи вибірки.

Складемо таблицю розподілу емпіричних та теоретичних частот:

$m_{(емп.)i}$	7	3
$m_{(теор.)i}$	5	5

Знайдемо спостережуване значення $\chi^2_{спост.}$:

$$\chi^2_{спост.} = \frac{(7-5)^2}{5} + \frac{(3-5)^2}{5} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = 1{,}6$$

Критичне значення ($\chi^2_{кр.}$) визначають за допомогою таблиць розподілу χ^2 (див. додаток 4) при рівні значущості α та числі ступенів свободи k.

За умовою $\alpha = 0{,}05$, а число ступенів свободи розраховується за формулою

$k = n - l - 1$,

де k –кількість ступенів свободи; n – кількість груп вибірки; l – кількість невідомих параметрів передбачуваної моделі, що оцінюються за даними вибірки (якщо всі параметри передбачуваного закону відомі точно, то $l = 0$).

За умовою задачі, число груп вибірки (n) рівне 2, тому що є тільки два варіанти дій фірми-конкурента: „вдалі" та „невдалі", а кількість невідомих параметрів рівномірного розподілу (l) рівна 0.

Звідси $k = 2 - 1 - 0 = 1$.

Знайдемо $\chi^2_{кр.}$ при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ та числі ступенів свободи $k = 1$:

$\chi^2_{кр.(\alpha=0,05;k=1)} = 3{,}8$.

$\chi^2_{спост.} < \chi^2_{кр.}$, а це означає, що при даному рівні значущості нульову гіпотезу відхилити неможливо, розбіжності емпіричних та теоретичних частот – незначні. Дані спостережень узгоджуються з гіпотезою про рівномірний розподіл генеральної сукупності.

Це означає, що для твердження про те, що дії фірми-конкурента на ринку невипадкові, немає підстав, і при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ можна стверджувати, що в фірмі „А" немає платного інформатора фірми-конкурента.▲

Приклад 15. При рівні значущості $\alpha = 0{,}025$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні та теоретичні частоти:

$n_{i\,емп.}$	5	10	20	25	14	3
$n_{i\,теор}$	6	14	28	18	8	3

Розв'язування:

▼ Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0 : X \approx N(\alpha;\sigma^2)$ – випадкова величина X підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами α та σ^2.

H_1: випадкова величина X не підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами α та σ^2.

Як критерій для перевірки нульової гіпотези використаємо критерій Пірсона χ^2.

Знайдемо спостережуване значення ($\chi^2_{\text{спост.}}$):

$$\chi^2_{\text{спост.}} = \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(10-14)^2}{14} + \frac{(20-28)^2}{28} + \frac{(25-18)^2}{18} + \frac{(14-8)^2}{8} +$$

$$+ \frac{(3-3)^2}{3} = 10{,}8175.$$

Знайдемо критичне значення критерію ($\chi^2_{\text{кр.}}$) за таблицею розподілу χ^2 (див. додаток 4) за рівнем значущості α та числом ступенів свободи k.

За умовою $\alpha = 0{,}025$; число ступенів свободи знайдемо за формулою:

$$k = n - l - 1,$$

де k –кількість ступенів свободи; n – кількість груп вибірки; l- кількість невідомих параметрів передбачуваної моделі, що оцінюються за даними вибірки.

За умовою задачі кількість груп вибірки $n = 6$, а число невідомих параметрів нормального розподілу $l = 2$. Звідси $k = 6 - 2 - 1 = 3$.

Знайдемо $\chi^2_{\text{кр}}$ за рівнем значущості $\alpha = 0{,}025$ та числом ступенів свободи $k = 3$:

$\chi^2_{\text{кр.}(\alpha=0{,}025;k=3)} = 9{,}4$.

$\chi^2_{\text{спост.}} > \chi^2_{\text{кр.}}$, тому, що при даному рівні значущості нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої, розбіжності емпіричних та теоретичних частот – значимі. Дані спостережень не узгоджуються з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності. ▲

Приклад 16. Технічна норма передбачає в середньому 40 с на виконання технологічної операції на конвеєрі з виробництва годинників. Від працівників на цій операції надійшли скарги, що насправді вони витрачають на неї більше часу. Для перевірки даної скарги проведені хронометричні вимірювання часу виконання цієї технологічної операції у 16 робітниць, зайнятих на ній, і отримали середній час виконання операції $\tilde{X} = 42$ с. Чи можна за цими хронометричними даними при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ відхилити гіпотезу про те, що середній час виконання цієї операції відповідає нормі, якщо: а) виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $s = 3{,}5$ с; б) вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma = 3{,}5$ с?

Розв'язування:

▼ а) Для розв'язання цієї задачі необхідно перевірити гіпотезу про те, що невідома генеральна середня нормальної сукупності точно рівна певному числу, якщо *дисперсія генеральної сукупності невідома* (вибірка мала, оскільки $n = 16 < 30$).

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0: a = a_0 = 40$ — невідоме математичне сподівання а (нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією), рівне гіпотетично передбачуваному числовому значенню a_0 (за умовою даної задачі – час виконання технологічної операції відповідає нормі).

$H_1: a > 40$ — невідоме математичне сподівання а (нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією), більше від числового значення a_0 (щодо умови даної задачі – час виконання технологічної операції більший від установленої норми).

Оскільки конкуруюча гіпотеза правостороння, то й критична область правостороння.

Як критерій для порівняння невідомого математичного сподівання а (нормально розподіленої генеральної сукупності з невідомою дисперсією) з гіпотетичним числовим значенням a_0 використовується випадкова величина t – *критерій Стьюдента*.

Його спостережуване значення ($t_{спост.}$) розраховується за формулою

$$t_{спост.} = \frac{\tilde{X} - a_0}{s} \cdot \sqrt{n},$$

де $\tilde{X}$ – вибіркова середня; a_0 – числове значення генеральної середньої; s – виправлене середнє квадратичне відхилення; n – об'єм вибірки.

Знайдемо спостережуване значення $t_{спост.}$

$$t_{спост.} = \frac{42 - 40}{3,5} \cdot \sqrt{16} \approx 2,2857.$$

Критичне значення ($t_{кр.}$) знаходять за допомогою таблиць розподілу Стьюдента (див. додаток 5) при рівні значущості α та числі ступенів свободи k.

За умовою $\alpha = 0,01$; число ступенів свободи знайдемо за формулою

$$k = n - 1,$$

де k – число ступенів свободи; n – об'єм вибірки.

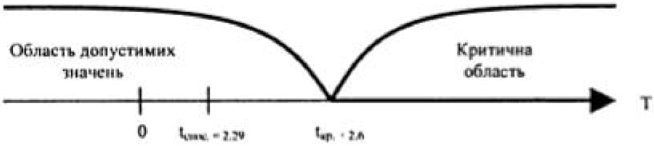
$$k = 16 - 1 = 15.$$

Знайдемо $t_{кр.}$ за рівнем значущості $\alpha = 0,01$ (для односторонньої критичної області) та числом ступенів свободи $k = 15$:

$$t_{кр.(\alpha=0,01;k=15)} = 2,6.$$

$t_{спост.} < t_{кр.}$, отже, при даному рівні значущості немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, а тому скарги робітниць – безпідставні.

Спостережуване значення критерію поптрапляє в область допустимих значень, а тому немає підстав відхилити нульову гіпотезу.



Зазначимо, що при лівосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1 : a < 40$ $t_{кр.}$ знаходять за таблицею розподілу Стьюдента (див. додаток 5) за рівнем значущості α (для односторонньої критичної області) та числом ступенів свободи $k = n - 1$ і присвоюють йому знак „мінус".

При двосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1 : a \neq 40$ $t_{кр.}$ знаходять за таблицями розподілу Стьюдента (див. додаток 5) за рівнем значущості α (для двосторонньої критичної області) та числом ступенів свободи $k = n - 1$.

б) Для розв'язання даної задачі необхідно перевірити гіпотезу про те, що невідома генеральна середня нормальної сукупності точно рівна певному числу, якщо *дисперсія генеральної сукупності невідома*.

Алгоритм розв'язання задачі такий самий, як і в першому випадку. Однак спостережуване значення $t_{спост.}$ розраховують за формулою:

$$t_{спост.} = \frac{\tilde{X} - a_0}{\sigma_{виб.}} \cdot \sqrt{n-1},$$

де $\tilde{X}$ – вибіркова середня; a_0 – числове значення генеральної середньої; $\sigma_{виб.}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення; n – об'єм вибірки.

Знайдемо спостережуване значення ($t_{спост.}$)

$$t_{спост.} = \frac{42 - 40}{3,5} \cdot \sqrt{16 - 1} \approx 2,2131.$$

Критичне значення ($t_{кр.}$) знаходять за допомогою таблиць розподілу Стьюдента (див. додаток 5) при рівні значущості α та числі ступенів свободи k.

$t_{спост.} < t_{кр.}$, отже, при даному рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу, скарги робітниць – безпідставні. ▲

Приклад 17. Змінимо умову попередньої задачі. Технічна норма передбачає в середньому 40 с на виконання певної технологічної операції на конвеєрі з виробництва годинників. Від працівників надійшли скарги, що в дійсності вони витрачають на цю операцію більше часу. Для перевірки даної скарги проведені хронометричні вимірювання часу її виконання у 36 робітниць, зайнятих на цій операції, і отримано середній час виконання операції $\tilde{X} = 42$ с. Чи можна (припускаючи час виконання технологічної операції випадковою величиною, що підкоряється нормальному закону) за отриманими хронометричними даними при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ відхилити гіпотезу про те, що середній час виконання цієї операції відповідає нормі, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 3{,}5$ с ?

Розв'язування:

▼ Для розв'язання даної задачі необхідно перевірити гіпотезу про те, що невідома генеральна середня нормальної сукупності точно рівна числовому значенню, якщо *дисперсія генеральної сукупності відома* (велика вибірка, так як n = 36 більше 30).

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0 : a = a_0 = 40$ – невідома генеральна середня нормально розподіленої сукупності з відомою дисперсією рівна числовому значенню (щодо умови даної задачі – час виконання технологічної операції відповідає нормі).

$H_1 : a > 40$ – невідома генеральна середня нормально розподіленої сукупності з відомою дисперсією більша від числового значення (стосовно умови даної задачі – час виконання технологічної операції більший від встановленої норми).

Оскільки конкуруюча гіпотеза - правостороння, то й критична область – правостороння.

Як критерій для порівняння вибіркової середньої з гіпотетичною генеральною середньою нормальної сукупності, якщо дисперсія генеральної сукупності відома, використовується випадкова величина U.

Її спостережуване значення ($U_{спост.}$) розраховується за формулою

$$U_{спост.} = \frac{\widetilde{X} - a_0}{\sigma_{ген.}} \cdot \sqrt{n},$$

де $\widetilde{X}$ – вибіркова середня; a_0 – числове значення генеральної середньої; $\sigma_{ген.}$ – генеральне середнє квадратичне відхилення; n – об'єм вибірки.

Знайдемо спостережуване значення ($U_{спост.}$)

$$t_{спост.} = \frac{42 - 40}{3,5} \cdot \sqrt{36} \approx 3,4286.$$

Оскільки конкуруюча гіпотеза – правостороння, критичне значення $U_{кр.}$ знаходять за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності:

$\Phi(U_{кр.}) = (1 - 2\alpha)/2$.

За умовою $\alpha = 0,01$. Звідси $\Phi(U_{кр.}) = (1 - 2 \cdot 0,01)/2 = 0,49$.

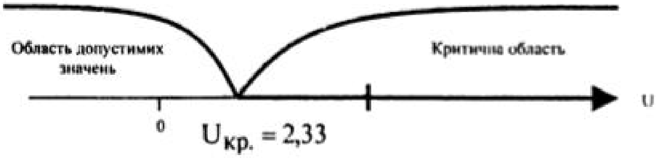
За таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) знайдемо, при якому $U_{кр.}$ $\Phi(U_{кр.}) = 0,49$.

$\Phi(2.33) = 0,49$.

Отже, $U_{кр.} = 2,33$.

$U_{спост.} > U_{кр.}$, отже, при даному рівні значущості нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої. За отриманими хронометричними даними з більш ніж 99% - ою надійністю можна стверджувати, що середній час виконання цієї операції перевищує норму. Отже, скарги робітниць – обгрунтовані.

Спостережуване значення критерію потрапляє в критичну область, тому нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої.



▲

Зазначимо, що при лівосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1 : a < 40$ $U_{кр.}$ знаходять за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(U_{кр.}) = (1 - 2\alpha)/2$ і присвоюють йому знак „мінус".

При двосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1 : a \neq 40$ $U_{кр.}$ знаходять за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(U_{кр.}) = (1 - \alpha)/2$.

Приклад 18. Економічний аналіз продуктивності праці підприємств галузі дав змогу висунути гіпотезу про наявність 2-х типів підприємств з різною середньою величиною показника продуктивності праці. Вибіркове обстеження 42 підприємств першої групи дало такі результати: середня продуктивність праці $\widetilde{X} = 119$ деталей. За даними вибіркового обстеження, на 35 підприємствах другої групи середня продуктивність праці $\widetilde{Y} = 107$ деталей. Генеральні дисперсії відомі: $D(X) = 126{,}91$ (дет.^{2}); $D(Y) = 136{,}1$ (дет.^{2}). Вважаючи, що вибірки вилучені з нормально розподілених генеральних сукупностей X та Y при рівні значущості 0,05, перевірити, чи випадкова отримана різниця середніх показників продуктивності праці в групах, або ж є два типи підприємств з різною середньою величиною продуктивності праці.

Розв'язування:

▼ Для розв'язання даної задачі необхідно порівняти дві середні нормально розподілені генеральні сукупності, *генеральні дисперсії яких відомі* (великі незалежні вибірки). В цій задачі йдеться про великі вибірки, тому що $n_X = 42; n_Y = 35$ більші 30. Вибірки – незалежні, тому що за контекстом задачі вони вилучені з генеральних сукупностей, які не перетинаються.

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0: \overline{X} = \overline{Y}$ – генеральні середні двох нормально розподілених сукупностей з відомими дисперсіями рівні (щодо умови задачі – підприємства двох груп належать до одного типу підприємств: середня продуктивність праці в двох групах – однакова).

$H_1: \overline{X} \neq \overline{Y}$ – генеральні середні двох нормально розподілених сукупностей з відомими дисперсіями нерівні (щодо умови задачі – підприємства двох груп належать до різних типів підприємств: середня продуктивність праці в двох групах – різна).

Висуваємо двосторонню конкуруючу гіпотезу, оскільки з умови задачі випливає, що необхідно з'ясувати, більша чи менша продуктивність праці в одній із груп підприємств порівняно з іншою.

Оскільки конкуруюча гіпотеза – двостороння, то й критична область – двостороння.

Як критерій для порівняння двох середніх генеральних сукупностей, дисперсії яких відомі (великі незалежні вибірки), використовується випадкова величина Z.

Її спостережуване значення ($Z_{\text{спост.}}$) розраховується за формулою:

$$Z_{\text{спост.}} = \frac{\tilde{X} - \tilde{Y}}{\sqrt{\frac{D(X)}{n_x} + \frac{D(Y)}{n_y}}},$$

де $\tilde{X}$ – вибіркова середня для X; $\tilde{Y}$ - вибіркова середня для Y; $D(X)$ – генеральна дисперсія для X; $D(Y)$ – генеральна дисперсія для Y; n_x – об'єм вибірки для X; n_y – об'єм вибірки для Y.

Знайдемо спостережуване значення ($Z_{\text{спост.}}$):

$$Z_{\text{спост.}} = \frac{119 - 107}{\sqrt{\frac{129{,}91}{42} + \frac{136{,}1}{35}}} \approx 4{,}5649.$$

Оскільки конкуруюча гіпотеза – двостороння, критичне значення ($Z_{\text{кр.}}$) потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності

$\Phi(Z_{кр.}) = (1-\alpha)/2$.

За умовою $\alpha = 0{,}05$.

Звідси

$\Phi(Z_{кр.}) = (1-0{,}05)/2 = 0{,}475$.

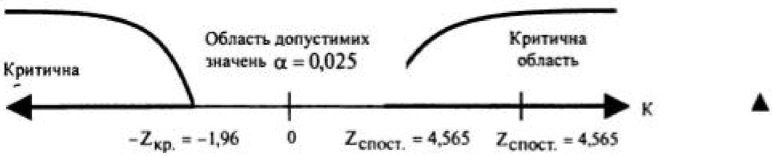
За таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) знайдемо, при якому $Z_{кр.}$ $\Phi(Z_{кр.}) = 0{,}475$.

$$\Phi(1{,}96) = 0{,}475 .$$

Враховуючи, що конкуруюча гіпотеза – двостороння, знаходимо дві критичні точки: $Z_{кр.(п)} = 1{,}96$; $Z_{кр.(л)} = -1{,}96$.

$Z_{спост.} > Z_{кр.}$, отже, при даному рівні значущості нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої. При рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ можна стверджувати, що отримана відмінність середніх показників продуктивності праці в групах невипадкова, є два типи підприємств з різною середньою величиною продуктивності праці.

Спостережуване значення критерію потрапляє в критичну область, тому нульова гіпотеза відхиляється на користь конкуруючої.



Зазначимо, що при лівосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1: \overline{X} < \overline{Y}$ $Z_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(Z_{кр.}) = (1-2\alpha)/2$ і присвоїти йому знак „мінус”.

При правосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1 : \overline{X} > \overline{Y}$ $Z_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(Z_{кр.}) = (1 - 2\alpha)/2$.

Приклад 19. Припускається, що застосування нового типу різця скоротить час обробки деякої деталі. Хронометраж часу обробки 9 деталей, оброблених старим типом різців, дав такі результати: середній час обробки деталі $\tilde{X} = 57$ хв, виправлена вибіркова дисперсія $s^2{}_X = 186{,}2$ ($хв^2$). Середній час обробки 15 деталей, оброблених новим типом різців, – $\tilde{Y} = 52$ хв., а виправлена вибіркова дисперсія $s^2{}_Y = 166{,}4$ ($хв^2$). При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ відповісти на питання, чи дало б змогу використання нового типу різців скоротити час обробки деталі?

Розв'язування:

▼ Для розв'язання цієї задачі необхідно порівняти дві середні нормально розподілених генеральних сукупності *генеральні дисперсії яких невідомі*, але припускаються однаковими (малі незалежні вибірки). В цій задачі мова йде про малі вибірки, так як $n_X = 9$ та $n_Y = 15$ менші від 30. Вибірки – незалежні, оскільки з контексту задачі бачимо, що їх вилучили з генеральних сукупностей, які не перетинаються.

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0 : \overline{X} = \overline{Y}$ – генеральні середні двох нормально розподілених сукупностей з невідомими дисперсіями (які припускаються однаковими) рівні (щодо до умови даної задачі – середній час, що витрачається на обробку деталі різцями нового та старого типів, – однаковий, тобто використання нового типу різця не дає змогу зменшити час на обробку деталі).

$H_1 : \overline{X} > \overline{Y}$ – генеральна середня для X більша ніж генеральна середня для Y .(щодо умови даної задачі – середній час, що витрачається на обробку деталі різцями старого типу, більший, ніж – нового, тобто використання нового типу різця дає змогу зменшити час на обробку деталі).

Оскільки конкуруюча гіпотеза – правостороння, то й критична область – правостороння.

Переходити до перевірки гіпотези про рівність генеральних середніх двох нормально розподілених сукупностей з невідомими дисперсіями можна лише у випадку, коли генеральні дисперсії рівні. Інакше, ця задача в теорії нерозв'язна.

Тому, перш ніж перевіряти цю гіпотезу, перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей.

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези згідно з умовою задачі.

$H_0 : D(X) = D(Y)$ – генеральні дисперсії двох нормально розподілених сукупностей рівні.

$H_1 : D(X) > D(Y)$ – генеральна дисперсія для X більша від генеральної дисперсії для Y. Висуваємо правосторонню конкуруючу гіпотезу, тому що виправлена вибіркова дисперсія для X значно більша, ніж виправлена вибіркова дисперсія для Y.

Оскільки конкуруюча гіпотеза – правостороння, то й критична область – правостороння.

Як критерій для порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей використовується випадкова величина F – *критерій Фішера-Снедекора* (див. додаток 6).

Його спостережуване значення ($f_{спост.}$) розраховується за формулою

$$f_{спост.} = \frac{s^2_{б.}}{s^2_{м.}},$$

де $S^2_{б.}$ – більша (за величиною) виправлена вибіркова дисперсія; $S^2_{м.}$ – менша (за величиною) виправлена вибіркова дисперсія.

Знайдемо $f_{спост.}$

$$f_{спост.} = \frac{186,2}{166,4} \approx 1,119 .$$

Критичні значення ($f_{кр.}$) потрібно знаходити за допомогою таблиці Фішера-Снедекора (див. додаток 6) при рівні значущості α та числі ступенів свободи k_1 та k_2.

За умовою $\alpha = 0{,}01$; число ступенів свободи знайдемо за формулою

$$k_1 = n_1 - 1;\ k_2 = n_2 - 1,$$

де k_1 – число ступенів свободи більшої (за величиною) виправленої дисперсії; k_2 – число ступенів свободи меншої (за величиною) виправленої дисперсії; n_1 – об'єм вибірки більшої (за величиною) виправленої дисперсії; n_2 – об'єм вибірки меншої (за величиною) виправленої дисперсії.

Знайдемо k_1 та k_2

$$k_1 = 10 - 1 = 9;\ k_2 = 15 - 1 = 14.$$

Знайдемо $f_{кр.}$ при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ та числі ступенів свободи $k_1 = 9$ і $k_2 = 14$:

$$f_{кр.(\alpha=0{,}01; k_1=9; k_2=14)} = 4.14.$$

$f_{спост.} < f_{кр.}$, отже, при даному рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій нормальних сукупностей.

Це означає, що можна перейти до перевірки гіпотези про рівність генеральних середніх двох нормально розподілених сукупностей.

Як критерій для перевірки цієї гіпотези використовується випадкова величина t – *критерій Стьюдента.*

Його спостережуване значення ($t_{спост.}$) розраховується за формулою:

$$t_{спост.} = \frac{\tilde{X} - \tilde{Y}}{\sqrt{(n_X - 1)\cdot s_X{}^2 + (n_Y - 1)\cdot s_Y{}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_X \cdot n_Y (n_X + n_Y - 2)}{n_X + n_Y}},$$

де $\tilde{X}$ – вибіркова середня для X; $\tilde{Y}$ – вибіркова середня для Y; $s^2{}_X$ – „невиправлена" вибіркова дисперсія для X; $s^2{}_Y$ – „невиправлена" вибіркова дисперсія для Y; n_X – об'єм вибірки, вилученої з генеральної сукупності X; n_Y – об'єм вибірки, вилученої з генеральної сукупності Y.

Знайдемо $t_{спост.}$

$$t_{спост.} = \frac{57-52}{\sqrt{(9-1)\cdot 186{,}2 + (15-1)\cdot 166{,}4}} \cdot \sqrt{\frac{9\cdot 15\cdot (9+15-2)}{9+15}} = 0{,}9\,.$$

Критичне значення ($t_{кр.}$) потрібно знаходити за таблицею розподілу Стьюдента (див. додаток 5) при рівні значущості α та числі ступенів свободи k.

За умовою $\alpha = 0{,}01$; число ступенів свободи знайдемо за формулою:

$$k = n_X + n_Y - 2\,,$$

де k – число ступенів свободи; n_X – об'єм вибірки для X; n_Y –об'єм вибірки для Y.

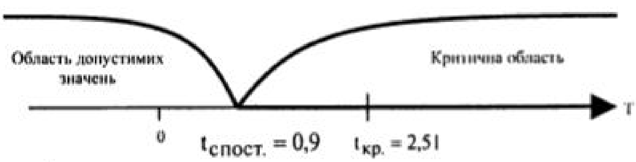
$$k = 9 + 15 - 2 = 22\,.$$

Знайдемо $t_{кр.}$ при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ (для односторонньої критичної області) та числі ступенів свободи $k = 22$

$$t_{кр(\alpha=0.01;k=22)} = 4.14\,.$$

$t_{спост.} < t_{кр.}$, отож, при даному рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу. За хронометричними даними з умови задачі при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ немає підстав для відхилення гіпотези про те, що генеральні середні рівні, тобто середній час, що витрачається на обробку деталі старим та новим типами різців, відрізняється незначимо, розбіжності між середніми – випадкові, використання нового типу різців не дозволяє зменшити час обробки деталі.

Спостережуване значення критерію попадає в область допустимих значень, отже, нульову гіпотезу не відхиляємо.



▲

Зазначимо, що при лівосторонній конкуруючій гіпотезі $\overline{X} < \overline{Y}$ $t_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицями розподілу Стьюдента (див. додаток 5) при рівні значущості α (для односторонньої критичної області) та числі ступенів свободи $k = n_X + n_Y - 2$ і присвоїти йому знак „мінус".

При двосторонній конкуруючій гіпотезі $\overline{X} \neq \overline{Y}$ $t_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицями розподілу Стьюдента (див. додаток 5) при рівні значущості α (для двохсторонньої критичної області) та числі ступенів свободи $k = n_X + n_Y - 2$.

Приклад 20. Партію деталей приймають в тому випадку, коли ймовірність того, що виріб відповідає стандарту, становить не менше 0,97. Серед випадково відібраних 200 деталей досліджуваної партії виявилось 193 стандартних. Чи можна при рівні значущості $\alpha = 0{,}02$ прийняти партію?

Розв'язування:

▼ Для розв'язання даної задачі необхідно перевірити гіпотезу про те, що невідома генеральна частка точно рівна певному числу.

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези за умовою задачі.

$H_0 : p = p_0 = 0.97$ – невідома генеральна частка p дорівнює p_0 щодо умови задачі – ймовірність того, що деталь з партії, яка перевіряється, виявиться такою, що відповідає стандарту, рівна 0,97, тобто партію виробів можна прийняти).

$H_1 : p < 0{,}97$ – невідома ймовірність p менша від гіпотетичної ймовірності p_0 (щодо умови задачі – ймовірність того, що деталь з партії, яка перевіряється, виявиться такою, що відповідає стандарту, менша 0,97, тобто партію виробів приймати недоцільно).

Оскільки конкуруюча гіпотеза – лівостороння, то й критична область лівостороння.

Як критерій для порівняння спостережуваної відносної частоти з гіпотетичною ймовірністю появи події використовується випадкова величина U.

Її спостережуване значення ($U_{спост.}$) розрахуємо за формулою:

$$U_{спост.} = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0}} \cdot \sqrt{n},$$

де $\frac{m}{n}$ – відносна частота (частість) появи події; p_0 – гіпотетична ймовірність появи події; q_0 – гіпотетична ймовірність непояви події; n - об'єм вибірки.

За умовою $m = 193$; $n = 200$; $p_0 = 0{,}97$; $q_0 = 1 - p_0 = 0{,}03$; $\alpha = 0{,}02$.

Знайдемо спостережуване значення ($U_{спост.}$)

$$U_{спост.} = \frac{\frac{193}{200} - 0{,}97}{\sqrt{0{,}97 \cdot 0{,}03}} \cdot \sqrt{200} \approx -0{,}2771.$$

Оскільки конкуруюча гіпотеза – лівостороння, то критичне значення ($U_{кр.}$) потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності

$$\Phi(U_{кр.}) = (1 - 2\alpha)/2.$$

За умовою $\alpha = 0{,}02$.

Звідси $\Phi(U_{кр.}) = (1 - 2 \cdot 0{,}02)/2 = 0{,}48$.

За таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) знайдемо, при якому $U_{кр.}$ $\Phi(U_{кр.}) = 0{,}48$.

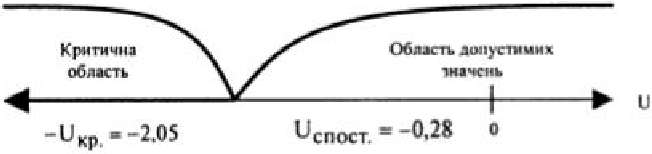
$\Phi(2{,}05) = 0{,}48$.

Враховуючи, що конкуруюча гіпотеза – лівостороння, критичному значенню необхідно присвоїти знак „мінус".

Отже, $-U_{кр.} = -2{,}05$.

$U_{спост.} > U_{кр.}$, отже, при даному рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу. За наявними даними при рівні значущості $\alpha = 0{,}02$ не можна відхилити гіпотезу про те, що ймовірність того, що виріб виявиться відповідним стандарту, становить 0,97. Отже, партію виробів прийняти можна.

Спостережуване значення критерію потрапляє в область допустимих значень, тому немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.



▲

Зазначимо, що при правосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1: p > 0{,}97$ $U_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(U_{кр.}) = (1-2\alpha)/2$.

При двосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1: p \neq 0{,}97$ $U_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(U_{кр.}) = (1-\alpha)/2$.

Приклад 21. Два заводи виготовляють однотипні деталі. Для оцінки їх якості взяли вибірки продукції цих заводів і отримали такі результати:

Вибірки	**Завод №1**	**Завод №2**
Об'єм вибірки	$n_1 = 200$	$n_2 = 300$
Число бракованих деталей	$m_1 = 20$	$m_2 = 15$

При рівні значущості $\alpha = 0{,}025$ визначити, чи є суттєві відмінності в якості деталей, які виготовляють дані заводи?

Розв'язування:

▼ Для розв'язування даної задачі необхідно порівняти дві ймовірності біноміальних розподілів.

Сформулюємо нульову та конкуруючу гіпотези за умовою задачі.

$H_0: p_1 = p_2$ – ймовірності появи події в двох генеральних сукупностях, які мають біноміальний розподіл, рівні (щодо умови задачі – ймовірність того, що деталь, виготовлена на заводі № 1, виявиться бракованою, рівна ймовірності того, що деталь, виготовлена на заводі № 2, виявиться бракованою).

$H_1: p_1 \neq p_2$ –ймовірності появи події в двох генеральних сукупностях, які мають біноміальний розподіл, не рівні (щодо умови задачі – ймовірність того, що деталь, виготовлена на заводі № 1, виявиться бракованою, не рівна ймовірності того, що деталь, виготовлена на заводі № 2, виявиться бракованою; заводи виготовляють деталі різної якості). Оскільки за умовою задачі не потрібно перевіряти, на якому заводі якість виготовлення деталей вища, висуваємо двосторонню конкуруючу гіпотезу.

Оскільки конкуруюча гіпотеза – двостороння, то й критична область двостороння.

Як критерій для порівняння двох ймовірностей біноміальних розподілів використовується випадкова величина U.

Її спостережуване значення $U_{спост.}$ розраховується за формулою:

$$U_{спост.} = \frac{\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2}}{\sqrt{\frac{\bar{p}\bar{q}}{n_1} + \frac{\bar{p}\bar{q}}{n_2}}},$$

де $\frac{m_1}{n_1}$ – відносна частота (частість) появи події в першій вибірці; $\frac{m_2}{n_2}$ – відносна частота (частість) появи події в другій вибірці; $\bar{p}$ - середня частість появи події $\bar{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$; $\bar{q}$ – середня частість непояви події $\bar{q} = 1 - \bar{p}$; n_1 – об'єм першої вибірки; n_2 – об'єм другої вибірки.

За умовою $m_1 = 20$; $n_1 = 200$; $m_2 = 15$; $n_2 = 300$; $\alpha = 0{,}025$.

Знайдемо середню частість появи події

$$\bar{p} = \frac{20 + 15}{200 + 300} = 0{,}07.$$

Знайдемо середню частість непояви події

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.07 = 0{,}93.$$

Знайдемо $U_{спост.}$

$$U_{\text{спост.}} = \frac{\frac{20}{200} - \frac{15}{300}}{\sqrt{\frac{0,07 \cdot 0,93}{200} + \frac{0,07 \cdot 0,93}{300}}} \approx 2,1467 .$$

Оскільки конкуруюча гіпотеза – двостороння, критичне значення ($U_{\text{кр.}}$) потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності

$\Phi(U_{\text{кр.}}) = (1-\alpha)/2$.

За умовою $\alpha = 0,025$. Звідси

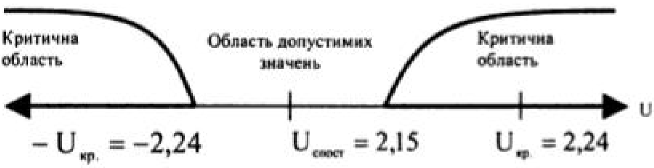
$$\Phi(U_{\text{кр.}}) = (1-0,025)/2 = 0,4875 .$$

За таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) знайдемо, при якому $U_{\text{кр.}}$ $\Phi(U_{\text{кр.}}) = 0,4875$.

Враховуючи, що конкуруюча гіпотеза – двостороння, знайдемо дві критичні точки $U_{\text{кр.п.}} = 2,24$; $U_{\text{кр.л.}} = -2,24$.

$-U_{\text{кр.}} < U_{\text{спост.}} < U_{\text{кр.}}$, отже, при даному рівні значущості немає підстав відхилити нульову гіпотезу. За даними задачі при рівні значущості $\alpha = 0,025$ немає підстав відхиляти нульову гіпотезу. Отже, заводи виготовляють деталі однакової якості.

Спостережуване значення критерію потрапляє в область допустимих значень, тому немає підстав відхиляти нульову гіпотезу.



▲

Зазначимо, що при правосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1 : p_1 > p_2$ $U_{\text{кр.}}$ потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(U_{\text{кр.}}) = (1-2\alpha)/2$.

При лівосторонній конкуруючій гіпотезі $H_1: p_1 < p_2$ $U_{кр.}$ потрібно знаходити за таблицею функції Лапласа (див. додаток 2) з рівності $\Phi(U_{кр.}) = (1-2\alpha)/2$ і присвоювати йому знак „мінус".

Приклади задач на варіаційні ряди та їх числові характеристики

Приклад 1.

1. Для масиву даних відносної міцності (сН/текс.) льняної пряжі мокрого прядіння провести групування та заповнити таблицю „групування - частоти".

2. Користуючись заповненою таблицею побудувати гістограму абсолютних частот.

14,8	**17,4**	**19,2**	**13,1**	**15,1**	**14,5**	**17,1**	**15,0**
16,1	**15,6**	**16,7**	**17,2**	**15,0**	**16,1**	**15,6**	**19,1**
19,1	**14,7**	**19,1**	**14,7**	**19,1**	**15,1**	**12,5**	**13,2**
16,0	**14,6**	**16,6**	**15,7**	**17,3**	**13,8**	**17,0**	**17,4**
15,5	**19,2**	**16,1**	**15,1**	**14,6**	**16,9**	**16,0**	**16,6**
20,5	**13,4**	**14,7**	**17,5**	**15,7**	**17,6**	**12,7**	**15,5**
17,3	**16,2**	**17,7**	**19,1**	**15,2**	**14,4**	**16,5**	**14,8**
16,8	**15,7**	**13,5**	**13,9**	**16,2**	**15,9**	**17,4**	**17,2**
15,4	**17,8**	**16,1**	**16,5**	**17,1**	**16,0**	**14,2**	**18,0**
14,9	**16,3**	**15,8**	**13,6**	**15,9**	**18,5**	**15,2**	**17,8**

Розв'язування:

▼ Проведемо групування вибірки. Число інтервалів групування підрахуємо за формулою:

$$k = [4 \lg n + 1] = [4 \cdot 1{,}903 + 1] = 8 .$$

Знайдемо довжину рівних інтервалів за формулою:

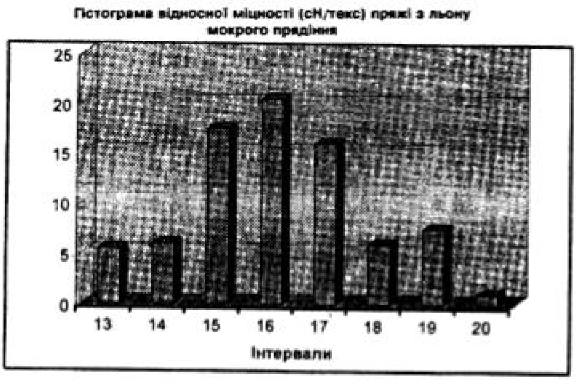
$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{\tilde{k}} = \frac{20{,}5 - 12{,}5}{8} = \frac{8}{8} = 1.$$

Заповнимо таблицю „групування – частоти" для нашого прикладу (якщо верхня межа інтервалу співпадає з одним із значень масиву даних, то цю одиницю частоти розподіляємо по 0,5 в даний і наступний інтервали):

№	Границі інтервалів		Середні точки	Абсолютна частота	Комулятивна відносна частота
i	a_i	a_{i+1}	X_i	f_i	F_i^*
1	12,5	13,5	13	5,5	0,06875
2	13,5	14,5	14	6,0	0,14375
3	14,5	15,5	15	17,5	0,36250
4	15,5	16,5	16	20,5	0,61875
5	16,5	17,5	17	16,0	0,81875
6	17,5	18,5	18	6,0	0,89375
7	18,5	19,5	19	7,5	0,9875
8	19,5	20,5	20	1,0	1,00000

Користуючись останньою таблицею, побудуємо гістограму абсолютних частот:

▲



Приклад 2.

1. Для масиву даних обчислити за незгрупованою та згрупованою вибіркою: вибіркову середню $\tilde{X}$, вибіркову дисперсію S^2, вибіркове середнє квадратичне відхилення S, $\propto_2$, $\sqrt{\propto_2}$ та медіану $Me(X)$.

2. Результати обчислень занести в таблицю.

14,8	17,4	19,2	13,1	15,1	14,5	17,1	15,0
16,1	15,6	16,7	17,2	15,0	16,1	15,6	19,1
19,1	14,7	19,1	14,7	19,1	15,1	12,5	13,2
16,0	14,6	16,6	15,7	17,3	13,8	17,0	17,4
15,5	19,2	16,1	15,1	14,6	16,9	16,0	16,6
20,5	13,4	14,7	17,5	15,7	17,6	12,7	15,5
17,3	16,2	17,7	19,1	15,2	14,4	16,5	14,8
16,8	15,7	13,5	13,9	16,2	15,9	17,4	17,2
15,4	17,8	16,1	16,5	17,1	16,0	14,2	18,0
14,9	16,3	15,8	13,6	15,9	18,5	15,2	17,8

Розв'язування:

▼ Вибіркову середню за незгрупованими даними знайдемо за формулою:

$$\tilde{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{1288}{80} = 16{,}1$$

Вибіркова середня за згрупованими даними становить:

$$\tilde{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overline{X_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{13\cdot 5{,}5 + 14\cdot 6 + 15\cdot 17{,}5 + 16\cdot 20{,}5 + 17\cdot 16 + 18\cdot 6 + 19\cdot 7{,}5 + 20\cdot 1}{80} =$$

$$= \frac{1288{,}5}{80} = 16{,}106.$$

Підрахуємо виправлену вибіркову дисперсію за незгрупованими даними:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} - n\cdot(\overline{X})^2\right) = \frac{1}{79}(20963{,}9 - 80\cdot(16{,}1)^2) = 2{,}875$$

Підрахуємо виправлену вибіркову дисперсію за згрупованими даними:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i(\overline{X_i} - \overline{X})^2 = \frac{1}{79}((13-16{,}106)^2\cdot 5{,}5 + (14-16{,}106)^2\cdot 6 +$$

$$+ (15-16{,}106)^2\cdot 17.5 + (16-16{,}106)^2\cdot 20{,}5 + (17-16.106)^2\cdot 16 +$$

$$+ (18-16{,}106)^2\cdot 6 + (19-16{,}106)^2\cdot 7{,}5 + (20-16{,}106)^2\cdot 1) = \frac{213{,}5969}{79} = 2{,}704$$

Підрахуємо другий вибірковий центральний момент для незгрупованої вибірки:

$$\propto_2 = \frac{n-1}{n} S^2 = \frac{79}{80} \cdot 2{,}875 = 2{,}839 .$$

Для згрупованої вибірки: $\propto_2 = \frac{n-1}{n} S^2 = \frac{7}{8} \cdot 2{,}704 = 2{,}366$.

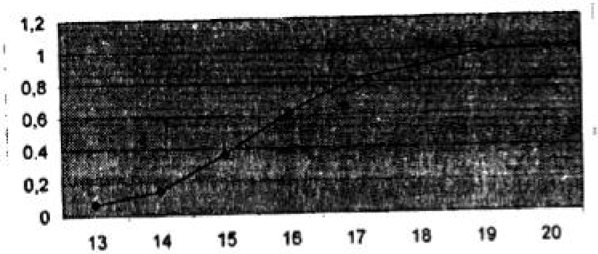
Середнє квадратичне відхилення для незгрупованої вибірки становить: $S = \sqrt{\propto_2} = \sqrt{2.839} = 1{,}685$.

Для згрупованої вибірки: $S = \sqrt{\propto_2} = \sqrt{2{,}366} = 1{,}538$

Щоб знайти медіану за незгрупованою вибіркою, попередньо запишемо у порядку зростання варіаційний ряд. Оскільки n парне, то медіана рівна середньому арифметичному

$$M(X) = (X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1})/2 = (X_{40} + X_{41})/2 = \frac{16+16}{2} = 16.$$

Графік комулятивних відносних частот має вигляд:



Знайдемо абсцису точки перетину прямої y = 0,5 та графіка функції комулятивних відносних частот. Як бачимо, $Me(X) = 16$.

Результати всіх обчислень занесемо у таблицю:

$\tilde{X}$		s^2		S		$\propto_2$		$\sqrt{\propto_2}$		Me(X)	
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
16,1	16,106	2,875	2,704	1,695	1,644	2,839	2,366	1,685	1,538	16	16

▲

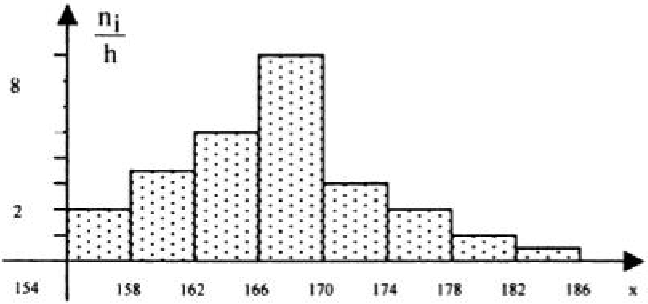
Приклад 3. Вимірювання зросту юнаків віком 17 років дало такі результати:

$h = 4$ см	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182	182-186
n_i	8	14	20	32	12	8	4	2

Визначити гіпотетично, який закон розподілу має ознака X – зріст юнака. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність висунутої нульової гіпотези.

Розв'язування:

▼ Побудуємо гістограму частот для заданого статистичного розподілу:



За формою гістограми частот можемо припустити, що ознака X має нормальний закон розподілу. Отже, висуваємо нульову гіпотезу H_0: ознака X має нормальний закон розподілу ймовірностей.

Для перевірки правильності H_0 використаємо критерій узгодженості Пірсона.

Отже, необхідно обчислити теоретичні частоти, а для цього знайдемо значення вибіркової середньої $\tilde{X}$ та вибіркового середнього квадратичного відхилення $\sigma_{виб}$, побудувавши дискретний розподіл за заданим інтервальним, а саме:

X_i	156	160	164	168	172	176	180	184
n_i	8	14	20	32	12	8	4	2

$$\tilde{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n} = \frac{156\cdot 8 + 160\cdot 14 + 164\cdot 20 + 168\cdot 32 + 172\cdot 12 + 176\cdot 8 + 180\cdot 4 + 184\cdot 2}{100} =$$

$$= \frac{16704}{100} = 167{,}04 \text{ (см)}$$

$$D_{виб} = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\tilde{X})^2 = \frac{156^2\cdot 8 + 160^2\cdot 14 + 164^2\cdot 20 + 168^2\cdot 32 + 172^2\cdot 12 + 176^2\cdot 8 +}{100}$$

$$\frac{+180^2\cdot 4 + 184^2\cdot 2}{100} - (167{,}04)^2 = \frac{2794304}{100} - 27902{,}3616 = 27943{,}04 - 27902{,}3616 = 40{,}68;$$

$$\sigma_{виб} = \sqrt{D_{виб}} = \sqrt{40{,}68} \approx 6{,}38 \text{ (см)}.$$

Обчислення теоретичних частот подамо в таблиці (для розрахунку ймовірностей P_i потрапляння випадкової величини X в інтервал $[x_i, x_{i+1}]$ використаємо функцію Лапласа у відповідності з властивістю нормального розподілу $P_i(x_i \le X \le x_{i+1}) = \Phi(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{x_i - a}{\sigma})$:

x_i	x_{i+1}	n_i	$z_i = \frac{x_i - \tilde{x}}{\sigma_{виб}}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \tilde{x}}{\sigma_{виб}}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$n'_i = n\cdot(\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i))$
154	158	8	-2,04	-1,42	-0,4793	-0,4222	6
158	162	14	-1,42	-0,79	-0,4222	-0,2852	14
162	166	20	-0,79	-0,16	-0,2852	-0,0636	22
166	170	32	-0,16	0,46	-0,0636	0,1772	24
170	174	12	0,46	1,09	0,1772	0,3621	19
174	178	8	1,09	1,72	0,3621	0,4573	10
178	182	4	1,72	2,34	0,4573	0,4904	3
182	186	2	2,34	2,97	0,4904	0,4986	1

Обчислення спостережуваного значення $\chi^2_{спост.}$ подане в таблиці:

n_i	$n\cdot p_i$	$n_i - n\cdot p_i$	$(n_i - n\cdot p_i)^2$	$\frac{(n_i - n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}$
8	6	2	4	0,667
14	14	0	0	0
20	22	-2	4	0,182
32	24	8	64	2,667
12	19	-7	49	2,579
8	10	-2	4	0,4
4	3	1	1	0,333
2	1	1	1	1

$$\chi^2_{спост.} = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = 7{,}828 .$$

За таблицею (див. додаток 4) знайдемо критичне значення χ^2 :
$\chi^2_{крит.}(\alpha = 0{,}01; k = 8 - 2 - 1) = 15{,}1$.

Оскільки $\chi^2_{спост.} < \chi^2_{крит.}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу H_0 про нормальний закон розподілу ймовірностей ознаки X. ▲

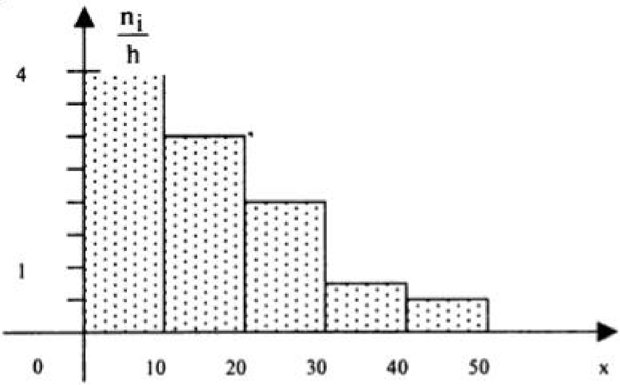
Приклад 4. За даним статистичним розподілом вибірки:

h = 4 см	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
n_i	40	30	20	6	4

з'ясувати гіпотетичний закон розподілу ймовірностей випадкової величини X. При рівні значущості $\alpha = 0.01$ перевірити правильність цього припущення.

Розв'язування:

▼ Щоб визначити закон розподілу ознаки X, побудуємо гістограму частот:



За формою гістограми частот можна гіпотетично стверджувати, що ознака X має експоненціальний закон розподілу ймовірностей.

Для перевірки правильності цього твердження використаємо критерій узгодженості Пірсона. Теоретичні частоти в цьому разі обчислюються за формулою:

$$n'_i = n \cdot P_i = n \cdot (e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}),$$

де $\lambda = \frac{1}{\tilde{X}}$, P_i — ймовірність того, що випадкова величина X потрапить в і-ий частковий інтервал (обчислюється за формулами того закону розподілу, який припускаємо), n –об'єм вибірки.

Отже, необхідно обчислити $\tilde{X}$, побудувавши дискретний статистичний розподіл за наведеним інтервальним, а саме:

x_i	5	15	25	35	45
n_i	40	30	20	6	4

Оскільки, $n = \sum n_i = 100$, то

$$\tilde{X} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{n} = \frac{5 \cdot 40 + 15 \cdot 30 + 25 \cdot 20 + 35 \cdot 6 + 45 \cdot 4}{100} = 15{,}4.$$

Тоді $\lambda = \frac{1}{\tilde{X}} = \frac{1}{15.4} = 0{,}065$.

Обчислення теоретичних частот подамо в таблиці:

x_i	x_{i+1}	n_i	$e^{-\lambda x_i}$	$e^{-\lambda x_{i+1}}$	$n'_i = n \cdot (e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}})$
0	10	40	1	0,522	48
10	20	30	0,522	0,273	25
20	30	20	0,273	0,142	13
30	40	6	0,142	0,074	7
40	50	4	0,074	0,0039	7

Обчислення спостережуваного значення критерію χ^2 подамо в таблиці:

n_i	$n \cdot p_i$	$n_i - n \cdot p_i$	$(n_i - n \cdot p_i)^2$	$\frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$
40	48	-8	64	1,33
30	25	5	25	1

20	13	7	49	3,77
6	7	-1	1	0,14
4	7	-3	9	1,29

$$\chi^2_{\text{спост.}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} = 7{,}53 .$$

За таблицею (див. додаток 4) знайдемо критичне значення χ^2 :

$$\chi^2_{\text{крит.}}(\alpha = 0{,}01; k = 5 - 1 - 1) = 11{,}3 .$$

Оскільки $\chi^2_{\text{спост.}} < \chi^2_{\text{крит.}}$, то немає підстав відхилити нульову гіпотезу H_0 про експоненціальний закон розподілу ймовірностей ознаки X. ▲

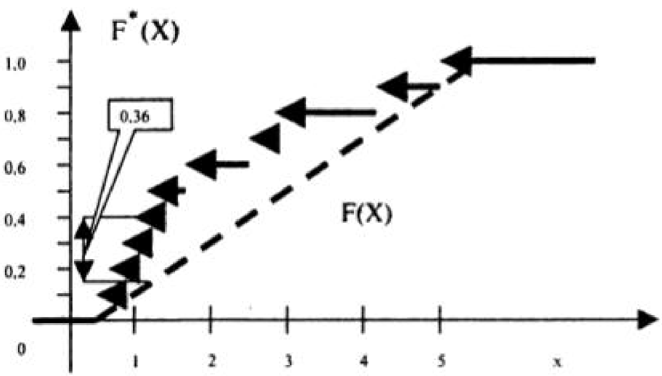
Приклад 5. За критерієм Колмогорова перевірити гіпотезу про рівномірний закон розподілу з параметрами a = 0,5, b = 5,25 випадкової величини за вибіркою об'ємом n = 10: 2,68; 1,83; 2,90; 1,08; 0,90; 4,07; 5,05; 0,94; 0,71; 1,16 при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

Розв'язування:

▼ Варіаційний ряд даної вибірки має вигляд:

x_i	0,71	0,90	0,94	1,03	1,16	1,83	2,68	2,90	4,07	5,05
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу $F^*(X)$:



Теоретична функція розподілу $F(X)$ рівномірного закону:

$$F(X)=\begin{cases}0, x<0{,}5\\ \dfrac{x-0{,}5}{5{,}25-0{,}5}, 0{,}5\le x\le 5{,}25\\ 1, x>5{,}25\end{cases}$$

Абсолютне значення максимальної різниці відстані між графіками $F^{*}(X)$ та $F(X)$ $D=0{,}36$ при $x=1{,}16$.

Обчислимо значення критерію Колмогорова $\lambda_{спост}=\sqrt{n}\cdot D=\sqrt{10}\cdot 0{,}36=1{,}14$. За таблицею розподілу Колмогорова (див. додаток 7) вибираємо критичне значення $\lambda_{крит}=\lambda_{\alpha}=\lambda_{0,05}=1{,}36$. $\lambda_{спост.}<\lambda_{крит.}$. Отже, гіпотеза про рівномірний закон розподілу приймається. ▲

Приклад 6. Протягом місяця вибірково перевіряли овочеві торгові точки міста. Результати двох перевірок з недоважування покупцям по одному виду овочів представлені в таблиці:

Номер інтервалу	Інтервали недоважування, г	Частоти	
		n_{i1} для вибірки 1	n_{i2} для вибірки 2
1	0-10	3	5
2	10-20	10	12
3	20-30	15	8
4	30-40	20	25
5	40-50	12	10
6	50-60	5	8
7	60-70	25	20
8	70-80	15	7
9	80-90	5	5
Об'єм вибірки		$n_1=110$	$n_2=100$

Чи можна вважати, що при рівні значущості $\alpha=0{,}05$ за результатами двох випадкових вибірок недоважування овочів описуються однією й тією самою функцією розподілу?

Розв'язування:

▼ Підрахуємо накопиченгі частоти обох вибірок та значення їх емпіричних функцій розподілу. Результати занесемо до розрахункової таблиці:

x_i	$n_{i1}^{нак}$	$n_{i2}^{нак}$	$F_1^*(x_i)$	$F_2^*(x_i)$	$\lvert F_1^*(x_i)-F_2^*(x_i)\rvert$
5	3	5	0,027	0,050	0,023
15	13	17	0,118	0,170	0,052
25	28	25	0,254	0,250	0,004
35	48	50	0,436	0,500	0,064
45	60	60	0,545	0,600	0,055
55	65	68	0,591	0,680	0,089
65	90	88	0,818	0,880	0,072
75	105	95	0,955	0,950	0,005
85	110	100	1,000	1,0000	0,000

З останнього стовпчика таблиці $\max\lvert F_1^*(x_i)-F_2^*(x_i)\rvert = 0{,}089$. Спостережуване значення статистики критерію Колмогорова-Смирнова при $n_1 = 110$, $n_2 = 100$ $\lambda' = \sqrt{\dfrac{110 \cdot 100}{110+100}} \cdot 0{,}089 = 0{,}644$.

За таблицею додатку 7 при $\alpha = 0{,}05, \lambda_{0,05} = 1{,}36$.

Оскільки $\lambda' < \lambda_{0,05} (0{,}644 < 1{,}36)$, то нульова гіпотеза H_0 не відхиляється. Отже, недоважування покупців описуються однією і тією самою функцією розподілу, тобто вони є стійким і закономірним процесом під час продажу овочів у даному місті.

▲

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 13

СТАТИСТИЧНЕ ВИВЧЕННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ЯВИЩАМИ

Сучасна наука про суспільство пояснює суть явищ через вивчення взаємозв'язків між явищами. Так, об'єм продукції підприємства пов'язаний з чисельністю робітників, вартістю основних фондів, продуктивністю праці і т.і.

Взаємозв'язки між явищами можна вивчати за допомогою дисперсійного, кореляційного та регресійного аналізів.

1. Дисперсійний аналіз

Дисперсійний аналіз – статистичний метод, призначений для оцінки впливу різних факторів на результат експерименту, а також для наступного планування аналогічних експериментів.

Дисперсійний аналіз було розроблено англійським математиком – статистиком Р.А. Фішером (1918 р.) для обробки результатів агрономічних дослідів з виявлення умов отримання максимального врожаю різних сортів сільськогосподарських культур. Сам термін „дисперсійний аналіз" Фішер вжив пізніше. В наш час дисперсійний аналіз використовують як в економіці, так і в техніці та в соціальній сфері.

Суть цього аналізу полягає в тому, що загальну дисперсію досліджуваної ознаки розділяють на окремі компоненти, які зумовлені впливом конкретних факторів.

За кількістю факторів, вплив яких досліджується, розрізняють однофакторний та багатофакторний дисперсійний аналіз.

Під час аналізу впливу одного фактора на результат експерименту модель, яка описує структуру цього експерименту, можна подати так:

$$X_{ij} = \bar{x} + \alpha_j + \varepsilon_{ij},$$

де X_{ij} — значення ознаки X, одержане при i-му експерименті для j-ої міри фактора; $\overline{X}$ — загальна середня величина ознаки X; α_j — ефект впливу фактора на значення ознаки X при j-ій мірі фактора; ε_{ij} — випадкова компонента, яка впливає на значення ознаки X в і тому експерименті при j-ій мірі фактора. При цьому $M(\varepsilon_{ij}) = 0$ і ε_{ij} як випадкові величини мають нормальний закон розподілу ймовірностей і між собою незалежні.

Наприклад, якщо фактором є добрива, які вносяться в грунт з метою збільшення врожайності сільськогосподарської культури, то мірою фактора в цьому разі є кількість добрива, що вноситься в ґрунт.

При аналізі впливу двох факторів структура моделі набуває такого вигляду:

$$X_{ijk} = \overline{x} + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

де X_{ijk} —- значення ознаки X, одержане в i-му експерименті для j-ої міри фактора A і k-ої міри фактора B; $\overline{x}$ — загальна середня величина ознаки X; α_i — ефект впливу фактора A на значення ознаки X при i-ій мірі фактора; β_j — ефект впливу фактора B на значення ознаки X при j-ій мірі фактора; γ_{ij} — ефект одночасного впливу факторів A та B; ε_{ij} — випадкова компонента.

Для проведення дисперсійного аналізу досліджуваний масив даних експерименту поділяють на певні групи, які відрізняються дією на результати експерименту при певних мірах факторів.

Вважається, що досліджувана ознака має нормальний закон розподілу, а дисперсії в кожній окремій групі здобутих значень ознаки однакові. Ці припущення необхідно перевіряти.

Нехай потрібно дослідити **вплив на ознаку X одного фактора**. Результати експерименту ділять на певне число груп, які відрізняються між собою ступенем дії фактора.

Для зручності обчислень результати експерименту заносять у таблицю:

Ступінь впливу фактора	Спостережуване значення ознаки X	Групові середні	Загальна середня
1	$x_{11}, x_{21},$ $x_{31}, \ldots, x_{n1}$	$\overline{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i1}}{n_i}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} x_{ij}}{N}$, $N = \sum_{j=1}^{p} n_j$
2	$x_{12}, x_{22},$ $x_{32}, \ldots, x_{n2}$	$\overline{x_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i2}}{n_2}$	
3	$X_{13}, X_{23}, X_{33}, \ldots,$	$\overline{x_3} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i3}}{n_3}$	
...	...	...	
p	$x_{1p}, x_{2p},$ $x_{3p}, \ldots, x_{np}$	$\overline{x_p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ip}}{n_p}$	

Відповідно до моделі однофакторного дисперсійного аналізу необхідно визначити дві дисперсії, а саме: *міжгрупову* (сума квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої), зумовлену впливом досліджуваного фактора на ознаку X, і *внутрішньогрупову* (сума квадратів відхилень спостережень від групових середніх), зумовлену впливом інших випадкових факторів.

Загальна дисперсія розглядається як сума квадратів відхилень:

$$Q = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2 .$$

Поділ дисперсії на компоненти здійснюється так: $Q = Q_1 + Q_2$,

$$\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^{p} n_j (\overline{x_j} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x_j})^2 .$$

Для того, щоб мати виправлені дисперсії, необхідно кожну зі здобутих сум квадратів поділити на число ступенів свободи.

Так, для загальної дисперсії $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_j}\sum\limits_{j=1}^{p}(x_{ij}-\bar{x})^2}{N}$ виправлена дисперсія дорівнюватиме $S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_j}\sum\limits_{j=1}^{p}(x_{ij}-\bar{x})^2}{N-1}$.

Виправлена дисперсія S_1^2, що характеризує розсіювання всередині групи, яке зумовлене впливом випадкових факторів, обчислюється за формулою: $S_1^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_j}\sum\limits_{j=1}^{p}(x_{ij}-\overline{x_j})^2}{N-p}$, де $N-p=k_1$ є числом ступенів свободи для S_1^2, оскільки при цьому використовується p співвідношень при обчисленні групових середніх $\overline{x_j}, j=\overline{1,p}$.

Виправлена дисперсія S_2^2, що характеризує розсіювання групових середніх $\overline{X_j}$ відносно загальної середньої $\overline{X}$, яке викликане впливом фактора на результат експерименту ознаки X, обчислюється за формулою: $S_2^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{p} n_j\cdot(\overline{x_j}-\bar{x})^2}{p-1}$, де $p-1=k_2$ є числом ступенів свободи для S_2^2, оскільки групові середні варіюють відносно однієї загальної середньої $\overline{X}$.

Завдання виявлення впливу фактора на наслідки експерименту полягає у порівнянні виправлених дисперсій S_1^2, S_2^2. Адже, якщо досліджуваний фактор не впливає на значення ознаки X, то в цьому разі S_1^2і S_2^2 можна розглядати як незалежні оцінки загальної дисперсії D. І навпаки, якщо відношення S_1^2і S_2^2 істотне, то в цьому разі вибірки слід вважати вилученими з різних сукупностей з різним рівнем впливу фактора.

Порівняння двох дисперсій грунтується на перевірці правильності нульової гіпотези: $H_0 : D_1 = D_2$ — про рівність дисперсій двох вибірок.

За статистичний критерій вибирається випадкова величина $F = \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{p-1}{N-p}$, яка має розподіл Фішера-Снедекора з $k_1 = N - p$, $k_2 = p - 1$ ступенями свободи. За значеннями α, $k_1 = N - p$, $k_2 = p - 1$ знаходять критичну точку (див. додаток 6).

Якщо $F_{спост.} \le F_{крит.}$, то нульова гіпотеза про вплив фактора на результати досліджень відхиляється, а коли $F_{спост.} > F_{крит.}$, то цим самим підтверджується вплив фактора на ознаку X.

Результати спостережень та обчислення статистичних оцінок зручно подавати в такій таблиці:

Ступінь впливу фактора	Спостережуване значення ознаки X	Групові середні	Загальна середня
1	$x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots, x_{n1}$	$\overline{x_1} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i1}}{n_i}$	$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{p} x_{ij}}{N}$, $N = \sum_{j=1}^{p} n_j$
2	$x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots, x_{n2}$	$\overline{x_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i2}}{n_2}$	
3	$x_{13}, x_{23}, x_{33}, \ldots, x_{n3}$	$\overline{x_3} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{i3}}{n_3}$	
...	...	...	
p	$x_{1p}, x_{2p}, x_{3p}, ..$	$\overline{x_p} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ip}}{n_p}$	

Вид варіацій ознаки	Сума квадратів відхилень	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсії
внутрішньогрупова	$\sum\limits_{i=1}^{n_j} \sum\limits_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x})^2$	$N - p$	$S_1^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_j} \sum\limits_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x}_j)^2}{N - p}$
міжгрупова	$\sum\limits_{j=1}^{p} n_j (\overline{x}_j - \overline{x})^2$	$p - 1$	$S_2^2 = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{p} n_j \cdot (\overline{x}_j - \overline{x})^2}{p - 1}$
загальна	$\sum\limits_{i=1}^{n_j} \sum\limits_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x})^2$	$N - 1$	$S^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_j} \sum\limits_{j=1}^{p} (x_{ij} - \overline{x})^2}{N - 1}$

Приклад 1. Ступінь впливу каталізатора на кінцевий продукт заданої хімічної реакції наведений у таблиці:

Ступінь впливу каталізатора	Кінцевий продукт хімічної реакції
1	3,2; 3,1; 3,1; 2,8; 3,3; 3,0
2	2,6; 3,1; 2,7; 2,9; 2,7; 2,8
3	2,9; 2,6; 3,0; 3,1; 3,0; 2,8
4	3,7; 3,4; 3,2; 3,3; 3,5; 3,3
5	3,0; 3,4; 3,2; 3,5; 2,9; 3,1

З'ясувати, чи істотно впливає каталізатор на кінцевий продукт хімічної реакції при $\alpha = 0{,}001$.

Розв'язування:

▼ Виконаємо відповідні обчислення і занесемо до розрахункової таблиці:

Ступінь впливу каталізатора	Спостережуване значення (кінцевий продукт)	Групові середні	Загальна середня
1	3,2; 3,1; 3,1; 2,8; 3,3; 3,0	$\overline{x_1} = 3{,}083$	$\bar{x} = 3{,}073$
2	2,6; 3,1; 2,7; 2,9; 2,7; 2,8	$\overline{x_2} = 2{,}8$	
3	2,9; 2,6; 3,0; 3,1; 3,0; 2,8	$\overline{x_3} = 2.9$	
4	3,7; 3,4; 3,2; 3,3; 3,5; 3,3	$\overline{x_4} = 3{,}4\ldots$	
5	3,0; 3,4; 3,2; 3,5; 2,9; 3,1	$\overline{x_5} = 3{,}18$	
Вид варіацій ознаки	**Сума квадратів відхилень**	**Число ступенів свободи**	**Статистичні оцінки дисперсії**
Внутрішньо-групова	$\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{5}(x_{ij}-\bar{x})^2 = 0{,}926734$	$k_1 = N - p = 30 - 5 = 25$	$S_1{}^2 = 0{,}03707$
міжгрупова	$\sum_{j=1}^{5} n_j(\overline{x_j}-\bar{x})^2 = 1{,}3377$	$k_2 = p - 1 = 5 - 1 = 4$	$S_2{}^2 = 0{,}3344$

Рівень фактора B	Рівень фактора A							Середня величина за рядками	Загальна середня величина
	A_1		A_2		...	A_p			
		бічна середня		бічна середня			бічна середня		
B_1	$x_{111}, x_{211}, x_{311}, \ldots, x_{n11}$	$\bar{x}_{11} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i11}}{n}$	$x_{112}, x_{212}, x_{312}, \ldots, x_{n12}$	$\bar{x}_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i12}}{n}$	...	$x_{11p}, x_{21p}, x_{31p}, \ldots, x_{n1p}$	$\bar{x}_{1p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1p}}{n}$	$\bar{y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{i1k}}{np}$	$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}}{npq}$
B_2	$x_{121}, x_{221}, x_{321}, \ldots, x_{n21}$	$\bar{x}_{21} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i21}}{n}$	$x_{122}, x_{222}, x_{322}, \ldots, x_{n22}$	$\bar{x}_{22} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i22}}{n}$	...	$x_{12p}, x_{22p}, x_{32p}, \ldots, x_{n2p}$	$\bar{x}_{2p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2p}}{n}$	$\bar{y}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{i2k}}{np}$	
...	...		...		...	...			
B_q	$x_{1q1}, x_{2q1}, x_{3q1}, \ldots, x_{nq1}$	$\bar{x}_{q1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iq1}}{n}$	$x_{1q2}, x_{2q2}, x_{3q2}, \ldots, x_{nq2}$	$\bar{x}_{q2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iq2}}{n}$	...	$x_{1qp}, x_{2qp}, x_{3qp}, \ldots, x_{nqp}$	$\bar{x}_{qp} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{iqp}}{n}$	$\bar{y}_q = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{iqk}}{np}$	
Середня величина за стовпцями	$\bar{z}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} x_{ij1}}{nq}$		$\bar{z}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} x_{ij2}}{nq}$			$\bar{z}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} x_{ijp}}{nq}$			

Джерело, що спонукає до розсіювання	Сума квадратів відхилень	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсій (виправлені дисперсії)
Фактор A	$Q_1 = nq\sum_{k=1}^{p}(\bar{z}_k - \bar{x})^2$	p-1	$S_1^2 = \frac{Q_1}{p-1}$
Фактор B	$Q_2 = np\sum_{j=1}^{q}(\bar{y}_j - \bar{x})^2$	q-1	$S_2^2 = \frac{Q_2}{q-1}$
Одночасна дія факторів A і B	$Q_3 = n\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(\bar{x}_{jk} - \bar{z}_k - \bar{y}_j + \bar{x})^2$	(p-1)(q-1)	$S_3^2 = \frac{Q_3}{(p-1)(q-1)}$
Дія випадкової компоненти ε_{ijk}	$Q_4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2$	N-pq	$S_4^2 = \frac{Q_4}{N-pq}$
Загальне відхилення	$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk} - \bar{x})^2$	N-1	$S^2 = \frac{Q}{N-1}$

внутрішньогрупова	$\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{5}(x_{ij} - \bar{x})^2 = 0{,}926734$	$k_1 = N - p = 30 - 5 = 25$	$S_1^2 = 0{,}03707$
міжгрупова	$\sum_{j=1}^{5} n_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2 = 1{,}3377$	$k_2 = p - 1 = 5 - 1 = 4$	$S_2^2 = 0{,}3344$

$$F_{крит}(\alpha = 0{,}001; k_1 = 4; k_2 = 25) = 6{,}6;$$

$$F_{спост} = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0{,}3344}{0{,}03707} = 9{,}0208.$$

Оскільки $F_{спост.} > F_{крит.}$, то вплив каталізатора на кінцевий продукт хімічної реакції є істотним. ▲

Нехай потрібно визначити вплив двох факторів A і B на ознаку X. Для цього необхідно, щоб спостереження здійснювались при фіксованих рівнях факторів A і B, а також при їх одночасній дії на ознаку. При цьому спостереження здійснюватиметься n разів для кожного з рівнів факторів A і B.

Позначимо через X_{ijk} конкретне значення ознаки X, якого вона набуває при i-му експерименті, j-ій мірі фактора A та k-ій мірі фактора B.

Результат експерименту зручно подати у вигляді таблиці (див. наступну таблицю), яка поділена на блоки, в кожному з яких враховується при певних мірах факторів A та B їх вплив на конкретні значення ознаки $X = x_{ijk}$.

Виходячи з даних таблиці $\overline{x_{iq}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{iqk}}{n}$ є середнім значенням ознаки X для кожного блока; $\overline{z_k} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p} x_{ijk}}{nq}$, $j = \overline{1,q}$ є середнім значенням ознаки X за стовпцями; $\overline{y_j} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{q} x_{iqk}}{np}$, $k = \overline{1,p}$ є середнім значенням ознаки X за рядками; $\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{q}\sum\limits_{k=1}^{p} x_{ijk}}{npq}$ є загальною середньою ознакою X; $s_1^2 = \frac{n \cdot p \cdot \Sigma(\overline{y_j} - \bar{x})^2}{p-1} = \frac{Q_1}{p-1}$ є виправленою дисперсією, яка зумовлена впливом фактора A на ознаку X; $s_2^2 = \frac{n \cdot q \cdot \Sigma(\overline{z_j} - \bar{x})^2}{q-1} = \frac{Q_2}{q-1}$ є виправленою дисперсією, яка зумовлена впливом фактора B на ознаку X; $S_3^2 = \frac{Q_3}{(p-1)(q-1)}$ є виправленою дисперсією, яка зумовлена одночасним впливом на ознаку X факторів A і B; $S_4^{\,2} = \dfrac{Q_4}{N-pq}$ є виправленою дисперсією,

Рівень фактора B	Рівень фактора A: A_1	Групова середня	A_2	Групова середня	...	A_p	Групова середня	Середня величина за рядками	Загальна середня величина
B_1	$x_{111}, x_{211}, x_{311}, \dots, x_{n11}$	$\bar{x}_{11} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i11}}{n}$	$x_{112}, x_{212}, x_{312}, \dots, x_{n12}$	$\bar{x}_{12} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i12}}{n}$	...	$x_{11p}, x_{21p}, x_{31p}, \dots, x_{n1p}$	$\bar{x}_{1p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1p}}{n}$	$\bar{y}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{i1k}}{np}$	
B_2	$x_{121}, x_{221}, x_{321}, \dots, x_{n21}$	$\bar{x}_{21} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i21}}{n}$	$x_{122}, x_{222}, x_{322}, \dots, x_{n22}$	$\bar{x}_{22} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i22}}{n}$		$x_{12p}, x_{22p}, x_{32p}, \dots, x_{n2p}$	$\bar{x}_{2p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i2p}}{n}$	$\bar{y}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{i2k}}{np}$	
...									$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} x_{ijk}}{npq}$
B_q	$x_{1q1}, x_{2q1}, x_{3q1}, \dots, x_{nq1}$	$\bar{x}_{q1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{iq1}}{n}$	$x_{1q2}, x_{2q2}, x_{3q2}, \dots, x_{nq2}$	$\bar{x}_{q2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{iq2}}{n}$		$x_{1qp}, x_{2qp}, x_{3qp}, \dots, x_{nqp}$	$\bar{x}_{qp} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{iqp}}{n}$	$\bar{y}_q = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} x_{iqk}}{np}$	
Середня величина за стовпцями	$\bar{x}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} x_{ij1}}{nq}$		$\bar{x}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} x_{ij2}}{nq}$			$\bar{x}_p = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q} x_{ijp}}{nq}$			

Джерело, що спонукає до розсіювання	Сума квадратів відхилень	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсій (виправлені дисперсії)
Фактор A	$Q_1 = n\,q\sum_{k=1}^{p}(\bar{x}_k - \bar{x})^2$	$p-1$	$S_1^{\,2} = \dfrac{Q_1}{p-1}$
Фактор B	$Q_2 = n\,p\sum_{j=1}^{q}(\bar{y}_j - \bar{x})^2$	$q-1$	$S_2^{\,2} = \dfrac{Q_2}{q-1}$
Одночасна дія факторів A і B	$Q_3 = n\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(\bar{x}_{jk} - \bar{x}_k - \bar{y}_j + \bar{x})^2$	$(p-1)(q-1)$	$S_3^{\,2} = \dfrac{Q_3}{(p-1)(q-1)}$
Дія випадкової компоненти x_{ijk}	$Q_4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk} - \bar{x}_{jk})^2$	$N-pq$	$S_4^{\,2} = \dfrac{Q_4}{N-pq}$
Загальне відхилення	$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk} - \bar{x})^2$	$N-1$	$S^2 = \dfrac{Q}{N-1}$

яка зумовлена впливом на ознаку X інших, неголовних факторів.

Обчислюються спостережувані значення критерію:

$$F_{\text{спост.A}} = \frac{S_\sigma^{\,2}}{S_m^{\,2}};\ F_{\text{спост.B}} = \frac{S_\sigma^{\,2}}{S_m^{\,2}};\ F_{\text{спост.AB}} = \frac{S_\sigma^{\,2}}{S_m^{\,2}}.$$

При рівні значущості α визначають критичні точки:

$F_{крит.}(\alpha; k_4; k_1)$, $F_{крит.}(\alpha; k_3; k_1)$, $F_{крит.}(\alpha; k_2; k_1)$.

Якщо:

1) $F_{спост.A} > F_{крит.}(\alpha; k_4; k_1)$, то нульова гіпотеза про відсутність впливу фактора А відхиляється;

2) $F_{спост.B} > F_{крит}(\alpha; k_3; k_1)$, то нульова гіпотеза про відсутність впливу фактора В відхиляється;

3) $F_{спост.AB} > F_{крит.}(\alpha; k_2; k_1)$, то нульова гіпотеза про відсутність спільного впливу факторів А і В відхиляється.

Приклад 2. У чотирьох різних лабораторіях здійснюється експеримент з опріснення морської води за допомогою трьох опріснювачів. Кожний експеримент для кожного опріснювача у кожній лабораторії проводиться тричі. Наслідки опріснювання, виражені у відсотках, наведені у таблиці:

Ступінь впливу В	Ступінь впливу А		
	A_1	A_2	A_3
B_1	3,6; 3,8; 4,1	2,9; 3,1; 3,0	2,7; 2,5; 2,9
B_2	4,2; 4,0; 4,1	3,3; 2,9; 3,2	3,7; 3,5; 3,6
B_3	3,8; 3,5: 3,6	3,6; 3,7; 3,5	3,2; 3,0; 3.4
B_4	3,4; 3,2; 3,2	3,4; 3,6; 3,5	3,6; 3,8; 3,7

При рівні значущості $\alpha = 0,05$ перевірити, чи існує вплив факторів А і В, а також спільної дії А і В на кінцевий результат експерименту.

Розв'язування:

▼ Складемо розрахункову таблицю:

Ступінь впливу фактора В	Ступінь впливу фактора А						Середня величина за рядками	Загальна середня
	A_1		A_2		A_3			
	перший рівень	бічна середня	другий рівень	бічна середня	третій рівень	бічна середня		
B_1	3,6, 3,8; 4,1	$\overline{x_{11}}$ = [illegible]	2,9, 3,1, 3,0	$\overline{x_{12}} = 3,0$	2,7; 2,5, 2,9	$\overline{x_{13}} = 2,7$	$\overline{y_1} = 3,18$	$\bar{\bar{x}} = 3,44$
B_2	4,2 4,0; 4,1	$\overline{x_{21}} = 4,1$	3,2, 2,9, 3,2	$\overline{x_{22}}$ = [illegible]	3,7, 3,5, 3,6	$\overline{x_{23}} = 3,6$	$\overline{y_2}$ = [illegible]	
B_3	3,8, 3,5; 3,6	$\overline{x_{31}}$ = 3,63	3,6, 3,7; 3,5	$\overline{x_{32}} = 3,60$	3,7, 3,8, 3,4	$\overline{x_{33}} = 3,7$	$\overline{y_3}$ = [illegible]	
B_4	3,4, 3,2, 3,2	$\overline{x_{41}}$ = [illegible]	3,4, 3,6, 3,5	$\overline{x_{42}} = 3,50$	3,8, 3,8 3,7	$\overline{x_{43}} = 3,7$	$\overline{y_4} = 3,49$	
Середня величина за стовпцями	$\overline{z_1}$ = 3,71		$\overline{z_2}$ = [illegible]		$\overline{z_3}$ = [illegible]			

Джерело, що сприяє до розсіювання	Сума квадратів відхилень	Число ступенів свободи	Статистичні оцінки дисперсій (виправлені дисперсії)
Фактор А	$Q_1 = n\cdot q\sum_{k=1}^{p}(\overline{z_k}-\bar{\bar{x}})^2 = 12\sum_{k=1}^{3}(\overline{z_k}-3,44)^2 = 1,3128$	$p-1=2$	$S_1^2 = \frac{Q_1}{p-1} = 0,6564$
Фактор В	$Q_2 = n\cdot p\sum_{j=1}^{q}(\overline{y_j}-\bar{\bar{x}})^2 = 9\sum_{j=1}^{3}(\overline{y_j}-3,44)^2 = 0,9054$	$q-1=3$	$S_2^2 = \frac{Q_2}{q-1} = 0,3018$
Одночасна дія факторів А і В	$Q_3 = n\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(\overline{x_{jk}}-\overline{z_k}-\overline{y_j}+\bar{\bar{x}})^2 = 3\sum_{j}^{q}\sum_{k=1}^{p}(\overline{x_{jk}}-\overline{z_k}-\overline{y_j}+\bar{\bar{x}})^2 = 2,7873$	$(p-1)(q-1)=6$	$S_3^2 = \frac{Q_3}{(p-1)(q-1)} = 0,4646$
Вплив випадкових факторів	$Q_4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk}-\overline{x_{jk}})^2 = 0,5668$	$N-pq=24$	$S_4^2 = \frac{Q_4}{N-pq} = 0,02362$
Загальна дисперсія	$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{p}(x_{ijk}-\bar{\bar{x}})^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{3}(x_{ijk}-3,44)^2 = 5,5723$	$N-1=35$	$S^2 = \frac{Q}{N-1} = 0,1675$

Визначимо спостережувані значення статистичних критеріїв за кожним фактором А, В та їх сумісної дії:

$$F_{спост.A} = \frac{S_1^2}{S_4^2} = \frac{0,6564}{0,02362} = 27,79\ ;$$

$$F_{спост.B} = \frac{S_2^2}{S_4^2} = \frac{0,3018}{0,02362} = 12,78\ ;$$

$$F_{спост.AB} = \frac{S_3^2}{S_4^2} = \frac{0,4646}{0,02362} = 19,67 .$$

За додатком 6 знайдемо критичні значення критерію:

$F_{крит.}(\alpha = 0,05; k_1 = 1; k_2 = 23) = 4,3$,

$F_{крит.}(\alpha = 0,05; k_1 = 2; k_2 = 23) = 3.4$,

$F_{крит.}(\alpha = 0,05; k_1 = 5; k_2 = 23) = 2,7$.

Оскільки $F_{спост.A} > F_{крит.}$, то нульова гіпотеза про відсутність впливу фактора А відхиляється. Аналогічно $F_{спост.B} > F_{крит.}$, $F_{спост.AB} > F_{крит.}$, а це говорить про те, що нульова гіпотеза про відсутність впливу фактора В, а також сумісної дії факторів А і В також відхиляється.

▲

2. Кореляційно-регресійний аналіз

Поняття кореляції та регресії з'явилося в середині XIX століття завдяки працям англійських статистиків Ф. Гальтона та К. Пірсона.

Кореляційна залежність між двома змінними величинами – це функціональна залежність між значеннями однієї з них та середнім значенням іншої (умовним математичним сподіванням іншої).

Кореляційна залежність може бути представлена такими рівняннями регресії відповідно У по Х та Х по У:

$$M_x(Y) = \varphi(x) , \; M_y(X) = \psi(y) ,$$

де $\varphi(x) \neq const$, $\psi(y) \neq const$.

Кореляційний зв'язок між ознаками може виникати різними шляхами. Найважливіший шлях – причинна залежність результативної ознаки (її варіації) від варіації факторної ознаки.

Дуже важливо зрозуміти суть досліджуваного зв'язку, оскільки кореляційний зв'язок може виникати між двома наслідками загальної причини. Класичним є приклад, наведений відомим статистиком XX ст. О.О.Чупровим. Якщо як ознаку X взяти число пожежних команд у місті, а за ознаку Y – суму збитків у місті від пожеж, то між ознаками X та Y в містах виявиться значна пряма кореляція. У середньому, чим більше пожежників у місті, тим більше збитків від пожеж. В чому ж справа? Дану кореляцію неможливо інтерпретувати як зв'язок причини та наслідку, тому що обидві ознаки – наслідки загальної причини – розміру міста. У великих містах більше пожежних частин, але більше і пожеж, і збитків від них за рік, ніж у малих. Такого типу кореляцію називають хибною кореляцією.

Хибна кореляція виникає і у випадку, коли кожна з ознак є і причиною, і наслідком. Наприклад, при відрядній оплаті праці існує кореляція між продуктивністю праці і заробітною платою. З одного боку, чим вища продуктивність праці, тим вища заробітна плата. З іншого – висока заробітна плата теж є стимулюючим фактором, який примушує робітника працювати більш інтенсивно. Аналогічно, надходження нових книг у шкільну бібліотеку не означає, що підвищаться екзаменаційні оцінки учнів.

За напрямком виділяють зв'язок *прямий* і *зворотний*, за аналітичним виразом – *лінійний* та *нелінійний*.

На початковій стадії аналізу статистичних даних не завжди потрібні кількісні оцінки, досить тільки визначити напрямок і характер зв'язку, з'ясувати форму впливу одних факторів на інші. З цією метою застосовують методи зіставлення паралельних даних, аналітичних групувань та графічний.

Єдиний спосіб, який абсолютно точно показує причину та наслідок, — це формальний експеримент, у якому можна змінювати одну або декілька вихідних змінних і оцінювати значення результативної змінної. Крім того, необхідно виконати порівняння, яке не залежить від зміни вихідних даних. Це може кількісно оцінити та обмежити вплив інших змінних, які не змінюються, але створюють „шум".

Основною задачею регресійного аналізу є встановлення форми та вивчення залежності між змінними. ***Основною задачою кореляційного аналізу*** є виявлелення зв'язку між випадковими величинами та оцінка його тісноти.

Для знаходження рівнянь регресії, взагалі кажучи, потрібно знати закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y). На практиці дослідник зазвичай має у своєму розпорядженні тільки вибірку пар значень (x_i, y_i) об'ємом n. В цьому випадку може йтися про оцінку за вибіркою функції регресії.

Якщо між двома випадковими величинами передбачається лінійна кореляційна залежність $y_x = a + b \cdot x$, то для розрахунку невідомих параметрів використовують ***метод найменших квадратів***, згідно з яким невідомі параметри *a* та *b* вибирають таким чином, щоб сума квадратів відхилень емпіричних групових середніх $\overline{y_i}$ від значень y_{x_i}, знайдених за рівнянням регресії, була мінімальною:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_{x_i} - \overline{y_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} (a + bx_i - \overline{y_i})^2 \to \min .$$

За необхідною ознакою екстремуму функції двох змінних $S = S(a, b)$ прирівняємо до нуля її частинні похідні, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{da} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (a + b \cdot x_i - \overline{y_i}) = 0 \\ \dfrac{dS}{db} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (a + b \cdot x_i - \overline{y_i}) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

звідки після перетворень отримаємо систему нормальних рівнянь для визначення параметрів лінійної регресії:

$$\begin{cases} a + b \cdot \overline{x} = \overline{y} \\ a \cdot \overline{x} + b \cdot \overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases}$$

де відповідні середні обчислюються за формулами:

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad \overline{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n}, \quad \overline{x^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2}{n}.$$

Підставивши значення $a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$ у рівняння регресії $y_x = a + b \cdot x$, отримаємо:

$y_x - \overline{y} = b \cdot (x - \overline{x})$. Коефіцієнт b називають *вибірковим коефіцієнтом регресії Y по X* і позначають b_{yx}. Він показує, на скільки одиниць в середньому змінюється змінна Y при збільшенні змінної X на одну одиницю.

$$y_x - \bar{y} = b_{yx} \cdot (x - \bar{x}).$$

$$b_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x^2} = \frac{\propto}{s_x^2},$$

де s_x^2 — вибіркова дисперсія змінної X, $\propto$ — *вибірковий кореляційний момент* або *вибіркова коваріація*.

Аналогічно, $x_y - \bar{x} = b_{xy} \cdot (y - \bar{y})$, $b_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_y^2} = \frac{\propto}{s_y^2}$,

де b_{xy} — *вибірковий коефіцієнт регресії X по Y*, який показує, на скільки одиниць у середньому зміниться X при збільшенні Y на одну одиницю, s_y^2 — вибіркова дисперсія змінної Y.

Для оцінки тісноти кореляційної залежності між ознаками служить коефіцієнт кореляції.

Вибірковим коефіцієнтом кореляції називається відношення різниці між математичним сподіванням добутку випадкових величин та добутку їх математичних сподівань до добутку середніх квадратичних відхилень цих випадкових величин:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{s_x \cdot s_y}.$$

Як бачимо, формула симетрична відносно двох змінних, тобто X та У можна міняти місцями.

На практиці найчастіше використовують іншу модифікацію формули вибіркового коефіцієнта кореляції, за якою r знаходять без округлення даних, пов'язаних з розрахунком середніх і відхилень від них:

$$r = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}.$$

Властивості вибіркового коефіцієнта кореляції

1. r за абсолютною величиною ≤ 1.

2. Якщо $r = 0$, то X та Y не пов'язані лінійною кореляційною залежністю, але інша залежність при цьому може мати місце.

3. Якщо $|r| = 1$, то X та Y пов'язані строго лінійною кореляційною залежністю. При цьому лінії регресії У по X та X по У співпадають і всі спостережувані значення знаходяться на одній прямій.

4. Якщо при зростанні однієї випадкової величини інша має тенденцію до зростання, то маємо позитивну кореляцію $r > 0$; якщо при зростанні однієї випадкової величини інша спадає, то маємо обернену кореляцію і $r < 0$. Залежність тим ближча до лінійної, чим $|r|$ ближчий до одиниці.

5. $r = \pm\sqrt{b_{yx} b_{xy}}$, тобто коефіцієнт кореляції змінних X та У є середньою геометричною коефіцієнтів регресії, що має їх знак.

Для оцінки тісноти нелінійного кореляційного зв'язку використовують такі характеристики, як *вибіркове кореляційне відношення* У по X η_{yx} та *вибіркове кореляційне відношення* X по У η_{xy}. При цьому згадаємо правило додавання дисперсій: $s^2_{заг.} = s^2_{сер.груп.} + s^2_{міжгруп.}$ (загальна дисперсія змінної дорівнює сумі середньої групових дисперсій (залишкової) та міжгрупової дисперсії). ($s^2_{заг.y} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m} (y_j - \overline{y})^2 \cdot n_j}{n}$,

$$s^2_{сер.гр.y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} s^2_{iy} \cdot n_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{l} \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{m} (y_i - \overline{y_i})^2 \cdot n_i}{n}}{n},$$

$s^2_{міжгруп.y} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} (\overline{y_i} - \overline{y})^2 \cdot n_i}{n}$). Залишкова дисперсія вимірює ту частину варіації У, яка виникає внаслідок коливання неврахованих факторів, що не залежать від Х. Міжгрупова дисперсія виражає ту частину варіації У, яка обумовлена коливанням Х.

Вибірковим кореляційним відношенням У по Х називають величину

$$\eta_{yx} = \sqrt{\frac{s^2_{\text{міжгруп.}y}}{s^2_{\text{заг.}y}}}.$$

Чим тісніший зв'язок, тим більший вплив на варіацію У має коливання Х порівняно з неврахованими факторами, тим більше η_{yx}. Аналогічно вводиться ***вибіркове кореляційне відношення Х по У***:

$$\eta_{xy} = \sqrt{\frac{s^2_{\text{міжгруп.}x}}{s^2_{\text{заг.}x}}}.$$

Вибіркове кореляційне відношення η_{yx} характеризує розсіювання точок кореляційного поля відносно лінії регресії, яка є ламаною, що з'єднує значення $\overline{y_i}$. У звязку з тим, що закономірна зміна $\overline{y_i}$ порушується випадковими вигинами ламаної, що виникають через залишкову дію неврахованих факторів, η_{yx} перебільшує тісноту зв'язку. Тому разом з η_{yx} розглядають показник тісноти зв'язку R_{yx}, який характеризує розсіювання точок кореляційного поля відносно лінії регресії y_x. Цей показник отримав назву *індекса кореляції* У по Х: $R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{\text{сер.гр.}y}}{s^2_{\text{заг.}y}}}$. Тут групові середні $\overline{y_i}$ заміняємо умовними середніми y_{x_i}, підрахованими за рівнянням регресії $y_x - \overline{y} = b_{yx} \cdot (x - \overline{x})$.

Аналогічно вводиться *індекс кореляції* Х по У: $R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{s^2_{\text{сер.гр.}x}}{s^2_{\text{заг.}x}}}$.

У випадку лінійної моделі $y_x - \bar{y} = b_{yx} \cdot (x - \bar{x})$, індекс кореляції R_{yx} дорівнює коефіцієнту кореляції за абсолютною величиною.

Коефіцієнт детермінації R^2, дорівнює квадрату індекса кореляції (для парної лінійної моделі — r^2), показує частку загальної варіації залежної змінної, яка зумовлена регресією чи варіацією пояснюючої змінної. Чим ближче R^2 до 1, тим краще регресія описує залежність змінних.

Властивості кореляційного відношення

1. $0 \le \eta \le 1$.
2. Якщо $\eta = 0$, то кореляційний зв'язок відсутній.
3. Якщо $\eta = 1$, то між змінними існує функціональний зв'язок.
4. $\eta_{yx} \ne \eta_{xy}$, тобто на відміну від коефіцієнта кореляції r (для якого $r_{yx} = r_{xy} = r$) при обчисленні кореляційного відношення суттєво, яку змінну вважати незалежною, а яку – залежною.
5. Кореляційне відношення η та індекс кореляції R пов'язані з коефіцієнтом кореляції r так: $0 \le |r| \le R \le \eta \le 1$.

Переваги кореляційного відношення та індекса кореляції

Кореляційне відношення та індекс кореляції є мірою тісноти будь-якого зв'язку, в тому числі й лінійного. Коефіцієнт кореляції оцінює тісноту тільки лінійного зв'язку.

Недоліки кореляційного відношення

Кореляційне відношення не дає змогу вести мову про те, наскільки близько розташовані точки, знайдені за даними спостереження до кривої певного виду (гіперболи, параболи, синусоїди і т.і.). Це пояснюється тим, що при знаходженні кореляційного відношення вид зв'язку не враховується.

Перевірка гіпотези про значущість кореляційного відношення

Перевірка значущості кореляційного відношення η полягає в тому, що статистика

$$F = \frac{\eta^2(n-m)}{(1-\eta^2)(m-1)},$$

де m – число інтервалів за групувальною ознакою має F- розподіл Фішера-Снедекора з $k_1 = m - 1$ та $k_2 = n - m$ ступенями свободи.

Тому η суттєво відрізняється від нуля, якщо $F > F_{\alpha,k_1,k_2}$, де F_{α,k_1,k_2} – табличне значення F –критерію з рівнем значущості α та числом ступенів свободи $k_1 = m - 1$ та $k_2 = n - m$.

Індекс кореляції R двох змінних значущий, якщо значення статистики $F = \dfrac{R^2 \cdot (n-2)}{1 - R^2}$ більше табличного F_{α,k_1,k_2}, де $k_1 = 1$ та $k_2 = n - 2$.

Перевірка гіпотези про значущість вибіркового коефіцієнта кореляції

Розглянемо вибірку об'ємом *n*, яку вилучено з нормально розподіленої двовимірної генеральної сукупності (*X, Y*). Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції r_B. Нехай він виявився не рівним нулю. Це ще не означає, що і коефіцієнт кореляції генеральної сукупності не рівний нулю. Тому при заданому рівні значущості α виникає необхідність перевірки нульової гіпотези H_0: $r_г = 0$ про рівність нулю генерального коефіцієнта кореляції при конкуруючій гіпотезі H_1: $r_г \neq 0$. Таким чином, при ухваленні нульової гіпотези *X* і *Y* некорельовані, тобто не пов'язані лінійною залежністю, а при відхиленні H_0 вони корельовані.

За критерій приймемо випадкову величину $T = \dfrac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_B^2}}$, яка при справедливості нульової гіпотези має розподіл Стьюдента з $k = n - 2$ ступенями свободи. З вигляду конкуруючої гіпотези виходить, що критична область двостороння з межами $\pm\, t_{кр}$, де значення $t_{кр}(\alpha, k)$ знаходиться за таблицями для двосторонньої критичної області.

Обчисливши спостережуване значення критерію $T_{спост} = \dfrac{r_B\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_B^2}}$ і порівнявши його з $t_{кр}$, робимо такий висновок:

- якщо $\left|T_{\text{ñïîñò}}\right| < t_{кр.}$ – нульова гіпотеза приймається (кореляції немає);
- якщо $\left|T_{\text{ñïîñò}}\right| > t_{кр.}$ – нульова гіпотеза відхиляється (кореляція має місце).

Рангова кореляція

Нехай об'єкти генеральної сукупності володіють двома якісними ознаками (тобто ознаками, які неможливо виміряти точно, але які дають змогу порівнювати об'єкти між собою і розташовувати їх у порядку зменшення або зростання якості). Домовилися для визначеності розташовувати об'єкти в порядку погіршення якості.

Нехай вибірка об'єму n містить незалежні об'єкти, що володіють двома якісними ознаками A і B. Необхідно з'ясувати ступінь їх зв'язку між собою, тобто встановити наявність або відсутність **рангової кореляції**.

Розташуємо об'єкти вибірки в порядку погіршення якості за ознакою A, припускаючи, що всі вони мають різну якість за обома ознаками. Назвемо місце, яке займає в цьому ряду деякий об'єкт, його **рангом** x_i: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_n = n$.

Тепер розташуємо об'єкти в порядку погіршення якості за ознакою B, привласнивши їм ранги y_i, де номер i рівний порядковому номеру об'єкта за ознакою A, а саме значення рангу рівне порядковому номеру об'єкта за ознакою B. Таким чином, отримано дві послідовності рангів:

$$\text{за ознакою } A: x_1, x_2, \ldots, x_n$$
$$\text{за ознакою } B: y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

При цьому, якщо, наприклад, $y_3 = 6$, то це означає, що даний об'єкт займає в ряду за ознакою A третє місце, а в ряду за ознакою B – шосте.

Порівняємо отримані послідовності рангів.

1. Якщо $x_i = y_i$ при всіх значеннях i, то погіршення якості за ознакою A спричиняє погіршення якості за ознакою B, тобто є «повна рангова залежність».

2. Якщо ранги протилежні, тобто $x_1 = 1$, $y_1 = n$; $x_2 = 2$, $y_2 = n - 1$;..., $x_n = n$, $y_n = 1$, то ознаки теж пов'язані: погіршення якості за однією з них приводить до покращення якості за іншою («протилежна залежність»).

3. На практиці найчастіше зустрічається проміжний випадок, коли ряд y_i не є монотонний. Для оцінки зв'язку між ознаками вважатимемо ранги $x_1, x_2,..., x_n$ можливими значеннями випадкової величини X, а $y_1, y_2,..., y_n$ – можливими значеннями випадкової величини Y. Тепер можна досліджувати зв'язок між X і Y, обчисливши для них вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_B = \frac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v},$$

де $u_i = x_i - \overline{x}$, $v_i = y_i - \overline{y}$ (умовні варіанти). Оскільки кожному рангу x_i відповідає тільки одне значення y_i, то частота будь-якої пари умовних варіант з однаковими індексами рівна 1, а з різними індексами – нулю. Крім того, з вибору умовних варіант випливає, що саме тому формула $r_B = \dfrac{\sum n_{uv} uv - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v}$ набуває більш простого вигляду:

$$r_B = \frac{\sum u_i v_i}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Отже, потрібно знайти σ_u і σ_v.

Можна показати, що $\sum u_i^2 = \sum v_i^2 = \dfrac{n^3 - n}{12}$. Враховуючи, що $\overline{x} = \overline{y}$, можна виразити $\sum u_i v_i$ через різниці рангів $d_i = x_i - y_i = u_i - v_i$. Після перетворень отримаємо: $\sum u_i v_i = \dfrac{n^3 - n}{12} - \sum \dfrac{d_i^2}{2}$, $\sigma_u = \sigma_v = \sqrt{\dfrac{n^2 - 1}{12}}$, звідки $n\sigma_u\sigma_v = \dfrac{n^3 - n}{12}$.

Таким чином, отримаємо **вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена**:

$$\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}.$$

Властивості вибіркового коефіцієнта кореляції Спірмена.

1. Якщо між *A* і *B* є «повна пряма залежність», тобто ранги співпадають при всіх *i*, то $\rho_B = 1$. Дійсно, при цьому $di = 0$, і з формули $\rho_B = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n}$ виходить справедливість властивості 1.

2. Якщо між *A* і *B* є «протилежна залежність», то $\rho_B = -1$. В цьому випадку, перетворюючи $di = (2i - 1) - n$, знайдемо, що $\sum d_i^2 = \frac{n^3 - n}{3}$, тоді $\rho_B = 1 - \frac{6(n^3 - n)}{3(n^3 - n)} = 1 - 2 = -1$.

3. У решті випадків $-1 < \rho_B < 1$, причому залежність між *A* і *B* тим менша, чим ближче $|\rho_B|$ до нуля.

Нехай потрібно при заданому рівні значущості β перевірити нульову гіпотезу про рівність нулю генерального коефіцієнта рангової кореляції Спірмена при конкуруючій гіпотезі $H_1: \rho_г \neq 0$. Для цього знайдемо критичну точку:

$$T_{kp} = t_{kp}(\alpha, k)\sqrt{\frac{1 - \rho_B^2}{n - 2}},$$

де n – об'єм вибірки, ρ_B – вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена, $t_{kp}(\alpha, k)$ – критична точка двосторонньої критичної області, знайдена за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента, число ступенів свободи $k = n - 2$.

Тоді, якщо $|\rho_B| < T_{kp}$, то нульова гіпотеза приймається, тобто ранговий кореляційний зв'язок між ознаками незначущий. Якщо $|\rho_B| > T_{kp}$, то нульова гіпотеза відхиляється, і між ознаками існує значущий ранговий кореляційний зв'язок.

Можна використовувати й інший коефіцієнт – коефіцієнт рангової кореляції Кендалла. Розглянемо ряд рангів $y_1, y_2, \ldots, y_n$, введений так само, як і раніше, і задамо величини R_i таким чином: нехай правіше y_1 є R_1 рангів, більших від y_1; правіше y_2 – R_2 рангів, більших від y_2 і так далі. Тоді, якщо позначити $R = R_1 + R_2 + ... + R_{n-1}$, то **вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендалла** визначається за формулою

$$\tau_B = \frac{4R}{n(n-1)} - 1,$$

де n – об'єм вибірки.

Зауваження. Легко переконатися, що коефіцієнт Кендалла володіє тими самими властивостями, що і коефіцієнт Спірмена.

Для перевірки нульової гіпотези H_0: $\tau_\Gamma = 0$, (генеральний коефіцієнт рангової кореляції Кендалла рівний нулю) при альтернативній гіпотезі H_1: $\tau_r \neq 0$ необхідно знайти критичну точку:

$$T_{кр} = z_{кр}\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}},$$

де n – об'єм вибірки, $z_{кр.}$ – критична точка двосторонньої критичної області, яка визначається з умови $\Phi(z_{кр.}) = \frac{1-\alpha}{2}$ за таблицею функції Лапласа (додаток 2).

Якщо $|\tau_B| < T_{кр.}$, то нульова гіпотеза приймається (ранговий кореляційний зв'язок між ознаками несуттєвий). Якщо $|\tau_B| > T_{кр.}$, то нульова гіпотеза відхиляється (між ознаками існує суттєвий ранговий кореляційний зв'язок).

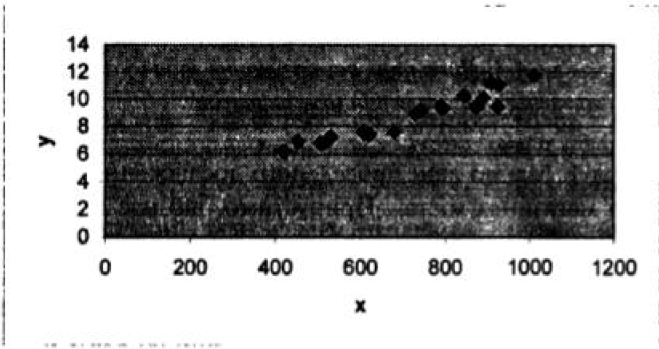
Приклади розв'язування задач з статистичного вивчення взаємозвязків між явищами

Приклад 1. Маємо дані проведеного дослідження в 20 випадково відібраних магазинах міста. Припустимо, що нас цікавить виручка від реалізації баночного пива в цих магазинах протягом дня. Для прогнозу об'ємів продажу побудувати просту модель парної регресії, в якій застосовується тільки одна факторна змінна – X (кількість покупців магазину). Дані, наведені в таблиці, подати у вигляді точкової діаграми (діаграми розсіювання).

Номер магазину	Кількість покупців	Виручка, у. од.
1	907	11,20
2	926	11,05
3	506	6,84
4	741	9,21
5	789	9,42
6	889	10,08
7	874	9,45
8	510	6,73
9	529	7,24
10	420	6,12
11	679	7,63
12	872	9,43
13	924	9,46
14	607	7,64
15	452	6,92
16	729	8,95
17	794	9,33
18	844	10,23
19	1 010	11,77
20	621	7,41
Разом	14,623	176,11

Розв'язування:

▼



Діаграма умовно показує наявність лінійної залежності виручки з продажу пива від кількості покупців магазину. Із збільшенням кількості покупців магазину зростає виручка з продажу.

Обчислимо параметри рівняння регресії:

$$\overline{y}_x = a + b \cdot x.$$

Для зручності розрахунків скористаємося наступною таблицею.

Використовуючи формулу, отримаємо:

$$b = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{20 \cdot 134127{,}9 - 14623 \cdot 176{,}11}{20 \cdot 11306209 - 14623^2} =$$

$$= \frac{5365{,}08}{614603} = 0{,}00873$$

або відповідно:

$$\overline{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{176{,}11}{20} = 8{,}8055\,; \ \overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{14623}{20} = 731{,}15\,;$$

$$b = \frac{134127{,}9 - 20 \cdot 731{,}15 \cdot 8{,}8055}{11306209 - 20 \cdot 731{,}15^2}\,;$$

$b = +0{,}00873$ і $a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}$;

$a = 8{,}8055 - 0{,}00873 \cdot 731{,}15 = +2{,}423$.

Магазин	Кількість покупців X	Виручка Y	XI	YI	XY
1	907	11,20	8822 649	125,4400	10 158,40
2	926	11,05	857 476	122,1025	10 232,30
3	506	6,84	256 036	46,7856	3 461,04
4	741	9,21	549 081	84,8241	6 824,61
5	789	9,42	622 521	88,7364	7 432,38
6	889	10,08	790 321	101,6064	8 961,12
7	874	9,45	763 876	89,3025	8 259,30
8	510	6,73	260 100	45,2929	3 432,30
9	529	7,24	279 841	52,4176	3 829,96
10	420	6,12	176 400	37,4544	2 570,40

11	679	7,63	461 041	58,2169	5 180,77
12	872	9,43	760 384	88,9249	8 222,96
13	924	9,46	853 776	89,4916	8 741,04
14	607	7,64	368 449	58,3696	4 637,48
15	452	6,92	204 304	47,8864	3 127,84
16	729	8,95	531 441	80,1025	6 254,55
17	794	9,33	630 436	87,0489	7 408,02
18	844	10,23	712 336	104,6529	8 634,12
19	1 010	11,77	1 020 100	138,5329	11 887,70
20	621	7,41	385 641	54,9081	4 601,61
Разом	14,623	176,11	11 306 209	1 602,0971	134 127,90

За даними задачі рівняння регресії має вигляд: $\overline{y}_x = 2{,}423 + 0{,}00873x$.

У прикладі, що розглядається b =0,00873. Це означає, що при збільшенні X на одиницю очікуване значення Y зросте на 0,00873. Тобто, регресійна модель вказує на те, що кожний новий покупець магазину в середньому збільшує тижневу виручку магазину на 0,00873 ум. од. (або можна сказати, що очікуваний приріст щоденної виручки становить 8,73 ум. од. при приході в магазин 100 додаткових покупців). Звідси b може бути інтерпретований як приріст щоденної виручки, який варіює залежно від числа покупців магазину.

Вільний член рівняння $a = +2{,}423$ ум. од. - це значення Y при X=0. Оскільки, малоймовірна кількість покупців магазину, рівна нулю, то можна інтерпретувати *a* як міру впливу на величину щоденної виручки інших факторів, не включених у рівняння регресії.

Регресійна модель може бути використана для прогнозу обсягу щоденної виручки. Наприклад, ми хочемо використати модель для виявлення середньої щоденної виручки магазину, який відвідають 600 покупців.

Для того, щоб визначити прогнозоване значення, слід X=600 підставити в наше регресійне рівняння:

$$\overline{Y}_x = 2{,}423 + 0{,}00873 \cdot 600 = 7{,}661 .$$

Звідси прогнозована денна виручка для магазину з 600 покупцями в день рівна 7,661 ум.од.

Коли ми використовуємо регресійні моделі для прогнозу, важливо пам'ятати що використовуються тільки значення незалежних змінних, які знаходяться в межах від найменшого до найбільшого значень факторної ознаки, при складанні моделі. Звідси, коли ми прогнозуємо Y за заданими значеннях X, ми можемо інтерполювати значення в межах заданих рангів X, але ми не можемо екстраполювати за межами рангів X. Наприклад, коли використовується число покупців для прогнозу денної виручки магазину, то ми знаємо із даних прикладу, що їх кількість знаходиться в межах від 420 до 1010. Отже, прогнозування тижневої виручки можна зробити тільки для магазинів з числом покупців від 420 до1010 чол.

Приклад 2. Для масиву даних побудувати діаграму розсіювання. Провести аналіз побудованої діаграми розсіювання, порівняти її з типовими варіантами.

1. Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції r і на його основі зробити висновок про величину залежності між змінними X та Y ($|r| < 0{,}3$ – слабкий зв'язок, $|r| < 0{,}8$ – середній зв'язок, $|r| \geq 0.8$ - сильний зв'язок.)

2. Оцінити лінію регресії $Y = a + bX$ і побудувати її графік на одному рисунку з діаграмою розсіювання.

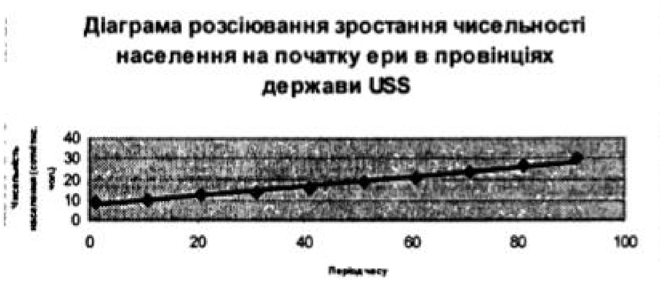
X	Y
1	9,057435
11	10,16176
21	12,22373
31	14,08729
41	15,91425
51	18,54022
61	20,91975
71	23,07158
81	25,96093
91	29,89385

Розв'язування:

▼

Для масиву даних побудуємо діаграму розсіювання. Проведемо аналіз побудованої діаграми розсіювання, порівняємо її з типовими варіантами.

Всього маємо 10 пар даних.



Порівняємо цю діаграму з типовими варіантами. Величина Y зростає із ростом X, це додатна кореляція. Причому ця тенденція досить сильна і можна говорити про сильну додатну кореляцію.

Підрахуємо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{1877{,}423}{\sqrt{8250 \cdot 433{,}8073}} = 0{,}992$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 8250, \quad \bar{x} = 46$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 433{,}8073, \quad \bar{y} = 17{,}98308$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) = 1877{,}423$$

Зв'язок між змінними X та Y сильний, кореляція додатна.

Щоб оцінити лінію регресії, розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10A + 460B = 179{,}8308 \\ 460A + 29410 \cdot B = 10149{,}64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0{,}228 \\ A = 7{,}515 \end{cases}$$

Рівняння лінійної регресії $Y = 7{,}515 + 0{,}228X$. Графік дивитися на діаграмі розсіювання.▼

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 14

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ ПРИ ВИРІШЕННІ ЕКОНОМІЧНИХ І УПРАВЛІНСЬКИХ ЗАВДАНЬ

1.Прийняття рішень в умовах невизначеності

Вчасно прийняти правильне рішення – головне завдання управлінського персоналу будь-якої компанії. Неправильне або нерозумне рішення може дорого коштувати або матиме фатальні чи невиправні наслідки.

Перед тим, як приймати рішення, потрібно детально продумати його мету. Проблема полягає в тому, що завдання різних підрозділів підприємства вступають у протиріччя один з одним. Наприклад, таке просте питання, як розмір запасів на складі. Інтереси виробництва потребують великого запасу сировини та матеріалів, що приводить до виникнення незавершеного виробництва і значно меншого випуску готової продукції. Але процес виробництва не припиняється. Водночас відділ маркетингу вимагає більших запасів готової продукції на складі і гнучких виробничих ліній, які можна переобладнати для невеликих замовлень. А бухгалтерія наполягає на збільшенні оборотності капіталу і, відповідно, мінімізації запасів, щоб вивільнені гроші можна було використовувати для реалізації інших цілей.

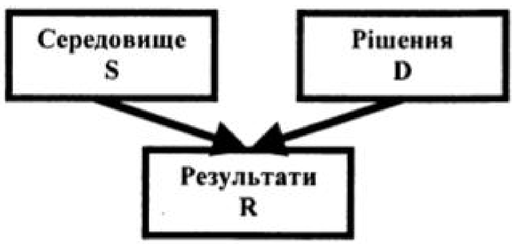
Як визначити оптимальні для компанії запаси? Чи розраховувати ці цифри для компанії в цілому, чи вибрати пріоритетні напрямки і контролювати запаси так, щоб забезпечити оптимальні витрати для виконання окремих функцій без урахування інших? Цей процес називають **субоптимізацією.** Прийняття рішення – досить складний та цікавий процес, який має виключно суб'єктивний характер. Як ми, наприклад, вибираємо улюблений кінофільм, книгу, спектакль? Те ж саме і в бізнесі – як організувати фірму: за принципом жорсткої централізації чи навпаки? Якого стилю дотримуватися в менеджменті: авторитарного чи демократичного?

Бухгалтери досить часто мають справу з проблемами, які приводять їх до кількісного аналізу під час прийняття рішення. Однак слід пам'ятати, що, зазвичай, рішення є результатом застосування як кількісного, так і суб'єктивного підходів.

Отже, щоб знайти правильне рішення, потрібно:

1. Визначити мету рішення.
2. Визначити можливі варіанти рішення проблеми.
3. Визначити можливі наслідки кожного рішення.
4. Оцінити кожний наслідок.
5. Вибрати оптимальне рішення на основі поставленої мети.

На наступному рисунку в спрощеній формі представлена схема прийняття рішень. Тут S – множина можливих станів середовища, D – множина можливих рішень і R – множина всіх можливих результатів. На результат впливають як наше рішення, так і стан середовища. Стан середовища є невизначеним, і описується в рамках теорії ризику якоюсь ймовірнісною моделлю: кажуть, що на S задано ймовірнісний розподіл. Через відображення M цей розподіл для кожного рішення d із множини D породжує розподіл на R. Таким чином, кожному рішенню відповідає свій розподіл на множині результатів, а вибір оптимального рішення зводиться до вибору «найкращого» розподілу на R.



Розглянемо такий простий приклад. Пікнік можна провести на відкритому повітрі в лісі або вдома. На природі, звичайно, краще, але якщо піде дощ, то пікнік буде зіпсований. У цьому прикладі середовище може перебувати в одному із станів:«дощ», «сухо». Множина рішень також складається з двох елементів: «ліс», «дім». Нехай розподіл на S заданий так: ймовірність того, що піде дощ, рівна 0,3, а ймовірність сухої погоди відповідно 0,7. Нехай множина результатів складається з чотирьох елементів («дуже погано», «погано», «середньо», «відмінно»), а відображення M виглядає наступним чіном:

M(дощ, ліс) =дуже погано,

M(дощ, дім) = погано,

M(сухо, ліс)=відмінно,

M(сухо, дім)=середньо.

Якщо ми приймемо рішення провести пікнік у лісі, то на множині результатів буде породжено розподіл, наведений у такій таблиці:

Значення	Дуже погано	погано	середньо	відмінно
Ймовірність	0,3	0	0	0,7

Рішення провести пікнік удома породжує такий розподіл:

Значення	Дуже погано	погано	середньо	відмінно
Ймовірність	0	0,3	0,7	0

Прийняття оптимального рішення в даному випадку означає вибір найкращого із наведених вище розподілів. Стандартна процедура вибору полягає у приписуванні кожному з результатів числового значення, трактуючи його як **«корисність»**, з наступною максимізацією очікуваної (середньої) корисності. Якщо ми оцінимо корисність результатів так, як наведено в наступній таблиці:

Значення	**Корисність**
дуже погано	0
погано	2
середньо	5
відмінно	10

то отримаємо наступні значення для очікуваної корисності рішень:

*u(дім)=0,3*2+0,7*5=4,1*

*u(ліс)=0,3*0+0,7*10=7.*

У даному випадку рішення провести пікнік у лісі має більшу очікувану корисність, воно й приймається.

Цікаво прослідкувати, як зміниться рішення при зміні інформації про можливі стани середища. Нехай ймовірність дощу становить 0,8, а ймовірність сухої погоди відповідно 0,2. Тоді обчислення очікуваних корисностей дає:

*u(дім)=0,8*2+0,2*5=2,6*

*u(ліс)=0,8*0+0,2*10=2,*

і оптимальним уже є рішення про проведення пікніка вдома.

В описаній схемі на вибір рішення впливає не тільки розподіл на множині станів середовища, але й значення корисності, які приписуються кожному з результатів.

Приклад 1. Відділ маркетингу компанії "Хитрий лис" надав своєму керівництву інформацію про очікуваний обсяг збуту програмних продуктів при трьох варіантах ціни.

Можлива ціна за одиницю, тис. грн	8,00	8,60	8,80
Передбачуваний обсяг продажу при даній ціні (одиниць за рік): найкращий із можливих	16000	14000	12500
найбільш імовірний	14000	12500	12000
найгірший із можливих	10000	8000	6000

Постійні витрати складають 40000 тис. грн за рік, змінні – 4 тис. грн на одиницю.

Рішення полягає в тому, щоб призначити оптимальну ціну. Зауважимо, що у нас є тільки три варіанти ціни, і, щоб полегшити розрахунки, для кожного з варіантів рішення маємо по три наслідки – різні обсяги продажу.

Розв'язування:

▼ Для кожного наслідку підрахуємо річний прибуток:

(тис.грн)

Ціна за одиницю	8,00	8,60	8,80
Змінні витрати на одиницю продукції	4,00	4,00	4,00
Прибуток на одиницю продукції	4,00	4,60	4,80
Загальний прибуток за рік: найкращий із можливих	64000	64400	60000
найбільш ймовірний	56000	57500	57600
найгірший із можливих	40000	36800	28800

Для того, щоб з'ясувати, які труднощі виникають у результаті невизначеності, ми будемо використовувати дані останньої таблиці. Можна уявити переконуючі аргументи, що приведуть нас до одного з трьох можливих рішень. Найбільший прибуток для найбільш імовірного обсягу продажу дорівнює 57600 тис. грн. Цю цифру буде отримано, якщо призначити ціну 8,80 тис. грн. Однак ціна 8,60 тис. грн є вигіднішою для компанії, оскільки найбільш ймовірний прибуток приблизно той самий, тоді як прибуток двох інших наслідків вищий, ніж для ціни 8,80 тис. грн. Однак, якщо ми візьмемо до уваги постійні витрати, то ціна 8,00 тис. грн – єдина, при якій "Хитрий лис" не несе збитків, тому що низький прибуток тут не менший, ніж постійні витрати – 40000 тис. грн. ▲

Таким чином, для будь-якого із трьох рішень існують свої аргументи. Яке рішення буде прийнято, залежить від цілей, які воно переслідує, і від відношення до ризику того, хто приймає рішення. Обережний менеджер віддасть перевагу ціні 8,00 тис. грн: можливі прибутки менші, але й збитки зведені до мінімуму. Тому серед інших має вирішуватися питання про відношення до ризику. Розглянемо, як правила прийняття рішень можна застосовувати у кожному конкретному випадку, а до питання про ризик повернемося пізніше.

Всі правила прийняття рішень діляться на дві групи:

1. Правила прийняття рішень без використання чисельних значень ймовірностей наслідків;

2. Правила прийняття рішень з використанням чисельних значень ймовірностей наслідків.

Правила першої групи:

1. **Максимаксне рішення** – максимізація максимуму прибутків.

2. **Максимінне рішення** – максимізація мінімуму прибутків.

3. **Мінімаксне рішення** – мінімізація максимуму можливих втрат.

Приклад 2. Припустимо, що ви власник кафе «Аладдін». На початку кожного дня вам потрібно вирішити питання, скільки тістечок потрібно мати в запасі, щоб задовольнити попит. Собівартість кожного тістечка 0,7 грн, а ви його продаєте за ціною 1,3 грн. Продати тістечка, що залишилися, на наступний день неможливо, тому залишок розпродується в кінці дня за ціною 0,3 грн. В наступній таблиці наведені дані про обсяги продажу за попередні періоди.

Попит на тістечка на день, шт.	1	2	3	4	5
Частота	5	10	15	15	5
Відносна частота (ймовірність)	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Потрібно визначити, скільки тістечок потрібно закупляти на початку кожного дня.

Розв'язування:

▼ Отже, на початку дня можна закупити для наступного продажу 1, 2, 3, 4 або 5 тістечок на день. Взагалі рішення і його наслідки приблизно однакові, але, маючи можливість приймати рішення, неможливо контролювати наслідки. Покупці визначають їх самі, тому наслідки мають "фактор невизначеності". Щоб знайти ймовірність кожного наслідку, складемо список можливих рішень і відповідних їм наслідків. У наступній таблиці розраховані доходи (грн) для будь-якої комбінації рішень та наслідків.

Можливі наслідки: попит тістечок на день	**Кількість закуплених для продажу тістечок (можливі рішення)**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0,60	0,20	-0,20	-0,60	-1,00
2	0,60	1,20	0,80	0,40	0,00
3	0,60	1,20	1,80	1,40	1,00
4	0,60	1,20	1,80	2,40	2,00
5	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00

Використовуючи кожне із правил прийняття рішення, потрібно дати відповідь на питання: "Скільки тістечок повинне закупляти кафе «Аладдін» на початку кожного дня?»

1. Правило максимаксу – максимізація максимуму прибутків. Кожному можливому рішенню у наведеній таблиці відповідають наступні максимальні прибутки. За цим правилом ви закуповуєте на початку дня 5 тістечок. Це підхід гравця в карти – ігнорувати можливі втрати і розраховувати при цьому на максимально можливий прибуток.

Кількість закуплених на день тістечок	Максимальний прибуток на день, тис. грн
1	0,60
2	1,20
3	1,80
4	2,40
5	3,00 ←**максимум**

2. Правило максиміну – максимізація мінімального прибутку. Кожному можливому рішенню відповідають мінімальні прибутки.

За цим правилом ви закупляєте на початку дня одне тістечко, щоб максимізувати мінімальний прибуток. Це дуже обережний підхід до прийняття рішення.

Кількість закуплених на день тістечок	Мінімальний прибуток на день, грн
1	0,60 ← **максимум**
2	0,20
3	- 0,20
4	- 0,60
5	- 1,00

3. Правило мінімаксу – мінімізація максимально можливих утрат. В даному випадку більше уваги надається можливим втратам порівняно з можливими доходами. Таблиця можливих втрат дає уявлення про прибуток кожного наслідку в результаті прийняття неправильного рішення. Наприклад, якщо попит становить два тістечка, і було закуплено два, то прибуток становитиме 1,20 грн, якщо ж ви придбали **три**, то прибуток – 0,80 грн, і ви недоотримали 0,40 грн. Ці 0,40 грн – те, що називається **можливими втратами** або **втраченим доходом**. Таблицю можливих втрат (грн) можна отримати із таблиці доходів: знайти найбільший прибуток для кожного наслідку і порівняти його з іншими прибутками того ж наслідку.

Можливі наслідки: попит тістечок на день	Кількість закуплених для продажу тістечок (можливі рішення)				
	1	2	3	4	5
1	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60
2	0,60	0,0	0,40	0,80	1,20
3	1,20	0,60	0,0	0,40	0,80
4	1,80	1,20	0,60	0,0	0,40
5	2,40	1,80	1,20	0,60	0,0

Як уже відмічалося, правило, яке використовується для роботи з таблицею втрачених доходів, – це правило мінімаксу. Його також називають **мінімаксним правилом можливих втрат**. Полягає воно в тому, щоб для кожного рішення обрати максимально можливі втрати. Потім вибирається те рішення, яке призводить дс мінімального значення максимальних втрат.

Кількість закуплених на день тістечок	Максимально можливі втрати на день, грн (з таблиці вище)
1	2,40
2	1,80
3	1,20 ← **мінімум**
4	1,20← **мінімум**
5	1,60

Мінімальна величина максимальних втрат виникає в результаті закупки трьох або чотирьох тістечок на день. Отже, за правилом мінімаксау ви оберете одне з цих рішень.

Всі розглянуті критерії прийняття рішення призводять до різних результатів. Тому спочатку обирається той критерій, який вважається «кращим», і тоді ви отримаєте «найкраще» для вас рішення.

Критерій Гурвіча – компромісний спосіб прийняття рішення. Цей спосіб прийняття рішення – компроміс між обережним правилом максимінау й оптимістичним правилом максимаксу. В ньому певним чином об'єднуються правила, які не розглядають індивідуальні ймовірності окремих наслідків, і ті, в яких враховуються ймовірності наслідків.

При використанні критерію Гурвіча таблиця доходів складається, як звичайно. Для кожного рішення розглядаються кращий і гірший результати. Той, хто приймає рішення, надає ваги обом результатам, і, помноживши результати на відповідні ваги та підсумовуючи, отримає загальний результат.

Обирається рішення з найбільшим результатом. Таке рішення задачі передбачає, що є досить інформації для визначення ваги.

Приклад 2 із закупкою тістечок погано ілюструє критерій Гурвіча, тому що високі доходи зустрічаються більше, ніж в одному наслідку. Наприклад, якщо ми вирішили закупляти три тістечка на день, найвищий прибуток 1,80 грн існує для попиту 3, 4 та 5 тістечок.

Спростимо таблицю доходів, щоб проілюструвати вищесказане, і розглянемо низькі доходи для кожного рішення та наслідки з високими доходами. У того, хто приймає рішення, немає даних щодо попиту, тому йому самому потрібно обчислити вагу для наслідків з низькими та високими доходами. У даному випадку найнижчий дохід з можливих – при одному тістечку на день, а найвищий – при п'яти.

Складемо таблицю, використовуючи ваги.

Кількість тістечок, що закупляються на день	**Дохід за день, грн**		**Ваги**		**Всього за день, грн**
	низький	**високий**	**x 0,4**	**x 0,6**	
1	0,6	0,6	0,24	0,36	0,6
2	0,2	1,2	0,08	0,72	0,8
3	-0,2	1,8	-0,08	1,08	1,0
4	-0,6	2,4	-0,24	1,44	1,2
5	-1,0	3,0	-0,40	1,80	1,4← **максимум**

Якщо той, хто приймає рішення використовує вказані ваги, то його рішення за правилом Гурвіча, буде полягати у тому, щоб закупляти п'ять тістечок на день.

Розглянемо другу групу правил прийняття рішення, в яких використовуються чисельні значення ймовірностей наслідків.

1. Правило максимальної ймовірності – максимізація найбільш ймовірних доходів. Розглянемо відносні частоти (ймовірності) денного попиту на тістечка.

Кількість тістечок, що закупляють на день	1	2	3	4	5
Частота	5	10	15	15	5
Відносна частота (ймовірність)	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найбільша ймовірність 0,3 відповідає попиту в три і чотири тістечок на день. Тепер розглянемо доходи кожного із наслідків і виберемо найбільший. За цим правилом кафе «Аладдін» повинне закупляти чотири тістечка на день.

Кількість тістечок, яку закупляють на день	Максимальний дохід за день, грн
3 4	1,80, коли наслідок дорівнює 3 чи більше 2,40, коли наслідок дорівнює 4 чи більше ← **максимум**

2. Оптимізація математичного сподівання. Найбільш поширений спосіб використання ймовірностей при прийняті рішення – це обчислення математичного сподівання. Воно обчислюється для кожного рішення або для доходів, або для можливих втрат. Обирається рішення або з найбільшим очікуваним доходом, або з найменшими можливими втратами.

а) **Максимізація очікуваного доходу** для рішення:

$$E(\text{дохід від будь-якого рішення}) = \sum(\text{ймовірність} * \text{дохід})$$

(підсумовуємо для усіх наслідків рішення, що розглядається).

У прикладі з кафе "Аладдін" очікуваний дохід у випадку, якщо вирішено закупляти п'ять тістечок на початку кожного дня, становить:

$$E(\text{дохід, якщо закупляти 5 тістечок}) = (0{,}1 * (-0{,}1)) + (0{,}2 * 0{,}0) +$$

$$+ (0{,}3 * 1{,}0) + (0{,}3 * 2{,}0) + (0{,}1 * 3{,}0) = 1{,}1 \text{ грн за день.}$$

Якщо розглядати більший часовий інтервал, то це означає, що при закупівлі п'яти тістечок на день **середній** прибуток кафе становить 1,1 грн за день.

Нижче наведена таблиця прибутків кафе «Аладдін", доповнена ймовірностями. Далі за нею – таблиця очікуваних доходів для кожного рішення.

Можливі наслідки: денний попит на тістечка	**Дохід за день, грн Кількість тістечок, які закупляються на день(можливі рішення)**					**Ймовірність**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	0,60	0,20	-0,20	0,60	1,00	0,1
2	0,60	1,20	0,80	0,40	0,0	0,2
3	0,60	1,20	1,80	1,40	1,00	0,3
4	0,60	1,20	1,80	2,40	2,00	0,3
5	0,60	1,20	1,80	2,40	3,00	0,1

Отже, максимальне значення очікуваного доходу 1,40 грн за день. Отже, за критерієм максимізації очікуваного прибутку, кафе «Аладдін» має закупляти три або чотири тістечка на день. В прикладах цього типу, де рішення повторюється багато разів, використання критерію математичного сподівання найбільш прийнятне.

Можливі наслідки: денний попит на тістечка	Кількість тістечок, закуплених на день (можливі рішення)				
	1	2	3	4	5
1	0,06	0,02	-0,02	-0,06	-0,10
2	0,12	0,24	0,12	0,08	0,0
3	0,18	0,36	0,54	0,42	0,30
4	0,18	0,36	0,54	0,72	0,60
5	0,06	0,12	0,18	0,24	0,30
Очікуваний дохід за день всього, грн	0,60	1,10	*1,40*	*1,40*	1,10

б) Мінімізація очікуваних можливих втрат. В даному випадку використовується та сама послідовність дій, тільки з'використанням таблиці можливих втрат і ймовірності кожного з наслідків. Вибирається рішення, яке призводить до найменш очікуваних можливих втрат, замість максимуму очікуваних доходів.

Можливі наслідки: денний попит на тістечка	Можливі втрати: кількість тістечок, які закупляються на день(можливі рішення)					Ймовірність
	1	2	3	4	5	
1	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	0,1
2	0,60	0,0	0,40	0,80	1,20	0,2
3	1,20	0,60	0,0	0,40	0,80	0,3
4	1,80	1,20	0,60	0,0	0,40	0,3
5	2,40	1,80	1,20	0,60	0,0	0,1

Як бачимо, мінімальні сподівані можливі втрати становлять 0,46 грн за день, тобто найкраще рішення – закупляти три або чотири тістечка на день. Таке ж саме рішення потрібно прийняти при використанні критерію максимізації очікуваних доходів.

Можливі наслідки: денний попит на тістечка	Кількість тістечок, які закупляються на день (можливі рішення)				
	1	2	3	4	5
1	0,0	0,04	0,08	0,12	0,16
2	0,12	0,0	0,08	0,16	0,24
3	0,36	0,18	0,0	0,12	0,24
4	0,54	0,36	0,18	0,0	0,12
5	0,24	0,18	0,12	0,06	0,0
Очікувані втрати за день - всього, грн	1,26	0,76	*0,46*	*0,46*	0,76

▲

Значення ймовірностей, які ми використовуємо, грунтуються або на інформації, яку ми маємо, або на розрахунках. Однак ці значення змінюються, і тому корисно знати, наскільки велика залежність вибору рішення від зміни величини ймовірності, тобто яка *чутливість рішення*.

Суть аналізу чутливості полягає у числовій оцінці зміни ймовірності, що визначає вибір рішення. Проілюструємо це на прикладі з максимізацією очікуваних доходів. Нижче розглянута ситуація з одним основним і одним альтернативним варіантом рішення, хоча, зазвичай, на практиці альтернативних варіантів більше.

Рішення, яке приносить максимальний дохід, – закупляти три або чотири тістечка, не змінилося, однак середній прибуток при альтернативному варіанті зменшився з 1,40 до 1,20 грн за день. У даному випадку вибір рішення є нечутливим до незначної зміни ймовірності, тобто не призводить до заміни вибраного варіанта рішень на новий.

	Кількість тістечок, що закупляються на день (можливі рішення)				
	1	2	3	4	5
Базові ймовірності	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
Очікуваний дохід за день, грн	0,5	1,1	1,4	1,4	1,1
Альтернативні ймовірності	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Очікуваний дохід за день, грн	0,6	1,0	1,2	1,2	1,0

Невизначеність при прийнятті рішень можна зменшити шляхом збирання додаткової інформації, однак за неї потрібно платити. Максимальна сума грошей, яку варто заплатити, і є **вартістю достовірної інформації**. Якщо наперед невідомо, який із наслідків буде мати місце, то можна прийняти рішення, яке веде до максимального доходу, але це не означає, що ми можемо контролювати наслідки.

Наприклад, кафе «Аладдін» приймає замовлення на наступний день. Контролювати їх кількість неможливо, однак можна, коректуючи закупівлю тістечок, максимізувати дохід. На кількість куплених тістечок тепер впливатиме кількість попередніх замовлень. **Очікуваний дохід** (*дохід від попереднього обсягу замовлень * ймовірність даного обсягу замовлень*) становить:

$$E = (0{,}60 * 0{,}1) + (1{,}20 * 0{,}2) + (1{,}80 * 0{,}3) + (2{,}40 * 0{,}3) + (3{,}00 * 0{,}1) = 1{,}86 \text{ грн.}$$

Вартість достовірної інформації дорівнює різниці між очікуваним доходом і максимальним очікуваним доходом без цієї достовірної інформації: $1.86 - 1.40 = 0.46$ (грн) за день. Ця цифра рівна **мінімальним очікуваним можливим втратам.**

Якщо відомі мінімальні очікувані можливі втрати, то відомий максимум, який можна заплатити за додаткову інформацію про ймовірності наслідків. Таким чином, кафе «Аладдін» може заплатити максимум 0,46 грн в день, щоб отримати інформацію про попит, тобто це плата за своєрідні«маркетингові дані».

2. Статистичний контроль якості

Якість – найбільш важлива характеристика будь-якого бізнесу, яка повинна перебувати в центрі уваги всіх працівників, незалежно від їхньої посади. Контроль якості – найбільш важливий елемент досягнення якості: може розглядатися на двох рівнях. На більш низькому рівні для управління якістю з метою зменшення кількості бракованих виробів використовують статистичні методи. На більш високому рівні якість можна розглядати як стиль роботи всієї компанії щодо постачальників, виробленої продукції та до замовників. Одна з основних тез лідерів руху за якість полягає в тому, що використання статистичних методів на початковому рівні має незначний ефект, якщо не підкріплюється відповідним стилем роботи організації в цілому.

Тому абсолютно необхідно зрозуміти, що статистичні методи контролю якості повинні застосовуватися за наявності відповідних загальних умов. Ці умови були описані на початку 50-х років доктором У. Е. Демінгом (W.E.Deming) – одним з перших спеціалістів в галузі контролю якості.

Демінг стверджував, що замовники можуть отримати більше, ніж просто задоволення від поставки продукції; вони повинні отримати таке задоволення від неї, що питання про наступне замовлення у них просто не буде викликати сумніву. Для того, щоб цього досягти, компанія повинна запропонувати замовнику товар найвищої якості за розумною ціною. Демінг підкреслював, що вказані цілі не є несумісними. Поліпшення якості зовсім не означає збільшення ціни товару. Насправді, поліпшення якості призводить до зниження витрат, оскільки число товарів, які доведеться віднести до браку чи піддати переробці, помітно знижується. Крім того, через підвищення продуктивності зменшується число перебоїв у процесі роботи (див. наступну схему).

Покращення якості продукції

↓

Зниження витрат

↓

Підвищення продуктивності якості

↓

Збільшення обсягів продажу шляхом реалізації продукції більш високої якості за більш низькими цінами

↓

Розширення бізнесу і збільшення числа робочих місць

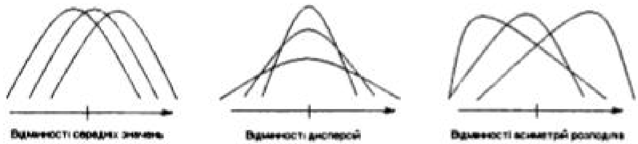
Для підвищення якості продукції необхідно знати вимоги замовника. Отже, складовою частиною циклу якості має стати дослідження споживачів.

Спочатку ми розглянемо можливості для контролю технологічного процесу. А далі – методи управління технологічним процесом, які дають змогу зберегти досягнутий рівень якості і контролювати сам процес.

Будь-який технологічний процес є мінливим, навіть якщо він функціонує у повній відповідності зі встановленими нормативами. Розглянемо, наприклад, такі технологічні процеси:

- розливання фруктового соку в картонні упаковки певного об'єму за допомогою спеціального верстата;
- перевірка діаметра отворів, просвердлених у стальному листі;
- перевірка ваги упаковки цукру;
- знаходження довжини металевих стержнів, нарізаних металорізальним верстатом.

У кожному з цих процесів верстат працює у відповідності з деяким заданим середнім значенням, але можливе відхилення параметрів окремих виробів в той чи інший бік. Зазвичай, значення параметрів, менші чи більші від середнього значення, збалансовані і мають нормальний розподіл значень змінної. Дисперсія розподілу також змінюються залежно від виду верстата.

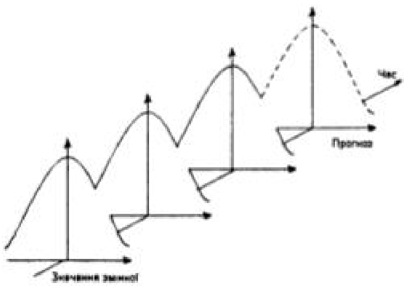


Ця мінливість містить у собі два компоненти:

- мінливість під дією простих чи неусувних причин;
- мінливість під дією невипадкових або спеціальних причин.

Прості причини мінливості існують завжди, і, фактично, їх не можна усунути до тих пір, поки сам процес не буде змінений. Поява такої мінливості пов'язана з типом використаних верстатів, і загальними умовами функціонування процесу. Її значення залежить від конкретного верстата або конкретних умов. Для перетворення загальної мінливості необхідно або використовувати новий, або модифікувати старий верстат, або здійснювати контроль за умовами функціонування процесу.

Якщо технологічний процес контролюється, тобто здійснюється правильно, то загальні причини мінливості приводять до розподілу, який стійкий у часі і прогнозується.



Варіація, яка з'являється під дією загальних причин, визначає межі функціонування технологічного процесу за наявності контролю за дотриманням певних умов, тобто за наявності правильних стартових параметрів, правильного матеріально-технічного обслуговування, управління з боку фахівця відповідної кваліфікації, використання відповідної сировини.

Невипадкові, або спеціальні, причини коливання з'являються через виникнення особливих змін у самому технологічному процесі або в навколишньому середовищі, які можна виявити. Наприклад:

- помилка оператора під час налагодження верстата;
- часткова поломка або уповільнення роботи верстата;
- поломка заводських кондиціонерів і несподіване збільшення температури повітря;
- недотримання пропорцій під час змішування різних інгредієнтів сировини.

Невипадкові причини мінливості приводять до нестабільності розподілу значень змінної, і передбачити вид розподілу тоді неможливо. Технологічний процес виходить з-під контролю.

Статистичний контроль за технологічним процесом використовується для визначення умов, за яких цей процес можна контролювати, або умов, коли виникають неполадки і процес виходить з-під контролю. Якщо технологічний процес неможливо контролювати через появу невипадкових причин мінливості, то за допомогою статистичного методу виявити ці причини не можна. Цей метод тільки дає змогу операторові встановити факт наявності *ймовірних* неполадок. Оператор повинен першим дізнатися, що технологічний процес порушено. Якщо він не в змозі встановити причину непередбачуваних змін, то повинен повідомити про це відповідну керівну особу своєї організації. Швидкість і результативність реакції на сигнал, отриманий завдяки застосуванню статистичного методу, визначає свідоме ставлення до проблеми якості в усій організації.

Необхідність розрахунку виробничих можливостей процесу визначається двома причинами. По-перше, можна визначити, які види робіт можна якісно виконати на даному верстаті. Якщо можливості верстата такі, що він може працювати у відповідності з допустимим відхиленням ± 1 мм, то було б помилкою припускати, що він задовольняє більш вузькому проміжку допустимих відхилень $\pm 0{,}5$ мм. Вимірювання виробничих можливостей процесу дає змогу визначити, які види робіт можна виконати на даному верстаті, а які – ні.

По-друге, для того, щоб перевірити, чи перебуває технологічний процес під контролем, необхідно визначити рівень мінливості, при якому технологічний процес знаходиться під контролем. Мінливість процесу в цілому потрібно визначати так, щоб можна було виділити мінливість, яка викликана простими і особливими причинами. Необхідно визначити виробничі можливості процесу при правильних стартових параметрах, відповідній сировині і управлінні професійного оператора. Після того, як визначені і виміряні загальні причини мінливості, з'являється можливість визначити варіацію, яка виникає внаслідок невипадкових причин.

Виробничі можливості процесу визначаються як допустимий інтервал неусувної або простої мінливості технологічного процесу в нормальних умовах. Цей інтервал дає змогу судити про можливість виготовлення конкретного продукту в рамках даного технологічного процесу.

Під час розрахунку виробничих можливостей процесу, зазвичай, передбачається, що розглянена змінна нормально розподілена. Якщо ми припустимо, що в деякому технологічному процесі змінна має нормальний розподіл із середнім значенням $\propto$ і стандартним відхиленнням σ, то виробничі можливості розраховують, зазвичай, як $\propto + 3\sigma$, тобто величина інтервалу виробничих можливостей становить 6σ. На практиці оцінку виробничих можливостей технологічного процесу розраховують за допомогою вибірки, тобто з використанням не 6σ, а 6s, де s – стандартне відхилення вибірки. Ще відмітимо, що технологічний процес повинен функціонувати в нормальних умовах за тими параметрами, які визначають його виробничі можливості.

З усієї продукції, отриманої за допомогою даного технологічного процесу, випадковим чином здійснюється вибірка не менше, ніж 50 одиниць, в умовах, коли процес є контрольованим. Кожний виріб вимірюється відповідною змінною, на основі якої розраховується стандартне відхилення.

Приклад 3. На деякому верстаті виконується різання сталевого дроту певної довжини. Налагодження верстата здійснювалася з розрахунку, що довжина кожного відрізка становить 100 мм. Контроль за роботою веде оператор. З усієї партії випадковим чином відібрали 60 відрізків дроту і заміряли їх довжини. Було встановлено, що середня довжина одного шматка становить 100,1 мм, а стандартне відхилення рівне 0,2 мм. Які виробничі можливості цього верстата?

Розв'язування:

▼ Виробничі можливості становлять6 * стандартне відхилення = 6*0,2 =1,2 мм. Ідеальною була б ситуація, коли б здійснювалася перевірка отриманого значення виробничих можливостей для відрізків дроту іншої довжини, що надало б можливості переконатися в нормальному функціонуванні верстата незалежно від того, на яке значення параметра здійснюється його налагодження. ▲

Після того, як виміряні виробничі можливості, з'являється база для ухвалення рішення про виконання конкретних завдань за наявності специфікації робіт і при заданих допустимих відхиленнях. Якщо даний технологічний процес не задовольняє вимогам специфікації, процес виробництва не можна починати до тих пір, поки не буде знайдено вирішення проблеми (в даному випадку використання іншого верстата або зміна існуючої технології). Наслідком застосування неадекватних технологічних процесів є виробництво виробів низької якості, які доводиться визнати бракованими або піддати переробці, що також приведе до збільшення витрат і порушення звичного ритму роботи.

Приклад 4. Звернемося до ситуації, яка була описана у попередньому прикладі. Компанія отримала чотири замовлення на сталеві дроти. Специфікації і допустимі відхилення, що відповідають кожному замовленню:

Замовлення	**Довжина**	**мм**
1	100	+0,5
2	95	0,0+1,0
3	105	+1,0
4	110	+0,7

Верстат можна налагодити на виробництво стальних дротів необхідної довжини, зазвичай, таке переналагодження здійснюється з розрахунку на середину інтервалу допустимих відхилень. Яке з цих замовлень можна виконати на даному верстаті?

Розв'язування:

▼Можливості даного технологічного процесу рівні 1,2 мм. Продукція, яка буде випущена з використанням даного верстата, задовольняє специфікацію, якщо допустимі відхилення більші, ніж виробничі можливості.

Замовлення 1. Допустиме відхилення становить +0,5 мм, довжина інтервалу – 1,0 мм. Верстат, який має можливість виробництва дротів 1,2 мм, не задовольняє цю специфікацію. Необхідно використати інший верстат, який може виготовляти дроти 1,0 мм чи менше, або переглянути специфікацію за угодою із замовником.

Замовлення 2. Виконується налагодження верстата на виготовлення дротів 95,5 мм. Допустимі відхилення: від 0,0 до +1,0 мм. Верстат, який виготовляє дроти 1,2 мм, не задовольняє цю специфікацію. Таким чином, цей верстат не можна використовувати і в даному випадку.

Замовлення 3. Допустиме відхилення становить +1,0мм, довжина інтервала 2 мм. Верстат, який може виготовляти дроти 1,2мм, задовольняє цю специфікацію.

Замовлення 4. Допустиме відхилення становить +0,7мм, довжина інтервалу 1,4мм. Виробничі можливості верстата задовольняють і цій специфікації.▲

Ідея про існування простих чи неусувних або таких, яких не можна уникнути, причин мінливості технологічного процесу є основою для всієї теорії контролю якості. Вона зачіпає всіх співробітників організації – розробників, збутовиків, інженерів, бухгалтерів, але насамперед – замовника. У попередньому прикладі спеціаліст з відділу продажу не повинен приймати замовлення 1 і 2, якщо верстат, що розглядається – єдиний вид обладнання, який має у своєму розпорядженні фірма. У цьому випадку йому слід обговорити специфікацію із замовником. Якщо металеві дроти призначені для використання всередині компанії, розробники повинні ознайомитися з виробничими можливостями обладнання, що є на підприємстві. Їм потрібно обговорити це питання з інженерами у зв'язку з можливістю внесення деяких змін. Нерідко посадові особи цього рівня припускають, що вироби нестандартної довжини можна відсортувати у процесі контролю за ходом технологічного процесу. Однак головний бухгалтер може бути проти цього заходу у зв'язку з його високою вартістю. Цей приклад ілюструє необхідність створення продуманої системи управління і об'єднання зусиль усіх співробітників, які спрямовані на підвищення якості.

Контрольні карти використовуються для оцінки «контрольованості» або «неконтрольованості » процесу. Цю оцінку можна отримати:

- здійснюючи перевірку замірів найважливіших параметрів виробу, наприклад, ваги цукру в одній упаковці, діаметра отвору, просвердленого в листі металу, довжини металевого дроту;

- здійснюючи перевірку окремих якісних характеристик виробу, наприклад, чи герметично запаковано пакет, чи правильно закрита кришкою бутилка, чи не пошкоджено фарфоровий виріб і т. і.

У першому випадку використовуються контрольні карти кількісної ознаки, а в другому – контрольні карти якісної ознаки. Оскільки кожний з указаних видів контрольних карт має свою сферу застосування, ми розглянемо їх окремо.

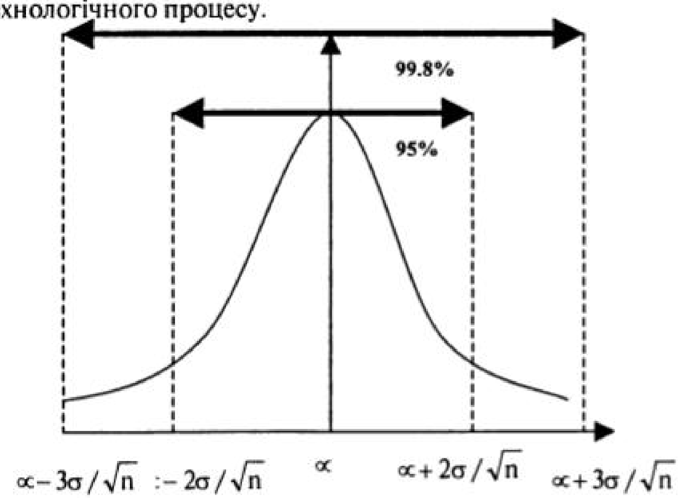
Контрольні карти кількісних ознак при відомих $\propto$ та σ: Ці контрольні карти були запропоновані Шухартом ще в 20-ті роки, коли він працював у телефонній компанії Bell Laboratories (США), тому їх іноді називають картами Шухарта. За допомогою цих карт виявляють відмінності між мінливістю технологічного процесу, який викликаний простими причинами, і мінливістю, що з'явилася під дією невипадкових причин. Існує декілька видів карт Шухарта. Ми зупинимося більш детально на двох типах: контрольній карті середніх арифметичних і контрольній карті мінливості технологічного процесу.

Контрольна карта середніх арифметичних технологічного процесу. Якщо генеральна сукупність має нормальний (або близький до нормального) розподіл з середнім значенням α і стандартним відхиленням σ, вибірковий розподіл вибіркової середньої також є нормальним і має таке саме середнє значення та стандартну помилку, рівну $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, де n – об'єм вибірки. Для будь-якого нормального розподілу між граничними значеннями, рівними

$$\propto \pm 2 \text{ x стандартне відхилення },$$

знаходиться приблизно 95% розподілу. Ймовірність того, що отримане значення виявиться більшим, ніж $\propto + 2$ x стандартне відхилення, становить 2,5%, або один випадок із 40, ймовірність отримання значення, меншого $\propto - 2$ x стандартне відхилення також становить 2,5%. Аналогічно інтервал $\propto \pm 3$ x стандартне відхилення охоплює близько 99,8% розподілу. Ймовірність того, що отримане значення перевищує $\propto + 3$ x стандартне відхилення або виявиться меншим, ніж $\propto - 3$ x стандартне відхилення, становить 0,1%, тобто ця подія матиме місце в одному випадку із тисячі.

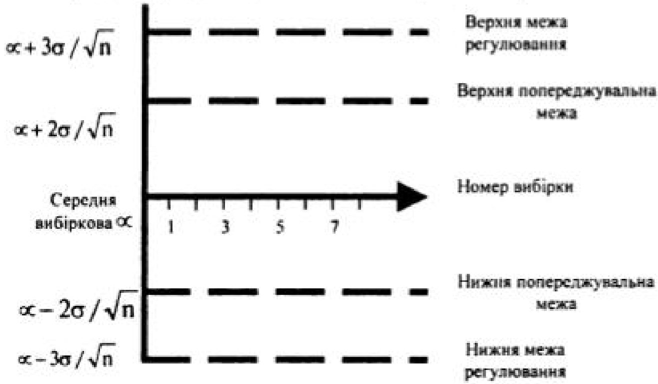
Графічна ілюстрація цих крайніх значень показана на наступному рисунку вибіркового розподілу вибіркової середньої. Ця діаграма є основою для складання контрольної карти середньої арифметичної технологічного процесу.



Для побудови цього графіка необхідно, щоб значення $\propto$ та σ були відомі. Їх оцінки отримують за результатами розрахунків середнього значення і стандартного відхилення відповідних параметрів технологічного процесу впродовж великого проміжку часу.

95%-ві межі розподілу називаються верхньою і нижньою **попереджувальними межами**. 98%-ві межі розподілу називаються верхньою і нижньою **межами регулювання**.

Побудова контрольної карти полягає в нанесенні на графік вибіркових середніх у відповідності з номером вибірки.



Стандартна процедура використання цих контрольних карт складається з таких кроків:

1. Через рівні проміжки часу проводиться вибірка об'ємом n і розраховується вибіркова середня.
2. Отримані значення вибіркових середніх наносяться на контрольну карту відповідно до номера вибірки.
3. Якщо вибіркова середня лежить за межами регулювання, технологічний процес зупиняється з метою виявлення невипадкових причин варіації.
4. Якщо два послідовно отриманих значення вибіркових середніх знаходяться на проміжку між попереджувальною межею і межею регулювання, проводяться невідкладні дії із зупинки процесу виробництва та виявлення неполадок. Якщо деяке середнє значення

лежить за попереджувальними межами, наступна вибірка проводиться відразу ж, до моменту проведення чергової вибірки.

5. Якщо точки на графіку утворюють явний зростаючий чи спадаючий тренд, вживаються певні заходи навіть у випадках, коли ці точки знаходяться в попереджувальних межах. Цей тренд може виявитись індикатором наявності невипадкових причин, наприклад, зниження параметрів наладки верстата.

Застосування цієї процедури інколи призводить до необґрунтованих зупинок технологічного процесу, але це трапляється вкрай рідко. Будь-які затримки, пов'язані із зупинками процесу виробництва будуть більше, ніж та економія, яку можна отримати внаслідок покращення якості продукції.

Ця процедура, по суті, є ніщо інше, як перевірка гіпотез. Нульова гіпотеза полягає в тому, що технологічний процес перебуває під контролем, причому всі технологічні параметри відповідають встановленим виробничим можливостям. Альтернативна гіпотеза стверджує, що процес неконтрольований. Кожного разу, коли ми проводимо вибірку, здійснюється процедура перевірки гіпотез. Якщо вибіркова середня лежить за попереджувальними межами, H_0 відхиляється при 5%-вому рівні значущості. Якщо вона знаходиться за межами регулювання, ми відхиляємо H_0 при 2%-вому рівні значущості. За допомогою контрольних карт можна без проблем показати результати перевірки гіпотез, що періодично повторюються.

Приклад 5. Проводиться фасування чаю в упаковки об'ємом по 125г. Відомо, що фасувальний верстат працює із стандартним відхиленням 0,15г.

Для забезпечення необхідної ваги достатньо налагодити верстат на середнє значення 125г. Через кожні півгодини проводиться випадкова вибірка об'ємом 5 упаковок. Кожну упаковку зважують. Нижче наведені результати шести послідовних вибірок.

Номер вибірки	1	2	3	4	5	6
Вага упаковки, г	125,1 125,3 125,1 124,8 125,1	124,9 125,0 125,1 124,9 124,7	125,2 125,1 125,3 125,0 125,1	125,0 125,0 124,7 125,2 125,1	124,8 124,8 125,2 125,1 124,9	124,9 125,1 125,0 124,9 125,2

Побудувати за цими даними контрольну карту середнього арифметичного та описати функціонування процесу розфасовки.

Розв'язування:

▼ Центральна вісь контрольної карти відповідає рівню $\propto = 125$ г.

Попереджувальні межі будуються на рівнях:

$\propto \pm 2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 125 \pm 2 \cdot \frac{0{,}15}{\sqrt{5}} = 125 \pm 0{,}134$ тобто для 124,866 г та 125,134 г.

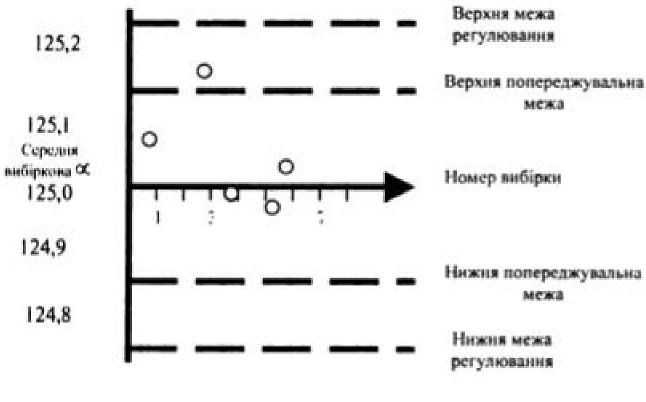
Межі регулювання будуються на рівнях:
$\propto \pm 3 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 125 \pm 3 \cdot \frac{0{,}15}{\sqrt{5}} = 125 \pm 0{,}201$

тобто для 124,799 г та 125,201 г.

Обчислимо середнє значення кожної із вибірок.

Номер вибірки	1	2	3	4	5	6
Середнє значення, $\overline{x}$, г	125,0 8	124,92	125,14	125,0	124,96	125,02

Нанесемо середні значення на контрольну карту. Середнє значення вибірки 3 знаходиться вище верхньої попереджувальної межі, однак середнє значення наступної вибірки знаходиться в середині контрольних границь. Тобто можна запропонувати, що приводів для хвилювання немає. Припускається, що вибірка 4 проводиться відразу після вибірки 3, в якій були виявлені деякі відхилення параметрів.



Раніше ми припускали, що продукція виробляється з використанням верстатів та технологій всередині компанії, які також перебувають під її контролем. Між іншим, компанія може мати наміри перевіряти якість продукції, яку закупляють у зовнішніх постачальників, щоб визначити, чи відповідає вона стандартам, передбаченим у договорі. Аналогічно, клієнти компанії можуть вимагати, щоб перед відправкою їм продукції була проведена її остання перевірка. Такі перевірки якості вхідних і вихідних потоків продукції і складають дві області застосування вибірки при приймальному контролі якості. Ця процедура є підсумковою перевіркою результатів усіх заходів з контролю якості, які мали місце в ході технологічного процесу компанії.

Коли на одному з цих етапів здійснюється перевірка продукції, необхідно сформулювати правила, якими потрібно керуватися у випадку виявлення бракованих виробів. Кількість бракованих виробів у вибірці надає можливість висновки про частку браку в партії продукції в цілому. Таким чином, відповідні правила стосуються рішень, які необхідно прийняти з приводу партії продукції, якщо у вибірці було виявлено певну кількість бракованих виробів. Наведемо приклад такої схеми вибірки:

1. Здійснюється випадкова вибірка з партії продукції об`ємом 15 одиниць, потім перевіряється кожний виріб у вибірці.

2. Якщо у вибірці не було ні одного, чи виявлено один бракований виріб, припускається, що всі вироби в партії мають прийнятний рівень якості. Партія продукції приймається.

3. Якщо ж у вибірці було виявлено два і більше бракованих виробів, припускається, що якість усієї партії продукції нижча від допустимого рівня. Партія продукції відхиляється.

Це – приклад схеми одноетапної вибірки. За необхідності можна користуватися схемою, яка допускає двохетапну вибірку. Наприклад:

1. Здійснюється випадкова вибірка з партії продукції об'ємом 15 одиниць, потім перевіряється кожний із виробів у вибірці.

2. Якщо у вибірці не було ні одного бракованго виробу, припускається, що всі вироби мають прийнятний рівень якості і партія продукції приймається.

3. Якщо у вибірці було виявлено один чи два бракованих вироби, здійснюється друга вибірка об'ємом 20 одиниць, потім перевіряється кожний із цих виробів у вибірці:

а) якщо у другій вибірці виявлено не більше одного бракованого виробу, здійснюється приймання партії продукції;

б) якщо в другій вибірці виявлено більше одного бракованого виробу, то відмовляються від приймання всієї партії продукції.

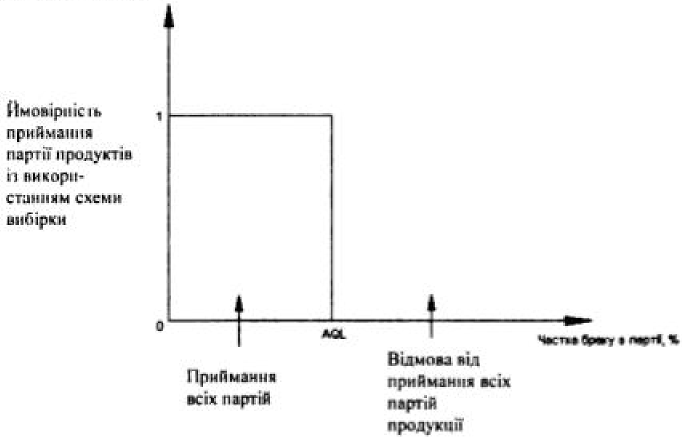
4. Якщо у першій вибірці виявлено три і більше бракованих вироби, припускається, що якість цієї партії продукції нижча від допустимого рівня і приймається рішення про відмову від приймання партії продукції.

Цей вид схеми виробничого приймального контролю якості базується на біноміальному розподілі ймовірностей, який означає, що більшість розрахунків складні і потребують тривалих часових затрат. У результаті цього при обчисленні параметрів схеми вибірки, зазвичай, використовують спеціальні таблиці і карти. Оскільки основна ідея цього методу достатньо проста, ми зупинимося на принципі роботи алгоритму. Деталі розрахунків обумовлюються в показані нижче прикладі.

Приклад 6. Здійснюється поставка партії продукції від зовнішнього постачальника. Випадковим чином здійснюється вибірка, і вироби, які до неї потрапили, перевіряються. Система перевірки характеризується трьома параметрами – питомою вагою бракованих виробів p, об'ємом вибірки n і максимально допустимим числом бракованих виробів у вибірці c. Схема вибірки визначається за допомогою n і c. Якщо, наприклад, $n=12$, а $c=1$, із партії продукції здійснюється вибірка 12 виробів. Акт приймання партії має місце, якщо у вибірці не було жодного чи було виявлено один бракований виріб. Якщо ж число бракованих виробів дорівнює два і більше, від партії продукції відмовляються.

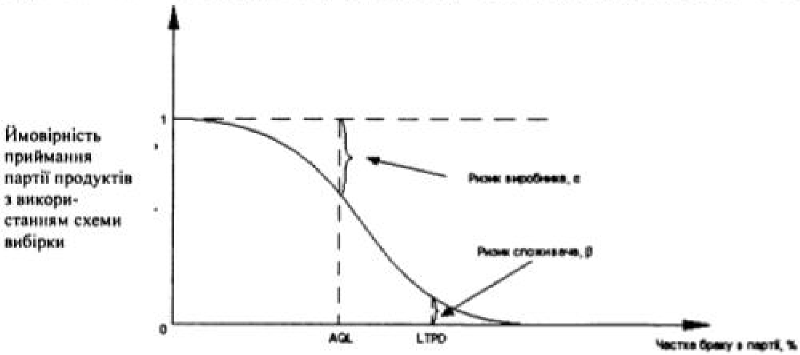
Зовсім необов'язково, щоб об'єм вибірки був визначеним відсотком від розміру усієї партії продукції, однак найважливішою умовою є принцип випадковості вибірки, який забезпечує репрезентативність партії продукції.

Вибір числових значень *n* і *c* залежить від частки бракованих виробів у партії продукції, яку допускає клієнт. Наприклад, замовник має намір здійснювати приймання будь-якої партії продукції, кількість бракованих виробів якої не перевищує 4%, і відмовляється від партії продукції з більшою часткою бракованих виробів. Максимально допустима частка бракованих виробів називається **допустимим рівнем якості** (AQL). В ідеалі необхідна така схема вибірки, за допомогою якої здійснювалося б приймання всіх партій продукції, частка бракованих виробів у яких не перевищує AQL, і відмова від тих партій продукції, частка бракованих виробів у яких перевищує AQL.



Наведений вище графік – приклад побудови **кривої оперативної характеристики (O-C Curve – крива O-C).** На практиці таких ідеальних ситуацій не існує, тому, зазвичай, замовника просять встановити ще один вимірювач. Він отримав назву **допустимого відсотка бракованих виробів у партії (LTPD).** LTPD визначає максимальну частку бракованих виробів, яку замовник допускає в партії продукції. Клієнт готовий здійснити прийомку деяких партій продукції, частка бракованих виробів в яких лежить у межах між AQL та LTPD, але він відмовляється приймати ті партії продукції, у яких цей показник вищий від LTPD. Виробник не повинен поставляти партії продукції, у яких питома вага браку вищи, ніж LTPD. Отже, схема вибірки повинна бути продумана таким чином, щоб виявити такі партії продукції якомога точніше. Крива О-С для цього випадку наведена на наступному рисунку.

На жаль, поки що не розроблені методи практичної побудови схем вибірки, які б працювали в чіткій відповідності зі схемою, наведеною на попередньому рисунку. На практиці крива О-С



виглядає частіше всього так, як показано на наступному рисунку.

Звернемося тепер до проблеми ймовірності прийняття неправильних рішень. Ризик виробника α — це ймовірність того, що застосування схеми вибірки призведе до відмови від приймання партії продукції, яка виявилась би прийнятною з погляду споживача. Ризик споживача β — це ймовірність того, що застосування схеми вибірки призведе до приймання партії продукції, неприйнятної для споживача. Схема вибірки, що застосовується на практиці, повинна бути спрямована на зведення кожної з імовірностей до мінімуму.

Для того, щоб виробити відповідну схему вибірки, виробник і споживач повинні укласти угоду з таких питань:

1. Допустимий рівень якості.

2. Ризик виробника α, тобто ймовірність того, що вживання даної схеми помилково призведе до відмови від приймання партії продукції, в якій питома вага бракованих виробів рівна AQL — партії, яку споживач міг би прийняти.

3. Допустимий відсоток бракованих виробів у партії.

4. Ризик споживача β, тобто ймовірність того, що вживання даної схеми помилково приведе до приймання партії продукції, питома вага браку в якій рівна LTPD — партії, від приймання якої споживач би відмовився.

Для будь-яких заданих об'єму вибірки n і максимально допустимого числа відмов від приймання C легко можна побудувати криву оперативної характеристики, використовуючи біноміальний розподіл. Для будь-яких заданих значень AQL та LTPD можна знайти відповідну ймовірність α і β. Набагато складніше побудувати відповідну криву, якщо значення α і β задані апріорно. У даному випадку неохідно звернутися до літератури, що містить готові таблиці систем контролю.

Приклад 7.

1. Побудувати криву оперативної характеристики для наступних двох схем вибіркового контролю.

Схема А: об'єм вибірки $n = 8$, $c = 1$, тобто здійснюється приймання партії

продукції, якщо число бракованих виробів у вибірці не більше одного включно.

Схема В: об'єм вибірки $n = 16$, $c = 2$, тобто здійснюється прийомка партії продукції, якщо число бракованих виробів у вибірці не більше двох включно.

Розглянути значення частки бракованих виробів у партії *p* від 0,05 до 0,40 рухаючись з кроком 0,05.

2. Якщо виробник і споживач приходять до згоди про те, що AQL рівний 5%, ризик виробника рівний 0,05, якщо LTPD складає 25%, а ризик споживача — 0,05, яка із схем буде кращою в даній ситуації?

3. Розробити більш відповідну схему вибірки і побудувати криву О-С.

Розв'язування:

1. За формулами для біноміального розподілу знаходимо ймовірність наявності *r* бракованих виробів у вибірці розміром *n*:

$$P(r) = {}^{n}C_{r} \cdot p^{r} \cdot q^{n-r}, \quad \text{де} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ймовірність приймання партії продукції визначається як $P(r \le c)$.

Схема А:

$$P(r) = C_{r}^{8} \cdot p^{r} \cdot q^{8-r}, \quad \text{де} \quad r = 0, 1, 2, \ldots, 8.$$

тобто $P(0) = q^{8}$ і $P(1) = 8 \times p \times q^{7}$,

Р(приймання партії) = $P(r \le 1) = P(r = 0) + P(r = 1)$.

p	*q*	*P(r=0)*	*P(r=1)*	*P(r≤ =1)*
0,05	0,95	0,66342	0,27933	0,94275
0,10	0,90	0,43047	0,38264	0,81311
0,15	0,85	0,27249	0,38469	0,65718
0,20	0,80	0,16777	0,33554	0,50331
0,25	0,75	0,10011	0,26697	0,36708
0,30	0,70	0,05765	0,19765	0,25530
0,35	0,65	0,03186	0,13726	0,16912
0,40	0,60	0,01680	0,08958	0,10638

Значення $P(r \le 1)$ тобто Р(приймання партії продукції при заданому *p*) нанесені на наступний графік залежно від значень *p*.

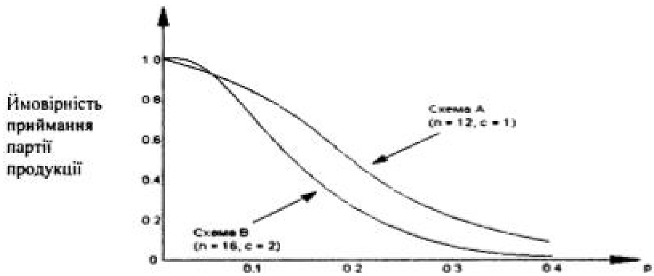
Схема В:

$P(r) = C_r^{16} \times p^r \times q^{16-r}$, де $r = 0, 1, 2, \ldots, 16$.

P(приймання партії) = $P(r \leq 2) = P(r = 0) + P(r = 1) + P(r = 2)$.

p	*P(r=0)*	*P(r=1)*	*P(r=2)*	*P(r≤ 2)*
0,05	0,44013	0,37063	0,14630	0,95706
0,10	0,18530	0,32943	0,27452	0,78925
0,15	0,07425	0,20965	0,27748	0,56138
0,20	0,02815	0,11259	0,21111	0,35185
0,25	0,01002	0,05345	0,13363	0,19710
0,30	0,00332	0,02279	0,07325	0,9936
0,35	0,00102	0,00875	0,03533	0,04510
0,40	0,00028	0,00301	0,01505	0,01834

Значення P(r≤=2), тобто P(прийомки партії продукції з застосуванням схеми B) також нанесені на наступний графік.



2. Із попереднього графіка випливає, що ймовірність відмови від приймання задовільної партії продукції для AQL, рівного 0,05, становить:

Схема А:

P(помилкового відмови від приймання придатної партії продукції) = =1 – 0,943 = 0,057.

Схема В:

P(помилкового відмови від приймання придатної партії продукції) = =1 – 0,957 = 0,043.

В обох схемах ризик виробника становить приблизно 0,05.

Якщо LTPD рівне 0,25 (достатньо високе значення), ймовірність приймання партії продукції складатиме:

Схема А:

Р(помилкової прийомки непридатної партії продукції) = 0,367.

Схема В:

Р(помилкового приймання непридатної партії продукції) = 0,197.

В обох схемах ризик споживача дуже великий і значно перевищує 0,05.

Обидві схеми не придатні для споживача, думка якого в процесі вироблення угоди є більш вагомою. Адже саме споживач оплачує замовлення на партію продукції.

3. Для відповіді на це питання мають використовуватися поняття «випробування» і помилки при визначенні відповідної комбінації *n* і *c*. Це достатньо легко зробити за допомогою складання таблиць розсіювання або використання готових таблиць. Без них трудомісткість розрахунків помітно виросте.

Задовольняючою є комбінація n = 28 і c = 3.

p	$P(r=0)$	$P(r=1)$	$P(r=2)$	$P(r=3)$	$P(r\leq 3)$
0,05	0,23783	0,35048	0,24903	0,11359	0,95093
0,10	0,05233	0,16282	0,24423	0,23518	0,69456
0,15	0,01056	0,05219	0,12433	0,19015	0,37723
0,20	0,00193	0,01354	0,04570	0,09901	0,16018
0,25	0,00032	0,00296	0,01333	0,03852	0,05513
0,30	0,00005	0,00055	0,00319	0,01186	0,01565
0,35	0,00001	0,00009	0,00063	0,00295	0,00368
0,40	0,00000	0,00001	0,00010	0,00060	0,00071

Якщо AQL = 0,05, то Р(відмови від приймання придатної партії продукції) = 1 – 0,951 = 0,049. Отримане значення достатньо близьке до заданого ризику виробника, рівного 0,05.

Якщо LTPD = 0,25, то Р(помилкового приймання непридатної партії продукції) = 0,055. Це значення також близьке до заданого ризику виробника, рівного 0,05.

3. Вимірювання економічних ризиків

Економічний ризик — це об'єктивно-суб'єктивна категорія у діяльності суб'єктів господарювання, що пов'язана з подоланням невизначеності та конфліктності в ситуації неминучого вибору. Вона відображає міру (ступінь) відхилення від цілей, від бажаного (очікуваного) результату, міру невдачі (збитків) з урахуванням впливу керованих і некерованих чинників, прямих та зворотних зв'язків щодо об'єкта керування.

Об'єктом ризику називають економічну систему, ефективність та умови функціонування якої наперед точно невідомі.

Під *суб'єктом ризику* розуміють особу (або колектив), яка зацікавлена в результатах керування об'єктом ризику і має компетенцію прийняття рішень щодо об'єкта ризику.

Джерело ризику — це чинники (явища, процеси), які спричиняють невизначеність результатів, конфліктність у широкому сенсі цього поняття.

Під *інформаційною ситуацією* розуміють певний ступінь градації невизначеності навколишнього середовища в одному з можливих станів із заданої множини, якою володіє суб'єкт управління на момент прийняття рішення.

Якісний аналіз ризику вимагає ґрунтовних знань, досвіду, інтуїції в тій чи іншій сфері економічної діяльності. Його головна мета — визначити чинники і зони ризику, після чого ідентифікувати всі можливі ризики. Характерними є, для цього аналізу зокрема, такі аспекти.

Перший аспект пов'язаний з необхідністю порівнювати очікувані позитивні (сприятливі) результати з можливими економічними, соціальними (як сьогоденними, так і майбутніми) несприятливими наслідками. У зв'язку з цим необхідно ідентифікувати причини виникнення ризику, виявити його чинники, види невизначеності та конфліктності, які зумовлюють ризик. Необхідно також здійснити класифікацію ризику.

Другий аспект якісного аналізу ризику пов'язаний з виявленням впливу рішень, які приймаються в умовах невизначеності та конфліктності, на інтереси суб'єктів господарювання. Без урахування інтересів (заінтересованості) неможливі якісні перетворення в соціально-економічному житті як на макрорівні, так і на макро- та мікрорівнях. Насамперед необхідно виявити, для кого і якою мірою цей ризик корисний? Чиїм інтересам він відповідає? Йдеться про те, що коли немає заінтересованості в результатах економічних рішень, то немає й ризику.

Отже, ситуація результату може бути охарактеризована, зокрема, такими рисами: наявність невизначеності та (чи) конфліктності; наявність альтернатив (стратегій) та необхідність вибору однієї з них (уникнення того, щоб здійснити вибір, є різновидом вибору); можливість оцінити наявні альтернативи — прийняти рішення.

Спочатку людина (суб'єкт ризику) усвідомлює ризикованість ситуації, прогнозує можливі потенціальні втрати (збитки), причому не лише у формі грошей, а й престижу, злагоди з керівництвом, роботодавцями, постачальниками тощо. Усвідомивши ситуацію як таку, що обтяжена ризиком, вона оцінює її прийнятність для себе. На відміну від теорії прийняття рішень, вихідний пункт якої — гіпотеза, що суб'єкт уже перебуває в ризикованій ситуації, людина (керівник) вирішує, як її уникнути.

Навіть потрапивши в ризиковану ситуацію, вийти з якої не просто (наприклад, необхідність сплатити значний штраф), можна пристосуватися до ризику, спробувавши модифікувати обставини, що склалися. Так, відклавши на деякий час прийняття остаточного рішення, можна пошукати вихід із становища, що склалося, чи зібрати додаткову інформацію. Скажімо, ризик можна знизити за допомогою страхування, делегування своїх повноважень тощо. Але за додаткову інформацію треба платити, за страхування — також. В той же час, відклавши прийняття рішення, можна потрапити в ситуацію ризику невикористаних можливостей.

Прийняття рішень в умовах невизначеності, яка породжує ризик, характеризується тим, що неможливо однозначно передбачити їхні наслідки. Тобто варіанти будь-якої економічної діяльності, що розглядаються, є варіантами з різним (за величиною) рівнем сподіваного прибутку й характеризуються різною ймовірністю (об'єктивною чи суб'єктивною), що цей прибуток буде досягнуто саме на цьому рівні. Така непевність призводить до того, що прибуток стає випадковою чи розпливчастою величиною, яку можна максимізувати лише за умови прийняття ряду гіпотез та коли у підприємця (менеджера) наявна певна схильність (несхильність) до ризику як міри (ступеня) невизначеності.

Причини виникнення невизначеності й зумовленого нею ризику поділяються на три групи.

Перша група. Більшість пов'язаних з економікою процесів є принципово індетермінованими. Таким, наприклад, є науково-технічний прогрес, про хід якого неможливо зробити точний прогноз. Важко передбачити також різні природні явища, зміни клімату, розвиток смаків споживачів тощо.

Друга група. Можна говорити про економічно оптимальну неповноту інформації, бо нерідко більш доцільно працювати з неповною інформацією, ніж збирати вкрай дорогу практично повну інформацію. До цієї групи можна віднести і неповноту інформації, зумовлену обмеженістю потужностей для її обробки, бо ця обмеженість пояснюється економічними причинами. Сюди ж відносять і неточності, що виникають внаслідок наближених методів оцінки даних, наприклад вибіркові спостереження і експертні оцінки. Зменшення цих неточностей також потребує певних додаткових затрат.

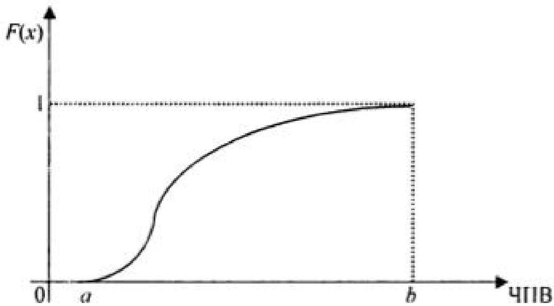
Третя група. Існує, так би мовити, «організована» невизначеність, або асиметрія інформації. Вона спричинена тим, що нерідко деякі економічні агенти вважають доцільним приховувати деяку частину інформації з економічних, політичних чи з інших причин. Наприклад, надто важко прогнозувати можливості зовнішньо-торговельних операцій із стратегічними товарами. Іноді керуючому органові управління важко оцінити можливості та зусилля підлеглих підрозділів і навпаки.

Беручи «традиційне» поводження суб'єкта прийняття рішення, розглянемо кілька можливих спрощених ситуацій. У кожній ситуації подано як функцію розподілу ймовірності $F(x)$ (інтегральну функцію розподілу), так і функцію щільності розподілу ймовірності $f(x)$

(диференційну функцію розподілу), які задають закон розподілу випадкової величини певного економічного показника (наприклад, ЧПВ (чиста приведена вартість), яка характеризує доцільність інвестування в один проект або вибору між альтернативними проектами).

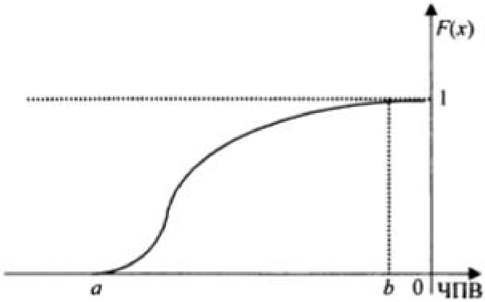
Випадкову величину ЧПВ позначимо через X, і нехай вона може приймати тільки скінченні значення (що є цілком природно). Нехай також відомий інтервал $[a;b]$, якому належать значення ЧПВ ($X \in [a,b]$).

Ситуація 1. Для проекту, що досліджується $\min\limits_{x \in R} F(x) = 0 = F(a)$ і при цьому $a \geq 0$.



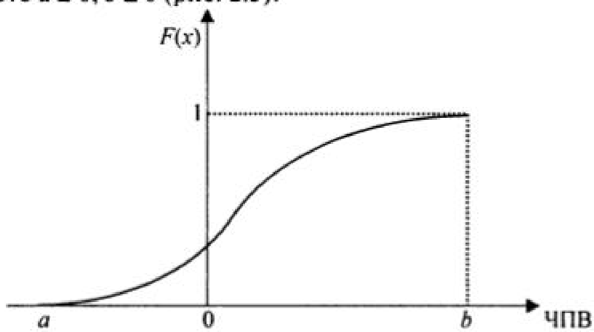
Оскільки ЧПВ проекту набуває лише додатних значень, то ймовірність від'ємних значень ЧПВ $P(X < 0) = F(0) - F(-\infty) = 0$, а тому є сенс прийняти цей проект.

Ситуація 2. Для досліджуваного проекту $\max\limits_{x \in R} F(x) = 1 = F(b)$ і при цьому $b \leq 0$.



Оскільки ЧПВ проекту набуває лише від'ємних значень, то ймовірність додатних значень ЧПВ дорівнює $P(X \geq 0) = F(+\infty) - F(0) = 1 - 1 = 0$, а тому є сенс ухилитися від цього проекту.

Ситуація 3. Найбільше значення функції розподілу ймовірності ЧПВ знаходиться праворуч точки, у якій ЧПВ = 0; а найменше — ліворуч, тобто $a \leq 0$; $b \geq 0$ (рис. 2.5).

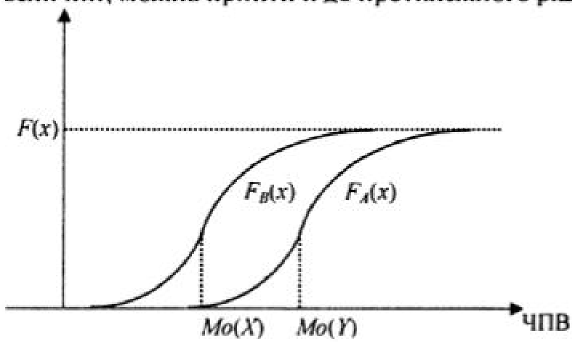


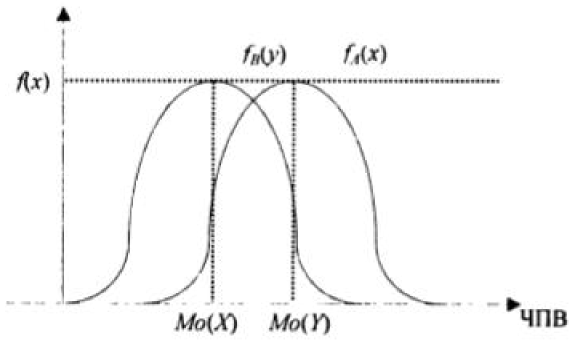
Тоді ймовірність від'ємних значень ЧПВ становить $P(X < 0) = F(0) - F(a) = p - 0 = p > 0$, ймовірність додатних значень ЧПВ $P(X \geq 0) = F(b) - F(0) = 1 - p = q > 0$.

Отже, $p > 0$, $q > 0$, тобто існує імовірність того, що ЧПВ проекту може виявитись як додатною, так і від'ємною величиною. А тому рішення в цьому випадку залежить від схильності (несхильності) суб'єкта прийняття рішень до ризику, що вимагає додаткових гіпотез (припущень) чи додаткової інформації.

Ситуація 4. Графіки функцій розподілу ймовірності ЧПВ двох альтернативних (взаємовиключаючих) проектів *A* (випадкова величина *X*) та *B* (випадкова величина *Y*) не перетинаються, і ЧПВ набувають лише додатних значень.

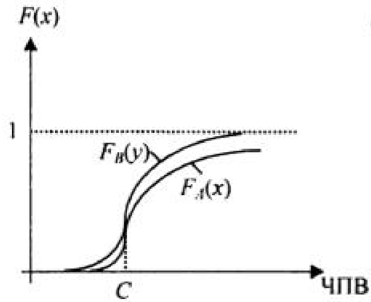
На першому рисунку через *Mo*(*X*) і *Mo*(*Y*) позначено точки перетину графіків функцій розподілу ймовірностей випадкових величин *X* та *Y*, а на другому — це точки, що відповідають модам цих випадкових величин (точки, що забезпечують максимум функціям щільності розподілу). Прийнято вважати, що в даній ситуації доцільно віддати перевагу тому проектові, у якому мода розташована дещо більш праворуч. Але якщо використати дисперсію, коефіцієнт варіації, коефіцієнт асиметрії чи коефіцієнт ексцесу, то, залежно від значень цих величин, можна прийти й до протилежного рішення.



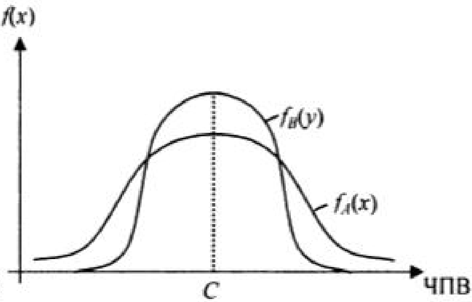


Ситуація 5. Графіки функцій розподілу ймовірності ЧПВ двох альтернативних проектів *A* та *B* перетинаються і ЧПВ набувають лише додатних значень.

У цій ситуації, навіть коли сподівані значення ЧПВ проектів *A* та *B* збігаються (точка С на рисунку), суб'єкти (інвестори), схильні до ризику, можуть обрати проект *A*, де з певною ймовірністю можуть реалізуватися кращі (більші за величиною) значення ЧПВ. Обережні інвестори, навпаки, можуть зупинитися на альтернативі *B*. Все залежить від виду функцій щільності розподілу ймовірностей $f_A(x)$ та $f_B(x)$, та від таких числових характеристик, як, скажімо, семіваріація, коефіцієнти асиметрії та ексцесу.



а)



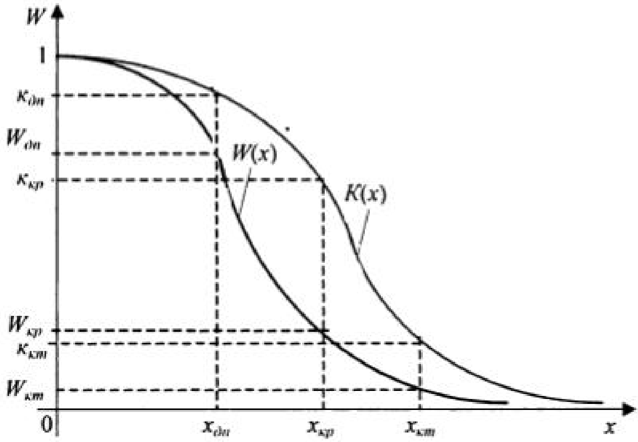
б)

Оцінюючи ризик, на практиці нерідко обмежуються спрощеними підходами, спираються на один чи кілька головних показників (критеріїв), параметрів, які являють собою найважливіші узагальнені характеристики у даній конкретній ситуації.

У ряді випадків, зокрема в страхуванні, величину (ступінь) ризику визначають як ймовірність настання небажаних наслідків. В цьому випадку

$W = p_н$,де $p_н$ ⁻ ймовірність настання небажаних наслідків, W – величина ризику.

При аналізі збитків, кожній із запропонованих зон ризику слід поставити у відповідність кількісні показники, критерії ризику. В прикладних проблемах економічного ризику для оцінки його величини широке використання має *ймовірність перевищення заданого рівня збитків.* Ця ймовірність обчислюється за формулою: $W(x) = P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$. Розглянемо типовий графік розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків.



Виділяють три такі найважливіші базові показники ризику.

Показник допустимого ризику: $W_{дп} = W(x_{дп}) = P(X \ge x_{дп})$, тобто $W_{дп}$ — це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий рівень $x_{дп}$.

Показник критичного ризику: $W_{кр} = W(x_{кр}) = P(X \ge x_{кр})$,

тобто $W_{кр}$ — це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий критичний рівень $x_{кр}$.

Показник катастрофічного ризику: $W_{кт} = W(x_{кт}) = P(X \ge x_{кт})$, тобто $W_{кт}$ — це ймовірність того, що збитки виявляться більшими, ніж їх гранично допустимий катастрофічний рівень $x_{кт}$.

Знання цих показників дає змогу виробити міркування щодо можливості прийняти рішення відносно здійснення певної підприємницької діяльності. Але для остаточного прийняття рішення інформації про значення названих показників недостатньо — необхідно ще задати (встановити, прийняти) їх граничні величини, щоб не потрапити в зону неприйнятного ризику. Такі величини називають *критеріями відповідно допустимого, критичного та катастрофічного ризику* — $\kappa_{дп}$, $\kappa_{кр}$, $\kappa_{кт}$.

Отже, маючи значення трьох показників ризику та критеріїв граничного ризику, приходимо до таких найбільш загальних умов прийнятності рівня ризику в досліджуваному виді підприємництва:

$$W(x_{дп}) \le \kappa_{дп};$$
$$W(x_{кр}) \le \kappa_{кр};$$
$$W(x_{кт}) \le \kappa_{кт}.$$

Приклад 8. При здійсненні багаторазових інвестицій у певну підприємницьку діяльність обчислюється величина збитків у вигляді відсотка величини реальних збитків по відношенню до розрахункової суми виручки. Було встановлено, що обчислена таким чином величина збитків підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами $m = 20\%$ (математичне сподівання) та $\sigma = 4\%$ (середньоквадратичне відхилення).

Фірма-інвестор встановила для себе такі критерії ризику: $\kappa_{дп} = 20\%$; $\kappa_{кр} = 5\%$: $\kappa_{кт} = 0{,}1\%$.

Як бути інвестору, якщо керівництво фірми, що домагається отримати інвестиції, вважає реальними такі показники ризику: $x_{дп} = 24\%$; $x_{кр} = 28\%$; $x_{кт} = 32\%$?

Розв'язування:

Оскільки у випадку нормального розподілу випадкової величини X інтегральна функція розподілу $F(x) = 0{,}5 + + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, де $\Phi(t)$ — функція Лапласа, то $W_{дп} = P(X > x_{дп}) = 1 - P(X < x_{дп}) = 1 - F(x_{дп}) =$

$$= 1 - 0{,}5 - \left(\Phi\left(\frac{x_{дп} - m}{\sigma}\right)\right) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{24-20}{4}\right) = 0{,}5 - \Phi(1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587,$$

тобто $W_{дп} = 0{,}1587 < 0{,}2 = \kappa_{дп}$.

Аналогічно знаходимо, що

$W_{кр} = P(X > x_{кр}) = 0{,}5 - \Phi(2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$,

тобто $W_{кр} = 0{,}0228 < 0{,}05 = \kappa_{кр}$;

$W_{кт} = P(X > x_{кт}) = 0{,}5 - \Phi(3) = 0{,}5 - 0{,}49865 = 0{,}00135$,

тобто $W_{кт} = 0{,}00135 > 0{,}001 = \kappa_{кт}$.

Виходячи з того, що $W_{кт} > \kappa_{кт}$, а також враховуючи, що інвестори — люди дуже обережні, робимо висновок, що фірмі-прохачу інвестиція не буде надана. ▲

Приклад 9. Відомо, що відносні збитки, обчислені щодо до запланованих витрат від даного виду підприємницької діяльності, мають функцію щільності розподілу ймовірності

$$f(x) = \frac{4x^2}{30^3\sqrt{\pi}} e^{-x^2/30^2}, \ x \geq 0,$$

($f(x) = 0$ при $x < 0$).

Суб'єктом керування визначені границі допустимих, критичних та катастрофічних відносних збитків: $x_{дп}$=45%; $x_{кр}$=60%; $x_{кт}$=75%.

Оцінити величину ризику допустимого, критичного та катастрофічного збитків.

Розв'язування:

▼ Шукані величини ризиків обчислюються за формулами:

$$W_{дп} = 1 - F(x_{дп});\ W_{кр} = 1 - F(x_{кр});\ W_{кт} = 1 - F(x_{кт}),$$

функція $F(x) = 2(\Phi(t) - t\varphi(t))$, де $t = x\sqrt{2/b}$. Оскільки згідно з умовою функція щільності характеризується параметром b = 30%, то, використовуючи результати прикладу 2,3, отримуємо:

$$W_{дп} = 1 - 0{,}7794 = 0{,}2206;$$
$$W_{кр} = 1 - 0{,}9528 = 0{,}0472;$$
$$W_{кт} = 1 - 0{,}9939 = 0{,}0061.$$

Отже, рівень допустимих збитків перевищується приблизно у 22 випадках із 100, рівень критичних збитків — приблизно у 5 випадках із 100, рівень катастрофічних збитків — приблизно у 6 випадках з 1000. ▲

Приклад 10. Відомо, що відносні збитки, обчислені по щодо запланованих витрат від даного виду підприємницької діяльності, мають логарифмічно нормальний закон розподілу ймовірностей із функцією щільності

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x\lambda\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\lambda^2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

де $m=3$, $\lambda=0{,}8$.

Керівництво фірми вважає, що для їхнього підприємства критерії допустимого, критичного та катастрофічного ризиків набувають таких значень: $k_{дп}$=0,2; $k_{кр}$=0,02; $k_{кт}$=0,002. Виходячи із зроблених припущень, оцінити теоретичні значення меж зон допустимих, критичних та катастрофічних відносних збитків.

Розв'язування:

▼ Для логарифмічно нормального розподілу

$$W(x)=1-F(x)=1-(0{,}5+\Phi(u))=0{,}5-\Phi(u),$$

де $u=(\ln x-m)/\lambda$.

Тоді, з урахуванням умови $k(x)\ge W(x)$, отримуємо:

$$k(x)\ge 0{,}5-\Phi(u)\ \Rightarrow\ \Phi(u)\ge 0{,}5-k(x)=\gamma.$$

Оскільки функція $\Phi(u)$ є зростаючою, то з нерівності $\Phi(u)\ge\gamma$ отримуємо, що

$$u\ge u_\gamma\Rightarrow(\ln x-m)/\lambda\ge u_\gamma\ \Rightarrow x\ge e^{m+\lambda u_\gamma},$$

де u_γ — розв'язок рівняння $\Phi(u_\gamma)=\gamma$ — знаходимо в таблиці значень функції Лапласа.

Враховуючи, що

$$k_{дп}=0{,}2\ge W(x_{дп});\ \gamma_{дп}=0{,}5-k_{дп}=0{,}3;\ u_{\gamma_{дп}}=0{,}84;$$

$$m+\lambda\cdot u_{\gamma_{дп}}=3+0{,}8\cdot 0{,}84=3{,}672;$$

отримуємо оцінку:

$$0{,}02\ge W(x_{дп})\ \Rightarrow\ x_{дп}\ge e^{3{,}672}\approx 39{,}330.$$

Аналогічно для межі зони критичних відносних збитків

отримуємо оцінку:

$$0{,}02\ge W(x_{кр})\Rightarrow\ x_{кр}\ge e^{4{,}648}=104{,}376.$$

Тобто мінімальним теоретичним рівнем критичних відносних збитків є величина $x^*_{кр}=104{,}376$ і зоною критичних відносних збитків є інтервал [39,330; 104,376].

Аналогічно для межі зони катастрофічних відносних збитків:

$$0,002 \geq W(x_{KT}) \Rightarrow x_{KT} \geq e^{5,304} = 201,140.$$

Тобто мінімальним теоретичним рівнем катастрофічних збитків є величина $x^*_{кт} = 201,140$, а зоною катастрофічних відносних збитків є інтервал [104,376; 201,140].

Якщо врахувати, що середньоквадратичне відхилення

$$\sigma = e^{m+\lambda^2/2}\sqrt{e^{\lambda^2}-1} = e^{3+0,8^2/2}\sqrt{e^{0,8^2}-1} \approx 26,189,$$

то приходимо до висновку, що зоною допустимих відносних збитків є (приблизно) інтервал [0; 1,5σ], зоною критичних відносних збитків — інтервал [1,5σ; 4σ], зоною катастрофічних збитків — інтервал [4σ; 7,7σ].

Слід зазначити також, що

$$Mo(X) = e^{m-\lambda^2/2} = e^{3-0,8^2/2} = 14,585 \approx 0,6\sigma,$$

$$M(X) = e^{m+\lambda^2/2} = e^{3+0,8^2/2} = 27,660 \approx 1,1\sigma.$$

Для порівняння, якщо у функції щільності $f(x)$ покласти $\sigma = 0,4$, то отримуємо:

$\sigma(X) = 3,775$; $Mo(X) = 17,116 \approx 4,5\sigma$; $M(X) = 21,758 \approx 5,8\sigma$;

$x_{дп} = 28,106 \approx 7,4\sigma$; $x_{кр} = 45,787 \approx 12,1\sigma$; $x_{кт} = 63,561 \approx 16,8\sigma$. ▲

На практиці, оцінюючи ризик, часто обмежуються спрощеним підходом. При цьому спираються на одне значення економічного показника, яке відображає найважливішу узагальнену характеристику у даній конкретній ситуації. Якщо узагальненою характеристикою є величина небажаних наслідків(збитки, платежі тощо), то *міра (ступінь) ризику невдачі* (в процесі досягнення мети) може визначатися як добуток ймовірності невдачі (небажаних наслідків) на величину цих наслідків, тобто:

$W = p_н x_н$, де $x_н$ — величина небажаних наслідків.

Приклад11. Надаючи банківський кредит комерційній фірмі, вважають, що збитки можливі в 20% випадків. Величина збитків може становити 20 тис.грн. Визначити величину ризику.

Розв'язування:

▼ Оскільки $x_н$ = 20000(гривень), $p_н$ = 0,2, то величина ризику становить $W=W^{-}=p_{n}x_{n}=20000\cdot 0,2=4000$(гривень).

Безсумнівний інтерес становить така оцінка ризику невдачі, яка ґрунтується на всьому спектрі можливих результатів (збитків, платежів тощо). Якщо ж відомі всі можливі наслідки окремої події та ймовірності їх настання, то для *оцінки міри (ступеня) ризику* використовується *величина очікуваної невдачі* (сподіване значення, математичне сподівання), пов'язана з невизначеністю, тобто середньозважена величина цих можливих результатів, де ймовірність кожного з них використовується як частота або питома вага відповідного значення. У випадку, коли всі можливі наслідки події описуються дискретною випадковою величиною $X=X^{-}=\{x_1;\ x_2;...;\ x_n\}$, а розподіл ймовірностей їх настання $P=\{p_1;\ p_2;...;\ p_n\}$; $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j = 1$,

величина ризику очікуваної невдачі: $W=M(X^{-})=\sum\limits_{j=1}^{n} p_j x_j$.

Якщо ж несприятливі наслідки події описуються неперервною випадковою величиною $X^{-}\in(-\infty;+\infty)$, то $W=M(X^{-})=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$,

де $f(x)$ — щільність розподілу ймовірності.▲

Приклад 12. Надаючи банківський кредит комерційній фірмі, здійснюють прогноз можливих значень збитків та відповідних значень ймовірності. Числові дані подано в таблиці

Оцінка можливого результату	Прогнозовані збитки, тис. гривень	Значення ймовірності
Песимістична	30	0,2
Стримана	6	0,5
Оптимістична	– 40	0,3

Визначити сподівану величину ризику, тобто збитків.

Розв'язування:

▼ Випадкова величина X, що характеризує можливі збитки, $X^{-}=\{30;\ 6;\ -40\}$. Тоді величина ризику (сподіваних збитків):

$$W=W^{-}=\sum_{j=1}^{3} p_j x_j = 0,2\cdot 30+0,5\cdot 6+0,3\cdot(-40)=-3,$$ тобто

комерційній фірмі можна надати кредит, оскільки величина сподіваних збитків становить $W=-3$, а це вказує на можливість прибутку.▲

Як характеристику центру групування реалізацій економічного показника (випадкової величини X) можна використовувати величину $G(X)$ — його *зважене середньогеометричне значення.* У випадку, коли $X > 0$, $G(X)$ визначається за формулою: $G(X) = e^{M(\ln X)}$.

Якщо ж X є дискретною випадковою величиною, тобто $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$, то $G(X) = e^{M(\ln X)} = \prod_{j=1}^{n} x_j^{p_j}$.

Якщо ж при цьому $p_1 = p_2 = ... p_n = 1/n$, то отримуємо *середньогеометричну оцінку* випадкової величини X: $G(X) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{1/n} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j}$

У ситуації, коли випадкова величина X набуває як додатних, так і від'ємних значень і є дискретною, зважену середньогеометричну оцінку можна знайти за формулою:

$$G(X) = e^{M(\ln(X-a+\varepsilon))} + a - \varepsilon = a - \varepsilon + \prod_{j=1}^{n}(x_j - a + \varepsilon),$$

де $a = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\varepsilon \geq 0$ (наприклад, $\varepsilon = 1$).

Під час обчислення зваженої середньогеометричної оцінки норми прибутку цінного паперу (чи портфеля цінних паперів) покладають $X = R/100\%$ (R — норма прибутку), $a = -1$, $\varepsilon = 0$. Тоді

$$G(X) = e^{M(\ln(X+1))} - 1 = \prod_{j=1}^{n}\left(x_j + 1\right)^{p_j} - 1.$$

У випадку, коли величина $G(X)$ оцінюється на основі статистичних даних,

$$G(X) = e^{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\ln(x_t+1)} - 1 = \prod_{t=1}^{T}(x_t + 1)^{\frac{1}{T}} - 1,$$

де T — кількість періодів.

Якщо випадкова величина X відображає спектр можливих збитків (платежів тощо), то зважене середньогеометричне цієї величини можна використовувати як оцінку величини ризику $W = G(X^-)$.

Приклад 13. Виходячи з умови попереднього, визначити величину ризику як зважене середньогеометричне прогнозованих збитків.

Розв'язування:

▼ Враховуючи, що $a = \min\{30;\ 6;\ -40\} = -40$, поклавши $\varepsilon = 1$, отримуємо: $G(X^-) = -40 + 1 + (30 + 40 + 1)^{0,2}(6 + 40 + 1)^{0,5}(-40 + 40 + 1)^{0,3} = -24{,}92$. ▲

У випадку, коли адекватною моделлю міри невдачі є випадкова величина X^- з несиметричним розподілом ймовірності,як величину ризику доцільно використовувати модальне значення — $Mo(X)$ — цієї випадкової величини, тобто $W = Mo(X^-)$.

Нагадаємо, що *модою дискретної випадкової величини* є найбільш ймовірне значення цієї випадкової величини. Для *неперервної випадкової величини мода* — це точка максимуму функції щільності розподілу ймовірності значень цієї випадкової величини.

Якщо повернутись до прикладу, то величина ризику визначається розмірами збитків, що відповідають стриманій оцінці можливого результату, оскільки $P(X = 6) = \max\{0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}3\} = 0{,}5$, тобто величина ризику

$$W = Mo(X^-) = 6 \text{ (тис. гривень)}.$$

Нехай в якості центра групування значень економічного показника використовується його математичне сподівання. Тоді *середньозважене модуля відхилення цього показника від свого математичного сподіваного* у дискретному випадку можна знайти за формулою:

$$M(|X - M(X)|) = \sum_{j=1}^{n} p_j\,|x_j - M(X)|.$$

Якщо ж як центр групування значень економічного показника використати моду, то *середньозважене відхилення від модального значення* у дискретному випадку знаходять за формулою:

$$M(|X - Mo(X)|) = \sum_{j=1}^{n} p_j\,|x_j - Mo(X)|.$$

У ситуації, коли адекватною моделлю економічного показника є неперервна випадкова величина

$M(|X - M(X)|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X - M(X)|\,f(x)dx,$

$$M(|X - Mo(X)|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X - Mo(X)| f(x)dx,$$

де $f(x)$ — функція щільності розподілу ймовірності.

Очевидно, що *більші значення наведених оцінок свідчать про більшу нестабільність щодо діяльності відповідного економічного об'єкта.* Як величину ризику і використовують цю міру нестабільності, тобто:

$W = M(|X - M(X)|)$, або ж $W = M(|X - Mo(X)|)$.

Слід мати на увазі, що даний підхід до оцінки ризику застосовується у випадку, коли економічний показник може мати як позитивний, так і негативний інгредієнт (тобто $X = X^{\pm}$).

Приклад 14. Виходячи з умови прикладу 3,5, обчислити величину ризику як міри мінливості результату.

Розв'язування:

▼ Якщо як центр групування обрати $M(X) = -3$, то величина ризику становитиме:

$W = M(|X - M(X)|) = 0{,}2 \cdot |30 + 3| + 0{,}5 \cdot |6 + 3| +$

$+ 0{,}3 \cdot |-40 + 3| = 22{,}2$ (тис. грн.).

Якщо центром групування обрати $Mo(X) = 6$, то

$W = M(|X - Mo(X)|) = 0{,}2 \cdot |30 - 6| + 0{,}5 \cdot |6 - 6| + 0{,}3 \cdot |-40 - 6| =$
$= 18.6$ (тис. грн.). ▲

При абсолютному вираженні міри ризику під час прийняття економічних рішень широко використовується дисперсійний підхід.

Підхід до оцінки ризику, що спирається на варіацію чи середньоквадратичне відхилення, вважається *класичним.* Причому *чим більшими будуть ці величини, тим більшим буде ступінь ризику,* пов'язаного з певною стратегією, тобто величина ризику

$W = V(X)$ або $W = \sigma(X)$.

Слід зазначити, що такий підхід до оцінки ступеня ризику використовується, коли $X = X^{\pm}$.

Приклад15. Розглядаються два проекти *A* і *B* щодо інвестування. Відомі оцінки прогнозованих значень доходу від кожного з цих проектів та відповідні значення ймовірностей. Цифрові дані наведено в таблиці.

Оцінка можливого результату	Прогнозований прибуток (тис. гривень)		Значення ймовірності	
	A	*B*	*A*	*B*
Песимістична	100	51	0,5	0,01
Оптимістична	200	151	0,5	0,99

Потрібно оцінити міру ризику кожного з цих проектів і обрати один із них (той, що забезпечує меншу величину ризику) для інвестування.

Розв'язування:

▼ Нехай $X_A = \{100;\ 200\}$, $X_B = \{51;\ 151\}$ відповідно випадкові величини, що відображають можливі прибутки від реалізації проектів.

Знайдемо величини сподіваних прибутків:

$M(X_A) = 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 200 = 150$ (тис. грн);

$M(X_B) = 0{,}01 \cdot 51 + 0{,}99 \cdot 151 = 150$ (тис. грн),

тобто обидва проекти мають однаковий прогнозований сподіваний прибуток.

Як міру ризику використаємо оцінку мінливості (варіацію) можливих результатів інвестування:

$$W_A^- = V(X_A) = 0{,}5 \cdot (200 - 150)^2 + 0{,}5 \cdot (100 - 150)^2 = 2500;$$

$$W_B^- = V(X_B) = 0{,}99 \cdot (151 - 150)^2 + 0{,}01 \cdot (51 - 150)^2 = 99.$$

Оскільки $W_B^- < W_A^-$, то проект *B* є менш ризикованим порівняно з проектом *A*, і йому слід віддати перевагу.

Аналогічний результат ми отримаємо, якщо за міру ризику візьмемо середньоквадратичне відхилення:

$$W_A^- = \sigma(X_A) = \sqrt{2500} = 50;$$

$$W_B^- = \sigma(X_B) = \sqrt{99} \approx 10,$$

тобто проект *B* є менш ризикованим. ▲

Слід мати на увазі, що при класичному визначенні міри ризику однаково трактуються як додатні, так і від'ємні відхилення величини реального ефекту від сподіваної величини, тобто виконується гіпотеза про те, що коливання випадкової величини X (прибутку, ЧПВ, збитків) в обидва боки однаково небажані. Але у ряді випадків це не так, і цю гіпотезу доводиться відкидати.

Якщо випадкова величина $X = \{x_1; \ldots; x_n\}$ відображає прибутки ($X = X^+$) і значення $x_i < M(X)$ (оцінка прибутку x_i є реалізацією випадкової величини X і є меншою від сподіваної величини прибутку), то це є ознакою *несприятливої ситуації.* Водночас додатне відхилення вказує на те, що реалізація випадкової величини (прибутку) є більшою, ніж сподівана величина, і це для менеджера (інвестора) є, очевидно, кращою, тобто *сприятливою ситуацією.*

У неокласичній теорії економічного ризику виходять з того, що *ризик пов'язаний лише з несприятливими для менеджера (інвестора) ефектами* і для його оцінювання достатньо брати до уваги лише несприятливі відхилення від сподіваної величини. При цьому *як міра ризику використовується семіваріація,* яка обчислюється за формулою:

$$SV(X) = \frac{1}{P^-}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j p_j \left(x_j - M(X)\right)^2,$$

де $P^- = \sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j p_j$, α_j — індикатор несприятливих відхилень, який визначають за формулою:

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого відхилення,} \\ 1, & \text{у випадку несприятливого відхилення.} \end{cases}$$

Якщо ж, наприклад, $X = \{x_1; \ldots; x_n\}$ відображає можливі варіанти збитків ($X = X^-$, тобто має негативний інгредієнт), то

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & x_j \le M(X^-) \\ 1, & x_j > M(X^-) \end{cases}; \qquad j = \overline{1,n}.$$

Для неперервної випадкової величини X відповідно:

$$SV(X^+) = \frac{1}{P^-}\int_{-\infty}^{M(X^+)}(x - M(X^+))^2 f(x)dx; \quad P^- = \int_{-\infty}^{M(X^+)} f(x)dx;$$

$$SV(X^-) = \frac{1}{P^-}\int_{M(X^-)}^{+\infty}(x - M(X^-))^2 f(x)dx; \quad P^- = \int_{M(X^-)}^{+\infty} f(x)dx.$$

З практичного погляду зручніше (беручи до уваги вимірність величин) застосовувати *семіквадратичне відхилення*.

$$SSV(X) = \sqrt{SV(X)}.$$

Згідно із сказаним вище, ***чим більшою буде величина $SV(X)$ (чи $SSV(X)$), тим більшим буде ступінь ризику.***

Приклад 16. Результати спостережень за нормами прибутку портфелів цінних паперів A і B протягом минулих п'яти періодів наведено в наступній таблиці.

Період	Норма прибутку (%)	
	R_A	R_B
1	5	3
2	3	5
3	2	6
4	3	5
5	7	1

Інвестор має можливість придбати лише один із цих портфелів. Потрібно оцінити міру ризику кожного з портфелів і придбати той, що забезпечує меншу величину ризику (для інвестування).

Розв'язування:

▼ У випадку, коли наявні статистичні дані щодо минулого, сподівану норму прибутку, її варіацію та семіваріацію можна обчислити, відповідно, за формулами:

$$M(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t; \qquad V(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(R_t - M(R))^2;$$

$$SV(R) = \frac{1}{T^-}\sum_{t=1}^{T}\alpha_t(R_t - M(R))^2; \qquad T^- = \sum_{t=1}^{T}\alpha_t,$$

де $R = \{R_1; R_2; ...; R_T\}$ – випадкова величина, що відображає значення норми прибутку в попередні T періодів, R_t – норма прибутку портфеля цінних паперів в t-му періоді ($t = 1,..., T$), T – кількість періодів, які минули і в які здійснювалися спостереження за випадковою величиною R.

Нехай R_A – випадкова величина, що відображає можливі значення норми прибутку портфеля A, R_B – портфеля B. Тоді:

$M(R_A) = 1/5 \cdot (5 + 3 + 2 + 3 + 7) = 4;$

$\mathrm{M}(\mathrm{R_B}) = 1/5 \cdot (3 + 5 + 6 + 5 + 1) = 4;$

$V(R_A) = 1/4 \cdot ((5-4)^2 + (3-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2) = 4;$

$V(R_B) = 1/4 \cdot ((3-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (1-4)^2) = 4,$

тобто на основі величин $M(R_A)$, $M(R_B)$, $V(R_A)$ та $V(R_B)$ ми не можемо надати перевагу ні портфелю *A*, ні портфелю *B*.

Обчислимо величини семіваріацій для цих портфелів. Оскільки для портфеля *A* величина $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 1$; $\alpha_4 = 1$; $\alpha_5 = 0$, то отримуємо:

$$W_A = SV(R_A) = 1/3 \cdot (0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2) = 2.$$

Для портфеля *B:* $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$; $\alpha_4 = 0$; $\alpha_5 = 1$. Тоді

$$W_B = SV(R_B) = 1/2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-3)^2) = 5.$$

Оскільки $W_A < W_B$, то, виходячи з позицій мінімального ризику, для інвестора більш привабливим є портфель *A*. ▲

У випадку, коли кількість спостережень T є недостатньо великою (T < 15), то для обчислення незміщених оцінок можуть використовуватися формули

$$\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}-1}\mathrm{V}(\mathrm{R});$$

$$\widetilde{\mathrm{SV}}(\mathrm{R}) = \frac{\mathrm{T}^-}{\mathrm{T}^- - 1}\mathrm{SV}(\mathrm{R}).$$

Для оцінки ризику можна використовувати також *середньоквадратичне відхилення від зваженого середньогеометричного:*

$$\sigma G(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - G(X))^2}\ ,$$

або ж оцінку цієї величини на основі статистичних даних:

$$\sigma G(X) = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} (x_t - G(X))^2}\ .$$

Виявляється, що портфель цінних паперів, сформований на підставі максимізації зваженої середньої геометричної норми прибутку, характеризується найвищою очікуваною вартістю в кінці середньо- та довготермінового періоду (найвищим кінцевим багатством).

З погляду неокласичного підходу до оцінки ризику доцільним є впровадження такого показника ступеня ризику, як *семіквадратичне відхилення від зваженого середнього геометричного* випадкової величини:

$$SSG(X) = \sqrt{SG(X)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j (x_j - G(X))^2} ,$$

де $SG(X)$ — *величина семіваріації по відношенню до зваженого середнього геометричного* $SSG(X)$ — семіквадратичне відхилення, α_j — індикатор j-го несприятливого відхилення.

Оскільки величина $SG(X)$ має негативний інгредієнт, то, як і раніше, ризик вважається більшим при більших значеннях $SG(X)$ (чи $SSG(X)$).

Приклад 17. Норми прибутку акцій виду A і B (відповідно R_A і R_B), що спостерігались за минулі десять періодів, подано в таблиці

Період	Норма прибутку акцій, %		Період	Норма прибутку акції, %	
t	R_A	R_B	t	R_A	R_B
1	6,90	3,71	6	7,14	5,06
2	12,67	4,90	7	2,81	5,92
3	– 3,33	1,73	8	11,25	7,67
4	6,45	2,67	9	– 1,71	4,94
5	– 2,16	3,88	10	3,27	2,81

Яка з цих акцій є менш ризикованою з позиції недоодержання в перспективі можливого прибутку (є перспективнішою з погляду найвищої очікуваної вартості)?

Розв'язування:

▼ Покладемо $X_A = R_A/100\%$, $X_B = R_B/100\%$. Тоді

$$G(X_A) = e^{\frac{1}{10}\sum_{t=1}^{10} \ln(x_t^A + 1)} - 1 = e^{\frac{1}{10}\ln\prod_{t=1}^{10}(x_t^A + 1)} - 1.$$

Обчисливши величину $\ln\prod_{t=1}^{10}(x_t^A + 1) = \ln 1{,}508 = 0{,}411$, знаходимо, що $G(X_A) = e^{0{,}0411} - 1 = 0.04196$, або ж $G(R_A) = 4{,}196\%$. Аналогічно,

$$G(X_B) = e^{\frac{1}{10}\sum_{t=1}^{10} \ln(x_t^B + 1)} - 1 = 0{,}04316, \text{ або ж } G(R_B) = 4{,}316\%.$$

Економічні показники R_A та R_B — норми прибутків цінних паперів — мають позитивний інгредієнт. А тому середньої геометричної оцінки $G(R^+_A)$ та $G(R^+_B)$ мають позитивний інгредієнт. Оскільки при цьому $G(R_B) > G(R_A)$, то найвищий очікуваний у перспективі прибуток будуть мати акції виду *B*.

Зроблений висновок підтверджується також з позиції критерію мінімального середньоквадратичного відхилення:

$$M(R_A^+) = M(R_B^+) = 4{,}329\%;$$

$$\sigma_A^- = \sigma(R_A) = 5{,}55\%; \ \sigma_B^- = \sigma(R_B) = 1{,}57\%,$$

тобто акції виду *A* є більш ризикованими ($\sigma_A^- > \sigma_B^-$).

Оскільки $\sigma G^-(R_A) = 5{,}551$; $\sigma G^-(R_B) = 1{,}743$, то зроблений висновок підтверджується також з погляду критерію мінімального середньоквадратичного відхилення від зваженої середньої геометричної.

Для акцій виду *A* зважене середня геометрична $G(R_A) = 4{,}196$, тоді

$$SG(R_A) = \frac{1}{10-1} = ((-3{,}33 - 4{,}196)^2 + (-2{,}16 - 4{,}196)^2 + + (3{,}27 - 4{,}196)^2) = 11{,}089;$$

$$SSG(R_A) = \sqrt{SG(R_A)} = 3{,}33(\%).$$

Для акцій виду *B*:

$$G(R_B) = 4{,}316\%; SG(R_B) = 1{,}358; SSG(R_B) = 1{,}165.$$

Оскільки $SSG^-(R_B) < SSG^-(R_A)$, то з позиції семіквадратичного відхилення від зваженої середньої геометричної ступінь ризику акції виду *B*, як і раніше, є меншим від ступеня ризику акцій виду *A*.

Отже, згідно з проведеним дослідженням перевагу можна надати акціям виду *B*. ▲

У відносному вираженні ризик визначається як величина збитків, віднесена до деякої бази. За базу зручно приймати або майно підприємця, або загальні витрати ресурсів на даний вид підприємницької діяльності, або ж очікуваний прибуток від даного підприємництва.

Для підприємства за базу визначення відносної величини ризику, зазвичай, беруть вартість основних фондів та оборотних засобів або плановані сумарні затрати на даний вид ризикованої діяльності, маючи на увазі як поточні затрати, так і капіталовкладення чи розрахунковий прибуток.

Під ризиком банкрутства розуміють, зокрема, співвідношення максимально можливого обсягу збитків до обсягу власних фінансових ресурсів інвестора.

У відносному вираженні ризик визначається іноді за допомогою такого *коефіцієнта ризику:*

$$W = \frac{x}{K},$$

де W — коефіцієнт ризику, x — максимально можливий обсяг збитків (грош. од.), K — обсяг власних фінансових ресурсів з урахуванням точно відомих необхідних надходжень.

Коефіцієнт сподіваних збитків K_Z враховує обсяг сподіваних збитків по відношенню до суми абсолютних значень сподіваних вигод та сподіваних збитків. Він обчислюється за формулою:

$$K_Z = K(Z) = \frac{\left|M_Z^-\right|}{\left|M_Z^+\right| + \left|M_Z^-\right|},$$

де Z — заплановане значення економічного показника; M_Z^+ та M_Z^- — відповідно сподівані величини сприятливих та несприятливих відхилень (по відношенню до Z).

Формально M_Z^+ та M_Z^- — це умовні математичні сподівання щодо відхилень, тобто

$$M_Z^+ = M(X - Z / X \in X_Z^+); M_Z^- = M(X - Z / X \in X_Z^-),$$

де X_Z^+ — множина сприятливих значень економічного показника по відношенню до рівня Z, X_Z^- — множина його несприятливих значень. Очевидно, що $X = X_Z^+ \cup X_Z^-$.

Наприклад, якщо X має позитивний інгредієнт ($X = X^+$), то

$$X_Z^+ = \{x_i \in X, \text{ для яких } x_i \geq Z\},$$

$$X_Z^- = \{x_i \in X, \text{ для яких } x_i < Z\}.$$

Значення $K_Z \in [0,1]$, причому $K_Z = 0$, якщо є відсутніми сподівані збитки і $K_Z = 1$, якщо є відсутніми сподівані вигоди. Слід зауважити, що K_Z має негативний інгредієнт ($K_Z = K_Z^-$).

У дискретному випадку, тобто у випадку, коли $X = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ і відомі ймовірності настання кожної події $P = \{p_1; p_2; ...; p_n\}$, величини M_Z^- та M_Z^+ (умовні математичні сподівання) обчислюються за формулами:

$$M_z^- = \frac{1}{P^-}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^- p_i x_i - Z, \quad P^- = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^- p_i;$$

$$M_z^+ = \frac{1}{P^+}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^+ p_i x_i - Z, \quad P^+ = \sum_{i=1}^{n}\beta_i^+ p_i,$$

де α_i^- — індикатор несприятливого (по відношенню до Z) відхилення, β_i^+ — індикатор сприятливого (по відношенню до Z) відхилення.

Наприклад, коли $X = X^+$ (має позитивний інгредієнт), то

$$\alpha_i^- = \begin{cases} 0, & x_i \ge Z \\ 1, & x_i < Z \end{cases}; \quad \beta_i^+ = \begin{cases} 1, & x_i \ge Z \\ 0, & x_i < Z. \end{cases}$$

У неперервному випадку, тобто в ситуації, коли відома щільність ймовірності $f(x)$ випадкової величини X, маємо:

$$M_Z^- = M^-(Z) = \frac{1}{P^-}\int_{-\infty}^{Z} xf(x)dx - Z; \quad P^- = \int_{-\infty}^{Z} f(x)dx;$$

$$M_Z^+ = M^+(Z) = \frac{1}{P^+}\int_{Z}^{+\infty} xf(x)dx - Z; \quad P^+ = \int_{Z}^{+\infty} f(x)dx.$$

На практиці замість величин M_Z^- та M_Z^+ можна використати їх статистичні оцінки:

$$M_z^- \approx \overline{M}_z^- = \frac{1}{T_1}\sum_{t=1}^{n}\alpha_t^- x_t, \quad M_z^+ \approx \overline{M}_z^+ = \frac{1}{T_2}\sum_{t=1}^{n}\beta_t^+ x_t,$$

де t — кількість спостережень, $T_1 = \sum_{t=1}^{T}\alpha_t^-$ — кількість несприятливих відхилень, $T_2 = \sum_{t=1}^{T}\beta_t^+$ — кількість сприятливих відхилень, $T_1 + T_2 = T$.

Еластичність коефіцієнта сподіваних збитків щодо величини Z обчислюється за формулою:

$$e_Z = \frac{Z}{K_Z}\cdot\frac{\partial K_Z}{\partial Z}.$$

Чим більшим (за абсолютною величиною) буде коефіцієнт еластичності,

тим більшим буде й ступінь ризику.

Знання величини еластичності e_Z дає змогу встановити, на скільки відсотків зміниться коефіцієнт ризику, коли дана планова величина економічного показника зміниться на 1%. Знаючи це співвідношення, можна виразити коефіцієнт ризику в одиницях вимірювання планової величини.

На практиці можна скористатися скінченно-різницевим аналогом формули для обчислення еластичності:

$$e_Z \approx \frac{Z}{K_Z} \cdot \frac{\Delta K_Z}{\Delta Z},$$

де величина ΔZ задається дослідником (наприклад, $\Delta Z = (Z_{\max} - Z_{\min})/100$), $\Delta K_Z = K(Z + \Delta Z) - K(Z)$.

Приклад 18. Акції виду *A* і *B* залежно від стану економіки можуть мати різні норми прибутку. Експерти вказують на 5 можливих станів економіки та дають оцінки ймовірності настання цих станів:

Стани економічного середовища	Ймовірність	Норма прибутку акції (%)	
	P	R_A	R_B
Значне піднесення	0,1	20	10
Незначне піднесення	0,3	10	5
Стагнація	0,2	2	2
Незначна рецесія	0,3	-2	1
Значна рецесія	0,1	-10	-5

Акції вважаються збитковими, якщо їхня норма прибутку буде меншою, ніж 5%.

Виходячи з коефіцієнта сподіваних збитків, обчислити ризики цих акцій і порівняти їх між собою.

Розв'язування:

Згідно з умовою задачі $Z = 5\%$. Відповідні розрахунки подано у вигляді таблиці.

	Акція виду A					Σ	*Акція виду B*					Σ
p_i	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	1	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1	1
R_i	20	10	2	−2	−10	–	10	5	2	1	−5	–

Z	5	5	5	5	5	–	5	5	5	5	5	–
α_i^-	0	0	1	1	1	–	0	0	1	1	1	–
β_i^+	1	1	0	0	0	–	1	1	0	0	0	–
$\alpha_i^- p_i$	0	0	0,2	0,3	0,1	0,6	0	0	0,2	0,3	0,1	0,6
$\beta_i^+ p_i$	0,1	0,3	0	0	0	0,4	0,1	0,3	0	0	0	0,4
$\alpha_i^- p_i R_i$	0	0	0,4	–0,6	–1	–1,2	0	0	0,4	0,3	–0,5	0,2
$\beta_i^+ p_i R_i$	2	3	0	0	0	5	1	1,5	0	0	0	2,5

Отже, для акцій виду *A* маємо:

$$P^- = 0{,}6;\ M_Z^- = \frac{-1{,}2}{0{,}6} - 5 = -7;\ P^+ = 0{,}4;\ M_Z^+ = \frac{5}{0{,}4} - 5 = -7{,}5;$$

$$K_Z^A = \frac{|-7|}{|-7| + 7{,}5} = \frac{7}{14{,}5} \approx 0{,}483.$$

Для акцій виду *B*:

$$P^- = 0{,}6;\ M_Z^- = \frac{0{,}2}{0{,}6} - 5 \approx -4{,}67;\ P^+ = 0{,}4;\ M_Z^+ = \frac{2{,}5}{0{,}4} - 5 = 1{,}25;$$

$$K_Z^B = \frac{|-4{,}67|}{|-4{,}67| + 1{,}25} \approx 0{,}789.$$

Оскільки $K_Z^B > K_Z^A$, то акції виду *B* є більш ризикованими з погляду коефіцієнта сподіваних збитків.

У випадку асиметричного розподілу певних показників ефективності (ЧПВ) аналіз лише середньоквадратичного відхилення як міри ризику може бути недостатнім. Особливо, коли ці значення співпадають для кількох альтернативних об'єктів (проектів). У цьому випадку слід аналізувати як показник ризику таку числову характеристику випадкової величини, як *коефіцієнт асиметрії*. Його обчислюють за формулою:

$$As(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{x_j - M(X)}{\sigma(X)} \right)^3,$$

де $As(X)$ — коефіцієнт асиметрії. У випадку, коли в наявності є статистична інформація щодо показника ефективності X, зібрана протягом T періодів, коефіцієнт асиметрії обчислюють за формулою:

$$As(X) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{x_t - M(X)}{\sigma(X)} \right)^3.$$

Якщо $As(X)=0$, то графік функції щільності ймовірності для випадкової величини X є симетричним відносно $M(X)$. Якщо розподіл ймовірностей є асиметричним, причому його «довга частина» («хвіст») розміщена праворуч від моди випадкової величини $Mo(X)$ (має правосторонній скіс), то зважена сума кубів додатних відхилень від $M(X)$ є більшою від суми кубів від'ємних відхилень. Тоді, з урахуванням того, що $\sigma(X)>0$, отримуємо, що $As(X)>0$. Аналогічно отримуємо, що $As(X)<0$ у випадку, коли функція щільності має лівосторонній скіс і «хвіст» розподілу виступає ліворуч.

Якщо $X=X^{+}$, то за решти рівних умов серед m різних альтернативних об'єктів (проектів, стратегій) меншим ризиком обтяжений той об'єкт ($X^{+}_{K_0}$), для якого виконується умова: $As(X^{+}_{K_0})=\max\limits_{K=\overline{1,m}} As(X^{+}_{K})$, тобто $As(X^{+})=As^{+}(X^{+})$. Це пояснюється тим, що несприятливі відхилення від сподіваного значення з відносно великою ймовірністю розташовані для обраного об'єкта $X^{+}_{K_0}$ ліворуч найближче до сподіваного значення (менше відхиляються від нього в несприятливий бік) порівняно з іншими, а сприятливі значення значно віддалені від сподіваної величини (ці значення — «хвіст» — розташовані праворуч). На наступному рисунку маємо функцію щільності розподілу ймовірності у випадках додатного (*а*) та від'ємного (*б*) коефіцієнтів асиметрії.

У зв'язку з цим можна вважати, що критерій максимальної асиметрії є критерієм, який забезпечує мінімальний ризик по відношенню до несприятливих відхилень від сподіваного результату (для задач максимізації показників ефективності).

Повертаючись до варіації (дисперсії) як міри ризику, треба зазначити, що дисперсія, звичайно, не повністю характеризує ступінь ризику, але дає змогу в деяких випадках чітко виявити граничні шанси менеджера (інвестора, підприємця).

Теоретична база цього закладена у відомій нерівності Чебишева: *ймовірність того, що випадкова величина відхиляється за модулем від свого математичного сподівання більше, ніж на заданий допуск* δ, *не перевищує її дисперсії (варіації), поділеної на* δ^2.

Тут відразу треба зазначити, що варіація V деякої випадкової величини R має бути меншою, ніж δ^2, оскільки величина ймовірності не перевищує одиниці: $p = \frac{V}{\delta^2} \le 1$

Що стосується випадкової величини X (ефективність, прибуток), то можна записати

$$P(|X - m| > \delta) \le V/\delta^2 = \sigma^2/\delta^2,$$

де m — математичне сподівання випадкової величини X.

Припустимо, що інвестиції здійснюються за рахунок кредиту, взятого під відсоток r_s та під заставу нерухомості. Яка ймовірність того, що інвестор не зможе повернути свій борг і позбудеться своєї нерухомості?

Це ймовірність того, що випадкова величина R набуде свого значення, яке відповідає умові

$$R < r_s,$$

або

$$-(R - m) > m - r_s.$$

Отже, одержимо:

$P(R < r_s) = P(-(R - m) > m - r_s) \le P(|R - m| > m - r_s) \le\le (V/(m - r_s))^2$.

Звідси маємо, що шанс збанкрутувати не перевищує величини $V/(m - r_s)^2$. Звичайно при цьому мають на увазі, що обов'язково виконується умова раціональності такого вкладу «під кредит», тобто, що $m > r_s$ а оцінка (3.1) має сенс лише тоді, коли варіація (дисперсія) не дуже велика, тобто, коли виконується умова $V \le (m - r_s)^2$.

Коли задані умови (гіпотези) виконуються, то для того щоб шанс збанкрутувати був не більшим, ніж 1/9, достатньо виконати умову (правило трьох сигм) $V \le 1/9(m - r_s)^2$, або $m \ge r_s + 3\sigma$.

Слід зазначити, що тут одним із параметрів ризику у системі кількісних оцінок ризику ймовірність несприятливої події $p_H = \sigma^2 / \delta^2$ поряд з таким параметром ризику, як дисперсія (варіація). У даному випадку $p_H \le 1/9$. Звичайно, можна сперечатися, чи задовольняє ця величина менеджера (суб'єкта прийняття рішення), чи ні. У ряді випадків величину p_H необхідно брати досить малою, інколи для забезпечення «допустимого» ризику покладають $p_H = 0{,}001$.

Приклад 19. Підприємство бере кредит під 10% річних для впровадження нових технологій. При цьому експерти оцінюють, що ризик, пов'язаний з коливанням сподіваних прибутків, становить 5%. Необхідно з імовірністю 1/9 оцінити рівень сподіваних прибутків, щоб уникнути банкрутства.

Розв'язування:

▼Маємо, що $r_s = 10\%$, $\sigma = 5\%$. Скориставшись правилом трьох сигм, одержимо $m \ge 10\% + 3*5\% = 25\%$, тобто рівень (норма) сподіваних прибутків повинен бути не меншим, ніж 25%.▲

Розглянемо ще одну ситуацію, коли інвестор вкладає в звичайні акції лише частину власного капіталу, залишаючи певну частку на збереження під майже безризиковий відсоток r_0 (державні короткотермінові цінні папери). Яка буде при цьому величина ймовірності банкрутства?

Якщо A — обсяг наявного капіталу, а x_0A — частка, що залишається на збереження (вкладається в безризикові цінні папери), то банкрутство стає можливим лише тоді, коли

$$x_0A(1 + r_0) + (1 - x_0)A(1 + R) < 0,$$

або

$$R < -(1 + x_0r_0) / (1 - x_0).$$

Тобто в цьому випадку замість величини r_s, яка фігурувала в попередньому випадку, маємо величину $-(1 + x_0r_0) / (1 - x_0)$.

Оцінка за Чебишевим дає ризик банкрутства, що буде меншим, ніж 1/9, тоді, коли $\dfrac{\sigma}{m+\dfrac{1+x_0r_0}{1-x_0}}<\dfrac{1}{3}$, або $m>-\dfrac{1+x_0r_0}{1-x_0}+3\sigma$.

Бачимо, що гра на біржі на власний капітал значно безпечніша. Навіть якщо вкласти його лише у ризиковані цінні папери, тобто, коли $x_0 = 0$, то достатнім є виконання умови $m > -1 + 3\sigma$, якщо інвестора задовольняє даний рівень надійності (ризику банкрутства $p_н < 1/9$).

Приклад 20. Капітал інвестора становить 100 тис. грн. У безризикові цінні папери він вкладає 25 тис. грн при річній нормі прибутку 30%. Решту грошей, тобто 75 тис. грн, він збирається вкласти у папери, обтяжені ризиком. Середньоквадратичне відхилення (ризик) цих цінних паперів дорівнює 10%. Інвестор прагне, щоб шанс банкрутства був би для нього не більшим, ніж 1/9.

Яка повинна бути сподівана норма прибутку обтяжених ризиком цінних паперів?

Розв'язування:

▼ Маємо, що $r_0 = 30\%$, $x_0 = 25/100 = 0{,}25$, $\sigma = 10\%$. Використавши формулу (3.2), одержимо:

$$m > -((1 + 0{,}25 \cdot 0{,}3)/(1 - 0{,}25)) + 3 \cdot 0{,}1 = -1{,}133.$$

Тобто сподівана норма доходу цінних паперів, обтяжених ризиком, повинна бути не меншою, ніж –113,3 %.▲

Приклад 21. При виготовленні на експорт набору певних товарів прагнуть, щоб ризик банкрутства був не більшим, ніж 1/9. У справу вкладають власний капітал обсягом 2 млн грн. Сподіваний (середній) рівень рентабельності дорівнює 10%.

Обчислити, яким має бути значення середньоквадратичного відхилення рівня рентабельності від сподіваної величини.

Розв'язування:

▼ Маємо, що $x_0 = 0$, $m = 10\%$. З формули (3.3) одержимо, що $\sigma \le (m + 1)/3$, тобто $\sigma \le (0{,}1 + 1)/3 = 0{,}367$.

Отже, ризик (середнє квадратичне відхилення) повинен бути не вищим, ніж 36,7%.▲

4. Ентропія випадкових величин

Основною властивістю випадкових подій є відсутність відомої впевненості у їх появі, що створює певну невизначеність при проведенні пов'язаних з цією подією випробувань. Однак на практиці важливо вміти прогнозувати наслідки різних випробувань, тобто чисельно оцінювати ступінь невизначеності, яка в них закладена, що дасть можливість порівняти ці випробування з цього погляду.

Розглянемо дискретну випадкову величину X, яка задана рядом розподілу:

X_i	X_1	X_2	...	X_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

і вважатимемо випробуванням набуття нею свого чергового значення. Число $H_X = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$ називається **ентропією** дискретного розподілу випадкової величини X і є мірою його невизначеності, що вимірюється в спеціальних одиницях – бітах. Аналогічна формула має місце і при $n = \infty$ за припущення, що відповідний ряд є збіжним.

Якщо брати до уваги лише ті значення X, які дійсно можливі, то можна вважати, що всі $p_i > 0$ (у випадках, коли доводиться з тих чи інших причин включати до розгляду значення $p_i = 0$, приймають, що відповідний добуток $p_i \cdot \log_2 p_i$ також рівний 0), тому H_X завжди існує. За означенням $H_X \ge 0$ і залежить насамперед від числа n різних можливих значень X, але не залежить від самих цих значень. Наприклад, при визначенні тривалості передачі інформації її конкретний зміст несуттєвий, що і проявляється в незалежності H_X від значень x. $H_X = 0$ тільки у тому випадку, коли одна з імовірностей $p_i = 1$ (усі інші ймовірності при цьому рівні 0). Це добре узгоджується із змістом величини H_X як міри ступеня невизначеності закону розподілу X, оскільки лише у вказаній ситуації випробування взагалі не містить ніякої невизначеності.

Доданки $-p_i \cdot \log_2 p_i$, які відповідають дуже малим значенням p_i ($p_i < 0.1$), несуттєво впливають на обчислення ентропії H_X, тому порівняно малоймовірними наслідками випробування можна знехтувати. Відмітимо, нарешті, що ентропія H_X неперервно залежить від p_i у тому сенсі, що малі зміни p_i ведуть до незначних змін H_X.

Приклад22. Дві дискретні випадкові величини X та Y задані своїми законами розподілів:

X_i	0	11
p_i	0,5	0,5

Y_j	$\frac{1}{3}$	2
p_j	0,9	0,1

Обчислити ентропію цих розподілів.

Розв'язування:

▼ За означенням ентропії отримаємо:

$$H_X = -(0{,}5\log_2 0{,}5 + 0{,}5\log_2 0{,}5) = 1$$

$$H_Y = -(0{,}9\log_2 0{,}9 + 0{,}1\log_2 0{,}1) \approx 0{,}469 .$$

Тобто ентропія розподілу X більш ніж у два рази перевищує ентропію розподілу $У$, що узгоджується з інтуїтивними уявленнями про невизначеність цих розподілів (закон розподілу $У$ має значно меншу невизначеність і дає змогу досить упевнено передбачити наслідок випробування $Y = \frac{1}{3}$).

Цікаво, що в цьому прикладі $M_X = M_Y = 0.5$ і $D_X = D_Y = 0{,}25$, отже, ці характеристики виявляються некорисними для прогнозування значень випадкової величини.▲

Приклад 23. Використовуючи таблицю розподілу індикатора X_A деякої події А (розподіл Бернуллі), визначити, при якому значенні p наслідок випробування має найбільшу невизначеність.

Розв'язування:

▼ Ентропія розподілу індикатора запишеться у вигляді

$H_{X_A} = -(q\log_2 q + p\log_2 p) = -((1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p)$.

Перейшовши для зручності обчислення до основи натуральних логарифмів, знайдемо максимум функції H_{X_A} звичайними засобами. Маємо

$$\frac{dH_{X_A}(p)}{dp} = \frac{1}{\ln 2}(\ln(1-p) - \ln p) = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1-p}{p} = \ln 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $\frac{d^2H_{X_A}(p)}{dp^2} = \frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{1-p} - \frac{1}{p}\right) < 0$, то при $p = \frac{1}{2}$ величина $H_{X_A}(p)$ досягне максимуму. ▲

Узагальнюючи цей результат, можна показати, що з усіх розподілів дискретних випадкових величин максимальну ентропію, звісно, має рівномірний розподіл, тобто, у цьому випадку передбачити наслідок випробування найважче і ця складність буде зростати разом із зростанням числа наслідків випробування.

Разом з ентропією дискретного розподілу розглядають також і ентропію неперервної випадкової величини X, яка визначається за формулою

$$H_X = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\log_2 f_X(x)dx\ ,$$

де $f_X(x)$ — щільність розподілу ймовірностей X ($f_X(x)^*$ $\log_2 f_X(x) \equiv 0$ для тих значень X, при яких $f_x(x) = 0$). Якщо останній інтеграл збіжний, то він є мірою невизначеності неперервної випадкової величини X.

Приклад 24. Знайти ентропію неперервної нормально розподіленої величини X з параметрами $M(X) = 0$, $\sigma(X) = \sigma$.

Розв'язування:

▼ Для нормального розподілу $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Звідси за означенням отримаємо

$$H_X^{\text{норм}} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\ln 2}\left(\ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx.$$

Останній інтеграл подамо у вигляді суми двох доданків:

$$H_X^{\text{норм}} = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{\ln\sqrt{2\pi\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx\right).$$

Уже відмічалось, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$$ як

інтеграл Пуассона, а $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = D(X) = \sigma^2$.

Отже, $H_X^{\text{норм}} = \log_2(\sigma\sqrt{2\pi e})$ біт. ▲

ЛІТЕРАТУРА

1. *Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика. Основы моделирования и первичная обработка данных.- М.: Финансы и статистика, 1983.

2. *Аксенчик А.В., Волковец А.И., Корбут А.А., Коренская И.Н.* Методические указания и контрольные задания по курсу „Теорія вероятностей и математическая статистика" для студентов всех специальностей БГУИР. – Минск: БГУИР,2002. – 60 с.

3. *Алексеев В.Г.* Михаил Васильевич Остроградский. Биография. – Юрьев, 1902. – 36 с.

4. *Бэлл Э.Т.* Творцы математики: Предшественники современной математики. Пособие для учащихся / Под ред. с доп. Киро С.Н.- М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

5. *Безикович А.С.* Работы А.А. Маркова по теории вероятностей./ Том XVII, № 1 - 18 – Изд. Росс. Акад. Наук, 1923.- с. 35 – 44.

6. *Бернштейн С. Н.* Петербургская школа теории вероятностей./ № 55, серия матем. наук, вып. 10 - Уч. зап. Лен. гос. унив., 1940.- с. 3 – 11.

7. *Биллингсли Л.* Сходимость вероятностных мер.- М.: Наука, 1981.- 175 с.

8. *Болгарский Б.В.* Очерки по истории математики. – Минск: Выщайшая школа, 1979. – 368 с

9. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. -М.: Эдиториал УССС, 1999. – 273 с.

10. *Бородін О.І., Бугай А.С.* Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Вища школа, 2003. – 234 с.

11. *Brownlee K.A.* Statistical theory and metohodology in science and engineering. – New York; London; Sydney, 1977. – 485 p.

12. *Бурачек С.О.* Математические лекции г. академика Остроградского. – С. Пб., 1836. – 31 с.

13. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 416 с.

14. *Вентцель Е. С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991.- 295 с.

15. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. – 5-е изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 1999.– 576 с.

16. *Вітлінський В.В., Верченко П.І.* Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2000. – 292 с.

17. *Войтенко М.А.* Руководство к решению задач по теории вероятностей. – М.: Изд. ВЗФЭИ, 1988.- 320 с.

18. *Волковец А.И., Гуринович А.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика: Конспект лекций для студентов всех специальностей и форм обучения. - Минск: БГУИР, 2003. – 84 с.

19. *Волковец А.И., Гуринович А.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика: Практикум для студентов всех специальностей и форм обучения. – Минск: БГУИР, 2003. – 68 с.

20. *Галай И.Я., Гриневич Г.Д.* Учащимся о выдающихся математиках. – М.: Наука, 2005. – 125 с.

21. *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика.- Киев: Вища школа, 1988.- 438с.

22. *Гельман В.Я.* Решение математических задач средствами Excel: Практикум – СПб.: Питер, 2003. – 240 с.

23. *Герасимович А.И.* Математическая статистика. – Минск: Выщейшая школа, 1983. – 279 с.

24. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977. – 479 с.

25. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1998. – 400 с.

26. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1975.- 267 с.

27. *Гнеденко Б.В.* Очерки истории математики в России. – М.: Изд. АН СССР, 1946. – 230 с.

28. *Гнеденко Б.В., Погребысский И.Б.* Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Изд. АН СССР, 1963. – 270 с.

29. *Гурский Е.И.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. – Минск: Выщайшая школа, 1984. – 223 с.

30. *Дубров А.М., Мхитарян В.С., Грошин Л.И.* Многомерные статистические методы. – М.: Финансы и статистика, 1998.- 210 с.

31. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.* Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2002. – 226 с.

32. *Емельянов Г.В., Скитович В.П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике.- Издательство Ленинградского университета, 1967.-329с.

33. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. - М., Наука, 1987. – 235 с.

34. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. - М.: Наука, 1982.- 188 с.

35. *Электронный* учебник по книге. М.Эддоус, Р.Стэнсфилд «Методы принятия решений». http://sider.home.nov.ru

36. *Жевняк Р.М., Карпук А.А., Унукович В.Т.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов инженерно-экономических специальностей. – Минск: Харвест, 2000. – 384 с.

37. *Жиглявский А.А.* Математическая теория глобального случайного поиска. –Львов: ЛГУ, 1985. – 184 с

38. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.– метод. посібник у 2 ч. - Ч.І. Теорія ймовірностей. – К.: КНЕУ, 2005. – 304 с.

39. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2 ч. – Ч.ІІ. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2005. – 364 с.

40. *Иванова В.М., Калинина В.Н. и др.* Математическая статистика.- М.: Высшая школа, 1981.- 313 с.

41. *Как я* стал математиком. Что такое математика. – Наука в твоей профессии. – М.: Знание, 1978. - № 11. – с. 5 – 9.

42. *Калинина В. Н., Панкин В. Ф.* Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1998. – 290 с.

43. *Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И.* Курс высшей математики для экономических вузов./ Ч.2 – М.: Высшая школа, 1982. – 3444 с.

44. *Кендалл М., Стьюарт А.Г.* Статистические выводы и связи. - М.: Наука, 1973.- 285 с

45. *Колемаев В.А., Калинина В.Н., Соловьев В.И., Малыхин В.И., Курочкин А.П.* Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие:- М.: ГУУ, 2001.- 87 с.

46. *Колемаев В.А., Калинина В.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Инфра - М, 1997. – 320 с

47. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1975.- 146 с.

48. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 543 с.

49. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. - М., Наука, 1979. – 223 с.

50. *Лихолетов И.И., Мацкевич И.П.* Руководство к решению задач по высшей математике и математической статистике. – Минск: Выщейшая школа, 1976. – 240 с.

51. *Марков А.А.* Биографический словарь профессоров и преподавателей С. – Петербургского университета за истекшую третью четверть века его существования. 1869 – 1894. Т. 2. М – Я.: СПб, 1898.- с. 3 – 5.

52. *Марков А.А.* Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей./ ред. проф. Ю.В. Линника.- М.: Изд. АН СССР, 1951.- 344с.

53. *Математика.* Справочник школьника. – М.: Слово, 1995. – 630 с.

54. *Материалы* Академии наук, www.pran.ru/info

55. *Мацкевич И.П., Свирид Г.П., Булдык Г.М.* Сборник задач и упражнений по высшей математике. Теория вероятностей и математическая статистика. – Минск: Выщейшая школа, 1996. – 310 с.

56. *Ниворожкина Л.И., Морозова З.А.* Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов. – Ростов–на–Дону: Феникс, 1999. – 316 с.

57. *Остроградский М.В.* Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

58. *Последнее* интервью: (Беседа А.Н.Колмогорова с А.Н. Марутюняном, 1983 г.)/Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове/ Под ред. Тихомирова В.М. Сост. Розов Н.Х. – М., 1999. – 221 с.

59. *Прудников В.Е. Буняковский В.Я.* – ученый и педагог. – М.: Учпедгиз, 1954. – 83 с.

60. *Рао С.* Линейные статистические выводы. - М.: Наука, 1968. – 168 с.

61. *Ричард Томас.* Количественные методы анализа хозяйственной деятельности/ Пер. с англ. – М.: Дело и сервис, 1999.– 432 с.

62. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика/ Под ред. А.В. Ефимова.– М.: Наука, 1990. – 428 с.

63. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А. Свешникова.– М.: Наука, 1965. – 656 с.

64. *Сингаевская Г.И.* Функции в Excel. Решение практических задач.:- М.: Издательский дом „Вильямс", 2005.- 880 с.

65. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969.- 334 с.

66. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике/ В.С. Королюк и др. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

67. *Теорія* ймовірностей. Збірник задач. Під редакцією А. В. Скорохода.- Київ: Вища школа, 1976.-383с.

68. *Трипольский П.И.* Михаил Васильевич Остроградский. – Полтава, 1902. – 140 с.

69. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Статистический анализ данных на компьютерах/ Под ред. В.Є. Фигурнова. – М.: Инфра - М, 1998.- 187 с.

70. *Феллер В.* Теория вероятностей и ее приложения./ т. 1,2 - М.:Мир, 1984.- 540 с.

71. *Ферстер Э., Ренц Б.* Методы корреляционного и регрессионного анализа: Пер. с нем.. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 310 с.

72. *Харин Ю.С., Степанова М.Д.* Практикум на ЭВМ по математической статистике.–Минск: Университетское, 1987.–304 с.

73. *Хьюстон А.* Дисперсионный анализ. – М.: Статистика, 1971.- 127 с.

74. *Черняк О.І, Обушна О.М., Ставицький А.В.* Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач.- Київ: Знання, 2001.-199с.

75. *Четыркин Е.М., Калихман И.Л.* Вероятность и статистика. – М.: Финансы и статистика, 1982.- 192 с.

76. *Ширяев А.Н.* Вероятность.- М.: Наука, 1980.-574 с.

Навчальне видання

Медведєв М.Г., Пащенко І.О.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Підручник

Відповідальний за випуск
Зарицкий В.І.

Авторська редакція

Комп'ютерна верстка та дизайн
Н.М.Іванченко

Підписано до друку 09.06.2008. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$.
Папір офсетний. Гарнітура NewtonCTT.
Ум. друк. арк.   Обл.-вид. арк.
Тираж 1000 прим. Зам. № 32

Надруковано: ФОП Наумов А.В.