В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В MAPLE

Частина II

Двоїсті та цілочислові задачі лінійного програмування

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. М. Михалевич, О. І. Тютюнник

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В MAPLE

Частина II

ДВОЇСТІ ТА ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2013

УДК 519.85+681.3.05(075)
ББК 22.18+32.973.26-018.2я73
М69

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол №10 від 30.05.2012 р.).

Рецензенти:
Ф. М. Сохацький, доктор фізико-математичних наук, професор
В. І. Клочко, доктор педагогічних наук, професор
О. М. Роїк, доктор технічних наук, професор
О. В. Мороз, доктор економічних наук, професор

Михалевич, В. М.

М69 Вища математика. Математичне програмування в Maple. Частина II. Двоїсті та цілочислові задачі лінійного програмування : навчальний посібник. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 78 с.

Подано теоретичні відомості з окремих тем: двоїстісті задачі лінійного програмування, двоїстий симплекс-метод, цілочислове програмування. Особливість посібника полягає в широкому використанні системи комп'ютерної математики Maple для висвітлення основних понять, ідей та методів, що розглядаються. Дано стислий опис пакетів розширення Maple для розв'язування задач лінійного програмування.

Розрахований на студентів технічних та економічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

УДК 519.85+681.3.05(075)
ББК 22.18+32.973.26-018.2я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник складено за програмою курсу "Вища математика" для студентів усіх форм навчання та спеціальностей вищих технічних та економічних навчальних закладів освіти на основі багаторічного досвіду викладання у Вінницькому національному технічному університеті.

Головна особливість посібника полягає у викладенні математичного програмування із застосуванням інформаційних технологій. Для цього пропонується використовувати середовище математичного пакету Maple. Авторами розроблено свій оригінальний підхід, в якому система Maple використовується для розкриття основних ідей, що містяться в теоремах двоїстості та покладені в основу двоїстого симплекс-методу розв'язання задач лінійного програмування, а також цілочислових задач лінійного програмування. В посібнику зроблено спробу висвітлення ключових етапів двоїстого симплекс-методу з наочною геометричною інтерпретацією. Цим посібник відрізняється як від багатьох відомих підручників, в яких пропонується формалізований перелік інструкцій для реалізації двоїстого симплекс-алгоритму, так і від інших відомих спроб викладення математичного програмування, в яких застосування інформаційних технологій зводиться до переліку інструкцій для одержання в певному додатку або остаточної відповіді, або, в кращому разі, послідовності симплекс-подібних таблиць.

При викладенні двоїстого симплекс-методу використовується традиційний формалізований підхід: без залучення понять двоїстої задачі. На думку авторів такий підхід є логічним продовженням методології викладення симплекс-методу, поданої в першій частині посібника.

Формальне подання двоїстого симплекс-методу у вигляді сукупності правил разом з геометричною інтерпретацією, за аналогією з поданням симлекс-алгоритму, сприяє кращому усвідомленню ключової ідеї симплексного підходу: пошук початкової вершини, перевірка поточної вершини області допустимих значень на оптимальність та направлений перехід до сусідньої вершини.

Всі задачі пропонується розв'язувати в середовищі математичного пакета Maple. Причому мова йде не про елементарні рецепти для отримання відповіді за допомогою однієї стандартної команди, а про свідоме відтворення студентом за допомогою Maple-команд всіх етапів двоїстого симплекс-алгоритму та методу Гоморі.

Даний посібник, який є продовженням "Математичного програмування разом з Maple. Частина I. Методи розв'язування задач лінійного програмування", містить у собі відомості з тем: "Загальна постановка та форми запису задач лінійного програмування", "Двоїстість у задачах лінійного програмування", "Двоїстий симплекс-метод", "Цілочислові задачі лінійного програмування" та стислий опис пакетів розширення системи Maple для розв'язування задач лінійного програмування. Висвітлені в посібнику теоретичні відомості можна вважати скороченим курсом лекцій. Ці відомості демонструються прикладами.

Автори намагалися навести основні відомості, що стосуються як специфіки роботи в середовищі додатка Maple, так і особливостей використовуваних команд і операторів. В той же час для кращого розуміння та більш ефективного використання наведених у посібнику Maple-програм бажано мати уяву про мови програмування у відповідності з об'ємом курсу інформатики середньої школи. В крайньому разі, "механічний" підхід до використання програм теж може виявитися цілком придатним.

Посібник розрахований на студентів економічних та технічних ВНЗ усіх форм навчання та спеціальностей.

1 ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ТА ФОРМИ ЗАПИСУ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальна задача лінійного програмування

Задачам лінійного програмування можна надавати різних форм запису: загальної, стандартної, канонічної. Типовою є ситуація, коли змістовна задача формулюється в стандартній або в загальній формі, а для застосування математичного методу її розв'язання перетворюється в канонічну форму запису.

В розгорнутому вигляді загальна задача лінійного програмування має такий вигляд.

Знайти найбільше (найменше) значення лінійної функції

$$z(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \tag{1.1}$$

за умови

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \le b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \le b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{k1} \cdot x_1 + a_{k2} \cdot x_2 + ... + a_{kn} \cdot x_n \le b_k \end{cases}, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} a_{k+11} \cdot x_1 + a_{k+12} \cdot x_2 + ... + a_{k+1n} \cdot x_n = b_{k+1} \\ a_{k+21} \cdot x_1 + a_{k+22} \cdot x_2 + ... + a_{k+2n} \cdot x_n = b_{k+2} \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}, \tag{1.3}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_l \ge 0, \quad 0 \le l \le n, \tag{1.4}$$

де a_{ij}, b_i, c_j $\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$ – задані сталі величини.

Функція (1.1) називається **цільовою**, оскільки метою (ціллю) задачі є знаходження її найбільшого (найменшого) значення.

Співвідношення (1.2) – (1.4) називаються **обмеженнями** задачі, оскільки накладають певні обмеження на можливі значення невідомих x_j, $j = \overline{1,n}$.

Будь-який розв'язок системи обмежень (1.2) – (1.4) називається **допустимим розв'язком** (або **планом**).

Допустимий розв'язок $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, для якого цільова функція задачі (1.1) приймає своє найбільше (найменше) значення, називається **оптимальним розв'язком**.

В загальній задачі частина обмежень може бути заданою у вигляді нерівностей типу (1.2), а решта обмежень – у вигляді строгих рівностей (1.3). Умови невід'ємності (1.4) можуть поширюватися не на всі змінні.

Зауваження. Якщо серед обмежень зустрічаються нерівності типу "≥", то множенням обох частин нерівності на -1 вона обертається в нерівність типу "≤": помножимо обидві частини нерівності $-2x_1+5x_2 \geq 20$ на -1, дістанемо еквівалентну нерівність $2x_1-5x_2 \leq -20$.

Запишемо **загальну задачу лінійного програмування в компактному вигляді**.

Знайти найбільше (найменше) значення лінійної функції

$$z(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \qquad (1.5)$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1,k}, \qquad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m} \qquad (1.7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,l}, \; l \geq 1. \qquad (1.8)$$

Стандартна (або **симетрична**) **задача лінійного програмування** – частинний випадок загальної, яка полягає в знаходженні найбільшого значення цільової функції (1.1) за умови $k=m$ і $l = n$. В **розгорнутому** вигляді матимемо:

знайти

$$z(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max \qquad (1.9)$$

за умови

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + ... + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + ... + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \end{cases}, \qquad (1.10)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_m \geq 0. \qquad (1.11)$$

Стандартна задача лінійного програмування в компактному вигляді:

знайти

$$z(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j\to\max \tag{1.12}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j\le b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1.13}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}. \tag{1.14}$$

Зауваження. З якої причини розглянута форма запису називається симетричною стане зрозумілим після розгляду взаємно-двоїстих задач лінійного програмування (розділ 2).

Канонічна задача – частинний випадок загальної, яка полягає в знаходженні найбільшого значення цільової функції (1.1) за умови $k=0$ і $l=n$. В **розгорнутому** вигляді матимемо:

знайти

$$z(x_1,x_2,...,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\to\max \tag{1.15}$$

за умови

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+...+a_{1n}\cdot x_n=b_1, \\ a_{21}\cdot x_1+a_{22}\cdot x_2+...+a_{2n}\cdot x_n=b_2, \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ a_{m1}\cdot x_1+a_{m2}\cdot x_2+...+a_{mn}\cdot x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.16}$$

$$x_1\ge 0, x_2\ge 0,..., x_n\ge 0. \tag{1.17}$$

Канонічна задача лінійного програмування в компактному вигляді:

знайти

$$z(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j\to\max \tag{1.18}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j=b_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1.19}$$

$$x_j\ge 0, j=\overline{1,n}. \tag{1.20}$$

Існують прості стандартні **прийоми переходу від загальної або стандартної задачі лінійного програмування до канонічної**.

1. Для того, щоб від обмеження-нерівності типу

$$a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n \le b_i$$

перейти до строгої рівності достатньо в ліву частину нерівності ввести **додаткову невід'ємну невідому** $x_{n+i} \ge 0$:

$$a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \ldots + a_{in}\cdot x_n + x_{n+i} = b_i$$

і для збереження справедливості формальних записів вважати, що додаткові змінні входять в цільову функцію з нульовими коефіцієнтами.

2. Змінні, для яких не виконується умова невід'ємності, формально замінюються різницею двох невід'ємних змінних, що вводяться додатково:

$$x_r = x_r' - x_r'', \quad x_r' \ge 0, x_r'' \ge 0.$$

3. Задача знаходження найбільшого значення цільової функції $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ еквівалентна задачі знаходження найменшого значення функції $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = -z(x_1, x_2, \ldots x_n)$. І навпаки, якщо найменше значення функції $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дорівнює $z_{\min}$ і досягається в точці $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, то найбільше значення функції $f = -z$ дорівнює $f_{\max} = -f_{\min}$ і досягається в тій самій точці.

Приклад. Звести до канонічного вигляду задачу

$$z = -4x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \le 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 \le 5. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

В даному випадку $m = 3, \quad n = 4$.

Змінюємо знак цільової функції

$$f = 4x_1 - 7x_2 - x_3 + x_4 \to \max.$$

Вводимо додаткові змінні в задані нерівності для перетворення їх у строгі рівності

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_6 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_7 = 5. \end{cases}$$

Змінна x_6 ввійшла в рівняння зі знаком “-“, оскільки ліва частина другої нерівності в заданій системі обмежень більше правої частини. І для того, щоб перетворити її на рівність, від лівої частини потрібно відняти деяку невід'ємну величину, конкретне значення якої є невідомим. Із аналогічних міркувань змінні x_5 та x_7 записані зі знаком “+“.

Оскільки для змінних x_2, x_4 не вимагається невід'ємність, замінюємо їх відповідно двома різницями: $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_4 = x_4' - x_4''$, де $x_2' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_4' \geq 0, x_4'' \geq 0$.

Отже, в канонічній формі задана задача матиме вигляд:

$$f = 4 \cdot x_1 - 7(x_2' - x_2'') - x_3 + (x_4' - x_4'') + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2' - 5x_2'' + x_3 - x_4' + x_4'' + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2' + 4x_2'' + 2x_3 + 3x_4' - 3x_4'' - x_6 = 1, \\ -3x_1 + x_2' - x_2'' + x_3 - 3x_4' + 3x_4'' + x_7 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_2'' \geq 0,\ x_3 \succ 0,\ x_4' \geq 0,\ x_4'' \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0.$$

2 ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, яка називається **двоїстою до даної**. Теорія двоїстості дає змогу відповісти на деякі питання, пов'язані з властивостями планів задачі лінійного програмування, умовами існування розв'язку та його залежності від даних задачі, пошуком ефективних прийомів знаходження оптимального розв'язку.

Щоб краще зрозуміти поняття двоїстості, виклад почнемо з задачі про використання сировини з найбільшим прибутком. Подамо цю задачу в такій інтерпретації. Чотири підрозділи великої корпорації об'єдналися для виготовлення продукції двох видів $П_1$ та $П_2$. При цьому використовуються чотири види сировини S_1, S_2, S_3, S_4, кожна з яких належить окремому підрозділу. Запаси сировини та їх витрати на виготовлення одиниці кожного виду продукції задані в таблиці:

Вид продукції / Запаси сировини	$П_1$	$П_2$
S_1=8	p_{11}=2	p_{12}=1
S_2=6	p_{21}=1	p_{22}=1
S_3=5	p_{31}=1	p_{32}=0
S_4=7	p_{41}=0	p_{42}=1
Прибуток від одиниці продукції	7	6

Там же вказано прибуток підприємства від виготовлення одиниці продукції кожного виду. Математичне формулювання задачі має такий вигляд.

Серед всіх невід'ємних розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \le 5 \\ x_2 \le 7 \end{cases}, \qquad (2.1)$$

знайти такий, при якому цільова функція

$$z = 7x_1 + 6x_2 \qquad (2.2)$$

матиме найбільше значення.

Розв'язання цієї задачі привело нас до висновку, що потрібно виготовити $x_1 = 2$ одиниць продукції виду $П_1$ і $x_2 = 4$ одиниць продукції виду $П_2$. При цьому прибуток від реалізації виготовленої продукції буде максимальним і становитиме $z_{\max} = 38$ *у. о.*

Припустимо тепер, що керівництво корпорації з певних причин приймає рішення не випускати більше продукції видів $П_1$ та $П_2$, а наявні запаси сировини продати іншим підрозділам корпорації. Виникає питання: за якими цінами має бути продана сировина? Тобто, нас цікавитиме не вартість сировини при її придбанні корпорацією (ця вартість, по суті, внесена в прибуток, який підприємство отримує при реалізації виготовленої продукції), а, так би мовити, відносна вартість сировини з точки зору прибутків, що їх отримує корпорація в результаті переробки сировини в продукцію. Отже, позначимо через y_1, y_2, y_3, y_4 ціну одиниці сировини відповідного виду. Тоді прибуток від продажу сировини, що витрачається на виготовлення одиниці продукції $П_1$, дорівнюватиме $2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4$. Природно, що рішення продати сировину, з одного боку, не повинно торкатися інтересів тих підрозділів, що випускали цю продукцію. Отже, прибуток від продажу сировини не повинен бути меншим прибутку від реалізації виготовленої продукції, тобто повинна виконуватися нерівність

$$2 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 \geq 7. \qquad (2.3)$$

Аналогічні міркування відносно одиниці продукції $П_2$ приводять ще до однієї нерівності

$$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 \geq 6. \qquad (2.4)$$

З іншого боку, загальна вартість всіх запасів сировини складає $8 \cdot y_1 + 6 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 + 7 \cdot y_4$. І ця вартість повинна бути по можливості найменша, оскільки продаж-купівля відбуваються в межах одної корпорації, яка зацікавлена в максимальному збалансуванні інтересів продавця і покупця.

Таким чином, ми приходимо до такої задачі лінійного програмування: знайти

$$F = 8 \cdot y_1 + 6 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 + 7 \cdot y_4, \rightarrow \min \qquad (2.5)$$

за обмежень

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 7 \\ y_1 + y_2 + y_4 \geq 6 \end{cases}, \qquad (2.6)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \qquad (2.7)$$

Ця задача є **двоїстою** до задачі використання сировини, вона має розв'язок (його можна знайти симплексним методом) $Y_{опт} = (1;5;0;0)$. За цим розв'язком $F_{\min} = 8 \cdot 1 + 6 \cdot 5 = 38$ *у. о.* Зовсім не випадково це значення виявилося таким самим, як і значення функції $z = 7x_1 + 6x_2$ при $x_1 = 2$ і $x_2 = 4$, знайдене раніше. Можна вважати, що оптимальний розв'язок $Y_{опт}=(1;5;0;0)$ двоїстої задачі визначає відносну вартість сировини з точки зору прибутків, що отримує корпорація переробкою сировини в продукцію $П_1$ та $П_2$. Найбільша ціна сировини S_2 обумовлена тим, що запаси саме цієї сировини найбільшою мірою обмежують кількість виробленої продукції, а отже, і отримуваний прибуток від її реалізації.

При уважному аналізі прямої та двоїстої задач виявляється, що вони пов'язані рядом суттєвих особливостей.

Перейдемо до загальних означень. Розглянемо спочатку випадок, коли задача лінійного програмування записана в стандартній формі.

2.1 Двоїсті задачі в симетричній формі

Пряма задача

$$z=\sum_{j=1}^{n}c_j\cdot x_j\to\max \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot x_j\le b_i\,,\quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{2.9}$$

$$x_j\ge 0\ \left(j=\overline{1,n}\right). \tag{2.10}$$

Двоїста задача

$$F=\sum_{i=1}^{m}b_i\cdot y_i\to\min \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\cdot y_i\ge c_j\,,\ \left(j=\overline{1,n}\right), \tag{2.12}$$

$$y_i\ge 0\ \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{2.13}$$

Правило 1 (побудови взаємно-двоїстих задач у симетричній формі)

1. Кількість змінних однієї задачі дорівнює кількості нерівностей в обмеженнях іншої.

2. Коефіцієнти цільової функції однієї задачі дорівнюють правим частинам системи обмежень іншої.

3. Одна задача повинна бути на знаходження найбільшого (з нерівностями типу “$\le$“), а інша – найменшого (з нерівностями типу “$\ge$“) значення цільової функції.

4. Матриця системи обмежень одної задачі повинна бути транспонованою матрицею системи обмежень іншої.

5. Всі змінні в обох задачах повинні бути невід’ємні.

Перед побудовою двоїстої задачі потрібно перевірити, чи виконуються для вихідної задачі такі умови:

- в усіх нерівностях системи обмежень вільні члени містяться у правій частині нерівності, члени з невідомими – в лівій;
- всі обмеження-нерівності вихідної задачі мають бути записані так, щоб знаки нерівності в них були спрямовані в один і той самий бік (для цього достатньо окремі нерівності помножити на -1).

Якщо побудувати двоїсту задачу до двоїстої, то отримаємо вихідну задачу. Тобто, будь-яку з цих задач можна вважати прямою, а тоді інша буде двоїстою до неї. Задачі (2.8) – (2.10) і (2.11) – (2.13) називають **взаємно-двоїстими задачами в симетричній формі**.

Приклад 1. Побудувати двоїсту задачу до задачі

$$z = -2x_1 + 4x_2 \to \max \qquad (a)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 19x_1 - 8x_2 \le 57. \end{cases} \qquad (b)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (c)$$

Розв’язання. Спочатку надамо задачі стандартної форми запису (2.8) – (2.10). Для цього достатньо помножити обидві частини другої нерівності в системі обмежень (b) на (-1)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -2x_1 - x_2 \le -6, \\ 19x_1 - 8x_2 \le 57. \end{cases} \qquad (d)$$

Шукану двоїсту задачу побудуємо як двоїсту до задачі (a), (d), (c). Обмеження прямої задачі (d) складаються з трьох нерівностей, отже, згідно з п.1 (правила 1), двоїста задача матиме три змінні y_1, y_2, y_3. Згідно з п. 2 коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі дорівнюють вільним членам обмежень (*d*), а згідно з п. 3 – знаходиться найменше значення цільової функції

$$F = 12y_1 - 6y_2 + 57y_3 \to \min. \qquad (e)$$

Згідно з п. 4 коефіцієнти при невідомих в лівих частинах обмежень двоїстої задачі отримуються транспонуванням матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях (*d*). Наприклад, в обмеження прямої задачі (*d*) змінна x_1 входить з такими коефіцієнтами (1; -2; 19), отже, ці числа використовуємо як коефіцієнти лівої частини першої нерівності двоїстої задачі

$$\begin{cases} y_1 - \ \ 2y_2 + \ \ 19y_3 \geq -2, \\ 3y_1 - \ \ y_2 - \ \ \ 8y_3 \geq 4. \end{cases} \qquad (f)$$

Знак нерівності – "≥" встановлюється згідно з п. 3, а згідно з п. 2 вільні члени в нерівностях дорівнюють коефіцієнтам цільової функції прямої задачі. Згідно з п. 5 записуємо умову невід'ємності невідомих

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0. \qquad (g)$$

Задачі (*a*), (*d*), (*c*) та (*e*), (*f*), (*g*) є взаємно-двоїстими. Якщо за вихідну взяти задачу (*e*), (*f*), (*g*) та побудувати двоїсту до неї, то отримаємо задачу (*a*), (*d*), (*c*).

2.2 Загальні правила складання двоїстих задач

Ми розглянули перехід до двоїстої задачі в найпростішому випадку, коли пряма задача задана в симетричній формі. Якщо пряма задача задана в загальній формі, то для складання двоїстої до неї можна вибрати два способи. Перший спосіб – спочатку звести задану задачу до симетричної форми, а потім скористатися правилами 1. Інший спосіб – побудувати двоїсту задачу, скористувавшись правилом 2, що узагальнює правило 1.

Правило 2 (побудови взаємно-двоїстих задач)

1. Кількість змінних однієї задачі дорівнює загальній кількості рівнянь та нерівностей в системі обмежень іншої.

2. Коефіцієнти цільової функції однієї задачі дорівнюють правим частинам системи обмежень іншої.

3. Одна задача повинна бути на знаходження найбільшого, а інша – найменшого значення цільової функції.

4. Обмеження в задачі "на максимум" повинні бути записані за допомогою рівнянь і (або) нерівностей типу "≤", а в задачі "на мінімум" – за допомогою рівнянь і (або) нерівностей типу "≥".

5. Кожній нерівності системи обмежень однієї задачі повинна відповідати в іншій задачі невід'ємна змінна, а кожному рівнянню - повинна відповідати в іншій задачі змінна, на знак якої не накладено обмежень.

6. Матриця системи обмежень одної задачі повинна бути транспонованою матрицею системи обмежень іншої.

Зокрема, якщо пряма задача задана в канонічній формі, то матимемо пару двоїстих задач в несиметричній формі:

$$z=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to max \tag{2.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i\ , \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{2.15}$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}. \tag{2.16}$$

$$F=\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min \tag{2.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i \ge c_j\ , \ (j=\overline{1,n}). \tag{2.18}$$

Оскільки обмеження прямої задачі задані у вигляді рівностей, то на змінні двоїстої задачі не накладаються умови невід'ємності.

Приклад 2 Скласти задачу двоїсту до задачі

$$z=x_1-4x_2+2x_3-x_4 \to \min \tag{a}$$

$$\begin{cases} 3x_1- \quad x_2+ \quad 2x_3- \quad 4x_4 \quad \le 3 \\ \qquad\quad 2x_2- \quad x_3+ \quad 3x_4 \quad =4\ , \\ -2x_1- \quad 4x_2+ \quad 2x_3- \quad 3x_4 \quad \ge -5 \end{cases} \tag{b}$$

$$x_1 \ge 0, x_4 \ge 0. \tag{c}$$

Розв'язання. Щоб домогтися виконання п. 4 правила 2 помножимо обидві частини першої нерівності в системі обмежень (b) на (-1)

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 \geq -3 \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq -5 \end{cases} \qquad (d)$$

Складемо задачу, двоїсту до задачі (a), (d), (c). Обмеження прямої задачі (d) складаються з трьох співвідношень, отже, згідно з п. 1 правила 2, двоїста задача матиме три змінні y_1, y_2, y_3. Згідно з п. 2 правила 2 коефіцієнти цільової функції двоїстої задачі дорівнюють вільним членам обмежень (d), а згідно з п. 3 правила 2– знаходиться найбільше значення цільової функції

$$F = -3y_1 + 4y_2 - 5y_3 \to \max. \qquad (e)$$

Згідно з п. 6 правила 2 коефіцієнти при невідомих в лівих частинах обмежень двоїстої задачі отримуються транспонуванням матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях (d). Наприклад, в обмеження прямої задачі (d) змінна x_3 входить з такими коефіцієнтами (-2; -1; 2), отже, ці числа використовуємо як коефіцієнти лівої частини третьої нерівності двоїстої задачі

$$\begin{cases} -3y_1 - 2y_3 \leq 1 \\ y_1 + 2y_2 - 4y_3 = -4 \\ -2y_1 - y_2 + 2y_3 = 2 \\ 4y_1 + 3y_2 - 3y_3 \leq -1 \end{cases}, \qquad (f)$$

Знак нерівності – "$\leq$" для першої та четвертої нерівностей і знак "=" для другого та третього рівняння встановлюється згідно з п. 5 правила 2, а згідно з п. 2 правила 2 вільні члени дорівнюють коефіцієнтам цільової функції прямої задачі. Згідно з п. 5 правила 2 записуємо умову невід'ємності невідомих

$$y_1 \geq 0, y_3 \geq 0. \qquad (g)$$

Задачі (a), (d), (c) та (e), (f), (g) є взаємно-двоїстими. Якщо за вихідну взяти задачу (e), (f), (g) та побудувати двоїсту до неї, то отримаємо задачу (a), (d), (c).

Двоїсті невідомі y_i називають **внутрішніми** або **тіньовими цінами**; вони дають змогу оцінити вартість використовуваних ресурсів, а тому їх називають також **оцінками ресурсів.**

Кожна із пари двоїстих задач є самостійною задачею лінійного програмування і може бути розв'язана незалежно одна від одної. Але розв'язки цих задач тісно пов'язані. Щоб знайти ці зв'язки розглянемо основні властивості та теореми двоїстості.

2.3 Основні властивості та теореми двоїстості

Властивості допустимих розв'язків двоїстих задач сформулюємо як теореми двоїстості.

Властивість 1. (Основна нерівність теорії двоїстості) Якщо $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ і $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ – допустимі розв'язки прямої (2.8) – (2.10) і двоїстої (2.11) – (2.13) задач, то $z(x_1, x_2, ..., x_n) \le F(y_1, y_2, ..., y_m)$.

Доведення. Помножимо обмеження (2.9) на відповідні двоїсті невідомі y_i, дістанемо

$$\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot y_i \le b_i \cdot y_i, \ \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{2.19}$$

Знак нерівності не змінюється, оскільки всі $y_i \ge 0$. Додамо ліві і праві частини нерівностей (2.19):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot y_i \le \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i = F\left(y_1, y_2, ..., y_m\right). \tag{2.20}$$

Аналогічні операції проведемо з обмеженнями (2.12):

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(a_{ij} \cdot y_i\right) \cdot x_j \ge \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j = z\left(x_1, x_2, ..., x_n\right). \tag{2.21}$$

Подвійні суми в нерівностях (2.20) і (2.21) являють собою різні форми запису одного й того самого виразу

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot y_i \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(a_{ij} \cdot y_i\right) \cdot x_j,$$

отже, ці нерівності можна об'єднати

$$z(x_1, x_2, ..., x_n) \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \cdot y_i \le F(y_1, y_2, ..., y_m).$$

Остаточно **основна нерівність теорії двоїстості** для значень цільових функцій на допустимих розв'язках матиме вигляд

$$z(x_1, x_2, ..., x_n) \le F(y_1, y_2, ..., y_m). \tag{2.22}$$

Властивість 2. Якщо $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, ... x_n^0\right)$ і $Y_0 = \left(y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0\right)$ – допустимі розв'язки взаємно двоїстих задач (2.8) – (2.10) та (2.11) – (2.13) і $z(X_0) = F(Y_0)$, то X_0, Y_0 – оптимальні розв'язки цих задач.

Доведення. Будемо доводити властивість від супротивного. Припустимо існує оптимальний розв'язок прямої задачі $\overline{X_0}$, для якого $z(\overline{X_0}) \succ z(X_0)$. Але тоді повинна справджуватися нерівність $z(X) \le z(Y_0)$, що суперечить основній нерівності теорії двоїстості (2.22). Отже вихідне припущення – хибне, тобто для будь-якого допустимого, в тому числі й опорного розв'язку X задачі (2.8) – (2.10) справедливо $z(X) \le z(X_0)$, а це і означає, що X_0 є оптимальним розв'язком прямої задачі. Аналогічно можна довести, що Y_0 – оптимальний план двоїстої задачі (2.11) – (2.13).

Теорема 1. (Перша теорема двоїстості – теорема про мінімакс). Якщо одна з двоїстих задач має розв'язок, то інша також має розв'язок, і оптимальні значення цільових функцій на розв'язках цих задач однакові, тобто

$$z_{\max} = F_{\min}\,. \tag{2.23}$$

Якщо одна з двоїстих задач не має розв'язку через те, що цільова функція не обмежена, то інша двоїста задача взагалі не має допустимих розв'язків.

Наслідок. *Для того щоб обидві взаємно двоїсті задачі мали розв'язок необхідно і достатньо, щоб кожна з них мала принаймні по одному допустимому розв'язку.*

Теорема 2. (Друга теорема двоїстості – двоїстий критерій оптимальності). Допустимі розв'язки $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$ і $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ двоїстих задач відповідно (2.14) – (2.16) та (2.17) – (2.18) тоді і тільки тоді є оптимальними розв'язками цих задач, коли виконуються рівності

$$x_j^0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot y_i^0 - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.24}$$

Якщо розглядається пара симетричних двоїстих задач (2.8) – (2.10) та (2.11) – (2.13), то повинні виконуватися ще і рівності

$$y_i^0 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j^0 - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.25}$$

Рівності (2.24), (2.25) називають умовами доповняльної нежорсткості. Із цих рівностей випливає, що коли деяке обмеження задачі на оптимальному розв'язку не перетворюється на точну рівність, то відповідна невідома оптимального розв'язку двоїстої задачі обов'язково дорівнює нулю.

Далі буде показано, як за допомогою наведених рівностей на основі відомого розв'язку задачі лінійного програмування можна знайти оптимальний розв'язок двоїстої задачі.

2.4 Геометрична інтерпретація двоїстих задач

Якщо число змінних в кожній із взаємно-двоїстих задач дорівнює двом, то, використовуючи геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування, можна легко знайти розв'язок даної пари задач. При цьому, згідно з теоремою 1, може мати місце один із трьох випадків: 1) обидві задачі мають допустимі розв'язки; 2) допустимі розв'язки має тільки одна задача; 3) допустимі розв'язки відсутні в кожній задачі.

Приклад 3. Для задачі

$$z = 2x_1 + 7x_2 \to \max, \qquad (a)$$

$$\begin{cases} -x_1 + & 3x_2 \le & 7 \\ x_1 + & 2x_2 \le & 8 \end{cases}, \qquad (b)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \qquad (c)$$

скласти двоїсту задачу та знайти розв'язки обох задач.

Розв'язання. Складемо двоїсту задачу

$$F = 7y_1 + 8y_2 \to \min, \qquad (d)$$

$$\begin{cases} -y_1 + \quad y_2 \ge 2 \\ 3 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 \ge 7 \end{cases}, \qquad (e)$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \qquad (f)$$

Кількість змінних і в прямій і в двоїстій задачі дорівнює двом, отже, розв'язки обох задач можна знайти графічним методом (рис. 2.1 і рис. 2.2).

Як видно із рис. 2.1, максимальне значення цільова функція приймає в т. B(2, 3). Отже, $X_0 = (2;\ 3)$ є оптимальним розв'язком, при якому $z_{\max} = 25$.

Мінімальне значення цільова функція двоїстої задачі приймає в точці $A(\frac{3}{5};\frac{13}{5})$ (рис. 2.2). Отже, $Y_0 = (\frac{3}{5};\frac{13}{5})$ є оптимальним розв'язком двоїстої задачі, при якому $F_{\min} = 25$. Як і повинно бути, оптимальні значення цільових функцій прямої та двоїстої задач рівні між собою. Із рис. 2.1 видно, що при будь-якому допустимому розв'язку прямої задачі значення цільової функції не більше 25. Одночасно, як видно із рис. 2.2, значення цільової функції двоїстої задачі при будь-якому її допустимому розв'язку не менше 25. Таким чином, при будь-якому допустимому розв'язку прямої задачі значення цільової функції не перевищує значення цільової функції двоїстої задачі при її довільному допустимому розв'язку. Даний випадок є гарною геометричною інтерпретацією основної нерівності теорії двоїстості.

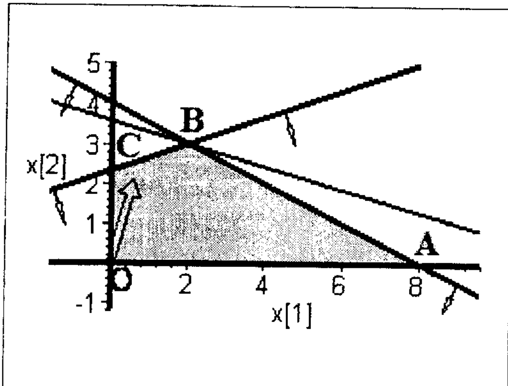


Рисунок 2.1 – Геометричне зображення прямої задачі (a) – (c)

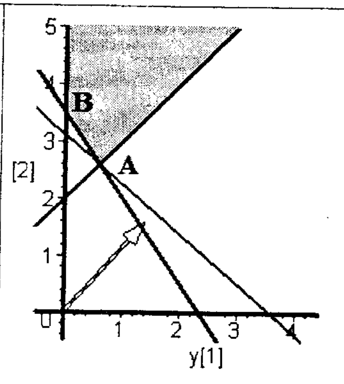


Рисунок 2.2 – Геометричне зображення двоїстої задачі (d) – (f)

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі

$$z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \to \max \qquad (a)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 + 5\cdot x_4 \le 3, \\ -x_1 + x_2 + 5\cdot x_3 + 6\cdot x_4 \le -1. \end{cases} \qquad (b)$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \qquad (c)$$

Розв'язання. Пряма задача складається з двох обмежень, отже двоїста до неї має дві змінні. Тому, склавши двоїсту задачу, матимемо змогу розв'язати її графічним методом.

Двоїста задача

$$F = 3y_1 - y_2 \to \min \qquad (d)$$

$$\begin{cases} -y_1 - \quad y_2 \quad \ge -1, \\ \ \ y_1 + \quad y_2 \quad \ge 2, \\ -3y_1 + \ 5y_2 \quad \ge -3, \\ \ 5y_1 + \ 6y_2 \quad \ge 4. \end{cases} \qquad (e)$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0. \qquad (f)$$

В даному випадку виявляється достатнім проаналізувати тільки перші дві нерівності системи обмежень (e)

$$\begin{cases} y_1 + \quad y_2 \quad \le 1, \\ y_1 + \quad y_2 \quad \ge 2. \end{cases} \qquad (g)$$

На рис. 2.3 зображені півплощини, які визначаються цими нерівностями. Очевидно, що ці нерівності визначають пусту множину, тобто, жодна точка площини не задовольняє обидві нерівності одночасно. Це означає, що двоїста задача розв'язку не має. Отже, за першою теоремою двоїстості відсутній розв'язок і для прямої задачі.

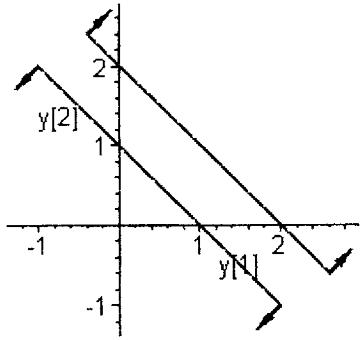


Рисунок 2.3 – Область допустимих значень задачі (*d*) - (*f*) – пуста множина

2.5 Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач лінійного програмування

Перша та друга теореми двоїстості дають змогу за розв'язком однієї з двоїстих задач знайти розв'язок іншої.

Запишемо співвідношення канонічної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї у матричному вигляді:

пряма задача

$$z = C \cdot X^T \to \max \tag{2.26}$$

$$A \cdot X^T = B^T, \tag{2.27}$$

$$X \ge 0, \tag{2.28}$$

двоїста задача

$$F = Y \cdot B^T \to \min \tag{2.29}$$

$$A^T \cdot Y^T \ge C^T, \tag{2.30}$$

де $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – матриця-рядок змінних прямої задачі;

$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – матриця-рядок коефіцієнтів цільової функції прямої задачі;

A – матриця коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{bmatrix};$$ $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ – матриця-рядок вільних членів системи обмежень прямої задачі; $Y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ – матриця-рядок змінних двоїстої задачі.

Якщо задача лінійного програмування розв'язується симплекс-методом, то розв'язок Y_0 двоїстої до неї задачі можна знайти за допомогою добутку двох матриць

$$Y_0=C_\delta\cdot A_6^{-1}, \qquad (2.31)$$

де A_6^{-1} – обернена до матриці A_6;

A_6 – матриця, складена із базисних стовпців матриці A, що відповідають оптимальному розв'язку прямої задачі;

C_δ – коефіцієнти цільової функції при базисних невідомих.

Приклад 5. Дана задача лінійного програмування

$$z=10x_1-x_2+43x_3-52x_4\to\max \qquad (2.32)$$

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+4x_3+4x_4\le 1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4\le -9,\\ -2x_1+x_2+x_3+3x_4=2,\\ -3x_1+2x_2-3x_3=7.\end{cases} \qquad (2.33)$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4. \qquad (2.34)$$

Потрібно: 1) знайти симплекс-методом розв'язок даної задачі; 2) скласти двоїсту задачу до заданої; 3) знайти симплекс-методом розв'язок двоїстої задачі; 4) знайти розв'язок двоїстої задачі за співвідношенням (2.31) та порівняти з розв'язком, знайденим симплекс-методом.

Розв'язання. 1. Ввівши додаткові невідомі запишемо всі обмеження прямої задачі у вигляді строгих рівностей

$$\begin{cases}-3x_1+x_2+4x_3+4x_4+x_5=1,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4+x_6=-9,\\ -2x_1+x_2+x_3+3x_4=2,\\ -3x_1+2x_2-3x_3=7.\end{cases} \qquad (2.35)$$

Розв'язок даної задачі шукатимемо за допомогою Maple. За вільні виберемо змінні x_3, x_6:

```
> z:=10*x[1]–x[2]–42*x[3]–52*x[4]:
Sys:={- 3*x[1] + x[2]+4*x[3]+x[4]+x[5] = 1,
```

3*x[1]–2*x[2]+2*x[3]–2*x[4]+x[6] = -9,
- 2*x[1]+x[2]+x[3]+3*x[4] = 2,
- 3*x[1]+2*x[2]–3*x[3] = 7}:
sols1:=solve (Sys, {x[1], x[2], x[4], x[5]});

$$sols1 := \{x_5 = 10 - 2x_3 + 4x_6, x_4 = 1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_6,$$
$$x_1 = 9 + 2x_3 + 3x_6, x_2 = 17 + \frac{9}{2}x_3 + \frac{9}{2}x_6\}$$

Знайдемо значення базисних змінних
> **subs(x[3]=0, x[6]=0, %);**

$$\{x_5 = 10, x_4 = 1, x_1 = 9, x_2 = 17\}$$

Від'ємні значення невідомих відсутні, отже, знайдений базисний розв'язок – допустимий. Перевіримо його на оптимальність
> **'z'=subs(%%, z);**

$$z = 21 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_6 .$$

Збільшення будь-якої з вільних невідомих – x_3 або x_6 приводить до зменшення цільової функції, отже знайдений опорний план – оптимальний:

$$X_0 = [x_1 = 9, x_2 = 17, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 10, x_6 = 0], \quad (2.36)$$

причому

$$z_{max} = 21 . \quad (2.37)$$

2. Складемо задачу, двоїсту до заданої задачі (2.32) – (2.34):

$$F = y_1 - 9y_2 + 2y_3 + 7y_4 \to min \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} -3y_1 & +3y_2 & -2y_3 & -3y_4 \geq 10, \\ y_1 & -2y_2 & +y_3 & +2y_4 \geq -1, \\ 4y_1 & +2y_2 & +y_3 & -3y_4 \geq -42, \\ y_1 & -2y_2 & +3y_3 & \geq -52. \end{cases} \quad (2.39)$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 . \quad (2.40)$$

3. Знайдемо симплекс-методом розв'язок двоїстої задачі (2.38) – (2.40). Перш за все зведемо двоїсту задачу до канонічного вигляду.

За правилом переходу до двоїстої задачі на змінні y_3, y_4, не накладаються умови невід'ємності, отже, потрібно подати ці змінні у вигляді різниці двох додаткових невід'ємних змінних:

$$y_3 = y1_3 - y2_3, y_3 = y1_4 - y2_4. \qquad (2.41)$$

Крім цього перетворимо нерівності системи обмежень (2.39) на строгі рівності, дістанемо

$$\begin{cases} -3y_1 + 3y_2 - 2(y1_3 - y2_3) - 3(y1_4 - y2_4) - y_5 = 10, \\ y_1 - 2y_2 + (y1_3 - y2_3) + 2(y1_4 - y2_4) - y_6 = -1, \\ 4y_1 + 2y_2 + (y1_3 - y2_3) - 3(y1_4 - y2_4) - y_7 = -42, \\ y_1 - 2y_2 + 3(y1_3 - y2_3) - y_8 = -52. \end{cases} \qquad (2.42)$$

$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0, y_5 \ge 0, y_6 \ge 0, y_7 \ge 0, y_8 \ge 0. \qquad (2.43)$$

Оскільки ліві частини нерівностей (2.39) не менші правих частин, то від лівих частин відняли невід'ємні додаткові невідомі y_5, y_6, y_7, y_8.

В Maple вказані дії зручно реалізувати в такій послідовності. Запишемо цільову функцію (2.38) та систему обмежень (2.39)

```
> F:=y[1]-9*y[2]+2*y[3]+7*y[4]:
Sys0:=[-3*y[1]+3*y[2]-2*y[3]-3*y[4]>=10,
y[1]-2*y[2]+y[3]+2*y[4]>= -1,
4*y[1]+2*y[2]+y[3]-3*y[4]>=-42,
y[1]-2*y[2]+3*y[3]>= -52];
```

$$Sys0 := [10 \le -3y_1 + 3y_2 - 2y_3 - 3y_4, -1 \le y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4, \\ -42 \le 4y_1 + 2y_2 + y_3 - 3y_4, -52 \le y_1 - 2y_2 + 3y_3]$$

Введенням додаткових змінних перетворимо нерівності на строгі рівності

```
> Sys1:=[-3*y[1]+3*y[2]-2*y[3]-3*y[4]=10,
y[1]-2*y[2]+y[3]+2*y[4]=-1,
4*y[1]+2*y[2]+y[3]-3*y[4]=-42,
y[1]-2*y[2]+3*y[3]=-52];
```

$$Sys1 := [-3y_1 + 3y_2 - 2y_3 - 3y_4 - y_5 = 10, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 - y_6 = -1, 4y_1 + 2y_2 + y_3 - 3y_4 - y_7 = -42, \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 - y_8 = -52]$$

Подамо змінні y_3, y_4 у вигляді різниці двох додаткових невід'ємних змінних: $y_3 = y1_3 - y2_3, y_4 = y1_4 - y2_4$ і подивимося як змінилися рівності, що є елементами списку Sys1

```
> y[3]:=y1[3]-y2[3]:y[4]:y1[4]-y2[4]:
Sys1;
```

$$[-3y_1+3y_2-2yl_3+2y2_3-3yl_4+3y2_4-y_5=10,$$
$$y_1-2y_2+yl_3-y2_3+2yl_4-2y2_4-y_6=-1,$$
$$4y_1+2y_2+yl_3-y2_3-3yl_4+3y2_4-y_7=-42,$$
$$y_1-2y_2+3yl_3-3y2_3-y_8=-52]$$

Всього рівнянь 4, змінних – 10, отже, для знаходження базисного розв'язку 10 – 4 = 6 змінних потрібно вибрати за вільні. Вибираємо за вільні y_1, y_5, y_6, y_8, $y1_3$, $y2_4$ та знаходимо загальний розв'язок

> sols1:=solve (convert (Sys1, set),{y[2], y2[3], y1[4], y[7]});

$$sols1 := \{y2_3=17+yl_3+3y_1+3y_6+2y_5,$$
$$y_7=2y_1+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}y_6+\frac{1}{2}y_8-2y_5,$$
$$yl_4=-3y_1+\frac{17}{2}-\frac{5}{2}y_6+y2_4-\frac{1}{2}y_8-2y_5,$$
$$y_2=-4y_1+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}y_6-3y_5-\frac{1}{2}y_8\}$$

Цей розв'язок виявляється не тільки допустимий, що легко перевірити за допомогою команди,

> subs(y[1]=0, [3]=0, y2[4]=0, y[5]=0, y[6]=0, y[8]=0, sols1);

$$\{y_7=\frac{1}{2}, yl_4=\frac{17}{2}, y2_3=17, y_2=\frac{1}{2}\}$$

але й оптимальним. Дійсно, виразимо цільову функцію через вільні невідомі

> 'F'=subs(sols1, F);

$$F=10y_1+21+17y_6+9y_5+y_8\,.$$

Збільшення будь-якої вільної невідомої не може зменшити значення цільової функції, отже, $F_{\min}=21$, що дорівнює z_{max} (див. (2.37)).

Отже, оптимальним є такий розв'язок

$$Y_0=\left[y_1=0, y_2=\frac{1}{2}, y1_3=0, y2_3=17, y1_4=\frac{17}{2}, y2_4=0, y_5=0, y_6=0, y_7=\frac{1}{2}, y_8=0\right], \quad (2.44)$$

або з урахуванням співвідношень (2.41)

$$Y_0=\left[y_1=0, y_2=\frac{1}{2}, y_3=-17, y_4=\frac{17}{2}, y_5=0, y_6=0, y_7=\frac{1}{2}, y_8=0\right]. \quad (2.45)$$

Потрібно зауважити, що при знаходженні оптимального плану двоїстої задачі симплекс-методом ми зразу вгадали його, вибравши певні невідомі за вільні. На практиці розв'язання подібних задач, як правило, пов'язано з необхідністю виконання значної кількості повторень окремих кроків симплекс-алгоритму.

4. Знайдемо розв'язок двоїстої задачі за співвідношенням (2.31). Оптимальному розв'язку (2.36) прямої задачі відповідають такі базисні змінні: x_1, x_2, x_4, x_5 (адже за вільні були прийняті змінні x_3 та x_6). Отже, коефіцієнти цільової функції (2.32) при базисних невідомих дорівнюють 10, -1, -52, 0:

> C[b]:=matrix([[10, -1, -52, 0]]):

Створимо матрицю з коефіцієнтів системи (2.35) при базисних змінних

> A[b]:=matrix([[-3, 1, 1, 1], [3, -2, -2, 0], [-2, 1, 3,0], [-3, 2, 0, 0]]);

$$A_b := \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Знайдемо матрицю, обернену до створеної матриці

> A_1[b]:=linalg[inverse](A[b]):

Оскільки елементи цієї матриці нас не цікавлять, результат операції присвоюється Maple-змінній **A_1[b]**, але на екран монітора не виводиться.

Залишилося знайти оптимальний розв'язок двоїстої задачі множенням двох матриць

> Y[0]=evalm(C[b]&*A_1[b]);

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -17 & \frac{17}{2} \end{bmatrix}.$$

Отриманий розв'язок є тотожним розв'язку (2.45), якщо із останнього вилучити додаткові (допоміжні) змінні y_5, y_6, y_7, y_8..

Отже, якщо симплекс-методом знайдено розв'язок одної із пари двоїстих задач, то розв'язок іншої може бути легко знайдений за співвідношенням (2.31), що незрівнянно простіше в порівняні з розв'язанням двоїстої задачі як окремої задачі лінійного програмування.

За розв'язком одної з двоїстих задач розв'язок іншої можна також знайти за допомогою першої та другої теорем двоїстості.

Приклад 6. За допомогою другої та першої теорем двоїстості знайти розв'язок двоїстої задачі (2.38) – (2.40) із прикладу 5, якщо відомий розв'язок (2.36) прямої задачі (2.32) – (2.34).

Розв'язання. За першою теоремою двоїстості $F_{min} = z_{max} = 21$.

В оптимальному розв'язку (2.36) прямої задачі відмінними від нуля є змінні x_1, x_2, x_4 (змінна x_5 – нас не цікавить, оскільки це додатково введена змінна). Отже, відповідні їм нерівності двоїстої задачі повинні перетворюватися на строгі рівності при оптимальних значеннях змінних двоїстої задачі. Згідно з (2.39), матимемо

$$\begin{cases} -3y_1 & +3y_2 & -2y_3 & -3y_4 = 10, \\ y_1 & -2y_2 & +y_3 & +2y_4 = -1, \\ y_1 & -2y_2 & +3y_3 & = -52. \end{cases} \tag{2.46}$$

До цих трьох рівнянь додаємо четверте – завдяки відомому оптимальному значенні цільової функції (2.38)

$$y_1 - 9y_2 + 2y_3 + 7y_4 = 21. \tag{2.47}$$

Для знаходження оптимального розв'язку двоїстої задачі залишилося розв'язати сформовану систему чотирьох лінійних рівнянь:

```
> System:=[-3*y[1]+3*y[2]-2*y[3]-3*y[4]=10,
y[1]-2*y[2]+y[3]+2*y[4]=-1,
y[1]-2*y[2]+3*y[3]=-52,
y[1]-9*y[2]+2*y[3]+7*y[4]=21]:
Y[0]=solve(convert(System, set));
```

$$Y_0 = \{y_1 = 0, y_4 = \frac{17}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = -17\}.$$

Очевидно, що отримано той самий розв'язок, що і в прикладі 5, за допомогою співвідношення (2.31). Першою та другою теоремами двоїстості можна користуватися для знаходження розв'язку двоїстої задачі і у випадку, коли пряма задача розв'язана геометричним методом, а отже, співвідношенням (2.31) скористатися неможливо.

3 ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Викладемо двоїстий симплекс-метод, не зупиняючись на його детальному обґрунтуванні.

Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічній формі

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max, \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

Розглянемо наступну задачу (розділ 2)

$$z = 7x_1 + 6x_2 \to \max, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 \qquad \leq 5, \\ \qquad x_2 \leq 7. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\text{для } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{3.6}$$

та її графічне зображення, що показано на рис. 3.1.

Введенням додаткових невідомих перетворимо нерівності системи обмежень (3.5) на строгі рівності

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_6 = 7. \end{cases} \tag{3.7}$$

Рівняння кожної з прямих, що відповідають обмеженням задачі та зображені на рис. 3.1, наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Позначення прямої	Відповідне рівняння прямої	Змінна, яка дорівнює нулю в будь-якій точці прямої
FQ	$2x_1+x_2=8$	x_3
DL	$x_1+\quad x_2=6$	x_4
HQ	$x_1=5$	x_5
DH	$x_2=7$	x_6
OL	$x_2=0$	x_2
OF	$x_1=0$	x_1

Згідно із симплекс-методом спочатку знаходиться початковий опорний план – базисний допустимий розв'язок. Якщо початковий опорний план шукається методом вибору вільних змінних, то потрібно так вибрати вільні змінні, щоб отриманий базисний розв'язок виявився допустимим. Так, вибравши за вільні, наприклад, змінні x_1, x_2 дістанемо базисний розв'язок, що відповідає точці перетину двох прямих, вздовж одної з яких $x_1=0$, а вздовж іншої $x_2=0$. Згідно з даними таблиці 3.1 це буде точка перетину прямих *OL* та *OF*, тобто т. O(0, 0). Після знаходження початкового опорного плану вже немає необхідності продовжувати навмання перевибирати вільні змінні, щоб дістати оптимальний план, який відповідає точці B(2, 4). Згідно з ідеями, покладеними в основу симплекс-алгоритму, перехід від неоптимального опорного плану, що відповідає т. O(0, 0), до оптимального опорного плану, що відповідає т. B(2, 4), може бути здійснений одним із цілеспрямованих шляхів – через т. A(4, 0) або через т. C(0, 6).

Всі точки, що позначені буквами на рис. 3.1. відповідають базисним розв'язкам. Причому т. O, A, B, C відповідають опорним планам - базисним допустимим розв'язкам, а решта точок – базисним недопустимим розв'язкам. Тобто, в розв'язках, що відповідають т. D, E, F,... – серед базисних змінних обов'язково знайдеться принаймні одна від'ємна. Для прикладу знайдемо розв'язки, що відповідають т. H і Q. Перша точка є перетином прямих DH і QH, друга точка – перетином прямих FQ і HQ. Отже, в одному випадку за вільні, згідно з таблицею 3.1, потрібно взяти змінні x_5, x_6, в іншому – змінні x_3, x_5.

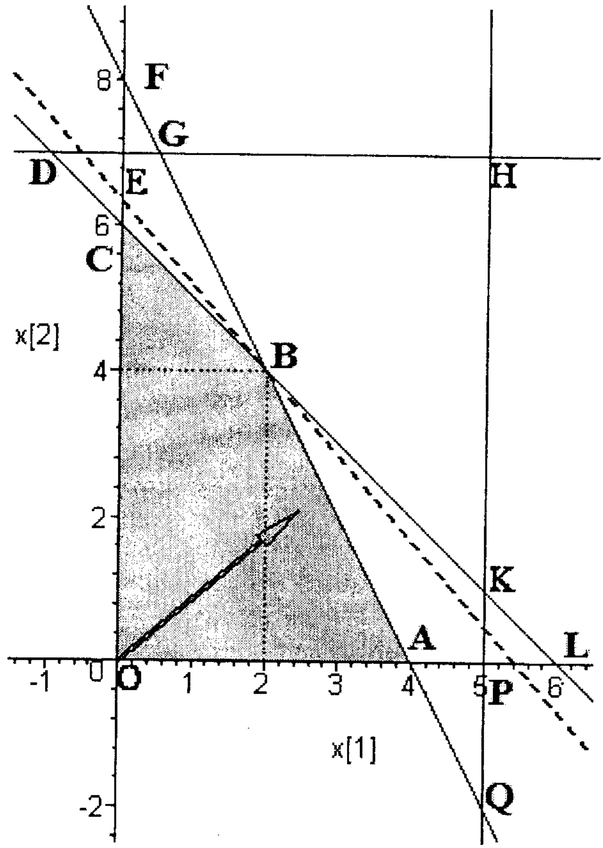


Рисунок 3.1 – Графічне зображення задачі (3.4) – (3.6): OABC – багатокутник допустимих значень; D(-1, 7), E(0, 7), F(0, 8), G(1/2, 7), H(5, 7), K(5, 1), L(6,0), P(5, 0), Q(5, -2) – точки, що відповідають базисним недопустимим розв'язкам; - - - опорна лінія в крайньому положенні. Згідно з двоїстим симплекс-методом початковим розв'язком також повинен бути базисний розв'язок. Але такий базисний розв'язок, для якого умови допустимості не виконуються, але обов'язково повинні виконуватися умови оптимальності. *Базисний розв'язок, для якого виконуються умови оптимальності, але не виконуються умови допустимості називається* ***псевдопланом***

Знайдемо відповідні розв'язки за допомогою Maple.

```
> eq1:=2*x[1]+x[2]+x[3]=8:
  eq2:=1*x[1]+x[2]+x[4]=6:
```

```
eq3:=1*x[1]+x[5]=5:
eq4:=1*x[2]+x[6]=7:
Vilni:=x[5], x[6];
sols1:=solve({seq(eq||kk, kk=1..4)}, {seq(x[kk], kk=1..6)} minus {Vilni});
map(zz->zz=0, {Vilni});
subs(%, sols1);
```

$$Vilni := x_5, x_6$$

$$sols1 := \{x_2 = -x_6 + 7, x_1 = -x_5 + 5, x_3 = 2\,x_5 - 9 + x_6, x_4 = x_5 - 6 + x_6\}$$

$$\{x_5 = 0, x_6 = 0\}$$

$$\{x_3 = -9, x_4 = -6, x_2 = 7, x_1 = 5\}\ .$$

Як видно, в розв'язку, що відповідає т. H($x_1 = 5, x_2 = 7$) дві базисні змінні x_3, x_4 – від'ємні.

```
> Vilni:=x[3], x[5];
sols2:=solve({seq(eq||kk, kk=1..4)},{seq(x[kk], kk=1..6)} minus {Vilni});
map(zz->zz=0,{Vilni});
subs(%, sols2);
```

$$Vilni := x_3, x_5$$

$$sols2 := \{x_1 = -x_5 + 5, x_6 = -2\,x_5 + 9 + x_3, x_4 = -x_5 + 3 + x_3, x_2 = 2\,x_5 - 2 - x_3\}$$

$$\{x_5 = 0, x_3 = 0\}$$

$$\{x_6 = 9, x_1 = 5, x_4 = 3, x_2 = -2\}\ .$$

В розв'язку, що відповідає т. Q(x_1=5, x_2=-2) від'ємною є базисна змінна x_2.

Опорна лінія (на рис. 3.1 показана штрих-пунктирною лінією), що проходить через т. B(2, 4), ділить площину Ox_1x_2 на дві півплощини. Одній з півплощин належить область допустимих значень. В іншій півплощині немає жодної точки допустимих значень, якщо не враховувати т. B(2, 4), яка належить межі півплощин. Саме в цій півплощині розташовані всі точки перетину прямих, які відповідають псевдопланам задачі. Базисні недопустимі розв'язки, що відповідають точкам, які розташовані в тій самій півплощині, що й область допустимих значень, не є псевдопланами, оскільки для цих розв'язків не виконується умова оптимальності. Перевіримо сказане для т. H і Q:

```
> z:=7*x[1]+6*x[2]:
'z'[H]=subs(sols1, z);
'z'[Q]=subs(sols2, z);
```

$$z_H = -7\,x_5 + 77 - 6\,x_6\ ,$$

$$z_Q = 5\,x_5 + 23 - 6\,x_3\ .$$

Очевидно, що для т. H(x_1 = 5, x_2 = 7), яка належить півплощині з жодною допустимою точкою, умови оптимальності виконуються – цільова функція не може бути покращена збільшенням вільних змінних. Для т. Q(x_1 = 5, x_2 = -2), яка належить тій самій півплощині, що і область допустимих значень, умови оптимальності не виконуються, оскільки цільова функція може бути покращена збільшенням вільної змінної x_5.

Після отримання початкового псевдоплану в двоїстому симплекс-методі реалізується послідовний перехід до наступних псевдопланів так, щоб на кожному кроці цільова функція не покращувалася. Перехід від одного псевдоплану до іншого здійснюється за рахунок зміни місцями одної з від'ємних базисних змінних і одної з вільних змінних. Якщо від'ємних базисних змінних декілька, то з них вибирають змінну, абсолютна величина якої найбільша. Якщо таких змінних більше одної, то беруть будь-яку одну з них. З вільних змінних вибирають змінну так, щоб зберегти умови оптимальності. Якщо, принаймні для одної від'ємної базисної змінної, введення її у вільні унеможливлює отримання псевдоплану, то задача розв'язку не має.

Алгоритм двоїстого симплекс-методу складається з двох етапів.

Етап І. Знаходимо початковий псевдоплан.

Етап ІІ.

Крок 1. Перевіряємо поточний псевдоплан на допустимість: якщо в поточному псевдоплані відсутні від'ємні змінні, то це і є оптимальний план, тобто задача розв'язана. В протилежному разі переходимо до кроку 2.

Крок 2. Переходимо до наступного псевдоплану не покращуючи цільову функцію. Якщо такий перехід здійснити неможливо, то задача розв'язку не має.

Крок 1 та крок 2 етапу ІІ повторюються аж поки не дістанемо розв'язок задачі лінійного програмування або буде виявлено, що задача не має розв'язку.

Виконання етапу І, тобто знаходження початкового псевдоплану, можна робити так само, як і знаходження початкового опорного плану в симплекс-методі – методом вибору вільних змінних. На практиці двоїстий метод застосовують саме в тих випадках, коли початковий псевдоплан відомий. Таку ситуацію спостерігатимемо при розв'язанні цілочислових задач лінійного програмування.

Розглянемо більш детально здійснення кроку 2.

Запишемо загальний розв'язок системи (3.2)

$$x_i = B_i + \sum_{j=m+1}^{n} A_{ij} \cdot x_j, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3.8}$$

та вираз цільової функції через вільні змінні

$$z = z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} C_j \cdot x_j, \qquad (3.9)$$

де припускається, що $x_1, x_2, ..., x_m$ – базисні змінні, а $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ – вільні змінні.

Вважатимемо, що $C_j \geq 0, j = \overline{m+1, n}$, тобто виконуються умови оптимальності для базисного розв'язку, який може бути отриманий з (3.8) прирівнюванням до нуля всіх вільних змінних: $x_j = 0, j = \overline{m+1, n}$.

Отже, розв'язок $X = (B_1, B_2, ..., B_m, 0, ..., 0)$ є псевдопланом. Перехід від даного псевдоплану до наступного визначається двома теоремами.

Теорема 1. Якщо в псевдоплані $X = (B_1, B_2, ..., B_m, 0, ..., 0)$ є принаймні одне від'ємне число $B_i \prec 0$ таке, що в (3.8) всі $A_{ij} \leq 0 \left(j = \overline{m+1, n}\right)$, то задача (3.1) – (3.3) взагалі не має допустимих розв'язків.

Дійсно, в такому випадку із рівняння

$$x_i = B_i + \sum_{j=m+1}^{n} A_{ij} \cdot x_j$$

випливає, що для будь-яких допустимих значень вільних невідомих, тобто при $x_j \geq 0$, всі добутки, що стоять під знаком суми в правій частині рівності не більші нуля, отже $x_i \prec 0$. Іншими словами, в цьому випадку серед розв'язків даного рівняння немає жодного допустимого розв'язку.

Теорема 2. Якщо в псевдоплані $X = (B_1, B_2, ..., B_m, 0, ...0)$ є від'ємні числа $B_i \prec 0$ такі, що для будь-якого з них існують в (3.8) числа $A_{ij} \succ 0$, то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (3.1) – (3.3) не збільшиться.

Тут слід зауважити, що в надзвичайно популярному посібнику [2] в даній теоремі (теорема 1.14, с. 108) допущено помилку: замість «увеличится» написано «уменьшится».

Нехай $B_k \prec 0 (0 \leq k \leq m)$ і виконуються умови теореми 2, тобто серед чисел A_{kj} є такі, що $A_{kj} \succ 0$. Тоді для того, щоб визначити, яка вільна змінна повинна бути переведена в базисні замість x_k, потрібно для кожного додатного числа $A_{kj} \succ 0$ обчислити відношення

$$-\frac{C_j}{A_{kj}} \qquad (3.10)$$

та вибрати серед них найменше. Якщо таких найменших чисел виявиться більше ніж одне, то можна вибрати будь-яке з них.

Вибір вільної змінної саме за таким правилом забезпечує виконання умов оптимальності в новому базисному розв'язку. Тому вибрати вільну змінну, яка повинна бути переведена в базисні, можна й простим перебором: на кожній ітерації базисна змінна x_k по черзі вводиться замість однієї із вільних змінних x_j і отриманий базисний розв'язок перевіряється на оптимальність. Як тільки буде отримано базисний розв'язок, що задовольняє умови оптимальності, це і означатиме, що здійснений перехід до нового псевдоплану. Якщо заміна $x_k \leftrightarrow x_j$ для будь-якої вільної невідомої $j = \overline{m+1,n}$ не дозволяє отримати псевдоплан, то задача (3.1) – (3.3) розв'язку не має. Очевидно, що простий перебір є абсолютно неефективним через великий обсяг обчислень. Але дозволяє краще зрозуміти сутність ідей, покладених в основу двоїстого симплекс-методу.

Зауваження. Якщо в задачі (3.1) – (3.3) потрібно знаходити не *max* а *min*, то ознакою оптимальності є умови $C_j \le 0$ і замість (3.10) потрібно користуватися співвідношенням, що має протилежний знак

$$\frac{C_j}{A_{kj}}. \tag{3.11}$$

Приклад 2. Знайти двоїстим симплекс-методом розв'язок задачі (3.4), (3.5), (3.6).

Розв'язання. Згідно з етапом I алгоритму двоїстого симплекс-методу шукаємо початковий псевдоплан. Для цього потрібно вибрати вільні змінні та знайти загальний та відповідний базисний розв'язки системи (3.7). Оскільки ми ознайомилися з геометричною інтерпретацією даної задачі, і з'ясували, що псевдоплану відповідає, зокрема, т. H(5, 7), то за вільні візьмемо змінні x_5, x_6:

```
> z:=7*x[1]+6*x[2]:
eq1:=2*x[1]+x[2]+x[3]=8:
eq2:=1*x[1]+x[2]+x[4]=6:
eq3:=1*x[1]+x[5]=5:
eq4:=1*x[2]+x[6]=7:
Vilni:=x[5], x[6]:
```

Знаходимо загальний розв'язок системи (3.7)

```
> sols1:=solve({seq(eq||kk, kk=1..4)},{seq(x[kk], kk=1..6)} minus
{Vilni}):
for i in sols1 do
print(i);
od:
```

$$x_2 = -x_6 + 7,$$

$$x_1 = -x_5 + 5,$$

$$x_3 = 2\,x_5 - 9 + x_6,$$

$$x_4 = x_5 - 6 + x_6.$$

Значення базисних змінних в базисному розв'язку дорівнюють

```
> map(zz->zz=0,{Vilni}):
X1=subs(%, sols1);
```

$$X1 = \{ x_3 = -9, x_4 = -6, x_2 = 7, x_1 = 5 \} .$$

Виражаємо цільову функцію через вільні змінні

```
> 'z'=subs(sols1, z);
```

$$z = -7\, x_5 + 77 - 6\, x_6 .$$

Умови оптимальності виконуються, причому серед базисних змінних є від'ємні: x_3 , x_4 .Отже, маємо початковий псевдоплан. Для переходу до наступного псевдоплану нам потрібно одну з від'ємних змінних поміняти місцями з одною із вільних змінних. Вибираємо серед від'ємних ту, абсолютна величина якої найбільша, тобто x_3 (вибір x_4 також не був би помилкою). Тепер потрібно визначити, яка з вільних невідомих x_5 або x_6 повинна замінити змінну x_3 серед базисних. Найпростіший спосіб, яким це можна зробити, – простий перебір. Спробуємо змінити місцями $x_3 \leftrightarrow x_6$, тобто, вільними будуть x_3 , x_5 :

```
> Vilni:=x[3], x[5]:
sols2_1:=solve({seq(eq||kk, kk=1..4)},{seq(x[kk], kk=1..6)} minus
{Vilni}):
'z'=subs(sols2_1, z);
```

$$z = 5\, x_5 + 23 - 6\, x_3 .$$

Перед змінною x_5 стоїть коефіцієнт 5 > 0, тобто умови оптимальності не виконуються, що очевидно, також, із геометричної інтерпретації: значенням вільних невідомих $x_3 = 0$, $x_5 = 0$ на рис. 3.1 відповідає т. Q, яка не належить півплощині, що містить всі точки, які відповідають псевдопланам задачі.

Отже, з вільних невідомих потрібно виводити не x_6, а x_5, тобто, вільними будуть x_3, x_6:

```
> Vilni:=x[3], x[6]:
sols2_2:=solve({seq(eq||kk, kk=1..4)},{seq(x[kk], kk=1..6)} minus
{Vilni}):
'z'=subs(sols2_2, z);
```

$$z = \frac{91}{2} - \frac{5}{2} x_6 - \frac{7}{2} x_3 \tag{3.12}$$

Умови оптимальності виконуються. Знайдемо значення базисних змінних

```
> map(zz->zz=0,{Vilni}):
```

```
X2=subs(%, sols2_2);
```

$$\{x_3 = 0, x_6 = 0\},$$
$$X2 = \{x_4 = \frac{-3}{2}, x_1 = \frac{1}{2}, x_5 = \frac{9}{2}, x_2 = 7\}.$$

Базисна змінна $x_4 = 1{,}5 \prec 0$. Отже, маємо псевдоплан, що відповідає т. G($x_1 = 0{,}5; x_2 = 7$). Звернемо увагу на те, що в т. H(5, 7) значення цільової функції дорівнює 77, а в т. G(0,5, 7) дорівнює 45,5. Тобто, в задачі на *max* перехід від одного псевдоплану до іншого відбувається за умови незбільшення цільової функції (в задачі на *min* – за умови її незменшення).

Повернемося до початкового псевдоплану та визначимо вільну змінну, яку потрібно виводити з вільних за допомогою сформульованих правил. В нашому прикладі $k = 3$, а співвідношення (3.8) та (3.9) мають вигляд відповідно

$$x_3 = 2x_5 - 9 + x_6 \quad \text{та} \quad z = -7x_5 + 77 - 6x_6.$$

Відмінність нашого прикладу від загальних співвідношень полягає тільки в тому, що індекси базисних та вільних змінних розташовані не за порядком. Визначаємо величини $-\frac{C_j}{A_{kj}}$: для вільної змінної x_5 маємо $-\frac{C_5}{A_{35}} = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$, для вільної змінної x_6 - $-\frac{C_6}{A_{36}} = -\frac{-6}{1} = 6$. Отже, оскільки $\min(3{,}5; 6) = 3{,}5$, то з вільних потрібно виводити змінну x_5. Цей же результат ми дістали і простим перебором. За формальними правилами результат здобувається простіше. Простий перебір був наведений для висвітлення геометричної інтерпретації механізму переходу від одного псевдоплану до іншого.

Дістанемо вирази для базисних змінних останнього псевдоплану

```
for i in sols2_2 do
print(i);
od:
```

$$x_2 = -x_6 + 7,$$
$$x_4 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_3,$$
$$x_5 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_3,$$
$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}x_3.$$

Єдина від'ємна змінна серед базисних $-x_4$, її і будемо виводити із базисних змінних. Для вибору вільної змінної, замість якої вводитимемо x_4, знайдемо величини $-\dfrac{C_j}{A_{4j}}$, j=3, 6 (див. (3.12)): $x_3 \rightarrow -\dfrac{C_3}{A_{43}} = -\dfrac{-\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}} = 7$,

$x_6 \rightarrow -\dfrac{C_6}{A_{46}} = -\dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5$. Оскільки $\min(7;5) = 5$, то з вільних потрібно виводити змінну x_6. Отже, вибираємо за вільні змінні x_3, x_4 ,знаходимо загальний розв'язок та виражаємо цільову функцію через вільні змінні:

> Vilni:=x[3], x[4]:
sols3:=solve({seq(eq||kk, kk=1..4)},{seq(x[kk], kk=1..6)} minus {Vilni}):
'z'=subs(sols3, z);

$$z = 38 - x_3 - 5\,x_4 .$$

Збільшенням вільних невідомих покращити цільову функцію неможливо, отже, умови оптимальності виконуються. Знайдемо значення базисних невідомих:

> map(zz->zz=0,{Vilni});
X3=subs(%, sols3);

$$\{ x_3 = 0, x_4 = 0 \} ,$$

$$X3 = \{ x_6 = 3, x_1 = 2, x_5 = 3, x_2 = 4 \} .$$

Серед базисних змінних від'ємні значення відсутні, отже, отриманий розв'язок є допустимим, а з урахуванням виконання умов оптимальності маємо оптимальний розв'язок. Цей розв'язок відповідає т. В(x_1 = 2, x_2 = 4) на рис. 3.1.

При розв'язанні конкретної задачі лінійного програмування виникає питання вибору методу, що використовується: симплекс-методу або двоїстого симплекс-методу. Двоїстий симплекс-методу зручно використовувати у випадках, коли в ході розв'язання задачі лінійного програмування необхідно додавати нові обмеження. Така ситуація виникає, наприклад, при розв'язанні цілочислових задач лінійного програмування методом Гоморі, що буде розглянуто в підрозділі 4.3. В подібних випадках при застосуванні симплекс-методу після додавання кожного нового обмеження задачу потрібно розв'язувати з самого початку. Застосування в таких випадках двоїстого симплекс-методу зумовлено тим, що відомим є початковий псевдоплан. При розв'язанні звичайних задач лінійного програмування вибір на користь того або іншого методу може бути зроблений в залежності від того, що легше знайти: початковий опорний план чи початковий псевдоплан.

4 ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

4.1 Змістова та геометрична інтерпретація задачі цілочислового програмування

У деяких задачах математичного програмування невідомі позначають величини, які можуть набувати лише цілих значень. Наприклад, в задачі про використання сировини з найбільшим прибутком (див. розділ 2) продукція, яку виготовляє підприємство, може бути штучного виду – столи, стільці, двигуни тощо. *Екстремальна задача, змінні якої приймають лише цілочислові значення, називається* ***задачею цілочислового програмування.***

Наведемо математичну постановку задачі цілочислового лінійного програмування у симетричній формі:

знайти

$$z(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max \tag{4.1}$$

за умови

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i\ , \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{4.3}$$

$$x_j \text{ – цілі, } (j=\overline{1,n}). \tag{4.4}$$

Наведене формулювання відрізняється від звичайної задачі лінійного програмування лише умовою цілочисловості (4.4). Але ця вимога в загальному випадку суттєво ускладнює процес знаходження оптимального розв'язку задачі.

Перед викладенням деяких методів розв'язання задач цілочислового лінійного програмування розглянемо декілька парадоксів. (Парадокс – це насправді правильний результат, який спершу здається абсурдним).

На перший погляд може здатися, що задача введення умови цілочисловості (4.4) спрощує розв'язання задачі, внаслідок того, що її допустима множина розв'язків стає при цьому скінченною множиною точок (якщо допустима область, що задана нерівностями (4.2) – обмежена) і знайти оптимальний розв'язок можна простим перебором всіх можливих варіантів. Але на практиці в багатьох випадках цим скористатися неможливо. Розглянемо найпростіший випадок, в якому змінні можуть приймати лише значення нуля або одиниці. При кількості змінних $n = 64$ матимемо необхідність виконати 2^{64} (!) обчислень цільової функції, що є практично нездійсненним.

При першому ознайомленні з задачею цілочислового лінійного програмування нерідко також виникає природне бажання розв'язати цю задачу без врахування умови цілочисловості змінних, а потім округлити результат до найближчого цілого. Але при цьому можуть виникнути такі ситуації.

Приклад 1. По-перше, отримана точка з цілочисловими координатами може взагалі не належати області допустимих значень, як це показано на рис. 4.1.

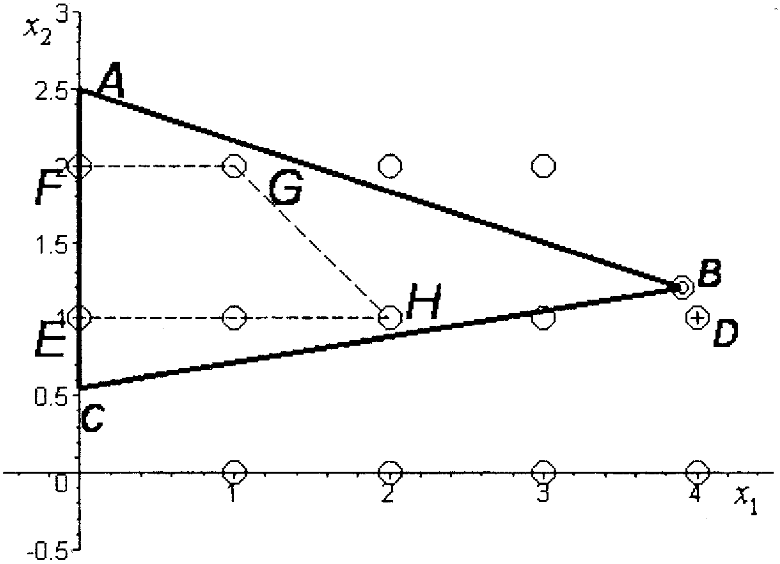


Рисунок 4.1 – Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається в точці B(3.9; 1.2), найближча до неї точка – т. D(4, 1), не належить області допустимих значень

Область допустимих значень задачі (4.1) – (4.3) задана трикутником ABC. Оптимальне значення досягається в точці B(3.9; 1.2), округлення координат якої приводить до т. D(4, 1) $\notin \Delta ABC$. Область допустимих значень цілочислової задачі (4.1) – (4.4) задана багатокутником EFGH.

Приклад 2. Ще одна типова ситуація показана на рис. 4.2, на якому дано геометричне подання такої задачі:

знайти

$$z = 2x_1 + 1,4x_2 \to \max, \tag{4.5}$$

за умови

$$\begin{cases} 33x_1 + \quad 353x_2 \le 893, \\ 74x_1 + \quad 45x_2 \le 353, \\ 10x_1 \ge 3. \end{cases} \tag{4.6}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{4.7}$$

$$x_1, x_2 \text{ – цілі числа.} \tag{4.8}$$

Області допустимих значень для звичайної задачі (4.5) – (4.7) та цілочислової задачі (4.5) – (4.8) являють собою багатокутники SABC та DEFGH, відповідно.

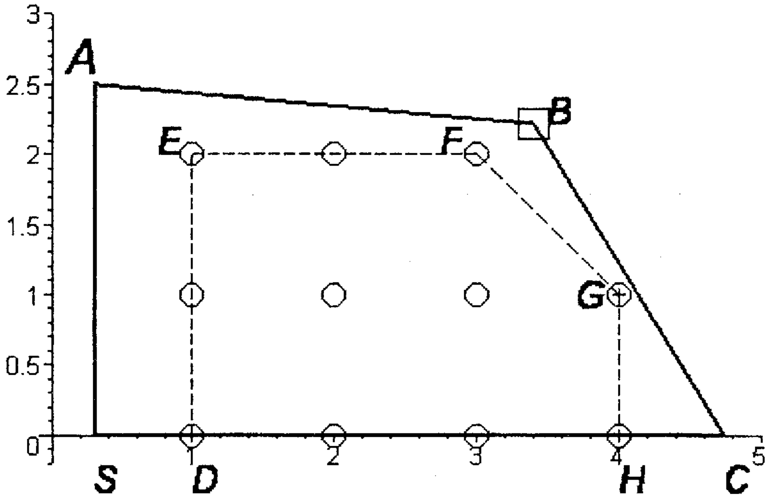


Рисунок 4.2 – Оптимальне значення задачі лінійного програмування (4.5) – (4.7) досягається в точці B(3.4; 2.22), найближча до неї точка – т. F(3, 2), але оптимальне значення цілочислової задачі (4.5) – (4.8) досягається в точці G(4; 1)

Як буде показано в прикладі 4 оптимальним планом нецілочислової задачі є т. B(3.4; 2.22), оптимальним планом цілочислової задачі є т. G(4; 1). Округленням координат т. B(3.4; 2.22) дістаємо т. F(3, 2), яка насправді знаходиться далеко від оптимального плану.

Приклад 3. Знайти

$$z = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max,$$

за умови

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 \le 4, \\ 4x_1 - \quad 3x_2 \qquad \le 2, \\ -3x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 \le 3. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \quad x_1, x_2, x_3 \text{ – цілі числа.}$$

Розв'язком задачі є т. $x_{опт} = (2;2;5)$, а без врахування цілочислової умови x^*=(1/2,0;9/2). Неважко перевірити, що ніякі варіанти округлення розв'язку x^* не дають навіть допустимого розв'язку сформульованої цілочислової задачі.

4.2 Графічний метод розв'язання задач цілочислового програмування

Спочатку знайдемо оптимальний план задачі (4.5) – (4.7). Для цього побудуємо область допустимих розв'язків SABC, градієнт **grad** $z = 2\vec{i} + 1,4\vec{j}$ та опорну лінію MN, перпендикулярну до градієнта (рис. 4.3). Пересуваючи опорну лінію паралельно собі в напрямі градієнта, визначаємо крайню точку B на виході з області допустимих значень SABC.

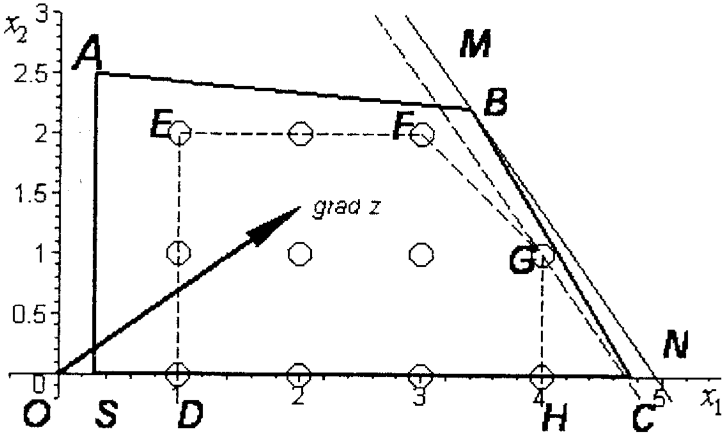


Рисунок 4.3 – Оптимальне значення задачі лінійного програмування (4.5) – (4.7) досягається в точці B(3.4; 2.22), найближча до неї точка т. F(3, 2), але оптимальне значення цілочислової задачі (4.5) – (4.8) досягається в точці G(4; 1)

Знаходження оптимального розв'язку цілочислової задачі принципово нічим не відрізняється від наведеного алгоритму. З урахуванням додаткової умови (4.8) область допустимих значень перетворюється до області DEFGH, крайньою точкою на виході з якої є т. G(4, 1). На рис. 4.3 крайнє положення опорної лінії на виході з області DEFGH зображено штриховою лінією, що паралельна лінії MN.

Розглянемо особливості графічного розв'язання задач цілочислового лінійного програмування в середовищі Maple на прикладі наступної задачі.

Приклад 4

Знайти найбільше значення функції z

```
> restart:
z:= 41*x[1] + 33*x[2]:
'z'=z,`->`*max;
```

$$z = 41\,x_1 + 33\,x_2, \quad -> max$$

за умови, що її аргументи пов'язані співвідношеннями

```
> linear_constraints:=map(y->subs(x1=x[1], x2=x[2], y),
[133835*x1-4529360*x2<=-561587, -55167*x1-2182400*x2<=-1084571,
-103761*x1-378664*x2<=-515601, -917135*x1-340041*x2<=-2475628,
55775*x1+557469*x2<=2655572, x1>=0, x2>=0]):
for i from 1 to nops(linear_constraints) do op(i,linear_constraints) od;
```

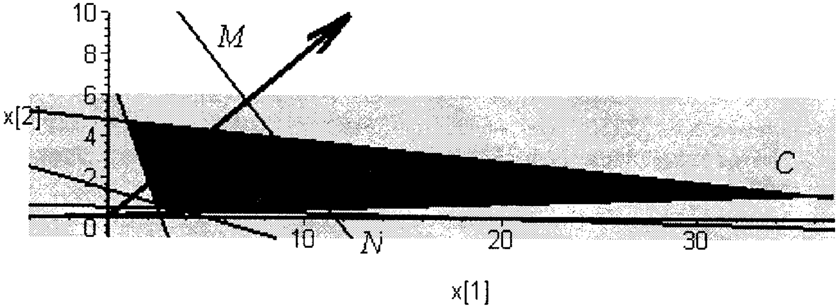
$$133835\,x_1 - 4529360\,x_2 \le -561587\,,$$
$$-55167\,x_1 - 2182400\,x_2 \le -1084571\,,$$
$$-103761\,x_1 - 378664\,x_2 \le -515601\,,$$
$$-917135\,x_1 - 340041\,x_2 \le -2475628\,,$$
$$55775\,x_1 + 557469\,x_2 \le 2655572\,,$$
$$0 \le x_1\,,$$
$$0 \le x_2\,.$$

Невідомі можуть приймати тільки цілі значення: x_1, x_2 – цілі числа.

Розв'язання. Так само, як це ми робили і для нецілочислової задачі, будуємо область допустимих розв'язків – за допомогою команди **plots[inequal]** (цей графік присвоєно змінній Maple під ім'ям **g10**), градієнт – за допомогою команди **my_arw** та опорну лінію MN (**g20**):

```
> x1:=-5:x2:=40:
y1:=-1.0:y2:=6:
g10:=plots[inequal]({op(linear_constraints)}, x[1]=x1..x2, x[2]=y1..y2,
optionsfeasible=(color=red), optionsopen=(color=blue, thickness=2),
optionsclosed=(color=black, thickness=2),
optionsexcluded=(color=cyan)):
my_arw:=(x, y, l, w)->if add(type(args[k], numeric), k=1..nargs)=4*true
then[[0, 0], [x, y]], [[x-x*l-y*l*w,
-(-y^2+y^2*l-x^2+x^2*l+x*(x-x*l-y*l*w))/y], [x, y]], [[x-x*l+y*l*w,
-(-y^2+y^2*l-x^2+x^2*l+x*(x-x*l+y*l*w))/y], [x, y]] fi:
```

```
c1:=3*4.1: c2:=3*3.3: x1_d:=10: y1_d:=2:
g20:=plot([my_arw(c1, c2, 0.15, 0.2), y1_d-(c1/c2)*(x[1]-x1_d)],
x[1]=x1..15, x[2]=y1..12, color=[blue$3, black], thickness=[4$3, 2],
scaling=CONSTRAINED):
g30:=PLOT(TEXT([35, 3], 'C', ALIGNLEFT, FONT(TIMES, ITALIC,
14)), TEXT([7, 9],'M', ALIGNLEFT, FONT(TIMES, ITALIC, 14)),
TEXT([14, -1],'N', ALIGNLEFT, FONT(TIMES, ITALIC, 14))):
plots[display]([g10, g20, g30], scaling=CONSTRAINED,
view=[ 4..37, 0.5..10]);
```

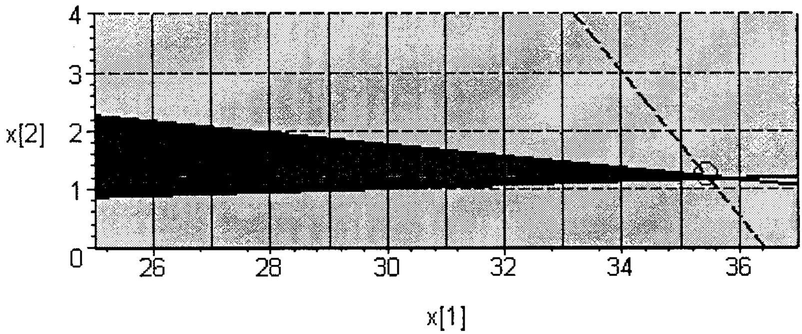


Координати градієнта помножили на 0.3: c1:=3*4.1:c2:=3*3.3: – для того, щоб вектор помістився на графіку. В рівнянні опорної лінії $x_2 = x_2^{д} - \left(\dfrac{c_1}{c_2}\right) \cdot \left(x_1 - x_1^{д}\right)$ точку допустимої області $\left(x_1^{д}, x_2^{д}\right)$ взято т. (10;2). Графічна структура g30 містить буквені позначення *M, N, C*.

Із отриманого графіка видно, що оптимальним планом нецілочислової задачі є координати т. *C*, точні значення яких в даному випадку нам не потрібні. Для того, щоб визначити оптимальний план цілочислової задачі, потрібно збільшити частину області допустимих значень навколо т. *C*. Крім того потрібно якимось чином виділити на графіку точки з цілочисловими координатами. Це можна зробити за допомогою сітки, утвореної горизонтальними та вертикальними прямими з цілочисловими координатами. Для побудови такої сітки автором створена допоміжна процедура my_drid(Xn, Ym), яка формує команду побудови горизонтальних та вертикальних прямих, координати яких задані списками Xn, Ym. Для регулювання області відображення графіка користуватимемося опцією view=[25..37, 0..4] команди plots[display].

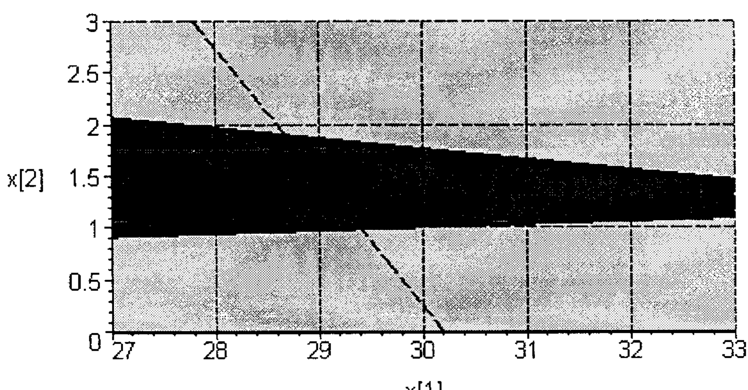
```
> x1_d:=35.43:y1_d:=1.24:
my_drid:=(xn::list, yn::list)->plot([yn['i'] $ 'i' = 1..nops(yn),[xn['i'], t,
t=yn[1]..yn[nops(yn)]] $ 'i' = 1..nops(xn)], xn[1]..xn[nops(xn)],
yn[1]..yn[nops(yn)], color=black, linestyle= [3$nops(yn), 4$nops(xn)],
scaling=CONSTRAINED):
```

```
g40:=plot([[[x1_d, y1_d]], y1_d-(c1/c2)*(x[1]-x1_d)], x[1]=x1..x2,
x[2]=y1..y2, color=black, style=[point,line], symbol=circle,
symbolsize=25, linestyle=3, thickness=2, scaling=CONSTRAINED):
plots[display]([g10, g20, g40,my_drid([$ 25..37],
[$ 0..4])], view=[25..37,0..4], scaling=CONSTRAINED);
```

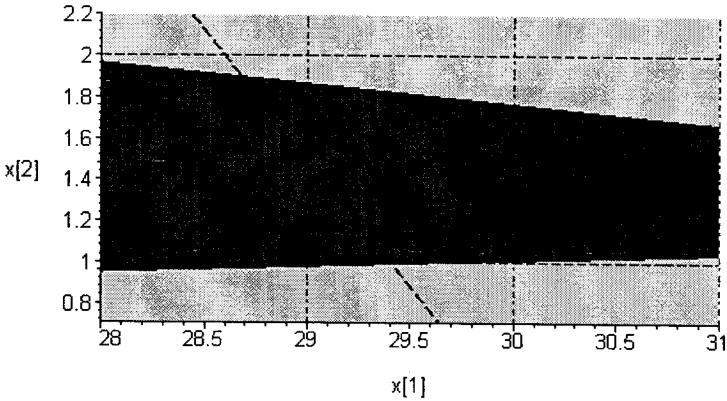


Зменшуємо діапазон виведення графіка (view=[27..33, 0..3]) та зсуваємо у відповідну область опорну лінію (x1_d:=31:y1_d:=1.5:)

```
> x1_d:=31:y1_d:=1.5:
g60:=plot([y1_d-(c1/c2)*(x[1]-x1_d)], x[1]=x1..x2, x[2]=y1..y2,
color=black, style=[line], symbol=circle,
symbolsize=25, linestyle=3, thickness=2, scaling=CONSTRAINED):
plots[display]([g10, g20, g60, my_drid([$ 25..37], [$ 0..4])],
view=[27..33, 0..3], scaling=CONSTRAINED);
```

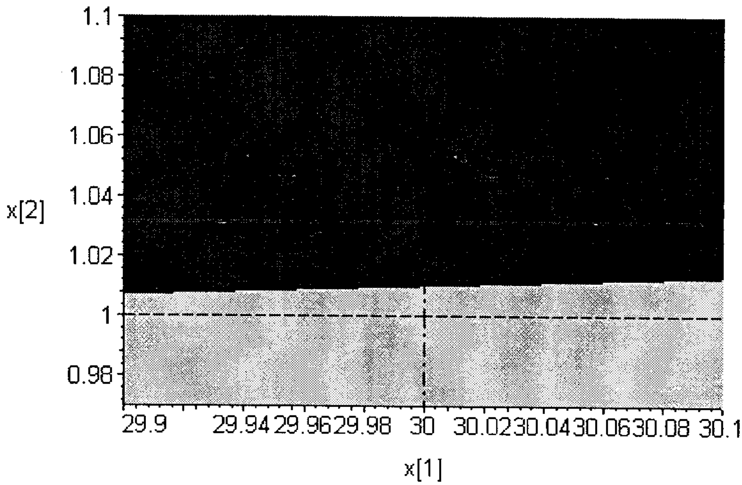


Із отриманого графіка видно, що області допустимих значень не належать точки з цілочисловими координатами, абсциси яких дорівнюють 32 і більше, а ординати 3 і більше. Добре видно, що області допустимих значень належить т. (28; 1). Отже, знову зменшуємо діапазон виведення графіка (view=[28..31, 0.7..2.2])



Із графіка видно, що оптимальним планом є координати т. (30; 1), якщо ця точка належить області допустимих значень, або координати т. (29; 1) – в протилежному випадку. Перевіримо належність т. (30; 1) до області допустимих значень:

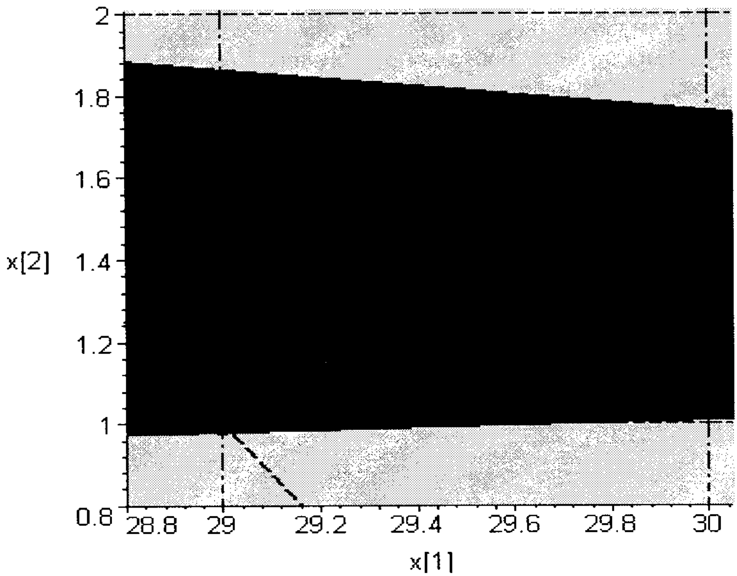
> **plots[display]([g10, g20, g60, my_drid([$ 25..37], [$ 0..4])], view=[29.9..30.9, 0.97..1.1], scaling=CONSTRAINED);**



Очевидно, що т. (30, 1) знаходиться поза областю допустимих значень. Отже,

> **x1_d:=29:y1_d:=1:**

```
g50:=plot([[[x1_d, y1_d]], y1_d-(c1/c2)*(x[1]-x1_d)], x[1]=x1..x2, x[2]=y1..y2, color=black, style=[point, line], symbol=circle, symbolsize=25, linestyle=3, thickness=2, scaling=CONSTRAINED):
plots[display] ([g10, g20, g50, my_drid([$25..37], [$0..4])], view=[28.8..30.05, 0.8..2.01], scaling=CONSTRAINED);
```



Оптимальний план $x = [x_1 = 29, x_2 = 1]$, оптимальне значення цільової функції

>'z[max]'=subs(x[1]=29, x[2]=1, z);

$$z_{max} = 1222 .$$

Для того, щоб наведені в цьому прикладі програми були доступні в DEMO-Maple, потрібно тільки вилучити опцію symbolsize=25 команди plot.

Ми розглянули варіанти, що піддаються геометричній інтерпретації. Із збільшенням розмірності процес розв'язання цілочислової задачі ускладнюється.

4.3 Метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування

Метод Гоморі є одним із методів **відтинання**. Суть методів відтинання полягає в тому, що розв'язується задача лінійного програмування без врахування цілочислової умови. Якщо розв'язок виявиться цілочисловим, то вихідна задача розв'язана. Якщо розв'язок – нецілочисловий, то до обмежень вихідної задачі додають додаткове лінійне обмеження і знову шукається розв'язок задачі за нових умов. Це нове обмеження задовольняє цілочислові розв'язки вихідної задачі, але не задовольняє отриманий нецілочисловий оптимальний розв'язок. Тому таке додаткове обмеження називається **правильним обмеженням** або **відтинанням**. Нові відтинання додають до обмежень вихідної задачі аж доки на деякому кроці не буде отримано цілочислового розв'язку.

Розглянемо правила побудови **нерівності Гоморі**. **Цілою частиною числа** a називають найбільше ціле число, що менше або дорівнює йому (позначають $[a]$):

$$\left[\frac{16}{5}\right]=3; \qquad [4]=4; \qquad [-5.1]=-6$$

Дробовою частиною числа a називають різницю між числом a та його цілою частиною (позначають $(f(a))$):

$$f(a)=a-[a].$$

Наприклад:

$$f\left(\frac{16}{5}\right)=\frac{16}{5}-3=\frac{1}{5};$$

$$f(4)=4-4=0;$$

$$f(-5.1)=-5.1-(-6)=0.9.$$

Очевидно,

$$0\leq f(a)\prec 1, \tag{4.9}$$

причому $f(a)=0$ тоді й тільки тоді, коли a ціле число. У теорії чисел для дробової частини числа виводять такі дві властивості:

$$f(a+b)\leq f(a)+f(b), \tag{4.10}$$

$$f(na)\leq nf(a),\ n\geq 0 \text{ – ціле число.} \tag{4.11}$$

Ці властивості легко перевірити, наприклад:

$$f(-2,4+7,4)=f(5)=0;\ f(-2,4)+f(7.4)=0,6+0,4=1;\rightarrow 0\leq 1.$$

Будь-який допустимий розв'язок канонічної задачі (4.1) – (4.3) лінійного програмування можна записати в такому вигляді

$$x_i + \sum_{k=m+1}^{n} \left(-A_{ik}\right) \cdot x_k = B_i, \quad (x_j \geq 0, j = \overline{1,n}). \tag{4.12}$$

Цей розв'язок може бути ще й базисним, зокрема за умови

$$x_j = 0, \quad j = \overline{m+1,n}. \tag{4.13}$$

Для співвідношення (4.12) на основі властивості (4.10) функції f можемо записати

$$f\left(x_i\right) + \sum_{k=m+1}^{n} f\left(\left(-A_{ik}\right) \cdot x_k\right) \geq f\left(B_i\right). \tag{4.14}$$

Припустимо, що (4.12) – цілочисловий допустимий розв'язок, тобто всі x_j – цілі невід'ємні числа $(j = \overline{1,n})$. Тоді $f(x_i) = 0$, крім того на основі властивості (4.11) матимемо

$$f\left(\left(-A_{ik}\right) \cdot x_k\right) \leq x_k \cdot f\left(\left(-A_{ik}\right)\right), \tag{4.15}$$

і нерівність (4.14) приймає вигляд

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k \cdot f\left(-A_{ik}\right) \geq f\left(B_i\right). \tag{4.16}$$

Нерівність (4.16) називається **правильним обмеженням** або **обмеженням (нерівністю) Гоморі**.

При розв'язанні цілочислової задачі нерівність Гоморі використовується в еквівалентній формі

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k \cdot f\left(-A_{ik}\right) - x_{n+1} = f\left(B_i\right), \quad x_{n+1} \geq 0. \tag{4.17}$$

Правильне обмеження задовольняє будь-яку цілочислову точку області допустимих значень. В той же час це обмеження не задовольняє допустимий базисний розв'язок (в тому числі і оптимальний), який не є цілочисловим. Дійсно, нехай (4.12) – базисний допустимий нецілочисловий розв'язок. Тоді права частина нерівності (4.16) $f(B_i) \succ 0$, а з іншого боку з урахуванням (4.13) ліва частина нерівності дорівнює нулю. В результаті виходить, що нуль менший додатного числа, тобто нерівність не справджується. Отже, доручення до вихідних обмежень (4.2) правильного обмеження означає відтинання від області допустимих значень деякої її частини, яка містить оптимальний нецілочисловий розв'язок задачі (4.1) – (4.3) (він же базисний допустимий) і не містить жодного цілочислового допустимого розв'язку. В цьому і полягає основна ідея методів відтинання.

Розглянемо приклади складання нерівності Гоморі.

Приклад 1. Для рівності

$$x_3 = \frac{13}{3} - \frac{5}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_4$$

матимемо

$$f\left(\frac{5}{3}\right)\cdot x_1 + f\left(\frac{1}{3}\right)\cdot x_4 \geq f\left(\frac{13}{3}\right)$$

або

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}, \rightarrow \qquad 2x_1 + x_4 \geq 1.$$

Приклад 2. Для рівності

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{8}x_6$$

матимемо

$$f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot x_3 + f\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot x_4 \geq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{8}x_4 \geq \frac{1}{2}, \rightarrow \quad 2x_3 + 7x_4 \geq 4.$$

Приклад 3. Для рівності

$$x_2 = \frac{15}{2} + 2x_3 - \frac{5}{4}x_4$$

матимемо

$$f(-2)x_3 + f\left(\frac{5}{4}\right)x_4 \geq f\left(\frac{15}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}, \rightarrow \quad x_4 \geq 2.$$

Приклад 4. Для рівності

$$x_1 = \frac{15}{6} + 14x_3 - 3x_5$$

матимемо

$$f(-14)x_3 + f(3)x_5 \geq f\left(\frac{15}{6}\right)$$

$$0 \geq \frac{1}{2}, \rightarrow \qquad \text{абсурдний результат.}$$

Якщо в процесі розв'язання цілочислової задачі на етапі складення нерівності Гоморі дістаємо абсурдний результат, як в прикладі 4, то це свідчить про **відсутність цілочислового розв'язку**. Для прикладу 4 абсурдний результат став наслідком того, що рівняння $x_1 = \frac{15}{6} + 14x_3 - 3x_5$ не має цілочислових розв'язків. Подібна ситуація виникає, коли в рівності (4.12) для нецілочислової базисної змінної всі коефіцієнти при вільних невідомих є цілими числами.

Алгоритм методу Гоморі можна описати за допомого трьох кроків, що повторюються.

Крок 1. Знаходимо розв'язок канонічної задачі лінійного програмування без умови цілочисловості. Якщо ця задача не має розв'язку, то і цілочислова задача також не має розв'язку.

Крок 2. Якщо знайдений на першому кроці оптимальний план виявився цілочисловим, то задачу розв'язано. У протилежному разі вибираємо базисну змінну з найбільшою дробовою частиною і за обмеженням (4.12), записаним для цієї змінної складаємо нерівність Гоморі (4.16). Якщо отриманий результат – абсурдний, то цілочислова задача розв'язку не має.

Крок 3. До обмежень задачі додаємо нерівність Гоморі в формі (4.17). Отримуємо розширену задачу і повертаємося до кроку 1.

Процес із зазначених трьох кроків повторюється аж поки не дістанемо цілочисловий розв'язок або виявимо, що задача не має розв'язку.

Звернемо увагу: в записаному алгоритмі не указано яким методом знаходити розв'язок канонічної задачі лінійного програмування на першому кроці. Цей розв'язок можна шукати симплекс-методом. Але при цьому прийдеться виконувати досить громіздкі обчислення. Більш ефективним є наступний підхід. При першому виконанні кроку 1 застосовуємо симплекс-метод або двоїстий симплекс-метод, а на всіх інших ітераціях – двоїстий симплекс-метод. Справа в тому, що після додавання до системи обмежень нерівності Гоморі, оптимальний план, який було знайдено, стає псевдопланом нової задачі, до того ж, як правило, недалеко розташованим за кількістю ітерацій від оптимального плану. Тобто, застосування двоїстого симплекс-методу порівняно з симплекс-методом, дає в такій ситуації виграш не тільки в знаходженні початкового плану задачі, але й в кількості кроків при переході від початкового плану до оптимального.

Зауваження. Перехід до канонічної форми в повністю цілочисловій задачі лінійного програмування, що записана в стандартній формі з обмеженнями – нерівностями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \qquad (4.18)$$

взагалі-то не приводить до повністю цілочислової задачі в канонічній формі, оскільки в перетворених обмеженнях (4.18)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i$$

додаткові змінні не підпорядковуються умові цілочисловості. Однак, якщо всі коефіцієнти a_{ij}, b_i в (4.18) – цілі числа, то умову цілочисловості можна розповсюдити і на x_{n+i}. Повністю цілочислову задачу в канонічній формі можна отримати також, якщо в (4.18) a_{ij}, b_i – раціональні числа. Для цього потрібно помножити (4.18) на загальне кратне знаменників коефіцієнтів a_{ij}, b_i (тобто, перейти до цілих коефіцієнтів в (4.18) і тільки після цього вводити додаткові змінні x_{n+i}.

Приклад 5. Знайти методом Гоморі розв'язок задачі

$$z = -2x_1 + 4x_2 \to max \qquad (a)$$

за умови

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ 19x_1 - 8x_2 \le 57, \end{cases} \qquad (b)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \text{ і цілі числа.} \qquad (c)$$

Розв'язання. Перетворимо нерівності системи обмежень в строгі рівності введенням додаткових невідомих x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 6, \\ 19x_1 - 8x_2 + x_5 = 57, \end{cases} \qquad (d)$$

$$x_1, ..., x_5 \ge 0, \qquad (e)$$

$$x_1, ..., x_5 - \text{цілі.} \qquad (f)$$

Всі коефіцієнти a_{ij}, b_i в (b) – цілі числа, тому умову цілочисловості розповсюджено на додаткові невідомі x_3, x_4, x_5. Оскільки вихідна задача двовимірна, ми можемо дати її геометричну інтерпретацію.

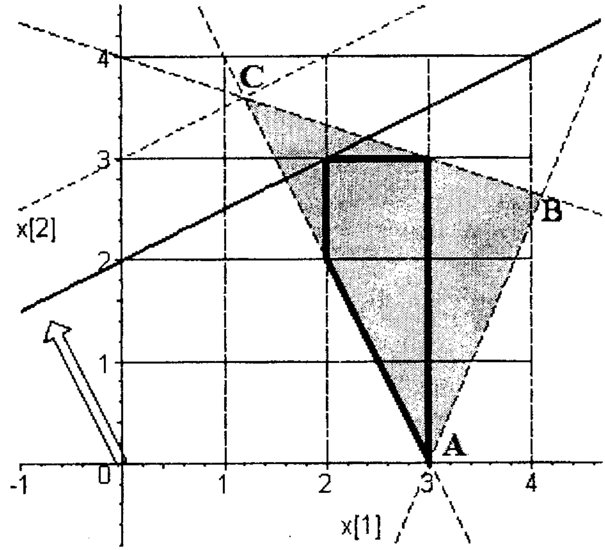


Рисунок 4.4 – Областю допустимих значень нецілочислової задачі (a) – (c), є трикутник ABC, межа області допустимих значень цілочислової задачі (a) – (c) показана жирної лінією

Областю допустимих значень нецілочислової задачі є трикутник ABC. Рівняння кожної сторони трикутника наведено в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Сторона трикутника ABC	Відповідне рівняння прямої	Змінна, яка дорівнює нулю в будь-якій точці прямої
AC	$x_1 + 3 \cdot x_2 = 12$	x_3
BC	$2 \cdot x_1 + x_2 = 6$	x_4
AB	$19 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 = 57$	x_5

В останньому стовпці таблиці указано додаткову змінну, яку вводили у відповідну нерівність при переході до канонічної форми вихідної задачі. Із графічного методу очевидно, що оптимальний план нецілочислової задачі відповідає т. C, яка є перетином прямих AC та BC. Оскільки, згідно з таблицею 4.1, вздовж прямої AC змінна $x_3 = 0$, а вздовж прямої $BC - x_4 = 0$, вибираючи за вільні змінні x_3, x_4, дістанемо опорний початковий розв'язок, який є оптимальним для нецілочислової задачі. Дійсно, знайдемо за допомогою Maple загальний розв'язок системи (d):

```
> z:=-2*x[1]-4*x[2]:
```

```
Sys:={x[1]+3*x[2]+x[3]=12,
2*x[1]+x[2]-x[4]=6,
19*x[1]-8*x[2]+x[5]=57}:
Sols_0:=solve(Sys, {x[k]$k=1..5} minus{x[3], x[4]});
```

$$Sols\_0 := \{x_5 = 63 - 13\,x_4 - 7\,x_3,\ x_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_3,\ x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3\}\ .$$

Знайдемо значення базисних змінних в базисному розв'язку, для чого підставимо в загальний розв'язок нульові значення вільних невідомих $x_3,\ \ x_4$

```
> subs(x[3]=0, x[4]=0, Sols_0);
```

$$\{x_5 = 63,\ x_1 = \frac{6}{5},\ x_2 = \frac{18}{5}\}\ .$$

Серед базисних змінних відсутні від'ємні, отже, маємо початковий опорний план. Перевіримо його на оптимальність

```
> 'z'=subs(Sols_0, z);
```

$$z = -\frac{84}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{6}{5}x_3\ .$$

Перед вільними змінними стоять коефіцієнти зі знаком "-", отже при збільшенні цих змінних цільова функція буде зменшуватися, а це означає, що знайдений опорний план – оптимальний, як ми і передбачали. В знайденому плані компоненти x_1 та x_2 мають нецілочислові значення. При цьому дробові частини у них рівні. Складаємо додаткове обмеження на основі рівності для змінної x_2. Ця рівність є третім елементом множини `Sols_0`

```
> Sols_0[3];
```

$$x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3\ .$$

Складемо правильне обмеження на основі цієї рівності

$$f\left(\frac{2}{5}\right)x_3 + f\left(\frac{1}{5}\right)x_4 \ge f\left(\frac{18}{5}\right)$$

$$\frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \ge \frac{3}{5}.$$

Зауваження. Обчислити дробову частину числа в Maple можна за допомогою простої процедури:

```
> my_frac:=(x::numeric)->x-floor(x);
```

$$my\_frac := x::numeric \rightarrow x - \mathrm{floor}(x)$$

```
> my_frac(18/5);
```

$$\frac{3}{5}\ .$$

Помножимо обидві частини нерівності на 5 та перетворимо її на рівність, ввівши додаткову змінну x_6 : $2x_3 + x_4 - x_6 = 3$. Додаємо це обмеження до вихідної системи (*d*)

$$\begin{cases} x_1 + & 3x_2 + & x_3 = & 12, \\ 2x_1 + & x_2 - & x_4 = & 6, \\ 19x_1 - & 8x_2 + & x_5 = & 57, \\ 2x_3 + & x_4 - & x_6 = & 3, \end{cases} \qquad x_1,\dots,x_6 \ge 0 \text{ і цілі}, \quad (d1)$$

і розв'язуємо задачу двоїстим симплекс-методом. В Maple додати рівність до системи рівнянь можна так

> Sys1:=Sys union {2*x[3]+x[4]-x[6]=3};

$$Sys1 := \{x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, 2x_1 + x_2 - x_4 = 6, 19x_1 - 8x_2 + x_5 = 57, 2x_3 + x_4 - x_6 = 3\}$$

Залишаючи ті ж самі вільні невідомі x_3, x_4, знаходимо загальний розв'язок, значення базисних невідомих та вираз цільової функції через вільні невідомі

> Sols_1:=solve(Sys1, {x[k]$k=1..6}minus{x[3], x[4]});

$$Sols\_1 := \{x_5 = 63 - 13x_4 - 7x_3, x_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_3, x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3, x_6 = 2x_3 + x_4 - 3\}$$

> subs(x[3]=0, x[4]=0, Sols_1);

$$\{x_5 = 63, x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{18}{5}, x_6 = -3\}$$

> 'z'=subs(Sols_1, z);

$$z = -\frac{84}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{6}{5}x_3 .$$

Маємо псевдоплан – виконуються умови оптимальності, але не виконується умова невід'ємності: $x_6 = -3 \prec 0$. Замість одної з вільних невідомих x_3, x_4 потрібно ввести в вільну змінну x_6 – так, щоб зберегти умову оптимальності. Виберемо за вільні x_3, x_6

> Sols_1:=solve(Sys1, {x[k]$k=1..6}minus{x[3], x[6]});

$$Sols\_1 := \{x_5 = 24 + 19x_3 - 13x_6, x_1 = -x_3 + 3 + \frac{3}{5}x_6, x_4 = -2x_3 + 3 + x_6, x_2 = 3 - \frac{1}{5}x_6\}$$

> subs(x[3]=0, x[6]=0, Sols_1);

$$\{x_2 = 3, x_5 = 24, x_1 = 3, x_4 = 3\}$$

> 'z'=subs(Sols_1, z);

$$z = 2x_3 - 18 - \frac{2}{5}x_6 .$$

Умова оптимальності не виконується, отже вибираємо за вільні x_4, x_6:

> **Sols_1:=solve(Sys1, {x[k]$k=1..6}minus{x[4], x[6]});**

$$Sols\_1 :=$$
$$\{x_5 = \frac{105}{2} - \frac{19}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_6, x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{10}x_6, x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6, x_2 = 3 - \frac{1}{5}x_6\}$$

> **subs(x[4]=0, x[6]=0, Sols_1);**

$$\{x_5 = \frac{105}{2}, x_1 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_2 = 3\}$$

> **'z'=subs(Sols_1, z);**

$$z = -15 - x_4 + \frac{3}{5}x_6 .$$

Виконуються і умова оптимальності і умова невід'ємності – маємо оптимальний план. Але цей план нецілочисловий. Згідно з кроком 2 алгоритму Гоморі вибираємо будь-яку з базисних змінних x_1, x_3, x_5, що мають дробові значення. Складемо нерівність Гоморі на основі обмеження для змінної x_3. Рівність для цієї змінної є третім елементом в множині Sols_1

> **Sols_1[3];**

$$x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 .$$

Складемо правильне обмеження на основі цієї рівності

$$f\left(\frac{1}{2}\right)x_4 + f\left(-\frac{1}{2}\right)x_6 \geq f\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6 \geq \frac{1}{2}.$$

Помножимо обидві частини нерівності на 2 та перетворимо її на рівність, ввівши додаткову змінну x_7 : $x_4 + x_6 - x_7 = 1$. Додаємо це обмеження до системи ($d1$)

> **Sys2:=Sys1union{x[4]+x[6]-x[7]=1};**

$$Sys2 := \{x_4 + x_6 - x_7 = 1, x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, 2x_1 + x_2 - x_4 = 6, 19x_1 - 8x_2 + x_5 = 57, 2x_3 + x_4 - x_5 = 3\} \qquad (d2)$$

$$x_1, \ldots, x_7 \geq 0 \text{ і цілі числа,}$$

знаходимо загальний розв'язок при тих самих вільних невідомих x_4, x_6

> **Sols_2:=solve(Sys2, {x[k]$k=1..7}minus{x[4], x[6]});**

$$Sols\_2 := \{x_5 = \frac{105}{2} - \frac{19}{2}x_4 - \frac{7}{2}x_6, x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{10}x_6, x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6, x_2 = 3 - \frac{1}{5}x_6, x_7 = x_4 + x_6 - 1\}$$

значення базисних змінних

> subs(x[4]=0, x[6]=0, Sols_2);

$$\{x_7 = -1, x_5 = \frac{105}{2}, x_1 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_2 = 3\}$$

та вираження цільової функції через вільні невідомі

> 'z'=subs(Sols_2, z);

$$z = -15 - x_4 + \frac{3}{5} x_6 .$$

Маємо псевдоплан. Застосовуємо двоїстий симплекс-метод: замість вільної змінної x_6 вводимо змінну x_7:

> Sols_2_1:=solve(Sys2, {x[k]$k=1..7}minus{x[4], x[7]});

$$Sols\_2\_1 := \{x_6 = -x_4 + x_7 + 1, x_5 = 49 - 6x_4 - \frac{7}{2}x_7, x_1 = \frac{8}{5} + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_7,$$

$$x_3 = 2 - x_4 + \frac{1}{2}x_7, x_2 = \frac{14}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_7\}$$

> subs(x[4]=0, x[7]=0, Sols_2_1);

$$\{x_1 = \frac{8}{5}, x_3 = 2, x_2 = \frac{14}{5}, x_6 = 1, x_5 = 49\},$$

> 'z'=subs(Sols_2_1, z);

$$z = -\frac{72}{5} - \frac{8}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_7 .$$

Отримали оптимальний план, який знову ж таки виявився нецілочисловим. Найбільша дробова частина у змінної x_2, отже будуємо нерівність Гоморі для відповідної рівності (в Maple для нумерації елементів множини з кінця потрібно використовувати індекс зі знаком "-", оскільки рівність для x_2 є передостанньою в множині **Sols_2_1**, їй відповідає індекс -2)

> Sols_2_1[-2];

$$x_3 = 2 - x_4 + \frac{1}{2}x_7 .$$

Складемо правильне обмеження на основі цієї рівності

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)x_4 + f\left(\frac{1}{5}\right)x_7 \geq f\left(\frac{14}{5}\right)$$

$$\frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_7 \geq \frac{4}{5}.$$

Помножимо обидві частини нерівності на 5 та перетворимо її на рівність, ввівши додаткову змінну x_8 : $4x_4 + x_7 - x_8 = 4$. Додаємо це обмеження до системи (*d2*)

> **Sys3:=Sys2 union {4*x[4]+x[7]-x[8]=4};**

$$Sys3 := \{x_4 + x_6 - x_7 = 1, x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, 2x_1 + x_2 - x_4 = 6, 19x_1 - 8x_2 + x_5 = 57, 2x_3 + x_4 - x_6 = 3, 4x_4 + x_7 - x_8 = 4\} \qquad (d3)$$

$$x_1, \ldots, x_8 \geq 0 \text{ і цілі числа.}$$

Знаходимо загальний розв'язок при тих самих вільних x_4, x_7 невідомих

> **Sols_3:=solve(Sys3, {x[k]$k=1..8}minus{x[4], x[7]});**

$$Sols\_3\_1 := \{x_3 = 1 + \frac{3}{4}x_7 - \frac{1}{4}x_8, x_4 = 1 - \frac{1}{4}x_7 + \frac{1}{4}x_8, x_2 = 3 + \frac{1}{20}x_8 - \frac{1}{4}x_7, x_5 = 43 - 2x_7 - \frac{3}{2}x_8, x_1 = 2 + \frac{1}{10}x_8, x_6 = \frac{5}{4}x_7 - \frac{1}{4}x_8\}$$

$$Sols\_3 := \{x_6 = -x_4 + x_7 + 1, x_5 = 49 - 6x_4 - \frac{7}{2}x_7, x_1 = \frac{8}{5} + \frac{2}{5}x_4 + \frac{1}{10}x_7, x_3 = 2 - x_4 + \frac{1}{2}x_7, x_2 = \frac{14}{5} + \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_7, x_8 = 4x_4 + x_7 - 4\}$$

значення базисних змінних

> **subs(x[4]=0, x[7]=0, Sols_3);**

$$\{x_5 = 49, x_1 = \frac{8}{5}, x_3 = 2, x_6 = 1, x_2 = \frac{14}{5}, x_8 = -4\}$$

та вираження цільової функції через вільні невідомі

> **'z'=subs(Sols_3, z);**

$$z = -\frac{72}{5} - \frac{8}{5}x_4 + \frac{3}{5}x_7$$

Маємо псевдоплан. Застосовуємо двоїстий симплекс-метод: замість вільної змінної x_4 вводимо змінну x_8:

> **Sols_3_1:=solve(Sys3, {x[k]$k=1..8}minus{x[7], x[8]});**

> **subs(x[7]=0, x[8]=0, Sols_3_1);**

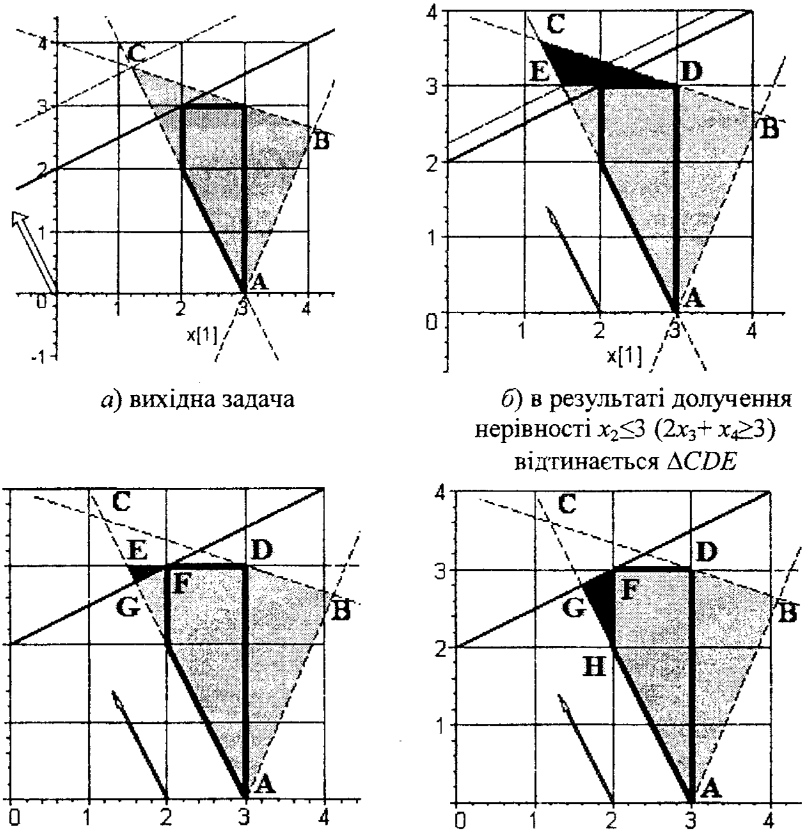
$$\{x_6 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, x_1 = 2, x_4 = 1, x_5 = 43\},$$

> **'z'=subs(Sols_3_1, z);**

$$z = -16 - \frac{2}{5}x_8 + x_7 .$$

Ми дістали оптимальний цілочисловий план, згідно з яким $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Цей результат випливає із даних, наведених на рис. 4.4.

Оскільки вихідна задача є двовимірною ми можемо дати геометричну інтерпретацію процесу її розв'язання за методом Гоморі.



а) вихідна задача

б) в результаті долучення нерівності $x_2 \le 3$ $(2x_3 + x_4 \ge 3)$ відтинається ΔCDE

в) в результаті долучення нерівності $x_4 + x_6 \ge 1$ $(2x_1 - 4x_2 \ge -8)$ відтинається ΔEFG

г) в результаті долучення нерівності $4x_4 + x_7 \ge 4(x_1 \ge 2)$ відтинається ΔFGH

Рисунок 4.5 — Зміна області допустимих значень нецілочислової задачі (а) – (с) (область, що затінена сірим кольором) внаслідок послідовного долучення до системи обмежень (b) нерівностей Гоморі (область, що відтинається нерівністю Гоморі затінена чорним кольором): межа області допустимих значень цілочислової задачі (а) – (с) показана жирної лінією

Перша нерівність Гоморі, яку ми долучили до системи обмежень (b) мала вигляд $2x_3 + x_4 \ge 3 \leftrightarrow 2x_2 + x_4 - x_6 = 3$. Розв'яжемо систему (*d1*) відносно x_1, x_2. Звісно, зробимо це за допомогою Maple

> Sols_1_1:=solve(Sys1, {x[k]$k=1..6}minus{x[1], x[2]});

$Sols\_1\_1 :=$
$$\{x_3 = -x_1 - 3\,x_2 + 12,\ x_6 = -5\,x_2 + 15,\ x_4 = 2\,x_1 + x_2 - 6,\ x_5 = -19\,x_1 + 8\,x_2 + 57\}$$

Підставимо вирази для x_3, x_4 в нерівність Гоморі $2x_3 + x_4 \geq 3$

```
> 2*rhs(Sols_1_1[2])+rhs(Sols_1_1[1])>=3;
```

$$0 \leq -13\,x_2 + 39 - x_1$$

або $x_2 \leq 3$. Як змінюється область допустимих значень нецілочислової задачі в результаті долучення цієї нерівності видно із порівняння рис. 4.5 *а* та рис. 4. 5 *б*. від ΔABC відітнули ΔCDE і отримали багатокутник *ABDE*.

Друга нерівність Гоморі, яку ми долучили до системи обмежень, мала вигляд $x_4 + x_6 \geq 1 \leftrightarrow x_4 + x_6 - x_7 = 1$. Розв'яжемо відповідну систему відносно змінних x_1, x_2, матимемо

```
> Sols_2_1:=solve(Sys2, {x[k]$k=1..7}minus{x[1], x[2]});
```

$$Sols\_2\_1 := \{x_3 = -x_1 - 3\,x_2 + 12,\ x_6 = -5\,x_2 + 15,\ x_4 = 2\,x_1 + x_2 - 6,$$
$$x_5 = -19\,x_1 + 8\,x_2 + 57,\ x_7 = 2\,x_1 - 4\,x_2 + 8\}$$

Підставимо вирази для x_4, x_6 в нерівність Гоморі $x_4 + x_6 \geq 1$

```
> 1*rhs(Sols_2_1[1])+rhs(Sols_2_1[3])>=1;
```

$$0 \leq x_1 - 2\,x_2 + 5$$

або $12x_1 - 4x_2 \geq -8$. Звернемо увагу, що в даному випадку опорна лінія співпадає з межею *FG* багатокутника допустимих значень *ABDFG* (рис. 4.5, *в*), яка визначається рівнянням прямої $2x_1 - 4x_2 \geq -8$. Тобто, в цьому випадку оптимальному плану нецілочислової задачі відповідає будь-яка точка відрізка *FG*. Причому точка *F*(2; 3) є цілочисловою, точкою. Але, застосовуючи двоїстий симплекс-метод, ми вибрали із двох можливих варіантів перехід до т. $G\left(\frac{8}{5};\frac{14}{5}\right)$, а не до т. *F*(2; 3). Саме тому ми вимушені були зробити ще одну ітерацію алгоритму Гоморі. Перехід до т. $G\left(\frac{8}{5};\frac{14}{5}\right)$ відбувся внаслідок того, що змінну x_7 ми ввели у вільні замість змінної x_6. Якби x_7 ввели замість змінної x_4 , то одержали б оптимальний план цілочислової задачі, що відповідає т. *F*(2; 3).

Третя нерівність Гоморі, яку ми долучили до системи обмежень мала вигляд $4x_4 + x_7 \geq 4 \leftrightarrow 4x_4 + x_7 - x_8 = 4$. Розв'яжемо відповідну систему відносно x_1, x_2

```
> Sols_3_2:=solve(Sys3, {x[k]$k=1..8}minus{x[1], x[2]});
```

$$Sols\_3\_2 := \{x_3 = -x_1 - 3\,x_2 + 12,\ x_6 = -5\,x_2 + 15,\ x_4 = 2\,x_1 + x_2 - 6,\ x_8 = 10\,x_1 - 20,$$
$$x_5 = -19\,x_1 + 8\,x_2 + 57,\ x_7 = 2\,x_1 - 4\,x_2 + 8\}$$

та запишемо цю нерівність через x_1, x_2, дістанемо

> **4*rhs(Sols_3_2[1])+rhs(Sols_3_2[-2])>=4;**

$$0 \le -23\,x_1 - 4\,x_2 + 101$$

або $x_1 \ge 2$. В результаті долучення до системи обмежень останньої нерівності оптимальному плану відповідає цілочислова т. $F(2;\ 3)$ на рис. 4.5 *г*.

Розглянемо випадок, коли область допустимих значень не містить жодної цілочислової точки.

Приклад 6. Знайти методом Гоморі розв'язок задачі

$$z = -2x_1 + 4x_2 \to \max \qquad (g)$$

за умови

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 3x_2 \le \ \ 12, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \ge \ \ 6, \\ 2x_1 - \ \ 3x_2 \le \ -6, \end{cases} \qquad (h)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \text{ і цілі числа.} \qquad (i)$$

Розв'язання. Перетворимо нерівності системи обмежень в строгі рівності введенням додаткових невідомих x_3, x_4, x_5

$$\begin{cases} x_1 + \ \ 3x_2 + \ \ x_3 = \ \ 12, \\ 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_4 = \ \ 6, \\ 2x_1 - \ \ 3x_2 + \ \ x_5 = \ -6, \end{cases} \qquad (j)$$

$$x_1, \ldots, x_5 \ge 0, \qquad (k)$$

$$x_1, \ldots, x_5 \text{ - цілі.} \qquad (l)$$

Оскільки вихідна задача двовимірна, ми можемо дати її геометричну інтерпретацію.

Як видно із рис. 4.6, область допустимих значень не містить жодної цілочислової точки. Рівняння кожної сторони трикутника наведено в таблиці 4.2.

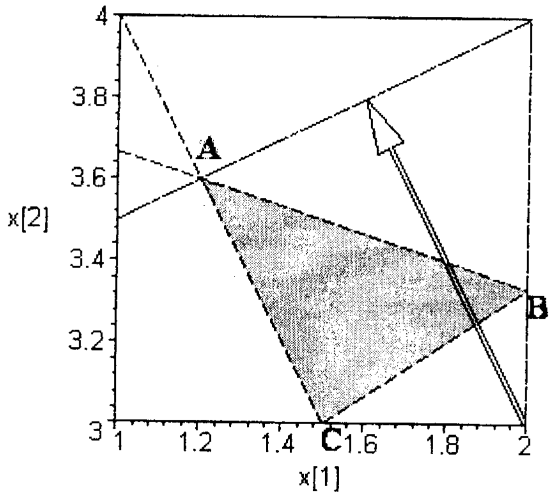


Рисунок 4.6 – Графічне зображення задачі (*g*) – (*i*): ΔABC – область допустимих значень

Таблиця 4.2

Сторона трикутника *ABC*	Відповідне рівняння прямої	Змінна, яка дорівнює нулю в будь-якій точці прямої
AB	$x_1 + 3 \cdot x_2 = 12$	x_3
AC	$2 \cdot x_1 + x_2 = 6$	x_4
BC	$2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = -6$	x_5

В останньому стовпці таблиці указано додаткову змінну, яку вводили у відповідну нерівність при переході до канонічної форми вихідної задачі. Із графічного методу очевидно, що оптимальному плану нецілочислової задачі відповідає т. *A*, яка є перетином прямих *AB* та *AC*. Оскільки згідно з таблицею 4.2, вздовж прямої *AB* змінна $x_3 = 0$, а вздовж прямої $AC - x_4 = 0$, вибираючи за вільні змінні x_3, x_4, дістанемо опорний початковий розв'язок, який є оптимальним для нецілочислової задачі. Дійсно, знайдемо за допомогою Maple загальний розв'язок системи (*j*):

> z:=-2*x[1]+4*x[2]:
Sys:={x[1]+3*x[2]+x[3]=12,
2*x[1]+x[2]-x[4]=6,
2*x[1]-3*x[2]+x[5]=-6}:
Sols_0:=solve(Sys, {x[k]$k=1..5}minus{x[3], x[4]});

$$Sols\_0 := \{x_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_3, x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3, x_5 = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_3\}.$$

Знайдемо значення базисних змінних в базисному розв'язку, для чого підставимо в загальний розв'язок нульові значення вільних невідомих x_3, x_4

$$\{x_5=\frac{12}{5}, x_1=\frac{6}{5}, x_2=\frac{18}{5}\}.$$

Серед базисних змінних відсутні від'ємні, отже, маємо початковий опорний план. Перевіримо його на оптимальність

> 'z'=subs(Sols_0, z);

$$z=12-2\,x_4-2\,x_3.$$

Перед вільними змінними стоять коефіцієнти зі знаком "-", отже, при збільшенні цих змінних цільова функція буде зменшуватися, а це означає, що знайдений опорний план – оптимальний. В знайденому плані всі базисні змінні x_1, x_2, x_5 мають нецілочислові значення. При цьому дробова частина найбільша для змінної x_2. Складаємо додаткове обмеження на основі рівності для цієї змінної:

> Sols_0[3];

$$x_5=\frac{12}{5}-\frac{9}{5}x_4-\frac{8}{5}x_3.$$

Складемо правильне обмеження на основі цієї рівності

$$f\left(\frac{2}{5}\right)x_3+f\left(\frac{1}{5}\right)x_4\geq f\left(\frac{18}{5}\right),$$

$$\frac{2}{5}x_3+\frac{1}{5}x_4\geq\frac{3}{5}.$$

Помножимо обидві частини нерівності на 5 та перетворимо її на рівність, ввівши додаткову змінну $x_6: 2x_3+x_4-x_6=3$. Додаємо це обмеження до вихідної системи (j)

$$\begin{cases} x_1+\ 3x_2+\ x_3=\ 12,\\ 2x_1+\ x_2-\ x_4=\ 6,\\ 2x_1-\ 3x_2+\ x_5=\ -6,\\ 2x_3+\ x_4-\ x_6=\ 3,\end{cases}\qquad x_1,\dots,x_6\geq 0 \text{ і цілі числа}\qquad (j1)$$

і розв'язуємо задачу двоїстим симплекс-методом:

> Sys1:=Sys union {2*x[3]+x[4]-x[6]=3};

$$Sys1:=\{x_1+3\,x_2+x_3=12, 2\,x_1+x_2-x_4=6, 2\,x_3+x_4-x_6=3, 2\,x_1-3\,x_2+x_5=-6\},$$

> subs(x[3]=0, x[4]=0, Sols_0);

$$\{x_2=\frac{18}{5}, x_1=\frac{6}{5}, x_5=\frac{12}{5}\},$$

>'z'=subs(Sols_0, z);

$$z = 12 - 2x_4 - 2x_3$$

Маємо псевдоплан – виконуються умови оптимальності, але не виконуються умови невід'ємності $(x_6 = -3 \prec 0)$. Вводимо в вільні змінну x_6 замість x_3, матимемо

> Sols_1_1:=solve(Sys1, {x[k]$k=1..6}minus{x[4], x[6]});

$$Sols\_1\_1 := \{x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{10}x_6, x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6, x_2 = 3 - \frac{1}{5}x_6, x_5 = -x_4 - \frac{4}{5}x_6\}$$

,

> subs(x[4]=0,x[6]=0,Sols_1_1);

$$\{x_5 = 0, x_1 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_2 = 3\},$$

> 'z'=subs(Sols_1_1, z);

$$z = 9 - x_4 - x_6.$$

Отримали оптимальний, але нецілочисловий план. Складаємо правильне обмеження для змінної x_1

> Sols_1_1[1];

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{10}x_6.$$

Складемо правильне обмеження на основі цієї рівності

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)x_4 + f\left(-\frac{1}{10}\right)x_6 \ge f\left(\frac{3}{2}\right),$$

$$\frac{1}{2}x_4 + \frac{9}{10}x_6 \ge \frac{1}{2}.$$

Помножимо обидві частини нерівності на 10 та перетворимо її на рівність, ввівши додаткову змінну $x_7 : 5x_4 + 9x_6 - x_7 = 5$. Додаємо це обмеження до вихідної системи (*j1*)

> Sys2:=Sys1 union {5*x[4]+9*x[6]-x[7]=5};

$$Sys2 := \{x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, 2x_1 + x_2 - x_4 = 6, 2x_3 + x_4 - x_6 = 3, 2x_1 - 3x_2 + x_5 = -6, 5x_4 + 9x_6 - x_7 = 5\}$$

> Sols_2:=solve(Sys2,{x[k]$k=1..7}minus{x[4], x[6]});

$$Sols\_2 := \{x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{10}x_6, x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6, x_2 = 3 - \frac{1}{5}x_6, x_7 = 5x_4 + 9x_6 - 5, x_5 = -x_4 - \frac{4}{5}x_6\}$$

> subs(x[4]=0, x[6]=0, Sols_2);

$$\{x_2 = 3, x_1 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{3}{2}, x_7 = -5, x_5 = 0\}$$

> **'z'=subs(Sols_2, z);**

$$z = 9 - x_4 - x_6 .$$

Маємо псевдоплан – виконуються умови оптимальності, але не виконуються умови невід'ємності $(x_7 = -5 \prec 0)$. Оскільки в даній задачі тільки дві вільні змінні, то перехід від поточного псевдоплану до оптимального можливий одним із двох варіантів – вибором як вільні x_4, x_7 або x_6, x_7. Обидва варіанти приводять до недопустимих розв'язків. Дійсно

> **Sols_2_1:=solve(Sys2, {x[k]$k=1..7}minus{x[4], x[7]}):**

> **subs(x[4]=0, x[7]=0, Sols_2_1);**

$$\{x_1 = \frac{14}{9}, x_5 = \frac{-4}{9}, x_3 = \frac{16}{9}, x_6 = \frac{5}{9}, x_2 = \frac{26}{9}\}$$

> **Sols_2_2:=solve(Sys2, {x[k]$k=1..7}minus{x[6], x[7]}):**

> **subs(x[6]=0, x[7]=0, Sols_2_1);**

$$\{x_2 = \frac{26}{9} + \frac{1}{9}x_4, 0 = -\frac{5}{9}x_4 + \frac{5}{9}, x_1 = \frac{14}{9} + \frac{4}{9}x_4, x_5 = -\frac{4}{9} - \frac{5}{9}x_4, x_3 = \frac{16}{9} - \frac{7}{9}x_4\} .$$

Це означає, що в результаті долучення до вихідної системи обмежень (j) нерівностей Гоморі ми врешті решт отримали задачу з пустою областю допустимих значень. Отже, вихідна задача не має цілочислового розв'язку.

Зауваження. Складанням екстракоротких Maple програм, що вміщаються в один рядок, можна суттєво спростити розв'язання задачі. Так, в прикладі 6 знаходиться загальний розв'язок

> **Sols_0:=solve(Sys, {x[k]$k=1..5}minus{x[3], x[4]});**

$$Sols\_0 := \{x_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_3, x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3, x_5 = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_3\} .$$

Maple повертає результат роботи команди **solve** у вигляді множини елементів. Елементами є вирази базисних змінних через вільні. Порядок, в якому розташовані елементи множини Maple вибирає за своїми правилами і цей порядок змінюється випадковим чином. Нам же зручно аналізувати цей розв'язок, коли рівності розташовані в порядку зростання індексу базисної змінної. Такого сортування можна досягнути за допомого такого програмного коду

> **Sols_0:=sort([op(Sols_0)],(x,y)–evalb(op(lhs(x))<op(lhs(y))));**

$$Sols\_0 := \left[x_1 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_3, x_2 = \frac{18}{5} - \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}x_3, x_5 = \frac{12}{5} - \frac{9}{5}x_4 - \frac{8}{5}x_3\right] .$$

В результаті ми отримали загальний розв'язок у вигляді елементів списку (а не множини!), розташованих в порядку зростання номера індексу базисної змінної. Maple самостійно не змінює заданий порядок елементів списку, отже, значення базисних змінних в опорному розв'язку розташовані в тому ж самому порядку. Знайти дробові частини базисних змінних та розташувати їх в порядку зростання дробової частини допоможе такий програмний код

> **Sols_0:=subs(x[3]=0, x[4]=0, Sols_0);**

$$Sols\_0 := \left[x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{18}{5}, x_5 = \frac{12}{5}\right]$$

> **Sort(map(z->f(lhs(z))=my_frac(rhs(z)), Sols_0),(x,y)->evald(rhs(x)<rhs(y)));**

$$\mathrm{Sort}\left(\left[f(x_1) = \frac{1}{5}, f(x_2) = \frac{3}{5}, f(x_5) = \frac{2}{5}\right], (x, y) \to \mathrm{evald}(\mathrm{rhs}(x) < \mathrm{rhs}(y))\right)$$

Наведені в зауваженні приклади демонструють як потужну інтелектуальність Maple при розв'язуванні широкого кола питань, що виходять за рамки чисто математичних задач, так і те, що ефект від використання цієї системи зростає з ростом досвідченості користувача.

Приклад 7. Знайти методом Гоморі розв'язок задачі

$$z = 10x_1 + x_2 \to \max \qquad (m)$$

за умови

$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 2, \qquad (n)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ та цілі.} \qquad (o)$$

Розв'язання. Вибираючи за вільні змінні x_2, x_3, дістанемо опорний початковий розв'язок, який є оптимальним для нецілочислової задачі. Упевнимося в цьому за допомогою Maple:

> **z:=10*x[1]+x[2]:**
Sys:={3*x[1]+6*x[2]+6*x[3]=2}:
Sols_0:=solve(Sys,{x[k]$k=1..3}minus{x[2], x[3]});

$$Sols\_0 := \{x_1 = -2\,x_2 - 2\,x_3 + \frac{2}{3}\}$$

> **subs(x[2]=0, x[3]=0, Sols_0);**

$$\{x_1 = \frac{2}{3}\}$$

> **'z'=subs(Sols_0,z);**

$$z = -19\,x_2 - 20\,x_3 + \frac{20}{3}.$$

Отже, знайдений опорний план оптимальний, але нецілочисловий. Оскільки базисна змінна єдина $-x_1$, то нерівність Гоморі складатимемо для неї на основі виразу із розв'язку `Sols_0`:

> **my_frac:=(x::numeric)->x-floor(x):**
my_frac(2)*x[2]+my_frac(2)*x[3]>=my_frac(2/3);

$$\frac{2}{3} \le 0 .$$

На етапі складання нерівності Гоморі ми дістали неможливий результат: додатне число – менше нуля. Це свідчить про те, що задача не має цілочислових розв'язків.

Якщо умова цілочисловості накладається не на всі змінні задачі лінійного програмування, то така задача називається частково цілочисловою. Для розв'язання таких задач також використовується метод Гоморі. Але в цьому випадку правильне обмеження, залишаючись схожим на (4.16), складається за дещо складнішими правилами

$$\sum_{k=m+1}^{n} x_k \cdot \gamma_{ik} \ge f(B_i), \tag{4.19}$$

де γ_{ij} визначаються із таких співвідношень:

1) для x_j, які можуть приймати нецілочислові значення

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} -A_{ik} \text{ при } A_{ik} \le 0, \\ \dfrac{f(B_i)}{1 - f(B_i)} |A_{ik}| \text{ при } A_{ik} > 0; \end{cases} \tag{4.20}$$

2) для x_j, які можуть приймати тільки цілочислові значення

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} f(-A_{ik}) \text{ при } f(-A_{ik}) \le f(B_i), \\ \dfrac{f(B_i)}{1 - f(B_i)} (1 - f(-A_{ik})) \text{ при } f(-A_{ik}) > f(B_i). \end{cases} \tag{4.21}$$

Зауваження. Кількість ітерацій в методі Гоморі суттєво залежить від того, наскільки вдало сформовано правильне відтинання. В практичних обчисленнях збіжність цього методу досить повільна.

5 СТИСЛИЙ ОПИС ПАКЕТІВ РОЗШИРЕННЯ СИСТЕМИ MAPLE ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Система Maple має потужний набір інструментів для розв'язування задач оптимізації: пакет розширення **Simplex** для розв'язування задач лінійного програмування симплекс-методом та новий пакет **Optimization**, що надає можливість розв'язувати не тільки задачі лінійного, але й квадратичного та нелінійного програмування з підвищеним ступенем візуалізації.

Огляд засобів пакета лінійної оптимізації simplex

Команда, яка надає доступ до всіх команд пакета, має вигляд

with(simplex);

Після виконання указаної команди в оперативну пам'ять комп'ютера завантажуються усі процедури пакета. Для здійснення доступу тільки до однієї або декількох команд пакета можна скористатися тією самою командою з додатковими опціями

with(simplex, nam1, nam2,...);

де **nam1**,... – назви команд пакета:

basis, convexhull, cterm, define_zero, display,
dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio,
setup, standardize,

що викликають відповідні процедури, які надають можливість користувачеві поетапно розв'язувати задачу лінійного програмування за симплекс-методом [67].

Розглянемо найбільш важливі для розв'язування задачі лінійного програмування функції *maximize* і *minimize.*

Синтаксис звернення до указаних команд має доволі простий вигляд

maximize(*f, consts*), **minimize** (*f, consts*),

де

f – лінійний вираз, який описує цільову функцію задачі;

consts – множина або список лінійних обмежень задачі.

Процедури *maximize* та *minimize* повертають або множину рівностей, які описують оптимальний план

```
> with(simplex):
maximize(-x[1]+2*x[2]+3*x[3], {x[1]+2*x[2]-3*x[3]<=4,
5*x[1]-6*x[2]+7*x[3]<=8, 9*x[1]+10*x[3]<=11}, NONNEGATIVE);
```

$$\{x_3 = \frac{11}{10}, x_1 = 0, x_2 = \frac{73}{20}\},$$

```
> minimize(-x[1]+2*x[2]+3*x[3], {x[1]+2*x[2]-3*x[3]<=4,
```

5*x[1]-6*x[2]+7*x[3]<=8, 9*x[1]+10*x[3]<=11}, NONNEGATIVE);

$$\{x_1 = \frac{11}{9}, x_2 = 0, x_3 = 0\},$$

або порожню множину (рис. 5.1), якщо система обмежень *consts* є несумісною

> maximize(3*y[1]-y[2], {-y[1]-y[2]>=-1, y[1]+y[2]>=2}, NONNEGATIVE);

$$\{\ \}$$

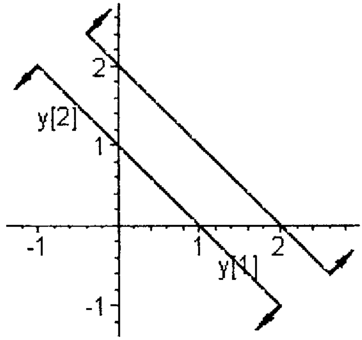


Рисунок 5.1 – Оптимальний план або порожня множина, або *NULL*, якщо цільова функція на допустимій множині необмежена

>maximize(47*y[1]+43*y[2], {-3*y[1]-y[2]<=-9, 17*y[1]-64*y[2]<=51, 6*y[1]+18*y[2]>=56}, NONNEGATIVE);

Звернемо увагу, що у випадку відсутності розв'язку задачі ЛП через необмеженість області допустимих значень (рис. 5.2) команда *maximize* повертає результат *NULL*, який не супроводжується жодним записом в області виведення результатів виконання команди на екрані монітора. Очевидно, якщо переформулювати указану задачу на знаходження найменшого значення, то розв'язок буде знайдено

> minimize(47*y[1]+43*y[2], {-3*y[1]-y[2]<=-9, 17*y[1]-64*y[2]<=51, 6*y[1]+18*y[2]>=56}, NONNEGATIVE);

$$\{y_1 = \frac{53}{24}, y_2 = \frac{19}{8}\}.$$

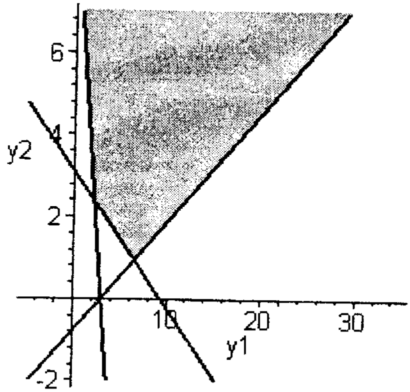


Рисунок 5.2 – Область допустимих значень

Оптимальний розв'язок може бути підставлений у цільову функцію для одержання її екстремального значення. Це можна зробити за допомогою команд **eval** або **subs**

> 'z'[min] = subs ({y[1]=53/24, y[2]=19/8}, 47*y[1]+43*y[2]);

$$z_{min} = \frac{2471}{12}.$$

Інші функції пакета ***simplex***

Функція *display(C)* виводить множина лінійних залежностей *C* в матричній формі:

> display([x[1]+3*x[2]<=12, -2*x[1]-x[2]<=-6, 19*x[1]-8*x[2]<=57]);

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 19 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 57 \end{bmatrix}$$

Ця функція може бути використана для наглядного переходу до двоїстої задачі.

Функція *dual(f,C,y)* повертає двоїсту задачу до заданої, де *f* – цільова функція; *C* – множина лінійних залежностей системи обмежень; *y* – позначення змінної двоїстої задачі

> dual((-4)*x[1]-2*x[2], [x[1]+3*x[2]<=12,
-2*x[1]-x[2]<=-6, 19*x[1]-8*x[2]<=57], y);

$$12\,y1 - 6\,y2 + 57\,y3,\ [-4 \le y1 - 2\,y2 + 19\,y3,\ -2 \le 3\,y1 - y2 - 8\,y3]$$

Для отримання більш наглядної форми запису отриманої задачі можна використати уже знайому нам команду display

> **display(%[2]);**

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -19 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Функція *feasible* перевіряє систему на сумісність (якщо одержано true, то система обмежень сумісна, якщо false – несумісна);

> **feasible({2*x+3*y<=4, 5*x+6*y=9}, NONNEGATIVE);**

$$true$$

> **feasible({-y[1]-y[2]>=-1, y[1]+y[2]>=2}, NONNEGATIVE);**

$$false$$

Останній приклад відповідає пустій множині допустимих значень невідомих, що зображена на рис. 5.1.

Новий пакет оптимізації Optimization

Команди пакета підключаються за допомогою стандартної команди:

with (Optimization);

Maximize, Minimize, LPSolve, LSSolve, QPSolve, NLPSolve, ImportMPC, Interactive.

Для розв'язання задач лінійного програмування призначено функцію

LPSolve(*obj, [constr,bd,opts*]),

де

obj – цільова функція;

constr – лінійні співвідношення системи обмежень;

bd – послідовність, що задає межі можливих значень однієї або кількох змінних;

opts – рівність, що задає одну із опцій команди LPSolve.

> **with (Optimization):**
LPSolve(-7*x+2*y, {4*x-12*y<=20, -x+3*y<=3},
x=-5..5, y=0..infinity, maximize);

$$[21., [x = -3., y = 0.]]\,.$$

Як уже зазначалось, новий пакет **Optimization** надає можливість розв'язувати не тільки задачі лінійного програмування, що продемонстровано вище, але й квадратичного та нелінійного програмування з підвищеним ступенем візуалізації.

Для розв'язання задач нелінійного програмування призначена функція **NLPSolve** *(obj, [constr,bd,opts*]):

> **with(Optimization):**
NLPSolve(x^3+2*x*y-2*y^2, x=-10..10, y=-10..10,
initialpoint={x=3, y=4}, maximize);

$$[1050., [x = 10., y = 5.]]\ .$$

Але для розв'язання задач квадратичного програмування рекомендується використовувати команду **QPSolve** (*obj, [constr,bd,opts]*):

> **QPSolve(2*x+5*y+3*x^2+3*x*y+2*y^2,**
{x-y>=2}, assume=nonnegative);

$$[16., [x = 2., y = 0.]]\ .$$

Розв'язати задачу цілочислового програмування можна, використавши функція **LPSolve** *(obj, [constr,bd,opts]*):

> **restart;**
with(Optimization):
z:=41*x[1]+33*x[2];

$$41\,x_1 + 33\,x_2$$

> **linear_constraints := [133835*x[1]-4529360*x[2] <= -561587,**
- 55167*x[1]-2182400*x[2] <= -1084571,
- 103761*x[1]-378664*x[2] <=- 515601,
- 917135*x[1]-340041*x[2] <= -2475628,
55775*x[1]+557469*x[2] <= 2655572,
0 <= x[1], 0 <=x[2]];

$$[133835\,x_1 - 4529360\,x_2 \le -561587,\ -55167\,x_1 - 2182400\,x_2 \le -1084571,\ -103761\,x_1 - 378664\,x_2 \le -515601,\ -917135\,x_1 - 340041\,x_2 \le -2475628,\ 55775\,x_1 + 557469\,x_2 \le 2655572,\ 0 \le x_1,\ 0 \le x_2]$$

LPSolve(-z, linear_constraints, integervariables = [(x[k] $ k=1..2)]);

$$[-1222, [x_1 = 29, x_2 = 1]]\ .$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич. И. Л. — М. : Высшая школа, 1993. — 336 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / Акулич И. Л. — М. : Высш. шк., 1986. — 319 с.
3. Аладьев В. З. Эффективная работа в Maple 6/7 / Аладьев. В. З. — М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. — 336 с.
4. Аронович А. Б. Сборник задач по исследованию операцій / Аронович А. Б., Афанасьев М. Ю., Суворов Б. П. — М. : Изд-воМГУ, 1997. — 256 с.
5. Афанасьев М. Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения : учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. П. Суворов. — М. : ИНФРА-М, 2003. — 444с. — (Серия "Высшая школа").
6. Ашманов С. А. Линейноепрограмирование / Ашманов С. А. — М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 340 с.
7. Банди Б. Основы линейного програмирования /Банди Б.; пер. с англ. — М. : Радио и связь, 1989. — 176 с.
8. Барвінський А. Ф. Математичне програмування: навчальний посібник / [А. Ф. Барвінський, І. Я. Олексів, З. І. Крупка та ін.]. — Львів : Національний університет «Львівська політехніка», «Інтелект-Захід», 2004. — 448 с.
9. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Финансы и статистика, 2006. — 432 с.
10. Бодров В. И. Математические методы принятия решений : учеб. пособие / Бодров В. И., Лазарева Т. Я., Мартемьянов Ю. Ф. — Тамбов : Изд-во Тамб. гос.тех. ун-та, 2004. — 124 с.
11. Большакова И. В. Линейное программирование : учебно-метод. пособие к контрольной работе для студентов економ. факультета / И. В. Большакова, М. В. Кураленко. — Мн. : БНТУ, 2004. —148 с.
12. Бугір М. К. Математика для економістів / Бугір М. К. — К. : ВЦ «Академія», 2003. — 520 с.
13. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель / Васильев А. Н. — М. : Издательский дом «Вильямс», 2003. — 353 с.
14. Васильев Ф. П. Линейное програмирование / Ф. П. Васильев, А. Ю. Иваницкий. — М. : Изд-во "Факториал" , 1998. — 176 с.
15. Вентцель Е. С. Исследование операцій: задачи, принципы, методологи / Вентцель Е. С. —2-е изд.,стер. — М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 208 с.
16. Вентцель Е. С. Исследование операций / Вентцель Е. С. — М. : Сов. радио. 1971. — 551 с.

17. Вильям Орвис. EXCEL для ученых, инженеров и студентов / Вильям Орвис. — К. : Юниор, 1999. — 528 с.

18. Виславский М. Н. Линейная алгебра и линейное программирование / Виславский М. Н. — Минск : Вышэйша школа, 1966.

19. Волков Ф. П. Исследование операцій : учеб. для вузов / Ф. П. Волков, Е. А. Загоруйко; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 436 с.

20. Волков Ю. І. Лінійна алгебра й аналітична геометрія з елементами програмування мовою Паскаль / Ю. І. Волков, Д. А. Найко. — К. : НМК ВО, 1990. — 144 с.

21. Галеев Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. — М. : Элиториал УРСС, 2000. — 320 с.

22. Гасс С. Линейное программирование / Гасс С. — М. : Физматиз, 1961. — 304 с.

23. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: навч. посібник / Гетманцев В. Д. — К. : Либідь, 2001.

24. Глебов Н. И. Методы оптимизации : учеб. пособие / Н. И. Глебов, Ю. А. Кочетов. — Новосибирск : Новосиб. Ун-т., 2000. — 105 с.

25. Говорухин В. Н. Компьютер в математических исследованиях: Maple, MATLAB, LaTeX. Учебный курс / В. Н. Говорухин, В. Г. Цибулина. — СПб. : Питер, 2001. — 624 с.

26. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I. / П. Е. Данко, А. Г. Попов. — М. : Высш. шк., 1974. — 416 с.

27. Дьяконов В. П. Maple 7 : учебный курс / Дьяконов В. П. — СПб. : Питер, 2002. — 672 с.

28. Дьяконов В. П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании / Дьяконов В. П. — М. : СОЛОН-Пресс, 2005. — 720 с.

29. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : навчальний посібник / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. — Черкаси : Брама-Україна, 2005. — 608 с.

30. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Зайченко Ю. П. — К., 2001. — 688 с.

31. Зуховицкий С. И. Линейное и выпуклое программирование / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. — М. : Наука, 1967. — 460 с.

32. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман, Б. А. Путко, И. М. Тришин; [под. ред. проф. Н. Ш. Кремера]. — М. : ЮНИТИ, 2002. — 407 с.

33. Калиткин Н. Н. Численные методы / Калиткин Н. Н. — М. : Наука, 1978. — 512 с.

34. Калихман И. Л. Сборник задач по матем. прогр / Калихман И. Л. — 2-е изд, перероб. и допол. — М. : "Высш. школа", 1975. — 270 с.

35. Карманов В. Г. Математическое программирование / Карманов В. Г. — М. : Физматмет, 2000. — 264 с.

36. Карманов В. Г. Математичне програмування / Карманов В. Г. — М. : Наука, 1986. — 288 с.

37. Карманов В. Г. Математическое программирование : учеб. пособ. / Карманов В. Г. — 5- е изд., стереотип — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264 с.

38. Карпелевич Ф. И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования / Ф. И. Карпелевич, Л. Е. Садовский. — М. : Физматгиз, 1963. — 276 с.

39. Кігель В. Г. Елементи лінійного, цілочисельного лінійного і нелінійного програмування : навч. пос. / Кігель В. Г. — К. : ІСДО, 1995.

40. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация (Целочисленное програмирование) / Ковалев М. М. — 2-е изд., стареотипное. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 192 с.

41. Конюховский П. В. Математические методы исследования операций в экономике / Конюховский П. В. — Спб. : Питер, 2000. — 208 с.

42. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики : учеб. пособие для вузов / Коршунов Ю. М. — М. : Энергоатомиздат, 1987. — 496 с.

43. Косоруков О. А. Исследование операцій : ученик / О. А. Косоруков , А. В. Мищенко.— М. : Издательство "Экрамен", 2003. — 448 с.

44. Костевич Л. С. Математическое программирование : информ. технологии оптимальных решений : учеб. пособие / Костевич Л. С. — Мн. : Новое знание, 2003. — 424 с.

45. Кудрін Б. Г. Математичні методи в задачах автомобільного транспорту : навчальний посібник / Кудрін Б. Г., Ребедайло В. М., Педорченко Л. І. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 62 с.

46. Кузнецов А. В. Руководство к решению задач по математическому програмированию / Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Р. С. — Мн. : Вишэйша школа, 1978. — 256 с.

47. Кулян В. Р. Математическое программирование (с элементами информационных технологий) : учеб. пособие для студ. немат. спец. вузов / Кулян В. Р., Юнькова Е. А., Жильцов А. Б. — К. : МАУП, 2000. — 124 с.

48. Лунгу К. Н. Линейное програмирование. Руководство к решению задач / Лунгу К. Н. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 128 с.

49. Лутманов С. В. Курс лекций по методам оптимизации / Лутманов С. В. — Ижевск : НИЦ "Регулярная' и хаотическая динамика", 2001. — 368 с.

50. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования / Лю Б.; пер. с англ. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 416 с.

51. Макеева В. К. Математичне програмирование / Н. П. Матряшин, В. К. Макеева. — 2-е изд, перероб. и допол. — Харьков : Издательское обьединение "Вища школа", 1978. — 160 с.

52. Манзон Б. М. Maple V Power Edition / Манзон Б. М. — М. : Информационно-издательский дом «Филин», 1998. — 240 с.

53. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / Матросов А. В. — СПб. : БХВ-Петербург, 2001. — 528 с.

54. Мину М. Математическое програмирование. Теория и алгоритмы / Мину М.; пер. с фр. и предисловие А. И. Штерна. — М. : Наука., гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 488 с.

55. Минюк С. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / Минюк С. А., Ровба Е. А., Кузьмич К. К. — Мн. : Тетра Системс, 2002. — 432 с.

56. Михалевич В. М. Maple. Комп'ютерна підтримка курсу вищої математики в технічному вузі. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія : навчальний посібник. Ч. І. / Михалевич В. М. — Вінниця : ВНТУ, 2004. — 111 с.

57. Михалевич В. М. Математичне програмування разом з Maple. Ч. І. Методи розв'язування задач лінійного програмування : навчальний посібник / Михалевич В. М. — Вінниця : ВНТУ, 2008. — 158 с.

58. Михалевич В. М. Excel-VBA-Maple програма генерації задач з дисциплін математичного спрямування / Михалевич В. М. // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2005. — № 2. — с. 74-83.

59. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. — К. : Либідь, 1996. — 440 с.

60. Палий И. А. Линейное программирование : чебное пособие / Палий И. А. — М. : Эксмо, 2008. — 256с. — (Техническое образование).

61. Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 2-е изд., исправл. — М. : Высш. шк., 2005. — 544 с.

62. Роїк О. М. Математичні методи дослідження операцій. Теорія та практика лінійного програмування : навчальний посібник. Ч. 1. / Роїк О. М. , Месюра В. І., Ракитянська Г. Б. — Вінниця : ВДТУ, 2002. — 103 с.

63. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 4. Методы оптимизации. Уравнения в частных производных. Интегральные уравнения : учеб. пособ. / Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др.; [под ред. А. В. Ефимова]. — М. : Наука, 1990. — 304 с.

64. Смородинский С. С. Оптимизация решений на основе методов и моделей мат. программирования : учеб. пособие по курсу «Систем. анализ и исслед. операций» для студ. спец. «Автоматизир. системы обраб. информ.» дневн. и дистанц. форм обуч. / С. С. Смородинский, Н. В. Батин. — Мн. : БГУИР, 2003. — 136 с.

65. Справочник по математике для экономистов / [Барбаумов В. Е., Ермаков В. И., Кривенцова В. Н. и др.]; под ред. В. И. Ермакова. — М. : Высш. шк., 1987. — 336 с.

66. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 — теорія і методика навчання інформатики / Триус Юрій Васильович; Черкаський національний ун-т ім. Богдана Хмельницького. — Черкаси, 2005. — 649 с.

67. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці : підручник для студентів вузів / Харк. нац. аграр. ун-т ім. В. В. Докучаєва / Ульянченко О. В. — Харків : Гриф, 2002. — 580 с.

68. Хом'юк І. В. Математичне програмування. Частина II : навчальний посібник / Хом'юк І. В., Карпенко В. Л., Хом'юк В. В. — Вінниця : ВНТУ, 2005. — 123 с.

69. Шикин Е. В. Исследование операций / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. — М. : ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006. — 280 с.

70. Экономико-математические методы. Математические методы и модели в экономике / сост. Аксенова Р. Н. — Владивосток : ДДВГАЄУ, 2001.

71. Юдин Д. Б. Вычеслительные методы теории принятия решений / Юдин Д. Б. -- М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 320 с. (Теория и методы системного анализа)

72. Юдин Д. Б. Линейное программирование. Теория, методы и приложения / Д. Б. Юдин, Е. К. Гольштейн. — М. : Наука, 1969. — 424 с.

73. Maple 9 / Advanced Programming Guide / M. B. Monagan, K. O. Geddes, K. M. Heal, G. Labahn, S. M. Vorkoetter, J. McCarron, P. DeMarco. Canada. Maplesoft, division of Waterloo Maple Inc. 2003. — 444 p.

Навчальне видання

Михалевич Володимир Маркусович
Тютюнник Оксана Іванівна

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В MAPLE

ЧАСТИНА II

ДВОЇСТІ ТА ЦІЛОЧИСЛОВІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук
Оригінал-макет підготовлено О. Тютюнник

Підписано до друку 17.07.2013 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк. 4,8.
Наклад 75 прим. Зам. № 2013-032.

Вінницький національний технічний університет,
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Тел. (0432) 59-87-38, (0432) 59-87-38.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.